شناسایی و تعریف نقاط بحرانی:

تعریف نقاط بحرانی: نقطه‌ی $x=a$ یکی از نقاط میانی دامنه‌ی $f(x)$ در نظر بگیرید.

به این نقطه، نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ می‌گوییم اگر:

① $f(x)$ در $x=a$ ناپیوسته باشد ② $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌ناپذیر باشد

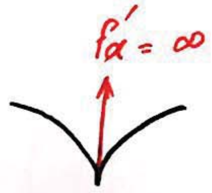
③ $f'(x)$ در $x=a$ برابر صفر شود ④ $f'(x)$ در $x=a$ بی‌نهایت شود: $f'(a)=\infty$

نقاط بحرانی معروف:

① نقاط ناپیوستگی تابع، ② نقاط زاویه‌دار ($f'_+ \neq f'_-$)، ③ ریشه‌های قدرمطلق

④ نقاط بازگشتی، ⑤ عطف قائم.

* نقاط بازگشتی:



$f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$

$n-m$: فرد

* نقاط عطف قائم:

$f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$

$n-m$: زوج

نکته مهم: ریشه‌های قدرمطلق که [illegible] باشند، **بحرانی** به حساب می‌آیند.

▨ **تست**: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x}$ چندتا است؟

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

حل: (۳)

① $\sqrt[3]{x} \longrightarrow x=0$ بازگشتی

② $f'=0 \longrightarrow f'=2x\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{1/7} \xrightarrow{1,2}$ ۳ نقطه

▨ **سراسری ۹۲ خارج ریاضی**: اگر نقاط بحرانی $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی باشند، مساحت مثلث کدام است؟

۱) 4　　۲) 4,5　　۳) 6　　۴) 8

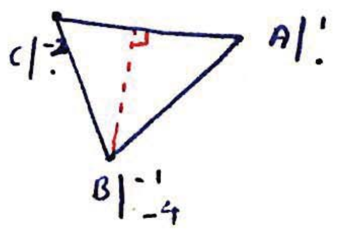
حل: (۳)

① ریشه قدرمطلق $\longrightarrow x^2+x-2=0 \begin{cases}\boxed{x=1}\\\boxed{x=-2}\end{cases}$

② $f'=0 \longrightarrow ((x-1)(x^2+x-2))'=0 \Rightarrow \underbrace{(x^2+x-2)+(2x+1)(x-1)}_{3x^2-3}=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\\boxed{x=-1}\end{cases}$

وقتی ریشه قدرمطلق را پیدا کردیم، علامت قدرمطلق را حذف می‌کنیم!

$\xrightarrow{\text{صدق در تابع}} A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\quad B\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right.\quad C\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$

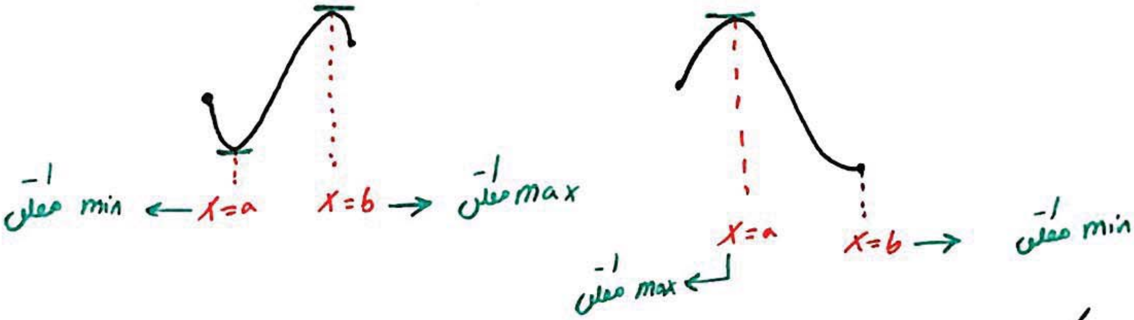


$S=1/2\times(4)(3)=6$

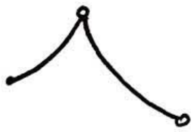
امین
تدارک

◈ اکسترمم مطلق و بیشترین و کمترین مقدار تابع:

تعریف اکسترمم مطلق: اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای عرض بیشتر از عرض تمام نقاط دامنه باشد آن را max مطلق و اگر دارای عرض کمتر از عرض تمام نقاط دامنه باشد آن را min مطلق می‌گوییم.



نکته ۱: ممکن است تابعی min و max مطلق نداشته باشد!



نکته ۲: توابع ثابت تمام نقاطشان min , max مطلق به حساب می‌آیند!

