ریاضیات کنکور ۹۷

((مطابق با جدیدترین تغییرات کتاب درسی))

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

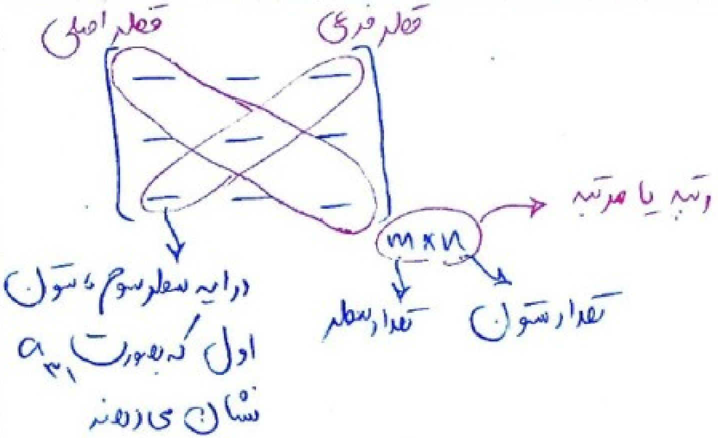
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

مهندس مهرپویان
۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

ماتریس

این فصل را با ما بخوان
تا از ما شَوی ...



$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-&-&-&-\end{bmatrix}_{1\times4} \qquad \begin{bmatrix}-\\-\\-\\-\end{bmatrix}_{4\times1}$$

ماتریس واحد که فقط درایه های قطر اصلی آن ۱ است

ماتریس صفر که همه درایه ها صفر هستند

ماتریس سطری که فقط یک سطر دارد

ماتریس ستونی که در هر سطر فقط یک درایه است

* **تساوی دو ماتریس**: درصورتی دو ماتریس مساوی هستند که تعداد سطرها و ستون ها با هم برابر باشد و درایه های این دو ماتریس نظیر به نظیر برابر باشند.

* **جمع و تفریق ماتریس ها**: برای اینکه بتوان ۲ ماتریس را با هم جمع و یا تفریق کرد باید دو ماتریس هم مرتبه باشند. دراینصورت هر درایه را با درایه نظیر خودش جمع و یا تفریق می کنیم.

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}}+\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}-3&1\\4&-2\end{bmatrix}}=\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}-2&3\\7&2\end{bmatrix}}$$

* ضرب عدد در ماتریس: عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

$$2\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\-6&8\end{bmatrix}$$

* مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&0&4\\2&-5&9\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس x را از معادله $3A+\frac{x}{2}=2B$ بیابید.

$$\frac{x}{2}=2B-3A \longrightarrow x=4B-6A \longrightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}-4&0&16\\8&-20&36\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&12&-6\\0&18&-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10&-12&22\\8&-38&48\end{bmatrix}$$

* ضرب ماتریس‌ها: برای اینکه بتوان دو ماتریس را در هم ضرب کرد، باید تعداد ستون اولی با تعداد سطر دومی باشد یعنی

$$\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}_{m\times n}\times\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}_{n\times p}=\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa'+bc'&ab'+bd'\\ca'+dc'&cb'+dd'\end{bmatrix}$$

* مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}3&-1\\5&2\\7&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&2&4\\5&2&1\end{bmatrix}$ باشد و $C=AB \Leftarrow c_{23}=?$

روش تشریحی: ماتریس A را در B ضرب کن و درایه سطر دوم و ستون سوم C پاسخ می‌شود.

روش تکنیکی: در ماتریس C، سطر دوم و ستون سوم در واقع همان حاصلضرب سطر دوم A در ستون سوم B می‌باشد یعنی

$$c_{23}=\begin{bmatrix}5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\left[(5\times4)+(2\times1)\right]=22$$

* تذکر: مهم‌ترین روش در حل معادلات و مسائل ماتریسی، حل مستقیم آن می‌باشد.

