

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

...



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



@riazisara

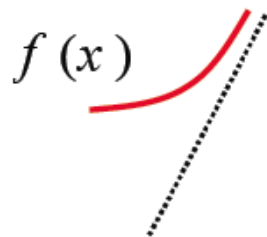
مجانب مایل

مدرس : استاد ایمان نخستین

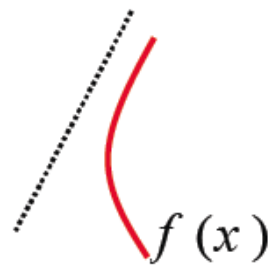
www.riazisara.ir

مجانِب مایل:

اگر در تابع $f(x)$ زمانی که $x \rightarrow \infty$ میل کند تابع $f(x)$ به سمت خط $y = ax + b$ میل کند خط $y = ax + b$ را مجانِب مایل تابع $f(x)$ می نامیم به شکل های زیر توجه کنید.



$$y = ax + b$$



$$y = ax + b$$



$$y = ax + b$$

مجانِب مایل در توابع کسری: 

در مبحث $\lim(\infty - \infty)$ گفتیم که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + ax^{n-1} + \dots}{x^{n-1} + bx^{n-2} + \dots} \sim x + (a - b)$$

یعنی خط $y = x + (a - b)$ مجانب مایل کسر بالا است.

سؤال ۱:  مجانب مایل توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = \frac{x^2 + 4x^2 + 1}{x^2 - 2x + 3} \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} x + (4 - (-2)) = x + 6$$

$$۲) y = \frac{x^4 + 3x^2 + x}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x^4 + 3x^2 + x}{x^2 + 0x^2 + 4x + 3} \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} x + (3 - 0) = x + 3$$

$$۳) y = \frac{۲x^۲ + ۶x^۲ + ۵}{x^۲ - ۲x + ۷} = ۲ \left(\frac{x^۲ + ۳x^۲ + \frac{۵}{۲}}{x^۲ - ۲x + ۷} \right) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} ۲(x + (۳ - (-۲))) = ۲(x + ۵) = ۲x + ۱۰$$

$$۴) y = x + ۳ + \frac{|x| + ۱}{x + ۳}$$

$$f(x) = x + ۳ + \frac{|x| + ۱}{x + ۳} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} x + ۳ + \frac{|x|}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$
 \rightarrow

$x + ۳ + ۱ = x + ۴$

\rightarrow
 $x \rightarrow -\infty$

$x + ۳ - ۱ = x + ۲$

تابع دارای دو مجانب مایل $y = x + ۲$, $y = x + ۴$ است.

📖 سؤال ۲: مجانب های منحنی $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}$ در نقطه A متقاطع اند عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (داخل تجربی ۸۴)

👉 پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 0x^2}{x^2 - 4x + 4} = x + (0 - (-4)) = x + 4$$

مجانب قائم ریشه مفرج $x = 2$ است.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \text{ پس } y = x + 4 \text{ مجانب مایل تابع است.}$$

سؤال ۳: خطوط مجانب نمودار $f(x) = \frac{x^2 + x^2}{x^2 - 4}$ در نقاط A , B متقاطع اند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$ (داخل ریاضی ۸۸)

پاسخ: گزینه ۴

مجانِب های قائم تابع ریشه های مفرج $(x = \pm 2)$ هستند.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2}{x^2 + 0x^2 - 4} = x + (1 - 0) = x + 1 \Rightarrow y = x + 1 \rightarrow \text{مجانِب مایل تابع است.}$$

$$A = \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 4 \Rightarrow y = 6 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x = -2 \\ y = x + 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (6 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

سؤال ۴: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x^2 + ax - 2}{x + b}$ است مقادیر a, b چگونه اند؟ (خارج از کشور ۹۳)

