

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



@riazisara

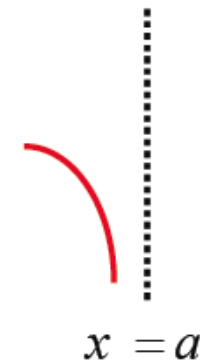
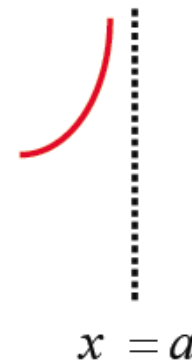
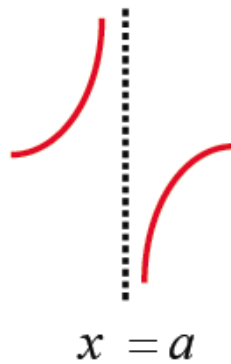
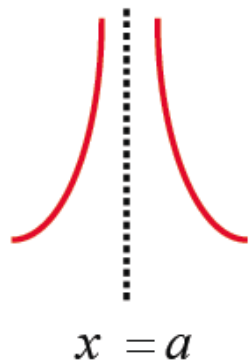
مجانب قائم

مدرس : استاد ایمان نخستین

www.riazisara.ir

📖 **مجانِب قائم:**

خط $x = a$ را **مجانِب قائم** تابع f می‌گوییم هرگاه حد تابع f حداقل در یکی از حالات $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نامتناهی (بی نهایت) شود.
در شکل‌های زیر خط $x = a$ **مجانِب قائم** است.



نتیجه مهم: شرط لازم برای این که $x = a$ **مجانِب قائم** تابع f باشد این است که تابع f در $x = a$ تعریف نشود، اما در همسایگی a تعریف شود.

روش یافتن مجانب قائم در توابع کسری:

در یک تابع کسری که ریشهٔ مخرج، صفرکنندهٔ صورت نیست، برای به دست آوردن مجانب قائم به روش زیر عمل کنید:

۱. ابتدا دامنهٔ تابع را بدست آورید.
 ۲. اگر ریشه مخرج به دامنهٔ تابع چسبیده باشد، مجانب قائم است در غیر این صورت خیر.
- * حواستون باشه که مخرج کسر در ریشهٔ خودش باید پیوستگی چپ یا راست را داشته باشد.

📖 سؤال ۱: بجانب قائم تواب زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$1) D_f = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x}$$

$$D_f : \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x^2-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 3 \end{cases} \xrightarrow{D_f}$$



$x = 3$ بجانب قائم است چون پسبیره است.
 $x = 0$ بجانب قائم نیست چون به D_f پسبیره نیست.

$$۲) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$D_f : \begin{cases} x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \Rightarrow x > 3 \\ x-3 > 0 \rightarrow x > 3 \end{cases}$$



$$۳) f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{2x + 3}}$$

$$D_f : \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \cap \rightarrow x \geq 0 \\ \text{ریشه مخرج} \\ x - \sqrt{2x + 3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \checkmark \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



فقط $x = 3$ مجانب قائم است چون به دامنه تابع f پسبیره است.

$$۴) f(x) = \frac{2x - 3}{|x + 1| - 2}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} |x + 1| - 2 = 0 \Rightarrow |x + 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ x + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

هم $x = 1$ و هم $x = -3$ میانب قائم است چون به دامنه تابع f پسبیده است.

روش یافتن مجانب قائم، وقتی به $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\circ^{\pm}}{\circ^{\pm}}$ برمی خوریم: 

اگر ریشهٔ مخرج صورت کسر را نیز صفر کند و به $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\circ^{\pm}}{\circ^{\pm}}$ برسیم با کمک هم ارزی یا هوپیتال و... رفع ابهام می کنیم. در صورتی که جواب به سمت بی نهایت میل کند، ریشهٔ مخرج مجانب قائم است در غیر این صورت مجانب قائم نیست.

📖 سؤال ۲: مجانب قائم توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$1) y = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1 \text{ ریشه منفرج است}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0^\pm}{0^\pm} \xrightarrow{\underline{\underline{HOP}}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 4}{(x - 1)} = \frac{-2}{0^\pm} = \pm\infty$$

چون جواب به سمت بی نهایت میل کرد پس ریشه منفرج $(x = 1)$ مجانب قائم است.

$$۲) y = \frac{x^3}{x^3 - 4x}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

از آنجایی که $x = \pm 2$ ریشه صورت نیستند پس $x = -2, x = 2$ مجانب قائم هستند. اما از آنجایی که $x = 0$ ریشه صورت هست در می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{3x^2 - 4} = 0$$

چون مقدار در ∞ نشد $x = 0$ مجانب قائم نیست.

