نقطه عطف

مدرس : استاد ایمان نخستین

www.riazisara.ir

تعریف: $x=c$ طول نقطه عطف تابع f است، هرگاه سه شرط زیر وجود داشته باشد:

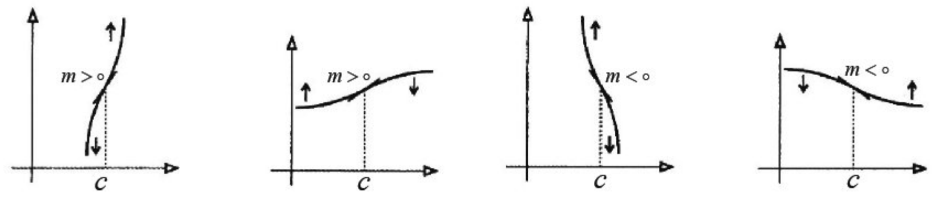
۱) f در $x=c$ پیوسته باشد.

۲) f در $x=c$ دارای مماس واحد باشد.

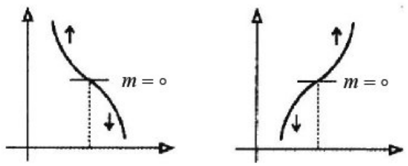
۳) جهت تقعر f (علامت f'') در دو طرف $x=c$ تغییر کند.

نمودار تابع در اطراف نقطه عطف به یکی از حالت های زیر است:

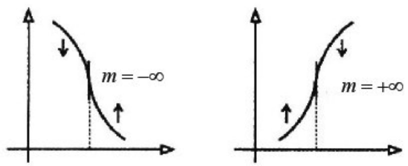
عطف مایل: در این حالت شیب خط مماس در نقطه عطف مثبت یا منفی است.



عطف افقی: در این حالت شیب خط مماس در نقطه عطف صفر است.



عطف قائم: در این حالت $f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$.



روش تعیین نقاط عطف تابع f:

از تابع f دو بار مشتق می‌گیریم. ریشه های مرتبه‌ی فرد (ساده) $f''(x)=0$ یا طول هایی که $f''(x)$ وجود ندارد، ولی علامت f'' در طرفین آن ها تغییر می کند، طول نقاط عطف هستند.

البته به شرطی که در این طول ها، تابع f پیوسته و مشتق چپ و راست با یکدیگر برابر و مساوی یک عدد یا یک بی نهایت باشد (شرط وجود مماس واحد)

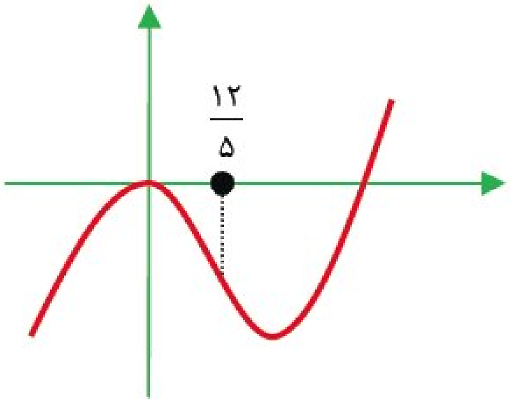
سؤال۱: نقاط عطف توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $y = x^{۴}(x - ۴)$

$$y = x^{۵} - ۴x^{۴} \Rightarrow y' = ۵x^{۴} - ۱۶x^{۳} \Rightarrow y'' = ۲۰x^{۳} - ۴۸x^{۲} = ۴x^{۲}(۵x - ۱۲) \xrightarrow{y''=۰} x = ۰, x = \frac{۱۲}{۵}$$

از این دو نقطه فقط $x = \frac{۱۲}{۵}$ طول نقطه عطف است زیرا $x = ۰$ ریشه‌ی مرتبه زوج (مضاعف) است و علامت مشتق دوم در طرفین آن عوض نمی‌شود.

: آقا نیازی نیست، شرط پیوستگی و وجود مماس کامل رو توی $x = \frac{۱۲}{۵}$ بررسی کنیم؟!



۲) $y = x + ۱ - \frac{۳}{x^{۲}} + \frac{۲}{x^{۳}}$

$$y' = ۱ + \frac{۶}{x^{۳}} - \frac{۶}{x^{۴}} \Rightarrow y'' = -\frac{۱۸}{x^{۴}} + \frac{۲۴}{x^{۵}} = \frac{-۶(۳x - ۴)}{x^{۵}} \xrightarrow{y''=۰} x = \frac{۴}{۳}$$

$x = \frac{۴}{۳}$ طول نقطه عطف تابع است (توجه دارید که تابع مزبور در $x = \frac{۴}{۳}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.)


: آقا به نظر من $x = ۰$ هم نقطه عطف تابع هست! دلیلش هم اینکه علامت y'' در طرفین $x = ۰$ عوض می‌شه!

ولی آیا اصلاً تابع مزبور در $x = ۰$ تعریف می‌شود، چه طور ممکن است نقطه ای که تابع در آن تعریف نمی‌شود، طول نقطه عطف تابع باشد. (تابع $y = x + ۱ - \frac{۳}{x^{۲}} + \frac{۲}{x^{۲}}$ روی $R - \{۰\}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.)

طول نقاط عطف دو تابع $y = f(x)$ و $y = mx + n + f(x)$ در صورت وجود، یکسان است.

هرجا که توابع $\cot u\,,\tan u\,,\cos u\,,\sin u$ محور xها را قطع کنند آن نقطه نقطهٔ عطف محسوب می شود.

۳) $y = \sin x - \sqrt{۳}\cos x \qquad x \in (۰, ۲\pi)$

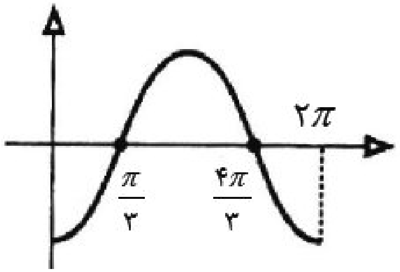
ین تابع روی R پیوسته و مشتق پذیر است، پس فقط کافی است ریشه های مشتق دوم را بررسی کنیم:

$$y' = \cos x + \sqrt{۳}\sin x \Rightarrow y'' = -\sin x + \sqrt{۳}\cos x \xrightarrow{y''=۰} \sin x = \sqrt{۳}\cos x \Rightarrow \tan x = \sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{x \in (۰,۲\pi)} x = \frac{\pi}{۳}, x = \frac{۴\pi}{۳}$$

ین دو طول چون هر دو ریشه های ساده معادله‌ی مزبور هستند، هر دو، طول نقاط عطف تابع

ستند. نمودار این تابع در بازه به صورت مقابل است:



اگر ریشه‌ی یک معادله، در مشتق آن معادله صدق نکند، ریشه ای ساده (یا از مرتبه فرد) است و اگر ریشه در مشتق معادله نیز صدق کند، ریشه ای مضاعف (یا از مرتبه زوج) است.

۱) $\frac{\pi}{3}$ ریشه $\tan x = \sqrt{3}$ است، ولی ریشه‌ی مشتق این معادله، یعنی $(1+\tan^2 x) = 0$ نیست. پس ریشه‌ای ساده است.

۲) $x = \frac{\pi}{4}$ ریشه $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$ است، و همچنین ریشه‌ی مشتق این معادله یعنی $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$ هست، پس $\frac{\pi}{4}$ ریشه مضاعف معادله است.

یادتان باشد:

معادلات زیر ریشه های مضاعف دارند: $\cos(ax+b) = \pm 1$, $\sin(ax+b) = \pm 1$

۴) $y = x^{۲} - \sqrt{۲}(\sin x - \cos x) \qquad x \in [۰, ۲\pi]$

$$y = x^{۲} - \sqrt{۲}\left(\sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)\right) = x^{۲} - ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow y' = ۲x - ۲\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = ۲ + ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \xrightarrow{y''=۰} \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = -۱$$

این معادله دارای ریشه مضاعف $\left(x = \frac{۷\pi}{۴}\right)$ است و در نتیجه علامت مشتق دوم در طرفین متغیری نمی کند و این بدان معنی است که این نقطه طول نقطه عطف تابع نیست، یعنی تابع مزبور فاقد نقطه عطف است.

سؤال۲: نقاط عطف تابع $۳x - \cos x$ روی کدام خط زیر قرار دارند؟

۱) $y = \frac{\pi}{۲}$ ۲) $y = ۳(x - \pi)$ ۳) $y = ۳x - \pi$ ۴) $y = ۳x$

پاسخ: گزینه (۴)

$$y' = ۳ + \sin x \rightarrow y'' = \cos x$$

نقاط عطف ریشه های $\cos x = ۰$ هستند که اگر شرط $\cos x = ۰$ را در تابع اصلی قرار دهیم به $y = ۳x$ می‌رسیم و این همان خطی است که نقاط عطف تابع روی آن قرار دارند.

📖 سؤال۳: فاصله‌ی دو نقطه‌ی عطف متوالی تابع $y=\sin^{۲} ۳x-\cos^{۲} ۳x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۲}$

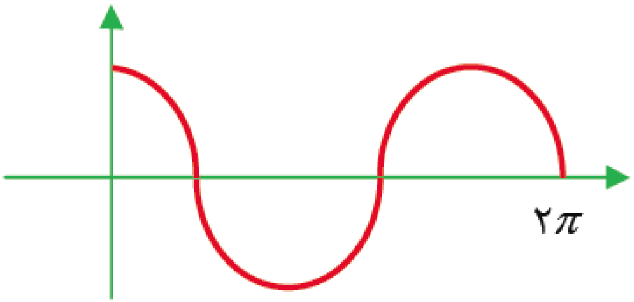
$$y=-\cos ۶x \Rightarrow y'=۶\sin ۶x \Rightarrow y''=۳۶\cos ۶x$$

$$y''=\circ \Rightarrow ۶x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\ldots \Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۳\pi}{۱۲},\ldots$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی عطف متوالی $\frac{\pi}{۶}$ است.

📖 سؤال۴: نمودار تابع $y = \cos kx$ با ضابطه در فاصله $[\circ,\lambda]$ دارای دو نقطه عطف است و از نقطه $(\lambda,1)$ می‌گذرد.

k کدام است؟



به ازای $x=\circ$ و $x=۸$ مقدار تابع مزبور مساوی یک می‌شه پس این تابع در این دو طول دارای ماکزیمم نسبی است. (بیشترین مقدار $\cos \mathrm{O}$ مساوی یک است) پس می‌شه تصور کرد که بازه $[\circ,۸]$ مضربی از یک دوره تناوب تابع است. حالا تو ذهنتون نمودار $\cos x$ رو تجسم کنید.

