جهت تقعر تابع

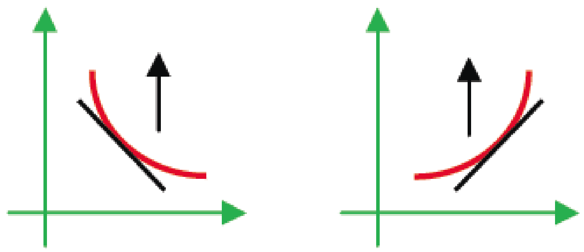
مدرس : استاد ایمان نخستین

www.riazisara.ir

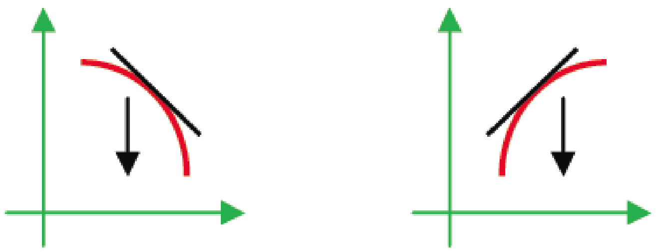
تقعر رو به بالا و تقعر رو به پایین:

الف) تقعر نمودار f در بازه (a,b) رو به بالاست، اگر و تنها اگر خطوط مماس بر نمودار تابع در زیر آن واقع شوند.

ب) تقعر نمودار f در بازه (a,b) رو به پایین است، اگر و تنها اگر، خطوط مماس بر نمودار تابع بالای آن واقع شوند.



(تقعر f رو به بالاست)



(تقعر f رو به پایین است)

گاهی به جای واژه تقعر از گودی یا خمیدگی نیز استفاده می‌شود.

قضیه: تابع f که روی بازه (a,b) دو بار مشتق‌پذیر است، در نظر بگیرید:

الف) هر گاه f' روی بازه (a,b) صعودی اکید باشد (یعنی $f''>0$)، می‌گوییم جهت تقعر نمودار f رو به بالاست.

ب) هرگاه f' روی بازه (a,b) نزولی اکید باشد (یعنی $f''<0$)، می‌گوییم جهت تقعر نمودار f رو به پایین است.

سؤال: جهت تقعر نمودار توابع زیر را تعیین کنید.

$1)\ y = x^4 - 6x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	

پس تقعر در بازه های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ رو به بالا و در بازه $(-1,1)$ رو به پایین است.

۲) $y = x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}}$ (سراسری ۸۷)

$$f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۴}{۳}\left(x^{\frac{۱}{۳}} - x^{-\frac{۲}{۳}}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}\right) = \frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + \frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۵}}\right)$$

$$= \frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + \frac{۲}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right) = \frac{۴}{۹}\left(\frac{x+۲}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right)$$

ریشه‌های صورت و مخرج $x = -۲$ و $x = ۰$ است، بنابراین:

همان‌طور که می‌بینید، در بازه های $(-\infty, -۲)$ و $(۰, +\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه‌ی $(-۲, ۰)$ تقعر رو به پایین است.

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f''		$+$	۰	$-$	$\|\|$	$+$	

بچه ها صورت این تست در کنکور ۸۷ بدین صورت بود که تقعر این تابع مزبور در بازه‌ی (a, b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟ خَب! پاسخ روشن است دیگرا! بزرگترین بازه ای که f دارای تقعر رو به پایین است، بازه $(-۲, ۰)$ می‌باشد و در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$، همان $(۰-(-۲))$ یعنی ۲ است.

نقطهٔ عطف (نقطه ای که تقعر نمودار در آن نقطه عوض می شود) تابع $y=\sqrt[m]{x^{n}}\,(ax+b)$ برابر است با:

$$x_t=\frac{m-n}{m+n}\left(\frac{b}{a}\right)$$

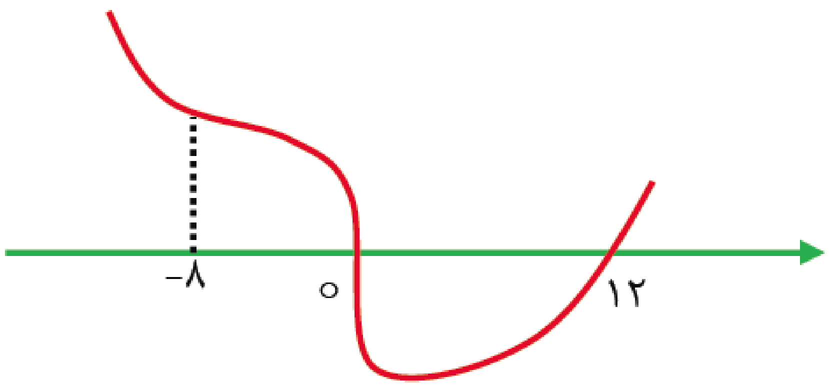
📖 سؤال: در کدام بازه تقعر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$ رو به پایین است.