روش یافتن مجانب قائم توابعی که مخرجشان جز صحیح دارد:

می دانیم که جز صحیح فقط می تواند عدد صحیح باشد یعنی صفر مطلق یا اعداد صحیح دیگر.

پس: برای بدست آوردن مجانب های قائم تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)[h(x)]}$ به دو نکته خیلی مهم توجه کنید.

(۱) از $[h(x)]$ انتظار بدست آوردن مجانب قائم نداشته باشید (بی خیال $[h(x)]$ شوید)

(۲) ریشه های $g(x) = 0$ در صورتی که مجانب قائم هستند که $[h(x)]$ را صفر نکنند.

سؤال ۳:  مجانب قائم توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$1) y = \frac{2x + 1}{(2x - 3)(x - 1)(x - 2)}$$

از $[x-1]$ انتظار تولید مجانب قائم نداریم اما باید ریشه های دیگر مخرج یعنی $x = 2, x = \frac{3}{2}$ را بررسی کنیم و ببینیم که آیا $[x-1]$ را صفر می کنند یا نه.

$$[x - 1] \Big|_{x = 2^\pm} = [2^\pm - 1] = \begin{cases} [1^+] = 1 \\ [1^-] = 0 \end{cases}$$

چون $x = 2^+$ صورت کسر را صفر نمی کند پس $x = 2$ مجانب قائم است.

$$[x - 1] \Big|_{x = \frac{3}{2}^\pm} = \left[\frac{3}{2}^\pm - 1 \right] = \left[\frac{1}{2}^\pm \right] = 0$$

چون $x = \frac{3}{2}$ داخل جز صمیح را صفر کرد پس مجانب قائم نیست.

$$۲) y = \frac{[x] - ۳}{(x - ۱)(x - ۲)(x - ۳)} \left[\frac{x}{۳} \right]$$

از $\left[\frac{x}{۳} \right]$ انتظار تولید ممانب قائم نداریم اما باید ریشه های دیگر مفرج یعنی $x = ۱, x = ۲, x = ۳$ را بررسی می کنیم و ببینیم که آیا $\left[\frac{x}{۳} \right]$ را صفر می کند یا نه.

$$\left[\frac{x}{۳} \right] \Big|_{x=1^{\pm}} = \left[\frac{1^{\pm}}{۳} \right] = [0^{\pm}] = 0 \rightarrow x = ۱ \text{ ممانب قائم نیست}$$

$$\left[\frac{x}{۳} \right] \Big|_{x=2^{\pm}} = \left[\frac{2^{\pm}}{۳} \right] = [0^{\pm}] = 0 \rightarrow x = ۲ \text{ ممانب قائم نیست}$$

$$\left[\frac{x}{۳} \right] \Big|_{x=3^{\pm}} = [1^{\pm}] = \begin{cases} [1^+] = 1 \\ [1^-] = 0 \end{cases}$$

یعنی $x = 3^+$ ، $\left[\frac{x}{3} \right]$ ، $x = 3^+$ ، $x = 3^+$ را صفر نکرد اما صورت کسر را صفر می کند پس باید $x = 3^+$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{(x-1)(x-2)(x-3) \left[\frac{x}{3} \right]} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[3^+] - 3}{2 \times 1 \times (0^+) [1^+]} = \lim_{0^+} \frac{0}{0^+} = 0$$

چون جواب به سمت بی نهایت نرفت. پس $x = 3$ هم نمی تواند مبنای قائم باشد یعنی این تابع مبنای قائم ندارد.

روش سریع برای پیدا کردن مجانب های قائم تابع $y = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ 

(۱) ابتدا عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$ را تعیین کنید.

(۲) با توجه به جداول تعیین علامت ریشه های $f(x)$ ، $g(x)$ در صورتی مجانب قائم هستند که حداقل در یک طرف این ریشه ها

علامت $\frac{f(x)}{g(x)}$ مثبت باشند.

سؤال ۴: $\log \frac{x(x-1)^2}{(x^2-4)}$ را بیابید.

	-۲	۰	۱	۲	
$\frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x+2)}$		+			+

- $x = -2$ میانب قائم است زیرا در سمت راست $x = -2$ عبارت درون \log مثبت است.
- $x = 0$ میانب قائم است زیرا در سمت چپ $x = 0$ عبارت درون \log مثبت است.
- $x = 1$ میانب قائم است زیرا در هر دو طرف $x = 1$ عبارت درون \log منفی است.
- $x = 2$ میانب قائم است زیرا در سمت راست $x = 2$ عبارت درون \log مثبت است.