همون طور که می‌بینید cos در یک دوره تناوب دارای دو ماکزیمم و دو عطف است (محل برخورد $\cos \mathrm{O}$ با محور x ها نقاط عطف هستند) پس می‌شه نتیجه گرفت که فاصله $[\circ,۸]$ دقیقاً یک بازه تناوب تابع $y=\cos kx$ است.

$$\rightarrow \frac{۲\pi}{|k|}=۸-\circ=۸ \rightarrow \frac{۲\pi}{|k|}=۸ \rightarrow \frac{\pi}{|k|}=۴ \rightarrow |k|=\frac{\pi}{۴} \rightarrow k=\pm\frac{\pi}{۴}$$

📖 **سؤال۵: شیب خط مماس در نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $y=tg\frac{x}{۲}$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور۸۲)**

نمودار تابع $y=tgx$ در محل تلاقی با محور x ها یعنی $x=k\pi$ نقاط عطف دارد پس تابع $y=tg\frac{x}{۲}$ در $\frac{x}{۲}=k\pi$ یا $x=۲k\pi$ نقاط عطف دارد. حالا کافی است شیب خط مماس بر نمودار $y=tg\frac{x}{۲}$ را در $x=۲k\pi$ بدست آوریم:

$$y=tg\frac{x}{۲}\rightarrow y'=\frac{۱}{۲}\left(۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}\right)\xrightarrow{x=۲k\pi}$$

$$y'=\frac{۱}{۲}(۱+۰)=\frac{۱}{۲}$$

📖 سؤال۶: اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ باشد این منحنی روی بازه‌ی $(\pi,\pi+T)$ چند نقطه عطف دارد؟ (سراسری ۸۳)

$$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=tg\frac{x}{2}$$

y دوره تناوب $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

پس نقاط عطف این تابع را باید در فاصله $(\pi,3\pi)$ بدست بیاوریم:

$$y'=\frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)\to y''=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)=0\xrightarrow{1+tg^2\frac{x}{2}>0}tg\frac{x}{2}=0\to\frac{x}{2}=k\pi$$

$$\xrightarrow{\pi<x<3\pi}x=2\pi$$

سؤال۷: اگر خط $ax+by=۱$ نقاط عطف تابع $y=۳x-۲\sin x+۱$ را به هم وصل کند $a+b$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴-

از همان ابتدا می دانیم از آنجایی که نقاط عطف $\sin x$ همگی روی خط $y=۰$ قرار دارند پس نقاط عطف $\alpha x+\beta+\gamma\sin x$ روی خط $y=\alpha x+\beta$ هستند. پس در این سؤال اگر بگیریم: $\gamma=-۲, \beta=۱, \alpha=۳$ خواهیم داشت نقاط عطف $y=۳x+۱-۲\sin x$ روی خط $y=۳x+۱$ هستند.

📖 سؤال۸: در تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{۲}-\sin x$ ، نقطه $x=\frac{۳\pi}{۲}$ چه نقطه ای است؟

$f'(x)=x-\cos x \to f'\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)\neq ۰ \to$ نیست f طول اکسترمم نسبی $x=\frac{۳\pi}{۲}$

$f''(x)=۱+\sin x \to f''\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=۰$

اما $f''\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=۰$ ریشه مضاعف دارد. پس این نقطه طول عطف تابع f نمی‌باشد پس $x=\frac{۳\pi}{۲}$ یک نقطه عادی $f(x)$ است.

📖 سؤال۹: در تابع $f(x)=\sin ۲x+۲\sin x$ ، نقطه $x=\pi$ چه نقطه ای است؟

$$f'(x)=۲\cos ۲x+۲\cos x \rightarrow f'(\pi)=۰$$

$$f''(x)=-۴\sin ۲x-۲\sin x \rightarrow f''(\pi)=۰$$

$x=\pi$ ریشه ساده $f''(\pi)=۰$ ($f^{(۳)}(\pi)\neq ۰$) پس طول نقطه عطف تابع f است اما $f'(\pi)=۰$ پس در نقطه عطف مماس افقی داریم و در نتیجه $x=\pi$ برای $f(x)$ ، عطف افقی است.

سؤال۱۰: تعداد نقاط عطف تابع $f(x)=x^{۲}-۴\sin x-۱$ در بازه $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

$$f'(x)=۲x-۴\cos x \rightarrow f''(x)=۲-۴\sin x \xrightarrow{f''(x)=۰} \sin x=-\frac{۱}{۲}=\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{۶}\right)=۲k\pi+\dfrac{۷\pi}{۶} \end{cases} \xrightarrow{۰<x<۲\pi} \begin{cases} x=\dfrac{۷\pi}{۶} \\ x=\dfrac{۱۱\pi}{۶} \end{cases}$$

📖 سؤال۱۱: به ازای کدام مقادیر k ، تابع $f(x)=x^{۲}-k\sin x-۱$ فاقد نقطه عطف است؟

باید معادله $f''(x)=۰$ فاقد ریشه یا دارای ریشه مضاعف باشد.

$$f(x)=x^{۲}-k\sin x-۱\rightarrow f'(x)=۲x-k\cos x\rightarrow f''(x)=۲+k\sin x$$

$$\xrightarrow{f''(x)=۰}\sin x=-\frac{۲}{k}$$

اگر $\left|\frac{-۲}{k}\right|>۱$ معادله فاقد جواب و اگر $\frac{-۲}{k}=\pm ۱$ معادله دارای ریشه مضاعف است. پس برای اینکه $f(x)$ فاقد نقطه عطف باشد

باید $\left|\frac{-۲}{k}\right|\geq ۱$ یا $\left|\frac{۲}{k}\right|\geq ۱$ یا $\left|\frac{k}{۲}\right|\leq ۱$

$$\left|\frac{k}{۲}\right|\leq ۱\rightarrow |k|\leq ۲\rightarrow \underline{-۲\leq k\leq ۲}$$

سؤال۱۲: به ازای کدام مقادیر m ، منحنی تابع $f(x)=۲\sin x-\cos x+mx^{۲}+۱$ فاقد نقطه عطف است؟

باید معادله $f''(x)=۰$ فاقد ریشه یا دارای ریشه مضاعف باشد.

$$f'(x)=۲\cos x+\sin x+۲mx \rightarrow f''(x)=-۲\sin x+\cos x$$

$$\xrightarrow{f''(x)=۰} ۲\sin x-\cos x=۲m$$

یادآوری مهم: معادلات زیر دارای ریشه مضاعف هستند.

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}} \quad \text{و} \quad a\sin x+b\cos x=-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$$

یادآوری: معادلات $-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$

$$\rightarrow -\sqrt{۵}\le ۲\sin x-\cos x\le\sqrt{۵}$$

پس اگر $\sqrt{۵}\le|۲m|$ باشد منحنی تابع فاقد نقطه عطف است.

📖 سؤال۱۳: به ازای کدام مقدار m تابع $y = x^{۲} + m\cos x$ نقطه‌ی عطف ندارد.

۱) $|m| \geq ۲$ ۲) $|m| > ۲$ ۳) $|m| < ۲$ ۴) $|m| \leq ۲$

$$y' = ۲x - m\sin x \Rightarrow y'' = ۲ - m\cos x$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۲}{m}$$

اگر $\left|\frac{۲}{m}\right| > ۱$ معادله جواب ندارد و اگر $\left|\frac{۲}{m}\right| = ۱$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد در هر دو حالت تابع نقطه‌ی عطف ندارد پس $|m| \leq ۲$ است.

🕮 سؤال۱۴: روی بازه $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ شیب خط مماس بر منحنی به معادله $y=\sin^2 x+2\sin x$ در نقطه عطف آن کدام است؟

$$y'=2\sin x\cos x+2\cos x=\sin 2x+2\cos x$$

$$y''=2\cos 2x-2\sin x=2(1-2\sin^2 x)-2\sin x=-4\sin^2 x-2\sin x+2=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)$$

$$=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)\xrightarrow{y''=0}\begin{cases}\sin x=-1\rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\xrightarrow{0<x<\frac{\pi}{2}}x=\frac{\pi}{6}$$

شیب خط مماس در نقطه عطف $\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

سؤال۱۵: نقاط بحرانی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x - \sin x$ چگونه است؟

۱) عطف   ۲) ماکزیمم نسبی   ۳) مینیمم نسبی   ۴) عادی

پاسخ: گزینه (۱)

$$f(x) = x - \sin x \rightarrow f'(x) = ۱ - \cos x \xrightarrow{f'(x)=۰} \cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi$$

$x = ۲k\pi$ طول نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. اما به ازای این مقادیر معادله $f'(x) = ۰$ دارای ریشه مضاعف هستند پس نمی‌تونه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد حالا بریم مشتق دوم بگیریم ببینیم چی می‌شه: $f''(x) = \sin x$

همان‌طور که می‌بینین $x = ۲k\pi$ ریشه های ساده $f''(x) = ۰$ است. پس نقاط بحرانی تابع f، همان نقطه عطف افقی تابع می‌باشند.

📖 سؤال۱۶: به ازای چند مقدار صحیح k تابع $y=\sqrt{۲}kx^{۲}+۲\sin x+۲\cos x$ نقطه‌ی عطف دارد.

۱) یک ۲) سه ۳) پنج ۴) بی شمار

$$y'=۲\sqrt{۲}kx+۲\cos x-۲\sin x$$

$$y''=۲\sqrt{۲}k-۲\sin x-۲\cos x=\circ\Rightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{۲}k\xrightarrow{-\sqrt{۲}\leq\cos x+\sin x\leq\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}\leq\sqrt{۲}k\leq\sqrt{۲}\Rightarrow -۱\leq k\leq ۱$$

ولی اگر $k=\pm۱$ باشد، y'' ریشه های مضاعف خواهد داشت و در آن ها تغییر علامت نمی دهد پس نقطه‌ی عطف نخواهد داشت در نتیجه فقط یک مقدار صحیح برای k، آن هم صفر وجود دارد.

سؤال ۱۷: $y=2x^2+a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ فاقد عطف است حدود a کدام است.

۱) $|a|\geq 4$ ۲) $|a|\leq 4$ ۳) $|a|<4$ ۴) $|a|>4$

از اینکه y نقطه‌ی عطف ندارد معلوم می شود که y'' هیچگاه تغییر علامت نمی دهد.

$$y' = ۴x + a\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow y'' = ۴ - a\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۴}{a}$$

برای ریشه نداشتن y'' باید $\left|\frac{۴}{a}\right| > ۱$ باید $|a| < ۴$ باید یعنی $|a| < ۴$ اما اگر $a = \pm ۴$ باشد باوجود ریشه دار بودن y''، y نقطه‌ی عطف نخواهد داشت. زیرا ریشه های y'' مضاعف هستند و y'' در آن ها تغیر علامت نمی دهد پس در نهایت: $|a| \leq ۴$

سؤال۱۸: به ازای چند مقدار صحیح a ، تابع $f(x)=a\sin x+12\cos x+\frac{13}{2}x^2-7$ دارای نقطه‌ی عطف نمی باشد.

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) بی شمار

ـ گزینه (۳)

$$f'(x)=a\cos x-۱۲\sin x+۱۳x$$

$$f''(x)=-a\sin x-۱۲\cos x+۱۳=\circ \Rightarrow a\sin x+۱۲\cos x=۱۳$$

می دانیم $a\sin x+۱۲\cos x\le\sqrt{a^۲+۱۴۴}$ پس اگر $۱۳\le\sqrt{a^۲+۱۴۴}$ آنگاه معادله بالا جواب دارد. پس اگر $a^۲+۱۴۴\le ۱۳^۲$,f'' تغییر علامت نمی دهد:

$$a^۲\le ۱۶۹-۱۴۴\Rightarrow a^۲\le ۲۵\Rightarrow \boxed{-۵\le a\le ۵}$$

بنابراین به ازای یازده مقدار صحیح a تابع f عطف ندارد.

نکته: در توابع $a\sin x+b\cos x+c$ چنانچه $a^۲+b^۲\le c^۲$ باشد آنگاه $f(x)$ همواره یک علامت دارد و تغییر علامت نمی دهد.