(۴) $b = 0, a < 0$

(۳) $b = 0, a > 0$

(۲) $b > 0, a < 0$

(۱) $b < 0, a < 0$

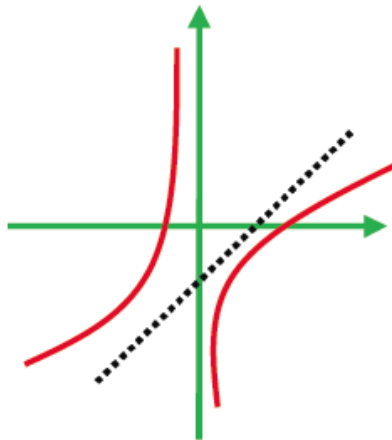
پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل واضح است که $x = 0$ مجانب قائم تابع

(ریشه مفرج کسر) است پس $b = 0$ یعنی $y = \frac{x^2 + ax - 2}{x}$

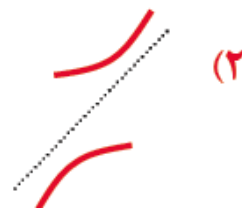
عرض $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax - 2}{x} \sim x + a$ مجانب مایل $y = x + a$

از مبدأ مجانب مایل منفی است.



مجانِب مایل $y = x + a \xrightarrow{x=0} y = a < 0$

سؤال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ نسبت به خط مجانب آن کدام وضع را دارد؟ (گزینه ۲)



پاسخ: گزینه ۲ 

$$f(x) \sim x + (0 - 0) = x \text{ مابن مایل}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2 + 4} \rightarrow 0^- \text{ پس } f(x) \text{ در } +\infty \text{ پایین مابن مایل قرار دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x^2 + 4} \rightarrow 0^+ \text{ پس در بالای مابن مایل قرار دارد}$$

سؤال ۶: خط $y = ax + 2$ مجانب مایل $y = \frac{2x^2 + bx}{x + 1}$ می باشد. $a - b$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۲

😊 (روش بهتر)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{x+1} = \frac{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}{x+1} \sim a\left(x + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\right) = ax + (b - a) = ax + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2$$

سؤال ۷: نقاط A , B نقاط برخورد مجانب های تابع $y = \frac{x^2 + 2x^2}{1-x^2}$ می باشند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

۳ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

😊 (روش بهتر)

$x = \pm 1$ میانه های قائم تابع هستند:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^2}{-x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^2 + 2x^2}{x^2 + 0x + 1} \sim -(x + (2 - 0)) = -x - 2$$

$$A \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -(+1) - 2 = -3 \end{cases} \quad B \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -(-1) - 2 = -1 \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-3 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

سؤال ۸: به ازای کدام مقادیر a منحنی $y = \frac{x^3}{x^2 + ax + 3}$ مجانب مایل خود را قطع نمی کند؟



(۲) ± 2

(۱) $\pm\sqrt{3}$

(۴) صفر

(۳) ± 1

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax^2}{x^2 + ax + 3} \sim x + (0 - a) = x - a \quad (\text{روش اول})$$

یا معادله $\frac{(a^2 - 3)x + 3a}{x^2 + ax + 3} = 0$ جواب نداشته باشد پس باید صورت کسر صفر نشود لذا خواهیم داشت: (با توجه به اینکه صورت و مخرج ریشه مشترک ندارند).

$$a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

سؤال ۹: به ازای چه مقادیری از a نمودار تابع $y = \frac{x^2 + ax + 2}{x - 2}$ در مجاورت مجانب مایل آن به صورت مقابل

است؟



$$a > -3 \quad (2)$$

$$a < -3 \quad (1)$$

$$a > 3 \quad (4)$$

$$a < 3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 2}{x - 2} \sim x + (a - (-2)) = x + (a + 2) \quad (\text{روش اول})$$

روش دوم) ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

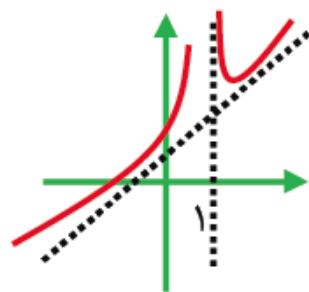
$$y = \frac{x^2 + ax + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2+a) + 2a+6}{x-2} = (x+2+a) + \frac{2a+6}{x-2}$$

تابع به صورت مجموع یک قطب و یک عبارت دارای حد درآمد چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a+6}{x-2}$ است پس قطب $y = x + 2 + a$ مجانب مایل