📖 **مجانب قائم در توابع نمایی** ($y = a^{f(x)}$)

در توابع نمایی به صورت $a^{f(x)}$ که a عددی مثبت و مخالف یک است، نقاطی که احتمال می دهیم مجانب قائم باشند را حدس زده و سپس حد تابع را در این نقاط می یابیم اگر ∞ شد مجانب قائم خواهیم داشت.

سؤال ۵:  مجانب قائم توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = 3^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{+\infty} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ است } \circ$$

$$۲) y = \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x}}} = \begin{cases} x \rightarrow 0^+ : \frac{2}{\infty} = 0 \neq \infty \\ x \rightarrow 0^- : \frac{2}{3 + 0} = \frac{2}{3} \neq \infty \end{cases} \text{ مجانب قائم ندارد}$$

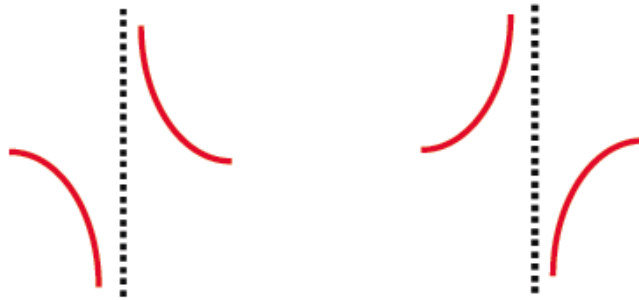
انفصال زوج (مضاعف) انفصال فرد (ساده):

ابتدا تابع را تا حد ممکن ساده کنید سپس:

(۱) اگر ریشهٔ مخرج از نوع زوج باشد انفصال زوج (مضاعف) به وجود می‌آورد.



۲) اگر ریشهٔ مخرج از نوع فرد باشد انفصال فرد (ساده) به وجود می‌آورد.



معمولاً در مواقعی که مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد یا مخرج مربع کامل است یا به صورت $1 \pm \sin x$ یا $1 \pm \cos x$ است.

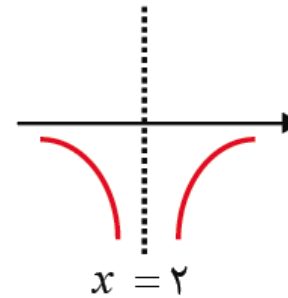
به عنوان مثال اگر تابع $y = \frac{1}{x^2 + ax + 16}$ دارای انفصال مضاعف باشد آنگاه: $\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 64 = 0 \Rightarrow a = \pm 8$

سؤال ۶: وضعیت نمودار تابع زیر را رد نقاط داده شده مشخص کنید.

۱) $y = \frac{x - 4}{(x - 2)^2}$ (در اطراف $x = 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{(x - 2)^2} = \frac{-2}{(0^\pm)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

انفصال زوج



۲) $y = \frac{x + 2}{x - \sin x}$ (در اطراف $x = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{x - \sin x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{x \left(x - \frac{x^3}{6} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{\frac{x^2}{6}} = \frac{6(x + 2)}{x^2}$$

\approx
 $x \rightarrow 0$

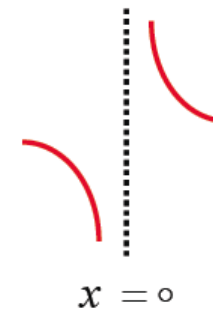
$\xrightarrow{0^+}$

$\frac{12}{(0^+)^2} = +\infty$

$\xrightarrow{0^-}$

$\frac{12}{(0^-)^2} = +\infty$

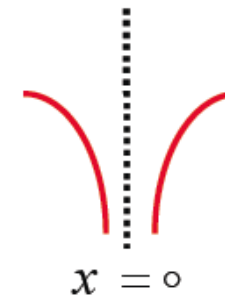
انفصال فرد



$$۳) y = \frac{2x + 1}{\cos x - 1} \quad (\text{در اطراف } x = 0)$$

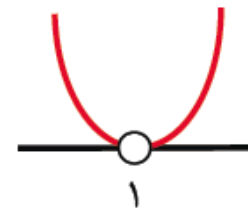
$$x \rightarrow 0 \quad \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \text{انفصال زوج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2x + 1)}{x^2}$$



$$۴) y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} \quad (\text{در اطراف } x = 1)$$