📖 سؤال۱۹: تابع $f(x)=\frac{۲(x+۱)}{(x-۲)^۲}$ چند نقطه عطف دارد؟

۱) صفر　　　۲) ۱　　　۳) ۲　　　۴) ۳

پاسخ: گزینه (۲)

$$y=\frac{۲x+۲}{(x-۲)^۲}=\frac{۲(x-۲)+۶}{(x-۲)^۲}=\frac{۲}{(x-۲)}+\frac{۶}{(x-۲)^۲}\Rightarrow y'=\frac{-۲}{(x-۲)^۲}-\frac{۱۲}{(x-۲)^۳}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۴}{(x-۲)^۳}+\frac{۳۶}{(x-۲)^۴}=\frac{۴(x-۲)+۳۶}{(x-۲)^۴}\xrightarrow{y''=۰}(x-۲)=-۹\Rightarrow x=-۷$$

یعنی این تابع فقط یک نقطه عطف دارد.

📖 سؤال۲۰: $x=۲$ طول نقطه عطف تابع $f(x)=\dfrac{ax+b+۱}{x^۲}$ است، $۲a+۳b$ کدام است؟

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b+۱}{x^۲}$$

$$f'(x)=\frac{-a}{x^۲}-\frac{۲(b+۱)}{x^۳}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲a}{x^۳}+\frac{۶(b+۱)}{x^۴}=\frac{۲(ax+۳(b+۱))}{x^۴}\xrightarrow{f''(۲)=۰}۲a+۳(b+۱)=۰$$

$$\to ۲a+۳b+۳=۰\to \boxed{۲a+۳b=-۳}$$

📖 سؤال ۲۱: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+ax & x>۱\\ x^{۲}+b & x\leq ۱\end{cases}$ دارای نقطه عطف باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه (۳)

ابتدا باید ببینیم مشتق دوم در چه طولی می‌تواند تغییر علامت دهد.

$$f'(x)=\begin{cases}-۲x+a & x>۱\\ ۲x & x<۱\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$$

مشخص شد که تابع f'' تنها در $x=۱$ تغییر علامت می‌دهد، پس این طول می‌تواند طول نقطه عطف تابع باشد، به شرطی که اولاً تابع در $x=۱$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow -۱+a=۱+b\Rightarrow a-b=۲$$

و ثانیاً در نمودار تابع در $x=۱$ دارای مماس واحد باشد:

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow -۲+a=۲\Rightarrow a=۴\xrightarrow{a-b=۲}b=۲\Rightarrow a+b=۶$$

📖 سؤال۲۲: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{x-1}+1 & x>1 \\ 2a & x=1 \\ \sqrt[4]{1-x^2}+b & -1\le x<1 \end{cases}$ در $x=1$ نقطه عطف داشته باشد. آنگاه $a+b$ چقدر است؟ (آزاد ۸۵)

برای اینکه تابع f در $x=۱$ عطف داشته باشد باید در این نقطه پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(-\sqrt[۴]{x-۱}+۱)=۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(\sqrt[۴]{۱-x^۲}+b)=b \end{cases} \to b=۱$$

$$f(۱)=۲a=۱ \to a=\frac{۱}{۲}$$

$$a+b=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

سؤال۲۳: مجموعه طول های نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۳x^{۲} & x\geq ۱ \\ -۱۳-\dfrac{۹}{x} & x<-۱ \end{cases}$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x^2 & x>-1\\ -\dfrac{9}{x^2} & x<-1\end{cases}\rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>-1\\ -\dfrac{18}{x^3} & x<-1\end{cases}$$

$(x>-1)$ ریشه ساده $f''(x)=0$ است.

$$f''(x)=0\rightarrow\begin{cases}6x-6\rightarrow x=1\\ -\dfrac{18}{x^3}=0 \quad \times\end{cases}$$

پس تا این جا دو نقطه داریم که جهت تقعر تابع در آنها تغییر می کند. پس این دو نقطه، کاندیدای ما برای نقاط عطف این تابع هستند حالا باید بررسی کنیم که آیا تابع در این نقاط پیوسته هست یا نه و دیگر آن که مشتق های چپ و راست تابع f در این نقاط با هم برابرند یا نه!

تابع fدر $x=1$ و $x=-1$ پیوسته هست. همچنین : $f'_+(-1)=f'_+(-1)=f'_-(-1)=9$ و $f'(1)=-3$

یعنی در هر دو طول مورد نظر تابع f مشتق‌پذیر نیز می‌باشد پس $x=1,-1$ نقطه های عطف این تابع هستند.

📖 سؤال۲۴: طول نقطه عطف تابع $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۳-x^{۲}}{۲} & x<۱\\ \dfrac{۱}{x} & x\geq ۱\end{cases}$ در صورت وجود کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ۸۹)

$$f'(x)=\begin{cases}-x & x<۱\\ -\dfrac{۱}{x^۲} & x>۱\end{cases} \rightarrow f''(x)=\begin{cases}-۱ & x<۱\\ \dfrac{۲}{x^۳} & x>۱\end{cases}$$

$f''(x)$ فاقد ریشه است. ولی علامت آن در طرفین $x=۱$ عوض می‌شود پس نامزد جایزه نقطه عطف از آکادمی اسکار هست. تابع f در $x=۱$ پیوسته است و همچنین: $f'_-(۱)=f'_+(۱)=-۱$

پس $x=۱$ نقطه عطف تابع است.

سؤال۲۵: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-ax & x>-۱ \\ -x^{۲}-b & x\leq -۱ \end{cases}$ دارای نقطه عطف است. b و a کدام است؟

$$f'(x)=\begin{cases}2x-a & x>-1\\ -2x^2 & x\le -1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>-1\\ -2 & x<-1\end{cases}$$

علامت مشتق دوم تنها در $x=-1$ تغییر می کند پس این طول می تواند طول نقطه عطف تابع باشد به شرطی که اولاً تابع در $x=-1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)\Rightarrow 1+a=-1-b\to \boxed{a+b=-2}$$

و ثانیاً نمودار تابع در $x=-1$ دارای مماس واحد باشد (مشتق چپ و راست با یکدیگر برابر باشند.)

$$f'_+(-1)=f'_-(-1)\Rightarrow -2-a=2\to \boxed{a=-4\to b=2}$$

🕮 سؤال۲۶: نقطه‌ی $x=۱$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳+ax^۲ & x\le ۱ \\ b+\dfrac{۱}{ax} & x>۱ \end{cases}$ می باشد مجموعه جواب قابل قبول برای a کدام است.

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\left\{-۱,-\dfrac{۱}{۲}\right\}$ ۳) $\left\{-\dfrac{۱}{۲}\right\}$ ۴) ϕ

ابتدا پیوستگی و مشتق پذیری f و سپس تغییر علامت f'' را بررسی می کنیم.

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۲ax & x\le ۱\\ -\dfrac{۱}{ax^۲} & x>۱\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x+۲a & x<۱\\ \dfrac{۲}{ax^۳} & x>۱\end{cases}$$

پیوستگی: $f(۱^-)=f(۱^+)=f(۱)\Rightarrow ۱+\mathrm{a}=\mathrm{b}+\dfrac{۱}{a}$

مشتق پذیری : $f'_-(۱)=f'_+(۱)\Rightarrow ۳+۲a=-\dfrac{۱}{a}\Rightarrow ۲a^۲+۳a+۱=۰\Rightarrow a=-۱,-\dfrac{۱}{۲}$

برای آنکه f'' در $x=۱$ تغییر علامت دهد باید $f''_+(۱).f''_-(۱)<۰$ یعنی $\left(\dfrac{۲}{a}\right)(۶+۲\mathrm{a})<۰$ باشد. به ازای هر دو مقدار $a=-۱,a=-\dfrac{۱}{۲}$ این اتفاق می افتد پس a دو مقدار ۱- و $-\dfrac{۱}{۲}$ را اختیار می کند.

📖 سؤال۲۷: مجموع طول های نقاط عطف $f(x)=\begin{cases} x^{۳}+x^{۲} & x<۱ \\ ۷-\dfrac{۵}{x} & x\geq ۱ \end{cases}$ کدام است.

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) ۳-

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x & x\le 1\\ \dfrac{5}{x^2} & x>1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x+2 & x<1\\ \dfrac{-10}{x^3} & x>1\end{cases}\xrightarrow{f''(x)=0} x=-\frac{1}{3}$$

نقطه‌ی مرزی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$f'_+(1)=5,\ f'_-(1)=5$$

بدیهی است که f'' در سمت چپ یک مثبت و در سمت راست آن منفی است در نتیجه تغییر علامت می دهد پس $x=1$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

سؤال۲۸: اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴x & x\geq ۱ \\ bx^{۲}+a & x<۱ \end{cases}$ دارای عطف باشد مقدار ab کدام است.

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

می دانیم که توابع درجه‌ی دوم نقطه‌ی عطف تولید نمی کنند پس حتماً نقطه‌ی عطف $x=۱$ است. پس اولاً f در $x=۱$ پیوسته است یعنی: $\boxed{b+a=-۳}$ $۱-۴=b+a\Rightarrow$

ثانیاً f'' در $x=۱$ تغییر علامت می دهد و f'' به شکل زیر است:

$$f''(x)=\begin{cases}۲ & x>۱\\ ۲b & x<۱\end{cases}$$

یعنی باید $b<۰$ باشد و نیز باید f در $x=۱$ خط مماس داشته باشد:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۴ & x>۱\\ ۲bx & x<۱\end{cases}$$

با توجه به پیوستگی تابع و اینکه $\lim f'$ در ۱^+ و ۱^- موجود است نتیجه می گیریم که f' در $x=۱$ پیوسته است در نتیجه:

$$f'_+(۱)=-۲\ ,\ f'_-(۱)=۲b\Rightarrow\begin{cases}b=-۱\\ a=-۲\end{cases}\Rightarrow ab=۲$$

نقطهٔ عطف تابع $\sqrt[m]{x^{n}}(ax+b)$ برابر است با: $x_t = \frac{m-n}{m+n}\left(\frac{b}{a}\right)$

سؤال۲۹: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}\,(x-4)$ چند نقطه عطف دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه (۳)

در ابتدا واضح است که تابع مزبور روی R پیوسته است، پس خیالمان از شرط پیوستگی برای نقاط عطف راحت است:

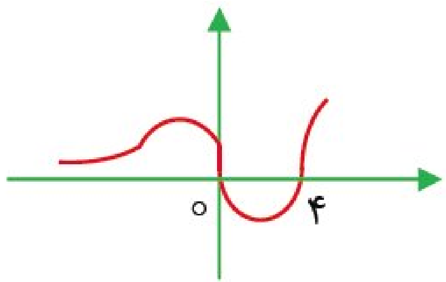
$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x-4)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)\Rightarrow f''(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{4(x+2)}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

مشخص است که علامت f'' در حول دو نقطه $x=-2$ و $x=0$ تغییر می‌کند. حال فقط کافی است ببینیم که آیا در این دو نقطه مماس واحد داریم یا نه! از ضابطه f' روشن است که $f'(-2)$ موجود و متناهی است و این یعنی در $x=-2$ عطف مایل داریم. اما در $x=0$ مقدار مشتق مساوی $-\infty$ است ($\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\infty$)، پس در این نقطه نیز مماس واحد داریم، اما این مماس عمودی است، یعنی $x=0$ عطف قائم تابع است (f در این نقطه عطف مشتق پذیر نیست.)

: ببخشین! روش حل این تست خیلی طولانی نبود؟! راه ساده تری نداشت؟!

