مجانب افقی

مدرس : استاد ایمان نخستین

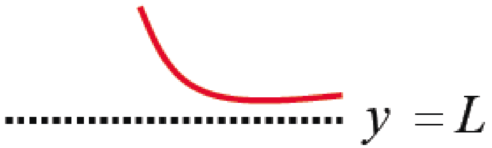
www.riazisara.ir

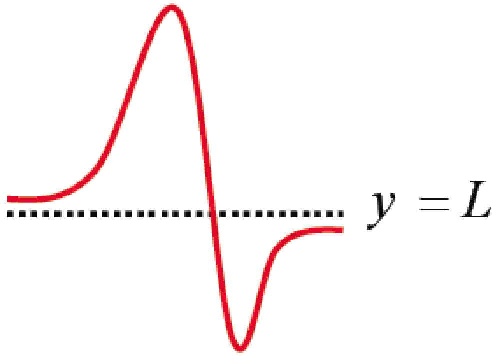
مجانب افقی:

اگر در تابع f وقتی x به سمت بی نهایت میل کند، تابع $f(x)$ به خط L نزدیک شود. خط L مجانب افقی تابع $f(x)$ است

یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$$ مجانب افقی تابع است $y=L$





سؤال ۱: مجانب های افقی توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)\ y=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۳}} \underset{x\to\infty}{\simeq} \frac{۱}{\infty}=۰ \to y=۰ \text{ مجانب افقی است}$$

$$۲)\ y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۲}} \underset{x\to\infty}{\simeq} \frac{x}{|x|}$$

$$\xrightarrow{+\infty} \frac{x}{x}=۱ \qquad y=۱ \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

$$\xrightarrow{-\infty} \frac{x}{-x}=-۱ \qquad y=-۱ \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

۳) $\frac{|x|+x}{|۲x|-[x]} \underset{x\to\infty}{\simeq} \frac{|x|+x}{|۲x|-x}$ $\begin{cases} \xrightarrow{+\infty} \frac{x+x}{۲x-x}=\frac{۲x}{x}=۲ \\ \xrightarrow{-\infty} \frac{-x+x}{-۲x-x}=۰ \end{cases}$

$y=۲$ مجانب افقی تابع است.

$y=۰$ مجانب افقی تابع است.

۴) $y=\frac{\sin x}{x} \underset{x\to\infty}{\simeq} \frac{-۱\le \sin\infty \le ۱}{\pm\infty}=۰$ $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

توجه مهم: همانطور که در مبحث حد توضیح داده بودیم توابع متناوب در ∞ حد ندارند پس توابع متناوب مجانب افقی ندارند.

توجه مهم: اگر دامنه‌ی تابع f کراندار باشد تابع نمی تواند مجانب افقی داشته باشد زیرا x نمی تواند به سمت ∞ میل کند.

۱) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{۱-x^{۲}}}{x^{۲}+۳}$ $D_f:۱-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \xrightarrow{\text{کراندار } D_f}$ مجانب افقی ندارد f

۲) $f(x)=\dfrac{۲x-\sqrt{x-۱}}{x^{۲}+\sqrt{۴-x}}$ $D_f:\begin{cases} x-۱\geq ۰ \\ ۴-x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow ۱\leq x\leq ۴ \xrightarrow{\text{کراندار } D_f}$ مجانب افقی ندارد f

یک مهارت خوب:در توابع رادیکالی به فرم $y = mx + n \pm \sqrt{ax^{۲} + bx + c}$ به شرطی مجانب افقی دارد که $m^{۲} = a$.