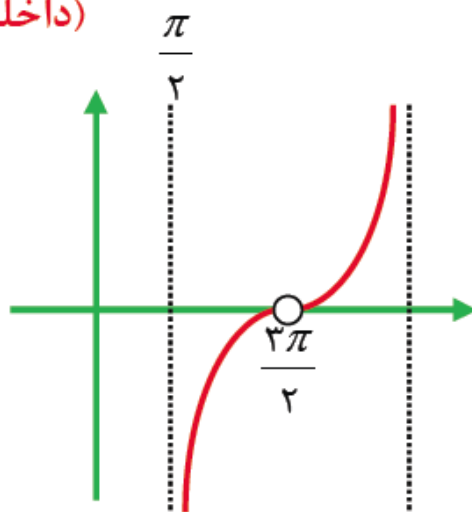
$$y = \frac{(x - 1)^3}{x - 1} \xrightarrow[\text{با شرط } x \neq 1]{\text{باش شرط}} y = (x - 1)^2$$



نتیجه مهم: اگر عددی هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج یک کسر باشد در نمودار تابع آن نقطه را توخالی می گذاریم. به عبارت دیگر، اگر در نمودار یک تابع نقطه توخالی دیدید، آن نقطه هم ریشه صورت کسر است هم ریشه مخرج کسر.

سؤال ۷: در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + a \sin x}{b + \cos x}$ است $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

(داخلی ریاضی ۸۳)



(۱) $1 - \sqrt{3}$

(۲) $2 - \sqrt{3}$

(۳) $1 + \sqrt{3}$

(۴) $2 + \sqrt{3}$

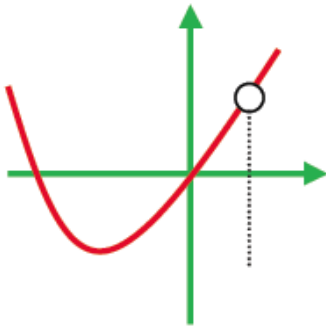
پاسخ: گزینه ۴

$x = \frac{3\pi}{2}$ طول نقطه توفالی است یعنی هم ریشه مخرج کسر است و هم ریشه صورت

$$x = \frac{3\pi}{2} \begin{cases} \xrightarrow{\text{صورت کسر}} 1 + a \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \xrightarrow{\text{مخرج کسر}} b + a \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow b + 0 = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

سؤال ۸: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{4x^2 + ax + b}{x - 1}$ است. دو تایی (a, b) کدام است؟ (سراسری داخل ۸۷)



(۱) $(4, 0)$

(۲) $(-4, 0)$

(۳) $(-2, 1)$

(۴) $(4, 0)$

پاسخ: گزینه ۲

تابع از مبدأ افتضات می‌گذرد یعنی $f(0) = 0$

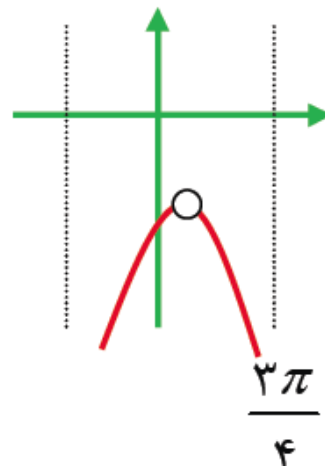
$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{b}{-1} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$x = 1$ نقطه توفالی نمودار است پس هم ریشه مفرج تابع و هم ریشه صورت تابع است.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{ریشه صورت}} 4 + a + b = 0 \xrightarrow{b=0} 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

سؤال ۹: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{b + \cos 2x}$ است. a کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی ۹۳)



(۱) $-\sqrt{2}$

(۲) ۱

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل $x = \frac{3\pi}{4}$ یکی از مجانب های قائم تابع است پس ریشه مفرج است.

$$\Rightarrow b + \cos 2x \xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4}} b + \cos \frac{3\pi}{2} b = b + 0 = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{\cos 2x}$$


چون در نمودار تابع نقطه ای توفالی با طول مثبت وجود دارد این نقطه هم ریشه صورت کسر است و هم ریشه مفرج کسر.

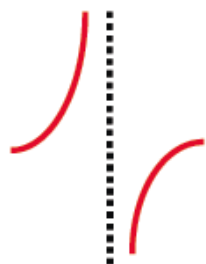
$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$x = \frac{3\pi}{4}$ مجانب قائم تابع است.