حق با شماست! بچه ها در بعضی از توابع با استفاده از ظاهر آن ها می توانید برخی از نقاط عطف آن را تعیین کنید.



$$x_I = \frac{۳-۱}{۳+۱}(-۴) = -۲$$

📖 **سؤال۳۰: طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-10x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟ (سراسری ۸۷)**

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}+\frac{20}{9\sqrt[3]{x^4}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}+\frac{20}{9x\sqrt[3]{x}}=\frac{10x+20}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$x=-2$ ریشه ساده صورت کسر f'' است پس نقطه عطف fاست.

حالا یه سؤال: آیا $x=0$ (ریشه مخرج) هم نقطه عطف تابع است؟

آفرین! جواب نه است. زیرا $x=0$ ریشه مرتبه زوج مخرج هست ($x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^4}$) و علامت f'' در طرفین آن عوض نمی‌شود.

☜ راه حل دوم

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-10)\Rightarrow x_I=\frac{3-2}{3+2}(-10)=-2$$

سؤال ۳۱: فاصله‌ی نقاط عطف منحنی $y=(x+۲)\sqrt[۳]{x}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۱۰}$

روش دوم:

$$x_I=\frac{۳-۱}{۳+۱}(۲)=۱$$

$$y'=x^{\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x+۲)\Rightarrow y''=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۱}{۳}\left(-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}(x+۲)+x^{-\frac{۲}{۳}}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}(x-۱)=\frac{۴(x-۱)}{۹x\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

می بینیم که y'' در اطراف $x=۱,x=۰$ تغییر علامت می دهد و نیز y در این دو نقطه مماس دارد پس هر دو عطف y هستند یعنی نقاط $(۱,۳)(۰,۰)$ که فاصله‌ی این دو نقطه $\sqrt{۱۰}$ است.

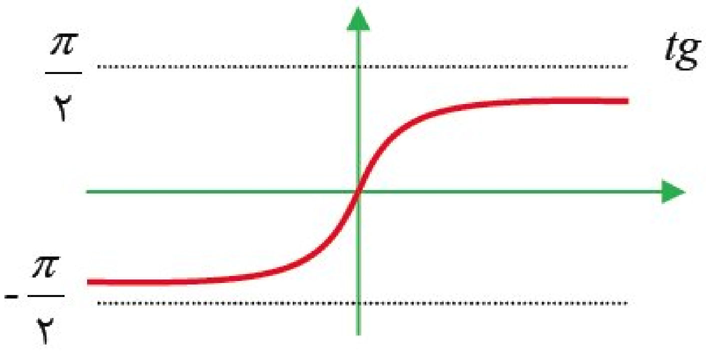
📖 سؤال۳۲: طول نقطهٔ عطف نمودار $y=(۵-x)\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (داخل ۹۵)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$$x_I=\frac{۳-۲}{۳+۲}(-۵)=-۱$$

۲) (ویژه رشته ریاضی) محل تلاقی توابع $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ و $tg^{-1}x$ و $\cot^{-1} x$ با محور y ها یعنی $x = \circ$ نقطه عطف این توابع می‌باشند

$tg^{-1}x$



📖 سؤال۳۳: طول نقطه عطف تابع $f(x)=\sin^{-1}(2x-1)+\pi$ کدام است؟ (آزاد خارج از کشور ۸۶)

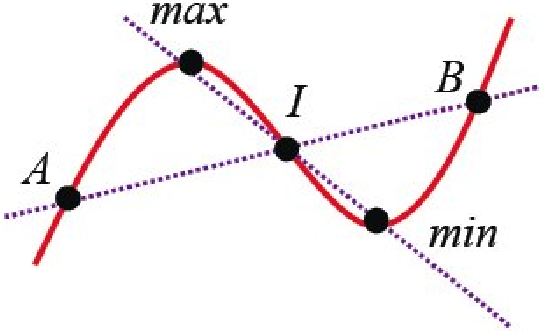
(رشته ریاضی)

حضور π در تابع هیچ تأثیری روی طول نقطه عطف ندارد و فقط عرض های تابع به اندازه π زیاد شده است. در تابع

$\sin^{-1}(2x-1)$ برای بدست آوردن طول نقطه عطف کافیه که $2x-1$ رو مساوی صفر قرار بدیم. $2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

در چند جمله ای درجه‌ی سوم، نقطه‌ی عطف مرکز تقارن است:

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d \Rightarrow x_I=-\frac{b}{۳a}$$



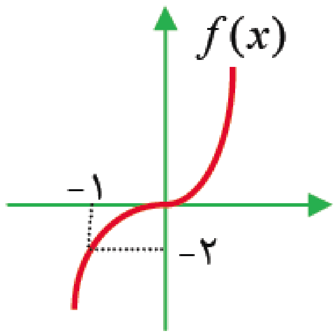
۱) نقطه‌ی عطف وسط اکسترمم هاست و خطی که از اکسترمم ها بگذرد از عطف هم می گذرد.

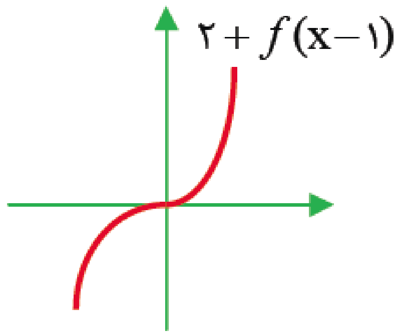
۲) هر خط دلخواه که از نقطه‌ی عطف (I) بگذرد و منحنی را در نقاط A , B قطع کند آنگاه $IA=IB$

📖 سؤال۳۴: اگر $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۴x$ باشد آنگاه کدام تابع زیر فرد است.

۱) $۲+f(x+۱)$　　۲) $۲+f(x-۱)$　　۳) $-۲+f(x-۱)$　　۴) $-۲+f(x-۱)$

نقطه‌ی $x_I=-\frac{b}{۳a}=-\frac{۳}{۳(۱)}=-۱$ طول نقطه‌ی عطف $f(x)$ است پس $(-۱,-۲)$ نقطه‌ی عطف در مرکز تقارن f است. پس اگر محورهای مختصات را به این نقطه انتقال دهیم به یک تابع فرد می رسیم در واقع تابع را به گونه ای انتقال دهیم که مبدأ مختصات نقطه‌ی عطف آن بشود.





سؤال۳۵: در تابع هایی به صورت $f(x)=x^{۳}-(m+۲)x^{۲}+۳x$ همواره صعودی باشند آنگاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع درکدام بازه است. (داخلی تجربی ۹۴)

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

برای آن که تابع $f(x)=x^{۳}-(m+۲)x^{۲}+۳x$ همواره صعودی باشد باید $f'(x)\geq ۰$ باشد.

$$f(x)=x^{۳}-(m+۲)x^{۲}+۳x \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۲(m+۲)x+۳\geq ۰$$

برای برقراری نامعادله‌ی فوق باید $\Delta'\leq ۰$ و ضریب $x^{۲}$ مثبت باشد پس داریم:

$$\Delta'\leq ۰ \Rightarrow (m+۲)^{۲}-۹\leq ۰ \Rightarrow (m+۲)^{۲}\leq ۹ \Rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳ \quad (۱)$$

از طرفی در تابع درجه‌ی سوم طول نقطه‌ی عطف $x_t=-\dfrac{b}{۳a}$ است.

$$x_t=-\frac{-(m+۲)}{۳(۱)}=\frac{m+۲}{۳}$$

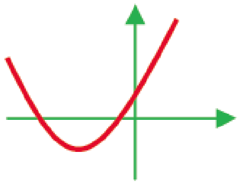
$$-۳\leq m+۲\leq ۳ \Rightarrow -۱\leq \frac{m+۲}{۳}\leq ۱ \Rightarrow x_t\in[-۱,۱]$$

📖 سؤال۳۶: اگر تابع هایی به صورت $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-(m-۱)x^{۲}+۸x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول های منفی باشند آنگاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است. (خارج تجربی ۹۴)

۱) $\left(-۵,-\frac{۱}{۲}\right)$ ۲) $(-۴,-۱)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(-\infty,-۴)$

$f'(x) = ۲x^۲ - ۲(m-۱)x + ۸$

سوال داره می گه که ریشه های $f'(x) = ۰$ هر دو منفی هستند یعنی نمودار $f'(x)$ به صورت زیر است:



$$\begin{cases} a > ۰ \to ۲ > ۰ \quad \checkmark \\ b > ۰ \to -۲(m-۱) > ۰ \to (m-۱) < ۰ \to m < ۱ \\ c > ۰ \to ۸ > ۰ \quad \checkmark \\ \Delta' > ۰ \to (m-۱)^۲ - ۱۶ > ۰ \to (m-۱)^۲ > ۱۶ \to \begin{cases} m-۱ > ۴ \\ \text{یا} \\ m-۱ < -۴ \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < ۱ & (۱) \\ \begin{cases} m > ۵ \\ \text{یا} \\ m < -۳ \end{cases} & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} m < -۳$$

طول نقطه‌ی عطف: $\dfrac{-b}{۳a} = \dfrac{m-۱}{۲}$

$$m < -۳ \Rightarrow m-۱ < -۴ \Rightarrow \frac{m-۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x_I \in (-\infty -۲)$$

📖 **سؤال۳۷:** به ازای کدام مقدار a ، نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-۳x^{۲}+ax$ بر روی نیمساز ناحیه چهارم قرار دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۸۸)

در تابع درجه سوم طول نقطه عطف برابر $x_I = -\frac{b}{۳a}$ است.

$$x_I = -\frac{b}{۳a} = -\frac{(-۳}{۳\left(\frac{۲}{۳}\right)} = \frac{۳}{۲}$$

$$y_I = f\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳} - ۳\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} + a\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳a-۹}{۲}$$

پس $I\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳a-۹}{۲}\right)$ نقطه عطف تابع است و چون روی نیمساز ناحیه چهارم قرار دارد. پس:

$$-\frac{۳}{۲} = \frac{۳a-۹}{۲} \Rightarrow ۳a-۹=-۳ \Rightarrow a=۲$$

📖 سؤال۳۸: خط مماس بر منحنی $y = x^{۳} - ax^{۲} + b$ در نقطه‌ی $x = -۱$ واقع بر آن از منحنی عبور می کند و محور y ها را در $y = -۲$ قطع می کند. $a - b$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) صفر

اگر تابع f دوبار مشتق پذیر با مشتق دوم پیوسته باشد و خط مماس بر نمودار f در نقطه ای ازمنحنی f عبور کند آنگاه آن نقطه‌ی عطف تابع است.