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۶)

۱) $(-\infty,-8)$ ۲) $(-8,0)$ ۳) $(-4,2)$ ۴) $(0,2)$

$$f(x) = x^{\frac{۱}{۵}}(x-۱۲) = \sqrt[۵]{x}\,(x-۱۲)$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{۵-۱}{۵+۱}(-۱۲) = -۸$$

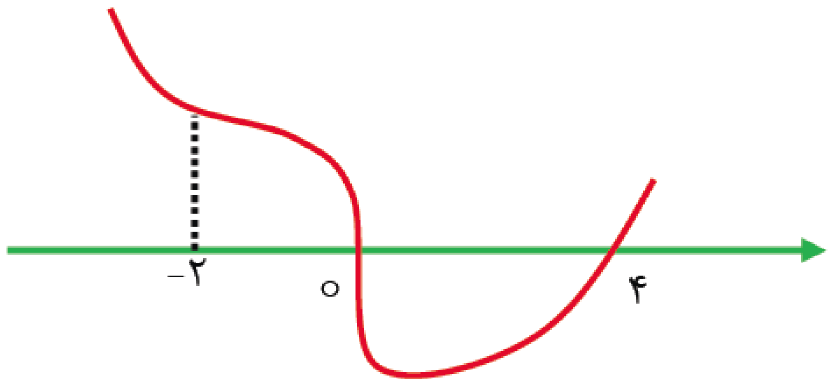


📖 سؤال: تقعر نمودار با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ در بازهٔ (a,b) رو به پایین است بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ∞

$$y = x^{\frac{۱}{۳}}(x-۴) = \sqrt[۳]{x}\,(x-۴)$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{۳-۱}{۳+۱}(-۴) = -۲$$



در بازهٔ $(-۲,۰)$ تقعر نمودار رو به پایین است پس:

$$b-a = ۰ \Rightarrow ۰-(-۲) = ۲$$

۳) $y = x^{5} - 5x^{4}$

$$f'(x) = 5x^{4} - 20x^{3} \Rightarrow f''(x) = 20x^{3} - 60x^{2} = 20x^{2}(x-3) \Rightarrow$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

پس جهت تقعر در $(3,+\infty)$ رو به بالا و در کل بازه $(-\infty,3)$ رو به پایین است.

سؤال: تقعر نمودار تابع $y = ax^{۴} - ۲x^{۳} + ۶ax^{۲}$ همواره رو به پایین است. حدود a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲} \le a \le \frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۲} \le a \le ۰$

۳) $a \le -\frac{۱}{۲}$

۴) $a \ge -\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه (۳)

کافی است همواره $y'' \leq 0$ باشد. پس:

$$y' = 4ax^3 - 6x^2 + 12ax \Rightarrow y'' = 12ax^2 - 12x + 12a = 12(ax^2 - x + a)$$

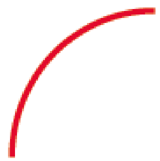
$$\xrightarrow{y''\leq 0} \begin{cases} \Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 1 \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } a \geq \frac{1}{2} \\ a < 0 \end{cases} \xrightarrow{a<0} a \leq -\frac{1}{2}$$

📖 سؤال: نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x-\cos x$ د ر حوالی $x=\frac{\pi}{۲}$ به کدام صورت است؟

$f'(x)=\cos x+\sin x \to f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱>۰ \to$ صعودی است $\frac{\pi}{۲}$ تابع در

$f''(x)=-\sin x+\cos x \to f''\left(\frac{\pi}{۲}\right)=-۱<۰ \to$ تقعر رو به پایین است

پس شکل تابع f در حوالی $\frac{\pi}{۲}$ به صورت مقابل است:



