در تدوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر نیز استفاده شده و ندرتاً برخی از سؤالات که از نظر نگارنده غیرقابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱ـ حرف آخر (مهندس منتظری)

۲ـ دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس مهربان)

۳ـ دیفرانسیل خیلی سبز (دکتر اسلامی)

رسم نمودار بدون استفاده از مشتق

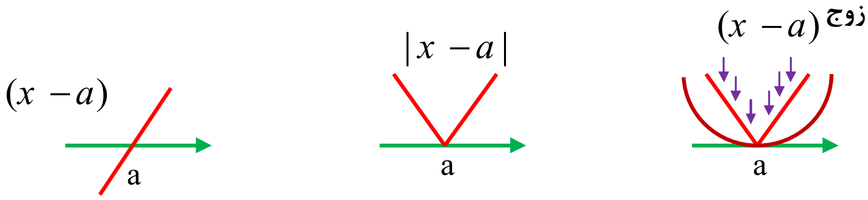
رسم منحنی بدون استفاده از مشتق از مباحثی است که متأسفانه در کتاب درسی مطرح نشده است اما شما با استفاده از این روش می توانید بسیاری از تست های کنکور را در کوتاه ترین زمان حل کنید.
این روش را می توانید در بررسی مشتق پذیری، بدست آوردن تعداد نقاط بحرانی، نقاط بازگشتی، نقاط زاویه دار (گوشه دار)، اکسترمم های نسبی و نقاط عطف به کار ببرید پس این مطالب را به دقت مطالعه کنید.

نمودار بدون استفاده از مشتق :

عامل های ساده: اگر در تابعی عامل ضربی $(x-a)$ وجود داشت نمودار تابع در $x=a$ به ساده ترین شکل ممکن محور x ها را قطع می کند یعنی به یکی از حالت های زیر:

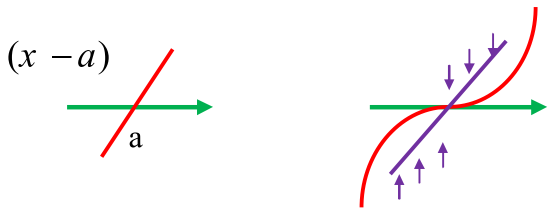
نمودار $(x-a)^{\text{زوج}}$:

وقتی می خواهید یک نمودار را به توان برسانید مانند این می ماند که به نمودار از بالا یا پایین فشار وارد میشود و نمودار را خم می کند به نمودار $(x-a)^۲$ توجه کنید.



نمودار $(x-a)^{\text{فرد}}$:

در این حالت توان بزرگتر یا مساوی ۳ است.



پس می توان به صورت زیر نتیجه گرفت:

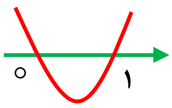
نمودار تابع در اطراف ریشهٔ مرتبهٔ یک به حالت های زیر است:

نمودار تابع در اطراف ریشهٔ با مرتبهٔ زوج به حالت های زیر است:

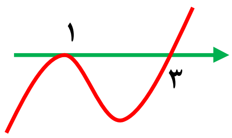
نمودار تابع در اطراف ریشهٔ مرتبهٔ فرد بزرگتر از یک (۱) به حالت زیر است:

سؤال۱: نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱) $y = x(x-1)$

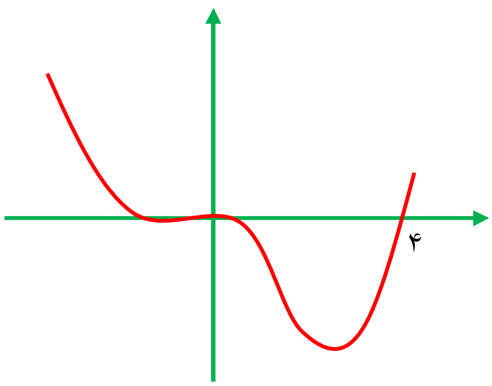


۲) $y = (x-1)^2(x-3)$

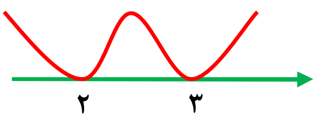


۲) $y = x^4 - 4x^3$ (کتاب درسی)

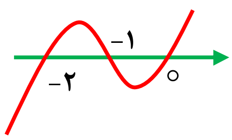
$y = x^3(x-4)$



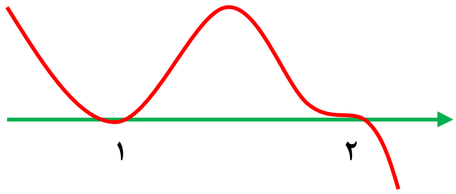
۳) $(x-2)^2(x-3)^2$



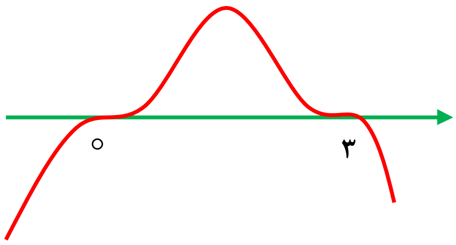
۴) $x(x+1)(x+2)$



۵) $y=-(x-۱)^{۲}(x-۲)^{۳}$



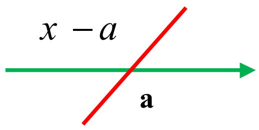
۶) $y=-x^{۳}(x-۳)^{۳}$

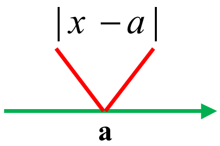


ریشه های قدرمطلق :

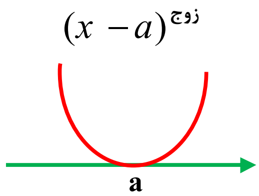
در تابع $y=|(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{n}|$ به $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ ریشهٔ قدرمطلقی می گوییم.

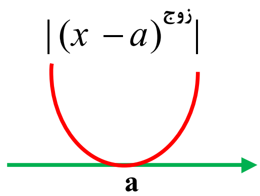
$n=۱\rightarrow y=|\mathrm{x}-\mathrm{a}|\Rightarrow$ نمودار



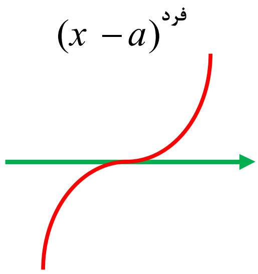


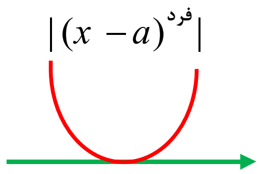
$n=۲,۴,۶,...\rightarrow y=|(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\text{زوج}}|$

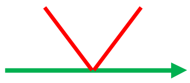
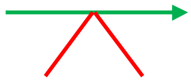


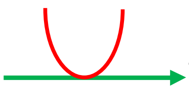
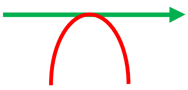


$n=۳,۵,۷,...\rightarrow y=|(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\text{فرد}}|$





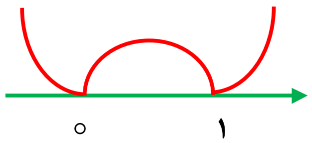
نتیجه ۱: در تابع $\mathrm{f(x)}=|(x-a)|$ به $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ می گوییم ریشه قدرمطلقی و نمودار در اطراف شامل قدر مطلق به صورت  یا  است.

نتیجه ۲: در تابع $\mathrm{f(x)}=|(x-a)^{n}|$ با شرط $\mathrm{n}\geq ۲$ می گوییم ریشهٔ مکرر قدرمطلقی و نمودار این تابع در اطراف $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ به شکل سهمی است یعنی نمودار توابع شامل قدرمطلق مکرر به صورت  یا  است.

سؤال۲: نمودارهای زیر را رسم کنید.

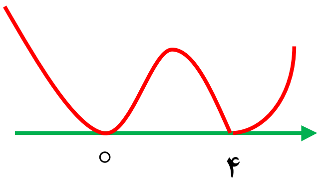
۱) $y=|x^2-x|$

$y=|x(x-1)|$



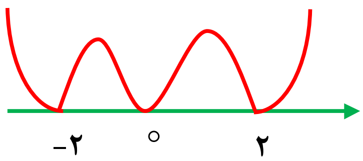
۲) $y=|x^3-4x^2|$

$y=|x^2(x-4)|=x^2|x-4|$



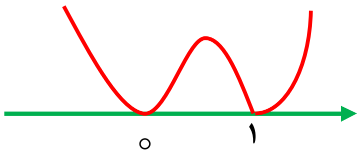
۳) $y=|x^4-4x^2|$

$y=|x^2(x^2-4)|=x^2|(x-2)(x+2)|$

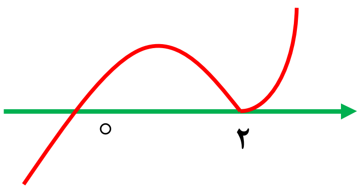


۴) $y=|x^4-x^3|$

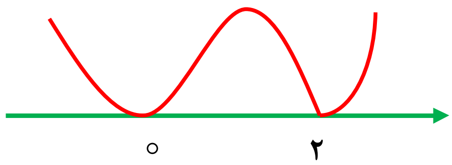
$y=|x^3(x-1)|$



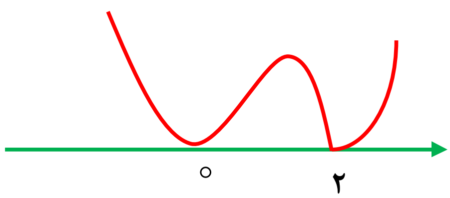
۵) $y=x|x-2|$



۶) $y=x^2|x-2|$

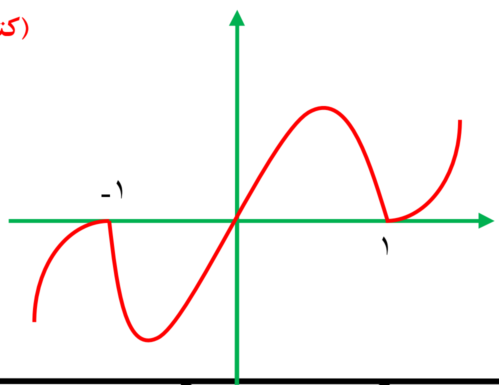


۷) $y=x^2|x-2|$

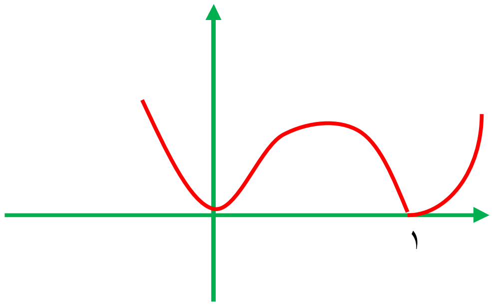


۸) $y=x|x^2-1|$ (کتاب درسی)