🕮 سؤال ۳: خط به معادلهٔ $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-۱+\sqrt{ax^{۲}+bx}$ است. b کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ـ ۸۷)

۱) ۱۰- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۱۰

☜ پاسخ: گزینه۴

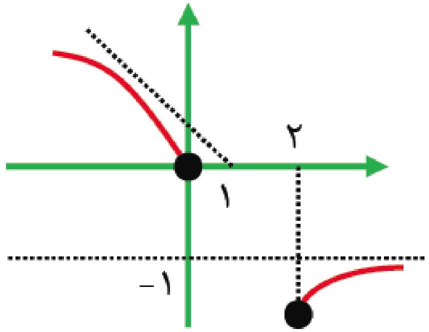
طبق مهارت بالا $f(x)$ زمانی می تواند مجانب افقی داشته باشد که $a=۲^{۲}=۴$ یعنی $f(x)=۲x-۱+\sqrt{۴x^{۲}+bx}$

پس: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=۲x-۱+۲\left|x+\frac{b}{۸}\right|$

$f(x)$ زمانی می تواند مجانب افقی داشته باشد که $x\to-\infty$ میل کند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۲x-۱-۲x-\frac{b}{۴}=-۱-\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{b}{۴}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow b=۱۰$$

📖 سؤال ۴: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+\sqrt{x^{۲}+bx}$ است دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۱,۲)$

۲) $(-۱,۲)$

۳) $(۱,-۲)$

۴) $(-۱,-۲)$

☜ **پاسخ: گزینه ۴**

با توجه به شکل وقتی $x\to+\infty$ میل می‌کند تابع $f(x)$ دارای مجانب افقی $y=-۱$ است.

$$\lim_{x\to+\infty} ax+\sqrt{x^{۲}+bx} \underset{x\to+\infty}{\sim} ax+\left|x+\frac{b}{۲}\right|=ax+x+\frac{b}{۲}=(a+۱)x+\frac{b}{۲}=-۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۱=۰\Rightarrow a=-۱ \\ \dfrac{b}{۲}=-۱\Rightarrow b=-۲ \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(-۱,-۲)$$

📖 سؤال ۵: اگر $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax^3+1}{(a-1)x^3+16}$ باشد تابع f کدام است؟

۱) $x=-4$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=2$ ۴) $x=4$

☜ پاسخ: گزینه۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^{۳}+۱}{(a-۱)x^{۳}+۱۶} = \frac{a}{a-۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۳x^{۳}+۱}{۲x^{۳}+۱۶} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} ۲x^{۳}+۱۶ = ۰ \Rightarrow x^{۳} = -۸ \Rightarrow x = -۲$$

با توجه به اینکه $x=-۲$ ریشه مخرج هست و صورت کسر را صفر نمی کند پس $x=-۲$ مجانب قائم است.

🕮 سؤال ۶: امتداد مجانب های نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^{2}+2x}-\sqrt{x^{2}-2x}$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در دو نقطهٔ A , B قطع می کند اندازه AB کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۴)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{2}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

این تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x}\ \underset{x\to\infty}{\sim}\ |x+۱|-|x-۱|$$

$x\to+\infty:(x+۱)-(x-۱)=۲$ تقاطع با خط مجانب افقی $A\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$

$x\to-\infty:-(x+۱)+(x-۱)=-۲$ تقاطع با خط مجانب افقی $B\left|\begin{matrix}-۲\\-۲\end{matrix}\right.$

$$AB=\sqrt{۴^{۲}+۴^{۲}}$$

راه حل دوم) برای بدست آوردن مجانب افقی تابع می توانستیم از روش زیر نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{۲x-(-۲x)}{۲\sqrt{x^{۲}}}=\frac{۴x}{۲|x|}\begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} & y=۲\\ \xrightarrow{x\to-\infty} & y=-۲\end{cases}$$

سؤال ۷: نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می کند؟ (داخل ۹۲)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول)

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-x^2} \sim \frac{0-(-x^2)}{(3\sqrt[3]{(x^3)^2}}=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

روش دوم)

$$\lim_{x\to\infty}x-\sqrt[3]{x^3-x^2}=x-\left(x-\frac{1}{3\times1}\right)=\frac{1}{3}$$