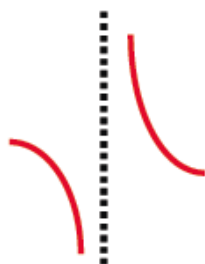
پس $x = \frac{\pi}{4}$ طول نقطه توفالی است که صورت کسر را هم صفر می کند.

$$a \sin x - \cos x = 0 \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} a \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow a = 1. \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

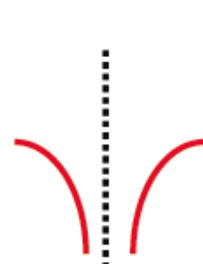
سؤال ۱: نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ 



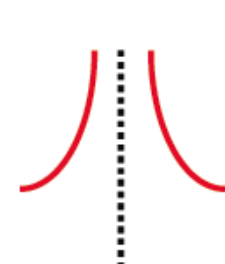
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ریشه مخرج را پیدا می‌کنیم:

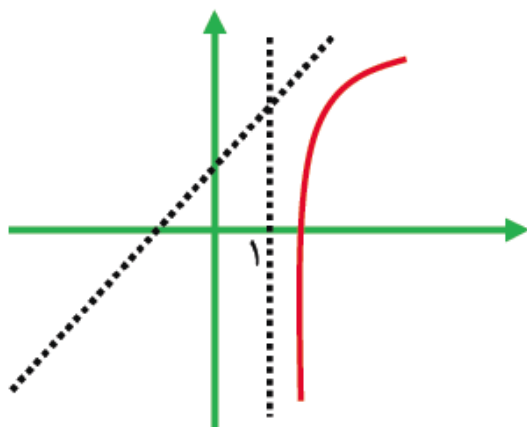
$$\text{ریشه مخرج} \rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x(x^2+1)} \begin{cases} x \rightarrow 0^+ & \frac{1}{0^+} = +\infty \\ x \rightarrow 0^- & \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



سؤال ۱۱: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + a}{x + b}$ است. مقادیر a, b به کدام صورت اند.

(خارج از کشور ۹۰)



(۱) $a > b = -۱$

(۲) $a < b = -۱$

(۳) $b > a = -۱$

(۴) $b < a = -۱$

پاسخ: گزینه ۲

فقط $x = 1$ میانه قائم تابع است یعنی مخرج کسر را صفر می‌کند.

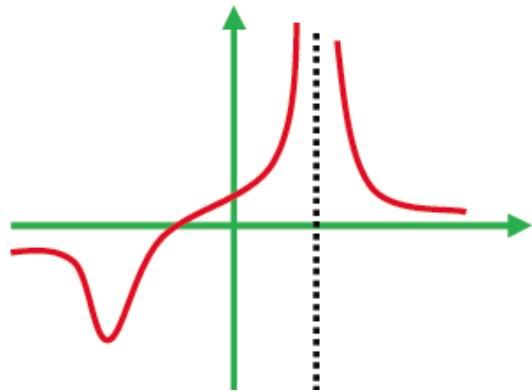
$$x + b = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

در ضمن هر تابع در سمت راست میانه قائم برابر $-\infty$ شده است پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a}{x - 1} = \frac{1 + a}{0^+} = -\infty \Rightarrow 1 + a < 0 \Rightarrow a < -1$$

یعنی $a < b = -1$ گزینه (۲) درست است.

سؤال ۱۲: شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ است مقادیر $a > b$ چگونه اند؟ (داخل تجربی ۹۳)



(۱) $b = 4, a < 0$

(۲) $b = -4, a < 0$

(۳) $b = 4, a > 0$

(۴) $b = -4, a > 0$

پاسخ: گزینه ۴

نمودار تابع محور y ها را در نقطه ای با عرض مثبت قطع کرده است یعنی: $f(0) > 0$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{a}{4} > 0 \Rightarrow a > 0$$

نمودار تابع دارای یک میانب قائم با طول مثبت و انفصال زوج است پس مفرج ریشه مضاعف دارد یعنی: $\Delta = 0$

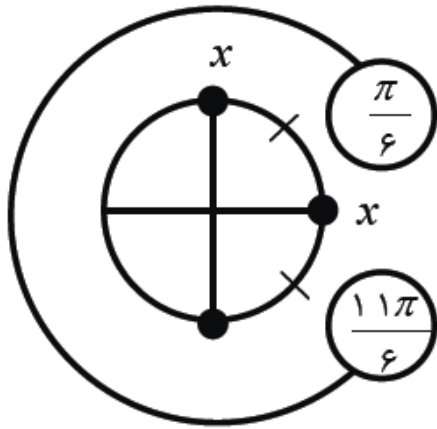
$$x^2 + bx + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ b = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

یعنی $b = -4$ قابل قبول است.