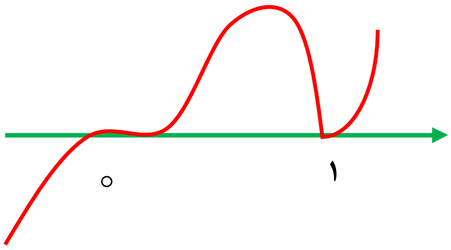
تابع فرد است پس $x=0$ عطف دارد.



۹) $y=x^{2}|x-1|$ (کتاب درسی)

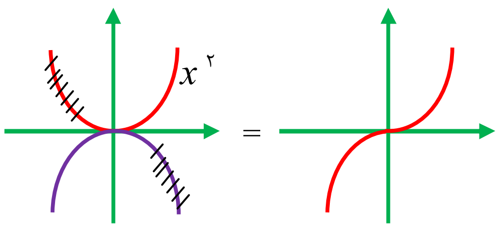


۱۰) $y=x^{3}|x-1|$



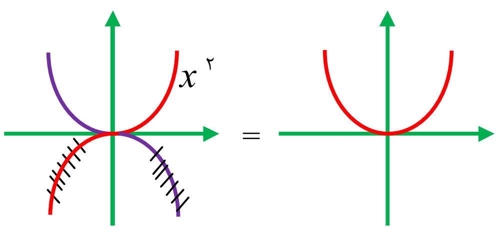
سؤال۳: نمودار تابع $y=x|x|$ را رسم کنید.

$$y=x|x|=\begin{cases} x^{2} & x\geq 0 \\ -x^{2} & x\leq 0 \end{cases}$$



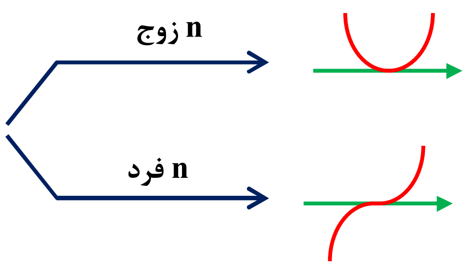
سؤال۴: نمودار تابع $y=x^{2}|x|$ را رسم کنید.

$$y=x^{2}|x|=\begin{cases} x^{3} & x\geq 0 \\ -x^{3} & x\leq 0 \end{cases}$$



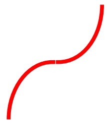
نتیجه مهم: نمودار تابع $(x-a)^{n}|x-a|$ به صورت زیر است:

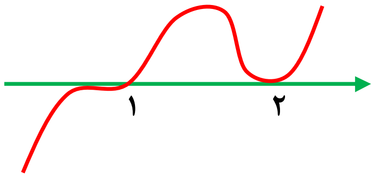
$$y=(x-a)^{n}|x-a|$$



سؤال۵: نمودارهای زیر را رسم کنید.

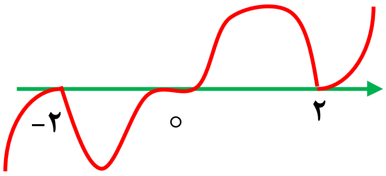
$1)\ y=(x-1)^3\,|x-1|\,(x-2)^4$

توجه کنید با توجه به نتیجه بالا نمودار در اطراف $x=1$ به صورت  **است.**



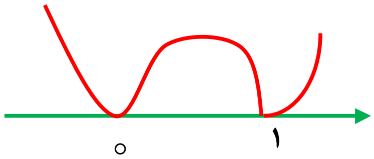
$2)\ y=x\,|x^4-4x^2|$

$y=x\,|x^2(x^2-4)|=x^3\,|(x-2)(x+2)|$



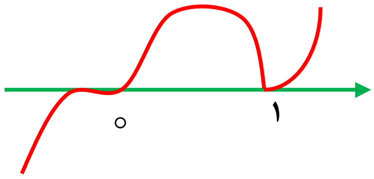
$3)\ y=x^2\,|x^2-x|$

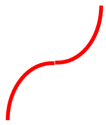
$y=x^2\,|x(x-1)|=x^2\,|x|.|x-1|$



$4)\ y=x\,|x^2-x|$

$y=x\,|x(x-1)|=x\,|x|.|x-1|$

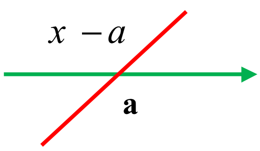


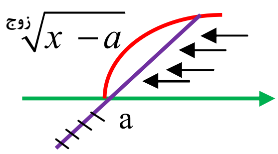
توجه کنید نمودار در اطراف $x=0$ به صورت  **است.**

ریشه رادیکالی :

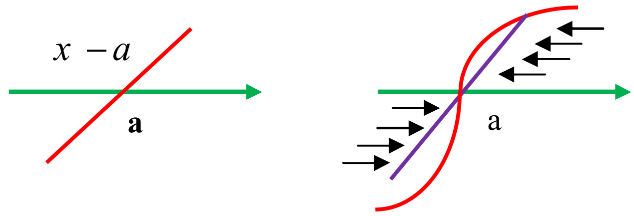
وقتی می خواهید از یک نمودار رادیکال بگیرید مانند این است که به نمودار از چپ به راست فشار وارد می شود و نمودار را خم می کند.

$\sqrt[\text{زوج}]{x-a}$: توجه کنید که قسمت های زیر محور x ها زیر رادیکال با فرجه زوج قرار نمی گیرند.

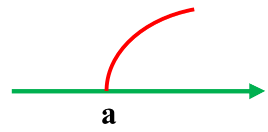




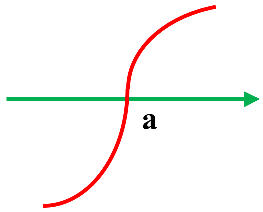
$\sqrt[\text{فرد}]{x-a}$:



$\sqrt[\text{زوج}]{x-a}$



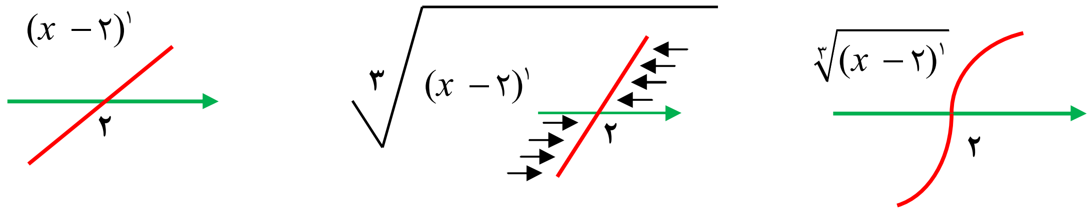
$\sqrt[\text{فرد}]{x-a}$



تقابل توان و فرجه :

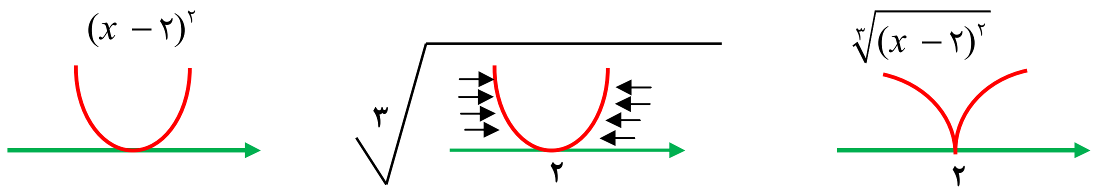
سؤال۶: نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱) $\sqrt[۳]{x-۲}$



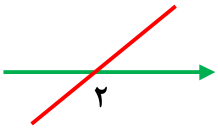
توضیح: در عبارت $\sqrt[۳]{(x-۲)^۱}$ فرجه (۳) قوی تر از توان (۱) هست. پس فرجه از دو طرف به نمودار x-۲ فشار می آورد (زور فرجه بیشتر است)

۲) $\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}$

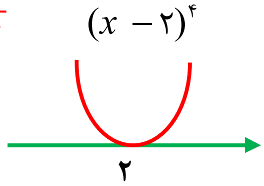


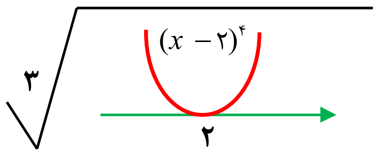
توضیح: در عبارت $\sqrt[3]{(x-2)^2}$ فرجه (۳) قوی تر از توان (۲) هست. پس فرجه از دو طرف به نمودار $(x-2)^2$ فشار می آورد (زور فرجه بیشتر است.)