درا ین سؤال خط مماس بر نمودار در $x=-۱$ از منحنی عبور می کند پس : $y''(-۱)=۰$

$$y'(x)=۳x^۲-۲ax \Rightarrow y''(x)=۶x-۲a \Rightarrow y''(-۱)=-۶-۲a=۰ \Rightarrow \boxed{a=-۳}$$

پس خواهیم داشت $y'(-۱)=۳+۶(-۱)=-۳$ در نتیجه شیب این مماس نیز ۳- است و نیز داریم:

$$y(-۱)=-۱-a+b=۲+b$$

در نتیجه معادله‌ی مماس از این قرار است: $y-۲-b=-۳(x+۱)$

محل برخورد این خط با محور y ها یعنی $x=۰$ پس: $y=b-۱=-۲ \Rightarrow \boxed{b=-۱} \Rightarrow a-b=-۲$

سؤال۳۹: اگر $A(۱,-۳)$ نقطه عطف منحنی به معادله $y=ax^{۳}-x^{۲}-۳x+b$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟ (داخل تجربی۹۶)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

نقطهٔ $(۱,-۳)$ در تابع صدق می کند یعنی:

$$-۳=a(۱)^{۳}-(۱)^{۲}-۳(۱)+b\Rightarrow \boxed{a+b=۱}$$

$$x_I=\frac{-b}{۳a}=\frac{-(-۱)}{۳a}=\frac{۱}{۳a}=۱\Rightarrow ۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۳}+b=۱\Rightarrow \boxed{b=\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+\frac{۲}{۳}\Rightarrow y'=x^{۲}-۲x-۳\Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\begin{cases}-۱\\ ۳\end{cases}$$

		-۱		۳	
y'	$+$		$-$		$+$
	↗	max	↘	min	↗

$$y(-۱)=\frac{۱}{۳}(-۱)^{۳}-(-۱)^{۲}-۳(-۱)+\frac{۲}{۳}=-\frac{۱}{۳}-۱+۳+\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

سؤال۴۰: اگر $A(۱,-۲)$ نقطه عطف منحنی به معادله $y=ax^۳+bx^۲-۳x-۱$ باشد مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) فاقد ماکزیمم نسبی

نقطهٔ $A\,(1,-2)$ در تابع صدق می کند:

$$-2=a(1)^3+b(1)^2-3(1)-1\Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

$$x_I=\frac{-b}{3a}=1\Rightarrow -b=3a\Rightarrow \boxed{3a+b=0}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases}\Rightarrow -2a=2\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=3$$

$$\Rightarrow y=-x^3+3x^2-3x-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x-3=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow (x-1)^2=0$$

		1	
y'	$+$		$+$
	$\nearrow$		$\nearrow$

یعنی تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

📖 سؤال۴۱: به ازای کدام مقدار a مماس بر منحنی $y=x^{3}+ax^{2}+2x$ در نقطه‌ی عطف آن موازی نیم ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم است.

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

$$y' = ۳x^{۲} + ۲ax + ۲$$

$$y'' = ۶x + ۲a = ۰ \rightarrow x = -\frac{a}{۳} \rightarrow y' = ۲ - \frac{a^{۲}}{۳} = -۱ \rightarrow a = \pm ۳$$

📖 **سؤال۱۴۲: به ازای چه مقادیری از k نقطه‌ی عطف تابع $y=kx^{۳}+(k+۱)x^{۲}-x+۳$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم قرار دارد.**

۱) $k>۱$ یا $k<۰$ ۲) $۰<k<۱$ ۳) $-۱<k<۰$ ۴) $k>۰$ یا $k<-۱$

باید طول نقطه‌ی عطف منفی باشد.

$$y'=۳kx^{۲}+۲(k+۱)x-۱$$

$$y''=۶kx+۲(k+۱)=۰\rightarrow x=-\frac{k+۱}{۳k}$$

$$x<۰\rightarrow -\frac{k+۱}{۳k}<۰\rightarrow k<-۱ \text{ یا } k>۰$$

📖 سؤال۱۴۳: در نقاط A , B مماس بر منحنی $y=x^{۳}-۳x^{۲}+x-۲$ افقی است اگر A , B از خط $y=mx+۲$ به یک فاصله باشند مقدار m کدام می تواند باشد.

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) -۵ ۴) ۵

کافیست این خط از نقطه‌ی عطف عبور کند.

$$y'=۳x^{۲}-۶x+۱\Rightarrow y''=۶x-۶=۰\Rightarrow x=۱$$

نقطه‌ی $(۱,-۳)$ عطف است و در معادله خط صدق می دهیم:

$$y=mx+۲\Rightarrow -۳=m+۲\Rightarrow \boxed{m=-۵}$$

سؤال۱۴۴: به ازای کدام مقدار m مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $y=-\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}+mx-۱$ برابر ۲ است.

۱) ۳ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

در تابع درجه‌ی سوم مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی برابر دو برابر عرض عطف است.

$$y''=-۲x+۲\xrightarrow{y''=0}x=۱\Rightarrow y=m-\frac{۱}{۳}$$

$$y_{\max}+y_{\max}=۲\left(m-\frac{۱}{۳}\right)\Rightarrow ۲=۲\left(m-\frac{۱}{۳}\right)\Rightarrow m=\frac{۴}{۳}$$

📖 سؤال۴۵: خط $y=۵$ منحنی $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۲x+a$ را در نقاط A , B , C قطع می کند اگر $AB=BC$ آنگاه a کدام است.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

خط $y=۵$ از نقطه‌ی عطف عبور می کند:

$$y''=۶x-۶\xrightarrow{y''=0}x=۱\rightarrow y=a=۵$$

📖 **سؤال۴۶: فاصله‌ی مرکز تقارن تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}$ تا محور تقارن سهمی $y=-x^{۲}-۸x$ برابر ۳ است. مقدار a کدام است.**

۱) ۳ و ۲۱ **۲) ۳- و ۲۱-** **۳) ۱ و ۳** **۴) ۱- و ۳-**

مرکز تقارن $y=x^{۳}+ax^{۲}$ نقطه‌ی عطف به طول $x=-\frac{a}{۳}$ و محور تقارن سهمی $y=-x^{۲}-۸x$ خط $x=-۴$ می باشد

فاصله‌ی مرکز تقارن از محور تقارن برابر $\left|۴-\frac{a}{۳}\right|$ است پس $\left|۴-\frac{a}{۳}\right|=۳$ و لذا $a=۳,۲۱$

📖 **سؤال ۴۷:** در تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + x + ۵$ حاصل $f(-۵۱) + f(۵۳)$ کدام است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۶x + ۱ \to f''(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

پس نقاط $y = ۴, x = ۱$ مختصات نقطه‌ی عطف و مرکز تقارن منحنی است.

$$\frac{f(۱-\alpha) + f(۱+\alpha)}{۲} = ۳ \xrightarrow{\alpha = ۵۲} \frac{f(-۵۱) + f(۵۳)}{۲} = ۴$$

$$\Rightarrow f(-۵۱) + f(۵۳) = ۸$$

📖 سؤال۴۸: اگر عرض نقطه‌ی عطف نمودار تابع $y=e^{\frac{1}{x}}$ به صورت e^k باشد، k کدام است.

۱) -1 ۲) -2 ۳) -4 ۴) $-\frac{1}{2}$

ـ گزینه (۲)

$$y=e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y''=\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y''=\frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

در این نقطه مماس وجود دارد زیرا $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ وجود دارد و y'' از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد پس نقطه‌ی $\left(-\frac{1}{2},e^{-2}\right)$ نقطه‌ی عطف است در نتیجه مقدار k برابر ۲- است.

فرض کنید g دو بار مشتق پذیر $g(x)\neq 0$ و $n>1$ فرد باشد در این صورت در تابع $y=(x-a)^n g(x)$ نقطه‌ی $x=a$ نقطه‌ی عطف است. به همین ترتیب اگر m , n دو عدد فرد متمایز باشند در تابع $y=\sqrt[m]{(x-a)^n g(x)}$ نیز $x=a$ نقطه‌ی عطف است به عنوان مثال در مثال های زیر $x=1$ نقطه‌ی عطف هستند.

(۳) $y=\dfrac{(x-1)^3}{1+\cos x}$ (۲) $\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}$ (۱) $y=(x-1)^3(x+1)$

سؤال۱۴۹: نقطه‌ی (۲، ۴) نقطه‌ی عطف تابع $y = ax + \sqrt[3]{x+b}$ می باشد حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۳

ریشه‌ی زیر رادیکال $x = -b$ نقطه‌ی عطف است پس $-b = ۲$ و یا $b = -۲$

$$y = ax + \sqrt[۳]{x+b} = ax + \sqrt[۳]{x-۲} \xrightarrow{(۲,۴)} ۴ = ۲a + ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow a + b = ۰$$

سؤال ۵۰: نقطه‌ی $x=-۱$ نقطه‌ی عطف تابع $y=\sqrt[۳]{x^{۳}+ax^{۲}-a+۱}$ است. مقدار a کدام نمی تواند باشد.

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

$x=-۱$ زمانی می تواند طول نقطه‌ی عطف $\sqrt[۳]{x^{۳}+ax^{۲}-a+۱}$ باشد که $x=-۱$ ریشه‌ی ساده‌ی $x^{۳}+ax^{۲}-a+۱$ باشد پس:
یعنی نمی تواند ریشه‌ی مرتبه‌ی دوم $x^{۳}+ax^{۲}-a+۱$ باشد زیرا در این صورت $x=-۱$ طول نقطه‌ی بازگشتی y می شود پس باید $p'(-۱)\neq ۰$ باشد.

$$۳x^{۲}+۲ax\neq ۰\xrightarrow{x=-۱}۳-۲a\neq ۰\rightarrow a\neq \frac{۳}{۲}$$

📖 سؤال۵۱: اگر طول یکی از نقاط عطف $f(x)=۲x+\sqrt[۳]{x^{۲}+x-a}$ ، $x=۱$ باشد طول نقطه‌ی عطف دیگر آن کدام است.

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

طول یکی از نقاط عطف یک است پس $f''(۱)=۰$ و می دانیم که نقاط عطف $f(x)$, $mx+h+f(x)$ یکی هستند پس $۲x$ تاثیری در طول نقطه‌ی عطف $f(x)$ ندارد یعنی $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف $\sqrt[۳]{x^{۲}+x-a}$ است و می دانیم این اتفاق زمانی می افتد که $x=۱$ ریشه ساده‌ی زیر رادیکال باشدیعنی: $۱+۱-a=۰\to a=۲$

$$\to\sqrt[۳]{x^{۲}+x-۲}=۰\to\sqrt[۳]{(x-۱)(x+۲)}$$

یعنی طول نقطه‌ی عطف دیگر تابع $x=-۲$ است.

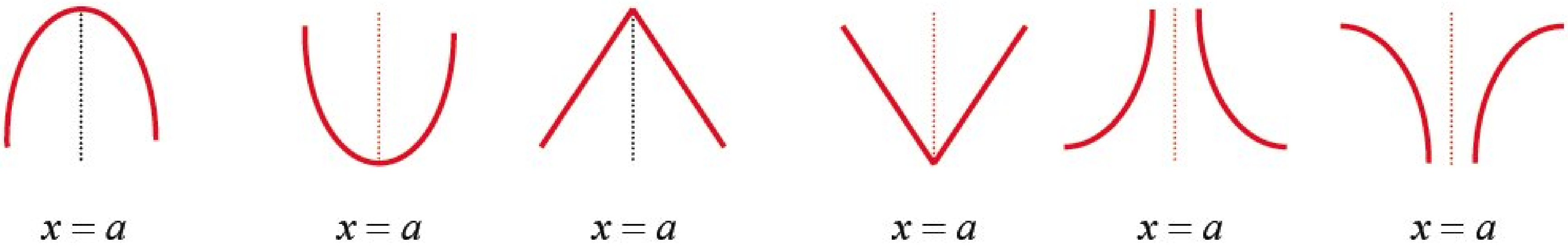
سؤال۵۲: طول یکی از نقاط عطف تابع $y=\sqrt[۳]{x^{۳}-۳x+۲}$ برابر است با:

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=-۱$ ۴) $x=-۲$

$$y=\sqrt[۳]{(x-۱)(x^{۲}+x-۲)}=y=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}(x+۲)}$$

ریشه‌ی ساده‌ی زیر رادیکال و نقطه‌ی عطف است.