تابع است حال اگر بخواهیم که تابع در $+\infty$ زیر مجانب مایل و در $-\infty$ روی مجانب مایل خود باشد باید

$$a < -3 \quad \text{باشد. برای این منظور باید } 2a + 6 < 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2a+6}{x-2} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2a+6}{x-2} = 0^-$$

سؤال ۱۰: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 + bx + c}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

پاسخ: گزینه ۴

اولاً چون انفعال حول نقطه $x = 1$ مضاعف است پس $x = 1$ ریشه مضاعف مفر است. (البته دقت کنید که $x = 1$ در $x = 1$ یا بی نهایت نمی شود یا از یک طرف $+\infty$ و از طرف دیگر $-\infty$) در نتیجه مفرج به صورت $(x-1)^2$ می باشد بنابراین:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \equiv x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

ضمناً تابع همواره بالای مجانب مایلش می باشد لذا ابتدا مجانب مایل را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 0x^2 + ax + 3}{x^2 - 2x + 1} \sim (x + 2) \Rightarrow f(x) - (x + 2) = \frac{(a + 3)x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + 3)x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ پس فقط $y = x + 2$ مجانب مایل تابع است حال اگر بفوایم که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (x + 2) = 0^+$

باشد باید $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + 3)x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 0^+$ لذا باید $a + 3 = 0$ باشد تا در $+\infty$ و $-\infty$ علامت عبارت تفاوت نکند در نتیجه $a = -3$ داریم:

$$a + b + c = -3 - 2 + 1 = -4$$

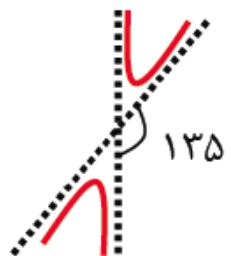
سؤال ۱۱: نمودار تابع $y = \frac{ax^2 + bx - 4}{x^2 - x}$ به صورت مقابل است. کدام $a - b$ است؟

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۶

(۴) -۳



پاسخ: گزینه ۲

از روی این نمودار چند چیز مشخص می شود. اولاً زاویه بین مجانب های قائم و مایل آن برابر 45° است. ثانیاً فقط ریشه کوچکتر (سمت چپ) مفرج مجانب قائم است و ریشه دوم فقط نقطه تعریف نشدگی است و در اطراف آن تابع حد دارد. پس بین دو ریشه مفرج $x = 0$ مجانب قائم و $x = 1$ نقطه توفالی است. پس $x = 1$ باید ریشه صورت نیز باشد:

$$x = 1 \Rightarrow a + b - 4 = 0 \Rightarrow a + b = 4$$

شیب مجانب مایل باید ۱ باشد تا خط $y = x + h$ با $x = 0$ زاویه بسازد لذا ضریب زاویه 45° مجانب مایل برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = a = 1$$

در نتیجه:

$$a = 1 \Rightarrow b + 1 = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a - b = -2$$

📖 **مجانِب مایل در توابع رادیکالی:**

در هم ارزی در بی نهایت یاد گرفتیم که:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) \end{cases}$$

📖 سؤال ۱۲: مجانب توابع زیر را بدست آورید.

$$1) \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} |x+1| - x \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x + 1 - x = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی تابع است} \\ \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -x - 1 - x = -2x - 1 \end{cases}$$

تابع دارای مجانب مایل $y = -2x - 1$ است.

$$2) \sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \left| x + \frac{5}{2} \right| + 2x$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x + \frac{5}{2} + 2x = 3x + \frac{5}{2} \\ \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -x - \frac{5}{2} + 2x = x + \frac{5}{2} \end{array}$$

تابع دارای دو مجانب مایل $y = 3x + \frac{5}{2}$, $y = x - \frac{5}{2}$ است.

📖 سؤال ۱۳: زاویه بین مجانب های تابع $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

👉 پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x} \simeq |x + 2|$$

فاصله فترت شیب های دو مجانب مایل (-۱) است یعنی دو مجانب بر هم عمودند.