📖 سؤال ۸: اگر نقاط A , B محل تلاقی مجانب های افقی و قائم منحنی تابع $y=\frac{x^۲+x}{x+۲}-\frac{x^۲}{x-۱}$ بوده و نقطهٔ O مبدأ مختصات باشد مساحت مثلث OAB کدام است؟

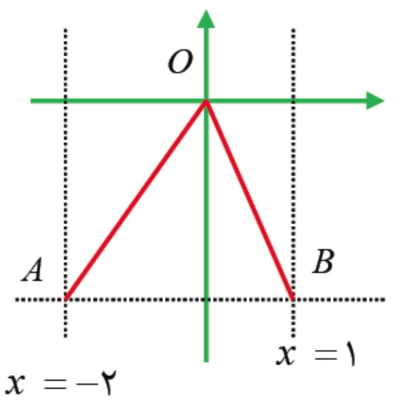
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☜ پاسخ: گزینه۱

$x=-۲, x=۱$ ریشه های مخرج هستند و چون صورت کسر را صفر نمی کنند پس مجانب های قائم کسر هستند حالا برای بدست آوردن مجانب افقی x را به سمت ∞ میل می دهیم و از هم ارزی تقسیم استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+x}{x+۲}-\frac{x^۲+۰x}{x-۱}\sim x+(۱-۲)-(x+(۰-(-۱)))=x-۱-(x+۱)=-۲$$

$\Rightarrow y=-۲$ مجانب افقی تابع است



$$S_{OAB}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{۳\times۲}{۲}=۳$$

سؤال ۹: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$ خط مجانب افقی خود را در نقطهٔ A قطع می کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط مجانب قائم کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☜ پاسخ: گزینه۳

ابتدا مجانب افقی تابع را بدست می آوریم و با $f(x)$ قطع می دهیم تا طول نقطهٔ A را بدست آوریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

بنابراین مجانب افقی تابع است.

طول نقطهٔ تقاطع $\frac{2x^2-3x}{x^2-2x+1}=2\Rightarrow 2x^2-3x=2x^2-4x+2\Rightarrow x=2$

$x=1$ ریشهٔ مخرج است و صورت کسر را نیز صفر نمی کند پس $x=1$ مجانب قائم تابع است.

$$\Rightarrow d=|2-1|=1$$

📖 سؤال ۱۰: اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$، $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ نقطهٔ تلاقی مجانب های تابع fog کدام است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,1)$ (داخل تجربی ۹۱)

☞ **پاسخ: گزینه۴**

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)+1}{2\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)+1}=\frac{x+1}{x}\rightarrow\begin{cases} x=0 : \text{مجانب قائم} \\ y=1 : \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

محل تلاقی مجانب های $(0,1)$ است.

🕮 سؤال ۱۱: دو تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x}}$, $g(x)=\dfrac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض اند. تعداد مجانب های تابع $f+g$ کدام است؟ (خارج ریاضی ـ ۸۵)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

☜ پاسخ: گزینه۲

$$f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}}+\frac{1-x}{x-\sqrt{x}}=\frac{(x+1)(x-\sqrt{x})+(1-x)(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{x^2-x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-x^2-x\sqrt{x}}{x^2-x}=\frac{2x-2x\sqrt{x}}{x^2-x}=\frac{2x(1-\sqrt{x})}{x(x-1)}$$

$$=\frac{2x(1-\sqrt{x})}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}$$

مجانب قائم: ریشه های مخرج: $\sqrt{x}+1=0 \xrightarrow{\text{ریشه ندارد}}$ فاقد مجانب قائم

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{x}+1}=0 \Rightarrow y=0$ مجانب افقی است.

پس $(f+g)(x)$ یک مجانب دارد.

