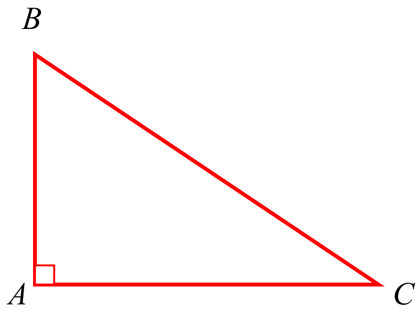
نسبت های مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی :

در مثلث قائم ازاویه ABC که $\hat{A}=۹۰^\circ$ برای هر زاویهٔ حاده تعریف می کنیم:



$$\sin\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{AC}{AB}$$

$$\cot\hat{B}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{AB}{AC}$$

مقادیر به دست آمده را **نسبت های مثلثاتی زاویهٔ** B می نامیم. مثلاً برای زاویهٔ C داریم:

$$\sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}\ ,\quad \cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}\ ,\quad \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}\ ,\quad \cot\hat{C}=\frac{AC}{AB}$$

نکته: بین نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ حاده مانند B روابط زیر برقرار است.

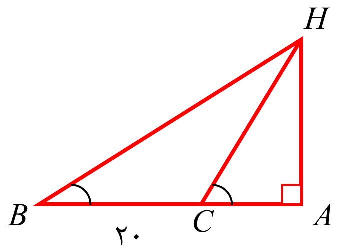
$$\tan\hat{B}.\cot\hat{B}=۱\ ,\quad \tan\hat{B}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}\ ,\quad \cot\hat{B}=\frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}$$

البته روابط دیگری هم برقرار است که در قسمت های بعدی به نام اتحادهای مثلثاتی به آنها می پردازیم.

بدین ترتیب:

$\hat{A}$	$\sin\hat{A}$	$\cos\hat{A}$	$\tan\hat{A}$	$\cot\hat{A}$
۳۰°	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
۴۵°	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
۶۰°	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

سؤال ۱: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰^\circ , \hat{C}=۶۰^\circ$ اندازهٔ AH کدام است؟



۱) ۱۰

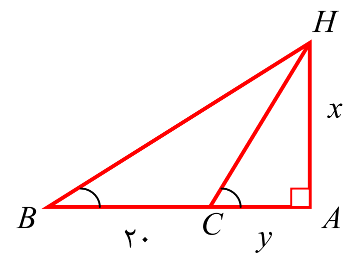
۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

☜ پاسخ: گزینه۳

اگر فرض کنیم $AC = y, AH = x$ آنگاه در شکل مقابل داریم:

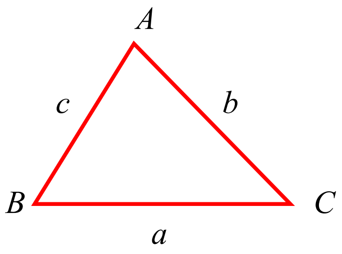


$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{x}{20+y} \Rightarrow \tan 30^\circ = \dfrac{x}{y+20} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad (*) \\ \tan\hat{C} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{3} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{3}}{y+20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3y = y + 20$$

$$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow x = 10\sqrt{3} \Rightarrow AH = 10\sqrt{3}$$

📖 **سؤال ۲:** در مثلث ABC ساده شدهٔ $b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$ کدام است؟



۱) a

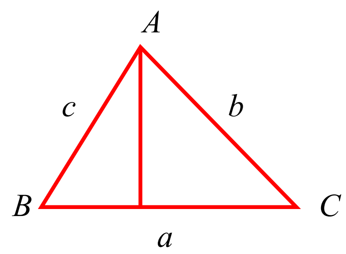
۲) $a\cos\hat{A}$

۳) $a\sin\hat{A}$

۴) $\cos\hat{A}$

☜ پاسخ: گزینه۱

فعلاً نسبت های مثلثاتی را برای زوایای مثلث قائم الزاویه تعریف می کنیم پس:



مثلث ABH: $\cos\hat{B} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB\cos\hat{B} \Rightarrow BH = c\cos\hat{B}$

مثلث AHC: $\cos\hat{C} = \dfrac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\cos\hat{C} \Rightarrow CH = b\cos\hat{C}$

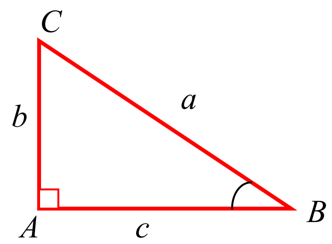
$$CH + BH = BC \Rightarrow BC = c\,\mathrm{coss}\,\hat{B} + b\cos\hat{C} = a$$

📖 **سؤال ۳:** در مثلث قائم الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ حاصل $\dfrac{1}{1+\tan\hat{C}} + \dfrac{1}{1+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ‏ ‏ ۲) ‏ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴

☜ پاسخ: گزینه۱

با توجه به مثلث ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ داریم:



$$\tan\hat{B} = \frac{b}{c}, \tan\hat{C} = \frac{c}{b}$$

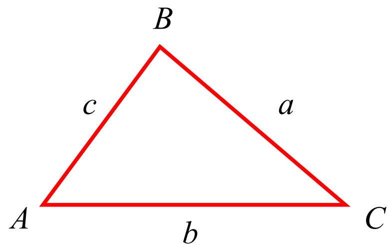
$$\frac{1}{1+\tan\hat{B}} + \frac{1}{1+\tan\hat{B}} = \frac{1}{1+\frac{b}{c}} + \frac{1}{1+\frac{c}{b}} = \frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c} = 1$$

روابط طولی در مثلث :

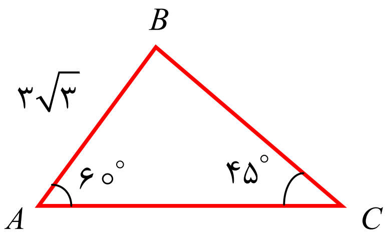
در مثلث دلخواه ABC روابط زیر بین اجزای مثلث برقرار است:

$$1)\ S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

$$2)\ \frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$



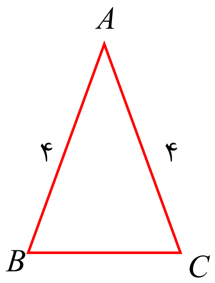
سؤال ۴: در مثلث شکل مقابل اندازهٔ ضلع BC کدام است؟



پاسخ: در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}\Rightarrow BC=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

سؤال ۵: در یک مثلث متساوی الساقین اندازهٔ هر ساق آن ۴ و مساحت آن برابر ۴ می باشد. بزرگترین زاویهٔ مثلث چه عددی است؟



۱) 75° ۲) 60°

۳) 45° ۴) 72°

پاسخ: گزینهٔ۱

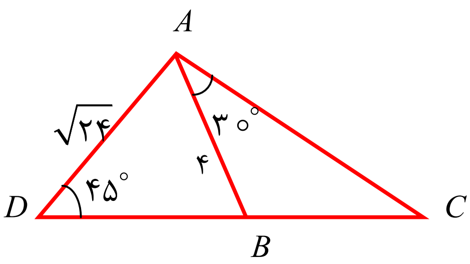
با توجه به داریم:

$$4=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin\hat{A}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{A}=30^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=75^\circ$$

نکته: در هر مثلث علاوه بر روابط طولی که بیان شد رابطهٔ زیر هم برقرار است:

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\hat{A}\\ b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos\hat{B}\\ c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos\hat{C}\end{cases}$$

سؤال ۶: در شکل مقابل اندازهٔ ضلع AC کدام است؟



پاسخ: در مثلث ABD داریم:

$$\frac{AB}{\sin\hat{D}}=\frac{AD}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۴}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{\sqrt{۲۴}}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۲۴}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۴۸}}{۸}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۸}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۶۰^\circ$$

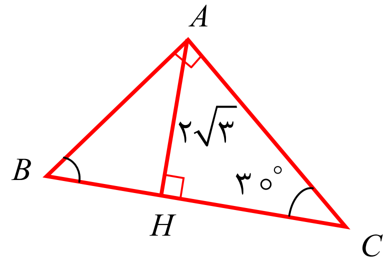
در مثلث ABC زاویهٔ B برابر ۱۲۰° می باشد پس $\hat{A}=\hat{C}=۳۰^\circ$ پس $BC=۴$ بدین ترتیب:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos\hat{A}\Rightarrow ۱۶=۱۶+AC^۲-۸AC\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow AC^۲-۴\sqrt{۳}AC=۰\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

نکته: اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ به عبارتی دو زاویهٔ α و β متمم باشند آنگاه:
$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\cos\beta\\ \tan\alpha=\cot\beta\end{array}\right\}$$

سؤال ۷: در شکل مقابل اندازهٔ AB چقدر است؟



۱) ۶

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) ۴

پاسخ: گزینه۴

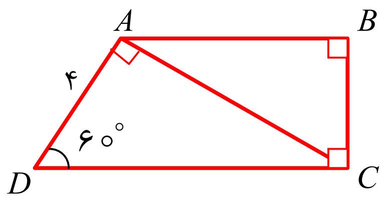
در مثلث قائم الزاویهٔ AHC داریم:

$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\xrightarrow[AH=۲\sqrt{۳}]{\hat{C}=۳۰^\circ}\sin ۳۰^\circ=\frac{۲\sqrt{۳}}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}}=۴\sqrt{۳}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC داریم:

$$\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow[AC=۴\sqrt{۳}]{\hat{C}=۳۰^\circ}\tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{۴\sqrt{۳}}=\frac{AB}{۴\sqrt{۳}}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times۴\sqrt{۳}=۴$$

سؤال ۸: در شکل مقابل، اندازهٔ AB چقدر است؟



۱) ۴

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۹

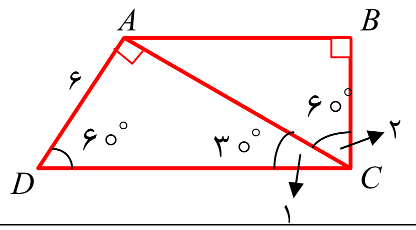
پاسخ: گزینه۴

در مثلث قائم الزاویهٔ ADC داریم:

توجه به آن که $\hat{C}=90^\circ$ است و $\hat{C}_1=30^\circ$ پس $\hat{C}_2=60^\circ$ است. در مثلث قائم الزاویهٔ ABC داریم:

$$\sin\hat{C}_2=\frac{AB}{AC}\xrightarrow[AC=6\sqrt{3}]{\hat{C}_2=60^\circ}$$

$$AB=AC\sin 60^\circ=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\times 3}{2}=9$$



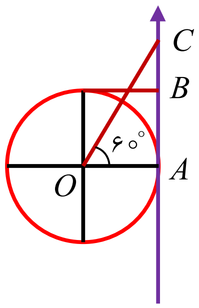
سؤال ۹: **در شکل مقابل اندازهٔ BC چقدر است؟**

۱) $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲) $\sqrt{3}-1$

۳) $1+\sqrt{3}$

۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



پاسخ: گزینه۲

در مثلث قائم الزاویهٔ OAC داریم:

$$\tan 60^\circ=\frac{AC}{A}\xrightarrow[\tan 60^\circ=\sqrt{3}]{OA=1}AC=\sqrt{3}$$

با توجه به آن که AB برابر شعاع دایره است و شعاع دایره نیز برابر ۱ است پس $AB=1$ است در نتیجه:

$$BC=AC-AB=\sqrt{3}-1$$

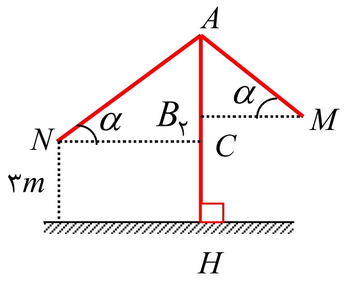
سؤال ۱۰: **در شکل مقابل طول طناب MN برابر ۱۸ متر است. اگر ارتفاع A تا زمین ۹متر باشد مقدار $\sin\alpha$ چه عددی است؟**

۱) $\frac{4}{5}$

۲) $\frac{5}{6}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{5}{9}$

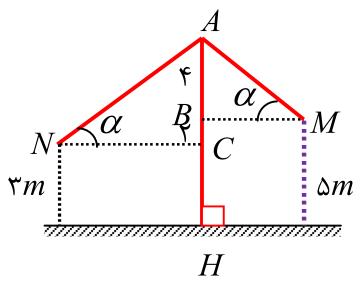


پاسخ: گزینه۴

سعی می کنیم طول AM و AN را برحسب نسبت های مثلثاتی زاویهٔ α بنویسیم. چون $BH=5, AH=9$ است پس $AB=4$ است و چون $HC=3, AH=9$ است پس $AC=6$ است. در نتیجه در مثلث های قائم الزاویهٔ ABM و ACN داریم:

$$\overset{\Delta}{ABM}\text{ در: }\sin\alpha=\frac{AB}{AM}\Rightarrow AM=\frac{AB}{\sin\alpha}\xrightarrow{AB=4}AM=\frac{4}{\sin\alpha}$$

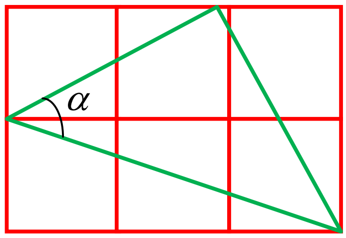
$$\overset{\Delta}{ACN}\text{ در: }\sin\alpha=\frac{AC}{AN}\Rightarrow AN=\frac{AC}{\sin\alpha}\xrightarrow{AC=6}AN=\frac{6}{\sin\alpha}$$



از طرفی چون طول طناب MN برابر ۱۸ است پس حاصل جمع طول طناب های MA و AN نیز برابر ۱۸ است.

$$AM + AB = ۱۸ \Rightarrow \frac{۴}{\sin\alpha} + \frac{۶}{\sin\alpha} = ۱۸ \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin\alpha} = ۱۸ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

سؤال ۱۱: در شکل مقابل ضلع هر مربع ۱ می باشد. اندازهٔ $\sin\alpha$ چه عددی است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه۱

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول اضلاع مثلث ABC را به دست می آوریم. با توجه به شکل ضلع های AB و BC قطر یک مستطیل به طول ۲ و عرض ۱ هستند پس:

$$AB^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵ \Rightarrow AB = \sqrt{۵} \xrightarrow{AB=BC} AB = BC = \sqrt{۵}$$

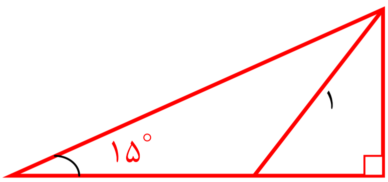
ضلع AC قطر مستطیلی به طول ۳ و عرض ۱ است پس:

$$AC^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۰}$$

با توجه به آن که $AB = BC$ است پس مثلث ABC متساوی الساقین است از طرفی چون $AB^۲ + BC^۲ = AC^۲$ است پس بنا برعکس قضیهٔ فیثاغورس مثلث ABC قائم الزاویه نیز هست. پس مثلث ABC مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است پس زاویهٔ $\hat{A} = \hat{C} = ۴۵^\circ$ است پس:

$$\sin\alpha = \sin\hat{A} = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سؤال ۱۲: با توجه به شکل $\tan ۱۵^\circ = a - b\sqrt{۳}$ می باشد با فرض طبیعی بودن مقادیر a , b حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

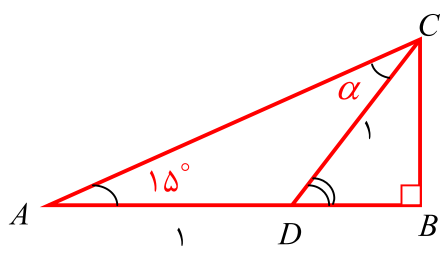
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۳

با توجه به شکل از آن جا که $CD = AD = ۱$ است پس مثلث ADC متساوی الساقین است. در نتیجه دو زاویهٔ $A, C_۱$ برابرند و در نتیجه $\alpha = ۱۵^\circ$ است. از طرفی چون زاویهٔ $D_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است پس مقدار آن برابر ۳۰° است.

در نتیجه در مثلث قائم الزاویهٔ CBD داریم:

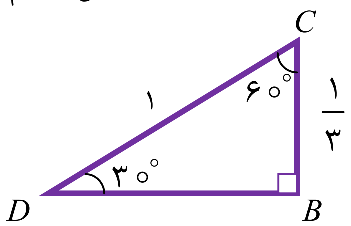
$$\sin\hat{D} = \frac{CB}{CD} \xrightarrow[CD=۱]{\hat{D}=۳۰^\circ} \sin ۳۰^\circ = \frac{CB}{۱} \Rightarrow CB = \frac{۱}{۲}$$



در مثلث CBD ، $\hat{C}=۶۰^\circ$ است پس BD برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است:

$$\Rightarrow \sin ۶۰^\circ=\frac{BD}{DC}\Rightarrow BD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حالا با توجه به داشتن طول AB , BC می توانیم $\tan \hat{A}$ را بدست آوریم:



$$\tan \hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

با ضرب کسر بالا در $۲-\sqrt{۳}$ داریم:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲-\sqrt{۳}$$

پس $a=۲, b=۱$ است و در نتیجه $a+b=۳$ است.