* مثال: اگر داشته باشیم $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 3 & b & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

گزینهٔ ۴ صحیح

* نکته: اگر چند ماتریس را بخواهیم درهم ضرب کنیم، عمل ضرب را به دو به دو انجام می‌دهیم یعنی

$$\underbrace{[A]\times[B]}_{\times}\times[C]=[A\times B]\times C=[A\times B\times C]$$

* مثال: ریشه‌های معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}1 & -x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ x & -8x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\bar{O}$ کدام است؟

$x_1=-\frac{1}{4}$ و $x_2=\frac{1}{3}$

* نکات و خواص ضرب ماتریس ها

(۹۷) ۱) $A_{mn} \times I_n = I_m \times A_{mn} = A_{mn}$ ضرب هر ماتریس در ماتریس واحد، برابر خود ماتریس است.

$I_n \downarrow$ ماتریس واحد

۲) $AB = AC \not\Longrightarrow B = C$

۳) $AB = 0 \not\Longrightarrow A = 0$ یا $B = 0$

۴) $AB \neq BA$

اگر $AB = BA \longrightarrow$ اتحادها برقرارند ← مثلاً $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

(اگر $AB = BA$ باشد می‌گویند A و B تعویض‌پذیرند)

*** مثال)** اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (A و B تعویض‌پذیرند)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$a+b=4$

*** مثال)** اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A \times B) - (B \times A)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

گزینه ۲ صحیح

* توان در ماتریس

(۹۶)

۱) $A^2 = A \times A$ (توان در واقع همان ضرب است)

$A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$

$\vdots$

$A^n = A^{n-1} \times A$

۲) $A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{m+n}$

۳) $(A^m)^n = A^{mn}$

۴) $(kA)^n = k^n A^n$

عدد

(۹۹)

۵) $I^n = I$

---

* مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^4 \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^5 \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، $b+c$ کدام است؟

۱) -5 ۲) 5 ۳) -13 ۴) 13

* تذکر: در سؤالاتی که توان ماتریس‌ها زیاد هست، حتماً یک نکته خاص وجود دارد، مثلاً $A^2 = I$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^4 = (A^2)^2 = I^2 = I$

$A^5 = A^4 \times A = I \times A = A \Rightarrow I \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} \longrightarrow b+c = (-4)+(-1) = -5$

گزینه ۱ صحیح

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}$ باشد، A^2-A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$

گزینه ۱ صحیح

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}5&3\\-1&4\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A-2I)\times A$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

گزینه ۱ صحیح

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4+A^5$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\longrightarrow A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\longrightarrow$

$A=A^2=A^3=A^4=A^5=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\longrightarrow$ مجموع $=5\times2=10$

گزینه ۳ صحیح

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ جمع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\longrightarrow A^3=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\longrightarrow A^{10}=\begin{bmatrix}1&10\\0&1\end{bmatrix}$

گزینه ۴ صحیح

* دترمینان ماتریس ۲×۲

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=$ قطر اصلی − قطر فرعی $=$

$ad-bc=|A|$

* نکات دترمینان (۹۶)

1) $|kA|=k^2|A|$

2) $|A^n|=|A|^n$

---

* مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix}$ و $|A-I|=|A|+2$ باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

$A-I=\begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-1 & -1 \\ -2 & m \end{bmatrix} \Longrightarrow |A-I|=(m-1)m-(-2)(-1) \Rightarrow$

$|A-I|=m^2-m-2$

$|A|=(m)(m+1)-(-1)(-2)=m^2+m-2$

$\longrightarrow$ جایگذاری $\Rightarrow |A|+2=|A-I|$

$m^2+m-2+2=m^2-m-2 \Longrightarrow m=-1$ گزینه ۲ صحیح

---

* مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A^2+A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲ گزینه ۴ صحیح

* ماتریس وارون یا معکوس

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

۱) $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$

۹۴

۲) $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$ خیلی مهم

۹۹

۳) $|A| = 0 \rightarrow$ ماتریس وارون ندارد

۴) $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

۵) $(\underset{\text{عدد}}{k}A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