📖 سؤال ۱۲: دو مجانب افقی $y=2x(\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x^2-k})$ از یکدیگر ۸ واحد فاصله دارند. مقدار k کدام است؟ (گزینه۲)

$$\lim_{x\to\infty} 2x(\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x^2-k}) = 2x\frac{k-(-k)}{2\sqrt{x^2}} = 2x\times\frac{2k}{2|x|} \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty : \dfrac{4kx}{2x}=2k \\ x\to-\infty : \dfrac{4kx}{-2x}=-2k \end{cases}$$

فاصله $: |2k-(-2k)|=|4k|=8 \Rightarrow |k|=2 \Rightarrow \boxed{k=\pm 2}$

📖 سؤال ۱۳: تابع زیر چند مجانب دارد؟

$$y=\frac{۱}{\log_{۲}^{(x-۲)}}\quad x-۲>۰\Rightarrow x>۲$$

ریشه مخرج: مجانب قائم: $\log_{۲}^{(x-۲)}=۰\Rightarrow x-۲=۱\Rightarrow x=۳$

مجانب افقی : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{\log_{۲}^{(x-۲)}}=\frac{۱}{\log_{۲}^{(+\infty)}}=\frac{۱}{\infty}=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow$ مجانب افقی است.

📖 سؤال ۱۴: مجانب های افقی توابع زیر را تعیین کنید.

$$۱)\ \frac{\sin x}{۱-\cos x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}=\cot\frac{x}{۲}\xrightarrow{T}۲\pi$$

☜ **پاسخ:** این تابع متناوب است همانطور که در مبحث حد اشاره کردیم توابع متناوب و غیرثابت در $-\infty,+\infty$ حد ندارند بنابراین این تابع فاقد مجانب افقی است.

۲) $\frac{۱}{x}\cos\frac{۱}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}\cos\frac{۱}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{۱}{x}}{x}=\frac{\text{کراندار}}{\infty}=۰\Rightarrow y=۰$$ مجانب افقی تابع است.

📖 سؤال ۱۵: مجموع مقادیر a برای آنکه نمودار تابع $y=\frac{x+3}{ax^2+x+1}$ فقط دو مجانب داشته باشند کدام است؟

☜ **پاسخ:** اگر $a=0$ باشد $y=\frac{x+3}{x+1}$ است پس دارای مجانب قائم $x=-1$ و افقی $y=1$ است اگر $a\neq 0$ باشد آنگاه y دارای مجانب افقی $y=0$ خواهد بود در این حالت برای آنکه تابع فقط دو مجانب داشته باشد باید یکی از حالات زیر پیش آید:

۱) دلتای مخرج $=0 \Rightarrow 1-4a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

۲) یک ریشه مخرج با صورت مشترک باشد $\Rightarrow ax^2+x+1 \xrightarrow[\text{برابر صفر شود}]{\text{صورت به ازای } x=-3} a(-3)^2+(-3)+1=0 \Rightarrow a=\frac{2}{9}$

مجموع مقادیر a $=0+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{17}{36}$

📖 سؤال ۱۶: شکل حاصل از محل برخورد مجانب های نمودار تابع $y=\frac{ax+b+1}{cx+2a+1}$ با محورهای مختصات یک مربع و محل برخورد مجانب ها در ناحیه اول است. c چه مقادیری می تواند داشته باشد.

☜ پاسخ:

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{a}{c}$

مجانب قائم: $cx+2a+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2a-1}{c}$

شرط ایجاد مربع توسط مجانب ها و محورهای مختصات : $x=y \Rightarrow \frac{-2a-1}{c}=\frac{a}{c} \Rightarrow -2a+1=a \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

مجانب افقی: $y=-\frac{1}{3c}$

مجانب قائم: $x=-\frac{1}{3c}$

از طرفی برای اینکه محل برخورد مجانب ها ناحیه اول باشد باید در نتیجه: $-\frac{1}{3x}>0$ یا $c<0$