اگر نمودار <u>مشتق</u> تابع پیوسته‌ی f به صورت های زیر باشد آنگاه $x = a$ نقطه‌ی عطف f می باشد.



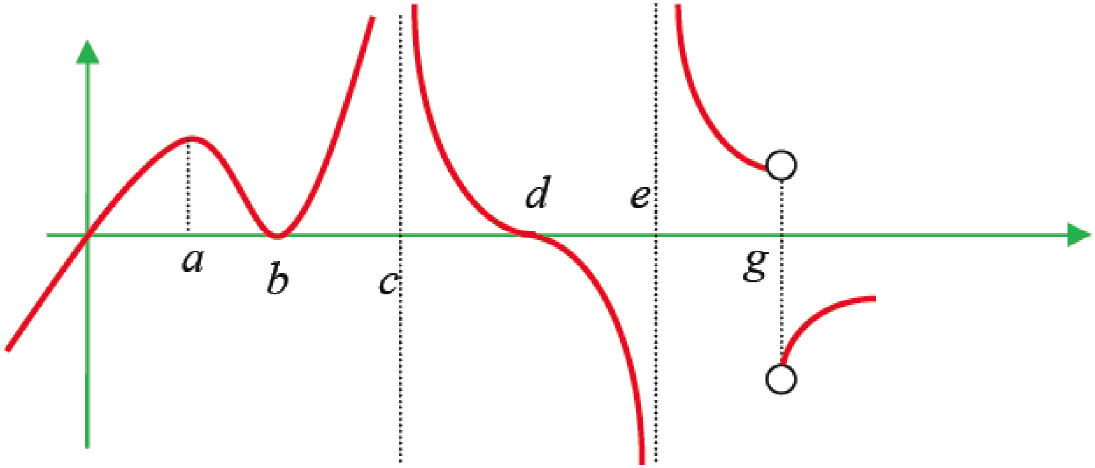
📖 سؤال۵۳: نمودار مشتق تابع پیوسته‌ی f به صورت زیر است. نمودار f چند نقطه‌ی عطف دارد.

۱) یک

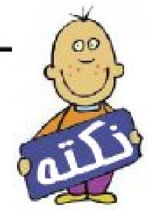
۲) دو

۳) سه

۴) چهار



با توجه به نکته‌ی بالا نقاط a , b , c نقاط عطف اند. در این نقاط نمودار f' از حالت صعودی اکید بودن به حالت نزولی اکید بودن (و یا برعکس) عوض می شود. لذا تقعر f نیز در این نقاط عوض می شود. توجه شود در نقطه‌ی g تقعر عوض می شود ولی چون $f'_+ \neq f'_-$ پس این نقطه عطف نیست.



دو نکته مهم:

۱. در تابع دو بار مشتق پذیر f، ریشه‌ی مضا عف f' نقطه‌ی عطف f است مانند $x=0$ در $y=x^3$

۲. مبدأ مختصات در تابع فردی که در همسایگی مبدأ مشتق پذیر و غیر خطی می باشد نقطه‌ی عطف است. مانند:

$$y=x|x|,\ y=x|x^2-1|,\ y=\frac{x}{1+|x|},\ y=\frac{x}{1+x^2},\ y=xe^{x^2},\ldots$$

📖 سؤال۵۱۴: طول نقطه‌ی عطف منحنی $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (تجربی۹۰)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

$f(-x)=-f(x)\xrightarrow{\text{تابع فرد است}}$ طول نقطه‌ی عطف $x=۰$

سؤال۵۵: طول نقطه عطف تابع $f(x) = x - ۲ + \frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

برای یافتن نقطه عطف تابع $f(x)$ کافیه که از عبارت $y = \frac{x}{۱+|x|}$ دو بار مشتق بگیریم:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{۱+x} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{۱-x} & x \leq ۰ \end{cases} \to y' = \begin{cases} \frac{۱}{(۱+x)^۲} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{(۱-x)^۲} & x \leq ۰ \end{cases} \to y'' = \begin{cases} \frac{-۲}{(۱+x)^۳} & x > ۰ \\ \frac{۲}{(۱+x)^۳} & x < ۰ \end{cases}$$

$y'' = ۰$ که ریشه نداره اما صبر کن y'' در $x = ۰$ تغییر علامت می‌ده.

در $x = ۰$ پیوسته است $y'_-(۰) = y'_+(۰) = ۱ \to$

$y''_-(۰) = ۲ \quad , \quad y''_+(۰) = -۲$

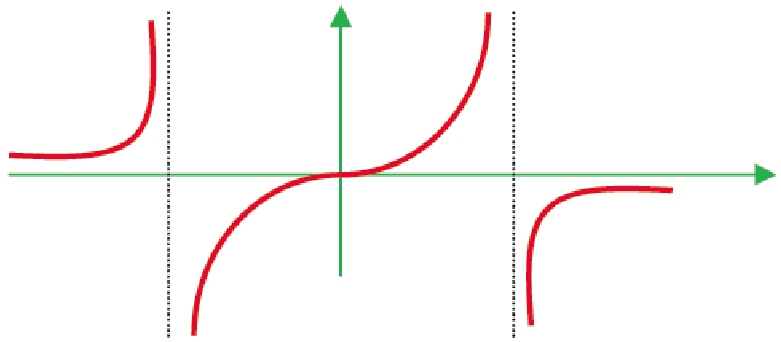
پس $x = ۰$ عطف این تابع است.

یادآوری: اگر تابع f در $x_۰$ دارای نقطه عطف باشد. در صورت مشتق دوم در $x_۰$ مقدارش صفر است.

روش دوم) $2-x$ در تعیین نقطهٔ عطف تأثیری ندارد و نقطهٔ عطف $\frac{x}{1+|x|}$, $x=0$ است.

📖 **سؤال۵۶: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{ax^2+bx+1}$ است مقادیر a , b چگونه است.**

(خارج از کشور تجربی ۹۴)



۱) $a<0, b=0$

۲) $a>0, b=0$

۳) $a>0, b=1$

۴) $a<0, b=1$

با توجه به شکل واضح است که $x=0$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است پس $f(x)$ باید فرد باشد پس $b=0$ است یعنی:

$$f(x)=\frac{x}{ax^2+1}$$

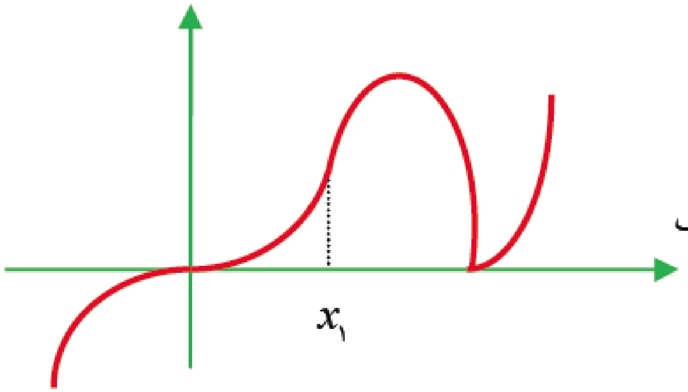
در ضمن چون ریشه های مخرج (مجانب های قائم) مختلف العلامه هستند پس حاصل ضرب آنها منفی است پس:

گزینه (۱) درست است $\Leftarrow$ $p=\frac{1}{a}<0 \rightarrow a<0 \Rightarrow$ حاصل ضرب ریشه های مخرج

📖 سؤال۵۷: مجموعه‌ی طول های نقاط عطف تابع $y=x\,|x^{۲}-۴x|$ کدام است. (سراسری ۹۲)

۱) $\{۰,۴\}$ ۲) $\left\{\frac{۴}{۳}\right\}$ ۳) $\left\{۰,\frac{۴}{۳},۴\right\}$ ۴) $\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$

$$y=x\,|x(x-۴)|=x\,|x|.|x-۴|$$



مجموعه‌ی طول نقاط عطف $۰,x_۱$ است که : $x_۱=\frac{۰+۰+۴}{۳}=\frac{۴}{۳}$

مجموعه‌ی طول نقاط عطف : $\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$

📖 سؤال۵۸: طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(۲-x)^{۲}}{x}$ کدام است. (خارج تجربی ۹۰)

۱) ۱−   ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

$$f(x)=\frac{۴-۴x+x^{۲}}{x}=\frac{۴}{x}-۴+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{۴}{x^{۲}}+۱\Rightarrow f''(x)=\frac{۸}{x^{۳}}$$

بنابراین تنها کاندیدای نقطه‌ی عطف ریشه‌ی مخرج f'' یعنی $x=۰$ می باشد ولی $x>۰$ در دامنه‌ی تابع f قرار ندارد (مخرج تابع f را صفر می کند) لذا نمی تواند طول نقطه‌ی عطف باشد پس نمودار تابع f فاقد نقطه‌ی عطف است.

نکته‌ی ویژه:

توابع دو به یک (توابع کسری که صورت آن ها درجه‌ی ۲ و مخرج آن ها درجه‌ی ۱ می باشد) و هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ نقطه‌ی عطف ندارند.

تابع داده شده یک تابع دو به یکی بوده و در نتیجه نقطه‌ی عطف ندارد.

📖 سؤال۵۹: به ازای چه مقادیری از m تابع $y = x^{۴} + ۴x^{۳} + ۶mx^{۲} - x + ۱$ نقطه‌ی عطف ندارد.

۱) $m \geq ۱$ ۲) $m > ۱$ ۳) $m \leq ۱$ ۴) $m < ۱$

$$y' = ۴x^{۳} + ۱۲x^{۲} + ۱۲mx - ۱$$

$$y'' = ۱۲x^{۲} + ۲۴x + ۱۲m$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow ۱۲(x^{۲} + ۲x + m) = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{نقطه‌ی عطف ندارد}]{\Delta \leq ۰} ۴ - ۴m \leq ۰ \rightarrow m \geq ۱$$

سؤال ۶۰: اگر $A(2,1)$ عطف تابع $y=x^4+2ax^3+2x+b$ باشد $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۵- ۲) ۱۵ ۳) ۱۱- ۴) ۱۱

از آنجایی که طول نقطه‌ی عطف تابع $x=2$ است پس $x=2$ ریشه‌ی مشتق دوم است:

$$y' = 4x^3 + 6ax^2 + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} y'' = 12x^2 + 12ax \\ y''(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12\times 4 + 12\times 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

اما نقطه‌ی A روی نمودار است پس $y(2)=1$ یعنی:

$$2^4 + 2a(2)^3 + 4 + b = 1 \Rightarrow 16 - 4\times 8 + 4 + b = 1$$

$$\Rightarrow b = 1 + 16 - 4 = 13 \Rightarrow a - b = -15$$

سؤال۶۱: اگر $A(-۴,-۱)$ نقطه‌ی عطف معکوس تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ باشد، $a-b$ کدام است.