۹۹

۶) $(A^{-1})^{-1} = A$

۹۹

۷) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

* مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، حاصل ab کدام است؟

راهنمایی: $A \times A^{-1} = I$

* مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، عنصر واقع بر سطر دوم و ستون اول در وارون ماتریس $(2A)$ کدام است؟ راهنمایی:

$2A \longrightarrow (2A)^{-1} = \checkmark$ یا $(2A)^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1}$

مثال به ازای کدام مقدار a ماتریس $\begin{bmatrix} a-3 & 3 \\ 4 & a+1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست؟

۱) ۳ و ۴- ۲) ۵ و ۲- ۳) ۵ و ۳- ۴) ۲ و ۵-

$\rightarrow (3\times4)-(a+1)(a-3)=0 \rightarrow -a^2+2a+15=0 \rightarrow$ ۰ = دترمینان

$a=-3, +5$ گزینه ۳ صحیح ✓

مثال دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ مفروضند. درایه واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B\times A$ کدام است؟ ۱) ۰/۹- ۲) ۰/۱- ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۹

گزینه ۲ صحیح ✓

مثال اگر $x+\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس x کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ گزینه ۱ صحیح ✓

مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A\times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۵

$A\times B=I \longrightarrow$ یعنی $B=A^{-1} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\frac{7}{2}+\frac{-3}{2}=2$ گزینه ۳ صحیح ✓

* حل معادلات ماتریسی به روش ماتریس وارون

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب (عدد هستند)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}_{\text{مقادیر (عدد هستند)}} \rightarrow AX=B \xrightarrow{\times A^{-1}}$$

$$X = A^{-1} \times B$$

---

* مثال: اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس X کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۸-　　۳) $\frac{8}{3}$　　۴) $-\frac{8}{3}$

$$X = A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{5}{3}+1 = \frac{8}{3}$$

گزینه ۳ صحیح

---

* مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، از رابطه $AX = 2I$ ، ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$　　۴) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1} \times 2I = 2A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ +4 & +2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ صحیح

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات بصورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد. $x+y$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{A^{-1}}_{\text{مسئله داده است}}\times B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \longrightarrow x+y=4$$

گزینه ٤ صحیح

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A-B)^{-1}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -0/2 & 0/1 \\ 0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0/3 & -0/2 \\ 0/2 & 0/4 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0/2 & -0/2 \\ 0/3 & 0/4 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ -0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$

گزینه ٤ صحیح

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، وارون $A\times B$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ ۲) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ ۴) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A = \pi r^2$$

سوابق تحصیلی

- ✓ مدرس رسمی آموزش و پرورش
- ✓ مولف کتابهای کنکور
- ✓ عضو هیات مدیره موسسه تجلیل
- ✓ عضو انجمن ریاضیدانان و فیزیکدانان ایران
- ✓ مشاور تحصیلی در برنامه های رادیویی رادیو جوان، اقتصاد، رادیو فرهنگ و شبکه ۴ صدا و سیما جمهوری اسلامی ایران
- ✓ تنها دارنده مدرک برنامه ریزی و مشاوره تحصیلی از دانشگاه آکسفورد انگلستان در استان
- ✓ مدرس برتر ریاضیات و فیزیک المپیاد و کنکور
- ✓ دارنده پروانه اشتغال از سازمان نظام مهندسی کشور
- ✓ برگزار کننده همایش های طلایی ضربتی کنکور در استان های تهران - تبریز و گیلان
- ✓ عضو باشگاه مهندسان ایران
- ✓ عضو انجمن علمی مهندسان برق ایران
- ✓ عضو مرجع متخصصین ایران
- ✓ عضو انجمن علمی نخبگان جوان
- ✓ عضو انجمن مهندسی بهره وری صنعت برق ایران
- ✓ عضو انجمن علمی پژوهشگران جوان
- ✓ عضو انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران
- ✓ عضو انجمن خبرگان کنکور