📖 سؤال ۱۳: **اندازهٔ اضلاع مثلث ABC برابر $۲\sqrt{۲},۳\sqrt{۳},\sqrt{۱۹}$ است مقدار $\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}$ چه عددی است؟**

۱) ۱　　　۲) $\frac{۳}{۲}$　　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　　۴) $\frac{۳}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۱

می دانیم مثلثی که بین سه ضلع آن با طول های c,b,a رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است یک مثلث قائم الزاویه است.

مثلث ABC نیز یک مثلث قائم الزاویه است زیرا:

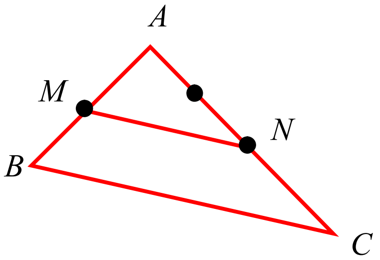
اگر $\hat{A}$ زاویهٔ قائمه باشد پس $\cos\hat{A}=۰$ است. از طرفی چون مثلث قائم الزاویه است پس مجموع دو زاویهٔ دیگر ۹۰° است.

یعنی دو زاویهٔ C,B متمم یکدیگرند پس $\sin\hat{B}=\cos\hat{C}$ است و $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}$ در نتیجه:

$$\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\underbrace{\cos^۲\hat{C}}_{\sin^۲\hat{B}}=\cos^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{B}=۱$$

◈ تذکر:
$$\begin{cases}\sin(۹۰-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\end{cases}$$

📖 **سؤال ۱۴:** ضلع AB را به ۲ قسمت برابر و ضلع AC را به ۳ قسمت برابر تقسیم می کنیم. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

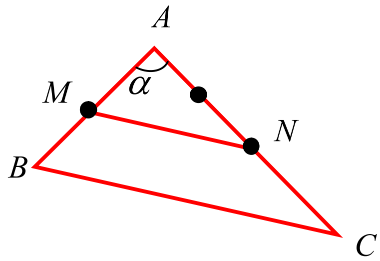


۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

☜ پاسخ: گزینه۱

می دانیم اگر a و b دو ضلع یک مثلث و زاویهٔ بین آنها α باشد مساحت آن مثلث برابر است با: $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

در نتیجه داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\alpha$$

$$S_{\overset{\Delta}{AMN}}=\frac{1}{2}AM\times AN\times\sin\alpha=\frac{1}{6}AB\times AC\times\sin\alpha$$

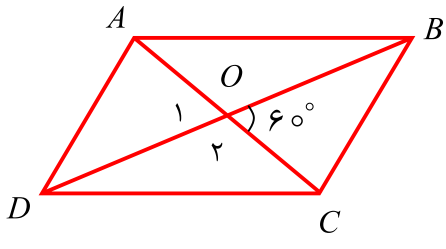
$$\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{1}{6}AB\times AC\times\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\alpha}=\frac{1}{3}$$

📖 **سؤال ۱۵:** در یک متوازی الاضلاع زاویهٔ بین دو قطر 60° است. اگر طول یک قطر ۶ و مساحت متوازی الاضلاع $12\sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ قطر دیگر کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

☜ پاسخ: گزینه۲

❖ **راه اول)** با رسم دو قطر هر متوازی الاضلاع ۴ مثلث هم مساحت ایجاد می شود. زیرا مثلاً در مثلث ABC، BO میانه است و در نتیجه مساحت دو مثلث AOB و BOC برابر است. البته می توان این طور گفت که چون دو زاویهٔ O_1,O_2 مکمل اند پس سینوس آنها برابر است و با توجه به برابری طول اضلاع ۴ مثلث و سینوس زاویهٔ بین آنها مساحت هر ۴ مثلث برابر ست. در نتیجه اگر طول قطر کوچک برابر ۶ باشد پس $OC=3$ است پس:



$$S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{1}{2}OB\times OC\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}OB\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}OB$$

مساحت متوازی الاضلاع ۴ برابر مساحت $\overset{\Delta}{OBC}$ است پس:

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}}=4S_{\overset{\Delta}{OBC}}=3\sqrt{3}OB\Rightarrow 3\sqrt{3}OB\Rightarrow 3\sqrt{3}OB=12\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OB=4\Rightarrow BD=8$$

❖ **راه دوم)** اگر a , b طول دو قطر یک متوازی الاضلاع و α زاویهٔ بین دو قطر باشد داریم:

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}}=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times b\times \underbrace{\sin ۶۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}b=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow b=۸$$

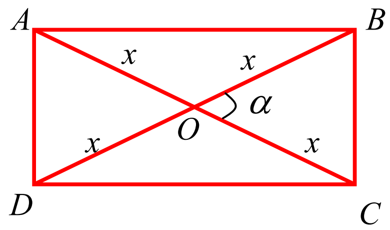
📖 سؤال ۱۶: **در یک مستطیل با مساحت $۳۶\sqrt{۳}$ زاویهٔ بین ۲ قطر ۶۰° می باشد. اندازهٔ قطر مستطیل چه عددی است؟**

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

☜ پاسخ: گزینه۴

❖ **راه اول)** با رسم ۲ قطر هر مستطیل ۴ مثلث ایجاد می شود که همگی آنها هم مساحت هستند. زیرا در مثلث OB,ABC میانه است پس مساحت دو مثلث AOB و OBC برابرند. به همین ترتیب مساحت دو مثلث OBC و OCD برابرند.

اگر طول نصف هر قطر را x بنامیم داریم:



$$S_{\underset{OBC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\underbrace{OB}_{x}\times\underbrace{OC}_{x}\times\sin\alpha=\frac{۱}{۲}x^۲\sin\alpha$$

چون $\alpha=۶۰^\circ$ است پس داریم:

$$S_{\underset{OBC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}x^۲\times\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{مستطیل}}=۴S_{\underset{OBC}{\Delta}}=\sqrt{۳}x^۲$$

با توجه به آن که مساحت مستطیل برابر $۳۶\sqrt{۳}$ است داریم:

$$\sqrt{۳}x^۲=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

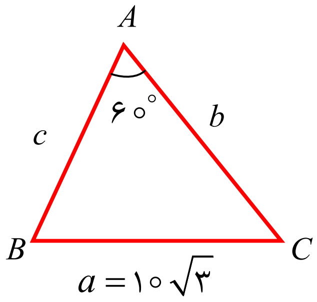
پس نصف طول قطر برابر ۶ است در نتیجه طول قطر برابر ۱۲ است.

❖ **راه دوم)** اگر a طول دو قطر یک مستطیل و α زاویهٔ بین دو قطر باشد داریم:

$$S_{\text{مستطیل}}=\frac{۱}{۲}a^۲\sin\alpha$$

$$\frac{۱}{۲}a^۲\sin ۶۰^\circ=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۱۴۴\Rightarrow a=۱۲$$

📖 سؤال ۱۷: اگر $a=10\sqrt{3}, A=60^\circ$ مقدار $\dfrac{b+c}{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}$ کدام است؟



۱) ۲۰

۲) $10\sqrt{3}$

۳) $20\sqrt{3}$

۴) ۱۰

☜ پاسخ: گزینه۱

قضیهٔ سینوس ها را در مثلث ABC می نویسیم: $\dfrac{\sin\hat{A}}{a}=\dfrac{\sin\hat{B}}{b}=\dfrac{\sin\hat{C}}{c}$

با توجه به آن $a=10\sqrt{3}, \hat{A}=60^\circ$ که است داریم:

$$\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin 60^\circ}{10\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{20}$$

پس داریم:

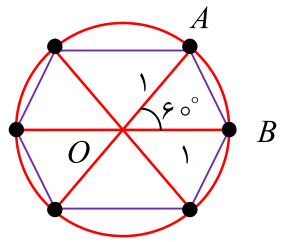
$$\begin{cases}\dfrac{\sin\hat{B}}{b}=\dfrac{1}{20}\Rightarrow b=20\sin\hat{B}\\[2ex] \dfrac{\sin\hat{C}}{c}=\dfrac{1}{20}\Rightarrow c=20\sin\hat{C}\end{cases}\Rightarrow b+c=20(\sin\hat{B}+\sin\hat{C})\Rightarrow\frac{b+c}{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=20$$

📖 سؤال ۱۸: رأس های یک شش ضلعی منتظم روی محیط یک دایرهٔ مثلثاتی است. مساحت این شش ضلعی منتظم چه عددی است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$

☜ پاسخ: گزینه۲

با رسم قطرهای هر شش ضلعی منتظم ۶ مثلث متساوی الاضلاع برابر ایجاد می شود. چون اندازهٔ شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است پس مساحت هر مثلث برابر است با:



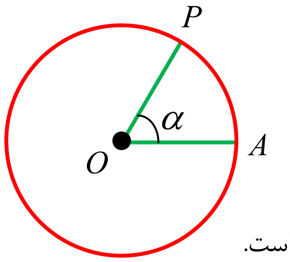
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{شش ضلعی منتظم}}=6\times S_{\overset{\Delta}{OAB}}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

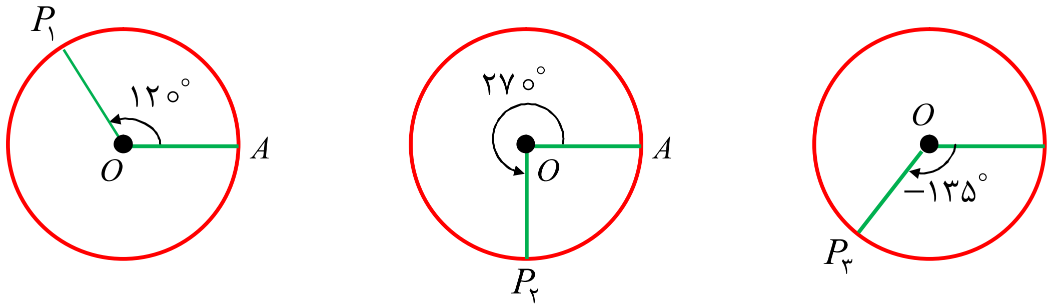
دایرهٔ مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی :



دایره ای که شعاع آن واحد و مبدأ حرکت در آن نقطهٔ A باشد به طور یکه جهت حرکت روی دایره در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد **دایرهٔ مثلثاتی** نام دارد.

مثلاً: در دایرهٔ مثلثاتی زوایای $-۱۳۵^\circ, ۲۷۰^\circ, ۱۲۰^\circ$ به ترتیب با نقاط $P_۳, P_۲, P_۱$ نمایش داده شده است.



نسبت های مثلثاتی بر روی دایرهٔ مثلثاتی :

اگر ابتدا زاویهٔ α را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم آنگاه با توجه به مثلث قائم الزاویهٔ به دست آمده تعریف می کنیم:

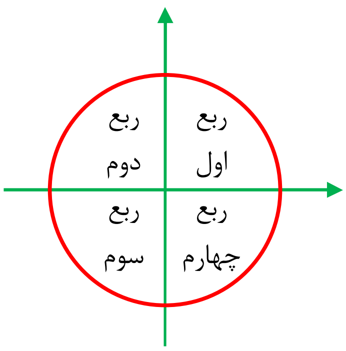
$$OP = ۱۰, Q = ۹۰^\circ$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{PQ}{OP} = PQ \Rightarrow PQ = \sin\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{OQ}{OP} = OQ \Rightarrow OQ = \cos\alpha \end{cases}$$

بدین ترتیب مقادیر $\cos\alpha$ بر روی محور افقی و مقادیر $\sin\alpha$ بر روی محور قائم قرار می گیرد. اگر مرکز دایره را روی مبدأ مختصات قرار دهیم با رسم این دو محور دایره به ۴ ناحیه تقسیم می شود. به هر یک از این چهار قسمت یک ربع مثلثاتی یا ناحیهٔ مثلثاتی می گوییم.

مثلاً: α ناحیهٔ سوم است $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ \Rightarrow$ زاویهٔ α ناحیهٔ اول است $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \Rightarrow$

α ناحیهٔ چهارم است $۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ \Rightarrow$ زاویهٔ α ناحیهٔ دوم است $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ \Rightarrow$

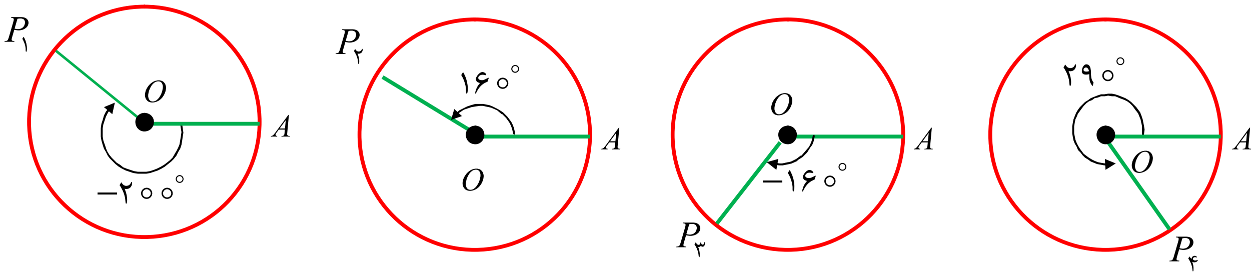


📖 سؤال ۱: انتهای کمان روبرو به کدام زاویه در ربع سوم قرار می گیرد؟

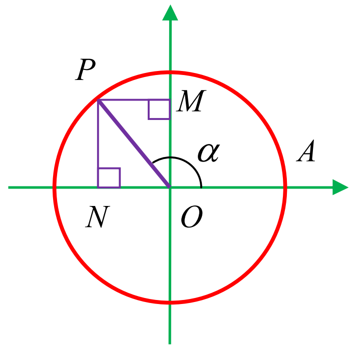
۱) -۲۰۰°	۲) ۱۶۰°	۳) -۱۶۰°	۴) ۲۹۰°

☜ پاسخ: گزینه۳

اگر در دایره تک تک زاویه ها را نشان دهیم -۲۰۰° در ربع دوم است زیرا $-۲۰۰^\circ < -۱۸۰^\circ$ زاویهٔ ۱۶۰° در ربع دوم است و -۱۶۰° در ربع سوم است و ۲۹۰° در ربع چهارم است مانند شکل:



به طور کلی اگر زاویهٔ α روی دایره مشخص شود آنگاه از نقطهٔ انتهای زاویهٔ α روی دایره می توانیم بر روی دو محور افق (محور کسینوس ها) و محور عمودی (محور سینوس ها) عمودهایی رسم کنیم. فاصلهٔ پای عمودها تا مبدأ مختصات مقدار $\sin\alpha, \cos\alpha$ است. البته انتظار داریم در ربع های مختلف علامت $\cos\alpha, \sin\alpha$ و در نتیجه $\cot\alpha, \tan\alpha$ هم تغییر کند، مثلاً:



$$\sin\alpha = OM > ۰$$
$$\cos\alpha = ON < ۰$$

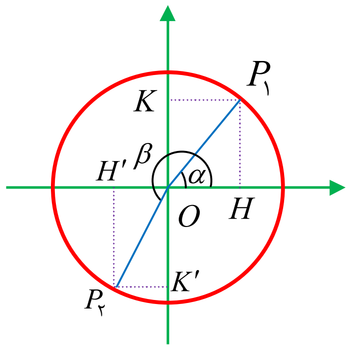
زیرا N در قسمت منفی محور کسینوس ها قرار گرفته و M در قسمت مثبت محور سینوس ها قرار گرفته است.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha < ۰, \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} < ۰$$

بدین ترتیب:

ربع / α	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

به عنوان مثال با توجه به نقطهٔ $P_۱$ داریم:



$$۰<\alpha<۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha>۰ \\ \cos\alpha>۰ \\ \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>۰ \end{cases}$$

و با توجه به نقطهٔ $P_۲$ از روی شکل داریم:

$$۱۸۰^\circ<\beta<۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta=OK'<۰ \\ \cos\beta=OH'<۰ \\ \tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}>۰ \end{cases}$$

سؤال ۲: اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=۱/۲$ باشد انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) ناحیهٔ اول　　۲) ناحیهٔ دوم　　۳) ناحیهٔ سوم　　۴) ناحیهٔ چهارم

پاسخ: گزینه۲

اگر فرض مسئله را به صورت $\cos\alpha=\sin\alpha-۱/۲$ بنویسیم چون حداکثر $\sin\alpha$ برابر ۱ است پس حتماً $\cos\alpha<۰$ می باشد و از طرفی $\sin\alpha=۱/۲+\cos\alpha$ و چون حداقل $\cos\alpha$ برابر ۱- است پس حتماً $\sin\alpha>۰$ است بنابراین:

$$\begin{cases} \sin\alpha>۰ \\ \cos\alpha<۰ \end{cases} \Rightarrow$$ انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم قر ار دارد

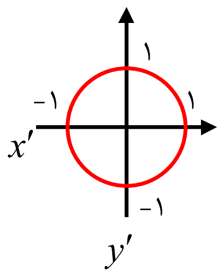
تذکر: اگر $\alpha=۰,\alpha=۹۰^\circ,\alpha=۱۸۰^\circ$ یا $\alpha=۲۷۰^\circ$ آنگاه α را در هیچ یک از ربع ها در نظر نمی گیریم و نسبت های مثلثاتی آن به کمک جدول زیر به دست می آید.