۱) ۴-　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۳-

نقطه‌ی $A(-۴,-۱)$ نقطه‌ی عطف معکوس تابع است. پس $B(-۱,-۴)$ نقطه‌ی عطف خود تابع است. در نتیجه $x=-۱$ ریشه‌ی y'' است.

$$y'=۳x^{۲}+۲ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} y''=۶x+۲a \\ y''(-۱)=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۶+۲a=۰ \Rightarrow \boxed{a=۳}$$

در ضمن B روی نمودار تابع است در نتیجه:

$$y(-۱)=-۴ \Rightarrow -۱+a-b=-۴ \Rightarrow -۱+۳-b=-۴ \Rightarrow b=۶ \Rightarrow \boxed{a-b=-۳}$$

همانطور که گفتیم در توابع کسری نقطه‌ی اکسترمم نسبی در هوپیتال کسر صدق می کند. حالا فرض کنید که می خوایم عطف یک تابع را پیدا کنیم. از اونجایی که در واقع عطف یک تابع، اکسترمم مشتق اول تابع است پس در هوپیتال y' صدق می کند. به مثال های زیر خوب توجه کنید.

📖 سؤال۶۲: خط $y=\frac{۳}{۲}$ از نقطه‌ی عطف منحنی $y=\frac{a}{x^{۲}+b}$ عبور می کند حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است.

مشتق تابع را با هوپیتالش مساوی قرار می دهیم:

$$y' = \frac{-2ax}{(x^2+b)^2} \overset{HOP}{=\!=\!=} \frac{-2a}{4x(x^2+b)} \Rightarrow \frac{x}{(x^2+b)} = \frac{1}{4x} \Rightarrow 4x^2 = x^2 + b \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{b}{3}}$$

اگر در معادله‌ی تابع جایگزین کنیم باید عرض عطف $y = \frac{3}{2}$ بدست آید:

$$y = \frac{a}{x^2+b} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\frac{b}{3}+b} = \frac{3a}{4b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

سؤال۶۳: اگر $A(1,3)$ نقطه‌ی عطف $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$ باشد حاصل $a-b$ کدام است.

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۴

$(1,3)$ در تابع صدق می کند یعنی $\frac{a}{1+b}=3$ یا $a=3+3b$ پس $a-3b=3$

مشتق تابع را با هوپیتالش مساوی قرار می دهیم.

$$y'=\frac{-2ax}{(x^2+b)^2}\overset{HOP}{=\!=}\frac{-2a}{4x(x^2+b)}\Rightarrow\frac{x}{(x^2+b)}=\frac{1}{4x}\Rightarrow 4x^2=x^2+b\Rightarrow x^2=\frac{b}{3}$$

اگر در معادله‌ی تابع جایگزین کنیم باید عرض عطف $y=3$ بدست آید:

$$y=\frac{a}{x^2+b}\Rightarrow 3=\frac{a}{\frac{b}{3}+b}=\frac{3a}{4b}\Rightarrow 1=\frac{a}{4b}\Rightarrow \boxed{a=4b}\Rightarrow 4b-3b=3\Rightarrow b=3,a=12$$

$$\Rightarrow a-b=12-3=9$$

📖 سؤال۶۴: اگر $C(۱,۳)$ نقطه‌ی عطف $y=\dfrac{ax+b}{x^۲+۱}$ است حاصل $۲a+b$ کدام است.

نقطه‌ی در تابع صدق می کند پس: $\frac{a+b}{۲}=۳$ یعنی $\boxed{a+b=۶}$

$$y'=\frac{a(x^۲+۱)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-ax^۲+۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}$$

می دونیم که نقطه‌ی عطف در هوپیتال y' صدق می کند پس:

$$=\frac{-ax^۲-۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}\underset{=\!=}{HOP}\frac{-۲ax-۲b}{۴x(x^۲+۱)}$$

پس داریم:

$$\frac{-ax^۲-۲bx+a}{x^۲+۱}=\frac{-ax-b}{۲x}$$

$x=۱$ در رابطه‌ی بالا صدق می کند:

$$\frac{-a-۲b+a}{۲}=\frac{-a-b}{۲}\Rightarrow -b=\frac{-a-b}{۲}\Rightarrow ۲b=a+b\Rightarrow \boxed{a=b}$$

$$\xrightarrow{a+b=۶}\begin{cases}a=۳\\ b=۳\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=۲(۳)+۳=۹$$

سؤال۶۵: نقاط عطف تابع $y = e^x (x^2 - 7x + 14)$ را بدست آورید. (کتاب درسی ریاضی عمومی)

$$y' = e^{x}(x^{۲} - ۷x + ۱۴) + e^{x}(۲x - ۷)$$

$$y' = e^{x}(x^{۲} - ۵x + ۷) = \frac{x^{۲} - ۵x + ۷}{e^{-x}}$$

برای بدست آوردن نقاط عطف کافیست از y' هوپیتال بگیریم:

$$\frac{x^{۲} - ۵x + ۷}{e^{-x}} \underline{\underline{\underline{HOP}}} \frac{۲x - ۵}{-e^{-x}} \Rightarrow x^{۲} - ۵x + ۷ = -۲x + ۵ \Rightarrow x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

سؤال۶۶: مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر منحنی به معادلهٔ $(x^۲+۲x+۲)e^{-x}$ رو به پایین باشد کدام است؟

(سراسری ۸۹)

$$f'(x)=(۲x+۲)e^{-x}-e^{-x}(x^۲+۲x+۲)=e^{-x}(۲x+۲-x^۲-۲x-۲)=-x^۲e^{-x}$$

برای بدست آوردن نقاط عطف از هوپیتال $f'(x)$ استفاده می کنیم:

$$\frac{-x^۲}{e^x}\underline{\underline{HOP}}\frac{-۲x}{e^x}\Rightarrow -x^۲=-۲x\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}\Rightarrow ۰<x<۲$$

📖 سؤال۶۷: تقعر نمودار تابع $f(x) = x^2 e^{-x}$ در بازه (a,b) رو به پایین است بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$f'(x)=۲xe^{-x}-e^{-x}x^{۲}=e^{-x}(۲x-x^{۲})$$

برای بدست آوردن نقاط عطف از هوپیتال مشتق استفاده می کنیم:

$$\frac{۲x-x^{۲}}{e^{x}}\underline{\underline{HOP}}\frac{۲-۲x}{e^{x}}\Rightarrow ۲x-x^{۲}=۲-۲x\Rightarrow x^{۲}-۴x+۲=۰$$

$$x^{۲}-۴x+۴-۴+۲=۰\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۲\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow x=\begin{cases}۲-\sqrt{۲}\to a\\ ۲+\sqrt{۲}\to b\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=۲+\sqrt{۲}-(۲-\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}$$

📖 سؤال۶۸: در کدام بازه تابع $y = x^۲ e^{-x}$ نزولی با تقعر رو به پایین است؟

۱) $(۲-\sqrt{۲}, ۲)$ ۲) $(۲, ۲+\sqrt{۲})$ ۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(۰, ۲-\sqrt{۲})$

$$y' = ۲xe^{-x} - x^{۲}e^{-x} = e^{-x}(۲x - x^{۲}) \leq ۰ \xrightarrow{e^{-x} > ۰} ۲x - x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x(۲ - x) \leq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \\ \text{یا} \\ x \leq ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

$$y' = \frac{۲x - x^{۲}}{e^{x}} \underline{\underline{HOP}} \frac{۲ - ۲x}{e^{x}} \Rightarrow ۲x - x^{۲} = ۲ - ۲x \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۲ \pm \sqrt{۲} \Rightarrow [۲ - \sqrt{۲}, ۲ + \sqrt{۲}]$$

در بازه تقعر تابع رو به پایین است ← (۲)

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x \in [۲, ۲ + \sqrt{۲}]$$

📖 سؤال۶۹: با فرض اینکه تقعر نمودار $(x^{2}+m)e^{2x}$ در بازهٔ (a,b) رو به پایین باشد بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۲ باشد مقدار m کدام است.

$$f'(x)=2xe^{2x}+2e^{2x}(x^2+x)=2(x^2+x+m)e^{2x}$$

برای بدست آوردن نقاط عطف از هوپیتال مشتق استفاده می کنیم:

$$\frac{2(x^2+x+m)}{e^{-2x}}\underline{\underline{HOP}}\frac{2(2x+1)}{-2e^{-2x}}\Rightarrow\frac{x^2+x+m}{1}=\frac{2x+1}{-2}\Rightarrow -2x^2-2x-2m=2x+1$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+2m+1=0$$

طول بازه برابر ۲ است یعنی:

$$|x_1-x_2|=2\Rightarrow\sqrt{s^2-4p}=2\Rightarrow s^2-4p=4\Rightarrow(-2)^2-4\left(\frac{2m+1}{2}\right)=4\Rightarrow 4-2(2m+1)=4$$

$$\Rightarrow 2m+1=\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

📖 سؤال۷۰: مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{-۲}{x^{۲}+۳}$ رو به بالا باشد کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$f'(x)=\frac{۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}$$

برای بدست آوردن نقاط عطف از هوپیتال مشتق استفاده می کنیم:

$$\frac{۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}\underset{=\!=}{HOP}\frac{۴}{۲(۲x)(x^{۲}+۳)}\Rightarrow\frac{x}{x^{۲}+۳}=\frac{۱}{۴x}\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۳$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲}=۳\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

📖 سؤال۷۱: تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۲}+۹}{x^{۲}+۱۲}$ در بازهٔ (a,b) رو به بالاست. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است. (سراسری ۸۸)

$$f'(x)=\frac{۱۲-۹}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}(۲x)=\frac{۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}$$

برای یافتن نقاط عطف از هوپیتال مشتق استفاده می کنیم:

$$\frac{۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}\underline{\underline{HOP}}\frac{۶}{۲(۲x)(x^{۲}+۱۲)}\Rightarrow\frac{x}{x^{۲}+۱۲}=\frac{۱}{۴x}\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۱۲$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲}=۱۲\Rightarrow x^{۲}=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

📖 سؤال۷۲: تقعر تابع $y=\frac{1}{x^2+12}$ در بازهٔ $(-a,a)$ رو به پایین است بیشترین مقدار a کدام است؟

$$y'=\frac{-2x}{(x^2+12)^2}$$

برای بدست آوردن نقاط عطف کافیست از تابع مشتق هوپیتال بگیریم:

$$\frac{-2x}{(x^2+12)^2}\underline{\underline{HOP}}\frac{-2}{2(2x)(x^2+12)}\Rightarrow\frac{x}{x^2+12}=\frac{1}{4x}\Rightarrow 4x^2=x^2+12\Rightarrow 3x^2=12$$

$$\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

سؤال۷۳: نقاط عطف تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ روی کدام خط قرار دارند؟

۱) $y=\sqrt{۳}x$ ۲) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x$ ۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{x}{۴}$

پاسخ: گزینه (۴)

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+۱)-۲x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲x(x^{۲}+۱)^{۲}-۴x(x^{۲}+۱)(۱-x^{۲})}{(x^{۲}+۱)^{۴}}$$

$$=\frac{-۲x(x^{۲}+۱)(۳-x^{۲})}{(x^{۲}+۱)^{۴}}=\frac{-۲x(۳-x^{۲})}{(x^{۲}+۱)^{۳}}\xrightarrow{f''(x)=\circ}x=\circ,\pm\sqrt{۳}\rightarrow A\left|\begin{matrix}\circ\\ \circ\end{matrix}\right.\ ,\ B\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۴}\end{matrix}\right.\ ,\ C\left|\begin{matrix}-\sqrt{۳}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۴}\end{matrix}\right.$$

پس این سه نقطه روی خط $y=\frac{x}{۴}$ قرار دارند.

روش دوم)

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\overset{HOP}{=\!=\!=}\frac{-2x}{2(2x)(x^2+1)}\Rightarrow\frac{1-x^2}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -x^2-1=2-2x^2\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

در ضمن تابع فرد است پس $x=0$ نیز طول نقطهٔ عطف آن است.