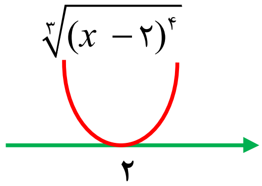
۳) $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$



۴) $\sqrt[3]{(x-2)^4}$



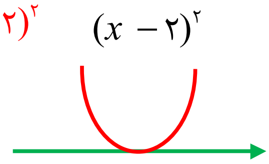


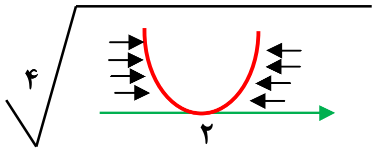


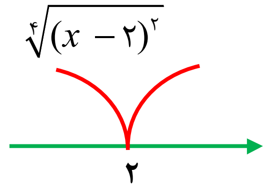
توضیح: در عبارت $\sqrt[3]{(x-2)^4}$ چون فرجه ضعیف تر از توان است پس نمی تواند به $(x-2)^5$ فشار بیاورد و این یعنی نمودار همان گونه باقی می ماند.

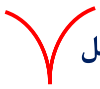
سؤال۷: نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱) $\sqrt[4]{(x-2)^2}$

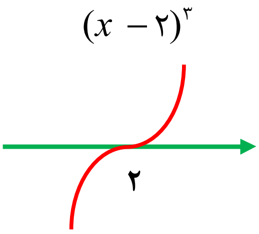


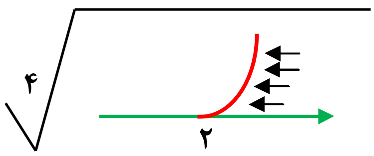


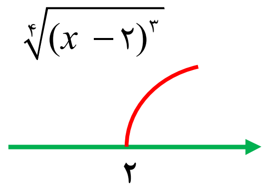


توضیح: در عبارت $\sqrt[4]{(x-2)^2}$ فرجه قوی تر از توان هست. پس به نمودار $(x-2)^2$ فشار می آورد تا به شکل  شود.

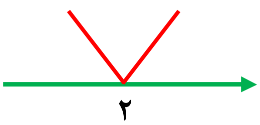
۲) $\sqrt[4]{(x-2)^3}$







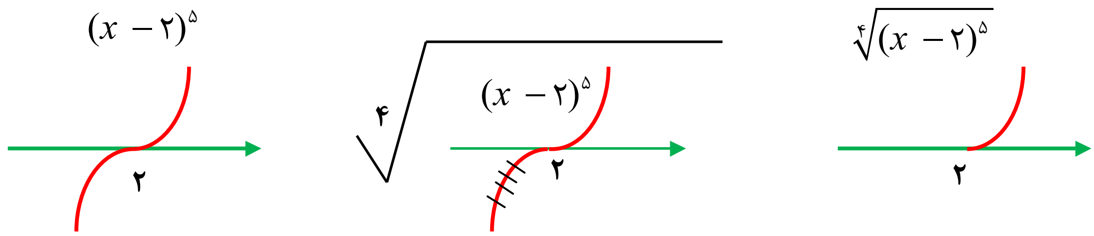
توضیح: در عبارت $\sqrt[4]{(x-2)^3}$ فرجه (۴) ابتدا قسمت هایی از نمودار $(x-2)^3$ که زیر محور x ها قرار دارد را پاک می کند و بعد به باقیمانده نمودار فشار وارد می کند تا به شکل ایستاده ناقص دربیاید.



۳) $\sqrt[۴]{(x-۲)^۴}$

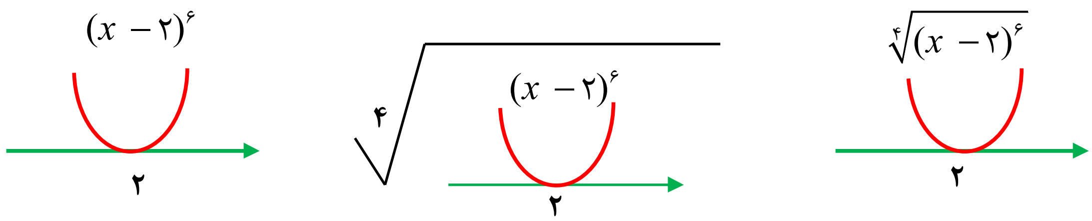
$$=\sqrt[۴]{(x-۲)^۴}=|x-۲|$$

۴) $\sqrt[۴]{(x-۲)^۵}$



توضیح: در عبارت $\sqrt[۴]{(x-۲)^۵}$ ابتدا فرجه (۴) قسمت هایی از نمودار $(x-۲)^۵$ که زیرمحور x ها قرار دارد را پاک می کند اما به دلیل اینکه فرجه از توان ضعیف تر است نمی تواند به باقیمانده $(x-۲)^۵$ فشار بیاورد در نتیجه نمودار به حالت خوابیده باقی می ماند.

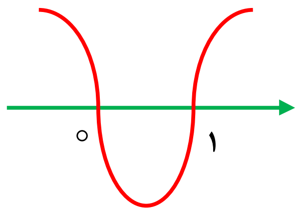
۵) $\sqrt[۴]{(x-۲)^۶}$



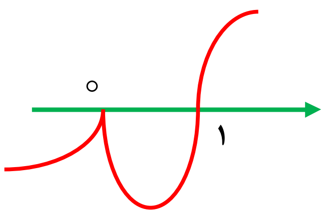
توضیح: در عبارت $\sqrt[۴]{(x-۲)^۶}$ فرجه (۴) نمی تواند به نمودار $(x-۲)^۶$ فشار وارد کند در نتیجه نمودار به صورت سهمی باقی می ماند.

📖 سؤال۸: نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱) $y=\sqrt[۳]{x(x-۱)}$

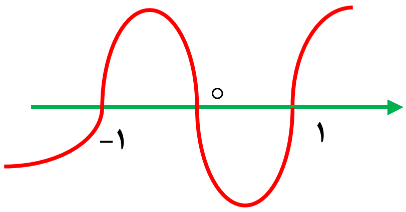


۲) $y=\sqrt[۳]{x^۲(x-۱)}$

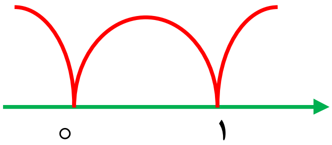


۳) $y=\sqrt[۳]{x^{۳}-x}$

$y=\sqrt[۳]{x(x^{۲}-۱)}=\sqrt[۳]{x(x-۱)(x+۱)}$

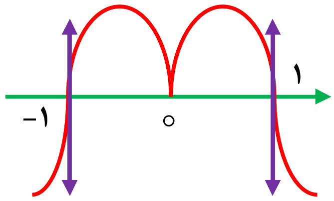


۴) $y=\sqrt[۵]{x^{۲}(x-۱)^{۲}}$



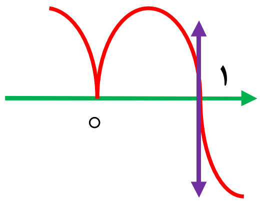
۵) $y=\sqrt[۵]{x^{۲}-x^{۴}}$

$y=\sqrt[۵]{x^{۲}(۱-x^{۲})}=\sqrt[۵]{x^{۲}(۱-x)(۱+x)}$

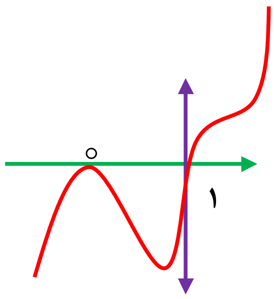


۶) $y=\sqrt[۵]{x^{۴}-x^{۵}}$

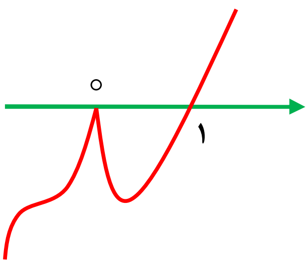
$y=\sqrt[۵]{x^{۴}(۱-x)}$



۷) $x^{۲}\sqrt[۳]{x-۱}$

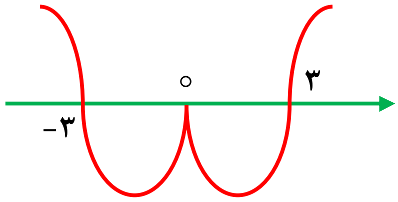


۸) $y=(x-۱)\sqrt[۳]{x^{۲}}$



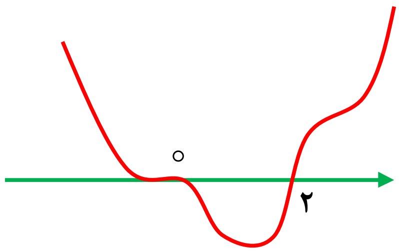
۹) $y=\sqrt[۳]{x^{۴}-۹x^{۲}}$

$y=\sqrt[۳]{x^{۲}(x^{۲}-۹)}=\sqrt[۳]{x^{۲}(x-۳)(x+۳)}$



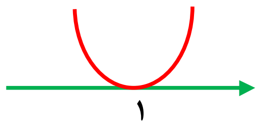
۱۰) $y=|x|\sqrt[۳]{x^{۲}-۲x}$

$y=|x|\sqrt[۳]{x(x-۲)}$



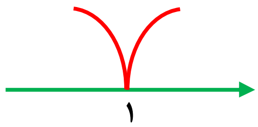
۱۱) $y=(x-۱)\sqrt[۳]{(x-۱)}$

$y=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}(x-۱)}=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۴}}$



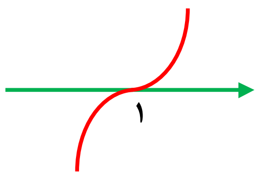
۱۲) $y=\sqrt[۳]{x-۱}\times\sqrt[۵]{(x-۱)^{۳}}$

$y=\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۵}}\times\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۹}}=\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۱۴}}$



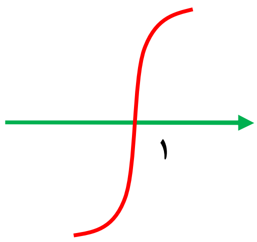
۱۳) $y=(x-۱)\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}$

$y=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}(x-۱)^{۲}}=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۵}}$



۱۴) $y=\sqrt[۵]{x-۱}.\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}$

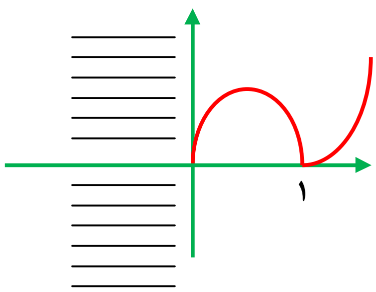
$y=\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۳}}.\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۱۰}}=\sqrt[۱۵]{(x-۱)^{۱۳}}$



توجه: برای رسم توابعی که رادیکال با فرجه زوج دارن ابتدا دامنه تابع را مشخص کنید و سپس تابع را رسم کنید.