α	۰	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\alpha$	۰	۱	۰	۱-	۰
$\cos\alpha$	۱	۰	۱-	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

دقت کنید وقتی $\alpha=۹۰^\circ$ نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی به مختصات $P(۰,۱)$ می باشد پس $\cos\alpha=۰,\sin\alpha=۱$ لذا $\tan\alpha$ به همین جهت تعریف نشده است.

محور نسبت های مثلثاتی :

می دانیم در دایرۀ مثلثاتی مرکز بر مبدأ مختصات منطبق است لذا هر نقطه روی دایرۀ مثلثاتی به مختصات $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ نوشته می شود.



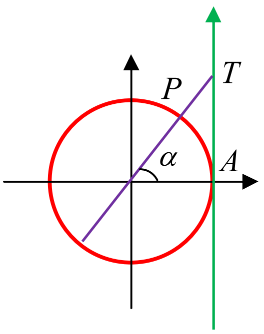
پس محور سینوس ها و محور کسینوس ها همانطور که قبلاً اشاره کرده بودیم مشخص است.

$x'Ox$: محور کسینوس ها

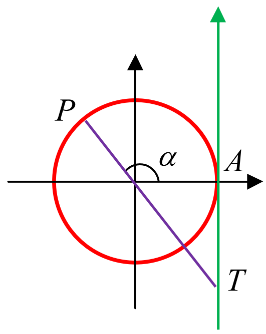
$y'Oy$: محور سینوس ها

بدین ترتیب $-1\le\cos\alpha\le 1, -1\le\sin\alpha\le 1$.

تاکنون برای یافتن $\tan\alpha$ از نسبت $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ کمک می گرفتیم. هم مقدار معلوم می شد و هم علامت $\tan\alpha$ به دست می آمد اما محور تانژانت ها خطی است که در نقطۀ A به دایره مماس شده باشد. کافی است انتهای کمان α را به مرکز دایره وصل کنیم و آن را امتداد دهیم، نقطۀ تلاقی با محور تانژانت ها مقدار $\tan\alpha$ است.



$AT=\tan\alpha>0$



$AT=\tan\alpha<0$

پس $\tan\alpha$ می تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند. بدین ترتیب:

$0^\circ<\alpha<90^\circ$ یا $180^\circ<\alpha<270^\circ \Rightarrow \tan\alpha>0$

$90^\circ<\alpha<180^\circ$ یا $180^\circ<\alpha<360^\circ \Rightarrow \tan\alpha<0$

$\alpha=0^\circ$ یا $\alpha=180^\circ \Rightarrow \tan\alpha=0$

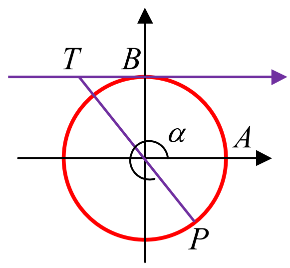
به طریق مشابه خطی که در نقطۀ B بر دایرۀ مثلثاتی مماس شود محور کتانژانت ها می باشد.

$\cot\alpha=BT<0$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$ یا $180^\circ<\alpha<270^\circ \Rightarrow \cot\alpha>0$

$90^\circ<\alpha<180^\circ$ یا $270^\circ<\alpha<360^\circ \Rightarrow \cot\alpha<0$

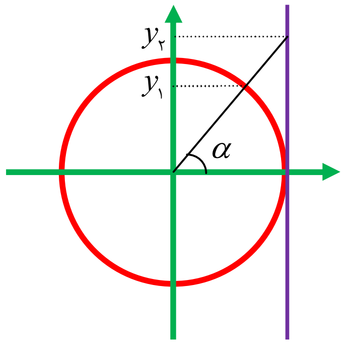
$\alpha=90^\circ$ یا $\alpha=270^\circ \Rightarrow \cot\alpha=0$



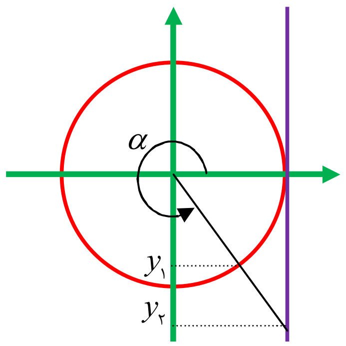
سؤال ۳: اگر $۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$ مقدارهایی از α را بیابید که برای آنها نابرابر $\tan\alpha > \sin\alpha$ برقرار باشد.

- در ناحیه‌ی سوم، $\tan\alpha$ مقداری مثبت و $\sin\alpha$ مقداری منفی دارد پس همواره $\tan\alpha > \sin\alpha$ برقرار است.

- در ناحیه‌ی دوم، $\tan\alpha$ مقداری منفی و $\sin\alpha$ مقداری مثبت دارد پس همواره $\sin\alpha > \tan\alpha$ است یعنی در ناحیه‌ی دوم نامساوی $\tan\alpha > \sin\alpha$ برقرار نیست.



- در ناحیه‌ی اول، $y_۱ < y_۲ \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$



- در ناحیه‌ی چهارم، $y_۲ < y_۱ \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha$

بنابراین ناحیه های اول و سوم دایره‌ی مثلثاتی ناحیه های مورد نظر هستند. یعنی:

$$۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \quad \text{یا} \quad ۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$$

سؤال ۴: اگر $۰^\circ \le \alpha \le ۳۶۰^\circ$ مقدارهایی از α را مشخص کنید که به ازای آنها نابرابری $\tan\alpha + \cot\alpha > ۰$ برقرار باشد.

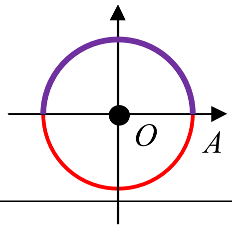
☺ **نکته: در ربع اول و سوم** $\tan\alpha > \sin\alpha$

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \\ \cot\alpha = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^۲ + x^۲}{xy}$$

$$\tan\alpha + \cot\alpha > ۰ \rightarrow \frac{y^۲ + x^۲}{xy} > \alpha$$

صورت کسر، عبارتی نامنفی است پس برای اینکه کل کسر بزرگتر از صفر شود کافیست که $xy > \alpha$ باشد یعنی x,y هم علامت باشند که این اتفاق در ناحیه‌ی اول و سوم رخ می دهد: $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ یا $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$

نکته: وقتی نقطهٔ P به عنوان یک متغیر روی دایرهٔ مثلثاتی حرکت می کند نسبت های مثلثاتی آن هم تغییر خواهد کرد مثلاً وقتی $۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ آنگاه $۰ < \sin\alpha \le ۱$ و در این حالت $-۱ < \cos\alpha < ۱$ است.

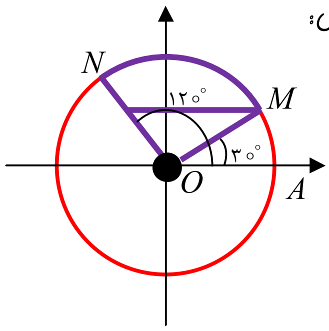


سؤال ۵: اگر $۳۰^\circ < \alpha < ۱۲۰^\circ , \sin\alpha = \frac{۱-۳m}{۴}$ حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $\left(-۱, \frac{۱}{۳}\right)$ ۲) $\left[-۱, -\frac{۱}{۳}\right)$ ۳) $\left[-۱, \frac{۲}{۳}\right]$ ۴) $\left(-۱, \frac{۲}{۳}\right]$

پاسخ: گزینه۲

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی $۳۰^\circ < \alpha < ۱۲۰^\circ$ یعنی اگر نقطهٔ P روی دایره از M تا N حرکت کند مقدار $\sin\alpha$ بازهٔ $\left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$ را انتقاب می کند $(\sin ۹۰^\circ = ۱)$ پس:



$$\frac{۱}{۲} < \frac{۱-۳m}{۴} \le ۱ \Rightarrow ۲ < ۱-۳m \le ۴$$
$$\Rightarrow -۴ \le ۳m - ۱ < -۲ \Rightarrow -۱ \le m < -\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow m \in \left[-۱, -\frac{۱}{۳}\right)$$

سؤال ۶: مقدار ماکسیمم عبارت $A = |۵\sin x - ۳|$ به ازای $x \in R$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) π ۴) ۵π ۵) ۸

پاسخ: گزینه۵

می دانیم حداکثر و حداقل $\sin x$ به ترتیب برابر ۱ و ۱- است. بنابراین:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow -۵ \le ۵\sin x \le ۵ \Rightarrow -۸ \le ۵\sin x - ۳ \le ۲ \Rightarrow ۰ \le |۵\sin x - ۳| \le ۸$$

بنابراین ماکسیمم عبارت برابر ۸ می باشد و این ماکسیمم به ازای $x = -\frac{\pi}{۲}$ حاصل می شود.

سؤال ۷: اگر $a \in R - \{۰\}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$ انتهای کمان x قطعاً در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه۴

چون حاصل رادیکال، نامنفی است پس از تساوی $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$ نتیجه می گیریم $\cos x \ge ۰$ است یعنی انتهای کمان x در ناحیهٔ اول یا چهارم است. حالا اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ اول باشد صورت کسر یعنی $\cot x$ مثبت است اما مخرج

کسر الزاماً مثبت نیست (یعنی ممکن است مثبت باشد) پس این احتمال وجود دارد که عبارت زیر رادیکال، منفی شود و این قابل قبول نیست. اما اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ چهارم باشد هم صورت و هم مخرج کسر ، منفی می شوند، پس عبارت زیر رادیکال قطعاً مثبت خواهد شد و قابل قبول است. خلاصه این که جواب، ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است.

سؤال ۸: مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $-\frac{۱}{۳}$　　۴) $-\frac{۲}{۳}$

پاسخ: عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}=\frac{۲+\sin\alpha-۲}{۲+\sin\alpha}=\frac{۲+\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}=۱-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}$$

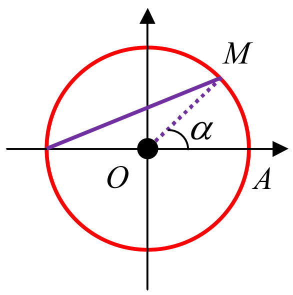
حال با توجه به این‌که $-۱\le\sin\alpha\le۱$ می‌توانیم محدودهٔ A را بیابیم:

$$-۱\le\sin\alpha\le۱\Rightarrow۱\le۲+\sin\alpha\le۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\le\frac{۱}{۲+\sin\alpha}\le۱$$

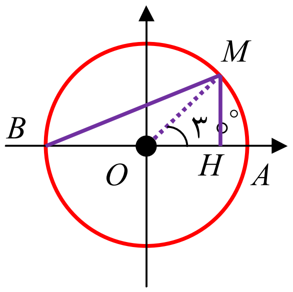
$$\Rightarrow-۲\le\frac{-۲}{۲+\sin\alpha}\le-\frac{۲}{۳}\Rightarrow-۱\le۱-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}\le\frac{۱}{۳}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -۱ و حداکثر مقدار آن $\frac{۱}{۳}$ است. درنتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

سؤال ۹: با توجه به شکل مقابل، اگر $\alpha=۳۰^\circ$ تانژانت زاویهٔ ۱۵° را بیابید.



پاسخ: ابتدا از نقطهٔ M بر محور کسینوس ها عمود می کنیم، داریم:



$$\sin۳۰^\circ=MH=\frac{۱}{۲}$$

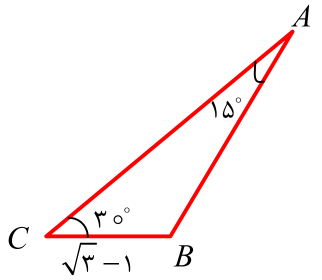
$$\cos۳۰=OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در مثلث متساوی الساقین OBM (دو ساق آن شعاع دایره هستند)، داریم:

$$\hat{B}=\hat{M}=۱۵^\circ\Rightarrow \overset{\Delta}{BMH}:\tan\hat{B}=\frac{MH}{BH}=\frac{MH}{OB+OH}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\tan۱۵^\circ=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

📖 **سؤال ۱۰:** در شکل مقابل اندازهٔ ضلع AB کدام است؟



۱) ۱

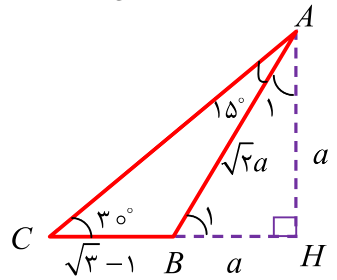
۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

☜ **پاسخ: گزینه۲**

ابتدا از نقطهٔ A خط عمود بر امتداد ضلع BC رسم می کنیم:



$$\text{زاویهٔ خارجی}: \hat{B}_۱ = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow BH = AH = a \Rightarrow AB = \sqrt{۲}a \ \ (I)$$

$$\tan C\hat{A}H = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a+\sqrt{۳}-۱}{a} \Rightarrow a\sqrt{۳} = a+\sqrt{۳}-۱$$

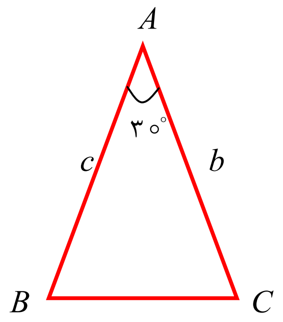
$$\Rightarrow a(\sqrt{۳}-۱) = \sqrt{۳}-۱ \Rightarrow a = ۱ \xrightarrow{(I)} AB = \sqrt{۲}a = \sqrt{۲}\times ۱ = \sqrt{۲}$$

📖 **سؤال ۱۱:** در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۳۰° می باشد و $b^۲+c^۲=۸S$ است. زاویهٔ $\hat{B}$ چند درجه است؟ (S مساحت مثلث ABC است.)

۱) ۶۰° ۲) ۴۵° ۳) ۷۵° ۴) ۱۰۵°

☜ **پاسخ: گزینه۳**

می دانیم مساحت مثلث ABC از رابطهٔ زیر به دست می آید:



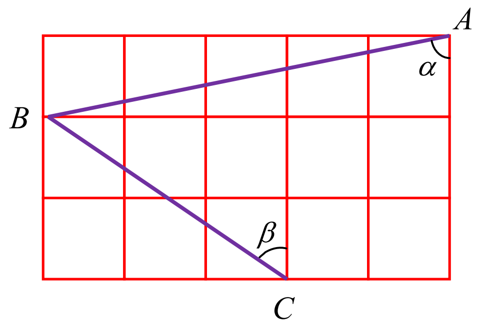
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}ab\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}bc$$

$$\Rightarrow b^۲+c^۲ = ۸\left(\frac{۱}{۴}bc\right) = ۲bc \Rightarrow b^۲+c^۲-۲bc = ۰$$

$$\Rightarrow (b-c)^۲ = ۰ \Rightarrow b=c \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$$

پس مثلث ABC متساوی الساقین است بنابراین: $\hat{B}=\hat{C}=\dfrac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$

📖 **سؤال ۱۲:** در شکل مقابل $\alpha+\beta$ چقدر است؟ (ضلع مربع ها یک واحد می باشد.)



