درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

(@riazisara) https://t.me/riazisara

لگاریتم و تابع نمایی

مدرس : استاد ایمان نخستین

www.riazisara.ir

$$\boxed{\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c}$$

مثال۱: از تساوی های زیر مقدار x را بیابید.

$$۱)\quad \log_{۱۰}^{x}=۳ \xrightarrow{\text{حذف log}} x=۱۰^{۳} \Rightarrow \boxed{x=۱۰۰۰}$$

$$۲)\quad \log_{x}^{۱۲۵}=۳ \xrightarrow{\text{حذف log}} ۱۲۵=x^{۳} \Rightarrow \boxed{x=۵}$$

$$۳)\quad \log_{۲}^{۳۲}=x \xrightarrow{\text{حذف log}} ۳۲=۲^{x} \Rightarrow \boxed{x=۵}$$

مثال۲: اگر $x=\log_{\sqrt{۵}-۲}^{\sqrt{۵}+۲}$ آنگاه مقدار x کدام است؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=\frac{۳}{۲}$ ۳) $x=\frac{-۳}{۲}$ ۴) $x=-۱$

$$\overbrace{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}^{\text{مزدوج}}=۱\Rightarrow\sqrt{۵}+۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲}\Rightarrow\boxed{\sqrt{۵}+۲=(\sqrt{۵}-۲)^{-۱}}\qquad(۱)$$

$$\log_{\sqrt{۵}-۲}^{\sqrt{۵}+۲}=x\xrightarrow{\text{با توجه به (۱)}}\log_{\sqrt{۵}-۲}^{(\sqrt{۵}+۲)^{-۱}}=x\xrightarrow{\text{حذف log}}(\sqrt{۵}-۲)^{-۱}=(\sqrt{۵}-۲)^{x}\Rightarrow\boxed{x=-۱}$$

توجه: دو رابطه $\boxed{\log_a^a = ۱}$ و $\boxed{\log_a^۱ = ۰}$ به کمک قرارداد **log** بوجود اومده. (با شرط $a > ۰, a \neq ۱$)

توجه: $\log_b^a$ رو به فارسی اینجوری می خونیم «لگاریتم عدد **a** بر مبنای **b**» یا «لگاریتم عدد **a** بر پایه **b**» اگه مبنای یک لگاریتم ۱۰ باشه طبق قرارداد می تونید مبنای ۱۰ رو ننویسید یعنی: $\log_{۱۰}^x = \log x$

روابط لگاریتم:

شما می تونید به کمک قواعد تشکیل و حذف لگاریتم ، چهار رابطه مهم رو در مبحث log بوجود بیارید که هر کدوم از این ۴ رابطه نتایج مهمی رو به همراه دارن.

رابطه (۱) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^{x} - \log_a^{y}} \qquad \boxed{\log_a^{x \cdot y} = \log_a^{x} + \log_a^{y}}$$

علت: فرض کنید و باشه بنابراین می تونم بنویسم:

$$\begin{cases} \log_a^{x} = m \\ \log_a^{y} = n \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } \log} \begin{cases} x = a^{m} \\ y = a^{n} \end{cases} \longrightarrow x \cdot y = a^{\boxed{m+n}} \xrightarrow{\text{تشکیل } \log} \log_a^{x \cdot y} = m + n$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \boxed{\log_a^{x \cdot y} = \log_a^{x} + \log_a^{y}}$$

رابطه ای رو که در زیر براتون نوشتم تعمیم یافته دو رابطه بالاست:

$$\boxed{\log \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{y_1 y_2 \dots y_n} = (\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n) - (\log_a y_1 + \log_a y_2 + \dots + \log_a y_n)}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

مثال۳: عبارت $\log\frac{۱}{۲}+\log\frac{۲}{۳}+\log\frac{۳}{۴}+\ldots+\log\frac{n}{n+۱}$ را تا حد امکان ساده کنید.

روش۱) $(\log ۱-\log ۲)+(\log ۲-\log ۳)+\ldots+(\log n-\log(n+۱))=\underbrace{\log ۱}_{۰}-\log(n+۱)$

$=-\log(n+۱)$

روش۲) $\log\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\ldots\times\frac{n}{n+۱}\right)=\log\frac{۱}{n+۱}=\underbrace{\log(۱)}_{۰}-\log(n+۱)=-\log(n+۱)$

مثال۴: اگر $a_n = \log_۲ \frac{n}{n+۱}$ به طوری که $a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = -۴$ باشد مقدار **n** کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = \log_۲ \frac{۱}{۱+۱} + \log_۲ \frac{۲}{۱+۲} + \log_۲ \frac{۳}{۳+۱} + \ldots + \lg \frac{n}{n+۱} = -۴$$

$$\Rightarrow \log_۲ \left(\frac{۱}{۱+۱} \times \frac{۲}{۲+۱} \times \frac{۳}{۳+۱} \times \ldots \times \frac{n}{n+۱} \right) = -۴ \Rightarrow \log_۲ \frac{۱}{n+۱} = -۴$$

$$\Rightarrow \log_۲ (n+۱) = ۴ \Rightarrow n+۱ = ۱۶ \Rightarrow n = ۱۵$$

📖 **مثال۵:** اگر a , b ریشه های معادله $x^{۲} - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲-　　　۲) ۱-　　　۳) صفر　　　۴) ۱

پاسخ: گزینه۱

در هر معادله درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ حاصل جمع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه ها $\frac{c}{a}$ است پس اگر **a , b** ریشه های معادله $x^{۲} - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند داریم:

$$S = a + b = ۱۰$$

$$P = ab = ۰/۱$$

در نتیجه:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log(ab) - \log(a+b)$$

$$= \log\frac{ab}{a+b} = \log\frac{۰/۱}{۱۰} = \log\frac{۱}{۱۰۰} = -۲$$

باتوجه به اینکه $\log_{a.b}^{a.b}=1$ هست. می خوام یک نتیجه جالب بگیر:

$$\log_{a.b}^{a.b}=1 \longrightarrow \log_{a.b}^{a}+\log_{a.b}^{b}=1 \Rightarrow \boxed{\log_{a.b}^{a}=1-\log_{a.b}^{b}}$$

فامیل رابطه (۱)

$$\overbrace{\log_{10}^{2}=1-\log_{10}^{5}}^{2\times 5=10} \quad , \quad \overbrace{\log_{21}^{3}=1-\log_{21}^{7}}^{3\times 7=21} \quad , \quad \overbrace{\log_{15}^{5}=1-\log_{15}^{3}}^{5\times 3=15}$$

مثال۶: اگر $\log^{2} = a$ باشد مقدار $\log 50$ را برحسب **a** بنویسید.

داده مسئله $\log^{2} = a$ هست بنابراین خواسته مسئله رو طوری باز می کنیم تا برحسب داده مسئله درست بشه.

$$\log_{10}^{50} = \underbrace{\log_{10}^{10\times 5}} = \log_{10}^{10} + \underbrace{\log_{10}^{5}} = 1 + (\underbrace{1 - \log_{10}^{2}}) = 1 + 1 - a = 2 - a$$

مثال۷: مقدار $\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$ برابر است با:

۱) $\log 5$ ۲) $\log 2$ ۳) $-1 + \log 2$ ۴) $1 - \log 2$

$$\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} = \log_{10}^{\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}\right)} = \log_{10}^{5} = 1 - \log_{10}^{2}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

مثال۸: اگر $\log^{۳} = ۰/۴ , \log^{۲} = ۰/۳$ باشه حاصل $\log^{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۱ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۶ ۴) ۰/۱۶

$$\log^{۱۵} = \log^{۳(۵)} = \log^{۳} + \log^{۵} = \log^{۳} + (۱ - \log^{۲}) = ۰/۴ + (۱ - ۰/۳) = ۰/۴ + ۰/۷ = ۱/۱$$

مثال۹: اگر لگاریتم ۱۲ در پایه ۶ برابر a باشد آنگاه لگاریتم ۳ در پایه ۶ کدام است؟

۱) $۲-a$ ۲) $a-۲$ ۳) $۱-a$ ۴) $a-۱$

پاسخ: **گزینه ۱**

$$\log_{۶}^{۱۲}=\log_{۶}^{(۲\times۶)}=\log_{۶}^{۲}+۱=a\Rightarrow\log_{۶}^{۲}=a-۱$$

$$\log_{۶}^{۳}=\log_{۶}^{\frac{۶}{۲}}=۱-\log_{۶}^{۲}=۱-(a-۱)=۲-a$$

رابطه (۲) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{\log_{y^b}^{x^a} = \frac{a}{b}\log_y^x}$$

علت: فرض کنید $\log_{y^b}^{x^a} = m$ باشه به حرکاتی که در زیر صورت می گیرد خوب دقت کنید:

$$\overbrace{\log_{y^b}^{x^a} = m}^{(۱)} \xrightarrow{\text{حذف log}} x^a = (y^b)^m \xrightarrow[\text{توان } \frac{۱}{a} \text{ می رسونم}]{\text{دو طرف تساوی رو به}} x = y^{\frac{b.m}{a}} \xrightarrow{\text{تشکیل log}} \log_y^x = \frac{b}{a}.\text{m}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{a}{b}} \overbrace{m = \frac{a}{b}\log_y^x}^{(۲)} \xrightarrow{(۱),(۲)} \log_{y^b}^{x^a} = \frac{a}{b}\log_y^x$$

معنی رابطه بالا اینه که: توان عبارت درون log ، اجازه خروج از log و قرار گرفتن در پشت log رو داره و همچنین ضرایب پشت log اجازه قرار گرفتن در توان عبارت درون log رو دارند.

مثال) $\log_{۱۰}^{۱۰۰۰} = \log_{۱۰}^{۱۰^{۳}} = ۳\log_{۱۰}^{۱۰} = ۳$

مثال) $\log_{۵\sqrt{۵}}^{۵} = \log_{۵^{\frac{۳}{۲}}}^{۵} = \frac{۱}{\left(\frac{۳}{۲}\right)}\log_{۵}^{۵} = \frac{۲}{۳}$

مثال) $\log_{x\sqrt{x}}^{x^{۲}\sqrt[۳]{x}} = \log_{x^{۱}.x^{\frac{۱}{۲}}}^{x^{۲}x^{\frac{۱}{۳}}} = \log_{x^{\frac{۳}{۲}}}^{x^{\frac{۷}{۳}}} = \frac{\left(\frac{۷}{۳}\right)}{\left(\frac{۳}{۲}\right)}\log_{x}^{x} = \frac{۱۴}{۹}$

مثال) $۳\log_{۲۴}^{۲} + ۵\log_{۲۴}^{\sqrt[۵]{۳}} = \log_{۲۴}^{۲^{۳}} + \log_{۲۴}^{(\sqrt[۵]{۳})^{۵}} = \log_{۲۴}^{۸} + \log_{۲۴}^{۳} = \log_{۲۴}^{۸\times ۳} = ۱$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

📖 مثال۱۰: با فرض $\log^{۲} = a$ مقدار $\log^{۱/۲۵}$ کدام است؟

از اعداد اعشاری نترسید هر جا اعداد اعشاری دیدید سریعاً به صورت کسری درش بیارین. پس تو این سؤال داریم:

$$\log^{۱/۲۵} = \log^{\frac{۱۲۵}{۱۰۰}} = \log^{۱۲۵} - \log^{۱۰۰} = \log^{۵^{۳}} - \log^{۱۰^{۲}} = ۳\log^{۵} - ۲ = ۳(۱ - \log^{۲}) - ۲ = ۳(۱ - a) - ۲$$

$$= ۳ - ۳a - ۲ = ۱ - ۳a$$

مثال۱۱: اگر $\log_a^{۳\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۴}$ باشد $\log_۴^{(a-۱)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\log_a^{۳\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{حذف } \log} ۳\sqrt{۳} = a^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow ۳(۳^{\frac{۱}{۲}}) = a^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow ۳^{\frac{۳}{۲}} = a^{\frac{۳}{۴}} \xrightarrow[\text{می رسانیم } \frac{۴}{۳}]{\text{طرفین را به توان}} \left(۳^{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۴}{۳}} = \left(a^{\frac{۳}{۴}}\right)^{\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow ۳^۲ = a \Rightarrow a = ۹ \Rightarrow \log_۴^{(a-۱)} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

فامیل رابطه (۲)

(۱)

$$\log_y^x = \log_{y^n}^{x^n}$$

(۲)

$$\log_y^x = \log_{\sqrt[n]{y}}^{\sqrt[n]{x}}$$

(۳)

$$\log_y^x = \log_{\frac{۱}{y}}^{\frac{۱}{x}}$$

مثال۱۲: اگر $۳^a = A$ باشد $\log_۳ ۹A^۲$ کدام است؟

(سراسری ۹۱)

۱) $۲+۲a$ ۲) $۳+۲a$ ۳) $۲+a^۲$ ۴) $۳+a^۲$

پاسخ: **گزینه۱**

$$\log_۳ ۹A^۲ \underset{=}{(۱)} \log_۳ ۹ + \log_۳ A^۲ \underset{=}{(۲)} ۲+۲\log_۳ A \underset{=}{(۳)} ۲+۲\log_۳ A = ۲+۲\log_۳ ۳^a = ۲+۲a$$

تذکر:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b \quad (۱)$$

$$\log_b a^n = n \log_b a \quad (۲),(۳)$$

📖 مثال۱۳: اگر $\log ۵ = ۳k$ باشد $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

(سراسری ۹۰)

۱) $۱-۴k$ ۲) $۲-۵k$ ۳) $۱-۲k$ ۴) $۱-k$

پاسخ: **گزینه۱**

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \Rightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲ = ۳k \Rightarrow \log ۲ = ۱ - ۳k$$

به کمک خاصیت $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b , \log_b a^n = n \log_b a$ داریم:

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log ۱/۶^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳} \log ۱/۶ = \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۱۰) = \frac{۱}{۳}(\log ۲^۴ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱)$$

با توجه به تساوی $\log ۲ = ۱ - ۳k$ داریم:

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۴(۱-۳k)-۱) = \frac{۱}{۳}(۳-۱۲k) = ۱-۴k$$

مثال۱۴: با فرض $\log_{9\sqrt[3]{9}} 3\sqrt{3} = a$ حاصل لگاریتم $16(a+1)$ در چه پایه ای برابر ۴ است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} 3\sqrt{3} = 3^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \\ 9\sqrt[3]{9} = 3^2 \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{2+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{3}} \end{cases} \Rightarrow \log_{9\sqrt[3]{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{\frac{8}{3}}} 3^{\frac{3}{2}}$$

با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a \quad (a,b>0, b\neq 1)$ داریم:

$$\log_{3^{\frac{8}{3}}} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{3}}\log_3 3 = \frac{9}{16}$$

پس $a = \frac{9}{16}$ است. فرض می کنیم لگاریتم $16(a+1)$ در پایه m برابر ۴ است در نتیجه:

$$\log_m(16(a+1)) = 4 \Rightarrow \log_m\left(16\left(\frac{9}{16}+1\right)\right) = 4 \Rightarrow \log_m 25 = 4$$

$$\Rightarrow 25 = m^4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5} \xrightarrow{m>0} m = \sqrt{5}$$

📖 مثال۱۵: اگر $a = 2\log(1+\sqrt{3}) + \log(4-2\sqrt{3})$ باشد حاصل $\log 25$ برحسب **a** کدام است؟

۱) $4-a$ ۲) $4-2a$ ۳) $2-a$ ۴) $2-2a$

پاسخ: گزینه ۳

بنابر خاصیت $\log_b a^n = n\log_b a(\mathrm{a,b}>0, b\neq 1)$ داریم:

$$a = 2\log(1+\sqrt{3}) + \log(4-2\sqrt{3}) = \log(4+2\sqrt{3}) + \log(4-2\sqrt{3})$$
$$= \log((4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})) = \log(16-12) = \log 4$$

پس $a = \log 4$.

می دانیم $\frac{100}{4} = 25$ در نتیجه: $\log 25 = \log\frac{100}{4} = \log 100 - \log 4 = 2 - \log 4 = 2 - a$

تذکر: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

مثال۱۶: اگر $\log ۲ = k$ باشد حاصل $\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵})$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $۲k$　　۲) $۴k$　　۳) $۱ + k$　　۴) $۲ + ۴k$

پاسخ: **گزینه ۲**

می دانیم $n \log_b a = \log_b a^n$ در نتیجه:

$$۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۱+\sqrt{۵})^۲ = \log(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$\Rightarrow \log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۱+۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵}) = \log(۳۶-۲۰) = \log ۱۶$$

اگر $\log ۲ = k$ باشد داریم: $\log ۱۶۳ = \log ۲^۴ = ۴\log ۲ = ۴k$

📖 **مثال۱۷:** اگر $x=\frac{\sqrt{33}-5}{2}$ باشد حاصل $\log_4(x^2+5x+6)$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

☜ پاسخ: **گزینه ۴**

به کمک مربع سازی $x^{۲}+۵x+۶$ داریم:

$$x^{۲}+۵x+۶=(x^{۲}+۵x)+۶=\left(\left(x+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۲۵}{۴}\right)+۶=\left(x+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

حاصل عبارت $(x^{۲}+۵x+۶)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}$ برابر است:

$$\left(\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۳۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=۸$$

پس حاصل $\log_{۴}(x^{۲}+۵x+۶)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}$ برابر است و در نتیجه:

$$\log_{۴}۸=\log_{۲^{۲}}۲^{۳}\xrightarrow{(۱)}\frac{۳}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۳}{۲}$$

تذکر: $(۱)\ \log_{b^m}a^n=\frac{n}{m}\log_b a\ (a,b>۰, b\neq ۱)$

www.riazisara.ir

کانال تلگرام @ Nakhostin_Math

📖 **مثال۱۸:** اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۱۵ = b$ باشد مقدار $\log ۲۴$ برحسب **a** , **b** کدام است؟

۱) $۲a + b - ۱$
۲) $۲a + b + ۱$
۳) $۴a - ۱ - b$
۴) $۴a + b - ۱$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول)

$$\log ۲ = a \Rightarrow \log \frac{۱۰}{۵} = a \Rightarrow \log ۱۰ - \log ۵ = a \Rightarrow \log ۵ = ۱ - a \qquad (\mathrm{I})$$

$$\log ۱۵ = \mathrm{b} \Rightarrow \log ۵ + \log ۳ = b \xrightarrow{(\mathrm{I})} ۱ - a + \log ۳ = b \Rightarrow \log ۳ = b + a - ۱ \qquad (\mathrm{II})$$

$$\log ۲۴ = \log ۸ + \log ۳ = \log ۲^{۳} + \log ۳ = ۳\underbrace{\log ۲}_{a} + \log ۳ \xrightarrow{(II)}$$

$$= ۳a + b + a - ۱ = ۴a + b - ۱$$

روش دوم)

$$\log ۲۴ = \log \frac{۲۴۰}{۱۰} = \log ۲۴۰ - ۱ = \log ۱۵ + \underbrace{\log ۱۶}_{۴\log ۲} - ۱ = b + ۴a - ۱$$