📖 سؤال ۱۳: مجانب قائم توابع زیر را در بازه های داده شده به دست آورید.

$$1) y = \frac{\tan x}{1 - \cos x}, \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$$



$$\text{ریشه} \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x (1 - \cos x)} \rightarrow \text{مفرج}$$

در بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$ مفرج کسر دو ریشه و $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ داره و چون این ریشه ها

به دامنه تابع f پسبند پس در این باره ۲ تا مجانب قائم داریم.

$$۳) \frac{\left[\frac{x}{۳} \right]}{x(x^2 - ۴)(x^2 - ۹)} \quad (\text{آزاد ۹۰})$$

👉 پاسخ: ریشه های مخرج $x = ۰, \pm ۲, \pm ۳$ اما همه این نقاط مجانب قائم تابع نیستند زیرا به ازای بعضی از مقادیر صورت صفر می شود:

$$\left[\frac{x}{۳} \right] = ۰ \rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۳} < ۱ \rightarrow ۰ \leq x < ۳$$

پس $x = ۲$ دیگر مجانب قائم نیستند پس مجانب های قائم این تابع $x = -۲, \pm ۳, ۰$ هستند و $x = ۰$ نیز از طرف راست به $x = ۳$ نزدیک شد و در این صورت هر آن دیگر عدد نمی شود و برای $x = ۳$ نیز از طرف راست به $x = ۳$ نزدیک شد.

سؤال ۱۴: خط به معادله $x = \frac{2\pi}{3}$ در بی نهایت بر منحنی $y = \frac{\cos x - 1}{2\cos x + a}$ مماس است معادله یکی از

مجانب های آن کدام است؟

$$x = \frac{4\pi}{3} \quad (۴)$$

$$y = 2 \quad (۳)$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \quad (۲)$$

$$y = 1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

مفهوم سوال این است که $x = \frac{2\pi}{3}$ میانب قائم تابع است بنابراین $\frac{2\pi}{3}$ ریشه مفرج است:

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = \frac{\cos x - 1}{2 \cos x + 1}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

اگر $k = 1$ پس $x = \frac{4\pi}{3}$ میانب دیگر است.

📖 **سؤال ۱۵:** به ازای چه مقادیری از m تابع $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

👉 **پاسخ:** دو حالت وجود دارد:

(۱) مخرج دارای ریشه مضاعف باشد: $\Delta = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

(۲) مخرج دو ریشه داشته باشد ولی یکی از ریشه‌ها با ریشه صورت مشترک باشد پس باید $x - 2$ عامل مخرج هم باشد یعنی $x = 2$ مخرج را صفر کند.

$$(2)^2 - 2(m) + 1 = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{2} \Rightarrow m \in \left\{ \pm 2, \frac{5}{2} \right\}$$

سؤال ۱۶: به ازای چند مقدار m منحنی تابع به معادله $f(x) = \frac{x-1}{x^2+mx-4}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

پاسخ: دو حالت وجود دارد: ۱) مفرج ریشه مضاعف دارد: $m^2 + 16 = 0$ ✖

۲) مفرج دو ریشه داشته باشد ولی ریشه صورت یکی از ریشه های آن باشد: $m = 3 \Rightarrow 1 + m - 4 = 0$

سؤال ۱۷: اگر $x = 1, x = 2$ مجانب های قائم منحنی $y = \frac{x^2 + x + 2}{mx^2 + (m+n)x + mn}$ باشند مقدار $m + n$

چقدر است؟

پاسخ: یعنی $x = 1, x = 2$ ریشه های مفرج هستند:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 + 2 = 3 = -\frac{m+n}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 1 \times 2 = 2 = \frac{mn}{m} = n \end{cases} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow -3m = m + n$$

$$\Rightarrow n = -4m \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow m + n = \frac{3}{2}$$

سؤال ۱۸: به ازای چه مقدار m تابع $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2mx + 4}$ با ضابطه همواره دارای دو مجانب قائم است.

پاسخ: باید مخرج دو ریشه داشته باشد یعنی باید $\Delta' > 0$ باشد $|m| > 2 \Rightarrow \Delta' = m^2 - 4 > 0$ در ضمن $x = -1, x = 1$ ریشه های صورت نباید ریشه مخرج باشد:

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 2m + 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{5}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 + 2m + 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |m| > 2, m \neq \pm \frac{5}{2}$$

سؤال ۱۹: نمودار تابع $y = \frac{\sin x}{-1 + \cos x}$ در مجاورت شبیه کدام مورد زیر است؟



پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-1 + \cos x} \sim \frac{x}{\frac{-x^2}{2}} = \frac{-2}{x} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0^+ \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0^- \rightarrow +\infty \end{cases}$$

سؤال ۲۰: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ در کنار مجانب قائم چگونه است؟



پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{x - x} = \frac{1}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty$$

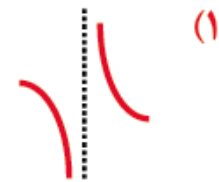
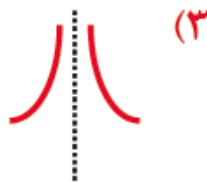
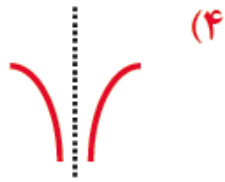
سؤال ۲۱: نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{x^3+x} & , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{1}{0^+} = +\infty & , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ y = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \end{cases}$$