۱) $y=\sqrt{x}\,|x-۱|$

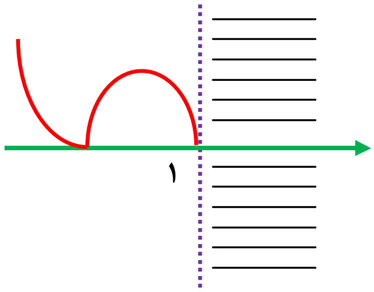
$D_f: x\geq ۰$



۲) $y=\sqrt{x^{۲}-x^{۳}}$

$y=\sqrt{x^{۲}(۱-x)}=|x|\sqrt{۱-x}$

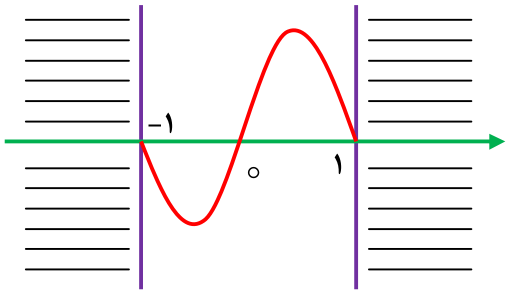
$\Rightarrow D_f: ۱-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۱$



۳) $y=x\sqrt{۱-x^{۲}}$

$D_f: ۱-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$

$\Rightarrow y=x\sqrt{۱-x}.\sqrt{۱+x}$

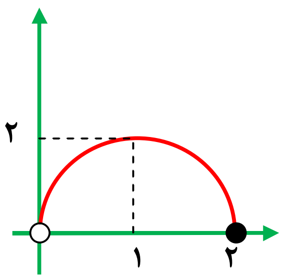


۴) $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\dfrac{۲-x}{x}}$

$۰<x\leq ۲ \Rightarrow \dfrac{۲-x}{x}\geq ۰$

$\Rightarrow f(x)=۲x\sqrt{\dfrac{۲-x}{x}}=۲\sqrt{x}.\sqrt{۲-x}$

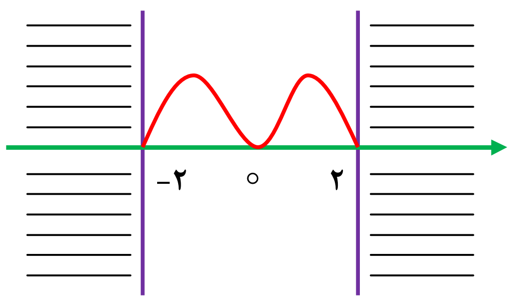
برد تابع: $[۰,۲]$



۵) $y=x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}$

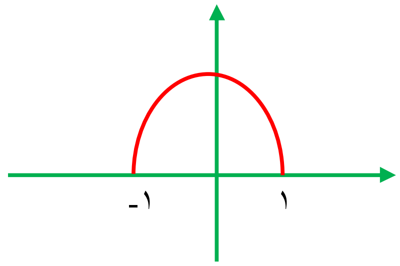
$D_f: ۴-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$\Rightarrow y=x^{۲}\sqrt{۲-x}.\sqrt{۲+x}$



۶) $y=\sqrt{1-x^2}$ (کتاب درسی)

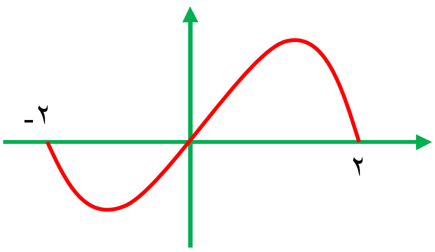
$D_f: 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow y=\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}$



۷) $y=x\sqrt{4-x^2}$ (کتاب درسی)

$D_f: 4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$

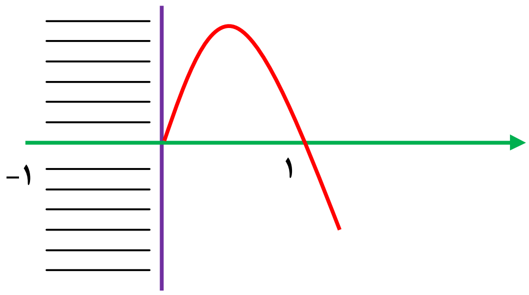
$\Rightarrow y=x\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}$



۸) $y=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{2}}$

$y=x^{\frac{1}{2}}(1-x^2)=\sqrt{x}(1-x^2)=\sqrt{x}(1-x)(1+x)$

$D_f: x\geq 0$

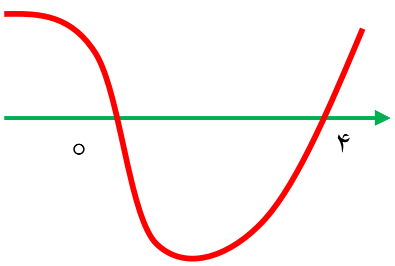


سؤال۹: نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در مبدأ چگونه است؟ (سراسری خارج ۹۱)

۱) مینیمم نسبی　　۲) ماکسیمم نسبی　　۳) عطف　　۴) عادی

پاسخ گزینه ۳ـ $y=x^{\frac{3}{5}}(x-4)=\sqrt[5]{x^3}(x-4)$

$x=0$ عطف قائم تابع است.

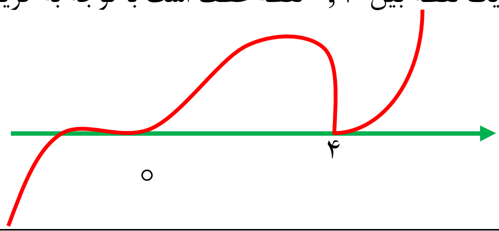


سؤال۱۰: مجموعه طول های نقاط عطف منحنی به معادله $|x^2-4x|$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$　　۲) $\left\{0,\frac{4}{3},4\right\}$　　۳) $\left\{\frac{4}{3},4\right\}$　　۴) $\left\{0,\frac{4}{3}\right\}$

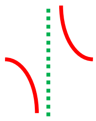
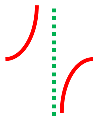
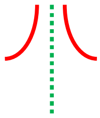
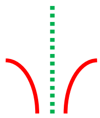
پاسخ گزینه۴ ـ $y=x|x(x-4)|=x|x|.|x-4|$

با توجه به شکل واضح است که $x=0$ و یک نقطه بین $0,4$ نقطه عطف است با توجه به گزینه ها طول این نقطه $\frac{4}{3}$ است.



توابع کسری :

۱. ابتدا ریشه های صورت و مرتبه ریشه ها را تعیین می کنیم.

۲. ریشه های مخرج (مجانب های تابع) را پیدا می کنیم اگر ریشه مخرج دارای انفصال فرد باشد نمودار در اطراف مجانب قائم به صورت های  یا  خواهد بود و اگر دارای انفصال زوج باشد در اطراف مخرج به صورت های  یا  خواهد بود.

۳. x را به سمت بی نهایت میل می دهیم تا مجانب افقی یا مایل تابع را پیدا کنیم.

تذکر: ممکن است تابع مجانب افقی یا مایل خود را قطع کند پس تابع را با مجانب افقی یا مایل قطع می دهیم تا نقاط برخورد تابع با مجانب افقی یا مایل را بدست آوریم.

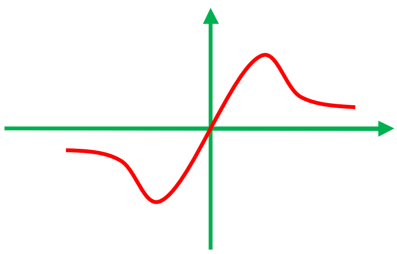
۱) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

تابع دارای ریشه در $x=0$ است و مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

$x\to+\infty$: $\quad \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$

$x\to-\infty$: $\quad \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\infty}=0^-$



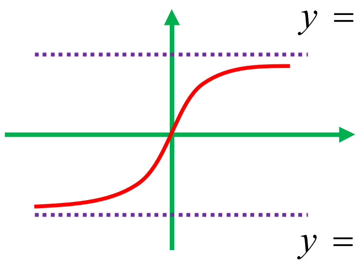
۲) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

y دارای یک ریشه در $x=0$ است و تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}$$

$x\to+\infty$: $\quad \dfrac{x}{x}=1$

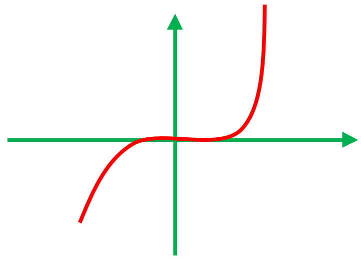
$x\to-\infty$: $\quad \dfrac{x}{-x}=-1$



۳) $x\sqrt{x^{۲}+۲}$ (سراسری ۹۲)

این تابع یک ریشه در $x=۰$ دارد.