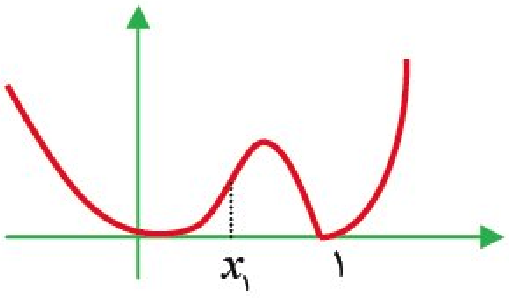
📖 **سؤال:** تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{۲}|x-۱|$ در بازه (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}(x-۱) & x\geq ۱ \\ -x^{۲}(x-۱) & x\leq ۱ \end{cases}=\begin{cases} x^{۳}-x^{۲} & x\geq ۱ \\ -x^{۳}+x^{۲} & x\leq ۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۲x & x>۱ \\ -۳x^{۲}+۲x & x<۱ \end{cases}\rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۶x-۲ & x>۱ \\ -۶x+۲ & x<۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f''(x)<۰}\begin{cases} ۶x-۲<۰\rightarrow x<\frac{۱}{۳} & x>۱ \quad \times \\ -۶x+۲<۰\rightarrow x>\frac{۱}{۳} & x<۱\rightarrow \frac{۱}{۳}<x<۱ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} b=۱ \\ a=\frac{۱}{۳} \end{cases}\rightarrow b-a=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

☜ **راه حل دوم)** نمودار را رسم می کنیم.



تابع در بازه‌ی $(x_1,1)$ یعنی $\left(\frac{1}{3},1\right)$ تقعر تابع رو به پایین است.

$$x_1=\frac{0+0+1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$$

در تابع $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ نقطه عطف

(نقطه ای که تقعر تابع عوض می شود) برابر :

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

📖 سؤال: تقعر نمودار تابع $y=x^{2}|x-3|$ در بازهٔ (a,b) به طول y های منفی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۶)

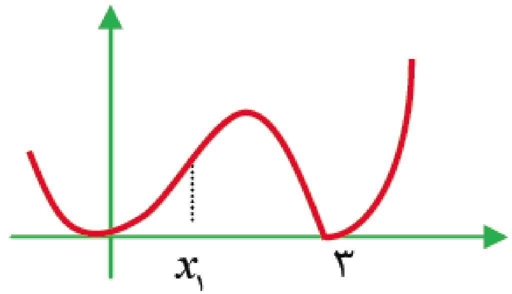
☜ روش اول)

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-3) & x\geq 3 \\ -x^2(x-3) & x\leq 3 \end{cases}=\begin{cases} x^3-3x^2 & x\geq 3 \\ -x^3+3x^2 & x\leq 3 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & x>3 \\ -3x^2+6x & x<3 \end{cases}\to f''(x)=\begin{cases} 6x-6 & x>3 \\ -6x+6 & x<3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f''(x)<0}\begin{cases} 6x-6<0\to x<1 & x>3 \ \times \\ -6x+6<0\to x>1 & x<3\to 1<x<3 \end{cases}\to\begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}\to b-a=2$$

☜ روش دوم)



$$x_1=\frac{0+0+3}{3}=1$$

$$\Rightarrow (x_1,3)=(1,3)$$

سؤال: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x+\frac{1}{x}$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

(سراسری خارج از کشور ۸۸)

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ: گزینه

$$f'(x)=x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}>0\xrightarrow[x^2\geq 0]{f''(x)>0}x^2-1>0\rightarrow x>1\bigcup x<-1 \qquad (1)$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}\xrightarrow{f''(x)<0}x<0 \qquad (2)$$

$$(1)\bigcap(2)\rightarrow x<-1$$

📖 سؤال: مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله $y=(x-۱)Lnx$ رو به پایین باشد کدام است؟

(خارج از کشور ۸۹)

$$D_f = x > ۰ \qquad (۱)$$

$$y' = Ln + \frac{۱}{x}(x-۱) = Lnx + \frac{x-۱}{x} = Lnx + ۱ - \frac{۱}{x}$$

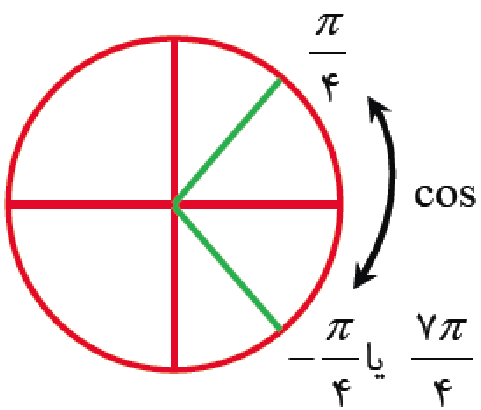
$$y'' = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} = \frac{x+۱}{x^۲} \xrightarrow[x^۲>۰]{y''<۰} x+۱<۰ \to x<-۱ \qquad (۲)$$

$$(۱)\bigcap(۲) = \phi$$

📖 **سؤال: مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{۲}+۲\sqrt{۲}\cos x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رو به بالا باشد در کدام بازه است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)**