🕮 سؤال ۱۷: تابع $y=\frac{x}{|x|-|\sin x|}$ چند مجانب دارد؟

☜ **پاسخ:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\sin x} & 0<x<\pi\\[2mm] \dfrac{x}{-x+\sin x} & -\pi<x<0\end{cases}$$

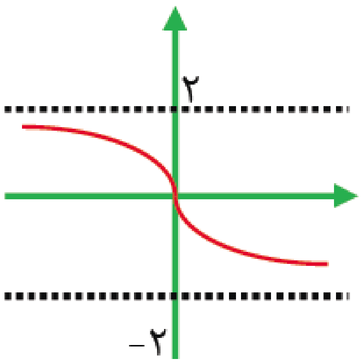
برای بدست آوردن مجانب قائم باید ریشه های مخرج کسر تابع یعنی $x-\sin x$ را به دست آوریم که با رسم نمودار مشخص می شود $x=0$ است حال بررسی می کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{6}x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6}{x^2}=+\infty\\ &\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x+\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-\frac{1}{6}x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-6}{x^2}=-\infty\end{aligned}\right\}\longrightarrow x=0 \text{ مجانب قائم است}$$

حال به بررسی مجانب افقی می پردازیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|-\underbrace{|\sin x|}_{\text{کراندار}}}=\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|-\underbrace{|\sin x|}_{\text{کراندار}}}=\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1$$

📖 سؤال ۱۸: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{ax}{\sqrt{x^{۲}+bx+۴}}$ به صورت زیر کدام است؟ (سراسری ۷۹)



۱) $(۲,۴)$

۲) $(-۲,۴)$

۳) $(-۲,۰)$

۴) $(۲,۰)$

☜ **پاسخ:** نمودار مجانب قائم ندارد پس مخرج ریشه ندارد $b^{۲}-۱۶<۰$ یا $-۴<b<۴$

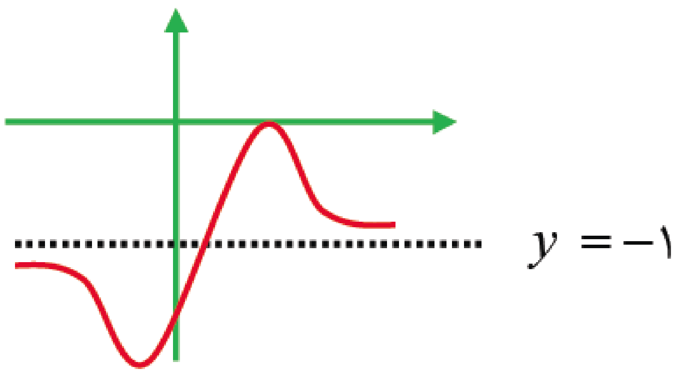
پس گزینه های ۱ و ۲ رد می شوند همچنین $y=۲$ مجانب افقی در $-\infty$ است.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^{۲}+bx+۴}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{-\left(x+\frac{b}{۲}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{-x}=-a$$

$$\Rightarrow -a=۲\Rightarrow a=-۲\Rightarrow (a,\mathrm{b})=(-۲,۰)$$

سؤال ۱۹: نمودار تابع $y=\frac{ax^{۲}+۴x-۴}{x^{۲}+b}$ به صورت مقابل است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

(سراسری ۸۱)



۱) $(-۲,۵)$

۲) $(-۱,۳)$

۳) $(-۱,۵)$

۴) $(۱,۳)$

☜ پاسخ: گزینه۲

نمودار تابع بر محور xها مماس است بنابراین معادله $y=\circ$ دارای ریشه مضاعف است

(صورت کسر دارای ریشه مضاعف است) $(\Delta_{\text{صورت}}=\circ)$

$$\boxed{f(\circ)=-\frac{۴}{b}<-۱}$$

$$۱۶+۱۶a=\circ\Rightarrow a=-۱\Rightarrow y=\frac{-x^{۲}+۴x-۴}{x^{۲}+b}$$

مجانب افقی : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^{۲}+۴x-۴}{x^{۲}+b}=-۱$