روش محاسبه اکسترمم مطلق:

۱) محاسبه نقاط بحرانی ۲) رسم جدول شامل نقاط بحرانی و سر بسته دامنه

۳) بررسی مقدار تابع در این نقاط و مشخص کردن بیشترین و کمترین مقدار

▨ سراسری ۹۵ تجربی: مقادیر min , max مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازه $[-4,3]$ به ترتیب کدام است؟

۱) $24 , -18$ ۲) $27, -45$ ۳) $27, -36$ ۴) $36, -27$

حل: (۲)

$$f'=0 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \begin{cases} x=5 \; \times \\ x=-3 \; \checkmark \end{cases}$$

x	-4	-3	3
f(x)			-45

مقدار در گزینه ۲

▨ سراسری ۹۲ ریاضی: کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

حل: (۴)

فرض کنیم: $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{-x^3} = 0$

$$\xrightarrow{x^2 \text{ را به رادیکال اضافه نماییم}} x + \sqrt{x^2 - x^3} \geqslant 0 \Rightarrow \min f(x) = 0$$

همواره + است پس به مقدار اولیه اضافه می‌کند

▨ سراسری ۸۸ ریاضی خارج: بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $1/3$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) فاقد max

حل: (۱)

فرض کنیم: $-x + \sqrt[3]{x^3} = 0$

$$\xrightarrow{-x^2 \text{ را به رادیکال اضافه کنیم}} -x + \sqrt{x^3 - x^2} \leqslant 0 \Rightarrow \max = 0$$

همواره - پس از مقدار اولیه کم می‌کند

▨ تست: بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 3 ۴) 4

حل: (۳)

نقاط بحرانی: $f' = 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	1	3	$1/3$	1

حد در بی‌نهایت

max

حد در بی‌نهایت

$D_f = (-\infty, +\infty)$

امین تدارک

◆ تعیین یکنوایی به کمک مشتق :

$f'_x > 0 \longrightarrow$ تابع اکیداً صعودی

$f'_x \geq 0 \longrightarrow$ تابع صعودی

$f'_x < 0 \longrightarrow$ تابع اکیداً نزولی

$f'_x \leq 0 \longrightarrow$ تابع نزولی

نکته ۱: وقتی $f'_x \geq 0$ یا $f'_x \leq 0$ باشد و تعداد نقاطی که $f'_x = 0$ محدود باشد تابع اکیداً یکنوا به حساب می‌آید.

مثال: اگر $f(x) = x^3$ را درنظر بگیرید ←

$f'(x) = 3x^2 \longrightarrow$

x		0	
f'_x	$+$	0	$+$

چون تابع فقط در $x=0$ مشتق اش صفر می‌شود ⟸ اکیداً صعودی است!

نکته ۲: اگر تابع دارای مجانب قائم باشد ← نه صعودی و نه نزولی (غیر یکنوا) به حساب می‌آید

▨ تست: تابع $f(x) = x^2 - 8\sqrt{x+3}$ در بازه‌ی $[-3,a]$ نزولی است، حداکثر a کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $1/3$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل، (۱)

$$f' = 2x - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\sqrt{x+3}} = 0 \rightarrow 2x = \frac{4}{\sqrt{x+3}} \rightarrow x\sqrt{x+3} = 2$$

$$\rightarrow x^2(x+3) = 4 \rightarrow \boxed{x=1} \xrightarrow{D_f : x \geq -3} \boxed{-3 \leq x \leq 1}$$

▨ سراسری ۹۷ تجربی با تغییر: نمودار تابع $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-\infty,2)$ ۴) $(-\infty,-1)$

حل: (۴)

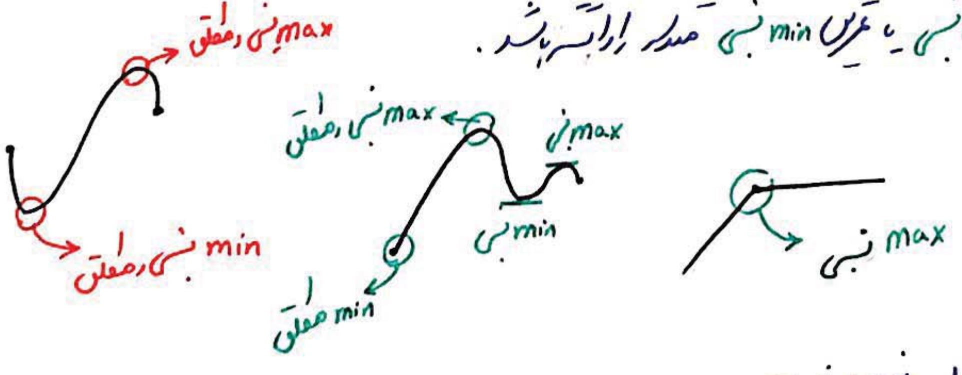
$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

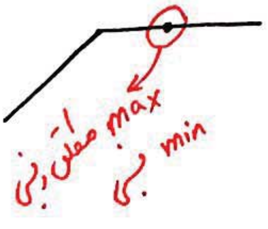
x		1	
f'	$-$	0	$+$

◀ اکسترمم نسبی:

نقطه‌ی $x = c$ از بازه $[a,b]$ را اکسترمم نسبی می‌گوییم هرگاه نسبت به نقاط اطراف خود نزدیک همسایگی بیشترین max نسبی یا کمترین min نسبی مقدار را داشته باشد.