📖 سؤال ۱۴: تابع $y = x - \sqrt{ax^2 + 2x}$ دارای مجانبی موازی محور x ها می باشد معادلهٔ مجانب مایل آن کدام

است؟ (کتاب درسی)

(۴) $2x + 3$

(۳) $-2x + 3$

(۲) $2x - 1$

(۱) $y = 2x + 1$

پاسخ: گزینه ۱

میانبری که موازی محور x ها باشد میانب افقی تابع است و برای اینکه y دارای میانب افقی باشد باید: $a = 1$

$$\Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 + 2x} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} x - |x+1|$$

$+\infty$

→

$x - (x + 1) = -1$

$-\infty$

→

$x - (-x - 1) = 2x + 1$

یعنی $y = 2x + 1$ میانب مایل تابع است.

سؤال ۱۵: نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x^3}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می کند؟ (خارج تجربی ۹۲)

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sqrt[3]{-x^3 + x^3} \approx x + \sqrt[3]{-1} \left(x + \frac{1}{3(-1)} \right) = x - \left(x - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^3 - x^3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{3} = -\sqrt[3]{x^3 - x^3} = \sqrt[3]{x^3 - x^3}$$

$$\text{سه توان به توان} \Rightarrow x^3 - x^3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = x^3 - x^3 \Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

پس $y = \frac{1}{3}$ میانب افقی تابع است.

📖 سؤال ۱۶: منحنی به معادله $y = \sqrt{x^3 - x^2}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می کند؟

(خارج از کشور ریاضی ۹۶)

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[r]{x^r - x^r} = \left(x + \frac{-1}{3 \times 1} \right) = x - \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[r]{x^r - x^r} = x - \frac{1}{3} \rightarrow \text{به توان ۳}$$

$$x^r - x^r = \left(x - \frac{1}{3} \right)^r = x^r - 3x^r \left(\frac{1}{3} \right) + 3x \left(\frac{1}{3} \right)^r - \left(\frac{1}{3} \right)^r$$

$$\Rightarrow x^r - x^r = x^r - x^r + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

سؤال ۱۷: خط مجانب منحنی به معادله $y = \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2}$ محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

(داخل ریاضی ۹۵)

$$\frac{5}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

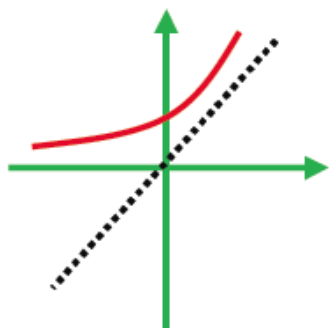
پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} \sim \sqrt[3]{8} \left(x + \frac{2}{3 \times 8} \right) = 2 \left(x + \frac{2}{3 \times 8} \right) = 2x + \frac{4}{3 \times 8} = 2x + \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{6}$$

📖 سؤال ۱۸: اگر در شکل مقابل نمودار $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + c}$ باشد آنگاه a, b, c چگونه اند؟

(خارج ریاضی ۸۶)



(۱) $a = -۱, b < ۰, c > ۰$

(۲) $a = -۱, b = ۰, c < ۰$

(۳) $a = ۱, b > ۰, c = ۰$

(۴) $a = ۱, b = ۰, c > ۰$

پاسخ: گزینه ۴

وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند تابع دارای یک میانب‌مایل به صورت $y = mx$ است و وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند تابع دارای میانب‌افقی به صورت $y = 0$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax + \sqrt{x^2 + bx + c} \approx ax + \left| x + \frac{b}{2} \right|$$

$x \rightarrow +\infty \rightarrow (a+1)x + \frac{b}{2}$
 $x \rightarrow -\infty \rightarrow (a-1)x - \frac{b}{2}$

$$x \rightarrow -\infty : y = (a-1)x - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

یعنی $f(x) = x + \sqrt{x^2 + c}$ از آنجایی که عرض از مبدأ تابع $f(x)$ مثبت است ($f(0) > 0$) پس:

$$0 + \sqrt{0^2 + c} > 0 \rightarrow c > 0$$

سؤال ۱۹: اگر $y = 3$ مجانب $f(x) = 2x + b + \sqrt{ax^2 - 8x - 1}$ باشد عرض از مبدأ مجانب مایل آن کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