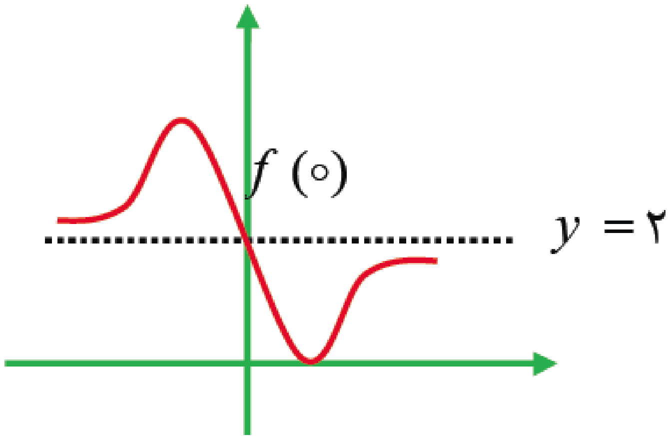
حالا توجه کنید که نمودار محور yها را در زیر مجانب افقی قطع می کند یعنی عرض از مبدأ نمودار یا همان $f(\circ)$ کمتر از ۱- است.

$$f(\circ)<-۱\Rightarrow -\frac{۴}{b}<-۱\Rightarrow \frac{۴}{b}>\circ\xrightarrow{b>\circ}b<۴$$

با توجه به گزینه ها $(b=۳)$ پس : $(a,b)=(-۱,۳)$

$$۲x^{۲}\pm۴x+۲\Rightarrow ۲(x^{۲}\pm۲x+۱)=۲(x\pm۱)^{۲}\begin{cases}\xrightarrow{b=۴}۲(x+۱)^{۲}=\circ\rightarrow x=-۱ & \times\\ \xrightarrow{b=-۴}۲(x-۱)^{۲}=\circ\rightarrow x=۱ & \checkmark\end{cases}$$

📖 سؤال ۲۰: شکل مقابل تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx+۲}{x^{۲}+۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری ۹۱)



۱) $(۱,-۲)$

۲) $(۲,۴)$

۳) $(۲,-۴)$

۴) $(۱,۲)$

☜ **پاسخ: گزینه ۳**

مجانب افقی تابع را در $x=0$ قطع می کند پس عرض مجانب افقی و عرض تابع در $x=0$ یکسان است در نتیجه:

$$a = f(0) = 2$$

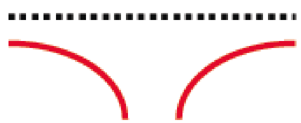
حال توجه کنید که نمودار بر محور xها مماس است پس Δ صورت باید برابر صفر شود:

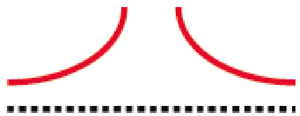
$$\Delta_{\text{صورت}} = b^2 - 8a = b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b = \pm 4$$

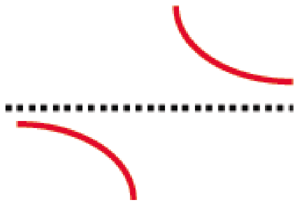
از آنجایی که نقطه مماس مثبت است پس باید $b=-4$ شود تا ریشه صورت مثبت شود یعنی:

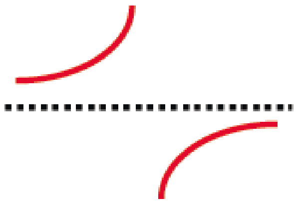
$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2+1} = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$$

📖 **سؤال ۲۱:** نمودار تابع $y=\dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟ (آموزش و پرورش)

۱) 

۲) 

۳) 