📖 مثال۱۹: اگر $\log ۷ = n$, $\log ۱۳ = m$ آنگاه حاصل $\log_۷^{\sqrt{۹/۱}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{m+n}{۲n-۱}$ ۲) $\dfrac{m+n-۱}{۲n}$ ۳) $\dfrac{m-n+۱}{n}$ ۴) $\dfrac{m-n-۱}{۲n}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به خواص $\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b}$, $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$ ، $\log_c^{a^n} = n\log_c^a$, $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$ داریم:

$$\log_۷^{\sqrt{۹/۱}} = \log_۷^{(۹/۱)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۲}\log_۷^{۹/۱} = \frac{۱}{۲}\log_۷^{\frac{۹۱}{۱۰}} = \frac{۱}{۲}\left(\log_۷^{۹۱} - \log_۷^{۱۰}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\log ۹۱}{\log ۷} - \frac{\log ۱۰}{\log ۷}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{\log(۷\times ۱۳)}{\log ۷} - \frac{۱}{\log ۷}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\log ۷ + \log ۱۳}{\log ۷} - \frac{۱}{\log ۷}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{n+m}{n} - \frac{۱}{n}\right) = \frac{m+n-۱}{۲n}$$

مثال۲۰: هرگاه $\dfrac{\log a+\log b}{۲}=\log\dfrac{a+b}{۴}$ باشد حاصل $\dfrac{a^۲+b^۲-۳ab}{a^۲+b^۲+۳ab}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۳}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{۱۳}{۱۴}$ ۳) $\dfrac{۱۱}{۱۷}$ ۴) $\dfrac{۱۱}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log\frac{a+b}{۴}=\frac{\log a+\log b}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲\log\frac{a+b}{۴}=\log ab\Rightarrow\log\left(\frac{a+b}{۴}\right)^{۲}=\log ab$$

چون **log** تابع یک به یک است:

$$\left(\frac{a+b}{۴}\right)^{۲}=ab\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+۲ab=۱۶ab\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}+b^{۲}-۳ab=۱۱ab\\a^{۲}+b^{۲}+۳ab=۱۷ab\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a^{۲}+b^{۲}-۳ab}{a^{۲}+b^{۲}+۳ab}=\frac{۱۱ab}{۱۷ab}=\frac{۱۱}{۱۷}$$

📖 مثال۲۱: هرگاه $\log\frac{x-y}{۲}=\frac{\log x+\log y}{۲}$ مقدار $x^{۲}+y^{۲}$ کدام است؟

۱) $۲xy$ ۲) $۶xy$ ۳) $۵xy$ ۴) $۱۳xy$

☜ پاسخ: **گزینه ۲**

$$\log_c a+\log_c b=\log_c ab\,(a,b,c>0, c\neq 1)$$

$$\log x+\log y=\log xy$$

بنابر خاصیت $n\log_b a=\log_b a^n$ داریم:

$$\log\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\log xy}{2}\Rightarrow 2\log\frac{x-y}{2}=\log xy$$

$$\log\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\log xy\Rightarrow\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy\Rightarrow\frac{(x-y)^2}{4}=xy\Rightarrow(x-y)^2=4xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=4xy\Rightarrow x^2+y^2=6xy$$

مثال۲۲: اگر $a=\log_{۳}^{۱۸}$ باشد حاصل $۹^{a-۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: **گزینه ۴**

روش اول)

$$\log_{۳} ۱۸ = a \Rightarrow a-۲ = (\log_{۳} ۱۸)-۲ = \log_{۳} ۱۸ - \log_{۳} ۳^{۲} = \log_{۳} \frac{۱۸}{۹} \Rightarrow a-۲ = \log_{۳} ۲$$

$$۹^{a-۲} = ۳^{۲(a-۲)} = ۳^{۲\log_{۳} ۲} = ۳^{\log_{۳} ۴} = ۴$$

روش دوم)

$$\log_{۳} ۱۸ = a \Rightarrow ۳^{a} = ۱۸$$

$$۹^{a-۲} = ۳^{۲a-۴} = \frac{(۳^{a})^{۲}}{۳^{۴}} = \frac{۱۸^{۲}}{۳^{۴}} = \frac{۱۸^{۲}}{۹^{۲}} = \left(\frac{۱۸}{۹}\right)^{۲} = ۴$$

مثال۲۳: اگر $12 = 24, 2^a = 3^b$ باشد حاصل $(a-2)(b-1)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

روش اول)

$$۳^a = ۱۲ \Rightarrow a = \log_۳ ۱۲ \Rightarrow a - ۲ = (\log_۳ ۱۲) - ۲ = \log_۳ ۱۲ - \log_۳ ۹ = \log_۳ \frac{۱۲}{۹} = \log_۳ ۳$$

$$۲^b = ۲۴ \Rightarrow b = \log_۲ ۲۴ \Rightarrow b - ۱ = (\log_۲ ۲۴) - ۱ = \log_۲ ۲۴ - \log_۲ ۳ = \log_۲ \frac{۲۴}{۳} = \log_۲ ۸ = ۳\log_۲ ۲$$

$$(a-۲)(b-۱) = \log_۳ ۲ \times ۳\log_۲ ۳ = ۳ \times \underbrace{\log_۳ ۲ \log_۲ ۳}_{۱} = ۳$$

روش دوم)

$$\left.\begin{array}{l} ۳^a = ۱۲ \Rightarrow ۳^{a-۲} = \dfrac{۱۲}{۴} = ۳ \Rightarrow (a-۲) = \log_۲ ۳ \\ ۳^b = ۲۴ \Rightarrow ۳^{b-۱} = ۸ \Rightarrow (b-۱) = \log_۳ ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow (a-۲)(b-۱) = \log_۲ ۳ \times \log_۳ ۸ = \log_۲ ۸ = ۳$$

📖 مثال۲۴: اگر $\log_{bc} ab = ۲$, $\log_{b} ac = ۳$ باشد حاصل $\log_b c$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول)

$$\begin{cases} \log_{bc} ab = ۲ \Rightarrow ab = (bc)^۲ = b^۲c^۲ \\ \log_b ac = ۳ \Rightarrow ac = b^۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{b}{c} = \frac{c^۲}{b} \Rightarrow c^۳ = b^۲$$

$$\Rightarrow c = b^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \log_b c = \log_b b^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

مثال۲۵: ساده شده $(\log_{21} 63).(\log_{21} 7) + (\log_{21} 3)^2$ کدام است؟

۱) $\log_3 7$ ۲) $\log_7 3$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{7}$

پاسخ: **گزینه ۳**

$\log_{۲۱}۷,\log_{۲۱}۶۳$ را برحسب $\log_{۲۱}۳$ می نویسیم:

$$\log_{۲۱}۷=\log_{۲۱}\frac{۲۱}{۳}=\log_{۲۱}۲۱-\log_{۲۱}۳=۱-\log_{۲۱}۳$$

$$\log_{۲۱}۶۳=\log_{۲۱}(۲۱\times ۳)=\log_{۲۱}۲۱+\log_{۲۱}۳=۱+\log_{۲۱}۳$$

$$(\log_{۲۱}۳)^{۲}+\log_{۲۱}۷\times\log_{۲۱}۶۳=(\log_{۲۱}۳)^{۲}+(۱-\log_{۲۱}۳)(۱+\log_{۲۱}۳)$$

$$=(\log_{۲۱}۳)^{۲}+(۱-(\log_{۲۱}۳)^{۲})=۱$$

📖 مثال۲۶: حاصل $(\log_{ba} a)^{۲} + (\log_{ba} b)(\log_{ba} a^{۲}b)$ کدام است؟

۱) $\log_b a$　　۲) $\log_a b$　　۳) ۱　　۴) **a**

☜پاسخ: **گزینه ۳**

روش اول)

$$(\log_{ba} a)^{۲} + \log_{ba} b \times \log_{ba} a^{۲}b = (\log_{ab} a)^{۲} + \log_{ba} b \times (۲\log_{ab} a + \log_{ba} b)$$

$$= (\log_{ab} a)^{۲} + ۲\log_{ab} a \times \log_{ba} b + (\log_{ba} b)^{۲} = (\log_{ab} a + \log_{ab} b)^{۲} = (\log_{ab} ab)^{۲} = ۱$$

روش دوم)

$$(\log_{ba} a)^{۲} + \log_{ba}\left(\frac{ba}{a}\right) \times \log_{ba}(ba \times a) = (\log_{ba} a)^{۲} + (۱ - \log_{ba} a)(۱ + \log_{ba} a)$$

$$= (\log_{ba} a)^{۲} + ۱ - (\log_{ba} a)^{۲} = ۱$$

رابطه (۳) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}}$$

در این رابطه جای a و b عوض میشه

اگه به تساوی $\log_c^b .\log_c^a = \log_c^a .\log_c^b$ توجه کنید می بینید که رابطه (۳) چقدر راحت بدست میاد:

$$\log_c^b .\log_c^a = \log_c^a .\log_c^b \xrightarrow{\text{رابطه (۲)}} \log_c^{a^{\log_c^b}} = \log_c^{b^{\log_c^a}} \xrightarrow{\text{حذف } \log} a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

فامیل رابطه (۳)

$$\boxed{a^{\log_a^b} = b}$$

مثال۲۷: حاصل $(a^{\log_x^b} - b^{\log_x^a})$ کدام است؟

۱) $a^a - b^b$ ۲) صفر ۳) $a^b - b^a$ ۴) $a - b$

برای حل این سؤال خیلی قشنگ میشه از رابطهٔ سوم استفاده کرد و حتی با دیدن سوال سریع گفت که جواب سوال برابر صفر میشه.

$$a^{\log_x^b} - b^{\log_x^a} = b^{\log_x^a} - b^{\log_x^a} = 0$$

📖 مثال۲۸: اگر $A=\sqrt{5}^{(\log_5^{12}+\log_5^{3})}$ باشد آنگاه $(A+1)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) ۷ ۳) ۳۷ ۴) $\frac{1}{37}$

$$A=\sqrt{5}^{(\log_5^{12}+\log_5^{3})}=\sqrt{5}^{(\log_5^{36})}=5^{\frac{1}{2}(\log_5^{36})}=5^{\log_5^{\sqrt{36}}}=6\Rightarrow A+1=7$$

📖 مثال۲۹: حاصل $۱۰^{\left(\frac{۱}{۲}\log ۱۵-\log ۳\right)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۴}}{۳}$
۲) $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

$$۱۰^{\left(\log_{۱۰}^{(۱۵)^{\frac{۱}{۲}}}-\log_{۱۰}^{۳}\right)}=۱۰^{\log_{۱۰}^{\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

مثال ۳۰: اگر $\log_b a = \frac{۱}{۳}$ و $b^{\log_a^c} = ۶۴$ باشد مقدار c کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم: $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} & b^{\log_a c} = ۶۴ \Rightarrow c^{\log_a b} = ۶۴ \\ & \text{فرض سوال} : \log_b a = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_a b = ۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^{۳} = ۶۴ \Rightarrow c = ۴$$

مثال۳۱: ساده شده $۲^{\log_۴ ۹} - ۱۶^{\log_۲ ۳}$ برابر است با:

۱) ۷۸- ۲) ۸۴- ۳) ۱۳- ۴) صفر

پاسخ: گزینه۱

می دانیم $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (یعنی جای **a** , **b** را می توان عوض کرد.) پس:

$$۲^{\log_۴ ۹} = ۹^{\log_۴ ۲} = ۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$$

$$۱۶^{\log_۲ ۳} = ۳^{\log_۲ ۱۶} = ۳^۴ = ۸۱$$

$$۲^{\log_۴ ۹} - ۱۶^{\log_۲ ۳} = ۳ - ۸۱ = -۷۸$$

رابطه (٤) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a}$$

علت : $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^{b^{\log_b^a}} \xrightarrow{\text{رابطه (٣)}} \log_c^a$

مثال۳۲: با توجه به تساوی $\log_{9}^{64}\times \log_{x}^{3} = 2^{2\log_{2}^{\sqrt{3}}}$ مقدار x کدام است.

$$\log_{3^2}^{8^2}\times \log_{x}^{3} = 2^{2\log_{2}^{\sqrt{3}}} \Rightarrow \log_{3}^{8}\times \log_{x}^{3} = 2^{\log_{2}^{(\sqrt{3})^2}} \Rightarrow \log_{x}^{8} = 2^{\log_{2}^{3}} \Rightarrow \log_{x}^{8} = 3 \Rightarrow 8 = x^{3} \Rightarrow x = 2$$

مثال۳۳: حاصل $5^{(\log_{3}^{2}\times\log_{4}^{3}\times\log_{5}^{4})}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

$$5^{(\log_{\cancel{3}}^{2}\times\log_{\cancel{4}}^{\cancel{3}}\times\log_{5}^{\cancel{4}})}=5^{\log_{5}^{2}}=2$$

مثال ۳۴: اگر $\log_{۳}^{۱۲}=a+۱$ باشد حاصل $\log_{۳}^{۲}\times\log_{۴}^{۳}\times\ldots\times\log_{۲۷}^{۲۶}$ برابر است با:

۱) $\frac{۶}{a}$ ۲) $\frac{a-۱}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{a-۱}$ ۴) $\frac{a}{۶}$

خواسته مسئله: $\log_{\cancel{۳}}^{۲}\times\log_{\cancel{۴}}^{\cancel{۳}}\times\log_{\cancel{۵}}^{\cancel{۴}}\times\ldots\times\log_{۲۷}^{۲۶}=\log_{۲۷}^{۲}=\log_{۳^{۳}}^{۲}=\frac{۱}{۳}\log_{۳}^{۲}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{a}{۲}\right)=\frac{a}{۶}$

داده مسئله $\boxed{\log_{۳}^{۱۲}=a+۱\Rightarrow\log_{۳}^{۲^{۲}\times۳}=a+۱\Rightarrow۲\log_{۳}^{۲}+\log_{۳}^{۳}=a+۱\Rightarrow\log_{۳}^{۲}=\frac{a}{۲}}$

فامیل رابطه (۴)

رابطه حذف مبنا

$$\boxed{\frac{\log_{\cancel{c}}^{a}}{\log_{\cancel{c}}^{b}}=\log_b^a}$$

،

رابطه تزریق مبنا

$$\boxed{\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}}$$

$$\xrightarrow{\text{پس}}$$

می دونیم $\log_b^a . \log_c^b = \log_c^a$

توجه: در بعضی از مسائل لگاریتم، شما مبنایی رو در اختیار دارید که به درد نمی خوره. پس به کمک رابطه تزریق می تونین مبنای دلخواهتون رو تزریق کنید. یا اگه از یک مبنا خوشتون نیومد و دلتون خواست اونو حذف کنید می تونید از رابطه حذف مبنا کمک بگیرید:

$$\log_{2}^{3}=\frac{\log_{5}^{3}}{\log_{5}^{2}}=\frac{\log_{7}^{3}}{\log_{7}^{2}}=\frac{\log_{10}^{3}}{\log_{10}^{2}}=\ldots\quad,\qquad \frac{\log_{7}^{8}}{\log_{7}^{2}}=\log_{2}^{8}=\log_{2}^{2^{3}}=3$$

مثال۳۵: حاصل $\dfrac{\log_{۳}^{\sqrt{۲۴}}}{\log_{۳}^{\sqrt{۲}}} - \dfrac{\log^{۳۶}}{\log^{۴}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

$$\frac{\log_{۳}^{\sqrt{۲۴}}}{\log_{۳}^{\sqrt{۲}}} - \frac{\log^{۳۶}}{\log^{۴}} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲۴}} - \log_{۴}^{۳۶} \xrightarrow{\text{نتیجه ۲}} \log_{۲}^{۲۴} - \log_{۲}^{۶} \xrightarrow{\text{رابطه ۱}} \log_{۲}^{\frac{۲۴}{۶}} = \log_{۲}^{۴} = ۲$$

از رابطه (۴) میشه یه نتیجه دیگه هم گرفت نگاه کنید:

فامیل رابطه (۴)

می دونیم: $\log_b^a . \log_a^b = ۱ \Rightarrow \log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b} \longrightarrow \boxed{\log_b^a = A \Rightarrow \log_a^b = \dfrac{۱}{A}}$

مثال۳۶: با فرض $\log_{b^3}^{a^2}=4$ مقدار $\dfrac{\log^a}{\log^b}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$\log_{b^3}^{a^2}=4 \Rightarrow \frac{2}{3}\log_b^a=4 \Rightarrow \log_b^a=6 \xrightarrow{\text{تزریق مبنای ۱۰}} \frac{\log^a}{\log^b}=6$$

مثال ۳۷: حاصل عبارت $\frac{۱}{\log_۵ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۳ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۲ ۳۰}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: **گزینه۱**

می دانیم $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$ در نتیجه:

$$\frac{۱}{\log_۲ ۳۰}=\log_{۳۰} ۲,\frac{۱}{\log_۳ ۳۰}=\log_{۳۰} ۳,\frac{۱}{\log_۵ ۳۰}=\log_{۳۰} ۵ \Rightarrow \frac{۱}{\log_۲ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۳ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۵ ۳۰}$$
$$=\log_{۳۰} ۲+\log_{۳۰} ۳+\log_{۳۰} ۵=\log_{۳۰}(۲\times ۳\times ۵)=\log_{۳۰} ۳۰=۱$$

مثال۳۸: اگر $\log_b^a = \frac{۴}{۳}$ باشد مقدار $\log_{a^۳}^{b^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

$$\log_{a^۳}^{b^۲} = \frac{۲}{۳}\log_a^b = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\boxed{\log_b^a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_a^b = \frac{۳}{۴}}$$

📖 **مثال۳۹:** اگر $x^{\frac{۳}{۴}} = ۳\sqrt{۳}$ باشد لگاریتم $x-۱$ در کدام پایه برابر $\frac{۶}{۵}$ می باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با استفاده از تساوی داده شده مقدار **x** را پیدا می کنیم و سپس به محاسبه مطلوب مسئله می پردازیم:

$$x^{\frac{۳}{۴}} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow x = \left(۳^{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۴}{۳}} = ۳^{۲} \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow x - ۱ = ۸$$

با استفاده از رابطه $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$ داریم:

$$\log_{\alpha} x - ۱ = \frac{۶}{۵} \Rightarrow \log_{\alpha} ۸ = \frac{۶}{۵} \Rightarrow \log_{۸} \alpha = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \alpha = ۸^{\frac{۵}{۶}} = (۲^{۳})^{\frac{۵}{۶}} = ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