😊 (روش بهتر)

شرط داشتن مجانب افقی این است که $a = 2^2 = 4$ پس:

$$f(x) = 2x + b + \sqrt{4x^2 - 8x - 1}$$

برای اینکه تابع مجانب افقی داشته باشد باید $x \rightarrow -\infty$ میل کند:


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + b + \sqrt{4x^2 - 8x - 1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + b + 2 \left| x - \frac{1}{2 \times 4} \right|$$

$$= 2x + b - 2x + 2 = b + 2 = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 - 8x - 1}$$

$$\text{مجانب مایل: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) + 2 \left(x - \frac{1}{2 \times 4} \right) = 2x + 1 + 2x - 2 = 4x - 1$$

عرض از مبدأ مجانب مایل (-) است.

سؤال ۲۰:  مجانب های مایل و افقی منحنی $y = x + b + \sqrt{x^2 - x + 2}$ در ناحیه اول مختصات متقاطع اند. حدود b کدام است؟

$$b > 0 \quad (۴)$$

$$b > -\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$b > -2 \quad (۲)$$

$$b > -1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳


با استفاده از هم ارزی، ایدکال‌ها، رفتار y ، a در ∞ تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + b + \sqrt{x^2 - x + 2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + b + \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty & y = 2x + b - \frac{1}{2} \\ x \rightarrow -\infty & y = x + b - x + \frac{1}{2} = b + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x + b - \frac{1}{2} = b + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

برای آن که تلاقی در نیمی اول باشد باید $b + \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}$ باشد: $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + b - \frac{1}{2} > 0$

از ابتدا از روی ضابطه پایینی هم می‌توانستیم b را به دست آوریم.

سؤال ۲۱:  مجانب قائم تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x^3}{x^2 - 1}$ مجانب های مایل و افقی f را در نقاط A و B قطع می کند. طول پاره خط AB کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)


۲ (۲)

۱ (۱)

😊 (روش بهتر)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^r + 2x} + \frac{x^r}{x^r - 1} \sim \left| x + \frac{2}{2 \times 1} \right| + (x + (\circ - \circ))$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty & (x + 1) + x = 2x + 1 \\ x \rightarrow -\infty & (-x - 1) + x = -1 \end{cases}$$

سؤال ۲۲: اگر $y = ax + b$ مجانب مایل $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ باشد مقدار $b + a$ کدام است؟ 

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

چون عبارت در $x \rightarrow \infty$ به صورت مبهم $\infty \times \infty$ است نمی توانیم از هم ارزی رادیکال ها استفاده کنیم (چون جملاتی که صرف نظر می کنیم در ∞ ضرب می شوند). پس ابتدا تابع را در مزدوج صورت ضرب می کنیم:

$$f(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - x) = x \left(\frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \right) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{|x+1|+x} \quad \text{حال از هم ارزی رادیکال ها استفاده می کنیم:}$$

$$x \rightarrow +\infty: f(x) = \frac{2x^2}{2x+1} = \frac{(2x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{(2x+1)} = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$$

دقت کنید که تابع در $x \rightarrow -\infty$ مجانب مایل ندارد.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{2x+1} = 0$ است پس خط $y = x - \frac{1}{2}$ مجانب مایل تابع است:

😊 روش بهتر

میانگ مایل تابع $x(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$ برابر است با:

$$y = \frac{a-b}{2} \left(x - \frac{a+b}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2}) \xrightarrow{a=2, b=0} y = \frac{2-0}{2} \left(x - \frac{2+0}{4} \right) = \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

📖 سؤال ۲۳: با رسم خطوط مجانب تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10} + \frac{x^2}{x+2}$ یک مثلث قائم الزاویه پدید می آید.