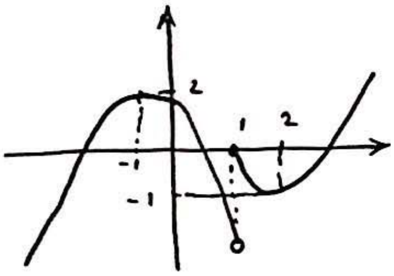


نکته: نقاط روی تابع ثابت، هم min نسبی هستند و هم max نسبی!



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & x\geq 1 \\ -x^2-2x+1 & x<1 \end{cases}$ چند min، max نسبی وجود دارد؟

نکته: برای یافتن تعداد اکسترمم نسبی توابع قدرمطلقی، چندضابطه‌ای و جزءصحیح باید رسم کنیم!



$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 : & \text{max} \text{ نسبی} \\ x=1 : & \text{max} \text{ نسبی} \\ x=2 : & \text{min} \text{ نسبی} \end{cases}$

آزمون اول مشتق در تعیین اکسترمم نسبی :

اگر $f'(a)=0$ شود، آن نقطه اکسترمم نسبی تابع f است اما عکس این قضیه درست نیست در حالت کلی، یعنی ضرورتاً در تمام اکسترمم‌های نسبی، f' برابر صفر نیست!

☑ سراسری ۹۱ ریاضی: اگر $f(x)=x-[x]$ باشد، $g(x)=2^x$، gof از نظر اکسترمم نسبی چگونه است؟

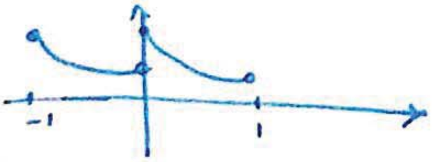
۱) دارای max و min
۲) دارای max و فاقد min
۳) فاقد max دارای min
۴) فاقد max و min

حل: (۲) در یک بازه به رسم نمودار این تابع می‌پردازیم:

$gof = 2^{x-[x]}$

$-1\leq x<0 \quad : \quad 2^{-x-1}$

$0\leq x<1 \quad : \quad 2^{-x}$



دارای max نسبی و فاقد min نسبی

سراسری ۹۵ خارج کشور: طول نقطه مینیمم نسبی $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: (۱)

$$f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2} \rightarrow f'=2(x-1)\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

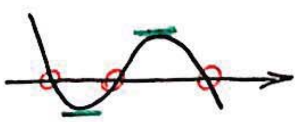
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)(3x+(x-1))}{3\sqrt[3]{x}}=0 \begin{cases} x=1 \\ \boxed{x=\frac{1}{4}} \end{cases}$$

در گزینه هاست

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

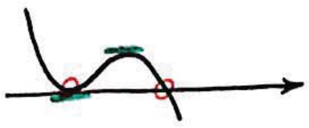
x		0		$1/4$		1	
$f'(x)$	$-$		$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

تحلیل تعداد ریشه منحنی درجه سوم به کمک اکسترمم نسبی:



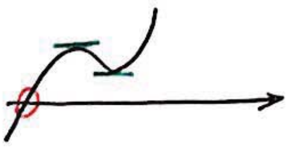
$y_{min}\cdot y_{max}<0$

سه ریشه



$y_{min}\cdot y_{max}=0$

دو ریشه



$y_{min}\cdot y_{max}>0$

یک ریشه

پس در تحلیل تعداد ریشه منحنی درجه سوم، y_{min} و y_{max} را حساب می‌نماییم و ضرب آن‌ها را بررسی می‌نماییم.

امین
تدارک

▨ سراسری ۹۷ تجربی: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ، به ازای کدام مقدار m ، معادلهٔ $f(x) = m$ فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $m<2$ یا $m>7$ ۲) $m<3$ یا $m>6$ ۳) $m<3$ یا $m>7$ ۴) $m<2$ یا $m>6$

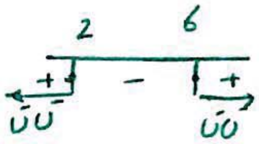
حل: (۴)

$$f(x) = m \Rightarrow \underbrace{x^3 - 6x^2 + 9x + 2 - m}_{\text{معادله برخورد}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{یک ریشه}} y_{min} \cdot y_{max} > 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$f(1) = 6 - m$ (مقدار به ازای $x=1$)

$f(3) = 2 - m$ (مقدار به ازای $x=3$) $\longrightarrow (6-m)(2-m) > 0$

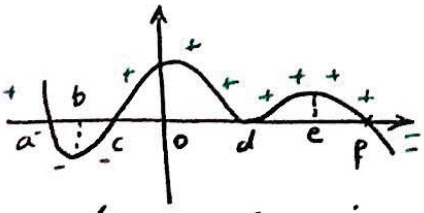


◭ مقایسه نمودار f , f' :

① در نقاطی که منحنی $y=f'(x)$ مثبت است ← تابع f صعودی است.