مثال ۴۰: اگر $\log ۲ = a \,, \log ۳ = b$ باشد حاصل $\log_{۱۸} ۲۴$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳a+b}{b+۲a}$ ۲) $\dfrac{a+۳b}{۲b+a}$ ۳) $\dfrac{۳a+b}{۲b+a}$ ۴) $\dfrac{a+۳b}{۲a+b}$

پاسخ: گزینه ۳

بنابر خاصیت $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ مبنای عبارت $\log_{۱۸} ۲۴$ را به مبنای ۱۰ می بریم:

$$\log_{۱۸} ۲۴ = \frac{\log ۲۴}{\log ۱۸} = \frac{\log(۲^{۳} \times ۳)}{\log(۳^{۲} \times ۲)} = \frac{\log ۲^{۳} + \log ۳}{\log ۳^{۲} + \log ۲} = \frac{۳\log ۲ + \log ۳}{۲\log ۳ + \log ۲} = \frac{۳a+b}{۲b+a}$$

📖 مثال ۱۴۱: اگر $\log_{8}^{18} = a$ باشد مقدار $\log_{4}^{6}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{3a-1}{4}$ ۲) $\frac{3a}{4}$ ۳) $\frac{3a+1}{4}$ ۴) $\frac{3a-1}{2}$

پاسخ: **گزینه ۳**

$$\log_{8}^{18} = a \Rightarrow \log_{2^3}^{3^2\times 2} = a \Rightarrow \frac{1}{3}(2\log_{2}^{3} + \log_{2}^{2}) = a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\log_{2}^{3} + \frac{1}{3} = a \Rightarrow \log_{2}^{3} = \frac{3a-1}{2}$$

$$\log_{4}^{6} = \log_{2^2}^{2\times 3} = \frac{1}{2}(\log_{2}^{2} + \log_{2}^{3}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3a-1}{2}\right) = \frac{3a+1}{4}$$

📖 **مثال۴۲:** اگر $\log_b ac = ۳$, $\log_b c^{۳} = \frac{۳}{۲}$ باشد حاصل $\log_{bc} ab$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینه۴

با توجه به آن که $\log_c ac = ۳$ پس:

$\log_b a + \log_b c = ۳$ از طرفی $\log_b c^{۳} = \frac{۳}{۲}$ پس $\log_b c = \frac{۱}{۲}$ به این ترتیب $\log_b a = \frac{۵}{۲}$ پس:

$$\log_{bc} ab = \frac{\log_b ab}{\log_b bc} = \frac{\log_b a + \log_b b}{\log_b b + \log_b c} = \frac{\frac{۵}{۲}+۱}{۱+\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۷}{۳}$$

مثال ۴۳: اگر $\log_{5}^{x} + \log_{3}^{x} = 1$ باشد مقدار $\log_x 5$ برابر کدام است؟

۱) $\log_{15} 3$ ۲) $\log_{15} 5$ ۳) $\log_{5} 15$ ۴) $\log_{3} 15$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_{5}^{x} + \log_{3} x = 1 \xrightarrow{\div \log_{5} x} 1 + \frac{\log_{3} x}{\log_{5} x} = \frac{1}{\log_{5}^{x}} \Rightarrow 1 + \log_{3} 5 = \log_{x} 5$$

$$\Rightarrow \log_{x} 5 = \log_{3}(3 \times 5) = \log_{3} 15$$

$$\boxed{\frac{\log_{x} a}{\log_{y} a} = \log_{x} y}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

مثال۴۴: واسطه حسابی دو عدد $\log_c a, \log_b a$ با مربع واسطه هندسی آنها برابر است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $۲a = b + c$ ۲) $۲b = a + c$ ۳) $a^۲ = bc$ ۴) $b^۲ = ac$

پاسخ: گزینه ۳

واسطه حسابی دو عدد **a** , **b** به صورت $\frac{a+b}{۲}$ و واسطه هندسی آن ها برابر $\sqrt{ab}$ است بنابراین:

$$\frac{\log_c a + \log_b a}{۲} = (\sqrt{\log_c a \times \log_b a})^۲ \Rightarrow \log_c a + \log_b a = ۲\log_c a \log_b a$$

$$\xrightarrow{\times \log_a c \times \log_a b} \underbrace{\log_c a \log_a c}_{۱} \log_a b + \log_a c \underbrace{\log_a b \log_b a}_{۱} = ۲ \underbrace{\log_c a \log_a c}_{۱} \underbrace{\log_b a \log_a b}_{۱}$$

$$\Rightarrow \log_a b + \log_a c = ۲ \Rightarrow \log_a bc = ۲ \Rightarrow bc = a^۲$$

مثال۴۵: اگر $\log_{12}^{x} \cdot \log_{3}^{x} \cdot 2 = \log_{12}^{x} + \log_{3}^{x}$ باشد x کدام است؟ (گزینه۲ ـ ۹۶)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲

www.riazisara.ir @ Nakhostin_Math کانال تلگرام

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول) طبق تست بالا $x^{۲}=۱۲\times ۳=۳۶\Rightarrow x=۶$

راه حل اول) طرفین تساوی را در $\log_x^{۳}.\log_x^{۱۲}$ ضرب می کنیم:

$$\log_x^{۳}.\log_x^{۱۲}\left(\log_{۳}^{x}+\log_{۱۲}^{x}\right)=۲(\log_{۳}^{x}.\log_x^{۳})(\log_{۱۲}^{x}.\log_x^{۱۲})$$

$$\Rightarrow \log_x^{۱۲}+\log_x^{۳}=۲\Rightarrow \log_x^{۳۶}=۲\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow \boxed{x=۶}$$

مثال ۱۴۶: اگر $\log_{۶} ۴ = a$ باشد حاصل $\log_{۱۲} ۱۸$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۴-a}{۲+a}$ ۲) $\dfrac{۲+a}{۱+a}$ ۳) $\dfrac{۳+a}{۱+a}$ ۴) $\dfrac{۱+a}{۴+a}$

پاسخ: گزینه ۱

روش اول)

$$\log_{۱۲} ۱۸ = \frac{\log_{۶} ۱۸}{\log_{۶} ۱۲} = \frac{\log_{۶} ۶ + \log_{۶} ۳}{\log_{۶} ۶ + \log_{۶} ۲} = \frac{۱ + \log_{۶} \frac{۶}{۲}}{۱ + \log_{۶} ۲} = \frac{۱ + ۱ - \log_{۶} ۲}{۱ + \log_{۶} ۲} = \frac{۲ - \frac{a}{۲}}{۱ + \frac{a}{۲}} = \frac{\frac{۴-a}{۲}}{\frac{a+۲}{۲}} = \frac{۴-a}{a+۲}$$

روش دوم)

$$\log_{۱۲} ۱۸ = \log_{۱۲} ۶ + \log_{۱۲} ۳ = \log_{۱۲} ۶ + \log_{۱۲} ۶ - \log_{۱۲} ۲ = \frac{۲}{\log_{۶} ۱۲} - \frac{۱}{\log_{۲} ۱۲}$$

$$= \frac{۲}{\log_{۶}^{۶} + \log_{۶} ۲} - \frac{۱}{\log_{۲} ۲ + \log_{۲} ۶} = \frac{۲}{۱ + \log_{۶} ۲} - \frac{۱}{۱ + \log_{۲} ۶} = \frac{۲}{۱ + \frac{۱}{۲}\log_{۶} ۴} - \frac{۱}{۱ + ۲\log_{۴} ۶}$$

فرض: $\log_{۶} ۴ = a \Rightarrow \dfrac{۲}{۱ + \frac{۱}{۲}a} - \dfrac{۱}{۱ + ۲\frac{۱}{a}} = \dfrac{۴}{۲+a} - \dfrac{a}{a+۲} = \dfrac{۴-a}{۲+a}$

📖 مثال۴۷: اگر $b^{\log ۲} = ۳^{\log a}$ حاصل $۹^{\log_b a}$ کدام است؟

۱) $a^۳ b^۲$ ۲) $a^۳$ ۳) $b^۲$ ۴) ۴

پاسخ: **گزینه۴**

روش اول) می دانیم $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ پس:

$$b^{\log ۲} = ۲^{\log b}$$

$$۳^{\log a} = b^{\log ۲} = ۲^{\log b} \Rightarrow ۳^{\log a} = ۲^{\log b}$$

دو طرف تساوی بالا را به توان $\frac{۱}{\log b}$ می رسانیم:

$$(۳^{\log a})^{\frac{۱}{\log b}} = (۲^{\log b})^{\frac{۱}{\log b}} \Rightarrow ۳^{\frac{\log a}{\log b}} = ۲$$

از طرفی می دانیم $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ پس:

$$\frac{\log_{۱۰} a}{\log_{۱۰} b} = \log_b a \Rightarrow ۳^{\frac{\log a}{\log b}} = ۳^{\log_b a} = ۲$$

دو طرف تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$(۳^{\log_b a})^{۲} = ۴ \Rightarrow ۹^{\log_b a} = ۴$$

روش دوم) [حل از مهدی بزرگی ـ تیزهوشان لنگرود ۹۷ـ ۹۶]

$$۳^{\log a} = b^{\log ۲} \Rightarrow ۳^{\log a} = ۲^{\log b} \rightarrow$$ از طرفین تساوی **log** می‌گیریم.

$$\Rightarrow \log a . \log ۳ = \log b . \log ۲ \Rightarrow \frac{\log a}{\log b} = \frac{\log ۲}{\log ۳} \Rightarrow \log_b^a = \log_۳^۲$$

$$\Rightarrow ۹^{\log_b^a} = (۳^۲)^{\log_b^a} = (۳^{\log_b^a})^۲ = (۳^{\log_۳^۲})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

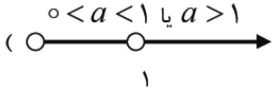
اگه با حاصلضرب دو یا چند عبارت لگاریتمی مواجه شدید می تونید ورودی لگاریتم ها رو به دلخواه جابه جا کنید. در ضمن این عمل رو می تونین برای مبنای لگاریتم ها هم انجام بدید. مثلاً:

فامیل

$$\boxed{\log_b^a \times \log_d^c \times \log_f^c = \log_d^e \times \log_b^c \times \log_f^a}$$

مثال: $\log_{۹}^{۲} \times \log_{۸}^{۲۵} \times \log_{۵}^{۳} = \log_{۹}^{۳} \times \log_{۵}^{۲۵} \times \log_{۸}^{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$

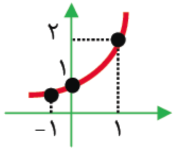
تابع نمایی ($y=a^x$)

به تابع $y=a^x$ با یکی از دو شرط $a>۱$ یا $۰<a<۱$ تابع نمایی می گیم. (محدوده a : 

)

شما می تونید به کمک نقطه یابی تابع نمایی رو با هر کدوم از دو شرطی که بهتون میدن رسم کنید. مثل دو نمونه زیر:

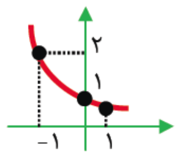
$a>۱$ مثال : $y=۲^x$



x	$y=۲^x$
$x\to-\infty$	$y\to ۰^+$
-۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۱
۱	۲
$+\infty$	$+\infty$

$\longrightarrow ۲^{-\infty}=\frac{۱}{۲^{+\infty}}=۰^+$

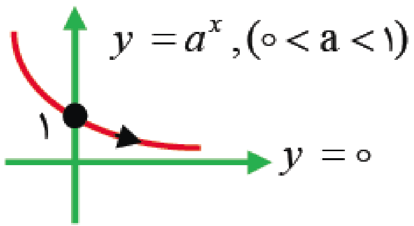
$۰<a<۱$ مثال : $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$

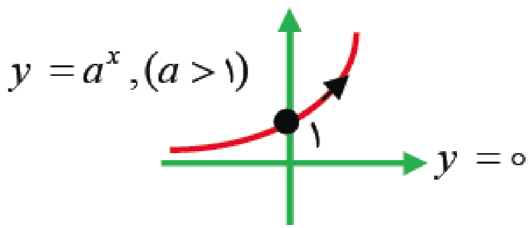


x	$y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x=۲^{-x}$
$x\to-\infty$	$y\to+\infty$
-۱	۲
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۲}$
$x\to+\infty$	$y\to ۰^+$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام



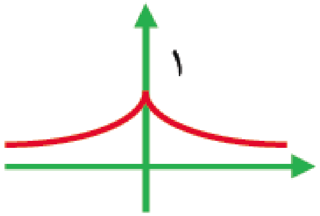


www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math

کانال تلگرام

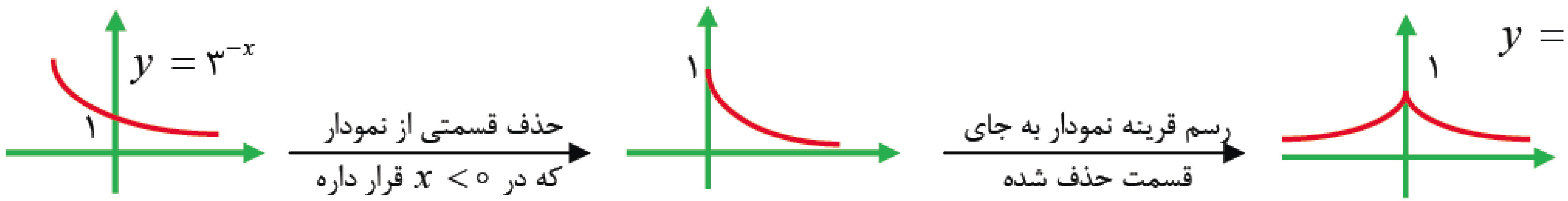
مثال۴۸: نمودار شکل مقابل معرف کدام تابع است؟



۱) $y=۳^{-|x|}$ ۲) $y=|۳^{x}|$

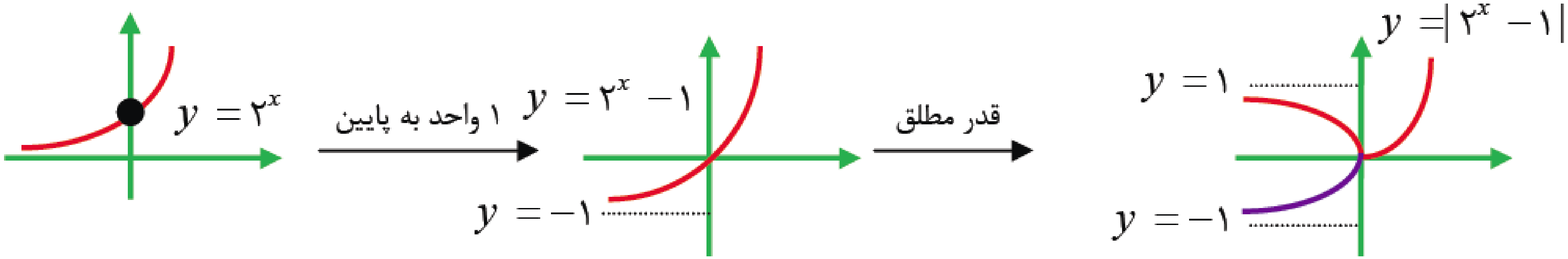
۳) $y=۳^{|x|}$ ۴) $y=|۳^{-x}|$

تابع $y=۳^{-|x|}$ همون $y=f(|x|)$ هست. پس برای رسم به روش زیر عمل می کنیم:



مثال۴۹: نمودار تابع $y=|2^x-1|$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $\mathbf{R}$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $[-1,1]$



📖 مثال۵۰: نمودار $f(x)=\log_{\sqrt{۲}} x$ نمودار وارون f را در چند نقطه قطع می کند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) بی شمار

☜ پاسخ: **گزینه۲**

روش اول) نقاط برخورد نمودار تابع اکیداً صعودی $y=f(x)$ با وارون f ، همان نقاط برخورد تابع با نمودار $y=x$ است.

پس:

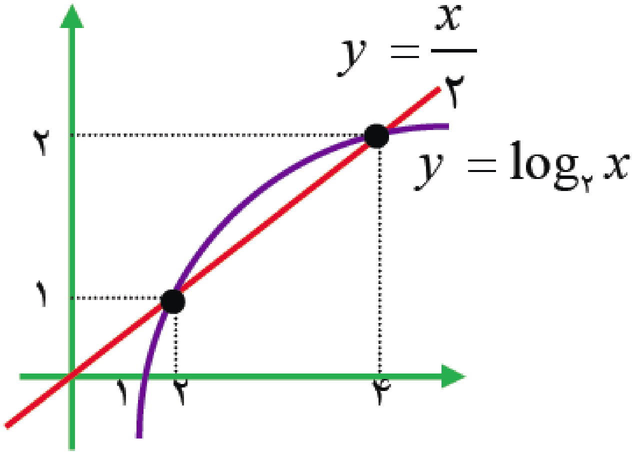
$$f(x)=x \Rightarrow x=\log_{\sqrt{۲}} x \Rightarrow \frac{۱}{x}=\log_x \sqrt{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x^{\frac{۱}{x}}=\sqrt{۲} \Rightarrow x^{\frac{۱}{x}}=۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x=۲ \\ ۴^{\frac{۱}{۴}}=۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دو جواب دارد}$$

پس نمودار موردنظر نمودار وارون خود را در دو نقطه قطع می کند.