۱) ۹۰°

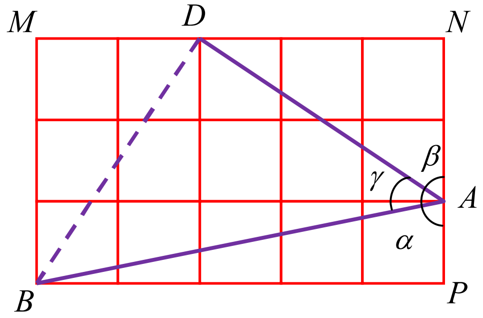
۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۵°

۴) ۱۵۰°

☜ پاسخ: گزینه۳

کافی است در صفحه شطرنجی، زاویهٔ β را همانند شکل مقابل از رأس A رسم کنیم. حالا کافی است زاویهٔ γ را حساب کنیم. برای این منظور از B به D وصل می کنیم:

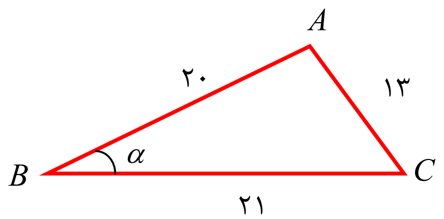


$$\begin{cases} AD=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳} \\ BD=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳} \\ AB=\sqrt{۵^۲+۱^۲}=\sqrt{۲۶} \end{cases}$$ طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث های $\overset{\Delta}{APB},\overset{\Delta}{AND},\overset{\Delta}{BMD}$

اعداد $\sqrt{۲۶},\sqrt{۱۳},\sqrt{۱۳}$ در رابطهٔ فیثاغورس صدق می کنند، پس مثلث ABD متساوی الساقین و در رأس D قائم الزاویه می باشد:

$$\gamma=۴۵^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$

📖 سؤال ۱۳: در شکل روبه رو مقدار $\tan\alpha$ چقدر است؟

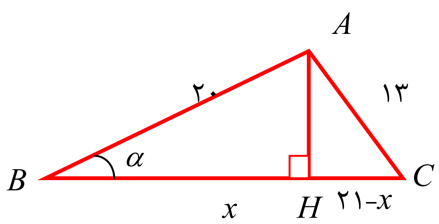


۱) $\frac{۳}{۵}$ 		۲) $\frac{۱۲}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$ 		۴) $\frac{۳}{۴}$

☜ پاسخ: گزینه۴

از رأس A عمود AH را بر BC رسم می کنیم. اگر $BH=x$ باشد $CH=۲۱-x$ خواهد بود، بنابراین با نوشتن دو رابطهٔ فیثاغورس مقادیر x و h به دست می آید:



$$\begin{cases} x^۲+h^۲=۲۰^۲=۴۰۰ \quad (I) \\ h^۲+(۲۱-x)^۲=۱۳^۲ \Rightarrow h^۲+x^۲+۴۴۱-۴۲x=۱۶۹ \quad (II) \end{cases}$$

رابطهٔ (I) را در (II) جایگذار ی می کنیم:

$$۴۰۰+۴۴۱-۴۲x=۱۶۹ \Rightarrow x=۱۶ \Rightarrow h=\sqrt{۴۰۰-۲۵۶}=۱۲ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{h}{x}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

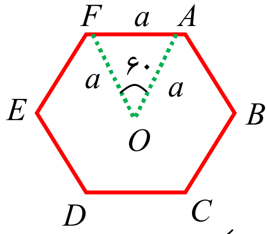
سؤال ۱۴: شش ضلعی منتظمی در داخل دایره ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت بین شش ضلعی و دایرهٔ محیطی کدام است؟ ($\pi \simeq ۳$)

۱) $۲۷\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right)$ ۲) $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)$ ۳) $۲۷\left(\frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}\right)$ ۴) $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}\right)$

پاسخ: گزینه۱

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است. پس مساحت شش ضلعی برابر است با:

$$S_{ABCDEF} = ۶ \times S_{AOF} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$



با توجه به این که شعاع دایره محیطی برابر اندازهٔ ضلع شش ضلعی منتظم است ($R = a$) داریم:

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = \pi a^۲ = ۳ \times ۹ = ۲۷$$

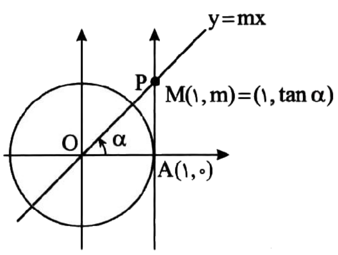
$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{مساحت بین آنها} = ۲۷ - \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲} = ۲۷\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

رابطه‌ی شیب خط با تانژانت زاویه

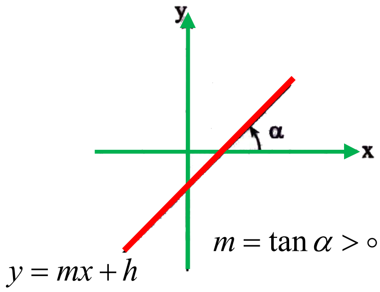
با توجه به مطالب قبل می‌دانیم مقدار tan α برابر عرض نقطه‌ی M، محل برخورد شعاع OP با محور تانژانت است. از طرف دیگر، طول نقطه‌ی M برابر ۱ است و این نقطه روی خط y=mx قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین m=tan α.

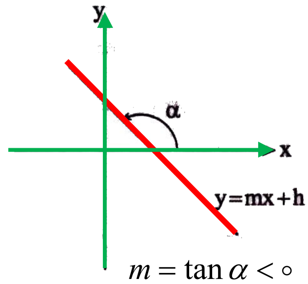
حالا توجه کنید که هر خط موازی با خط y=mx دارای شیب یکسان با این خط است و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه‌ی α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان tan α است.



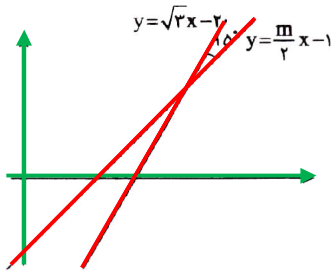
نتیجه

اگر جهت مثبت محور طول ها و خط $y = mx + h$ یکزاویه‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی α تشکیل دهند، آن گاه $m = \tan\alpha$.





سؤال ۱۵: با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟



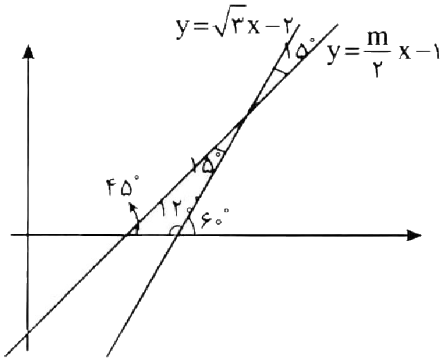
۱) $\sqrt{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

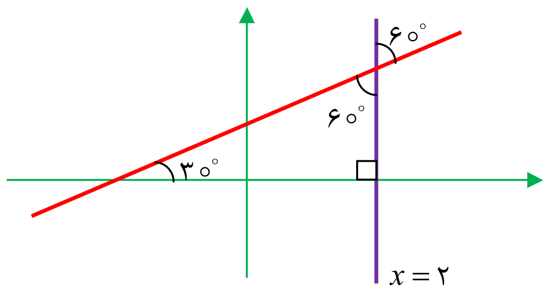
پاسخ: چون شیب خط $y=\sqrt{۳}x-۲$ برابر $\sqrt{۳}$ است، زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها رو به جهت مثبت، ۶۰° است. پس زاویه‌ی خط $y=\frac{m}{۲}x-۱$ با محور طول‌ها رو به جهت مثبت، مطابق شکل مقابل برابر ۴۵° است، و در نتیجه



$$\frac{m}{۲}=\tan ۴۵^\circ=۱\Rightarrow m=۲$$

سؤال ۱۶: زاویه‌ی حاده بین خطوط $x=۲$ و $-x+\sqrt{۳}y=۲$ کدام است؟

۱) ۳۰°　　۲) ۴۵°　　۳) ۶۰°　　۴) ۷۵°



$$-x+\sqrt{۳}y=۲\Rightarrow \sqrt{۳}y=x+۲\Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

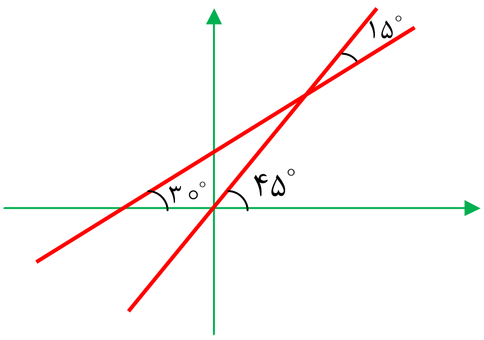
$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \theta=۳۰^\circ$$

سؤال ۱۷: زاویه‌ی بین خط $d:\sqrt{۳}y=x+۲$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم چقدر است.

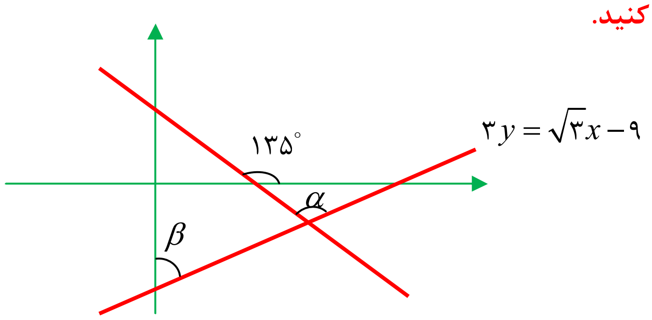
۱) ۷۵°　　۲) ۴۵°　　۳) ۱۳۵°　　۱۵°

$$d:\sqrt{۳}y=x+۱\Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \theta=۳۰^\circ$$

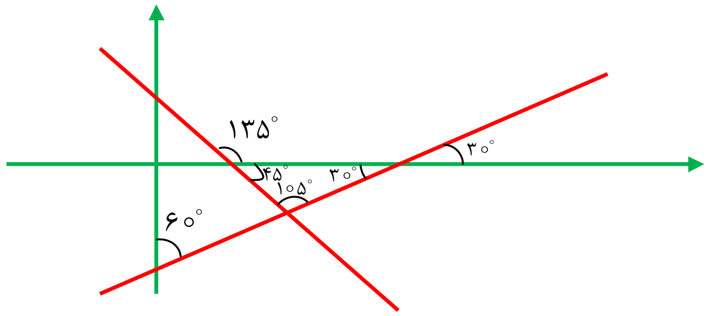
با توجه به شکل زاویه بین خط d و نیمساز ناحیه های اول و سوم برابر است با ۱۵°



📖 سؤال ۱۸: در شکل زیر زاویه های α و β را مشخص کنید.



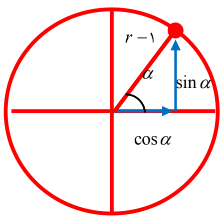
با توجه به معادله‌ی خط $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۳$ یعنی زاویه ای که این خط با قسمت مثبت محور x ها می سازد برابر ۳۰° است زیرا $\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = m$ پس مطابق شکل زاویه‌ی α برابر است : $۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = ۱۰۵^\circ$



روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه α (روابط پایه)

روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه α (روابط پایه)

به $(\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha)$ میگن «**نسبت های مثلثاتی زاویه α**» و حالا من قصد دارم به کمک دایره مثلثاتی، بین نسبت های مثلاتی زاویهٔ α رابطه برقرار کنم.



فیثاغورث: $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\end{cases}$

$\tan\alpha$ قرارداد: $\tan\alpha=\dfrac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} \rightarrow \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha$ قرارداد: $\cot\alpha=\dfrac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} \rightarrow \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\rightarrow \boxed{\tan\alpha.\cot\alpha=1} \rightarrow \begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\end{cases}$

با توجه به روابطی که براتون استخراج کردم، آیا می توانید برای این دو عبارت مثلثاتی که در پایین نوشتم عبارت معادل پیدا کنید؟

۱) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=?$ ۲) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=?$

آقا اجازه؟! فکر کنیم که بشه از رابطه‌ی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، هم ارزهای $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ و $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ رو بدست آورد.

$$1)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=(1)^2 \Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$2)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=(1)^3 \Rightarrow (\sin^2\alpha)^3+3(\sin^2\alpha)^2(\cos^2\alpha)$$

$$+3(\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^3=1$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1 \Rightarrow \boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\end{array}}$$

سؤال ۱: عبارت $\tan x+\cot x$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\dfrac{2}{\sin x\cos x}$ ۲) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x.\cos x}$ ۳) $\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$ ۴) ۱

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

سؤال ۲: ساده شده عبارت $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\sin x\cos x$ کدام است؟

اگه توی یک عبارت مثلثاتی عامل هایی مثل $(1-\cos x)$ یا $(1+\cos x)$ یا $(1-\sin x)$ یا $(1+\sin x)$ دیدید اون عامل رو در مزدوجش ضرب و تقسیم کنید. معمولاً با این حرکت قفل اون عبارت مثلثاتی شکسته میشه.

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\sin x\cos x=\frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\underbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}_{\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\sin^2 x}}}-\sin x\cos x=\sin x(1+\cos x)-\sin x\cos x$$

$$=\sin x+\sin x\cos x-\sin x\cos x=\sin x$$

روابط دوست و دشمن :

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

دوست

دشمن

سؤال ۳: با چه شرطی برای x تساوی $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\cot^2 x}$ یک اتحاد است؟

پاسخ: *ابتدا عبارت را ساده می کنیم:*

$$\left.\begin{array}{l}1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\\ 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\cot^2 x}=\frac{1}{|\cos x|}-\frac{1}{|\sin x|}$$

برای آن که به عبارت سمت راست برسیم باید $\sin x<0,\cos x>0$ *یعنی انتهای کمان* x *در ربع چهارم است و در این حالت داریم:*

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

سؤال ۴: اگر $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ باشد حاصل $\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot x}$ چقدر است؟ (آزاد ۹۱)

اگر $A=\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot x}$ باشد با به توان دو رساندن A داریم:

$$A=\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot x}\Rightarrow A^2=tgx+\cot x+2\sqrt{\underbrace{tgx\cot x}_{1}}=\frac{1}{\sin x\cos x}+2$$

حالا برای بدست آوردن $\sin x\cos x$ ، کافیه رابطه $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ رو به توان دو برسونیم:

$$\sin x+\cos x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow ۱+۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۷}{۱۸}$$

$$\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{\sin x\cos x}+۲=\frac{۱}{\frac{۷}{۱۸}}+۲=\frac{۱۸}{۷}+۲=\frac{۳۲}{۷}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{۳۲}{۷}}$$

$$\boxed{tg\alpha+\cot\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

سؤال۵: درستی رابطهٔ $\frac{۲}{\sin^۲\theta}-\frac{۱}{\sin^۴\theta}=۱-\cot^۴\theta$ را اثبات کنید.

حل)

از سمت چپ شروع به ساده کردن می‌کنیم تا به سمت راست برسیم:

سمت چپ: $\frac{۲}{\sin^۲\theta}-\frac{۱}{\sin^۴\theta}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}(۲-\frac{۱}{\sin^۲\theta})=(۱+\cot^۲\theta)(۲-(۱+\cot^۲\theta))$

$=(۱+\cot^۲\theta)(۱-\cot^۲\theta)=۱-\cot^۴\theta$: سمت راست

سؤال ۶: اگر $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}>\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}$ باشد انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه۴

$$\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}>\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}$$

چون سمت راست نامساوی مثبت است پس سمت چپ نامساوی نیز باید مثبت باشد بنابراین است.

$$\cos x\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}>\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}\Rightarrow \frac{\cos x}{|\cos x|}>\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow ۱>\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}۱>۱+۲\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x<۰$$

چون $\cos x>۰$ است پس $\sin x<۰$ می باشد. بنابراین انتهای کمان x در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی است.

دقت کنید که $۱+۲\sin x\cos x$ همیشه بزرگتر یا مساوی صفر است، زیرا $۱+۲\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^۲$ پس با توجه به توان رساندن دو طرف، جواب اضافه وارد نمی شود.

سؤال ۷: زاویهٔ حادهٔ θ در رابطهٔ $۵\sin^۲\theta+۲\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta=۵$ صدق می کند. $\tan\theta$ چقدر است؟

حل)

طرفین رابطه را بر $\cos^۲\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$۵\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}+\frac{۲\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}+۲\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۵}{\cos^۲\theta}$$

$$\Rightarrow ۵\tan^۲\theta+۲+۲\tan\theta=۵(۱+\tan^۲\theta)\Rightarrow ۲+۲\tan\theta=۵\Rightarrow \tan\theta=\frac{۳}{۲}$$

سؤال ۸: اگر $\tan\beta=۳$ باشد حاصل $\frac{\sin\beta}{۲۰\cos^۳\beta-\sin\beta}$ را به دست آورید.

حل)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos^3\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin\beta}{\cos^3\beta}}{20\frac{\cos^3\beta}{\cos^3\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos^3\beta}}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{1}{\cos^2\beta}}{20-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{1}{\cos^2\beta}}=\frac{\tan\beta(1+\tan^2\beta)}{20-\tan\beta(1+\tan^2\beta)}\ (\text{جاگذاری})$$

$$=\frac{3\times 10}{20-(3\times 10)}=\frac{30}{20-30}=\frac{30}{-10}=-3$$

📖 سؤال ۹: اگر $\begin{cases}\tan x+\tan y=12\\ \cot x+\cot y=4\end{cases}$ باشد مقدار $\frac{\cot x}{\cot y}+\frac{\tan x}{\tan y}$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴۶ ۴) ۲۴

☜ پاسخ: گزینه۳

دو طرف فرض های داده شده را در هم ضرب می کنیم:

$$(\tan x+\tan y)(\cot x+\cot y)=12\times 4=48$$

$$\Rightarrow 1+\tan x.\cot y+\tan y.\cot x+1=48\Rightarrow \frac{\tan x}{\tan y}+\frac{\cot x}{\cot y}=48-2=46$$

📖 سؤال ۱۰: با فرض $\tan\theta=5$ حاصل عددی $A=\frac{3\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-4\cos\theta}$ را به دست آورید.

حل)

(روش اول)

$$\tan\theta=5\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\Rightarrow\sin\theta=5\cos\theta\ (\text{جاگذاری در } A)$$

$$\Rightarrow A=\frac{3(5\cos\theta)-\cos\theta}{5\cos\theta-4\cos\theta}=\frac{15\cos\theta-\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{14\cos\theta}{\cos\theta}=14$$

(روش دوم)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{3\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-4\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-4\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{3\tan\theta-1}{\tan\theta-4}=\frac{(3\times 5)-1}{5-4}=14$$

📖 سؤال۱۱: اتحادهای زیر را اثبات کنید.

1) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\sin^2 x$

$$\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\sin^2 x((1+\tan^2 x)-1)=\sin^2 x.\tan^2 x$$

2) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x.\cos^2 x$

$$\cot^2 x-\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x=\cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)=\cos^2 x((1+\cot^2 x)-1)=\cos^2 x.\cot^2 x$$

به شما پیشنهاد می کنم روابط زیر را خوب یاد بگیرید:

۱) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

۲) $\begin{cases}\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\\ \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{cases}\Rightarrow \tan x.\cot x=1$

۳) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

۴) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

۵) $\tan x+\cot x=\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

۶) $\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

۷) $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

۸) $\sin^2 x=\dfrac{1}{1+\cot^2 x}$

۹) $\cos^2 x=\dfrac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$

۱۰) $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

۱۱) $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$

۱۲) $(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2$

۱۳) $(\tan x-\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x-2$

۱۴) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x.\sin^2 x$

۱۵) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x.\cos^2 x$

سؤال ۱۲: اگر $\sqrt{5}(\sin x+\cos x)=3$ باشد مقدار $\tan x$ کدام می تواند باشد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه۱

ابتدا طرفین تساوی فرض را به توان دو می رسانیم:

$$\sqrt{5}(\sin x+\cos x)=3\Rightarrow 5(1+2\sin x\cos x)=9\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{2}{5}$$

از اتحاد زیر می توان مقدار $\tan x$ را به دست آورد:

$$\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}\Rightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{5}{2}\xrightarrow{\tan x=A}A+\frac{1}{A}=\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2A}2A^2-5A+2=0\Rightarrow\begin{cases}A=2=\tan x\\ A=\frac{1}{2}=\tan x\end{cases}$$

پس مقدار $\tan x$ برابر ۲ یا $\frac{1}{2}$ است که عدد ۲ در گزینه ها می باشد.

📖 سؤال ۱۳: اگر $3\sin x+\cos x=2$ باشد حاصل $\frac{3\sin x}{4\sin x+3\cos x}+2\cos^2 x$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴   ۴) $\frac{1}{4}$

☜ پاسخ: گزینه۱

ابتدا طرفین فرض را به توان ۲ می رسانیم:

$$3\sin x+\cos x=2\xrightarrow{\text{توان}2}9\sin^2 x+\cos^2 x+6\sin x\cos x=4$$

$$\Rightarrow 8\sin^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)+6\sin x\cos x=4\Rightarrow 8\sin^2 x+6\sin x\cos x=3$$

$$\Rightarrow 2\sin x(4\sin x+3\cos x)=3\Rightarrow 4\sin x+3\cos x=\frac{3}{2\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sin x}{4\sin x+3\cos x}+2\cos^2 x=\frac{3\sin x}{\frac{3}{2\sin x}}+2\cos^2 x=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2$$

📖 سؤال ۱۴: عبارت $\sin x\cos x$ برابر کدام یک از عبارت های زیر است؟

۱) $\cot x(1+\cot^2 x)$ ۲) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ ۳) $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ ۴) $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}$

☜ پاسخ: گزینه۳

می دانیم $\cot x+\tan x=\frac{1}{\sin x\cos x}$ بنابراین می توان نوشت:

$$\sin x\cos x=\frac{1}{\cot x+\tan x}=\frac{1}{\frac{1}{\tan x}+\tan x}=\frac{1}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

📖 سؤال ۱۵: حاصل $\frac{1}{1+\cot 20^\circ}+\frac{1}{1+\tan 20^\circ}$ برابر است با:

۱) ۱   ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

☜ پاسخ: گزینه۱

می دانیم $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ در نتیجه:

$$\frac{1}{1+\tan 20^\circ}+\frac{1}{1+\cot 20^\circ}=\frac{1+\cot 20^\circ+1+\tan 20^\circ}{1+\cot 20^\circ+\tan 20^\circ+\underbrace{\tan 20^\circ\cot 20^\circ}_{1}}$$

$$=\frac{2+\tan 20^\circ+\cot 20^\circ}{2+\tan 20^\circ+\cot 20^\circ}=1$$

📖 سؤال ۱۶: اگر $۱۳۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ حاصل $A=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha-\sin^۴\alpha}}$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

راه‌حل:

$$A=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\alpha)}}=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}}=\sqrt{۱-۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $۱۳۵^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α، در ناحیه‌ی دوم است و چون در این ناحیه $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$، پس $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $|\sin\alpha\cos\alpha|=-\sin\alpha\cos\alpha$.

بنابراین

$$A=\sqrt{۱+۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha+\cos\alpha|$$

چون $۱۳۵^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، پس $\sin\alpha+\cos\alpha<۰$ و در نتیجه

$$A=-\sin\alpha-\cos\alpha$$

📖 سؤال ۱۷: مقادیر a , b را طوری تعیین کنید که تساوی زیر اتحاد باشد.

$$\frac{a}{\cos^۲x}+\frac{b}{\cos^۴x}=\tan^۲x+\tan^۴x$$

راه حل اول)

$$\frac{a}{\cos^۲x}+\frac{b}{\cos^۴x}=\tan^۲x(۱+\tan^۲x)=\tan^۲x.\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}.\frac{۱}{\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow\frac{a\cos^۲x+b}{\cos^۴x}=\frac{\sin^۲x}{\cos^۴x}\Rightarrow a\cos^۲x+b=\sin^۲x=۱-\cos^۲x\Rightarrow a\cos^۲x+b=-\cos^۲+۱\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\b=۱\end{cases}$$

راه حل دوم)

$$x=۰\Rightarrow a+b=۰$$

$$x=۶۰^\circ\Rightarrow\frac{a}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}+\frac{b}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴}=(\sqrt{۳})^۲+(\sqrt{۳})^۴\Rightarrow ۴a+۱۶b=۳+۹\Rightarrow ۴a+۱۶b=۱۲\Rightarrow\boxed{a+۴b=۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=۰\\a+۴b=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\b=۱\end{cases}$$

📖 سؤال ۱۸: اگر تساوی $\frac{a}{\sin^۲x}+\frac{b}{\sin^۴x}+۱=\cot^۴x$ یک اتحاد باشد مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

راه حل اول)

$$\frac{a}{\sin^۲x}+\frac{b}{\sin^۴x}=\cot^۴x-۱$$

$$\Rightarrow\frac{a\sin^۲x+b}{\sin^۴x}=\frac{\cos^۴x}{\sin^۴x}-۱=\frac{\cos^۴x-\sin^۴x}{\sin^۴x}$$

$$\Rightarrow a\sin^۲x+b=\cos^۴x-\sin^۴x=\underbrace{(\cos^۲x+\sin^۲x)}_{۱}(\cos^۲x-\sin^۲x)$$

$$\Rightarrow a\sin^۲x+b=\cos^۲x-\sin^۲x=۱-\sin^۲x-\sin^۲x=-۲\sin^۲x+۱\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\b=۱\end{cases}\Rightarrow ab=-۲$$

گزینه ۳ درست است.

راه حل دوم) چون تساوی یک اتحاد است پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x \neq ۰$ ، برقرار است به:

$$x = ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{a}{\frac{۱}{۴}} + \frac{b}{\frac{۱}{۱۶}} + ۱ = ۹ \Rightarrow a + ۴b = ۲ \qquad (۱)$$

$$x = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{a}{\frac{۱}{۲}} + \frac{b}{\frac{۱}{۴}} + ۱ = ۱ \Rightarrow a + ۲b = ۰ \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ۴b = ۲ \\ a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow ab = -۲ \Rightarrow$$ گزینه (۳) درست است.

سؤال۱۹: اگر $\frac{۱}{\sin\alpha} - \cot\alpha = ۲$ حاصل $\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha$ را بیابید.

دو تا عبارت را در هم ضرب می کنیم:

$$\left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right)\underbrace{\left(\frac{۱}{\sin\alpha} - \cot\alpha\right)}_{۲} = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} - \cot^۲\alpha \Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} - \cot^۲\alpha$$

$$\boxed{\frac{۱}{\sin^۲\alpha} = ۱ + \cot^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) = (۱ + \cot^۲\alpha) - \cot^۲\alpha = ۱ \Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) = \frac{۱}{۲}$$

سؤال۲۰: اگر انتهای کمان x در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و داشته باشیم: $\tan x - ۳\cot x = ۲$ ، آنگاه مقدار $\cos x$ کدام است؟

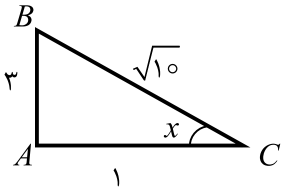
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

روش اول) با فرض $\tan x = a$ آنگاه $\cot x = \frac{۱}{a}$ خواهد بود پس:

$$\tan x - ۳\cot x = ۲ \Rightarrow a - \frac{۳}{a} = ۲$$

طرفین معادله را در a ضرب می کنیم:

$$a^۲ - ۳ = ۲a \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow (a-۳)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ a = -۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{در ناحیه سوم } \tan x > ۰]{a = \tan x} \tan x = ۳$$



$$BC = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

(در ناحیه سوم $\cos x < ۰$)

$$\cos x = \frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}$$

روش دوم)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \xrightarrow[\cos x<0\ \text{است}]{x\ \text{در ناحیه سوم است}} \cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال۲۱: رابطه‌ی $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x$ وقتی برقرار است که انتهای x در .... واقع باشد.

۱) ناحیه اول یا دوم

۲) ناحیه اول یا سوم

۳) ناحیه اول یا چهارم

۴) در هر ناحیه

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}} = \left|\frac{1-\sin x}{\cos x}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right| = \left|\frac{1}{\cos x} - \tan x\right|$$

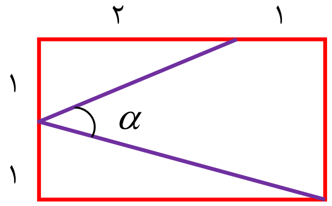
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\cos x} - \tan x\right| = \frac{1}{\cos x} - \tan x \xrightarrow[O\geq 0]{|O|=O} \frac{1}{\cos x} - \tan x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1-\sin x}{\cos x} \geq 0 \xrightarrow{1-\sin x\geq 0} \cos x > 0$$ و x در ناحیه اول یا چهارم است.

گزینه (۳) درست است.

تست های مثلثات دهم

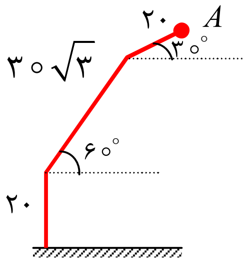
سؤال ۱: در مستطیل شکل مقابل، اندازه $\sin\alpha$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۴}{۵}$

سؤال ۲: در شکل مقابل فاصله نقطه A از سطح زمین چقدر است؟



۱) ۸۵

۲) ۶۰

۳) ۷۵

۴) ۹۰

سؤال ۳: با فرض $\tan x = ۳$ حاصل کسر $\frac{\sin^۲ x + ۳\cos^۲ x}{۳\sin^۲ x - \cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۳}{۸}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

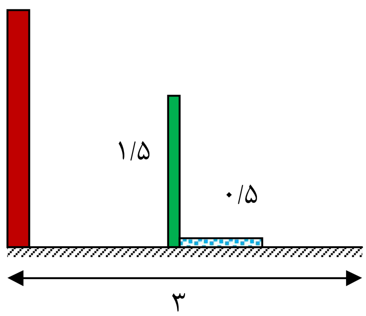
سؤال ۴: حاصل عبارت $\frac{\sin^۴ x + \cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} - (\tan x + \cot x)^۲$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۲　　۳) -۱　　۴) صفر

سؤال ۵: حاصل عبارت $\frac{۲}{۱+\cot^۲ x} + \frac{-۱}{۱+\tan^۲ x} + \cos ۲x$ کدام است؟ (ریاضی دوازدهم)

۱) $\cos^۲ x$　　۲) ۱　　۳) $\sin^۲ x$　　۳) -۱

سؤال ۶: در شکل مقابل، طول سایه تیر چوبی بزرگ برابر ۳ متر و طول سایه تیر چوبی کوچک برابر ۰/۵ متر است.
اگر طول تیر چوبی کوچک برابر ۱/۵ متر باشد طول تیر چوبی بزرگ چند متر است؟



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۸

۴) ۹

📖 سؤال ۷: با فرض $\tan^2 x+\cot^2 x=14$ و حاده بودن زاویه x مقدار $\sin x+\cos x$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

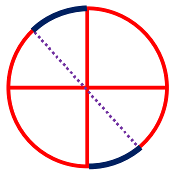
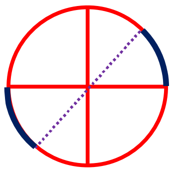
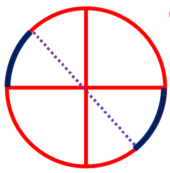
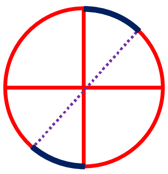
📖 سؤال ۸: در مثلث ABC رابطه $\tan(\hat{B}+20^\circ)\tan(\hat{C}+40^\circ)=1$ برقرار است. زاویه A چند درجه است؟

۱) 90°　　۲) 120°　　۳) 135°　　۴) 150°

📖 سؤال ۹: مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $c=5, b=9$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$　　۲) $3\sqrt{5}$　　۳) $\sqrt{41}$　　۴) $\sqrt{39}$

📖 سؤال ۱۰: اگر $\tan\theta<\cot\theta, \sin\theta\cos\theta>0$ آنگاه انتهای کمان θ در دایره مثلثاتی در کدام ناحیه هاشورزده قرار دارد؟

۱) 　　۲) 　　۳) 　　۴) 

📖 سؤال ۱۱: کدامیک از نامساوی های زیر درست است؟

۱) $\sin 20^\circ>\sin 170^\circ$　　۲) $\cos 20^\circ<\cos 160^\circ$

۳) $\tan 20^\circ<\sin 20^\circ$　　۴) $\cot 20^\circ<\cos 20^\circ$

📖 سؤال ۱۲: اگر $\sin^2 x+2\cos^2 x+3\sin x\cos x=3$ فرض شود $\cot x$ چقدر است؟

۱) -2 و -1　　۲) -2 و 1　　۳) 2 و -1　　۴) 2 و 1

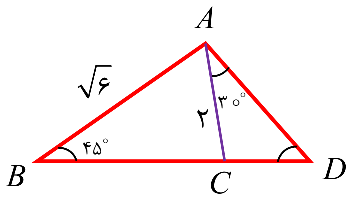
📖 سؤال ۱۳: اگر $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{5}$ باشد حاصل $\sin^6 x+\cos^6 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{2}{5}$　　۴) $\frac{3}{7}$

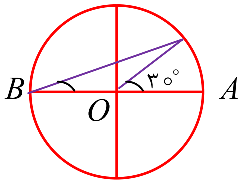
📖 سؤال ۱۴: در شکل مقابل اندازه ضلع AD چقدر است؟

۱) $3\sqrt{2}$　　۲) $2\sqrt{3}$

۳) $3\sqrt{3}$　　۴) $2\sqrt{2}$

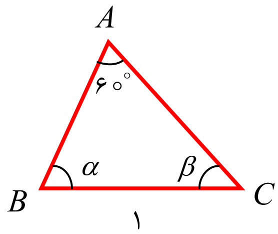


سؤال ۱۵: در دایره مثلثاتی شکل مقابل مقدار $\tan \hat{B}$ کدام است؟



۱) $\dfrac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۴}$
۲) $\sqrt{۳}-۱$
۳) $۲-\sqrt{۳}$
۴) $\dfrac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$

سؤال ۱۶: در مثلث شکل مقابل، اندازه ارتفاع وارد بر BC چقدر است؟

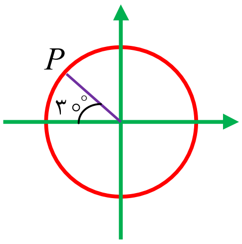


۱) $۲\sin\alpha\sin\beta$
۲) $۲\cos\alpha\cos\beta$
۳) $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\sin\alpha\sin\beta$
۴) $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\cos\alpha\cos\beta$

سؤال ۱۷: در مثلثی $\sin\dfrac{A}{۳}=\cos B$ است اگر $\hat{C}=۶۰^\circ$ باشد آنگاه زاویهٔ B کدام است؟ (ریاضی یازدهم)

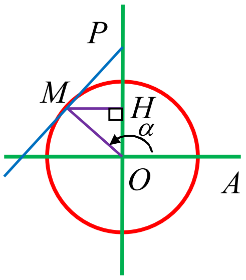
۱) ۷۵°
۲) ۴۵°
۳) ۹۰°
۴) ۶۰°

سؤال ۱۸: در دایره مثلثاتی شکل مقابل حاصل ضرب مختصات نقطه P کدام است؟



۱) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$
۳) $-\dfrac{۱}{۴}$
۴) $-\dfrac{۳}{۴}$

سؤال ۱۹: در دایره مثلثاتی مطابق شکل مقابل اندازه HP کدام است؟(ریاضی دوازدهم)



۱) $\sin\alpha$
۲) $\cos\alpha$
۳) $\sin\alpha\tan\alpha$
۴) $\cos\alpha\cot\alpha$

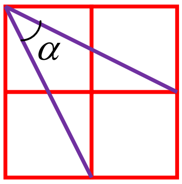
سؤال ۲۰: اگر α در ناحیه اول مثلثات $\sin\alpha=\dfrac{\alpha}{\alpha+۱}$ باشد مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲a+۱}{\sqrt{a}}$
۲) $\dfrac{a}{\sqrt{۲a-۱}}$
۳) $\dfrac{a}{\sqrt{۲a+۱}}$
۴) $\dfrac{۲a-۱}{\sqrt{a}}$

سؤال ۲۱: با فرض $\tan x = ۲$ حاصل $۲\sin^۲ x - \cos^۲ x + \sin x \cos x$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$