② در نقاطی که منحنی $y=f'(x)$ منفی است ← تابع f نزولی است.

③ در نقاطی $y = f'(x)$ تغییر علامت می‌دهد ← تابع f دارای Ext است



نمودار $y=f'(x)$ به شکل بالا

$(-\infty, a) \longrightarrow$ f اکیداً صعودی

$(a, c) \longrightarrow$ f اکیداً نزولی

$(c, f) \longrightarrow$ f اکیداً صعودی

$(f, +\infty) \longrightarrow$ f اکیداً نزولی

$x = a \longrightarrow$ f نسبی max

$x = c \longrightarrow$ f نسبی min

$x = f \longrightarrow$ f نسبی max

بهینه‌سازی: بهینه‌سازی یعنی یافتن بیشترین و کمترین مقدار یک کمیت برای حالات مورد نظر. در حل مسائل بهینه‌سازی به ترتیب زیر عمل می‌نماییم،

① تشکیل تابع هدف ← گام اول باید ضابطه تابعی را که می‌خواهیم مقدار آن را max یا min نماییم تشکیل دهیم.

② تبدیل تابع هدف به فرم تک‌متغیره ← با استفاده از اطلاعات درون مسئله باید تابع هدف را تک‌متغیره نماییم.

③ مقادیر min ، max تابع هدف را می‌یابیم.

چند نکته در بهینه‌سازی :

① اگر عبارتی به صورت $ax+by=c$ داشته باشد و بخواهیم عبارت به صورت xy را بیشینه کنیم کافی است $ax=by=\frac{c}{2}$ باشد!

تست: بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که مجموع قاعده و دو برابر ارتفاع آنها برابر 24 است، کدام است؟

۱) 12 ۲) 24 ۳) 36 ۴) 48

حل: (۳)

گام اول ① $S=\frac{1}{2}ah \xrightarrow{\text{تک‌متغیره}} S=\frac{1}{2}(24-2h)(h)$

گام دوم ② $a+2h=24 \Rightarrow a=24-2h$

$$\Rightarrow S=-h^2+12h \xrightarrow{\text{مشتق}} S'=-2h+12=0 \xrightarrow{Ext} \boxed{h=6}$$

$$\rightarrow a=24-2(6)=12 \rightarrow S=\frac{1}{2}(12)(6)=36$$

▨ تست: اگر محیط یک زمین مستطیل شکل 240 متر باشد، حداکثر مساحت آن چقدر است؟ ۱) 1200 ۲) 2400 ۳) 3600 ۴) 4800

حل: (۳)

$P = 2x+2y = 240$

$\Rightarrow x+y = 120 \Rightarrow xy = ?$

نکتهٔ صفحهٔ قبل $\rightarrow$ $x = y = 60 \Rightarrow \max\ xy = 60\times 60 = 3600$

▨ تست: حجم بزرگترین مخروطی که می‌توان درون کره‌ای به شعاع 12 محاط نمود، چقدر است؟ $(\pi \simeq 3)$ ۱) 2034 ۲) 2024 ۳) 2014 ۴) 2044

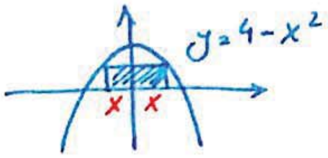
حل: (۱) نکته مهم: ارتفاع بزرگترین مخروطی که می‌توان درون کره‌ای به شعاع R محاط نمود: $h = 4/3 R$

$\Rightarrow h = 4/3 \times 12 = 16 \Rightarrow V_{max} = 1/3\, \pi R^2 h = \underbrace{1/3 \times \pi \times 144 \times 16}_{2034}$

▨ تست: بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگر روی منحنی $y = 4-x^2$ قرار دارد کدام است؟ ۱) $16\sqrt3$ ۲) $\frac{32\sqrt3}{9}$ ۳) $32\sqrt3$ ۴) $\frac{16\sqrt3}{3}$

حل: (۲)

$S = 2xy \xrightarrow{y=(4-x^2)} y = 2x(4-x^2)$



$\Rightarrow y = 8x-2x^3 \longrightarrow y' = -6x^2+8 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt3}{3} \longrightarrow y = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow S_{max} = 2\left(\frac{2\sqrt3}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32\sqrt3}{9}$