روش دوم) راه ترسیمی:

$$x = \log_{\sqrt{۲}} x = ۲\log_{۲} x \Rightarrow \frac{x}{۲} = \log_{۲} x$$

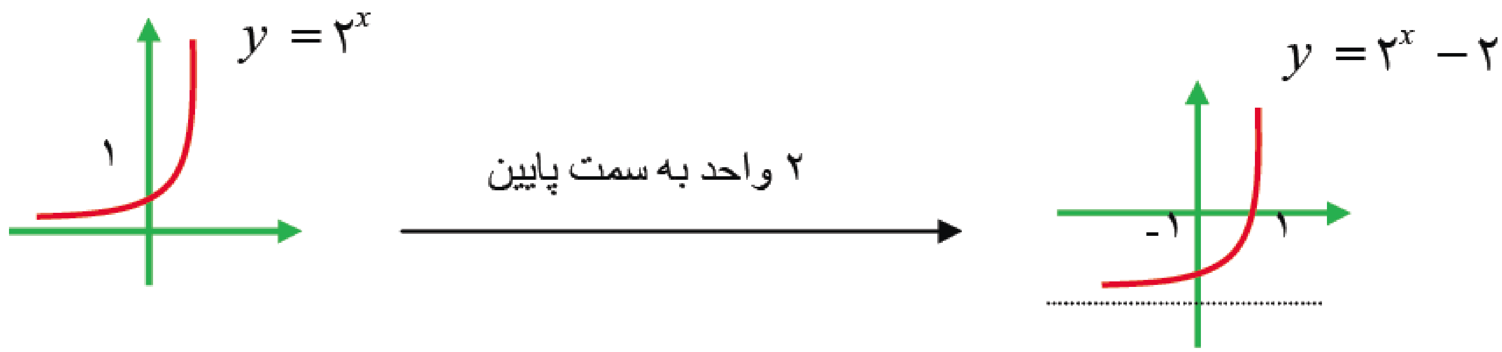


مثال۵۱: نمودار معکوس تابع $y = ۲^x - ۲$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه۴

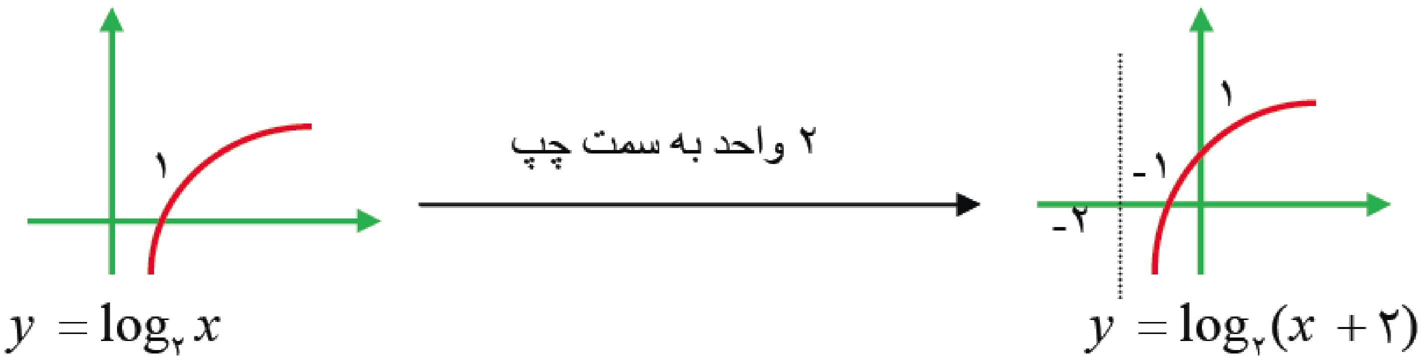
راه اول) نمودار تابع $f(x) = ۲^x - ۲$ را رسم می کنیم:



با توجه به نمودار تابع **f** از ناحیه ۲ عبور نمی کند پس نمودار تابع f^{-1} از ناحیه ۴ عبور نمی کند. زیرا زمانی که در تابع **f** هیچ نقطه ای با طول منفی و عرض مثبت وجود ندارد پس در f^{-1} نیز هیچ نقطه ای با عرض منفی و طول مثبت وجود ندارد.

راه دوم) تابع معکوس $y=2^x-2$ را به دست می آوریم و آن را رسم می کنیم:

$$y=2^x-2 \Rightarrow 2^x=y+2 \Rightarrow x=\log_2(y+2) \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2(x+2)$$



پس f^{-1} از ناحیه ۴ نمی گذرد.

مثال ۵۲: جواب معادله $۴^{x} = ۵^{۲-x}$ کدام است؟

۱) $\log_{۲۰} ۵$ ۲) $\log_{۵} ۲۰$ ۳) $۲\log_{۲۰} ۵$ ۴) $۲\log_{۵} ۲۰$

پاسخ: **گزینه ۳**

$$۴^{x} = ۵^{۲-x} \Rightarrow ۴^{x} = \frac{۵^{۲}}{۵^{x}} \Rightarrow ۴^{x} \times ۵^{x} = ۲۵ \Rightarrow ۲۰^{x} = ۲۵ \Rightarrow \log_{۲۰} ۲۰^{x} = \log_{۲۰} ۲۵$$

$$\Rightarrow x \underbrace{\log_{۲۰} ۲۰}_{۱} = \log_{۲۰} ۵^{۲} \Rightarrow x = ۲\log_{۲۰} ۵$$

مثال۵۳: معادله $4^x - 2^x = 6$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ | ۲) ۲ | ۳) ۳ | ۴) صفر

☜پاسخ: **گزینه۱**

راه اول) اگر فرض کنیم $t=۲^x$ داریم $۴^x=۲^{۲x}=t^۲$ در نتیجه:

$$۴^x-۲^x=۶\Rightarrow t^۲-t=۶\Rightarrow t^۲-t-۶=۰$$

$$(t-۳)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۳\\t=-۲\end{cases}$$

می دانیم $t=۲^x$. از طرفی تابع $y=۲^x$ یک تابع نمایی است که برد آن اعداد مثبت است، پس **t** نمی تواند منفی باشد. در نتیجه **t** برابر ۳ است:

$$t=۳\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲ ۳$$

پس تنها جواب معادله فوق $\log_۲ ۳$ است.

مثال۵۴: در تابع $f(x)=ab^{x}; b>۰$ با ضابطه داریم $f(۰)=\frac{۳}{۲}, f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۶   ۲) ۲۴   ۳) ۱۲   ۴) ۸

☜پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=ab^x,\begin{cases}f(0)=ab^0=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}\\ f(-2)=ab^{-2}=\dfrac{3}{32}\Rightarrow \dfrac{a}{b^2}=\dfrac{3}{32}\Rightarrow 3b^2=32a\end{cases}\xrightarrow{a=\frac{3}{2}}3b^2=3\times16\Rightarrow b^2=16$$

$$\xrightarrow{b>0}b=4\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\times4^x\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\times4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\sqrt{4^3}=\frac{3}{2}\times8=12$$

مثال۵۵: اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-۱$ از دو نقطه $A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right), B(۱,۱۱)$ بگذرد $f(-۱)$ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=ab^{x}-۱$$

$$f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ab^{-\frac{۱}{۲}}-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \sqrt{b}=\frac{۲}{۳}a$$

$$f(۱)=۱۱\Rightarrow ab-۱=۱۱\Rightarrow ab=۱۲\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{b}=\frac{۲}{۳}a\\ ab=۱۲\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}b=\frac{۴}{۹}a^{۲}\\ ab=۱۲\end{cases}\Rightarrow a\times\left(\frac{۴}{۹}a^{۲}\right)=۱۲\Rightarrow a^{۳}=۲۷$$

$$\Rightarrow a=۳\Rightarrow b=۴\Rightarrow f(x)=۳\times ۴^{x}-۱$$

$$f(-۱)=۳\times ۴^{-۱}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

مثال۵۶: هرگاه $f(x)=a.b^x-۱$ به طوری که $A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right), B(۱,۱۱)$ دو نقطه از نمودار باشند ضابطه $f^{-۱}(۳x-۱)$ کدام است؟

۱) $\log_۴ ۳x$ ۲) $\log_۴ x$ ۳) $\log_۳ ۴x$ ۴) $\log_۳ x$

☜**پاسخ: گزینه ۲**

از تقسیم دو رابطه فوق داریم:

$$f(x) = a \times b^{x} - ۱$$

$$A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \in f \Rightarrow f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a \times b^{-\frac{۱}{۲}} - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ab^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲}$$

$$B(۱,۱۱) \in f \Rightarrow f(۱) = ۱۱ \Rightarrow a \times b^{۱} - ۱ = ۱۱ \Rightarrow ab = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} ab^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲} \\ ab = ۱۲ \end{cases}$$

اگر $b = ۴$ باشد با توجه به رابطه $a, ab = ۱۲$ برابر ۳ خواهد بود. در نتیجه: $f(x) = ۳ \times ۴^{x} - ۱$

حال تابع معکوس **f** را به دست می آوریم:

$$y = ۳ \times ۴^{x} - ۱ \Rightarrow ۴^{x} = \frac{y+۱}{۳} \Rightarrow x = \log_{۴}\frac{y+۱}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_{۴}\left(\frac{x+۱}{۳}\right)$$

در نتیجه داریم: $f^{-۱}(۳x-۱) = \log_{۴}\left(\frac{۳x-۱+۱}{۳}\right) = \log_{۴} x$

مثال۵۷: از دو معادله $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲$ مقدار y کدام است؟

(سراسری ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنید $t=۲^x$ پس $۴^x=t^۲$ است و داریم:

$$۴^x+۲^x=۷۲\Rightarrow t^۲+t=۷۲\Rightarrow t^۲+t-۷۲=۰\Rightarrow (t+۹)(t-۸)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=-۹ \\ t=۸ \end{cases}$$

از آن جا که $t=۲^x>۰$ است، **t** نمی‌تواند منفی باشد پس $t=۸$ است و در نتیجه: $۲^x=۸\Rightarrow x=۳$

اگر $x=۳$ باشد داریم:

$$\log(x+۱)+\log(۲y+x^۲)=۲\xrightarrow{x=۳}\log ۴+\log(۲y+۹)=۲\Rightarrow \log(۸y+۳۶)=۲$$

$$\Rightarrow ۸y+۳۶=۱۰^۲\Rightarrow ۸y=۶۴\Rightarrow y=۸$$

☜پاسخ: **گزینه۳**

$$\begin{cases}(۱)\ ۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times ۲^{۲x+۲y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷+۲x+۲y}=۱\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷}=۱\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰\\(۲)\ \log y=۲\log ۳+\log x\Rightarrow \log y=\log ۳^{۲}+\log x\Rightarrow \log y=\log ۹x\Rightarrow y=۹x\end{cases}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۳x+۲y=۷\\y=۹x\end{cases}\xrightarrow{y=۹x}۳x+۲(۹x)=۷\Rightarrow ۲۱x=۷$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{y=۹x}y=۳$$

مثال۵۹: اگر $f(x)=a\times b^{x-۱}$ به طوری که $f(۱)=۴$ ، $f^{-۱}(۱۲)=۲$ نقطه تلاقی f با محورهای مختصات کدام است؟

۱) $A\left(۰,\frac{۴}{۳}\right)$

۲) $A\left(\frac{۴}{۳},۰\right)$

۳) $A\left(\frac{۳}{۴},۰\right)$

۴) f محورهای مختصات را قطع نمی کند.

☜پاسخ: **گزینه۱**

$$f(x) = a \times b^{x-1}$$

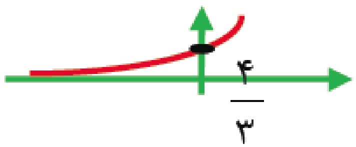
$$f(1) = 4 \Rightarrow a \times b^{1-1} = 4 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی زمانی که $f^{-1}(12) = 2$ است داریم $f(2) = 12$ پس:

$$f(2) = 4 \times b^{2-1} = 12 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 4 \times 3^{x-1}$$

$$\Rightarrow f(0) = 4 \times 3^{-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{4}{3}\right) \in f \Rightarrow$$ محل برخورد با محور **y** ها

تذکر: هر تابع به صورت $f(x) = ab^{cx} + d$ با محور **x** ها برخورد ندارد.



$y = 4 \times 3^{x-1}$

مثال۶۱: مجموعه جواب معادله $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{[x]} = ۴^{۱-[x]}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است)

۱) $[-۲,-۱)$ ۲) $(-۲,-۱]$ ۳) $[۱,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

پاسخ: گزینه۱

روش اول)

$$\left(\frac{۱}{۸}\right)^{|x|} = ۴^{۱-[x]} \Rightarrow (۲^{-۳})^{[x]} \Rightarrow (۲^{-۳})^{[x]} = (۲^{۲})^{۱-[x]} \Rightarrow ۲^{-۳[x]} = ۲^{۲-۲[x]}$$

چون پایه ها مساوی اند باید توان ها مساوی باشند بنابراین:

$$-۳[x] = ۲ - ۲[x] \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۱$$

نتیجه آخر با توجه به تعریف جزء صحیح به دست آمده است.

مثال۶۲: اگر $۲^{-x} = ۴۰$ آنگاه $[x]$ کدام است؟ ($[\ ]$: جزء صحیح)

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۷

پاسخ: گزینه ۱

$$۲^{-x} = ۴۰ \Rightarrow ۳۲ < ۲^{-x} < ۶۴ \Rightarrow ۲^{۵} < ۲^{-x} < ۲^{۶} \Rightarrow ۵ < -x < ۶$$

$$\Rightarrow -۶ < x < -۵ \Rightarrow [x] = -۶$$

📖 **مثال۶۳:** جواب معادله $۲^{۱-۲x} = ۳^{x}$ عدد $x = \log_b^{۲}$ است. مقدار b کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۹   ۳) ۱۲   ۴) ۲۷

پاسخ: <u>گزینه ۳</u>

راه حل اول) از طرفیت تساوی $۲^{۱-۲x} = ۳^{x}$ در پایه دو لگاریتم می گیریم داریم:

$$\log_{۲}^{(۲^{۱-۲x})} = \log_{۲}^{۳^{x}} \Rightarrow ۱-۲x = x\log_{۲}^{۳} \Rightarrow ۱ = x(۲+\log_{۲}^{۳}) \Rightarrow ۱ = x(\log_{۲}^{۲^{۲}}+\log_{۲}^{۳})$$

$$\Rightarrow ۱ = x\log_{۲}^{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{\log_{۲}^{۱۲}} = \log_{۲}^{۱۲} \Rightarrow b = ۱۲$$

راه حل دوم)

$$۲^{۱-۲x} = ۳^{x} \Rightarrow \frac{۲}{۲^{۲x}} = ۳^{x} \Rightarrow \frac{۲}{۴^{x}} = ۳^{x} \Rightarrow ۲ = (۴^{x})(۳^{x}) \Rightarrow ۲ = ۱۲^{x}$$

$$\Rightarrow \log_{۱۲}^{۲} = x \Rightarrow b = ۱۲$$

مثال۶۵: اگر $f(x)=a-2^{b-x}$ به طوری که $f(1)=1$ و $f(-1)=-5$ مقدار $f^{-1}\left(\frac{11}{4}\right)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه۱

$$f(x)=a-2^{b-x}$$

$$\begin{cases} f(1)=1\Rightarrow a-2^{b-1}=1 \\ f(-1)=-5\Rightarrow a-2^{b+1}=-5 \end{cases}$$

از تفاضل دو معادله بالا داریم:

$$-2^{b-1}+2^{b+1}=6\Rightarrow 2^{b-1}(-1+4)=6\Rightarrow 2^{b-1}\times 3=6\Rightarrow 2^{b-1}=2\Rightarrow b=2$$

$$a-2^{b-1}=1\xrightarrow{b=2}a-2=1\Rightarrow a=3\Rightarrow f(x)=3-2^{2-x}$$

اگر $f^{-1}\left(\frac{11}{4}\right)=t$ باشد پس $f(t)=\frac{11}{4}$ پس:

$$3-2^{2-t}=\frac{11}{4}\Rightarrow -2^{2-t}=\frac{11}{4}-3\Rightarrow -2^{2-t}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 2^{2-t}=2^{-2}\Rightarrow t=4$$

پس $f^{-1}\left(\frac{11}{4}\right)=4$ است.

📖 **مثال۶۶:** معکوس تابع $f(x)=1-\log_3 x$ محور y ها را در نقطهٔ A و نمودار تابع $g(x)=2^{x-1}-4$ محور x ها را در نقطه B قطع می کند. طول پاره خط AB چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه۴

اگر تابع f^{-1} محور y ها را در نقطه ای با مختصات $(\alpha,0)$ قطع کند پس تابع f محور x ها را درنقطه ای با مختصات $(\alpha,0)$ قطع می کند.

$$f(\alpha)=0\Rightarrow f(\alpha)=1-\log_3\alpha=0\Rightarrow\log_3\alpha=1\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow(3,0)\in f$$

پس f^{-1} محور y را به عرض ۳ قطع می کند: $A(0,3)\in f^{-1}$

تابع g محور x ها را زمانی قطع می کند که $g(x)=0$ باشد:

$$g(x)=0\Rightarrow 2^{x-2}-4=0\Rightarrow 2^{x-2}=4\Rightarrow 2^{x-2}=2^2\Rightarrow x=4$$

پس $B(4,0),A(0,3)$ است درنتیجه طول AB برابر است با: $AB=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$

تذکر: فاصله دو نقطه $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ برابر است با: $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

مثال۶۷: نمودارهای دو تابع $y=۳^{x}+\frac{۸}{۳}$ و $y=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}$ در نقطهٔ a متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

نقطه تلاقی دو تابع نقطه ای است که در آن دو منحنی دارای طول و عرض برابرند در نتیجه:

$$\begin{cases} y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \\ y=3^x+\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}=3^x+\dfrac{8}{3} \Rightarrow \left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}\right)^{x}=3^x+\dfrac{8}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=3^x+\dfrac{8}{3}$$

با توجه به تساوی فوق می توان حدس زد $x=-1$ است. اما فرض کنیم $3^x=t$ است، می توانیم مطابق زیر معادله را حل کنیم:

$$3^x=t \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=\dfrac{1}{t} \Rightarrow \dfrac{1}{t}=t+\dfrac{8}{3} \xrightarrow{\times 3t} 3t^2+8t-3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-3 \Rightarrow 3^x=-3 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \\ t=\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

www.riazisara.ir

کانال تلگرام @ Nakhostin_Math

اگر $x = -۱$ باشد داریم:

$$y(-۱) = ۳^{-۱} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۸}{۳} = ۳$$

پس محل تلاقی دو منحنی $(-۱,۳)$ است که فاصله آن از نقطه $(-۱,۱)$ برابر با ۲ است. (چون طول نقاط برابر است پس فاصله آنها همان فاصلهٔ عرض آنهاست.)

$$\left.\begin{matrix}(-۱,۳)\\(-۱,۱)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{فاصله} = ۳ - ۱ = ۲$$

مثال۶۸: فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادله $y=۲^x$ و $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$ از نقطه $A(۰,۴)$ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☜پاسخ: **گزینه ۴**

در محل تلاقی دو تابع عرض و طول دو منحنی یکسان است:

$$\begin{cases} y=۲^{x} \\ y=\sqrt{۲}^{x+۱}+۴ \end{cases} \Rightarrow ۲^{x}=\sqrt{۲}^{x+۱}+۴ \Rightarrow (\sqrt{۲})^{x+۱}=t \Rightarrow ۲^{x+۱}=t^{۲} \Rightarrow ۲^{x}=\frac{t^{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{t^{۲}}{۲}=t+۴ \Rightarrow t^{۲}-۲t-۸=۰ \Rightarrow (t-۴)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۴ & \checkmark \\ t=-۲ & \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲^{x+۱}=t^{۲}=۱۶=۲^{۴} \Rightarrow x=۳ \Rightarrow (۳,۸)$$

می دانیم فاصله دو نقطه با مختصات $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)$ برابر $\sqrt{(x_۱-x_۲)^{۲}+(y_۱-y_۲)^{۲}}$ است پس:

$$\left.\begin{matrix} (۳,۸) \\ (۰,۴) \end{matrix}\right\} \longrightarrow d=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۸-۴)^{۲}}=۵$$