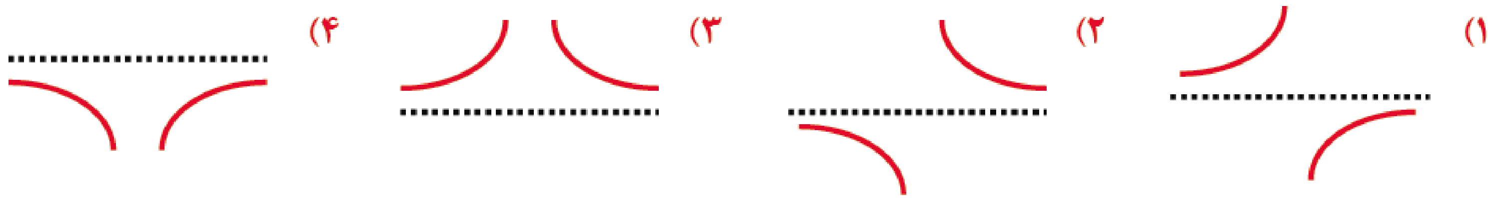
۴) 

☜ **پاسخ: گزینه ۱**

$$y_{\text{نمودار}}-y_{\text{مجانب}}=\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}-1=\frac{x^2-|x|-x^2-|x|}{x^2+|x|}=-\frac{2|x|}{x^2+|x|}<0$$

بنابراین نمودار تابع زیر مجانب افقی است.

📖 **سؤال ۲۲: نمودار تابع** $y=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x-3}$ **در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟**



☜ **پاسخ: گزینه۲**

مجانب افقی تابع است $y=2$

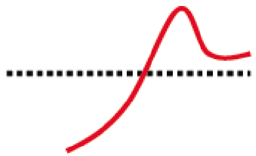
$$y_{\text{نمودار}}-y_{\text{مجانب}}=\frac{2x^2-x+2}{x^2-2x-3}=\frac{2x^2-x+1-2x^2+4x+6}{x^2-2x-3}=\frac{3x+7}{x^2-2x-3}$$

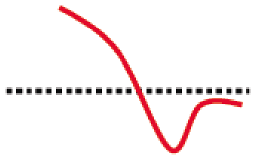
وقتی $x\to+\infty$ عبارت بدست آمده مثبت و به ازای $x\to-\infty$ منفی است و این یعنی که در $+\infty$ نمودار بالای مجانب افقی دور $x=-\infty$ پایین آن قرار دارد.

سؤال ۲۳: نمودار تابع $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت زیر است؟ نمودار به ازای $x>-3$ رسم شده است.

۱)


۲)


۳)


۴)


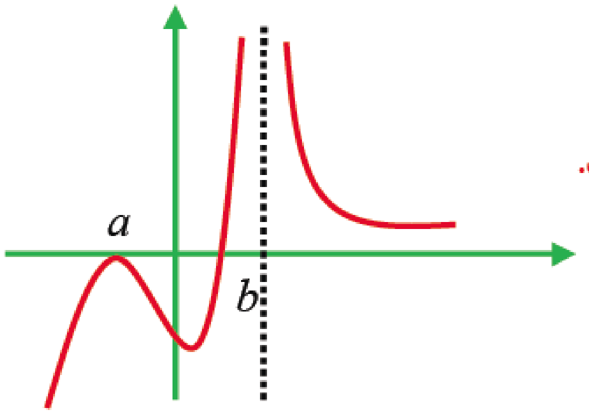
پاسخ: گزینه۴

$$y_{\text{نمودار}}-y_{\text{مجانب}}=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}-1=\frac{-x}{x^2+1}$$

عبارت بدست آمده در $+\infty$ منفی است یعنی در $+\infty$ نمودار زیر مجانب افقی است یعنی (گزینه ۲و ۳ رد می شوند) حال سوال اصلی این است که آیا نمودار تابع مجانب افقی را قطع می کند یا نه؟

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=1\Rightarrow x^2-x+1=x^2+1\Rightarrow x=0$$

📖 سؤال ۲۴: نمودار تابع f به صورت مقابل است. مجانب های نمودار تابع $\frac{1}{f}$ به کدام صورت زیر است:



۱) دو مجانب قائم با انفصال ساده و یک مجانب افقی از هر دو سمت دارد.