مساحت این مثلث کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۲۵ (۲)

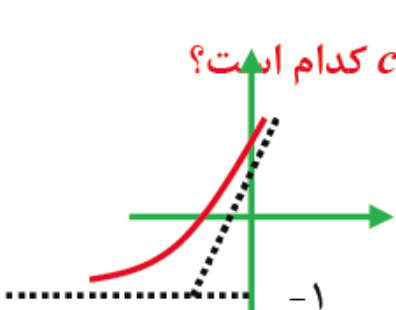
۱۶ (۱)

😊 (روش بهتر)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x + 1} + \frac{x^2}{x+2} = \left| x + \frac{6}{2} \right| + x + (0 - 2)$$

$x \rightarrow +\infty \rightarrow x + 3 + x - 2 = 2x + 1$

$x \rightarrow -\infty \rightarrow -x - 3 + x - 2 = -5$



سؤال ۲۴: نمودار تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + c}$ به صورت مقابل است. حدود c کدام است؟

$c > 1$ (۲)

$c > 0$ (۱)

$c > 4$ (۴)

$c > 2$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

چون $-1 = y$ در مبنای $-\infty$ مبنای افقی است لذا فوایم داشت:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + \sqrt{x^2 + bx + c}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ax + \left| x + \frac{b}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a-1)x - \frac{b}{2} = -1\end{aligned}$$

هم ارزی، رادیکال ها:

باید اثری از x باقی نباشد پس $a-1=0$ در نتیجه $a=1$ (چون اگر $a-1=0$ نباشد حاصل حد برابر $\pm\infty$ می شود) پس:

$$-\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

حال کنترل سه مطلب لازم است:

۱. چون مبنای مایل تابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + c}$ خط $y = 2x + 1$ است لذا $f(\circ)$ تابع باید از $y(\circ)$

$$f(\circ) = \sqrt{c} > 1 \Rightarrow c > 1$$

مبنای مایل بالاتر باشد:

۲. تابع همواره باید بالای مجانب افقی $y = -1$ باشد:

$$x + \sqrt{x^2 + 2x + c} > -1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + c} > -x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + c > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow c > 1$$

۳. مجانب مایل در نقطه $x = -\frac{1}{2}$ محور x ها را قطع می کند پس باید ریشه قبل از باشد:

$$x + \sqrt{x^2 + 2x + c} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + c} = -x \xrightarrow{x < 0} x^2 + 2x + c = (-x)^2$$

$$\Rightarrow 2x + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow c > 1$$

هر سه مطلب به شرط $c > 1$ برقرار می باشد.

📖 **مجانِب مایل در توابع کسری رادیکالی:**

در مبحث $\lim(\infty - \infty)$ یک هم ارزی بسیار مهم به شما یاد دادم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} = x + \frac{a-b}{n}$$

یعنی خط $y = x + \frac{a-b}{n}$ مجانب مایل تابع بالا است.

نتیجه: در توابع به صورت $(x+m) \sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}}$ مجانب مایل تابع خط $y = x + m + \frac{a-b}{n}$ است.

سؤال ۲۵: عرض از مبدأ خط مجانب منحنی $y = x \sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}$ کدام است؟ (داخل کشور ریاضی ۹۶)

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$x \rightarrow \infty \quad x \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} \sim x + \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{4x-3}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{4\left(x - \frac{3}{4}\right)}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sqrt{\frac{x - \frac{3}{4}}{x-1}} \\ &= 2 \left(x + \frac{-\frac{3}{4} - (-1)}{2} \right) = 2x + \left(-\frac{3}{4} + 1 \right) = 2x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

عرض از مبدأ بجانب مایل $\frac{3}{4}$ ، است.

📖 سؤال ۲۶: اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ باشد مجانب های نمودار تابع $y = xf(x)$ با کدام عرض متقاطع هستند.

(خارج ریاضی ۹۵)

۳/۵ (۴)

۳/۲۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۴

$$y = x \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \sim \Rightarrow \left(x + \frac{1 - (-2)}{2} \right) \Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$$

مجانب قائم تابع $x = 2$ است پس نقطه تقاطع $x = 2$ با مجانب مایل تابع برابر است با: $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

سؤال ۲۷:  مجانب مایل توابع زیر را بدست آورید.

$$1) \sqrt{\frac{4x^2 + 12x}{x-1}} = \sqrt{\frac{4x^2(x+3)}{x-1}} = 2|x| \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$$

$x \rightarrow +\infty$
 \rightarrow

$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$

\rightarrow

$2x \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 2 \left(x + \frac{3+1}{2} \right)$

$x \rightarrow -\infty$
 \rightarrow

$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$

\rightarrow

$-2x \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = -2 \left(x + \frac{3+1}{2} \right)$

یعنی خطوط $y = 2x + 4$, $y = -2x - 4$ مجانب های مایل تابع هستند.