سؤال ۲۲: در شکل مقابل چهار مربع به ضلع یک وجود دارد. مقدار $\cos\theta$ چقدر است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

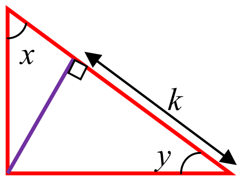
سؤال ۲۳: با فرض $\frac{\sin x}{۱+\sin x} = \frac{۱-\sin x}{\cos x}$ مقدار x کدام می تواند باشد؟(ریاضی دوازدهم)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

سؤال ۲۴: مساحت مثلثی که دو ضلع آن برابر ۴ و ۶ است برابر $۶\sqrt{۳}$ است. طول ضلع سوم مثلث حداکثر چقدر است؟

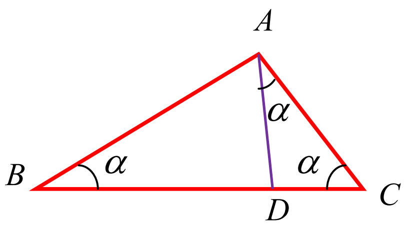
۱) $۲\sqrt{۱۷}$ ۲) $۲\sqrt{۱۹}$ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۲۱}$

سؤال ۲۵: در شکل مقابل مقدار k کدام است؟



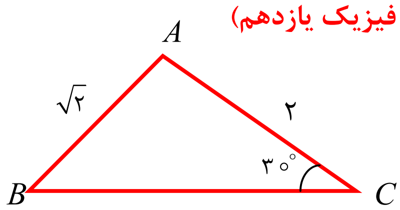
۱) $۴\sin x$ ۲) $۴\sin y$ ۳) $\frac{۱}{۴}\sin y$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sin x$

سؤال ۲۶: اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد با توجه به شکل مقابل مقدار $\frac{AB}{AD}$ کدام است؟(ریاضی دوازدهم)



۱) ۱/۲
۲) ۱/۶
۳) ۱/۵
۴) ۱/۸

سؤال ۲۷: در مثلث شکل مقابل طول ضلع BC چقدر است؟(رشته ریاضی فیزیک یازدهم)



۱) $۳-\sqrt{۳}$

۲) $۳-\sqrt{۲}$

۳) $۱+\sqrt{۲}$

۴) $۱+\sqrt{۳}$

سؤال ۲۸: در مثلث ABC داریم $\hat{B}=۶۰^\circ , \hat{A}=۴۵^\circ$ اگر ارتفاع $AH=\sqrt{۳}$ باشد طول ضلع BC چند برابر $\sqrt{۳}-۱$ است؟(رشته ریاضی فیزیک یازدهم)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

سؤال ۲۹: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC داریم $AB=۲AC , \hat{A}=۹۰^\circ$ مقدار $\sin \hat{B}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

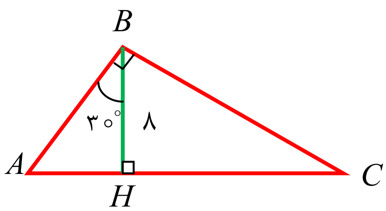
سؤال ۳۰: اگر $\tan x=\frac{۳}{۴}$ باشد حاصل $A=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۳}{\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

سؤال ۳۱: اگر داشته باشیم $۳\cos \hat{A}+۴\sin \hat{A}=۰$ در این صورت $\tan \hat{A}+\cot \hat{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۲}$

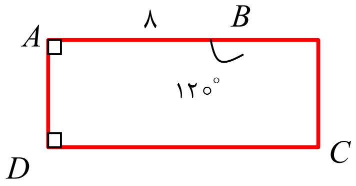
سؤال ۳۲: در شکل مقابل طول ضلع BC کدام است؟



۱) ۸ ۲) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۳) ۱۶ ۴) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$

📖 سؤال ۳۳: در شکل مقابل محیط ذوزنقهٔ $ABCD$ کدام است؟



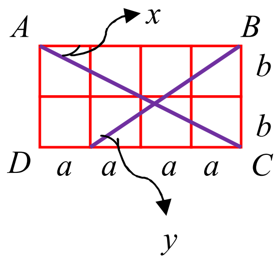
۱) $۲۵+۳\sqrt{۳}$

۲) $۲۵+\sqrt{۳}$

۳) $۲۴+۴\sqrt{۲}$

۴) $۲۴+\sqrt{۲}$

📖 سؤال ۳۴: در شکل مقابل طول هر کدام از مستطیل ها a و عرض آنها b است. در این صورت $cotx$ کدام است؟



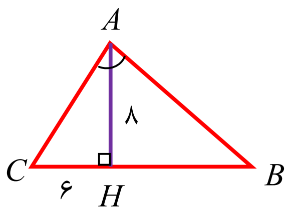
۱) $\frac{۳a}{۴b}\tan y$

۲) $\frac{۳}{۴}\tan y$

۳) $\frac{۳b}{۴a}\cot y$

۴) $\frac{۴}{۳}\cot y$

📖 سؤال ۳۵: با توجه به شکل مقابل $\cos \hat{B}$ کدام است؟



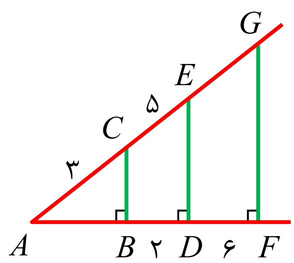
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

📖 سؤال ۳۶: با توجه به شکل مقابل $\sin \hat{G}$ کدام است؟



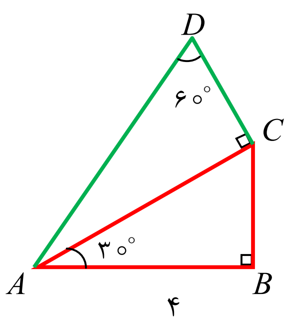
۱) $\frac{۵}{۶}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

📖 سؤال ۳۷: در شکل مقابل طول پاره خط CD کدام است؟



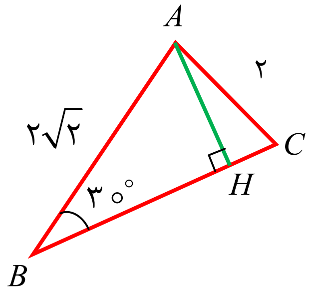
۱) ۴

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) ۸

۴) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

سؤال ۳۸: زاویهٔ A در مثلث مقابل چند درجه است؟



۱) ۶۰

۲) ۱۰۵

۳) ۹۰

۴) ۱۲۵

سؤال ۳۹: شخصی با قد ۱۸۰ سانتر متر در فاصلهٔ ۲/۵ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. این شخص چند سانتی متر به تیر نزدیک شود تا سایه اش ۲ برابر قدش شود؟

۱) ۱۰　　۲) ۲۰　　۳) ۳۰　　۴) ۴۰

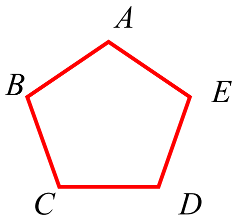
سؤال ۴۰: مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $c=5, b=8$ باشد اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟ (تجربی خارج۹۲)

۱) $\sqrt{39}$　　۲) $\sqrt{41}$　　۳) $3\sqrt{5}$　　۴) $5\sqrt{2}$

سؤال ۴۱: در مثلث ABC با ابعاد ۲، ۴ و ۵ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگتر دو مثلث ایجاد می کند. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۰/۷　　۲) ۰/۷۴　　۳) ۰/۸۶　　۴) ۰/۶

سؤال ۴۲: در پنج ضلعی مقابل ضلع ED با دوران چند درجه ای حول نقطهٔ E، روی AE می افتد؟ (هر زاویهٔ داخلی پنج ضلعی منتظم 108°است.)



۱) 108°

۲) 252°

۳) 120°

۴) -120°

سؤال ۴۳: اگر $\tan x+\cot x=\sqrt{2+\tan^2 x+\cot^2 x}$ باشد انتهای کمان روبه رو به زاویهٔ α در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) فقط چهارم　　۲) فقط دوم　　۳) اول یا سوم　　۴) دوم یا چهارم

سؤال ۴۴: در محل تقاطع خط L و خط $x=2$ در بالای محور xها زاویهٔ حادهٔ 60° ایجاد شده است. اگر خط L محور طولها را در نقطه ای با طول x_0 قطع نماید شیب این خط کدام است؟ $(x_0<2)$

۱) $\sqrt{3}$　　۲) $-\sqrt{3}$　　۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

سؤال ۴۵: خط d محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ با زاویهٔ 45° قطع می کند و از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی کند. این خط محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴- ۴) ۱-

سؤال ۴۶: به ازای $180^\circ < x < 270^\circ$ حاصل $\sqrt{1+2\sqrt{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}}$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x$ ۲) $\sin x - \cos x$ ۳) $-\sin x - \cos x$ ۴) $\cos x - \sin x$

سؤال ۴۷: عبارت $\frac{1}{1-\sin y} + \frac{1}{1+\sin y}$ در کدام فاصله تغییر می کند؟ $(y \neq 180^\circ K + 90^\circ ; k \in Z)$

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $[1, +\infty)$ ۴) $[2, +\infty)$

سؤال ۴۸: با فرض $\tan\theta = \frac{3}{4}$ حاصل $(\tan\theta - \cot\theta)^2 - \frac{1}{\cos^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{9}$ ۲) $-\frac{12}{25}$ ۳) $\frac{16}{25}$ ۴) $\frac{16}{9}$

سؤال ۴۹: حاصل $\left(\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right) - 2\tan^2\theta$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

سؤال ۵۰: عبارت $\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sin\theta}$ ۲) $\frac{1}{\cos\theta}$ ۳) $\frac{1}{1+\cos\theta}$ ۴) $\frac{1}{1+\sin\theta}$

سؤال ۵۱: اگر $\cos x < 0, \sin x > 0$ باشد آنگاه حاصل عبارت $\frac{1-\sin x}{\cos x} \times \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\tan x$ ۴) $-\tan x$

سؤال ۵۲: اگر انتهای کمان α در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی باشد حاصل $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{1+\cot^2\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\tan\alpha$ ۲) $-\cot\alpha$ ۳) $\tan\alpha$ ۴) $\cot\alpha$

سؤال ۵۳: اگر $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۵}$ بوده و $۱۸۰^\circ<x<۲۷۰^\circ$ باشد آنگاه حاصل $A=\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\pm\frac{۷}{۵}$ ۳) $-\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

سؤال ۵۴: عبارت $\frac{۲\sin^۴ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x-۳\sin^۲ x-۳\cos^۲ x}{۲\sin^۲ x}$ برابر کدام است؟

۱) $۱-\frac{۳}{۲}\cos^۲ x$ ۲) $۱-\frac{۳}{۲\sin^۲ x}$ ۳) $۱-\frac{۳}{۲}\sin^۲ x$ ۴) $۱-\frac{۳}{۲\cos^۲ x}$

سؤال ۵۵: عبارت $\frac{۱-\sin x+\cos x}{۱+\sin x+\cos x}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sin x}{\cos x}$ ۲) $\frac{۱-\sin x}{\cos x}$ ۳) $\frac{\cos x}{۱-\sin x}$ ۴) $\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

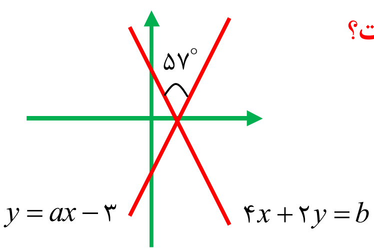
سؤال ۵۶: اگر $\sin x+\tan x>۰,\ \frac{۱}{\cos x}-\sin x\tan x<۰$ باشد انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

سؤال ۵۷: اگر $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}-۱=۰,\ \tan x=\frac{-\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x}$ باشد انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

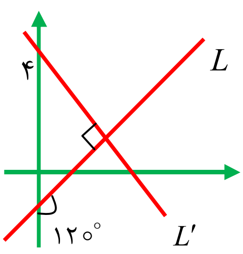
سؤال ۵۸: در شکل مقابل اگر $\tan ۱۱۷^\circ=-۲$ باشد مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

سؤال ۵۹: خط L' محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

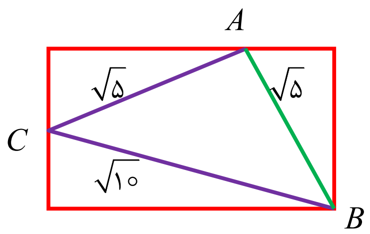


۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۶}{\sqrt{۳}}$

پاسخنامه تست های مثلثات دهم

۱ـ ☜ پاسخ: گزینه۲



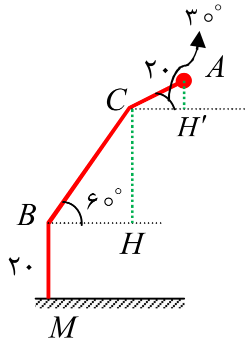
با توجه به رابطه فیثاغورس شکل مقابل به دست می آید.

پس مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین است پس:

$$\sin\alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

فاصله نقطه A از سطح زمین برابر است با:



$$BM + CH + AH' = 20 + BC\sin 60^\circ + AC\sin 30^\circ$$
$$= 20 + 30\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\times\frac{1}{2} = 20 + 45 + 10 = 75$$

۳ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

صورت ومفرج کسر را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{\tan^2 x + 3}{3\tan^2 x - 1} = \frac{3+3}{9-1} = \frac{3}{4}$$

۴ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

می دانیم $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$ و $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$، پس عبارت چنین است:

$$\frac{(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) - 1}{\sin^2 x\cos^2 x} = -2$$

۵ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

$$\cos 2x + \frac{-1}{1+\tan^2 x} + \frac{2}{1+\cot^2 x} = (\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos^2 x + 2\sin^2 x = \sin^2 x$$

۶ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

اگر θ زاویه بین شعاع آفتاب و خط قائم و طول تیر بزرگتر ℓ باشد داریم: $\tan\theta = \dfrac{3}{\ell} = \dfrac{0/5}{1/5} \Rightarrow \ell = 9$

۷ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

$$(\tan x + \cot x)^2 - 2 = 14 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 16 \Rightarrow \tan x + \cot x = 4$$
$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = 4 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{4}$$

با فرض $A=\sin x+\cos x$ داریم:

$$A^{۲}=(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)+۲\sin x\cos x=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

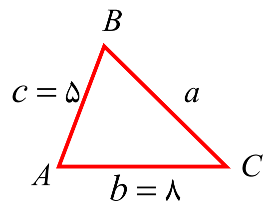
$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۸ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

$$\tan(\hat{B}+۲۰^\circ)=\frac{۱}{\tan(\hat{C}+۴۰^\circ)}=\cot(\hat{C}+۴۰^\circ)=\tan(۹۰^\circ-(\hat{C}+۴۰^\circ))=\tan(۵۰^\circ-\hat{C})$$

$$\hat{B}+۲۰^\circ=۵۰^\circ-\hat{C}\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۵۰^\circ$$

۹ـ ☜ پاسخ: گزینه۲



$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A\Rightarrow ۱۶=\frac{۱}{۲}\times۸\times۵\sin A\Rightarrow\sin A=۰/۸$$

$$\Rightarrow\cos A=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}A}=\pm۰/۶$$

اگر $\cos A=-۰/۶$ باشد $\boldsymbol{a}$ بزرگترین ضلع است پس $\cos A=۰/۶$ در این صورت طبق رابطه کسینوس ها داریم:

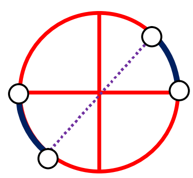
$$a^{۲}=۵^{۲}+۸^{۲}-۲\times۵\times۸\times۰/۶=۲۵+۶۴-۴۸=۴۱\Rightarrow a=\sqrt{۴۱}$$

۱۰ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

$\sin\theta\cos\theta>۰$ پس $\cos\theta,\sin\theta$ هم علامت اند، پس انتهای کمان θ در ناحیه اول یا سوم است. در این نواحی $\cot\theta,\tan\theta$ مثبت اند. پس دو طرف رابطه $\tan\theta<\cot\theta$ را در $\tan\theta$ ضرب می کنیم:

$$\tan^{۲}\theta<۱\Rightarrow|\tan\theta|<۱\Rightarrow ۰<\tan\theta<۱$$

بنابراین انتهای کمان θ مطابق مقابل است:



۱۱ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

گزینه۱) $\begin{cases}\sin۲۰^\circ>\sin۱۰^\circ\\ \sin۱۰^\circ=\sin۱۷۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\sin۲۰^\circ>\sin۱۷۰^\circ$

گزینه۲) $\cos۲۰^\circ>۰>\cos۱۶۰^\circ$

گزینه۳) $۰<x<۹۰^\circ\Rightarrow\tan x>\sin x\Rightarrow\tan۲۰^\circ>\sin۲۰^\circ$

گزینه۴) $\begin{cases}\sin۲۰^\circ<۱\Rightarrow\dfrac{۱}{\sin۲۰^\circ}>۱\\ \cos۲۰^\circ>۰\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\cos۲۰^\circ}{\sin۲۰^\circ}>\cos۲۰^\circ\Rightarrow\cot۲۰^\circ>\cos۲۰^\circ$