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \to f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x \xrightarrow{f''(x)>0} 2-2\sqrt{2}\cos x>0 \to 2>2\sqrt{2}\cos x$$

$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

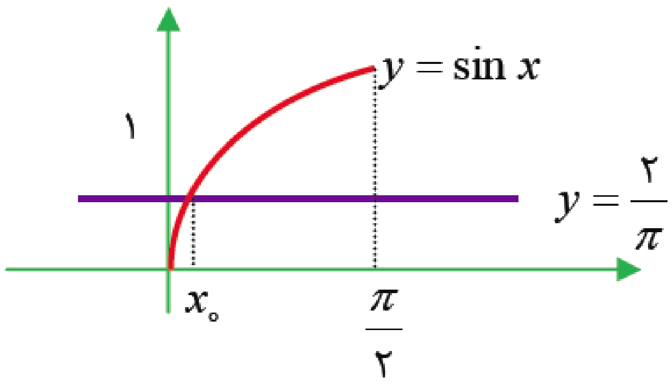


$\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\to \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \to \cos x>\frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$$

سؤال: تقعر نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x+\frac{x^{2}}{\pi}$ وقتی $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۹۱)

$$y' = \cos x + \frac{۲x}{\pi} \Rightarrow y'' = -\sin x + \frac{۲}{\pi}$$



حالا چه جوری ریشه $y'' = \circ$ $\left(-\sin x + \frac{۲}{\pi} = \circ\right)$ رو بدست بیاوریم:

$$\sin x = \frac{۲}{\pi} \left(\circ < \frac{۲}{\pi} < ۱\right)$$

قبل از $x_{\circ}$, $\sin x < \frac{۲}{\pi}$ و در نتیجه $-\sin x + \frac{۲}{\pi} > \circ$ و بعد از $x_{\circ}$ این نتیجه برعکس می‌شود پس تقعر منفی ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.

سؤال: تقعر نمودار تابع $\frac{x^{۲}}{۲\pi}+\cos x$ در بازه‌ی $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ چگونه است.

۱) همواره رو به پایین

۲) همواره رو به بالا

۳) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالا

۴) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین

$$y' = \frac{x}{\pi} - \sin x \Rightarrow y'' = \frac{1}{\pi} - \cos x$$

فرض کنیم $\cos x$ در α برابر $\frac{1}{\pi}$ شود که $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ در نتیجه خواهیم داشت:

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\pi} - \cos x$	$\frac{1}{\pi} - 1$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{\pi}$

پس ابتدا تقعر رو به پایین است و سپس رو به بالا.

سؤال: جهت تقعر تابع $y = x\sqrt{x^{۲}+۲}$ در بازه $(a,+\infty)$ رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است؟

(سراسری ۹۲)

$$y' = \sqrt{x^{۲}+۲} + \frac{۲x^{۲}}{۲\sqrt{x^{۲}+۲}} = \sqrt{x^{۲}+۲} + \frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۲}} = \frac{x^{۲}+۲+x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۲}} = \frac{۲x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۲}}$$

$$y'' = \frac{۴x\sqrt{x^{۲}+۲} - \frac{۲x^{۳}+۲x}{\sqrt{x^{۲}+۲}}}{x^{۲}+۲} = \frac{۴x^{۳}+۸x-۲x^{۳}-۲x}{(x^{۲}+۲)\sqrt{x^{۲}+۲}} = \frac{۲x(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}+۲)\sqrt{x^{۲}+۲}}$$

		۰	
y'	$-$		$+$

پس تقعر y در $(۰,+\infty)$ رو به بالا و در $(-\infty,۰)$ رو به پایین است پس $a=۰$ است.