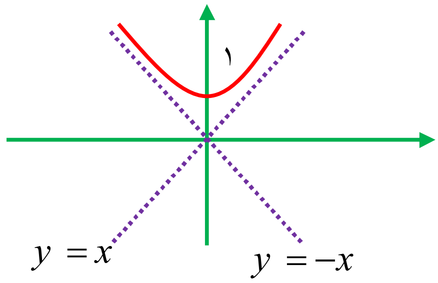
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x^{۲}+۲}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{x^{۲}+۲}=-\infty\end{cases}$$



تابع فرد است $f(-x)=-f(x)$ پس در $x=۰$ عطف داریم.

۴) $y=\sqrt{x^{۲}+۱}$ (کتاب درسی)

$$\begin{cases}D_f: R, y>۰\\ \lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^{۲}+۱}\sim|x| \begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} y=x\\ \xrightarrow{x\to-\infty} y=-x\end{cases}\end{cases}$$

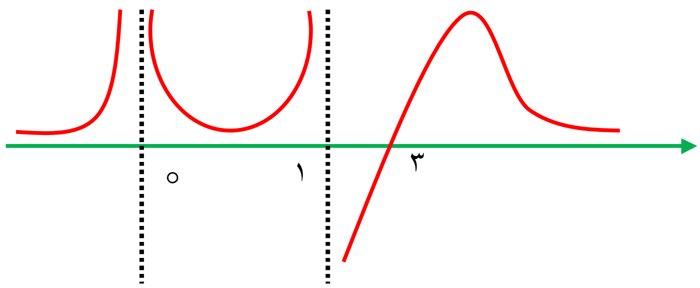


۵) $y=\dfrac{x-۲}{x^{۳}-x^{۲}}$

$$y=\frac{x-۲}{x^{۲}(x-۱)}=۰$$

تابع در $x=۲$ دارای ریشه در $x=۰$ دارای مجانب قائم (انفصال زوج) و نیز در مجانب قائم در $x=۱$ (انفصال فرد) است و دارای مجانب افقی $y=۰$ است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-۲}{x^{۲}(x-۱)}=+\infty$$

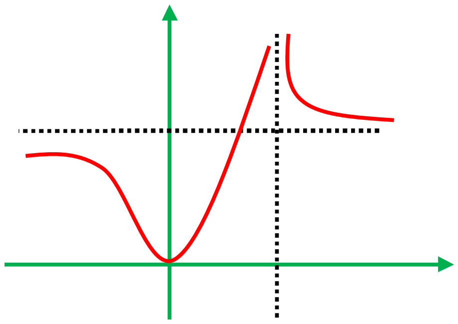


۶) $y=\dfrac{x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}$

تابع دارای ریشه $x=۰$ است و دارای مجانب قائم با انفصال زوج در $x=۱$ است همچنین: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}=۱$

باید بررسی کنیم که آیا تابع مجانب افقی خود را قطع می کند یا خیر.

$$\frac{x^{2}}{(x-1)^{2}}=1 \Rightarrow x^{2}=(x-1)^{2} \Rightarrow x^{2}=x^{2}-2x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$



یعنی تابع $x=\frac{1}{2}$ مجانب افقی خود را قطع می کند.

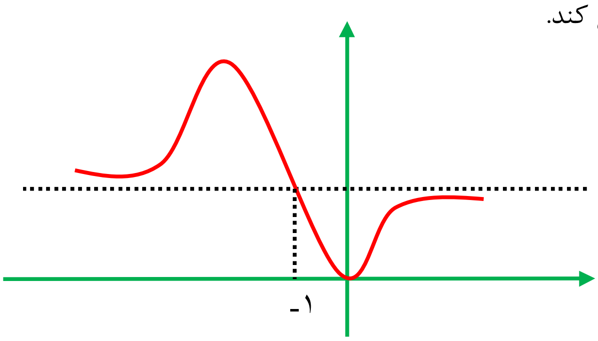
۷) $y=\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}$

تابع دارای یک ریشه مضاعف در $x=0$ است مجانب قائم ندارد و $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=1$

حال باید بررسی کنیم که تابع مجانب افقی خود را قطع می کند یا خیر

$$\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=1 \Rightarrow x^{2}=x^{2}+x+1 \Rightarrow x=-1$$

تابع مجانب افقی را در $x=-1$ قطع می کند.



۸) $y=\frac{x^{3}}{x^{2}+1}$

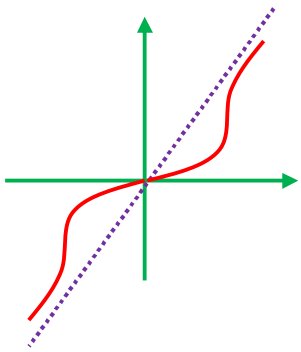
تابع دارای یک ریشه در $x=0$ (عطف افقی) است مجانب قائم ندارد.

مجانب مایل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{3}}{x^{2}+1}\sim x+(0-0)=x$

حال باید بررسی کنیم که آیا تابع مجانب مایل خود را قطع می کند یا خیر.

$$\frac{x^{3}}{x^{2}+1}=x \Rightarrow \frac{x^{2}}{x^{2}+1}=1 \Rightarrow x^{2}=x^{2}+1 \Rightarrow 0=1$$ امکان ندارد

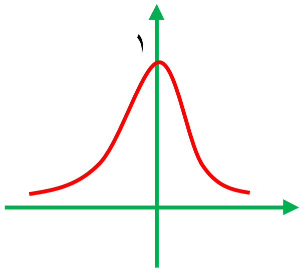
تابع مجانب مایل خود را قطع نمی کند.



۹) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ (کتاب درسی)

تابع ریشه ندارد مجانب قائم هم ندارد.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0^+\\ f(0)=1\end{cases}$$



۱۰) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ (کتاب درسی)

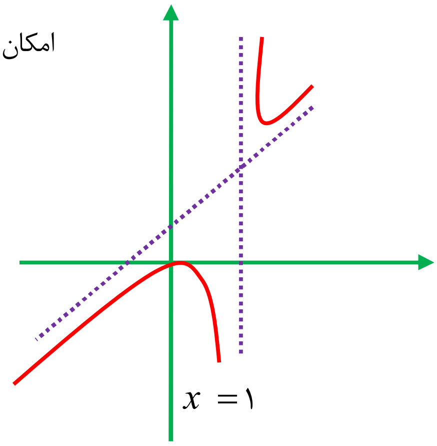
تابع دارای ریشه مضاعف در $x=0$ است. دارای مجانب قائم با انفصال فرد است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\sim x+(0-(-1))=x+1$$

تابع را با مجانب مایل برابر قرار می دهیم تا ببینیم که آیا مجانب مایل خود را قطع می کند یا خیر.

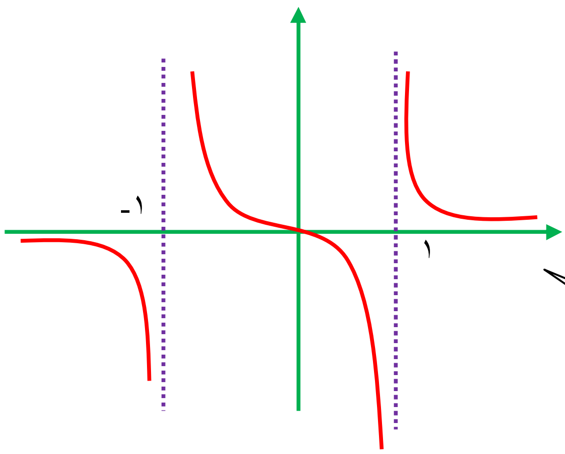
$\dfrac{x^2}{x-1}=x+1\Rightarrow x^2=(x-1)(x+1)=x^2-1\Rightarrow 0=-1$ امکان ندارد

پس تابع مجانب مایع خود را قطع نمی کند.



۱۱) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ (کتاب درسی)

تابع در $x=0$ دارای ریشه است از آنجایی که تابع فرداست پس در $x=0$ عطف دارد. همچنین دارای دو مجانب قائم با انفصال فرد در $x=-1,x=1$ است.



همین شکل الهام بخش یکی سوالات کنکور ۹۴ بوده است!!!

۱۲) $y=\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}$ (کتاب درسی)

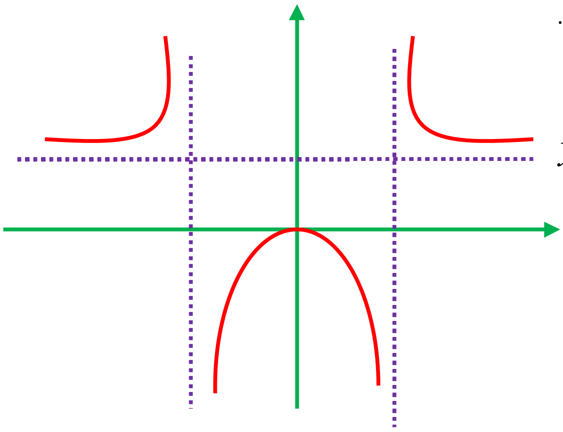
تابع در $x=۰$ دارای ریشه مضاعف است همچنین دارای دو مجانب قائم با انفصال فرد در $x=-۱,x=۱$ است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}=۱$$

حال بررسی می کنیم که آیا تابع مجانب افقی خود را قطع می کند یا خیر.