۱۲ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

دو طرف را بر $\sin^{۲}x$ تقسیم می کنیم:

$$۱+۲\cot^۲ x+۳\cot x=۳(۱+\cot^۲ x)\Rightarrow \cot^۲ x-۳\cot x+۲=۰$$
$$\Rightarrow (\cot x-۱)(\cot x-۲)=۰\Rightarrow \cot x=۱,۲$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دقت کنید:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

پس:

$$۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین:

$$\cos^۶ x+\cos^۶ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۳-۳\sin^۲ x\cos^۲ x(\sin^۲ x+\cos^۲ x)۱-۳\left(\frac{۱}{۵}\right)(۱)=\frac{۲}{۵}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

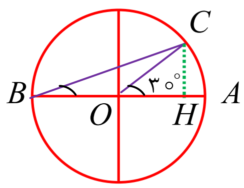
با توجه به قضیه سینوس ها داریم: $\frac{\sqrt{۶}}{\sin C}=\frac{۲}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۶}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow C=۶۰^\circ$

پس $D=۳۰^\circ$ و در نتیجه ACD متساوی الساقین است و $CD=۲$ و $C=۱۲۰^\circ$ است با توجه قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{AD}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{۲}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow AD=\frac{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

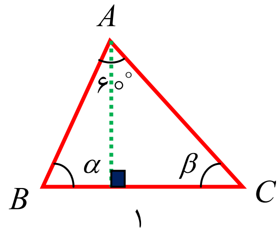
با توجه به شکل:



$$\tan B=\frac{CH}{BH}=\frac{CH}{BO+OH}=\frac{\sin ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$
$$=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}\Rightarrow ۲-\sqrt{۳}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۳

مطابق قضیه سینوس ها:



$$\frac{۱}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin\alpha}\Rightarrow AB=\frac{۲\sin\beta}{\sqrt{۳}},AC=\frac{۲\sin\alpha}{\sqrt{۳}}$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\sin\beta}{\sqrt{۳}}\times\frac{۲\sin\alpha}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{۳}}$$

از طرفی این مساحت برابر است با:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}AH$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AH=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{۳}}\Rightarrow AH=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\sin\alpha\sin\beta$$

۱۷ـ پاسخ: گزینه۱

پس: $A+B=۱۲۰^\circ=\frac{۲\pi}{۳}rad$

$$\sin\frac{A}{۳}=\sin\left(\frac{\frac{۲\pi}{۳}-B}{۳}\right)=\sin\left(\frac{۲\pi}{۹}-\frac{B}{۳}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\left(\frac{۲\pi}{۹}-\frac{B}{۳}\right)\right)=\cos\left(\frac{B}{۳}+\frac{۵\pi}{۱۸}\right)$$

پس معادله به صورت $\cos\left(\frac{B}{۳}+\frac{۵\pi}{۱۸}\right)=\cos B$ است لذا:

$$\frac{B}{۳}+\frac{۵\pi}{۱۸}=B\Rightarrow\frac{۲B}{۳}=\frac{۵\pi}{۱۸}\Rightarrow B=\frac{۵\pi}{۱۲}rad=۷۵^\circ$$

۱۸ـ پاسخ: گزینه۲

حاصل ضرب مختصات نقاط P برابر است با: $xy=\cos ۱۵۰^\circ\sin ۱۵۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۱۹ـ پاسخ: گزینه۴

از هندسه می دانیم $OH\times HP=MH^۲$ پس:

$$\sin\alpha\times HP=(\cos\alpha)^۲\Rightarrow HP=\cos\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Rightarrow HP=\cos\alpha\cot\alpha$$

۲۰ـ پاسخ: گزینه۳

در ناحیهٔ اول: $\cos\alpha>۰$ است پس:

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{a^۲}{(a+۱)^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲+۲a+۱-a^۲}{(a+۱)^۲}}=\frac{\sqrt{۲a+۱}}{a+۱}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{a+۱}}{\frac{\sqrt{۲a+۱}}{a+۱}}=\frac{a}{\sqrt{۲a+۱}}$$

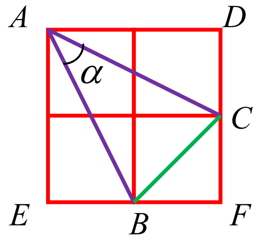
۲۱ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

$$2\sin^2 x-\cos^2 x+\sin x\cos x \Rightarrow \cos^2 x(2\tan^2 x-1+\tan x)$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2 x}(8-1+2)=\frac{9}{1+4}=\frac{9}{5}$$

۲۲ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

❖ **راه اول)** با توجه به قضیه فیثاغورس $AB=AC=\sqrt{5}$ پس:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\sin\theta=\frac{5}{2}\sin\theta$$



از طرفی:

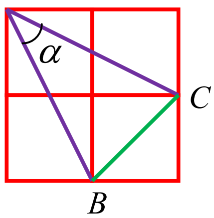
$$S_{\overset{\Delta}{ABE}}=S_{\overset{\Delta}{ACD}}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$$
$$S_{\overset{\Delta}{BCF}}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

پس مساحت مثلث برابر است با: $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=4-\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ بنابراین:

$$\frac{5}{2}\sin\theta=\frac{3}{2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}$$

❖ **راه دوم)** به کمک رابطه فیثاغورس به سادگی می توان به دست آورد که :

$$AB=AC=\sqrt{5}$$
$$BC=\sqrt{2}$$



حالا مطابق رابطه کسینوس ها داریم:

$$\sqrt{2}^2=\sqrt{5}^2+\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}\sqrt{5}\cos\theta$$
$$2=10-10\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$$

۲۳ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

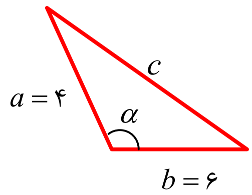
دو طرف را در $\cos x(1+\sin x)\neq 0$ ضرب می کنیم (طرفین ـ وسطین):

$$1-\sin^2 x=\sin x\cos x\Rightarrow\cos^2 x=\sin x\cos x$$
$$\xrightarrow{\cos x\neq 0} csx=\sin x\xrightarrow{\div\cos x}\tan x=1$$

X می تواند برابر $\frac{5\pi}{4}$ باشد.

۲۴ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

با توجه به شکل:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$
$$\Rightarrow 6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{1}{2}$$

(در و اقع $\alpha=\frac{\pi}{6}$ است یا $\alpha=\frac{5\pi}{6}$) اگر $\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha=\frac{5\pi}{6}\right)$ طول ضلع سوم بیشتر از زمانی است که

$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha=\frac{5\pi}{6}\right)$ و مطابق قضیه کسینوس ها داریم:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\Rightarrow 16+36-2\times 4\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=52+24=76$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$$

۲۵ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

y,x متمم یکدیگرند پس $\cos y=\sin x$ می توان نوشت:

$$\cos y=\frac{k}{4}\Rightarrow k=4\cos y=4\sin x$$

۲۶ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

با توجه به قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{\sin D}{\sin B}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1/6$$

۲۷ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

مطابق قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\Rightarrow\sin B=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=45^\circ\Rightarrow A=180-(30+45)=105^\circ$$

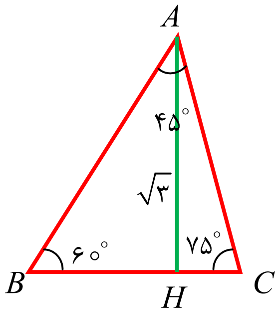
حال داریم:

$$\sin 105^\circ=\sin(60+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

مطابق قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin 105^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{3}$$

۲۸- پاسخ: گزینه۲



$$\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$$

حال دقت کنید که :

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

مطابق رابطه سینوس ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ}=\frac{AB}{\sin 75^\circ}\Rightarrow BC=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}=\frac{4}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=2(\sqrt{3}-1)$$

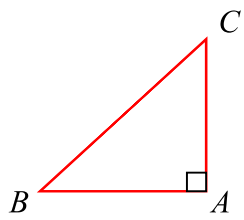
۲۹- پاسخ: گزینه۱

طبق فرض $AB=2AC$ است می توان فرض کنیم $AB=2, AC=1$ باشد در این صورت با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول BC را می یابیم:

$$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC^2=2^2+1^2=5\Rightarrow BC=\sqrt{5}$$

$$\sin\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } B}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کردن}}\sin\hat{B}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$



۳۰- پاسخ: گزینه۱

ابتدا با توجه به فرض که $\tan x=\frac{3}{4}$ است ارتباط $\cos x,\sin x$ را می یابیم:

$$\tan x=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin x=\frac{3}{4}\cos x\ \ (*)$$

حال مقدار A را بدست می آوریم:

$$A=\frac{4}{\cos x}-\frac{3}{\sin x}\xrightarrow{(*)}\frac{4}{\cos x}-\frac{3}{\frac{3}{4}\cos x}=\frac{4}{\cos x}-\frac{12}{3\cos x}=\frac{4}{\cos x}-\frac{4}{\cos x}=0$$

۳۱ ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

$$۳\cos\hat{A}+۴\sin\hat{A}=۰\xrightarrow{\div\sin\hat{A}}\frac{۳\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}}+\frac{۴\sin\hat{A}}{\sin\hat{A}}=۰\Rightarrow ۳\cot\hat{A}+۴=۰$$

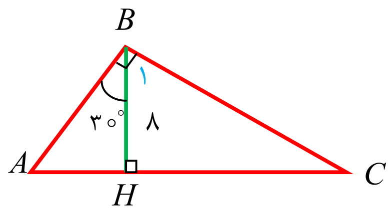
$$\Rightarrow ۳\cot\hat{A}=-۴\Rightarrow\cot\hat{A}=\frac{-۴}{۳}\xrightarrow{\tan\hat{A}=\frac{۱}{\cot\hat{A}}}\tan\hat{A}=\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow\tan\hat{A}+\cot\hat{A}=-\frac{۳}{۴}+\left(\frac{-۴}{۳}\right)=\frac{-۹-۱۶}{۱۲}=\frac{-۲۵}{۱۲}$$

۳۲ ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

چون $\hat{B}=۹۰^\circ$ است و قسمتی از آن ۳۰° می باشد پس $\hat{B}_۱=۶۰^\circ$ بوده و داریم:

$$\cos\hat{B}_۱=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\cos۶۰^\circ=\frac{۸}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۸}{BC}\Rightarrow BC=۱۶$$

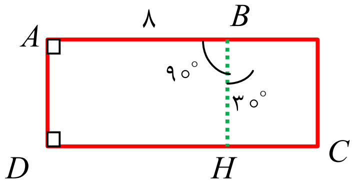


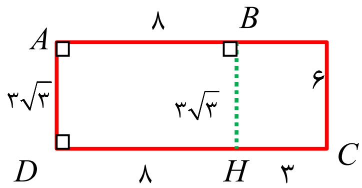
۳۳ ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

از نقطهٔ **B** بر ضلع **CD** عمود **BH** را رسم می کنیم. در این صورت زاویهٔ **B** به دو قسمت ۹۰° و $۱۲۰^\circ-۹۰^\circ=۳۰^\circ$ تقسیم می شود. حال در مثلث قائم الزاویهٔ **BCH**، $\cos۳۰^\circ,\sin۳۰^\circ$ را نوشته و ارتفاع **BH** و طول **CH** را به دست می آوریم:

$$\sin۳۰^\circ=\frac{CH}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{CH}{۶}\Rightarrow CH=۳$$

$$\cos۳۰^\circ=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۶}\Rightarrow BH=۳\sqrt{۳}$$





محیط ذوزنقه $=AB+BC+CD+DA\Rightarrow$

$$\Rightarrow ۸+۶+۳+۸+۳\sqrt{۳}=۲۵+۳\sqrt{۳}$$

۳۴ ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

❖ **راه اول** در مثلث قائم الزاویهٔ **ABC** داریم:

$$\cot x=\frac{AB}{BC}=\frac{۴a}{۲b}=\frac{۲a}{b}\quad(*)$$

ولی در گزینه ها **cotx** برحسب **tany , coty** داده شده است پس باید در مثلث **BCD**، **tany** را به دست آورده و ببینیم چه ارتباط با **cotx** دارد.

طرفین تساوی را معکوس می کنیم

$$\overset{\Delta}{BCD}:\tan y=\frac{BC}{CD}=\frac{۲b}{۳a}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۳}{۲}\tan y\longrightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{\tan y}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\cot y$$

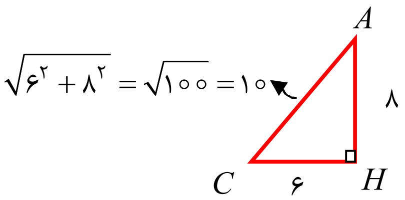
بنابراین با جایگذاری $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\cot y$ در رابطه (*) داریم:

$$\cot x=۲\left(\frac{a}{b}\right)=۲\left(\frac{۲}{۳}\cot y\right)=\frac{۴}{۳}\cot y$$

❖ **راه دوم)** می توانیم به a , b مقادیر دلخواه (مثلاً $a=b$ =) داده و گزینه ها را امتحان کنیم.

۳۵ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

دنبال $\cos\hat{B}$ می گردیم ولی در مثلث داده شده اطلاعات برای محاسبهٔ $\cos\hat{B}$ کافی نیست اما می دانیم $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$ ، زیرا مثلث ABC قائم الزاویه است. پس $\hat{C},\hat{B}$ متمم یکدیگر بوده و در نتیجه $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}$. حال در مثلث ACH به راحتی می توانیم $\sin\hat{C}$ را به دست آوریم:



$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\cos\hat{B}=\sin\hat{C}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$$

۳۶ـ ☜ پاسخ: گزینه۴

ابتدا $\cos\hat{A}$ را در سه مثلث زیر به دست می آوریم و از برابر قرار دادن آنها طول پاره خط های AB , EG را محاسبه می کنیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{۳}\quad(*)$$

$$\overset{\Delta}{ADE}:\cos\hat{A}=\frac{AD}{AE}=\frac{AB+۲}{۸}\quad(**)$$

$$\overset{\Delta}{AFG}:\cos\hat{A}=\frac{AF}{AG}=\frac{AB+۸}{۸+EG}\quad(***)$$

$$(*)=(**):\frac{AB}{۳}=\frac{AB+۲}{۸}\Rightarrow ۸AB=۳AB+۶\Rightarrow ۵AB=۶\Rightarrow AB=\frac{۶}{۵}$$

$$(*)=(***):\frac{AB}{۳}=\frac{AB+۸}{۸+EG}\xrightarrow{AB=\frac{۶}{۵}}\frac{\frac{۶}{۵}}{۳}=\frac{\frac{۶}{۵}+۸}{۸+EG}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}=\frac{\frac{۴۶}{۵}}{۸+EG}\Rightarrow ۴۸+۶EG=۱۵\left(\frac{۴۶}{۵}\right)$$

$$\Rightarrow ۴۸+۶EG=۱۳۸\Rightarrow ۶EG=۹۰\Rightarrow EG=۱۵$$

حال $\sin\hat{G}$ را می توانیم بیابیم:

$$\overset{\Delta}{AFG}:\sin\hat{G}=\frac{AF}{AG}=\frac{\frac{۶}{۵}+۲+۶}{۳+۵+۱۵}=\frac{\frac{۶}{۵}+۸}{۲۳}=\frac{\frac{۴۶}{۵}}{۲۳}=\frac{۲}{۵}$$

۳۷ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

$$\overset{\Delta}{ABC}:\cos 30^\circ=\frac{AB}{AC}\xrightarrow{AB=4}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{AC}\Rightarrow\sqrt{3}AC=8\Rightarrow AC=\frac{8}{\sqrt{3}}\quad(*)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}:\tan 60^\circ=\frac{AC}{CD}\xrightarrow{(*)}\sqrt{3}=\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{CD}\Rightarrow\sqrt{3}CD=\frac{8}{\sqrt{3}}\Rightarrow CD=\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3}$$

۳۸ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

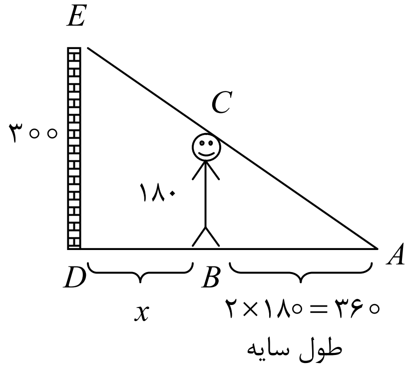
زاویهٔ A در شکل روبه رو برابر $\hat{A}_1+\hat{A}_2$ است حال این دو زاویه را به دست می آوریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\hat{B}+\hat{A}_2+\hat{H}=180^\circ\Rightarrow 30^\circ+\hat{A}_2+90^\circ=180^\circ\Rightarrow\hat{A}_2=60^\circ\\ \sin 30^\circ:\cos\hat{A}_1=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\cos\hat{A}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{A}_1=45^\circ\end{cases}$$

پس: $\hat{A}=\hat{A}_2+\hat{A}_1=60^\circ+45^\circ=105^\circ$

۳۹ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

فرض کنید شخص بعد از نزدیک شدن به تیر فاصله اش از تیر x باشد در این صورت چون طول سایه دو برابر قدش است پس طول سایه ۳۶۰ سانتی متر می شود و داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}:\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}\\ \overset{\Delta}{ADE}:\tan\hat{A}=\frac{DE}{AD}=\frac{300}{x+360}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{300}{x+360}$$

$$\Rightarrow x+360=600\Rightarrow x=240$$

فاصلهٔ اولیه شخص تا تیر ۲۵۰ سانتی متر بود و در حال ثانویه فاصله تا تیر ۲۴۰ سانتی متر شده و در نتیجه ۱۰ سانتی متر به سمت تیر نزدیک شده است.