سؤال ۲۸: شیب مجانب مایل تابع $f(x) = 2x \sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}$ کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)


$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = 2x \sqrt{\frac{x-1}{9\left(x-\frac{1}{9}\right)}} = \frac{2}{3}x \sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}} \approx \frac{2}{3} \left(x + \frac{-1 - \left(-\frac{1}{9}\right)}{2} \right) = \frac{2}{3} \left(x - \frac{4}{9} \right) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{27}$$

شیب مجانب مایل $\frac{2}{3}$ است. گزینه ۱ درست است.

سؤال ۲۹:  مجانب های مایل $y = \sqrt{\frac{x^2 + 4x^2}{x + 2}}$ در نقطه (a, b) متقاطع $a + b$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) -۱

پاسخ: گزینه ۱ 

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x+4)}{x+2}} = |x| \sqrt{\frac{x+4}{x+2}} \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \pm \left(x + \frac{4-2}{2} \right) = \pm(x+1) \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \text{مجانب مایل}$$

دو مجانب را با هم قطع می دهیم:

$$x + 1 = -x - 1 \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\Rightarrow (a, b) = (-1, 0) \Rightarrow a + b = -1$$

سؤال ۳: اگر خط $y = 2x + 1$ مجانب مایل تابع $y = x \sqrt{\frac{ax + 1}{x + b}}$ باشد b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

از آنجایی که شیب مماس مایل ۲ است پس a باید برابر ۴ باشد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= x \sqrt{\frac{4x+1}{x+b}} = x \sqrt{\frac{4\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x+b}} = 2x \sqrt{\frac{x + \frac{1}{4}}{x+b}} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} 2 \left(x + \frac{\frac{1}{4} - b}{2} \right) \\ &= 2x + \left(\frac{1}{4} - b \right) = 2x + 1 \Rightarrow \frac{1}{4} - b = 1 \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

سؤال ۳۱: به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y = x + 2$ بجانب منحنی تابع $y = (x - 2)\sqrt{\frac{x + a}{x - 1}}$ است؟


(خارج ریاضی ۹۱)

۷ (۴)


۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ 

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2) \sqrt{\frac{x+a}{x-1}} = x - 2 + \frac{a - (-1)}{2} = x - 2 + \frac{a+1}{2} = x + 2$$
$$\Rightarrow -2 + \frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 4 \Rightarrow a+1 = 8 \Rightarrow a = 7$$

سؤال ۳۳: زاویه بین مجانب های $y = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ کدام است؟ 

$$\frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

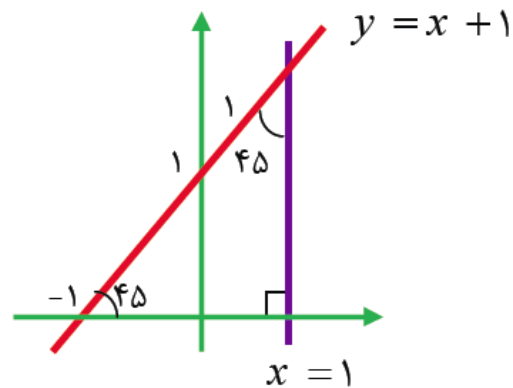
بهترین راه برای یافتن ممانب مایل این تابع استفاده از ترکیب روش تقسیم و هم ارزی برنولی است:

$$y = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$y = x \sqrt{\frac{x-1+2}{x-1}} = x \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}} \underset{x \rightarrow \infty}{=} x \left(1 + \frac{\frac{2}{x-1}}{2} \right) \Rightarrow y = x + \frac{x}{x-1}$$

حال چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$ پس $y = x + 1$ ممانب مایل تابع است (دقت کنید جملات بالاتر هم ارزی برنولی تأثیری در

مماسبه هر نردار) $x = 1$ هم ممانب قائم است لذا زاویه بین دو ممانب برابر $\frac{\pi}{4}$ است.