$\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}=۱\Rightarrow x^{۲}=x^{۲}-۱\Rightarrow ۰=-۱$ امکان ندارد

این تابع مجانب افقی خود را قطع نمی کند.



۱۳) $y=\frac{(x-۱)^{۳}}{x^{۲}-۲x}$

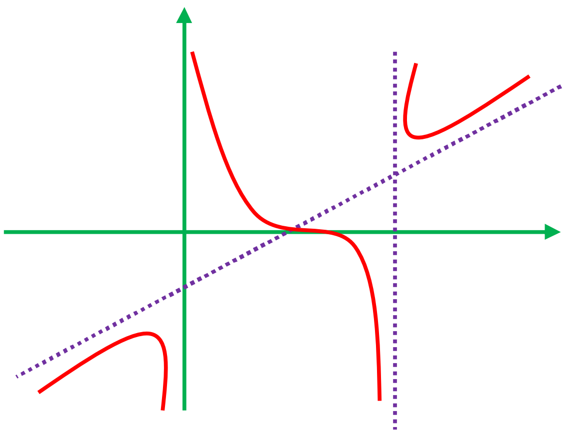
تابع دارای یک ریشه در $x=۱$ (عطف افقی) و دو مجانب قائم با انفصال فرد در $x=۲,x=۰$ دارد.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-۱)^{۳}}{x^{۲}-۲x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱}{x^{۲}-۲x}\sim x+(-۳-(-۲))=x-۱$$

تابع دارای مجانب مایل $y=x-۱$ است حال تابع را با مجانب مایل خود قطع می دهیم تا ببینیم که آیا مجانب مایل خود را قطع می کند یا نه.

$$\frac{(x-۱)^{۳}}{x^{۲}-۲x}=x-۱\Rightarrow\frac{(x-۱)^{۲}}{x^{۲}-۲x}=۱$$

$\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱=x^{۲}-۲x\Rightarrow ۱=۰\Rightarrow$ امکان ندارد $\Rightarrow$ تابع مجانب مایل خود را قطع نمی کند



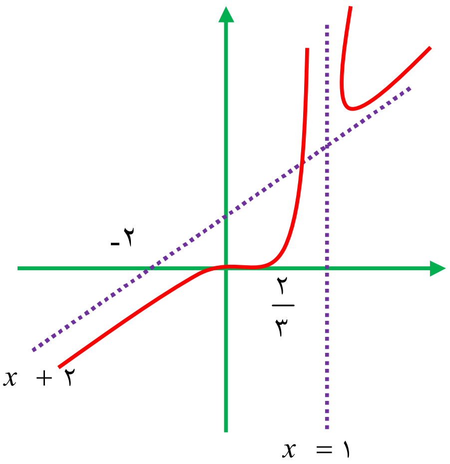
۱۴) $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ (کتاب درسی)

تابع دارای ریشه در $x=0$ (عطف افقی)است همچنین دارای مجانب قائم با انفصال زوج در $x=1$ است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-2x+1}\sim x+(0-(-2))=x+2$$

حالا باید بررسی کنیم که آیا تابع مجانب مایل خود را قطع می کند یا خیر.

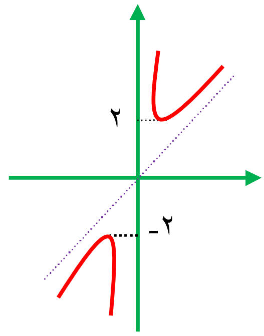
$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=x+2\Rightarrow\frac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2\Rightarrow\begin{cases}x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2=x^3\\3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\end{cases}$$



۱۵) $y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$

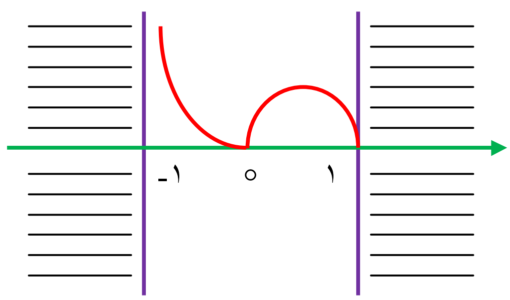
تابع ریشه ندارد دارای یک مجانب قائم با انفصال فرد در $x=0$ است دارای یک مجانب مایل ($y=x$) است در ضمن می دانیم که:

$$\begin{cases}x+\frac{1}{x}\geq 2 & x>0\\x+\frac{1}{x}\leq -2 & x<0\end{cases}$$



۱۶) $y=|x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

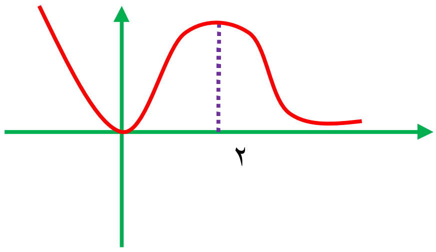
$$D_f:\frac{1-x}{1+x}\geq 0\Rightarrow -1<x\leq 1\Rightarrow y=\frac{|x|.\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$



۱۷) $y=x^2e^{-x}$ (کتاب درسی)

تابع دارای یک ریشه در $x=0$ است.

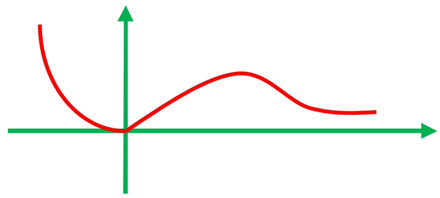
$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} =0\\ \xrightarrow{x\to-\infty} =+\infty\end{cases}$$



۱۸) $y=|x|e^{-x}$ (سراسری ریاضی ۹۴)

تابع یک ریشه در $x=0$ است.

$$y=\frac{|x|}{e^x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{e^x}=\frac{x}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{e^x}=\frac{-x}{e^x}=\frac{+\infty}{e^{-\infty}}=+\infty\times+\infty=+\infty\end{cases}$$



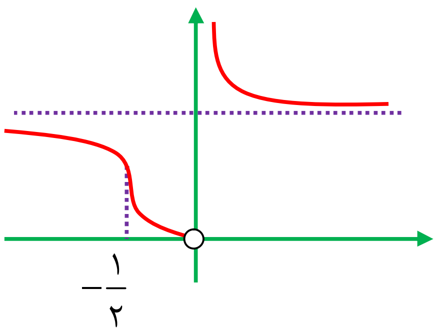
۱۹) $y=e^{\frac{1}{x}}$ (کتاب درسی)

$$\begin{cases}D_f: x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1 \quad \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

باید بررسی کنیم که آیا تابع مجانب افقی را قطع می کند یا نه.

$e^{\frac{1}{x}}=1=e^{0}\Rightarrow\frac{1}{x}=0$ امکان ندارد

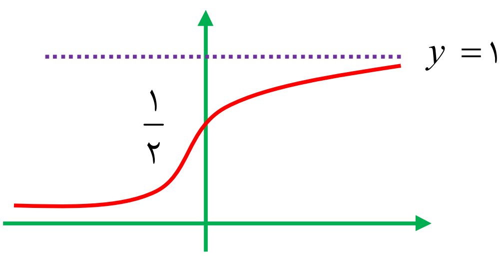
پس تابع مجانب افقی را قطع نمی کند.



۲۰) $y=\frac{1}{1+e^{-x}}$ (کتاب درسی)

$$y=\frac{e^x}{1+x^x}$$

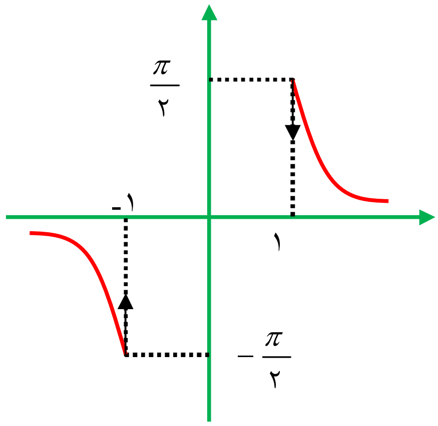
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x^x}=\begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} =1\\ \xrightarrow{x\to-\infty} =0\end{cases}$$



۲۱) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (رشته ریاضی) (کتاب درسی)

$$D_f:\left|\frac{1}{x}\right|\le 0, x\ne 0 \Rightarrow |x|\ge 1 \Rightarrow D_f: x\ge 1 \cup x\le -1$$

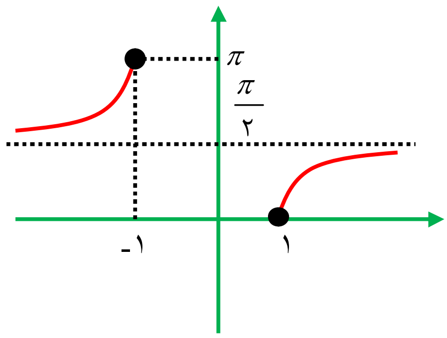
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{+\infty}\right)=\sin^{-1}(0^+)=0^+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{-\infty}\right)=\sin^{-1}(0^-)=0^- \\ y(1)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2} \\ y(-1)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)=\sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



۲۲) $y=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (رشته ریاضی) (کتاب درسی)

$$D_f:\left|\frac{1}{x}\right|\le 1, x\ne 0 \Rightarrow |x|\ge 1 \Rightarrow D_f: x\ge 1 \cup x\le -1$$