سؤال ۲۲: نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^3 + x + 1}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت زیر است؟

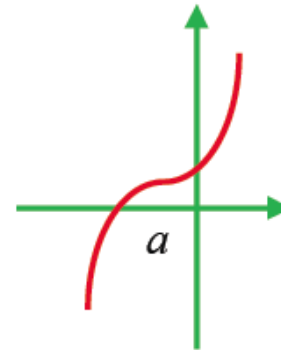


پاسخ: گزینه ۲

تابع $x^3 + x + 1$ که در مفرج تابع f قرار دارد به ازای $x = 0$ عرض تابع مقدار مثبت (۱) دارد همچنین این تابع اکیداً صعودی است ($y' = 3x^2 + 1 > 0$) پس حدس می‌زنیم که نمودار آن به صورت مقابل باشد و بلافاصله مشخص می‌شود که طول نقطه تقاطع با محور x ها یا همانطور بجانب قائم تابع f ، مقدار منفی است. حال حد تابع را در اطراف $x = a$ مناسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x}{x^3 + x + 1} = \frac{a}{0^+} \xrightarrow{a < 0} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x}{x^3 + x + 1} = \frac{a}{0^-} \xrightarrow{a < 0} +\infty$$



سؤال ۲۵: نمودار تابع $y = \ln \frac{a-x}{b+x}$ به صورت مقابل است. $a-b$ کدام است؟

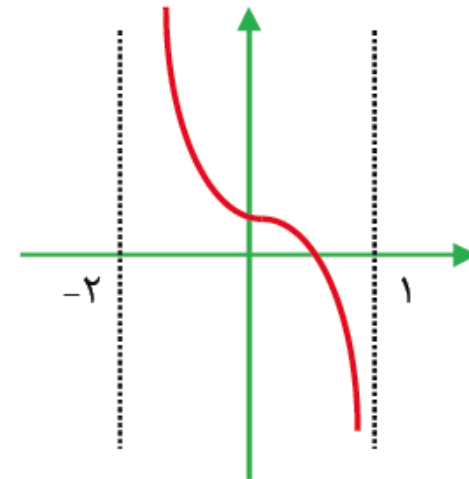
$$\begin{cases} \log 0^+ \rightarrow = -\infty \\ \log +\infty \rightarrow = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{a-x}{b+x} = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a-x}{b+x} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} a-x = 0$$

$$\rightarrow a-1 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln \frac{a-x}{b+x} = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{a-x}{b+x} = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (b+x) = 0 \rightarrow b-2 = +\infty \rightarrow b = 2$$



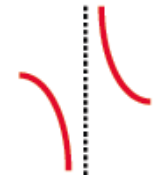
سؤال ۲۶: تابع $y = \frac{a \sin x}{1 - \cos x}$ در اطراف $x = 0$ به صورت زیر است. حدود a کدام است؟

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin x}{1 - \cos x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2a}{x} = \frac{2a}{0^+} \rightarrow +\infty \rightarrow a > 0 \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \sin x}{1 - \cos x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2a}{x} = \frac{2a}{0^-} \rightarrow -\infty \rightarrow a > 0 \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I) \cap (II) \rightarrow a > 0$$



سؤال ۲۷: تابع $f(x) = \frac{mx + n}{x^2 + (4 - m)x - 4m}$ در اطراف تنها مجانب قائم آن به صورت زیر است. $m - n$

کدام است؟

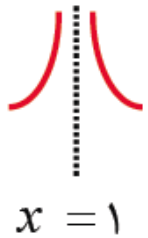
پاسخ: چون در اطراف $x = 1$ انفصال فرد دارد پس $x = 1$ هم در صورت و هم در مخرج کسر صدق می کند.

$$\begin{cases} m(1) + n = 0 \\ 1^2 + (4 - m)(1) - 4m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 0 \\ 1 + 4 - m - 4m = 0 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = 0 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow m - n = 1 - (-1) = 2$$



سؤال ۲۸: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ است. $a-b$ کدام است؟



پاسخ: نمودار در اطراف $x = 1$ انفصال زوج دارد پس هم ریشه مفرج و هم ریشه مشتق مفرج است:

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 3x^2+a \Big|_{x=1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 3+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=-3-2=-5$$