۲) فقط دو مجانب با انفصال مضاعف دارد.

۳) یک مجانب قائم با انفصال مضاعف و یک مجانب افقی از هر دو سمت دارد.

۴) یک مجانب قائم با انفصال ساده، یک مجانب قائم با انفصال مضاعف و فقط یک مجانب افقی از سمت چپ دارد.

☜ پاسخ: گزینه۴

مجانب های قائم نمودار $\frac{1}{f}$ تنها زمانی بوجود می آیند که به ازای نقطه ای مانند $x=a$ تابع f به سمت صفر میل کند در نتیجه

براساس نمودار تابع $\frac{1}{f}$ فقط در ۲ نقطه به نقطه به طول های a و b دارای مجانب قائم است.

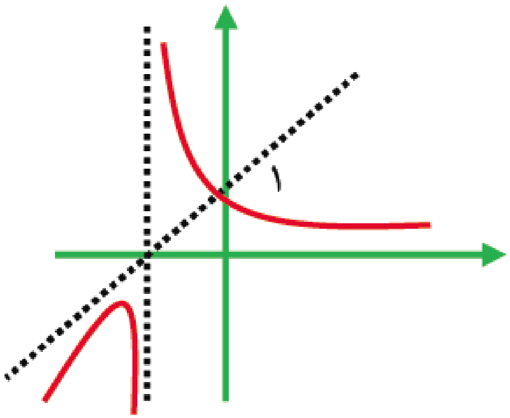
اگر $x \to a^-$ یا $a^+ \to f \Rightarrow f \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{f} \to -\infty \Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ انفصال مضاعف دارد

اگر $\begin{cases} x \to b^- \Rightarrow f \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{f} \to -\infty \\ x \to b^+ \Rightarrow f \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{f} \to +\infty \end{cases}$ $\frac{1}{f}$ انفصال ساده دارد

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f} \xrightarrow{\begin{cases} x \to \infty \\ f \to 0^+ \end{cases}} \frac{1}{0^+} = +\infty \to$ نمودار $\frac{1}{f}$ در $+\infty$ مجانب افقی ندارد

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f} \xrightarrow{\begin{cases} x \to -\infty \\ f \to -\infty \end{cases}} \frac{1}{-\infty} = 0 \to$ نمودار $\frac{1}{f}$ در $x=-\infty$ یک مجانب افقی در $y=0$ دارد.

📖 سؤال ۲۵: نمودار تابع f به صورت مقابل است. تابع چند مجانب دارد؟ $\frac{|f(x)|}{[f(x)]}$



☜ **پاسخ:** ابتدا دامنه تابع را مشخص می کنیم:

$$[f(x)]=0 \Rightarrow 0 \le f(x) < 1 \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow D_{\frac{|f(x)|}{[f(x)]}} = R-(0,+\infty)=(-\infty,0]$$

پس فقط می توانیم حد تابع g را در $-\infty$ محاسبه کنیم از طرفی وقتی $x \to -\infty$ میل می کند آنگاه $f(x) \to -\infty$ و در نتیجه:

$$[f(x)] \sim f(x) \qquad \boxed{[\bigcirc] \underset{x\to\infty}{\sim} \bigcirc}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|f(x)|}{[f(x)]} = \frac{-f(x)}{f(x)} = -1$$

یعنی این تابع یک مجانب افقی به معادله $y=-1$ دارد.

بچه ها حواستون باشه توی مخرج کسر $[f(x)]$ قرار داره و من قبلاً بهتون درس داده بودم که $[f(x)]$ توی مخرج مجانب قائم ندارد.

پایان

موفق باشید