مثال۶۹: اگر $x^{-1+\log_{2} x}=4$ حاصل ضرب ریشه های آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

☜ پاسخ: **گزینه ۱**

روش اول) اگر فرض کنیم $t=\log_۲ x$ داریم $x=۲^t$ پس:

$$x^{-۱+\log_۲^x}=۴\Rightarrow (۲^t)^{-۱+t}=۴\Rightarrow ۲^{t^۲-t}=۲^۲$$

$$\Rightarrow t^۲-t=۲\Rightarrow t^۲-t-۲=۰$$

$$(t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=-۱ \end{cases}$$

چون $x=۲^t$ است داریم:

$$\left.\begin{array}{l} t=۲\Rightarrow x_۱=۲^۲=۴ \\ t=-۱\Rightarrow x_۲=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\}\Rightarrow x_۱\times x_۲=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$$

روش دوم) [حل از علیرضا شعبانی ـ تیزهوشان لنگرود ، ۹۷ـ ۹۶]

$$x^{-۱+\log_{۲}^{x}}=۴\Rightarrow \text{از طرفین در مبنای ۲ } \mathbf{log} \text{ می‌گیریم} \rightarrow \log_{۲}^{x^{(-۱+\log_{۲}^{x})}}=\log_{۲}^{۴}=۲$$

$$(-۱+\log_{۲}^{x}).\log_{۲}^{x}=۲\Rightarrow -\log_{۲}^{x}+(\log_{۲}^{x})^{۲}=۲\Rightarrow (\log_{۲}^{x})^{۲}-\log_{۲}^{x}-۲=۰$$

$$\Rightarrow (\log_{۲}^{x}-۲)(\log_{۲}^{x}+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\log_{۲}^{x}=۲\Rightarrow x=۲^{۲}=۴\\ \log_{۲}^{x}=-۱\Rightarrow x=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}\end{cases} \text{حاصل ضرب ریشه ها} \rightarrow ۴\times\frac{۱}{۲}=۲$$

مثال۷۰: اگر $f(x)=\dfrac{۴^x}{۴^x+۲}$ حاصل $f\left(\dfrac{۱}{۱۰۰}\right)+f\left(\dfrac{۲}{۱۰۰}\right)+\dots+f\left(\dfrac{۹۹}{۱۰۰}\right)$ کدام است؟

۱) ۴۹   ۲) ۴۹/۵   ۳) ۵۰   ۴) ۵۰/۵

پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا با فرض $a+b=1$ نشان می دهیم $f(a)+f(b)=1$ پس:

$$a+b=1 \Rightarrow b=1-a \Rightarrow f(a)+f(b)=f(a)+f(1-a)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+2}$$

در کسر دوم صورت و مخرج را در 4^a ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4}{4+2\times 4^a}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{2}{2+4^a}=\frac{2+4^a}{2+4^a}=1$$

به این ترتیب با انتخاب مناسب در حکم داریم:

$$\underbrace{f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)}_{1}+\underbrace{f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)}_{1}+\dots+\underbrace{f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)}_{1}+\underbrace{f\left(\frac{50}{100}\right)}_{\frac{1}{2}}$$

جواب نهایی $=49\times 1+\frac{1}{2}=49/5$

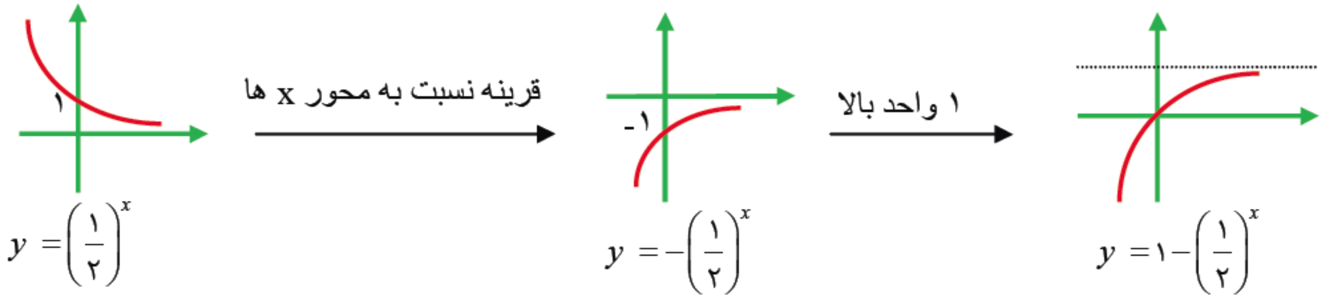
📖 مثال۷۱: اگر $f(x) = ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ باشد دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است

(سراسری ۹۳)

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty, ۰)$ ۳) $(-\infty, +\infty)$ ۴) $(۰, +\infty)$

☜ پاسخ: گزینه ۳

روش اول) به ازای $x \geq ۰$ تابع $f(x)=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ بزرگتر یا مساوی صفر و به ازای $x<۰$ کوچکتر از صفر است این مطلب از روی نمودار این تابع قابل برداشت است.



در تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq ۰$ باشد. به کمک جدول تعیین علامت زیر داریم:
پس به ازای هر x، $xf(x)\geq ۰$ است در نتیجه دامنه این تابع $\mathbf{R}$ است.

		۰	
x	−	۰	+
$f(x)$	−	۰	+
$xf(x)$	+	۰	+

www.riazisara.ir
@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

روش دوم)

$$xf(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow x \geq 0 \quad (1) \\ x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow x \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cup(2)} x \in R$$

مثال۷۱: اگر $f(x) = ۲^x$ باشد دامنه تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{۱}{x}\right) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $R - (-۱,۱)$ ۲) $[-۱,۰) \cup (۰,۱]$ ۳) $[-۱,۰) \cup [۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱] \cup (۰,۱]$

پاسخ: گزینه۴

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)\geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)\geq f(x)$$

با توجه به آنکه $f(x)=2^x$ است داریم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\geq 2^x$$

از طرفی می دانیم اگر $a>1, a^x>a^y$ داریم $x>y$ پس:

$$2^{\frac{1}{x}}\geq 2^x \Rightarrow \frac{1}{x}\geq x \Rightarrow \frac{1}{x}-x\geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x}\geq 0$$

عبارت $p(x)=\frac{1-x^2}{x}$ را به کمک جدول تعیین علامت تعیین علامت می‌کنیم و سپس مجموعه جواب $p(x)\ge 0$ را به دست می‌آوریم:

		-1		0		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

	-1		0		1	
$+$		$-$	ت.ن	$+$		$-$

$$P(x)\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup(0,1]$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

📖 **مثال۷۳:** فاصلهٔ نقطه برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲   ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: **گزینه ۲**

یادآوری: اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$.

برای یافتن محل برخورد تابع $y=2^x$ با محور **y** ها به جای **x** در ضابطه تابع صفر قرار می دهیم:

$$y=2^x \xrightarrow{x=0} y(0)=2^0=1$$

چون $A(0,1)\in y$ پس $B(1,0)\in y^{-1}$ می باشد که روی محور **x** ها قرار دارد. بنابراین کافی است فاصله دو نقطه **A** , **B** را بیابیم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

📖 مثال۷۵: اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-۱$ از دو نقطه $A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$, $B(۱,۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: **گزینه ۳**

$$f(x)=a(b)^x-۱\xrightarrow{B(۱,۱۱)}۱۱=ab-۱\Rightarrow ab=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱۲}{a}\quad (I)$$

$$f(x)=a(b)^x-۱\xrightarrow{A\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)}\frac{۱}{۲}=a(b)^{-\frac{۱}{۲}}-۱\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}}\xrightarrow{(I)}b=۴\Rightarrow a=۳$$

$$f(x)=۳(۴)^x-۱\Rightarrow f(-۱)=۳(۴)^{-۱}=\frac{۳}{۴}-۱=\frac{-۱}{۴}$$

تابع لگاریم ($y=\log_a^x$):

می خواید بدونید معکوس تابع نمایی چی میشه؟ برای رسیدن به این هدف کافیه جای x و y رو عوض کنید. یعنی:

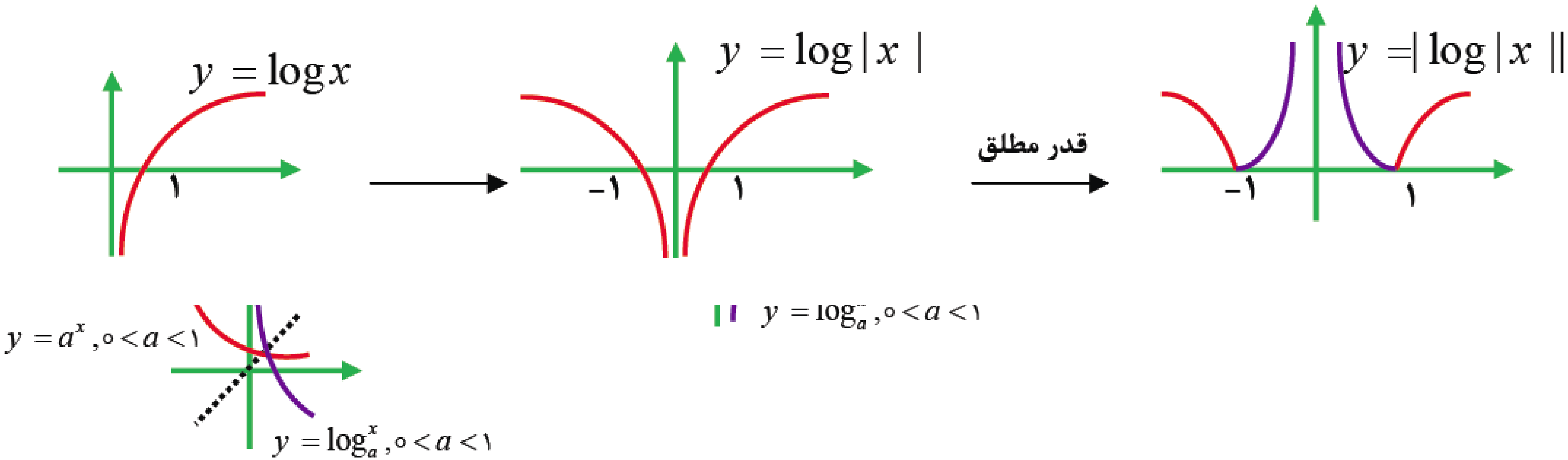
- آیا ضابطه این تابع معکوس شده (یعنی $x=a^y$) به دلتون می چسبه؟ $\underbrace{y=a^x}_{f} \Rightarrow \underbrace{x=a^y}_{f^{-1}}$
- به نظر شما برای اینکه y رو تنها و برحسب x بنویسم چی کار کنیم؟

کافیه اونو به صورت لگاریتمی بنویسیم.

$$\underbrace{\boxed{y=a^x}}_{f} \longrightarrow x=a^y \longrightarrow \underbrace{\boxed{\log_a^x=y}}_{f^{-1}}$$

از اونجایی که تابع $y=\log_a^x$ معکوس تابع $y=a^x$ هست. برای رسم نمودار تابع $y=\log_a^x$ کافیه نمودار تابع $y=a^x$ رو نسبت به خط $y=x$ قرینه کنید. یعنی:

مثال۷۶: نمودار تابع $y=|\log^{|x|}|$ را رسم کنید؟

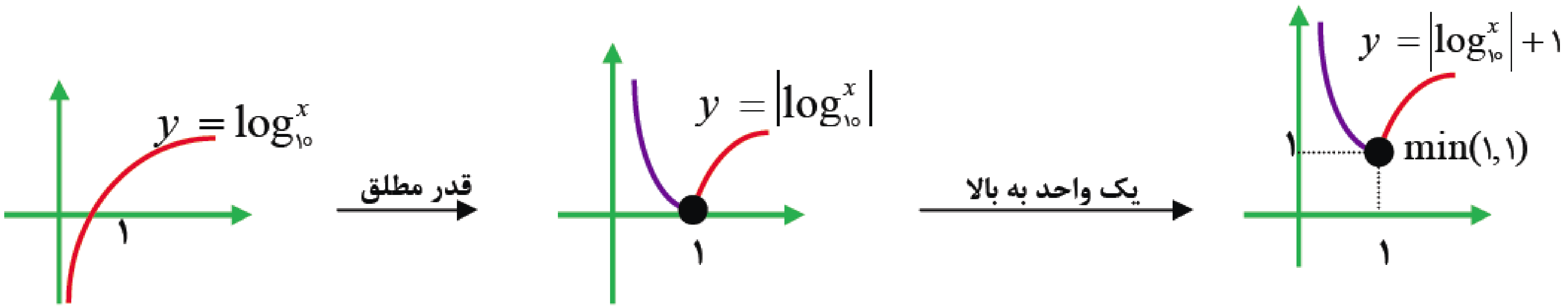


www.riazisara.ir

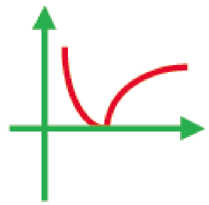
@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

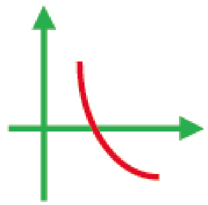
مثال ۷۷: نقطه min تابع $f(x)=|\log x|+1$ کدام است؟

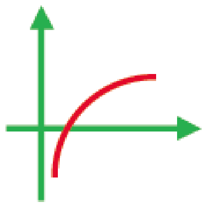
۱) $(0,1)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) min ندارد.

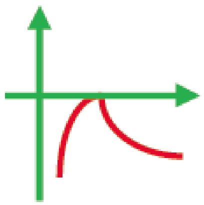


📖 مثال۷۸: نمودار تابع $f(x)=\log|x|-\log\sqrt{x}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

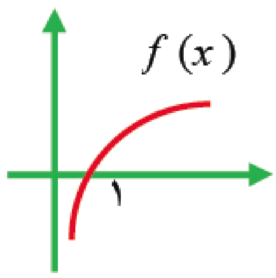
☜ پاسخ: <u>**گزینه ۳**</u>

$$\begin{cases} |x|>0 \Rightarrow x\neq 0 & \text{(۱)} \\ \sqrt{x}: x>0 \Rightarrow x>0 & \text{(۲)} \end{cases} \xrightarrow{\text{(۱)}\cap\text{(۲)}} x>0$$

دامنه آن به صورت $x > ۰$ می باشد بنابراین $|\mathbf{x}|$ برابر $\mathbf{x}$ خواهد بود لذا:

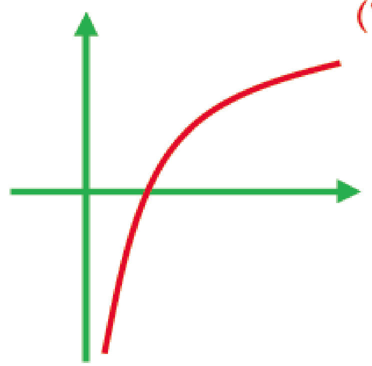
$$f(\mathrm{x}) = \log|\mathrm{x}| - \log\sqrt{x} = \log x - \log\sqrt{x}$$

$$= \log\frac{x}{\sqrt{x}} = \log\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}\log x$$

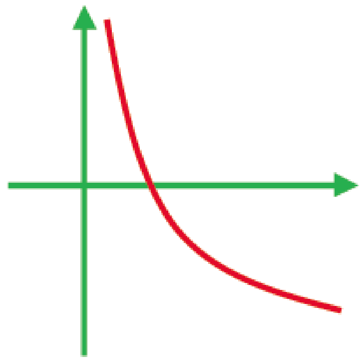


مثال۷۹: نمودار تابع $y=\log\sqrt{x}+2\log\frac{1}{x}$ شبیه کدام است؟

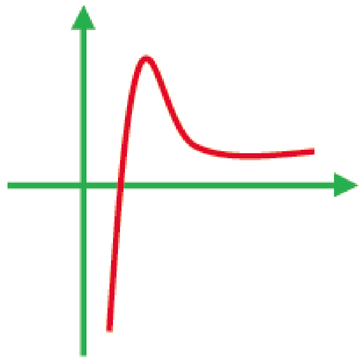
۱)



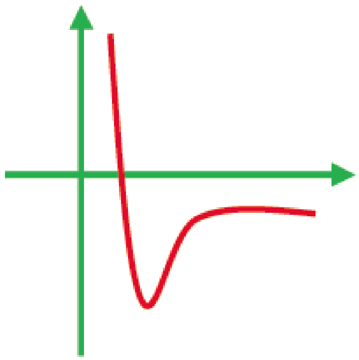
۲)



۳)



۴)



☜پاسخ: **گزینه۲**

می دانیم: $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a \,(a,b>0, b\neq 1)$ در نتیجه:

$$\begin{cases} \log\sqrt{x} = \log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log x \\ \log\frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log x \end{cases}$$

پس: $y = \log\sqrt{x} + 2\log\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\log x - 2\log x = -\frac{3}{2}\log x$

حال تابع $y = -\frac{3}{2}\log x$ را رسم می کنیم:

$y = \log x$ $\qquad$ $y = -\frac{3}{2}\log x$

📖 مثال۸۰: نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ نسبت به هم چگونه اند؟

(سراسری ۹۱)

۱) $f(x)$ بالاتر

۲) $g(x)$ بالاتر

۳) منطبق اند

۴) فقط در یک نقطه متقاطع اند

پاسخ: **گزینه ۳**

با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$ داریم:

$$f(x) = \log_{۲}\frac{۱}{x} = \log_{۲} x^{-۱} = -\log_{۲} x$$

$$g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}} x = \log_{۲^{-۱}} = -\log_{۲} x$$

از آن جا که دامنه تابع پس از ساده کردن عوض نشده است پس توابع **f , g** با هم برابرند و در نتیجه نمودار آنها بر هم منطبق اند.

$$\boxed{y = \log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow D = \{x \mid f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1}$$

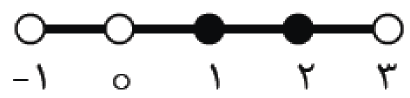
www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

مثال۸۱: دامنه تابع $f(x)=\log_{(x+1)}^{(9-x^2)}$ شامل چند عدد صحیح می باشد؟

۱) یک ۲) سه ۳) دو ۴) صفر

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow \boxed{-3<x<3} & (1) \\ x+1>0 \Rightarrow \boxed{x>-1} & (2) \\ x+1\neq 1 \Rightarrow \boxed{x\neq 0} & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)}$$



دو عدد صحیح

$$\boxed{\log_a \square = \log_a \bigcirc \Rightarrow \square = \bigcirc}$$

www.riazisara.ir @ Nakhostin_Math کانال تلگرام

معادله غیرلگاریتمی

$$\boxed{\log(x-۲)+\log(x-۴)=۲\log ۲} \Rightarrow \cancel{\log_{۱۰}}(x-۲)(x-۴)=\cancel{\log_{۱۰}} ۲^{۲} \Rightarrow \boxed{(x-۲)(x-۴)=۴}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۶x+۸=۴ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۳۶-۱۶=۲۰} x=\frac{۶\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{۶\pm ۲\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=۳+\sqrt{۵} \\ x=۳-\sqrt{۵} \end{array}}$$

جواب معادله غیرلگاریتمی

مرحله۲) اگه جواب دست اومده در دامنه معادله اولیه (معادله لگاریتمی) قرار داشته باشد پس جواب نهایی هم هست و در غیر این صورت خیر.