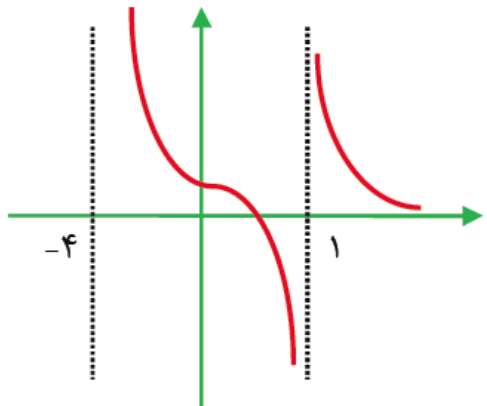
سؤال ۲۹: اگر نمودار تابع $y = \frac{a+1}{x^2 + 2ax - 4a}$ به معادله در اطراف مجانب قائم خود به صورت $\left. \begin{array}{l} \text{باشد } a \end{array} \right\}$ چند مقدار می تواند داشته باشد؟

پاسخ: چون در اطراف مجانب قائم خود انفصال زوج دارد پس باید مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta' = 0 \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$$

و چون نمودار رو به پایین است پس صورت کسر باید منفی باشد یعنی باید $a = -4$ باشد: $y = \frac{-3}{x^2 - 8x + 16} = \frac{-3}{(x-4)^2}$

سؤال ۳: قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x+n}{x^2 + (4-m)x - 4m}$ به صورت مقابل است. حدود n کدام است؟



پاسخ: $x = -4, x = 1$ مجانب های قائم منفی هستند.

پس باید ریشه های مفرج باشند:

$$1 - 4 = -\frac{b}{a} = -(4 - m) = m - 4 \Rightarrow m - 4 = -3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x + n}{(x - 1)(x + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \frac{-4 + n}{(-4 - 1)((-4)^+ + 4)} = \frac{n - 4}{-\Delta(\circ^+)} = \frac{n - 4}{\circ^-} \rightarrow +\infty \Rightarrow n - 4 < 0 \Leftrightarrow n < 4 \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \frac{1 + n}{(1^+ - 1)(1 + 4)} = \frac{1 + n}{\circ^+(\Delta)} = \frac{n + 1}{\circ^+} \rightarrow +\infty \Rightarrow n + 1 > 0 \Rightarrow n > -1 \quad (II)$$

$$\Rightarrow -1 < n < 4$$

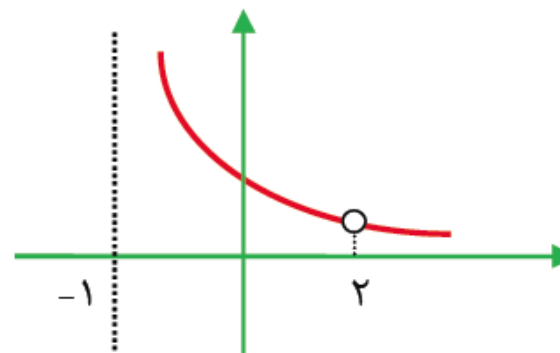
📖 سؤال ۱۳: قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$ به معادله به صورت مقابل است. $a+b+c$ کدام است؟

👉 پاسخ:

تابع در $x=2$ تعریف نشده است پس $x=2$ ریشه مخرج است اما بجانب قائم آن نیست در ضمن $x=-1$ نیز بجانب قائم تابع و در نتیجه ریشه مخرج است:

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = x^2 + bx + c$$

$$\rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

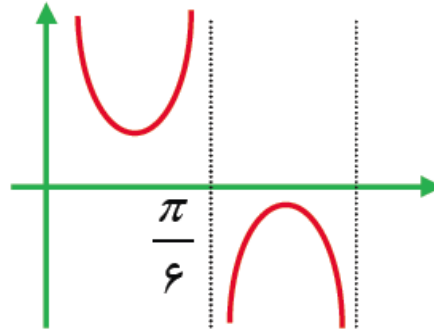


چون $x=2$ بجانب قائم تابع نیست پس ریشه مشترک صورت و مخرج است:

$$\rightarrow x+a = x-2 \rightarrow a = -2$$

$$a+b+c = -2-1-2 = -5$$

سؤال ۳۳: قسمتی از نمودار $y = \tan ax + \cot ax$ به صورت زیر است. a کدام است.



$$\tan ax + \cot ax = \frac{2}{\sin 2ax}$$

$x = \frac{\pi}{6}$ میانب قائم تابع است پس باید ریشه مفروض باشد:

$$\sin 2ax = 0 \Rightarrow 2ax = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2a} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2a}, \frac{2\pi}{2a}, \dots$$

چون $\frac{\pi}{6}$ دومین میانب قائم تابع است پس: $\frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

پایان

موفق باشید