📖 سؤال۷۴: نقاط عطف و اکسترمم تابع $f(x)=\frac{۱۲}{۳+x^{۲}}$ تشکیل یک مثلث می دهند. مساحت این مثلث کدام است؟

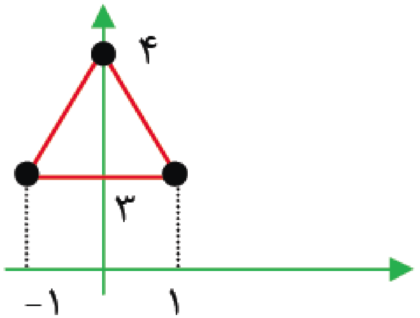
۱) ۱ ‏ ‏ ‏ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ‏ ۴) ۳

$$f'(x)=\frac{-۱۲\times ۲x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}=-۲۴x(x^{۲}+۳)^{-۲}=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow y=۴$$

$$f''(x)=-۲۴(x^{۲}+۳)^{-۲}-۲۴x(-۲(x^{۲}+۳)^{-۳}(۲x))=۰\Rightarrow (x^{۲}+۳)^{-۲}=۴x^{۲}(x+۳)^{-۳}$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۳\Rightarrow ۳x^{۲}=۳\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow y=۳$$

پس نقطه‌ی اکسترمم تابع $(۰,۴)$ و نقاط عطف آن $(\pm ۱,۳)$ هستند.



$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۲\times ۱}{۲}=۱$$

روش دوم)

$$\frac{-۲۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}\overset{HOP}{=\!=\!=}\frac{-۲۴}{۲(۲x)(x^{۲}+۳)}\Rightarrow\frac{x}{x^{۲}+۳}=\frac{۱}{۴x}\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۳\Rightarrow ۳x^{۲}=۳\Rightarrow x^{۲}=\pm۱$$

📖 سؤال۷۵: نمودار $y=e^{\sin x}$ در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

$$y'=\cos x e^{\sin x}=\frac{\cos x}{e^{-\sin x}}\overset{HOP}{=\!=\!=}\frac{-\sin x}{-\cos x e^{-\sin x}}\Rightarrow \cos x=\tan x\Rightarrow \cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

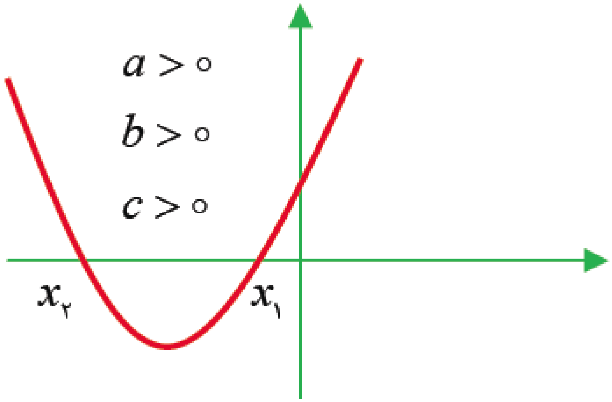
$$\Rightarrow \cos^{۲} x=\sin x\Rightarrow ۱-\sin^{۲} x=\sin x\Rightarrow \sin^{۲} x+\sin x-۱=۰\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

معادله‌ی بالا در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.

📖 سؤال۷۷: دو نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $y = x^{۲}e^{x}$ در کدام نواحی قرار دارند؟ (سراسری ۸۴)

$$y' = ۲xe^{x} + x^{۲}e^{x} = e^{x}(۲x + x^{۲}) \rightarrow y'' = e^{x}(۲x + x^{۲}) + e^{x}(۲ + ۲x) = e^{x}(x^{۲} + ۴x + ۲) \xrightarrow{y''=۰}$$

$$x^{۲} + ۴x + ۲ = ۰ \qquad \Delta' > ۰$$



پس نقاط عطف در ناحیه دوم یا سوم قرار دارند.

اما $x^{۲}e^{x}$ همواره مثبت است پس نقاط عطف در ناحیه دوم قرار دارد.

📖 سؤال۸۰: اگر $A(1,-5)$ اکسترمم مشتق تابع $y=x^4+ax^3+bx^2+1$ می باشد مقدار $b-a$ کدام است.

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

از آنجایی که A اکسترمم y' است پس y'' در طول A صفر است یعنی: $y''(1)=0$

$$y'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(x)=12x^2+6ax+2b \\ y''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12+6a+2b=0 \rightarrow \boxed{3a+b=-6}$$

اما داریم $y'(1)=-5$ زیرا A روی نمودار y' است. در نتیجه:

$$4+3a+2b=-5 \rightarrow \boxed{3a+2b=-9}$$

$$\begin{cases} 3a+b=-6 \\ 3a+2b=-9 \end{cases} \Rightarrow b=-3, a=-1 \Rightarrow b-a=-2$$

سؤال۸۱: اگر فاصله‌ی نقاط عطف تابع $f(x)=(x^{2}-k)^{2}$ برابر ۲ باشد k کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$f'(x)=2(2x)(x^{2}-k)=4x^{3}-4kx \Rightarrow f''(x)=12x^{2}-4k=0$$

$$\Rightarrow x^{2}=\frac{k}{3} \Rightarrow f(x)=\left(\frac{k}{3}-k\right)^{2}=\frac{4}{9}k^{2}$$

پس نقاط عطف عبارت اند از $\left(\pm\sqrt{\frac{k}{3}},\frac{4}{9}k^{2}\right)$ که فاصله‌ی آنها برابر است با $2\sqrt{\frac{k}{3}}$ در نتیجه :

$$\sqrt{\frac{k}{3}}=1 \Rightarrow \frac{k}{3}=1 \Rightarrow \boxed{k=3}$$

📖 سؤال۸۲: اگر $A(۱,۱)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=ax^{۲}+bLnx$ باشد a+b کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$f'(x)=۲ax+\frac{b}{x}\Rightarrow f''(x)=۲a-\frac{b}{x^{۲}}$$

$$f''(۱)=۰\Rightarrow ۲a-b=۰$$

در ضمن $A(۱,۱)$ روی نمودار است پس $f(۱)=۱$ یعنی:

$$a+bLn۱=۱\Rightarrow a=۱\Rightarrow ۲-b=۰\Rightarrow \boxed{b=۲}$$

پس: $\boxed{a+b=۳}$

📖 سؤال۸۳: نقطه‌ی $(۱,a)$ نقطه‌ی عطف تابع $y=\frac{۴}{x+b}+Lnx$ می باشد. مقدار a کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$(۱,a)$ نقطه‌ی عطف است پس خواهیم داشت: $y''(۱)=۰$

$$\left.\begin{array}{l} y'=\frac{-۴}{(x+b)^۲}+\frac{۱}{x}\Rightarrow y''=\frac{۸}{(x+b)^۳}-\frac{۱}{x^۲} \\ y''(۱)=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۸}{(b+۱)^۳}=۱\Rightarrow\boxed{b=۱}$$

از این که $(۱,a)$ روی نمودار است نتیجه می گیریم $y(۱)=a$ پس داریم: $y(۱)=\frac{۴}{۱+۱}=a\Rightarrow a=۲$

📖 سؤال۸۴: اگر فاصله‌ی نقطه عطف تابع $y=x^{۲}+\sqrt{x-k}$ از محور xها برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد مقدار مثبت k کدام است.

$$y'=۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x-k}}\rightarrow y''=۲-\frac{۱}{۴(x-k)^{\frac{۳}{۲}}}=۰\Rightarrow ۴(x-k)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow (x-k)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow x=k+\frac{۱}{۴}$$

و عرض نقطه‌ی عطف نیز برابر است با:

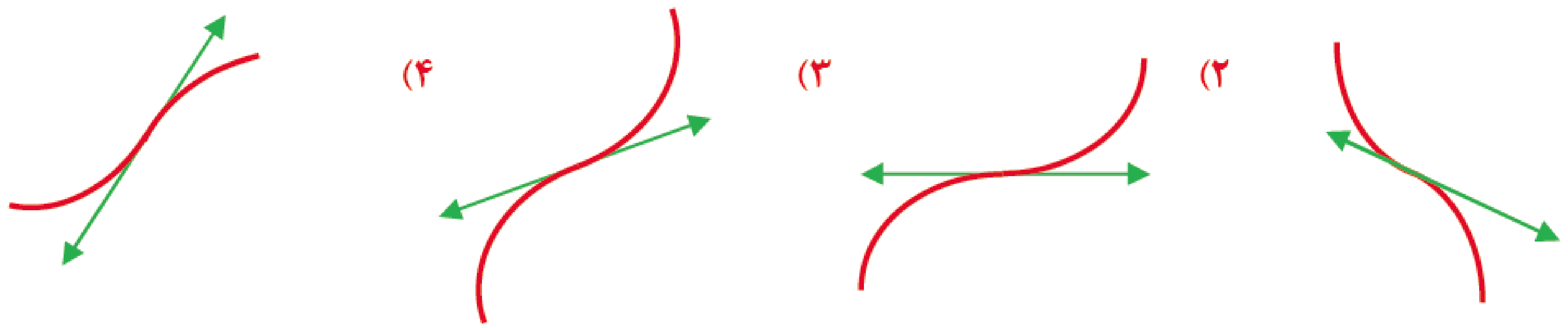
$$y\left(k+\frac{۱}{۴}\right)=\left(k+\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}$$

که همین مقدار فاصله‌ی عطف از محور x است در نتیجه:

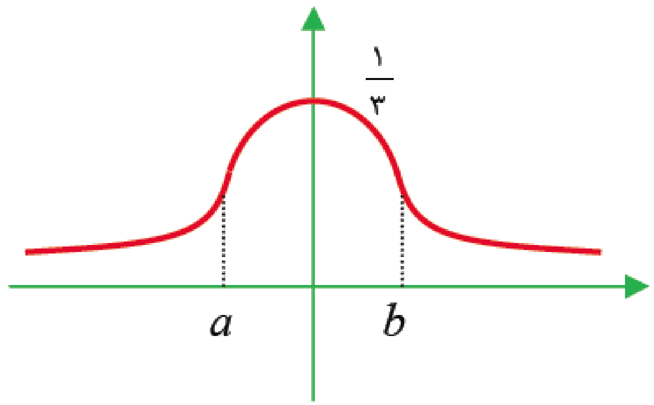
$$\left.\begin{array}{l}\left(k+\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow k+\frac{۱}{۴}=\pm ۱\\ k>۰\end{array}\right\}\Rightarrow k=\frac{۳}{۴}$$

📖 **سؤال۸۵:** نمودار تابع $y = \frac{۱}{x^۲ + ۳}$ در مجاورت عطف آن وقتی طول عطف منفی باشد به کدام صورت است.

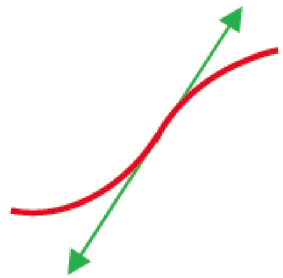
۱) ۲) ۳) ۴)



نمودار را رسم می کنیم:



a,b نقاط عطف تابع هستند و چون وضعیت نمودار در اطراف نقطه‌ی عطف منفی (a) مطلوب مسأله بود پس: گزینه ۴ درست است.



پایان

موفق باشید