معادله اولیه

$$\boxed{\log(x-۲)+\log(x-۴)=۲\log ۲} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} \begin{cases} x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \\ x-۴>۰ \Rightarrow x>۴ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \boxed{x>۴}$$ دامنه معادله اولیه

$x=۳+\sqrt{۵}\in$ دامنه و $x=۳-\sqrt{۵}\notin$ دامنه $\Rightarrow$ جواب نهایی معادله است $x=۳+\sqrt{۵}$

یک معادله لگاریتمی رو میشه تو دو مرحله حل کرد:

۱. معادله لگاریتمی رو (به کمک روابط log) به یک معادله غیرلگاریتمی تبدیل کنید و جوابش رو بدست بیارید.
۲. اگه مقدار بدست اومده در دامنه معادله اولیه قرار داشته باشه، جواب قابل قبوله و در غیر این صورت خیر. (البته میتونید به جای تعیین دامنه، جواب های بدست اومده رو توی معادله لگاریتمی قرار بدید تا ببینید که صدق می کنه یا نه.)

مثال۸۲: از معادله $\log_x^{۳} + \log_x^{(۲x+۹)} = ۲$ مقدار $\log_۹^{x}$ را بدست آورید

$$\xrightarrow{(۱)} \log_x^{۳} + \log_x^{(۲x+۹)} = ۲ \Rightarrow \log_x^{۳(۲x+۹)} = ۲ \longrightarrow ۶x + ۲۷ = x^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۶x - ۲۷ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۹ \\ x = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \qquad \log_۹^{x} \underline{\underline{x=۹}} \log_۹^{۹} = ۱$$

📖 مثال۸۳: اگر ۱۵ واحد به عدد A اضافه شود به لگاریتم آن در مبنای ۴ یک واحد اضافه می شود، A چقدر است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۵

معنی جمله بالا اینه که ($\log_۴^{A+۱۵}$ از $\log_۴^{A}$ یک واحد بیشتره) یعنی:

$$\log_۴^{(A+۱۵)} = \log_۴^{A} + ۱ \Rightarrow \log_۴^{(A+۱۵)} = \log_۴^{A} + \log_۴^{۴} \Rightarrow \log_۴^{(A+۱۵)} = \log_۴^{۴A}$$
$$\Rightarrow ۴A = A + ۱۵ \Rightarrow ۳A = ۱۵ \Rightarrow A = ۵$$

مثال۸۴: از معادله $\log_x^{(x^2-2)} = 2\log_9^3$ مقدار x کدام است.

۱) -1　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) 1　　۴) 2

$$\log_x^{(x^2-2)} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{ق ق} \\ x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

📖 مثال۸۵: نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

☜ پاسخ: **گزینه۱**

اگر تابع **f** محور **x** ها را در نقطه ۱- قطع کند یعنی $f(-۱)=۰$ در نتیجه:

$$f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b)\Rightarrow f(-۱)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰\Rightarrow -a+b=۱$$

معادله نیمساز ناحیه چهارم $y=-x$ است پس اگر تابع **f** این خط را در $y=-۱$ قطع کند دو تابع در نقطه $(۱,-۱)$ متقاطع اند پس $f(۱)=-۱$ خواهد بود.

$$f(۱)=\log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱\Rightarrow a+b=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}=۲\Rightarrow \begin{cases}-a+b=۱\\ a+b=۲\end{cases}\Rightarrow ۲b=۳\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

مثال۸۶: از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایه ۴ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)\Rightarrow \log\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)}=\log(۲x-۵)\Rightarrow \log(x+۲)=\log(۲x-۵)\Rightarrow x+۲=۲x-۵\Rightarrow x=۷$$

در نتیجه مقدار عبارت $\sqrt[۳]{x+۱}$ به ازای برابر ۲ است پس:

$$\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱}=\log_{۴}^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۸۷: مجموع جواب های معادله $\log_3(9^x+2)=x+1$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\log_3 4$ ۴) $\log_3 2$

پاسخ: **گزینه ۴**

$$\log_3(9^x+2)=x+1 \Rightarrow 9^x+2=3^{x+1} \Rightarrow 3^{2x}-3\times 3^x+2=0$$

با فرض $3^x=\alpha$ داریم:

$$\alpha^2-3\alpha+2=0 \Rightarrow (\alpha-2)(\alpha-1)=0 \Rightarrow \alpha=1,2 \Rightarrow 3^x=1,2 \Rightarrow 3^{x_1}=1, 3^{x_2}=2$$

جواب های معادله $x_1=\log_3 1, x_2=\log_3 2$

مجموع جواب ها $x_1+x_2=\log_3 1+\log_3 2=\log_3(1\times 2)=\log_3 2$

مثال۸۸: به ازای چه مقادیری از a معادله $\log_{۳}(۳^x - ۲) = a - x$ دو جواب متمایز دارد؟

۱) $a > -۲$ ۲) $a > ۲$ ۳) هیچ مقدار a ۴) جمیع مقادیر a

پاسخ: گزینه ۳

سوال مهم و دشواری است!

$$\log_۳ ۳^x - ۲ = a - x \Rightarrow ۳^x - ۲ = ۳^{a-x} \xrightarrow{\times ۳^x} ۳^{۲x} - ۲ \times ۳^x - ۳^a = ۰$$

$$\xrightarrow{۳^x = A} A^۲ - ۲A - ۳^a = ۰$$

چون -۳^a منفی است پس در معادله درجه ۲ فوق $P < ۰$ است. لذا معادله دو ریشه مختلف العلامه دارد. پس می تواند دو ریشه مثبت داشته باشد (حال آن که ۳^x همواره مثبت است.) پس تنها یک جواب قابل قبول دارد.

مثال۸۹: اگر $x_۱, x_۲$ ریشه های معادله $\log_۴(۲^x - ۲) + \log_۲ ۳ = x$ باشند کدام صحیح است؟

۱) $x_۱ + x_۲ = ۱$ ۲) $x_۱ + x_۲ = ۲$ ۳) $|x_۱ - x_۲| = ۱$ ۴) $|x_۱ - x_۲| = ۲$

پاسخ: **گزینه ۳**

$$\log_4(2^x-2)+\log_2 3=x \Rightarrow \log_4(2^x-2)+\log_4 9=\log_4 4^x$$

$$\Rightarrow \log_4(2^x-2)\times 9=\log_4 4^x$$

چون لگاریتم تابع یک به یک است. : $(2^x-2)\times 9=4^x \Rightarrow 2^{2x}-9\times 2^x+18=0$

با فرض $2^x=\alpha$ داریم:

$$\alpha^2-9\alpha+18=0 \Rightarrow \alpha=3,6 \Rightarrow 2^x=3,6 \Rightarrow x=\log_2 3,\log_2 6 \Rightarrow |x_1-x_2|$$

$$\Rightarrow |\log_2 3-\log_2 6|=\left|\log_2 \frac{6}{3}\right|=\log_2 2=1 \Rightarrow |x_1-x_2|=1$$

مثال۹۰: اگر $\log_{۹} x + \log_{x^{۲}} ۳ = ۱$ باشد تعداد ریشه های آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_{۹} x + \log_{x^{۲}} ۳ = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۳} x + \frac{۱}{۳\log_{۳} x} = ۱ \xrightarrow{\log_{۳} x = \alpha} \frac{۱}{۲}\alpha + \frac{۱}{۳\alpha} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times(۶\alpha)} ۳\alpha^{۲} - ۶\alpha + ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۳ \pm \sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \log_{۳} x = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}, \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}$$

$\Rightarrow$ هر دو جواب قابل قبول $\Rightarrow$ دو ریشه دارد

مثال۹۱: حاصل ضرب ریشه های معادله $\log_۲ x = ۲ + \log_x ۲$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_۲ x = ۲ + \log_x ۲ \Rightarrow \log_۲ x = ۲ + \frac{۱}{\log_۲ x} \xrightarrow{\log_۲ x = \alpha} \alpha = ۲ + \frac{۱}{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\times \alpha} \alpha^۲ - ۲\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha_۱ + \alpha_۲ = -\frac{(-۲)}{۱} = ۲ \Rightarrow \log_۲ x_۱ + \log_۲ x_۲ = \log_۲ x_۱ x_۲ = ۲$$

$\Rightarrow x_۱ \times x_۲ = ۴$ حاصل ضرب ریشه ها

📖 **مثال۹۲:** حاصل ضرب ریشه های معادله $4^{\frac{1}{x}} = 3^{x}$ کدام است؟

۱) $\log_{3} 4$ ۲) $\log_{4} 3$ ۳) $-\log_{3} 4$ ۴) $-\log_{4} 3$

☜پاسخ: **گزینه ۳**

روش اول) از دو طرف معادله داده شده لگاریتم در مبنای ۳ می گیریم:

$$۳^x = ۴^{\frac{۱}{x}} \Rightarrow x = \log_۳ ۴^{\frac{۱}{x}} \Rightarrow x = \frac{۱}{x}\log_۳ ۴ \Rightarrow x^۲ = \log_۳ ۴$$

$$\Rightarrow x_۱ = \sqrt{\log_۳ ۴}, x_۲ = -\sqrt{\log_۳ ۴}$$

بنابراین حاصر ضرب ریشه ها برابر است با:

$$x_۱ \times x_۲ = \sqrt{\log_۳ ۴} \times (-\sqrt{\log_۳ ۴}) = -\log_۳ ۴$$

روش دوم) در معادله درجه ۲ : $x^{۲} - \log_{۳} ۴ = ۰$

$$x_{۱}x_{۲} = \frac{c}{a} = -\log_{۳} ۴$$

مثال۹۳: معادله $x^{\log_{۲} x} = ۵۱۲$ دو ریشه دارد. اگر ریشه بزرگتر α و ریشه کوچکتر β باشد، حاصل $\alpha + \frac{۱}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) اگر فرض کنیم $\log_{۲} x = y$ آنگاه $x = ۲^y$ و داریم:

$$x^{\log_{۲} x} = ۵۱۲ \Rightarrow x^y = ۵۱۲ \xrightarrow{x = ۲^y} (۲^y)^y = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^{y^۲} = ۵۱۲ = ۲^۹$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۹ \Rightarrow y = \pm ۳ \Rightarrow \log_{۲} x = \pm ۳ \Rightarrow x = ۲^{\pm ۳} \Rightarrow x_۱ = ۸, x_۲ = \frac{۱}{۸}$$

$$\begin{cases} \text{ریشه بزرگتر} : \alpha = ۸ \\ \text{ریشه کوچکتر} : \beta = \frac{۱}{۸} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = ۸ + ۸ = ۱۶$$

روش دوم)

$$x^{\log_۲ x} = ۵۱۲ \Rightarrow \log_۲ x = \log_x ۵۱۲ = ۹\log_x ۲ \Rightarrow \log_۲ x = \frac{۹}{\log_۲ x} \Rightarrow (\log_۲ x)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \log_۲ x = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲^۳ = ۸ = \alpha \\ x_۲ = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = ۸ + ۸ + ۱۶$$

مثال۹۴: اگر $\log_{\sqrt{۲}} x = \frac{۲۵}{۲}$ باشد حاصل $\log_x ۲۷ + \log_۹ \sqrt{x}$ کدام می تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_x ۲۷+\log_{\sqrt{۳}} x=\frac{۲۵}{۲}\Rightarrow ۳\log_x ۳+۲\log_۳ x=\frac{۲۵}{۲}\xrightarrow{\log_۳ x=\alpha}\frac{۳}{\alpha}+۲\alpha=\frac{۲۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times\alpha}۲\alpha^۲-\frac{۲۵}{۲}\alpha+۳=۰\Rightarrow\left(۲\alpha-\frac{۱}{۲}\right)(\alpha-۶)=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۴},۶$$

مطلوب: $\log_۹\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\log_۳ x=\frac{۱}{۱۶}$ یا $\frac{۳}{۲}$

مثال۹۵: به ازای چند عدد صحیح a معادله $\log(a-x)=\log a-\log x$ جواب ندارد؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

پاسخ: گزینه ۳

$$\log(a-x)=\log a-\log x \Rightarrow \log(a-x)=\log\frac{a}{x} \Rightarrow a-x=\frac{a}{x} \xrightarrow{\times x} x^{2}-ax+a=0$$

معادله درجه ۲ $\Delta=a^{2}-4a<0 \Rightarrow 0<a<4 \xrightarrow{x\in Z} a=1,2,3$

دقت کنید که چون $x>0$ (به خاطر دامنه لگاریتم) است لذا اگر $\Delta\geq 0$ باشد حتماً معادله دو جواب مثبت دارد (چون هم $P>0$ است هم $S>0$ است) در واقع هر دو $\mathbf{x}$ ای که از معادله به دست می آید مثبت است و همواره $x>0$ خواهد بود.

مثال۹۶: اگر $\log(2x+10)=\log_{\sqrt{10}}(x+1)$ باشد حاصل $\log_{x\sqrt{3}} x$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

☜ **پاسخ: گزینه ۱**

می دانیم $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$ با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}\log_b a(a,b > 0, b \neq 1)$ داریم:

$$\log(2x+10) = \log_{\sqrt{10}}(x+1) \Rightarrow \log(2x+10) = \log_{10^{\frac{1}{2}}}(x+1)$$

$$\Rightarrow \log(2x+10) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log(x+1) \Rightarrow \log(2x+10) = 2\log(x+1)$$

$$\Rightarrow \log(2x+10) = 2\log(x+1) \Rightarrow \log(2x+10) = \log(x+1)^2$$

$$\Rightarrow (2x+10) = (x+1)^2 \Rightarrow 2x+10 = x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

از آن جا $x = -3$ در دامنه عبارت صدق نمی کند (ورودی لگاریتم را منفی می کند) پس $x = 3$ است در نتیجه با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}\log_b a$ داریم:

$$\log_{x\sqrt{3}} x = \log_{3\sqrt{3}} 3 = \log_{3\times 3^{\frac{1}{2}}} 3 = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3 = \frac{1}{\frac{3}{2}}\underbrace{\log_3 3}_{1} = \frac{2}{3}$$

📖 مثال۹۷: با فرض آنکه $\log_{2}(2x-1)+\log_{2}(x-3)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}$ مقدار $\log_{\sqrt{2}}(x^{2}-4x+5)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☜ **پاسخ: <u>گزینه ۲</u>**

$$\log_2(2x-1)+\log_2(x-3)=\log_{\sqrt2}\sqrt{x+1}\xrightarrow{(1)}\log_2(2x-1)(x-3)$$

$$=\log_{2^{\frac12}}(x+1)^{\frac12}\xrightarrow{(2)}\log_2(2x^2-7x+3)=\frac{\frac12}{\frac12}\log_2(x+1)\Rightarrow 2x^2-7x+3=x+1$$

$$\Rightarrow 2x^2-8x+2=0\xrightarrow{\div 2}x^2-4x+1=0\xrightarrow{*}x^2-4x=-1$$

با توجه به اینکه $x^2-4x=-1$ پس $\underbrace{x^2-4x}_{-1}+5=4$ است در نتیجه:

$$\log_{\sqrt2}(\underbrace{x^2-4x}_{-1}+5)=\log_{\sqrt2}4=4$$

تذکر ۱: چون معادله $x^2-4x+1=0$ دارای ریشه های $x=2\pm\sqrt3$، $x=2+\sqrt3$ در دامنهٔ معادله صدق می کند از مرحله * به بعد محاسبات صحیح است.

تذکر ۲:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab \qquad (۱)$$

$$(a, b, c > ۰, c \neq ۱)$$

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a \quad (a, b > ۰, b \neq ۱) \qquad (۲)$$

مثال۹۸: اختلاف ریشه های معادله $\log_{۳}(۳^{x}-۳)$ $+ ۴\log_{۳}۲ = ۲x$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

اگر فرض کنیم $۳^x = t$ است داریم $x = \log_۳ t$ پس:

$$۲x = ۴\log_۳ ۲ + \log_۳(۳^x - ۳) \xrightarrow{x=\log_۳ t} ۲\log_۳ t = \log_۳ ۲^۴ + \log_۳(t-۳)$$

$$\xrightarrow{(۱)} \log_۳ t^۲ = \log_۳ ۱۶ + \log_۳(t-۳) \xrightarrow{(۲)} \log_۳ t^۲ = \log_۳(۱۶(t-۳))$$

$$\Rightarrow t^۲ = ۱۶t - ۴۸ \Rightarrow t^۲ - ۱۶t + ۴۸ = ۰ \Rightarrow (t-۱۲)(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۲ \\ t = ۴ \end{cases}$$

با توجه به آن که $x = \log_۳ t$ است داریم:

$$\begin{cases} x_۱ = \log_۳ ۱۲ \\ x_۲ = \log_۳ ۴ \end{cases} \Rightarrow x_۱ - x_۲ = \log_۳ ۱۲ - \log_۳ ۴ = \log_۳ \frac{۱۲}{۴} = ۱$$

تذکر:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{n}\log_b a = \log_b a^n & (۱) \\ \log_c a + \log_c b = \log_c ab & (۲) \end{array}}$$

📖 مثال۹۹: از تساوی $\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶)$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶)\Rightarrow \log_x(۳x+۸)+\log_x(x-۶)=۲$$

$$\log_x(۳x+۸)(x-۶)=۲\Rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۸x-۴۸=x^۲\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۴۸=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲-۵x-۲۴=۰\Rightarrow (x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۸ \\ x=-۳ \end{cases}$$

اما $x=-۳$ در دامنه عبارت قرار ندارد و جواب معادله $x=۸$ است، در نتیجه:

$$\log_۴ x=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲ ۲=\frac{۳}{۲}$$

تذکر: $\log_{b^m} a^n=\frac{n}{m}\log_b a$

مثال۱۰۰: حاصل ضرب ریشه های معادله $x^{\log_{۵}^{x}} = ۶۲۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه۱

اگر $x^{\log_{۵} x} = ۶۲۵$ باشد لگاریتم دو طرف تساوی در مبنای ۵ نیز برابر است در نتیجه: $\log_{۵} x^{\log_{۵} x} = \log_{۵} ۶۲۵ = ۴$

از طرفی می دانیم $\log_b a^n = n \log_b a$ پس:

$$\log_{۵} x^{\log_{۵} x} = ۴ \Rightarrow \log_{۵} x \times \log_{۵} x = ۴ \Rightarrow (\log_{۵} x)^{۲} = ۴$$

$$\Rightarrow \log_{۵} x = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \log_{۵} x = ۲ \Rightarrow x = ۲۵ \\ \log_{۵} x = -۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲۵} \end{cases}$$

در نتیجه حاصل ضرب ریشه های این معادله ۱ است.