۴۰ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا از قانون مساحت اندازهٔ زاویهٔ A را محاسبه می کنیم:

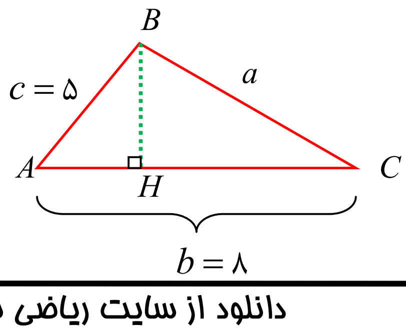
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}\Rightarrow 16=\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\sin\hat{A}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}\quad(*)$$

حال ارتفاع BH را رسم کرده و داریم:

$$\sin\hat{A}=\frac{BH}{AB}\xrightarrow{(*)}\frac{4}{5}=\frac{BH}{5}\Rightarrow BH=4$$

قضیهٔ فیثاغورس : $AB^2=BH^2+AH^2\Rightarrow 5^2=4^2+AH^2\Rightarrow AH=3$

$$\Rightarrow HC=AC-AH=8-3=5$$



حال قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث BCH می نویسیم:

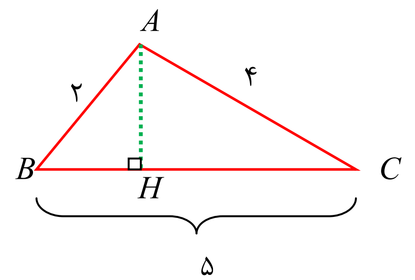
$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴^۲ + ۵^۲ = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱ \Rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

۴۱ ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

با توجه به مفروضات مسأله شکل زیر را رسم می کنیم:

برای محاسبهٔ نسبت مساحت مثلث بزرگتر یعنی AHC به مساحت مثلث ABC طبق قانون مساحت داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AC \times CH \times \sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲} AC \times BC \times \sin\hat{C}} = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{۵} \quad (*)$$



بنابراین برای محاسبهٔ این نسبت نیاز به طول CH داریم:

$$\overset{\Delta}{ACH} \text{ در قضیهٔ فیثاغورس} : x^۲ + y^۲ = ۱۶ \quad (**)$$

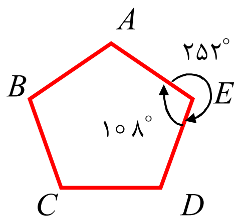
$$\overset{\Delta}{ABH} \text{ در قضیهٔ فیثاغورس} : y^۲ + (۵ - x)^۲ = ۴ \Rightarrow y^۲ + x^۲ + ۲۵ - ۱۰x = ۴$$

$$\xrightarrow{(**)} ۱۶ + ۲۵ - ۱۰x = ۴$$

$$\Rightarrow ۱۰x = ۳۸ \Rightarrow x = ۳/۷ \Rightarrow CH = ۳/۷ \xrightarrow{(*)} \frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۳/۷}{۵} = ۰/۷۴$$

۴۲ ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

دقت کنید همواره چرخش در جهت حرکت عقربه های ساعت را منفی و چرخش در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت را مثبت در نظر می گیریم. طبق فرض اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی این ۵ ضلعی منتظم برابر با ۱۰۸ و اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی آن $۳۶۰^\circ - ۱۰۸^\circ = ۲۵۲^\circ$ می باشد. ضلع ED می تواند در جهت حرکت عقربه های ساعت ۱۰۸° دوران نماید تا روی AE بیفتد که در این صورت زاویه -۱۰۸° می شود یا اینکه در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت ۲۵۲° دوران نموده و روی AE بیفتد. با توجه به گزینه ها گزینه ۲ صحیح است.



۴۳ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

ابتدا سمت راست تساوی داده شده را ساده می کنیم:

$$\sqrt{۲ + \tan^۲ x + \cot^۲ x} = \sqrt{۲ \times ۱ + \tan^۲ x + \cot^۲ x} \xrightarrow{۱ = \tan x + \cot x} \underbrace{\sqrt{۲\tan x \cot x + \tan^۲ x + \cot^۲ x}}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}$$

$$= \sqrt{(\tan x + \cot x)^۲} = |\tan x + \cot x|$$

بنابراین تساوی داده شده به صورت زیر در می آید:

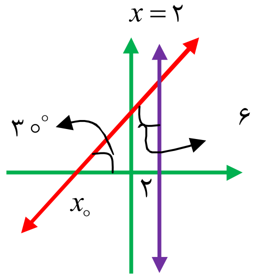
$\tan x+\cot x=|\tan x+\cot x| \Rightarrow$ نتیجه می گیریم : $\tan x+\cot x>0$

می دانیم علامت **tanx** و **cotx** همواره یکسان است، پس اگر جمعشان مثبت شده است می توان نتیجه گرفت است $\cot x>0, \tan x>0$ لذا **x** در ناحیه اول یا سوم قرار دارد.

۱۴۴_ ☜ پاسخ: گزینه۳

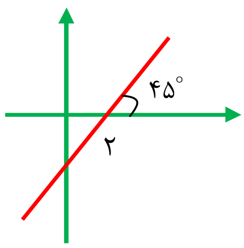
همانطور که از شکل مشخص است زاویهٔ خط **L** با جهت مثبت محور **x** ها، ۳۰ درجه می باشد می دانیم شیب خط برابر تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور **x** هاست. بنابراین شیب این خط برابر است با:

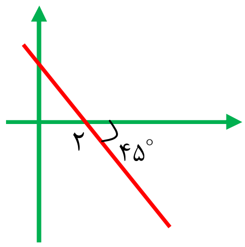
$$m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



۱۴۵_ ☜ پاسخ: گزینه۱

اگر خط **d** محور **x** ها را در نقطه ای به طول ۲ با زاویهٔ ۴۵ درجه قطع کند یکی از دو حالت زیر خواهد داشت:





اما کدام درست است؟ طبق فرض تست، خط نباید از ناحیه دوم محورهای مختصات عبور کند پس شکل سمت چپ صحیح است حال معادلهٔ خط را می نویسیم:

$$\begin{cases}\text{شیب خط}=\tan 45^\circ=1\\ \text{نقطهٔ روی خط}=A(2,0)\end{cases}\Rightarrow y-0=1(x-2)\Rightarrow y=x-2$$

پس معادلهٔ خط $y=x-2$ ش شد که عرض از مبدأ یعنی ۲- همان جایی است که خط محور **y** ها را قطع می کند.

۱۴۶_ ☜ پاسخ: گزینه۳

وقتی $180^\circ<x<270^\circ$ قرار دارد یعنی **x** در ناحیهٔ سوم واقع شده است پس: $\cos x<0, \sin x<0$

$$\sqrt{1+2\sqrt{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}}\Rightarrow\sqrt{1+2\sqrt{\sin^2 x.\cos^2 x}}=\sqrt{1+2|\sin x.\cos x|}$$

$$\xrightarrow[\underbrace{|\sin x.\cos x|}_{\text{مثبت}}=\sin x\cos x]{\cos x<0,\sin x<0}\sqrt{1+2\sin x\cos x}=\sqrt{\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|\xrightarrow[\sin x+\cos x<0]{\cos x<0,\sin x<0}-(\sin x+\cos x)=\sin x-\cos x$$

۴۷- پاسخ: گزینه۴

$$\frac{۱}{۱+\sin y}+\frac{۱}{۱-\sin y}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می گیریم}}\frac{(۱-\sin y)+(۱+\sin y)}{(۱+\sin y)(۱-\sin y)}=\frac{۲}{\underbrace{۱-\sin^۲ y}_{\cos^۲ y}}=\frac{۲}{\cos^۲ y}$$

$$\circ<\cos^۲ y\le ۱\xrightarrow[\text{را وارون کنیم، جهت نامساوی تغییر می کند.}]{\text{می دانیم اگر طرفین یک نامساوی هم علامت}}\frac{۱}{\cos^۲ y}\ge\frac{۱}{۱}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می کنیم.}]{\text{طرفین نامساوی را در ۲}}\frac{۲}{\cos^۲ y}\ge ۲\Rightarrow\frac{۲}{\cos^۲ y}\in[۲,+\infty)$$

۴۸- پاسخ: گزینه۱

$$(\tan\theta-\cot\theta)^۲-\frac{۱}{\cos^۲\theta}=\tan^۲\theta+\cot^۲\theta-۲\underbrace{\tan\theta\times\cot\theta}_{۱}-\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta}\tan^۲\theta+\cot^۲\theta-۲-(۱+\tan^۲\theta)$$

$$=\cot^۲\theta-۳=\left(\frac{۱}{\tan\theta}\right)^۲-۳\xrightarrow{\tan\theta=\frac{۳}{۴}}\left(\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}\right)^۲-۳=\left(\frac{۴}{۳}\right)^۲-۳=\frac{۱۶}{۹}-۳=\frac{۱۶-۲۷}{۹}=\frac{-۱۱}{۹}$$

۴۹- پاسخ: گزینه۴

$$\left(\frac{۱}{۱-\sin\theta}+\frac{۱}{۱+\sin\theta}\right)-۲\tan^۲\theta=\frac{(۱+\sin\theta)+(۱-\sin\theta)}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}-۲\tan^۲\theta$$

$$=\frac{۲}{\underbrace{۱-\sin^۲\theta}_{\cos^۲\theta}}-۲\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۲}{\cos^۲\theta}-\frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۲-۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۲(۱-\sin^۲\theta)}{\cos^۲\theta}=\frac{۲\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=۲$$

۵۰- پاسخ: گزینه۲

$$\tan\theta+\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(۱+\sin\theta)+\cos^۲\theta}{\cos\theta(۱+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta+\overbrace{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}^{۱}}{\cos\theta(۱+\sin\theta)}=\frac{(\sin\theta+۱)}{\cos\theta(۱+\sin\theta)}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

۵۱- پاسخ: گزینه۲

$$\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}}\times\frac{۱-\sin x}{\cos x}\xrightarrow{۱-\sin x=(\sqrt{۱-\sin x})^۲}\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}}\times\frac{(\sqrt{۱-\sin x})^۲}{\cos x}=\frac{\sqrt{۱+\sin x}\times\sqrt{۱-\sin x}}{\cos}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}}{\cos x}=\frac{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}{\cos x}=\frac{\sqrt{\cos^۲ x}}{\cos x}=\frac{|\cos x|}{\cos x}\xrightarrow{\cos x<\circ}\frac{-\cos x}{\cos x}=-۱$$

۵۲- پاسخ: گزینه۴

$$\sqrt{1+\cot^2\alpha}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\times\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{|\sin\alpha|}_{}}-\frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\overbrace{|1-\cos\alpha|}^{\text{همواره مثبت}}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

α ناحیه اول، سینوس مثبته

۵۳- پاسخ: گزینه۳

کلاً هر وقت $\sin x\pm\cos x$ دیدیدم باید یاد به توان ۲ رساندن بیفتید اکثر مواقع به کارتان می آید:

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{5}\xrightarrow{\text{به توان۲}}(\sin x-\cos x)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2\Rightarrow\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}-2\sin x\cos x=\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{25}=2\sin x\cos x\Rightarrow\frac{24}{25}=2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{12}{25}\quad(*)$$

حال مقدار $A=\sin x+\cos x$ را می خواهیم ابتدا طرفین تساوی را به توان ۲ می رسانیم:

$$A=\sin x+\cos x\xrightarrow{\text{به توان۲}}A^2=(\sin x+\cos x)^2\Rightarrow A^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow A^2=1+2\sin x\cos x\xrightarrow{(*)}A^2=1+2\left(\frac{12}{25}\right)=1+\frac{24}{25}=\frac{25+24}{25}=\frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow A=\pm\frac{7}{5}$$

چون $180^\circ<x<270^\circ$ بوده (یعنی x در ناحیه سوم قرار دارد پس **cosx,sinx** هر دو منفی اند پس $\sin x+\cos x$ نیز منفی خواهد بود لذا $A=-\frac{7}{5}$ صحیح است.

۵۴- پاسخ: گزینه۲

$$\frac{2\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x-3\sin^2x-3\cos^2x}{2\sin^2x}=\frac{2\sin^2x\overbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}^{1}-3\overbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}^{1}}{2\sin^2x}$$

$$=\frac{2\sin^2x-3}{2\sin^2x}=\frac{2\sin^2x}{2\sin^2x}-\frac{3}{2\sin^2x}=1-\frac{3}{2\sin^2x}$$

۵۵- پاسخ: گزینه۲

$$\frac{۱-\sin x+\cos x}{۱+\sin x+\cos x}=\frac{(۱+\cos x)-\sin x}{(۱+\cos x)+\sin x}\times\frac{(۱+\cos x)-\sin x}{(۱+\cos x)-\sin x}$$

$$=\frac{((۱+\cos x)-\sin x)^۲}{(۱+\cos x)^۲-\sin^۲ x}=\frac{(۱+\cos x)^۲+\sin^۲ x-۲\sin x(۱+\cos x)}{۱+\cos^۲ x+۲\cos x-\sin^۲ x}$$

$$=\frac{۱+\cos^۲ x+۲\cos x+\sin^۲ x-۲\sin x-۲\sin x\cos x}{۲\cos^۲ x+۲\cos x}$$

$$=\frac{\overbrace{۲+۲\cos x}^{۲(۱+\cos x)}-۲\sin x(۱+\cos x)}{۲\cos x(۱+cosx)}=\frac{۲(۱+\cos x)(۱-\sin x)}{۲\cos x(۱+\cos x)}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

۵۶- ☜ پاسخ: گزینه۳

$$۱)\quad \frac{۱}{\cos x}-\sin x\tan x<۰\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}-\sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)<۰\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin^۲ x}{\cos x}<۰$$

$$\Rightarrow\frac{۱-\sin^۲ x}{\cos x}<۰\Rightarrow\frac{\cos^۲ x}{\cos x}<۰\Rightarrow\cos x<۰$$

پس x در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد.

$$۲)\quad \sin x+\tan x>۰\Rightarrow\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}>۰\Rightarrow\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}>۰$$

با توجه به شرط اول $\cos x<۰$ است پس برای آن که کسر فوق مثبت باشد باید صورت کسر هم منفی باشد لذا داریم:

$$\sin x\cos x+\sin x<۰\Rightarrow\sin x\underbrace{(\cos x+۱)}_{\text{همواره نامنفی}}<۰\Rightarrow\sin x<۰\Rightarrow$$ x در ناحیه سوم یا چهارم

بنابراین x باید در ناحیهٔ سوم باشد تا هر دو نامساوی برقرار شوند.

۵۷- ☜ پاسخ: گزینه۴

$$۱)\quad \cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}-۱=۰\Rightarrow\cos x\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=۱\Rightarrow\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^۲ x}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x}{|\cos x|}=۱\Rightarrow|\cos x|=\cos x\quad(*)$$

چون $|\cos x|$ همان $\cos x$ شده است نتیجه می‌گیریم که $\cos x\geq ۰$ بوده است پس زاویهٔ x در ربع اول یا چهارم است:

$$۲)\quad \tan x=-\frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\sqrt{\sin^۲ x}}{\cos x}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-|\sin x|}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\sin x=-|\sin x|\Rightarrow|\sin x|=-\sin x$$

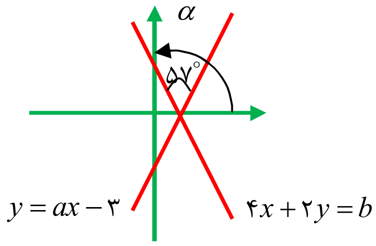
۵۸- ☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا شیب خط $۴x+۲y=b$ را می یابیم:

$$۴x+۲y=b\Rightarrow۲y=-۴x+b\Rightarrow y=-۲x+\frac{b}{۲}$$

می دانیم ضریب x در حالت فوق تانژانت زاویه اس است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد پس:

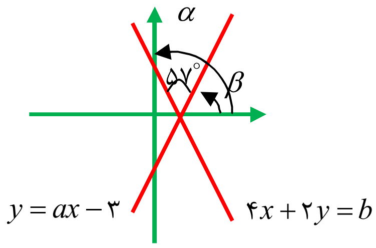
$$\tan\alpha = -2 \xrightarrow{\tan 117^\circ = -2} \alpha = 117^\circ \quad (*)$$



شیب خط $y = ax - 3$ همان a است از طرفی شیب خط تانژانت زاویهٔ β است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد که با توجه به شکل آن را می یابیم:

$$\beta + 57^\circ = \alpha \xrightarrow{(*)} \beta + 57^\circ = 117^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

$$\alpha = \tan\beta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



۵۹ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

ابتدا زوایای مشخص شده در شکل را می یابیم سپس در مثلث OAB تانژانت زاویهٔ B را می نویسیم:

$$\tan\hat{B} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{4}{OB}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4}{OB} \Rightarrow OB = \frac{4}{\sqrt{3}}$$