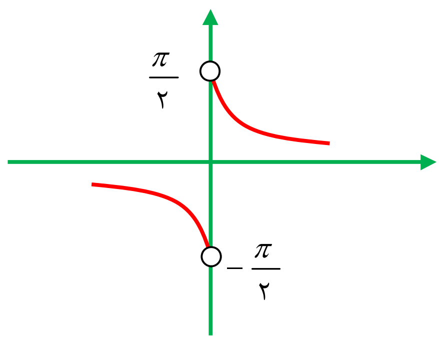
$$\begin{cases} 0\le y=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\le\pi \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{+\infty}\right)=\cos^{-1}(0^+)=\frac{\pi^-}{2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{-\infty}\right)=\cos^{-1}(0^-)=\frac{\pi^+}{2} \\ y(1)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\cos^{-1}(1)=0 \\ y(-1)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)=\cos^{-1}(-1)=\pi \end{cases}$$



۲۳) $y=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (کتاب درسی)

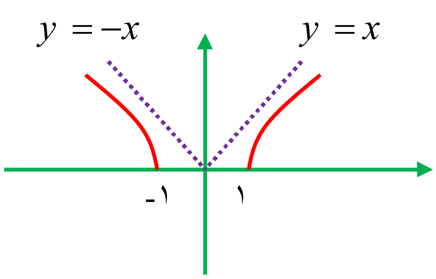
$D_f: x\ne 0$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}< y=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{+\infty}\right)=\tan^{-1}(0^+)=0^+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\infty}\right)=\tan^{-1}(0^-)=0^- \end{cases}$$



۲۴) $y=\sqrt{x^2-1}$ (کتاب درسی)

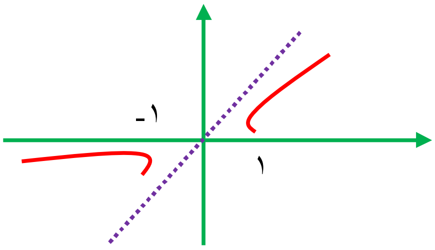
$$\begin{cases} D_f: x^2-1\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 1 \Rightarrow x\ge 1 \cup x\le -1 \Rightarrow y=\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1} \\ \lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}\sim |x| \begin{cases} \xrightarrow{x\to+\infty} y=x \\ \xrightarrow{x\to-\infty} y=-x \end{cases} \\ y\ge 0 \end{cases}$$



۲۵) $y=x+\sqrt{x^2-1}$ (کتاب درسی)

$$D_f: x^2-1\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 1 \Rightarrow x\ge 1 \cup x\le -1$$

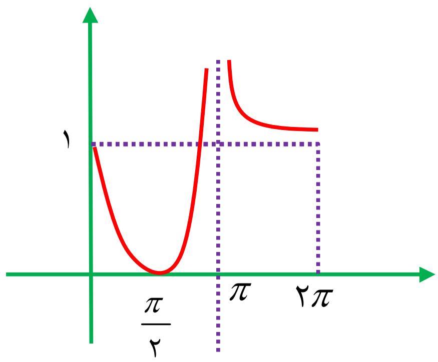
$$\lim_{x\to\infty} x+\sqrt{x^2+1} \begin{cases} \xrightarrow{x\to+\infty} x+x=2x \\ \xrightarrow{x\to-\infty} x-x=0 \end{cases}$$



۲۶) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ $\quad 0\le x\le 2\pi$ (کتاب درسی)

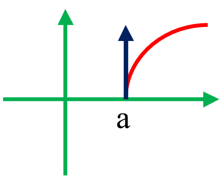
تابع دارای ریشه مضاعف $\left(1-\sin x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\right)$ است همچنین دارای مجانب قائم با انفصال زوج $(1+\cos x=0 \Rightarrow x=\pi)$ است.

$f(0)=f(2\pi)=1$

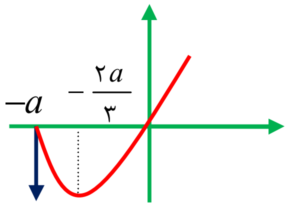


به عنوان تمرین سعی کنید که نمودارهای زیر را خودتان بررسی کنید در تمام این نمودارها $(a>0)$ فرض شده است.

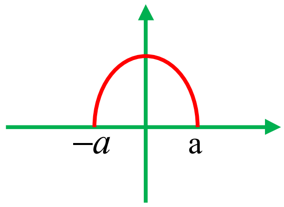
۲۷) $y=\sqrt{x-a}$



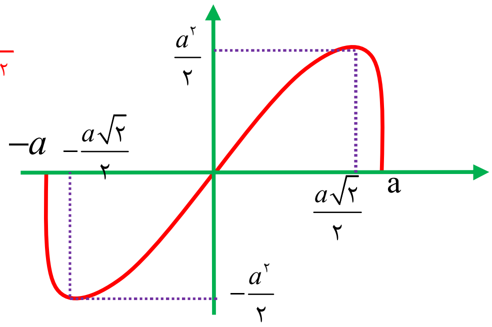
۲۸) $y = x\sqrt{x+a}$



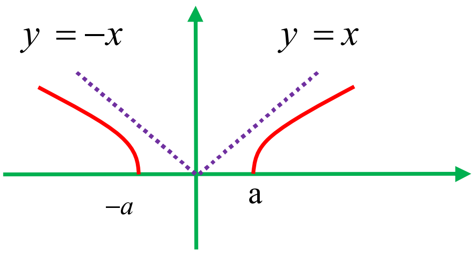
۲۹) $y = \sqrt{a^۲ - x^۲}$



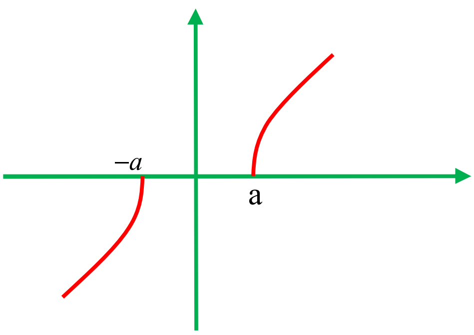
۳۰) $y = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$



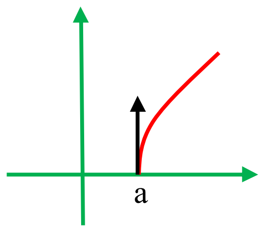
۳۱) $y = \sqrt{x^۲ - a^۲}$



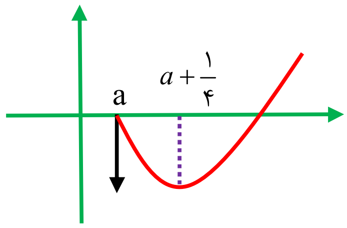
۳۲) $y = x\sqrt{x^۲ - a^۲}$



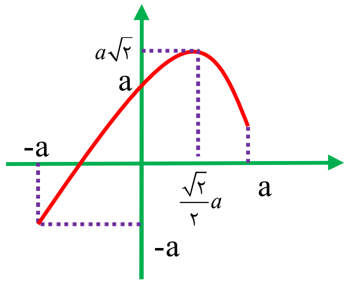
۳۳) $y = x + \sqrt{x - a}$



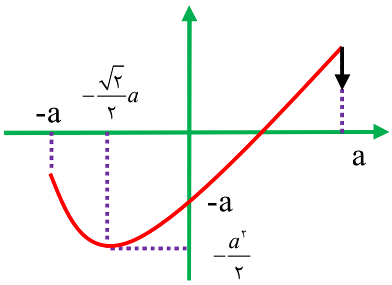
۳۴) $y = x - \sqrt{x - a}$



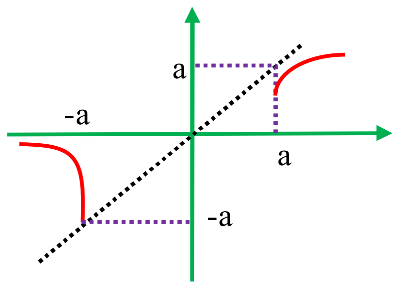
۳۵) $y = x + \sqrt{a^2 - x^2}$



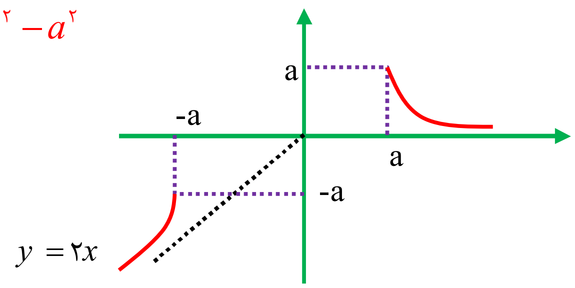
۳۶) $y = x - \sqrt{a^2 - x^2}$



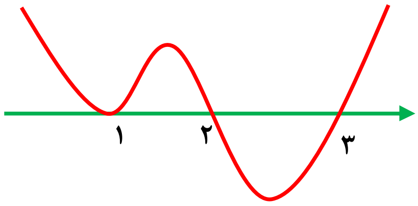
۳۷) $y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$