📖 مثال۱۰۱: از تساوی ۵ $\log_x (x^۲+۴)=۱+\log_x$ مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۴

$$\log_x (x^۲+۴)=۱+\log_x ۵ \xrightarrow{۱=\log_x x} \log_x (x^۲+۴)=\log_x x+\log_x ۵$$

$$\log_x (x^۲+۴)=\log_x ۵x \Rightarrow x^۲+۴=۵x \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۴)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق} \\ x=۴ \end{cases}$$

چون x مبنای لگاریتم است نباید برابر ۱ باشد در نتیجه $x=۴$ است:

$$\Rightarrow \log_۲ ۴=۲$$

مثال۱۰۲: از دو معادله $x^۲ - y^۲ = ۳۲, \log_۲ x = ۱ + \log_۲(y+۱)$ مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴ کدام است؟(سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

☜پاسخ: **گزینه ۳**

$$\log_{۲} x = \underbrace{۱}_{\log ۲^{۲}} + \log_{۲}(y+۱) \Rightarrow \log_{۲} x = \log_{۲} ۲ + \log_{۲}(y+۱) \Rightarrow \log_{۲} x = \log_{۲}(۲y+۲)$$

$$\Rightarrow x = ۲y + ۲$$

$$x = ۲y + ۲, x^{۲} - y^{۲} = ۳۲$$

$$(۲y+۲)^{۲} - y^{۲} = ۳۲ \Rightarrow ۴y^{۲} + ۸y + ۴ - y^{۲} = ۳۲$$

$$۳y^{۲} + ۸y - ۲۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ y = -\dfrac{۱۴}{۳} \end{cases}$$

به کمک حدس می توان دریافت یک ریشه معادله فوق $y=۲$ است از آن جا که در هر معادله درجه ۲ ضرب ریشه ها برابر $\frac{c}{a}$ است پس اگر یک ریشه ۲ باشد ریشه دیگر $\frac{c}{۲a}$ است. پس ریشه دیگر این معادله $-\frac{۱۴}{۳}$ است. اما چون $y=-\frac{۱۴}{۳}$ در دامنه عبارت قرار ندارد غیرقابل قبول است. پس اگر $y=۲$ باشد داریم:

$$x=۲y+۲\xrightarrow{y=۲}x=۶$$

$$\log_۴(x+y)=\log_۴ ۸=\frac{۳}{۲}$$

مثال۱۰۳: از دو معادلهٔ $\log 3 = \log(2x+1) + \log(y-2) - \log y$ و $\log(2y-3x) + \log 2 = 0$

مقدار xy کدام است؟ (سراسری ۹۶ با کمی تغییر)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases}\log(2x+1)+\log(y-2)-\log y=\log 3\\ \log(2y-3x)+\log 2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\dfrac{(2x+1)(y-2)}{y}=\log 3\Rightarrow\dfrac{(2x+1)(y-2)}{y}=3\\ \log(4y-6x)=0\Rightarrow 4y-6x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2x+1)(y-2)=3y & (1)\\ x=\dfrac{4y-1}{6} & (2)\end{cases}$$

به جای **x** در معادله (۱) قرار می دهیم $\dfrac{4y-1}{6}$:

$$\left(2\left(\frac{4y-1}{6}\right)+1\right)(y-2)=3y\Rightarrow\left(\frac{4y-1}{6}\right)(y-2)=3y\Rightarrow(4y+2)(y-2)=9y$$

$$\Rightarrow 4y^2-6y-4=9y\Rightarrow 4y^2-15y-4=0\Rightarrow\begin{cases}y=4\\ y=\dfrac{-1}{4}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$y=-\frac{1}{4}$ قابل قبول نیست زیرا در دامنه معادله قرار ندارد. پس $y=4$ است پس:

$$x=\frac{4y-1}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\Rightarrow xy=4\times\frac{5}{2}=10$$

📖 مثال۱۰۴: از دو معادلهٔ $Ln(2y+3)+Ln(y+x-1)=0$ و $Ln(x-4y)=2Ln2$ مقدار xy کدام است.

(خارج از کشور تجربی ۹۶)

۱) ۲- ‏ ‏ ‏ ۲) ۱- ‏ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ‏ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۲

$$Ln(y+x-۱)+Ln(۲y+۳)=۰ \Rightarrow Ln(y+x-۱)(۲y+۳)=۰$$

$$\Rightarrow (y+x-۱)(۲y+۳)=۱ \qquad (۱)$$

$$Ln(x-۴y)=۲Ln۲=Ln۴ \Rightarrow (x-۴y)=۴ \Rightarrow x=۴y+۴ \qquad (۲)$$

(۲) را در (۱) جاگذاری می کنیم:

$$(y+۴y+۴-۱)(۲y+۳)=۱ \Rightarrow (۵y+۳)(۲y+۳)=۱ \Rightarrow \log^{۲}+۱۵y+۶y+۹=۱$$

$$\Rightarrow ۱۰y^{۲}+۲۱y+۸=۰ \Rightarrow ۱۰y^{۲}+۲۱y+۸=(۵y+۸)(۲y+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{۸}{۵} & \text{غ ق ق} \\ y=-\dfrac{۱}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

$$x=۴y+۴ \Rightarrow ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴=۲ \Rightarrow xy=۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-۱$$

📖 مثال۱۰۵: اگر $۴\sqrt{۲} = ۴^x$, $۱ + \log\sqrt{x + ۱} = \log y$ مقدار y کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: **گزینه ۳**

$$۴\sqrt{۲} = ۴^x \Rightarrow ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^۲)^x \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دیگر}}$$

$$۱ + \log\sqrt{\frac{۵}{۴} + ۱} = \log y \Rightarrow ۱ + \log\frac{۳}{۲} = \log y \xrightarrow{۱=\log ۱۰} \log ۱۰ + \log\frac{۳}{۲} = \log y$$

$$\Rightarrow \log\left(۱۰ \times \frac{۳}{۲}\right) = \log y \Rightarrow y = ۱۵$$

مثال۱۰۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_{۲}(bx-۴)$ از دو نقطهٔ $(۲,۶),(۱۲,۱۰)$ می گذرد. a کدام است؟

(سراسری ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☜ پاسخ: **گزینه ۳**

چون تابع **f** از نقاط $(۲,۶),(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد پس $f(۲)=۶ , f(۱۲)=۱۰$ است در نتیجه:

$$f(۲)=۶ \Rightarrow a+\log_{۲}(۲b-۴)=۶$$
$$f(۱۲)=۱۰ \Rightarrow a+\log_{۲}(۱۲b-۴)=۱۰$$

از تفاضل دو معادله بالا داریم:

$$\log_{۲}(۱۲b-۴)-\log_{۲}(۲b-۴)=۴ \Rightarrow \log_{۲}\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۴ \Rightarrow \frac{۶b-۲}{b-۲}=۱۶ \Rightarrow \frac{۳b-۱}{b-۲}=۸$$
$$\Rightarrow ۳b-۱=۸b-۱۶ \Rightarrow ۵b=۱۵ \Rightarrow b=۳$$

حال با توجه به آن که $f(۲)=۶ , b=۳$ مقدار **a** را به دست آوریم:

$$f(x)=a+\log_{۲}(۳x-۴) \Rightarrow f(۲)=a+\underbrace{\log_{۲}^{۲}}_{۱}=۶ \Rightarrow a=۵$$

$$\log_b^a-\log_b^c=\log_b^{\frac{a}{c}}$$

www.riazisara.ir

کانال تلگرام @ Nakhostin_Math

مثال۱۰۷: تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}$ از دو نقطهٔ $(۵,۱۱),(۲۱,۱۵)$ می گذرد، a کدام است.

(خارج کشور ریاضی ۹۶)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: **گزینه ۳**

$$f(x)=a+\log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}=a+۲\log_{۲}^{۳x+b}$$

$$\begin{cases} f(۲۱)=۱۵ \to \\ f(۵)=۱۱ \to \end{cases} \begin{cases} a+۲\log_{۲}^{(۶۳+b)}=۱۵ \\ a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می کنیم}}$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۲}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}=۴ \Rightarrow \log_{۲}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}=۲ \Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴ \Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b \Rightarrow ۳=۳b \Rightarrow \boxed{b=۱}$$

$$a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱ \xrightarrow{b=۱} a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱ \Rightarrow a+۲\log_{۲}^{۱۶}=۱۱$$

$$\Rightarrow a+۲\times۴=۱۱ \Rightarrow \boxed{a=۳}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

مثال۱۱۲: تابع با ضابطه $f(x)=۳-\log_{۳}^{(x+۳)}$ مفروض است اگر نمودار وارون این تابع محور x ها را با طول a و محور y ها را با عرض b قطع کند آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) صفر

پاسخ: **گزینه ۱**

فرض کنید $f^{-۱}$ وارون تابع **f** باشد:

اگر نقطه $(a,\circ)$ روی نمودار $f^{-۱}$ واقع باشد آنگاه نقطه $(\circ,a)$ روی نمودار تابع **f** واقع است:

$$a=۳-\log_{۳}^{(\circ+۳)}\Rightarrow a=۳-۱=۲$$

اگر نقطه $(\circ,b)$ روی نمودار $f^{-۱}$ واقع باشد آنگاه نقطه $(b,\circ)$ روی نمودار تابع **f** واقع است.

$$\circ=۳-\log_{۳}^{(b+۳)}\Rightarrow\log_{۳}^{(b+۳)}=۳\Rightarrow b+۳=۳^{۲}\Rightarrow b=۲۴\Rightarrow a+b=۲۶$$

مثال۱۱۳: از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log(x^{۲}+۴y^{۲})=۲\log\sqrt{۲}+\log ۲۳ \\ \log x+\log y=۲\log ۳-\log ۲ \end{cases}$ حاصل لگاریتم $x+۲y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۵

☜ پاسخ: **گزینه ۳**

$$\begin{cases}\log(x^{۲}+۴y^{۲})=۲\log\sqrt{۲}+\log ۲۳ \Rightarrow \log(x^{۲}+۴y^{۲})=\log ۴۶ \Rightarrow x^{۲}+۴y^{۲}=۴۶\\ \log x+\log y=۲\log ۳-\log ۲ \Rightarrow \log xy=\log\frac{۹}{۲} \Rightarrow xy=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

$$(x+۲y)^{۲}=x^{۲}+۴y^{۲}+۴xy=۴۶+۴\left(\frac{۹}{۲}\right)=۶۴ \Rightarrow x+۲y=۸$$

$$\Rightarrow \log_{۱۶}^{x+۲y}=\log_{۱۶}^{۸}=\log_{۲^{۴}}^{۲^{۳}}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

📖 **مثال۱۱۴:** حاصل جمع جواب های معادله $\log_{x}^{۵x} - \frac{۱}{۲}\log_{۵}^{x^{۲}} = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۵}$　　۲) $\frac{۱۸}{۲۵}$　　۳) $\frac{۹}{۵}$　　۴) $\frac{۲۶}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_x^{۵x} - \frac{۱}{۲}\log_۵^{x^۲} = ۱ \Rightarrow \log_x^۵ + \log_x^x - \frac{۱}{۲}\log_۵^{x^۲} = ۱ \Rightarrow \log_x^۵ + ۱ - \frac{۱}{۲}\log_۵^{x^۲} = ۱ \Rightarrow \log_x^۵ - \frac{۱}{۲}\log_۵^{x^۲} = ۰$$

از طرفی چون $x > ۰$ بنابراین: $\log_۵^{x^۲} = ۲\log_۵^x$

بنابراین: $\log_x^۵ - \log_۵^x = ۰$

حال با کمک قاعده داریم: $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$

$$\text{معادله}: \frac{۱}{\log_۵^x} - \log_۵^x = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\log_۵^x} = \log_۵^x \Rightarrow (\log_۵^x)^۲ = ۱$$

$$\begin{cases} \log_۵^x = ۱ \Rightarrow x_۱ = ۵ \\ \log_۵^x = -۱ \Rightarrow x_۲ = ۵^{-۱} = \dfrac{۱}{۵} \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۵ + \frac{۱}{۵} = \frac{۲۶}{۵}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

📖 مثال۱۱۵: مجموع جواب های معادله $x^{\log x}=100x$ کدام است؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۰۰/۰۱ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰۰/۱

پاسخ: **گزینه ۴**

از طرفین تساوی لگاریتم می گیریم و از ویژگی های لگاریتم استفاده می کنیم:

$$100x = x^{\log x} \Rightarrow \log(100x) = \log(x^{\log x}) \Rightarrow \log 100 + \log x = (\log x)(\log x)$$

$$\to 2 + \log x = (\log x)^2 \to (\log x)^2 - (\log x) - 2 = 0$$

با فرض $t = \log x$ خواهیم داشت:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -1 \\ \log x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ \text{یا} \\ x = 100 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = 100/1$$

مثال ۱۱۶: مجموع مکعبات جواب های معادله $3\log_{2}^{x} - 2\log_{x}^{2} = 5$ کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۲۷/۵ ۳) ۶۴/۵ ۴) ۲۱۶/۵

کانال تلگرام @ Nakhostin_Math www.riazisara.ir

پاسخ: **گزینه ۳**

با فرض $\log_{۲}^{x} = t$ داریم:

$$\log_{x}^{۲} = \frac{۱}{t}$$

$$\Rightarrow ۳t - \frac{۲}{t} = ۵ \xrightarrow{\times t} ۳t^{۲} - ۵t - ۲ = ۰ \Rightarrow \Rightarrow t = \frac{۵ \pm ۷}{۶} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲ \\ t_{۲} = -\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\log_{۲}^{x} = ۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow \text{ریشه اول} = x_{۱} = ۴$$

$$\log_{۲}^{x} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow x = ۲^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow \text{ریشه دوم} = x_{۲} = ۲^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$x_{۱}^{۳} + x_{۲}^{۳} = (۴)^{۳} + \left(۲^{-\frac{۱}{۳}}\right)^{۳} = ۶۴ + \frac{۱}{۲} = ۶۴/۵$$

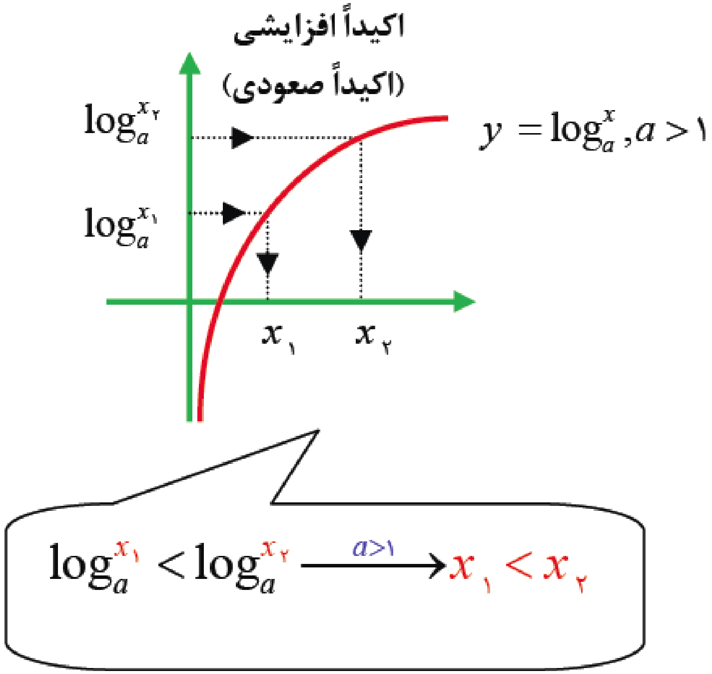
www.riazisara.ir

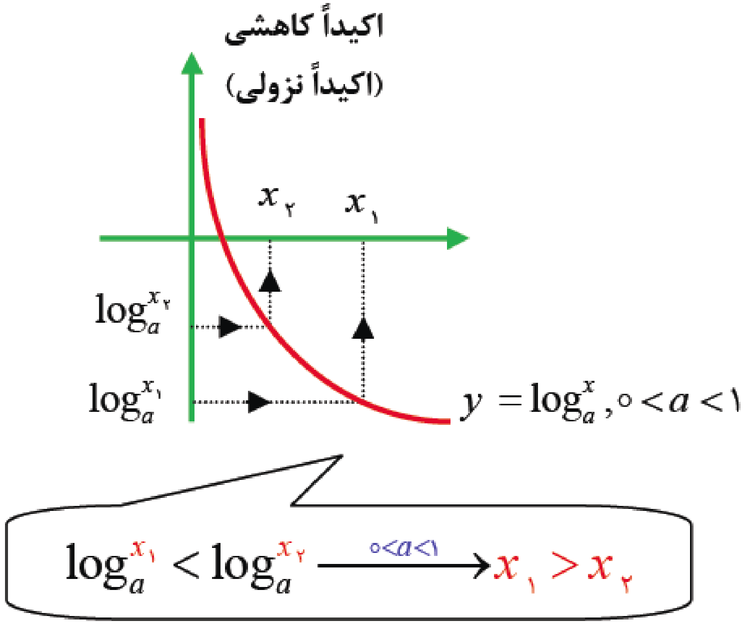
کانال تلگرام @ Nakhostin_Math

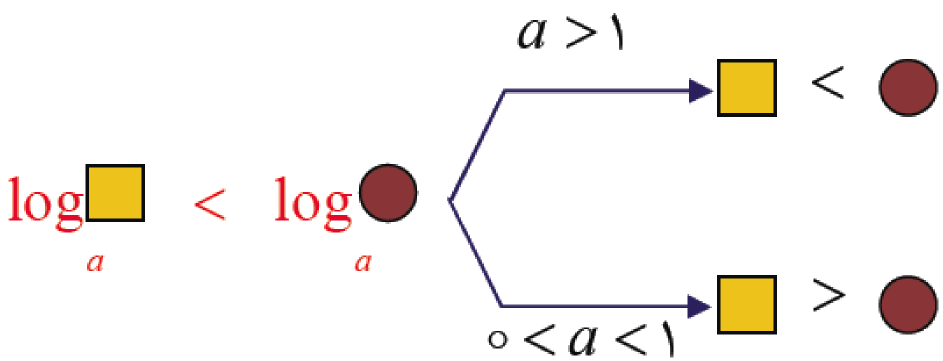
نامساوی لگاریتمی:

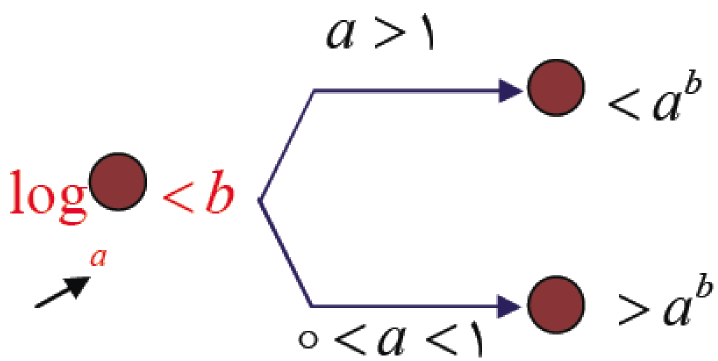
به نظر شما نتیجه ای که از نامساوی روبه رو گرفته شده آیا همواره درسته؟ $\log_a^{x_1} < \log_a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2$

برای اینکه به درستی یا نادرستی رابطه بالا پی ببرید می خوام نمودارهای دو تابع $y=\log_{a>1}^{x}$ و $y=\log_{0<a<1}^{x}$ رو دوباره براتون رسم کنم:









www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math   کانال تلگرام

مثال۱۱۷: دامنه تابع $f(x)=\log_{۴}(\log_{۳}(x-۲))$ کدام است.

۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $(۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۳)$

$$f(x)=\log_{۴}{}^{\log_{۳}^{(x-۲)}} \xrightarrow[\text{باید مثبت باشند}]{\text{عبارات جلوی لگاریتم}} \begin{cases} x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \\ \log_{۳}^{x-۲}>۰ \Rightarrow x-۲>۳^{۰} \Rightarrow x-۲>۱ \Rightarrow x>۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} x>۳$$

📖 **مثال۱۱۸:** مجموعه جواب نامعادله $\log_{0/5}^{\frac{x-3}{5}} > \log_{0/5}^{0/2}$ را بدست آورید.

مرحله۱) نامعادله لگاریتمی بالا رو به یک نامعادله غیرلگاریتمی تبدیل می کنم و بعد مجموعه جوابش رو به دست می آرم.

$$\underbrace{\log_{0/5}^{\frac{x-3}{5}} > \log_{0/5}^{\frac{1}{5}}}_{\text{نامعادله لگاریتمی}} \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می شه}]{0<\text{مبنا}<1} \underbrace{\frac{x-3}{5} < \frac{1}{5}}_{\text{نامعادله غیرلگاریتمی}} \xrightarrow{\times 5} x-3<1 \Rightarrow \underbrace{x<4}_{\text{مجموعه جواب}}$$

مرحله۲) ازاون جایی که مجموعه جواب نهایی باید توی دامنه نامعادله اولیه قرار داشته باشه، بین مجموعه جواب به دست اومده از مرحله ۱ و دامنه نامعادله اولیه اشتراک می گیرم. محدوده به دست اومده همون مجموعه جواب نهاییه.

$$\underbrace{\log_{0/5}^{\frac{x-3}{5}} > \log_{0/5}^{\frac{1}{5}}} \rightarrow \frac{x-3}{5} > 0 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow \boxed{x>3}$$

$$\underbrace{\boxed{x<4}}_{\text{مجموعه جواب مرحله۱}} \xrightarrow{\cap} \underbrace{\boxed{3<x<4}}_{\text{مجموعه جواب نهایی}}$$

www.riazisara.ir

@ Nakhostin_Math کانال تلگرام

پس فهمیدیم که یک نامعادله لگاریتمی رو میشه تو دو مرحله حل کرد:

۱. نامعادله لگاریتمی رو به یک نامعادله غیرلگاریتمی تبدیل کنید و جوابش رو بدست بیارید.
۲. بین مجموعه جواب به دست اومده و دامنه نامعادله اولیه اشتراک بگیرید تا مجموعه جواب نهایی (در صورت وجود) به دست بیاد.

مثال۱۱۹: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۳}^{x-۱}}$ کدامست؟

۱) $x>۱$ ۲) $۱<x\le ۲$ ۳) ϕ ۴) $x\ge ۲$

$$\rightarrow\begin{cases}(۱)\quad \underbrace{\log_{۲}^{x-۱}\ge ۰}_{\text{نامعادله لگاریتمی}} \Rightarrow \underbrace{x-۱\ge ۳^{۰}}_{\text{نامعادله غیرلگاریتمی}} \Rightarrow x-۱\ge ۱ \Rightarrow \underbrace{\boxed{x\ge ۲}}_{\text{مجموعه جواب}} \quad (۱) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{نامعادله غیرلگاریتمی} \\ (۲)\quad x-۱>۰ \Rightarrow \underbrace{\boxed{x>۱}}_{\text{دامنه}} \quad (۲)\end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x\ge ۲$$

مثال۱۲۰: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}^{x^2}}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,1)-\{0\}$ ۴) $[-1,1]-\{0\}$

$$\xrightarrow{}\begin{cases} (1)\quad \log_{\frac{1}{5}}^{x^2}\geq 0 \xrightarrow[0<\frac{1}{5}<1]{\text{جهت نامساوی عوض میشه}} x^2\leq\left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow x^2\leq 1\Rightarrow \boxed{-1\leq x\leq 1} \qquad (1) \\ (2)\quad x^2>0\Rightarrow \boxed{x\in R-\{0\}} \qquad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} D=[-1,1]-\{0\}$$

مثال ۱۲۱: دامنه تابع $y = \log(5 - x^2) + \log(x^2 - 2x + 3)$ کدام است؟

۱) R ۲) $R - [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ۳) $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ۴) $(2, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دامنه هر یک از لگاریتم ها را به صورت جداگانه به دست می آوریم:

$$\log(5 - x^2) : 5 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

$$\log(x^2 - 2x + 3) : x^2 - 2x + 3 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 \\ x^2 \text{ضریب} = 1 > 0 \end{cases}$$

بنابراین $x^2 - 2x + 3$ همواره بزرگتر از صفر می باشد. دامنه تابع موجود در صورت سوال برابر اشتراک جواب ها و برابر $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ می باشد.

📖 مثال۱۲۲: اگر $f(x)=۴-e^{۲x}$ باشد دامنه تابع $g(x)=\sqrt{x\,f^{-۱}(x)}$ کدام است. (خارج ریاضی ۹۶)

۱) $[۲,۳]$ ۲) $[۳,۴]$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۰,۴)$

$$f(x)=۴-e^{۲x}\Rightarrow y=۴-e^{۲x}\Rightarrow e^{۲x}=۴-y\Rightarrow ۲x=Ln(۴-y)\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln(۴-y)$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}Ln(۴-x)$$

$$g(x)=\sqrt{x\,f^{-۱}(x)}=\sqrt{\frac{۱}{۲}x\,Ln(۴-x)}\Rightarrow xLn(۴-x)\geq ۰\xrightarrow[x<۴]{۴-x>۰}$$

$$\left.\begin{cases}x\geq ۰\Rightarrow Ln(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۴-x\geq e^{۰}\Rightarrow ۴-x\geq ۱\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow ۰\leq x\leq ۳\\ x\leq ۰\Rightarrow Ln(۴-x)\leq ۰\Rightarrow ۴-x\leq e^{۰}\Rightarrow ۴-x\leq ۱\Rightarrow x\geq ۳\xrightarrow{x\leq ۰}\text{اشتراک ندارند}\end{cases}\right.\Rightarrow D_g=[۰,۳]$$

مثال۱۲۵: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log(x^{۲}-۳x)}$ به کدام صورت بازه ها است؟ (سراسری ۹۵)

۱) $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$ ۲) $[-۲,۰]\cup(۳,۵)$ ۳) $[-۲,۳)$ ۴) $(۰,۵]$

☜پاسخ: **گزینه۱**

باید تابع زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$۱-\log(x^{۲}-۳x)\geq ۰ \Rightarrow \log(x^{۲}-۳x)\leq \underbrace{۱}_{\log_{۱۰}۱۰}$$

از طرفی اگر $a>۱$ ، $\log_a b>\log_a c$ باید $b>c$ باشد در نتیجه:

$$x^{۲}-۳x\leq ۱۰ \Rightarrow x^{۲}-۳x-۱۰\leq ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)\leq ۰ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۵ \quad (۱)$$

از طرفی باید ورودی تابع لگاریتم مثبت باشد در نتیجه:

$$x^{۲}-۳x>۰ \Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۳ \quad (۲)$$

پس از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$(۱)\cap(۲)=[-۲,۰)\cup(۳,۵]$$

📖 مثال۱۲۶: تابع $f(x)=\log_{۳}(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x\in\left(-\frac{۱}{۲},+\infty\right)$ با معنی است. اگر $f(۴)=۲$ باشد آنگاه $f\left(-\frac{۴}{۹}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☜پاسخ: **گزینه ۱**

می دانیم اگر $f(x)=\log_a(g(x))$ باشد پس باید $g(x)>0$ باشد پس باید $ax+b>0$ باشد چون عبارت $ax+b$ یک عبارت درجه ۱ است و به ازای $x>-\frac{1}{2}$ مثبت است پس $x=-\frac{1}{2}$ ریشه این عبارت و ضریب **a** نیز مثبت است در نتیجه: $-\frac{1}{2}a+b=0 \Rightarrow a=2b\,(a>0)$

از طرفی $f(4)=2$ است پس:

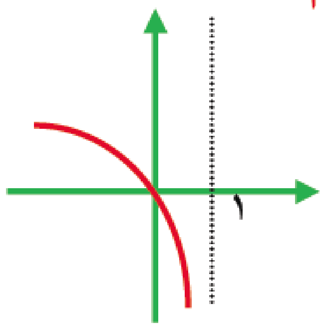
$$\log_3(4a+b)=2 \Rightarrow 4a+b=9$$

با توجه به آن که $a=2b$ است داریم:

$$4(2b)+b=9 \Rightarrow 9b=9 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\log_3(2x+1) \Rightarrow f\left(-\frac{4}{9}\right)=\log_3\left(-\frac{8}{9}+1\right)=\log_3\frac{1}{9}=-2$$

مثال۱۲۷: نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}(ax^{۲}+bx+c)$ شکل مقابل است. مقدار $f(-۳)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☜ پاسخ: **گزینه ۲**

چون این تابع مبدأ گذر است و داریم $f(\circ)=\circ$.

در نتیجه: $f(\circ)=\log_{۲} c=\circ \Rightarrow c=۲^{\circ}=۱$

دامنه این تابع بازه $(-\infty,۱)$ است. اگر $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد برای تعین دامنه باید $g(\mathrm{x})>\circ$ باشد اما اگر **g** یک تابع درجه دوم باشد یک به یک نخواهد بود و در نتیجه **f** نیز یک به یک نخواهد بود. (به نمودار یک تابع درجه دوم که سهمی هستش فکر کنید!) پس لازم است با توجه به یک به یک بودن تابع **f** و همنین دامنه **f , g** یک چندجمله ای درجه **۱** باشد پس $a=\circ$ است در نتیجه: $f(x)=\log_{۲}(bx+۱)$

با توجه به آن که دامنه تابع **f** به صورت بازه $(-\infty,۱)$ است پس **b** باید منفی و ریشه $bx+۱$ برابر **۱** باشد در نتیجه:

$$b+۱=\circ \Rightarrow b=-۱$$
$$f(x)=\log_{۲}(-x+۱) \Rightarrow f(-۳)=\log_{۲}۴=۲$$

مثال۱۲۸: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{ax+۶}{x+b}$ بازه $(-۲,۳)$ باشد نمودار تابع f خط $y=۱$ را با کدام طول قطع می کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

پاسخ: **گزینه۱**

باید $\frac{ax+۶}{x+b}>۰$ باشد می دانیم مجموعه جواب دو نامعادله $\frac{ax+۶}{x+b}>۰, (ax+۶)(x+b)>۰$ با یکدیگر یکسان است. زیرا حاصل ضرب و تقسیم دو عدد دارای علامت های یکسان اند. از طرفی می دانیم زمانی یک عبارت درجه دوم که دارای ۲ ریشه است بین دو ریشه مثبت است که **a** منفی باشد (ضریب $x^۲$ منفی باشد) زیرا عبارت در بین دو ریشه علامتی مخالف ضریب ضریب $x^۲$ دارد. ریشه های عبارت $\frac{ax+۶}{x+b}, \frac{-۶}{a}, -b$ هستند. چون جواب نامعادله باید بین $\frac{-۶}{a}, -b$ باشد و **a** نیز منفی باشد داریم:

$$\left(-b,\frac{-۶}{a}\right)=(-۲,۳)\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۲\end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=\log_۲\frac{-۲x+۶}{x+۲}$. حال با دستگاه زیر محل تلاقی **f** را با خط $y=۱$ به دست می آوریم:

$$\left.\begin{aligned}&y=\log_۲\frac{-۲x+۶}{x+۲}\\ &y=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow\log_۲\frac{-۲x+۶}{x+۲}=۱\Rightarrow\frac{-۲x+۶}{x+۲}=۲\Rightarrow-۲x+۶=۲x+۴$$

$$\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

محدوده لگاریتم:

اگه می خواید بدونید که چه جوری می شه فهمید ، لگاریتم یک عدد بین کدوم دو عدد **صحیح و متوالی** قرار داره به مثال زیر توجه کنید.

📖 مثال۱۲۹: می خوام بدونم که $\log_{۵}^{۳۲۱}$ بین کدوم دو عدد صحیح و متوالی قرار داره؟

۱) اول بررسی می کنم که ۳۲۱ بین کدوم دو عدد تواندار (با پایه۵) قرار داره یعنی:

$$۵^{?} < ۳۲۱ < ۵^{?} \Rightarrow ۵^{۳} < ۳۲۱ < ۵^{۴}$$

۲) از این نامساوی لگاریتم بر پایه ۵ می گیرم یعنی:

$$\log_{۵}^{۵^{۳}} < \log_{۵}^{۳۲۱} < \log_{۵}^{۵^{۴}} \Rightarrow ۳ < \log_{۵}^{۳۲۱} < ۴$$

پس دو عدد صحیح ومتوالی مورد نظر ما ۳ و ۴ هستن.

📖 **مثال ۱۳۰:** می خوام بدونم $\log_{۳}^{\frac{۱}{۱۰۰}}$ بین کدوم دو عدد صحیح و متوالی قرار داره؟

۱) ابتدا $\log_{۳}^{\frac{۱}{۱۰۰}}$ رو طوری بازنویسی می کنم که علاوه بر مبنا ورودیش هم بزرگتر از یک بشه:

$$\log_{۳}^{\frac{۱}{۱۰۰}} = \log_{۳}^{۱۰۰^{-۱}} = \boxed{-\log_{۳}^{۱۰۰}}$$

۲) حالا بررسی می کنم که ۱۰۰ بین کدوم دو عدد تواندار (با پایه۳) قرار داره یعنی:

$$۳^{?} < ۱۰۰ < ۳^{?} \Rightarrow ۳^{۴} < ۱۰۰ < ۳^{۵}$$

۳) از این نامساوی log بر پایه ۳ می گیرم. یعنی:

$$\log_{۳}^{۳^{۴}} < \log_{۳}^{۱۰۰} < \log_{۳}^{۳^{۵}} \Rightarrow ۴ < \log_{۴}^{۱۰۰} < ۵ \longrightarrow \boxed{-۵ < -\log_{۳}^{۱۰۰} < -۴}$$

مثال ۱۳۱: اگر $۱۷ < N < ۶۰$ باشد آنگاه $\log_{۲}^{N}$ بین کدام دو عدد قراردارد؟

۱) ۳ و ۵ ۲) ۴ و ۶ ۳) ۴و ۷ ۴) ۵ و ۷

$۱۶ < ۱۷ < N < ۶۰ \Rightarrow ۲^{۴} < N < ۲^{۶} \rightarrow$ از طرفین log می گیریم $\rightarrow \log_{۲}^{۲^{۴}} < \log_{۲}^{N} < \log_{۲}^{۲^{۶}} \Rightarrow ۴ < \log_{۲}^{N} < ۶$

مثال ۱۳۲: حاصل $[\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{10}]$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: **گزینه ۲**

با استفاده از رابطه $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$ داریم:

$$[\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{10}] = \left[\frac{3}{2}\log_2 10\right] = \left(\log_{2^2} 10^3\right) = [\log_4 1000]$$

$$4^4 = 256 < 1000, 4^5 = 1024 > 1000 \Rightarrow 4^4 < 1000 < 4^5 \Rightarrow 4 < \log_4 1000 < 5 \Rightarrow [\log_4 1000] = 4$$

(روش دوم) $\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{10}} = \log_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{1000}} = \log_4^{1000}$

مثال۱۳۳: حاصل $\left[\frac{1}{5}\log 2\right]+[5\log 2]$ کدام است؟([] : علامت جزء صحیح)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: **گزینه۱**

$$[5\log 2]+\left[\frac{1}{5}\log 2\right]=[\log 32]+[\log\sqrt[5]{2}]$$

$$10<32<100\Rightarrow 1<\log 32<2\Rightarrow [\log 32[=1$$

$$1<\sqrt[5]{2}<10\Rightarrow 0<\log\sqrt[5]{2}<1\Rightarrow [\log\sqrt[5]{2}]=0\Rightarrow [\log 32]+[\log\sqrt[5]{2}]=1+0=1$$

مثال ۱۳۴: بیشترین مقدار عبارت $(\log_{۷}^{۵})^{۲\sin x+۱}$ کدام است؟

۱) $\log_{۵}^{۷}$ ۲) $\log_{۷}^{۵}$ ۳) $(\log_{۷}^{۵})^{۳}$ ۴) $(\log_{۵}^{۷})^{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$$۱<۵<۷ \Rightarrow \log_{۷}^{۱}<\log_{۷}^{۵}<\log_{۷}^{۷} \Rightarrow ۰<\log_{۷}^{۵}<۱$$

چون $۰<\log_{۷}^{۵}<۱$ پس عبارت $(\log_{۷}^{۵})^{۲\sin x+۱}$ هنگامی بیشترین مقدار را دارد که توانش کمترین مقدار باشد یعنی در حالتی که $\sin x=-۱$ پس بیشترین مقدار عبارت $(\log_{۷}^{۵})^{۲\sin x+۱}$ برابر است با:

$$(\log_{۷}^{۵})^{۲(-۱)+۱}=(\log_{۷}^{۵})^{-۱}=\log_{۵}^{۷}$$

پایان

موفق باشید