نکته: در حالت کلی ممانب مایل تابع $y = x \sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}}$ عبارت است از:

$$y = x + \frac{a-b}{n}$$

سؤال ۳۳: محل تلاقی دو مجانب مایل تابع $y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x + 1}}$ مبدأ مختصات چه فاصله ای دارد؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$y = \sqrt{\frac{x^2 \left(x + \frac{2}{x^2} \right)}{x + 1}} = |x| \sqrt{\frac{x + \frac{2}{x^2}}{x + 1}} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} |x| \sqrt{\frac{x + 0}{x + 1}} \approx \pm \left(x + \frac{0 - 1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{2} \\ y = -x + \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow x - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

سؤال ۴۳: اگر خط $y = ax + b$ بجانب مایل تابع f باشد می توان a , b را به صورت زیر نیز بدست آورد.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

📖 سؤال ۳۵: شیب خط مجانب مایل نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x(e^{-2x} - 1)$ کدام است؟ (داخل ریاضی ۸۰)

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

👉 پاسخ: گزینه ۲

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(e^{-2x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} - 1)$$

$x \rightarrow +\infty$
 \rightarrow

$(0 - 1) = -1$

$x \rightarrow -\infty$
 \rightarrow

$(+\infty - 1) = +\infty$

یعنی تابع f در $+\infty$ دارای مجانب مایلی با شیب -1 است.

سؤال ۳۶: امتداد مجانب های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ در نقاط A, B با عرض های مثبت

متقاطع هستند اندازه AB کدام است؟ (خارج از کشور ۹۴)

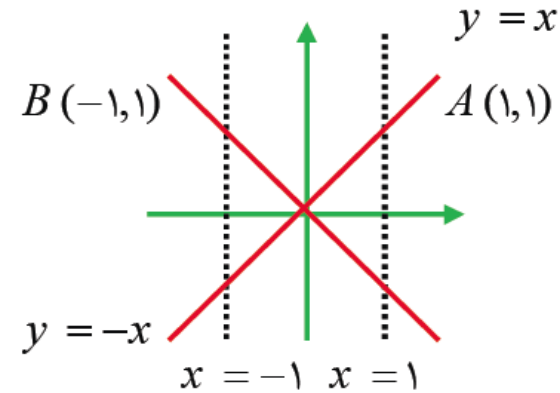
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

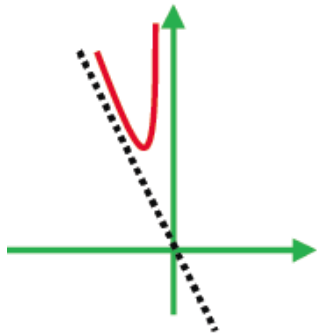
مجاذب های قائم تابع ریشه های مخرج ($x = \pm 1$) هستند.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{|x|}$$

$$\Rightarrow AB = 2$$



سؤال ۳۷: قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{a^2 - 9 - x^4}{ax^3}$ به صورت مقابل است. حدود a کدام است؟



(۱) $a < -۳$ یا $۰ < a < ۳$

(۲) $-۳ < a < ۰$ یا $a > ۳$

(۳) $a > ۰$

(۴) $۰ < a < ۳$

پاسخ: گزینه ۴

$$y = \frac{a^2 - 9 - x^2}{ax^2} = \frac{a^2 - 9}{ax^2} - \frac{x}{a}$$

میانب مایل این تابع فقط $y = -\frac{x}{a}$ است و از روی نمودار مشخص است که شیب میانب مایل منفی است پس:

$$-\frac{1}{a} < 0 \rightarrow a > 0$$

از طرفی وقتی $x \rightarrow -\infty$ می‌کند نمودار تابع بالای میانب مایل است پس:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y > \text{نمودار} \rightarrow y > 0 \text{ میانب} \rightarrow y < 0 \text{ نمودار}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - 9}{ax^2} - \frac{x}{a} - \left(-\frac{x}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 9}{ax^2} > 0 \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^2 < 0} a^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < a < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -3 < a < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 3$$

پایان

موفق باشید