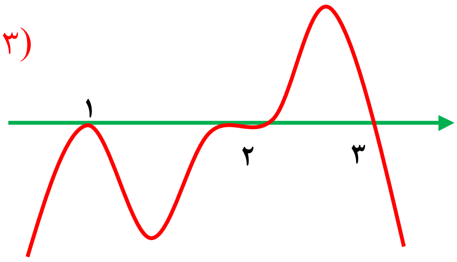
۳۸) $y = x - \sqrt{x^2 - a^2}$



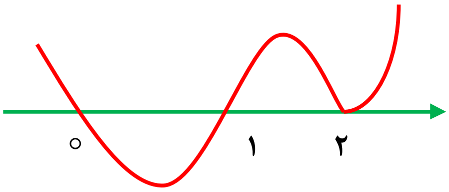
۳۹) $y=(x-1)^2(x-2)(x-3)$



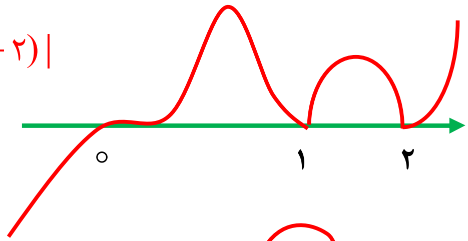
۴۰) $y=-(x-1)^2(x-2)^3(x-3)$



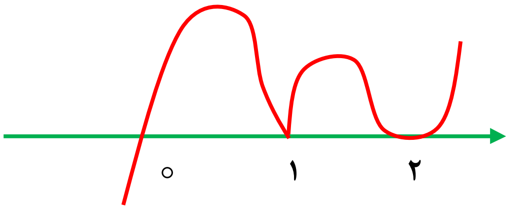
۴۱) $y=x(x-1)|x-2|$



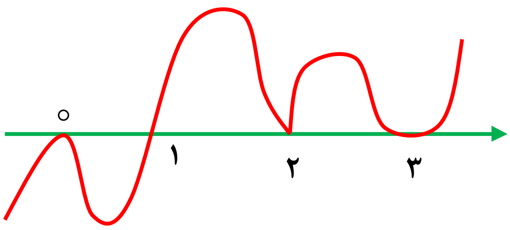
۴۲) $y=x^3|(x-1)(x-2)|$



۴۳) $y=x|(x-1)(x-2)^3|$



۴۴) $y=x^2(x-1)|(x-2)(x-3)^3|$



سؤال ۱۱: $x=1$ طول نقطه بازگشتی منحنی تابع $\sqrt[3]{(x^3+ax+b)x^2}$ می باشد حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۷-   ۲) ۵-   ۳) ۳-   ۴) ۶-

پاسخ گزینه۲ ـ $x=1$ در عامل x^2 تأثیری ندارد (x^2 را صفر نمی کند) اما ما می خواهیم $x=1$ طول نقطه بازگشتی باشد اما برای آنکه این طول نقطه بازگشتی منحنی باشد باید x^3+ax+b به صورت $(x-1)^2(x-\alpha)$ باشد یعنی $x=1$ ریشه مضاعف عامل x^3+ax+b باشد پس این ریشه هم در معادله $x^3+ax+b=0$ و هم در معادله مشتق آن یعنی $3x^2+a=0$ صدق می کند.

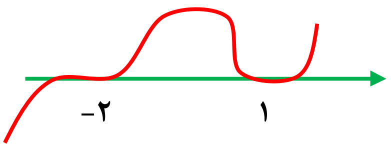
عبارت $p(x)$ زمانی بر $(x-\alpha)^2$ بخش پذیر است که $p(\alpha)=p'(\alpha)=0$ باشد.

$$\begin{cases}1+a+b=0\\3+a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}\Rightarrow a-b=-5$$

سؤال ۱۲: نقطه به طول $x=1$ برای تابع $f(x)=(x-1)^6(x+2)^7-4$ چه نقطه ای است؟

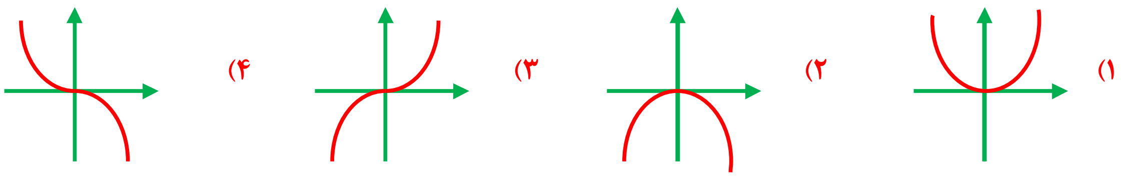
۱) عطف   ۲) ماکسیمم نسبی   ۳) مینیمم نسبی   ۴) هیچکدام

پاسخ گزینه ۳ـ تابع $f(x)$ همان $y=(x-1)^6(x+2)^7$ است که چهار واحد به سمت پایین انتقال یافته است در تابع $(x-1)^6(x+2)^7$, $(x-1)$ مینیمم نسبی است.



سؤال ۱۳: نمودار تابع در نقطه $y=\tan x-\sin x$ در نقطه تلاقی با محور y ها کدام وضل را دارد؟

۱) ۲) ۳) ۴)



پاسخ گزینه ۳ـ $$x\to 0\Rightarrow \tan x-\sin x\sim\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\Rightarrow \tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$$

نمودار $x=0$ در شبیه $y=\frac{x^3}{2}$ است.

سؤال ۱۴: $x=1$ طول عطف نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{(x+a)^3}{x^2}$ باشد a کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۲-

پاسخ گزینه۱ ـ واضح است برای اینکه $x=1$ نقطه عطف نمودار تابع باشد نمودار y باید به صورت $y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ باشد. پس $a=-1$ است.

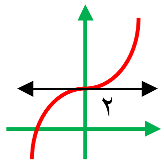
سؤال۱۵: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=(x^2-1)(x^3-1)^3$ در نقطه به طول $x=1$ چگونه است؟

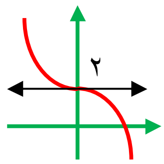
۱) مینیمم نسبی **۲) ماکسیمم نسبی** **۳) عطف** **۴) هیچکدام**

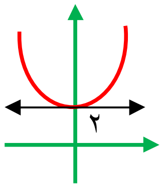
پاسخ گزینه۱ـ $f(x)=(x-1)(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)^3=(x-1)^4(x+1)(x^2+x+1)^3$

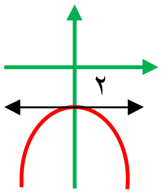
پس در حوالی $x=1$ مینیمم نسبی است.

سؤال۱۶: نمودار تابع با ضابطه $y=2+\sin x-x\cos x$ در همسایگی نقطه $x=0$ به چه شکلی است؟ **(سراسری ۸۳)**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ گزینه ۱ـ

$$x\to 0\begin{cases}\sin x\sim x-\dfrac{x^3}{6}\\ \cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow 2+\sin x-x\cos x\xrightarrow{x\to 0}2+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=2+x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2}=2+\frac{x^3}{3}$$

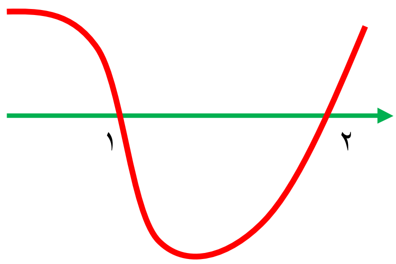
سؤال۱۷: در تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^3}$ در نقاط $x=2, x=1$ چگونه اند؟ (آزاد ۸۳)

۱) عطف افقی ـ عادی **۲) عطف قائم ـ عادی**

۳) مینیمم نسبی ـ ماکسیمم نسبی **۴) عطف قائم ـ مینیمم نسبی**

پاسخ گزینه۲ ـ

$$y=(x-2)\sqrt[3]{x-1}$$



پس $x=1$ عطف قائم و $x=2$ نقطه ای عادی است.

سؤال۱۸: تابع $|(x-1)(x-2)|\,\sqrt[3]{(x-2)^2}\times\sqrt[5]{x-1}=y$ در $x=1, x=2$ چگونه است؟ (آزاد ۸۴)

۱) عطف ـ مینیمم نسبی **۲) عطف ـ ماکسیمم نسبی**

۳) مینیمم نسبی ـ مینیمم نسبی **۴) ماکسیمم نسبی ـ مینیمم نسبی**

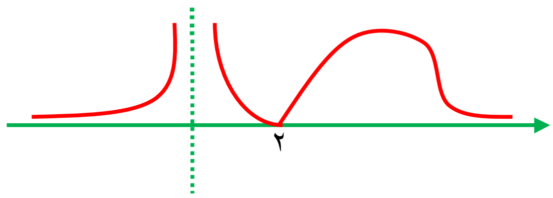
پاسخ گزینه۱ ـ در $x=1, y=\sqrt[5]{x-1}\,|(x-1)|, x=1$ مانند توان فرد پشت قدر مطلق عمل می کند پس در $x=1$ عطف است.

در $x=۲, y=\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}\ |(x-۲)|, x=۲$ مانند توان زوج پشت قدر مطلق عمل می کند. پس طول مینیمم نسبی است.

سؤال۱۹: نمودارهای زیر را رسم کنید.

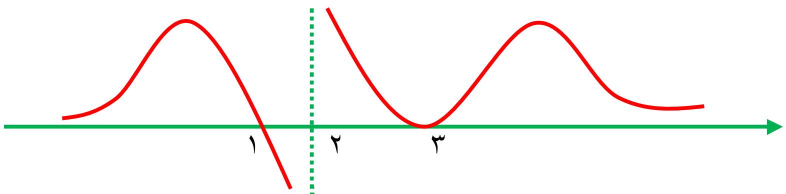
۱) $y=\dfrac{|x-۲|}{(x-۱)^{۲}}$

ریشه های معادله $x=۲$ است و دارای مجانب قائم $x=۱$ (انفصال زوج) مجانب افقی تابع $y=۰$ است.



۲) $y=\dfrac{(x-۱)(x-۳)^{۲}}{(x-۲)^{۵}}$

تابع دارای ریشه در $x=۳, x=۱$ و دارای مجانب قائم $x=۲$ (انفصال فرد) دارای مجانب افقی $y=۰$ است.



۳) $y=\dfrac{(x-۲)^{۳}|x-۴|}{(x-۱)^{۲}(x-۳)^{۵}}$

تابع دارای ریشه در $x=۴, x=۲$ و دارای مجانب قائم $x=۱$ (انفصال زوج) و $x=۳$ (انفصال فرد) است همچنین دارای مجانب افقی $y=۰$ است.