📖 **سؤال**: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^{4} + ax^{3} + \frac{3}{2}x^{2}$ همواره رو به بالاست؟

(سراسری ۹۲)

$$y' = 4x^{3} + 3ax^{2} + 3x \to y'' = 12x^{2} + 6ax + 3 \xrightarrow{y''>0} (\text{ضریب } x^{2} > 0, \Delta' < 0)$$

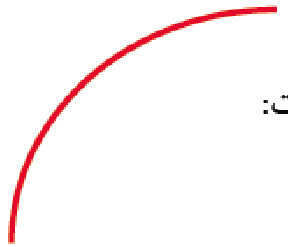
$$\to (3a)^{2} - 36 < 0 \to 9a^{2} - 36 < 0 \to a^{2} - 4 < 0 \to -2 < a < 2$$

سؤال: نمودار تابع $f(x)=x^{۲}e^{-x}$ در نزدیکی نقطه A به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

تابع در $x=۱$ صعودی است. $\rightarrow f'(x)=۲xe^{-x}-x^{۲}e^{-x}=(۲x-x^{۲})e^{-x}\rightarrow f'(۱)=e^{-۱}=\frac{۱}{e}\rightarrow$

$$f''(x)=(۲-۲x)e^{-x}-(۲x-x^{۲})e^{-x}=(x^{۲}-۴x+۲)e^{-x}\Rightarrow f''(۱)=-e^{-۱}<۰$$

تقعر تابع در حوالی $x=۱$ ، رو به پایین است. پس تابع $f(x)$ در حوالی $x=۱$ به صورت زیر است:



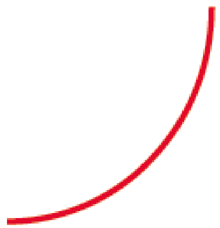
سؤال: نمودار تابع $y=\sin^2 x+\sin x$ در مجاورت $x=\frac{\pi}{6}$ به کدام صورت است؟

$$y'=2\sin x\cos x+\cos x=\sin 2x+\cos x\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}>0$$

پس y در مجاورت $\frac{\pi}{6}$ صعودی است.

$$y''=2\cos 2x-\sin x\rightarrow y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

پس تقعر y در حوالی $\frac{\pi}{6}$ رو به بالاست. پس نمودار y در حوالی $x=\frac{\pi}{6}$ به صورت مقابل است:



📖 سؤال: وضعیت تقعر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴x}{x^{۲}-۴x+۴}$ به کدام صورت است؟

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۴x}{x^{۲}-۴x+۴}=\frac{x^{۲}-۴x+۴-۴}{x^{۲}-۴x+۴}=۱-\frac{۴}{x^{۲}-۴x+۴}=۱-\frac{۴}{(x-۲)^{۲}}\rightarrow f'(x)=\frac{۸}{(x-۲)^{۳}}$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{-۲۴}{(x-۲)^{۴}}\rightarrow f''(x)<۰$$

پس تقعر $f(x)$ در دامنه خود $(R-\{۲\})$ رو به پایین است.

سؤال: تقعر منحنی $y=x^{2}+\sqrt{x}$ در بازه $(0,1)$ چه وضعیتی دارد؟

$$D_f : x \geq 0$$

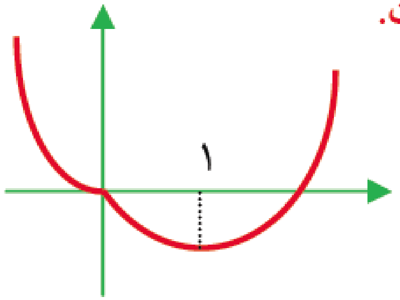
$$y=x^{2}+x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=2x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y''=2-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=2-\frac{1}{4x\sqrt{x}}=\frac{8\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{8}\right)}{4x\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{y''=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$	

پس منحنی تابع $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ تقعر رو به پایین و در بازه $\left(\frac{1}{4},1\right)$ تقعر رو به بالاست.

📖 سؤال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۴+ax^۳+bx+c$ به صورت زیر است. b کدام است.



۱) -۲ ‏ ۲) -۳

۳) -۴ ‏ ۴) -۵

$$(0,0)\in f \Rightarrow f(0)=0+c=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=x^4+ax^3+bx$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+b \xrightarrow{x=1} f'(1)=0 \Rightarrow 4+3a+b=0 \Rightarrow \boxed{3a+b=-4}$$

$$f''(x)=12x^2+6ax$$

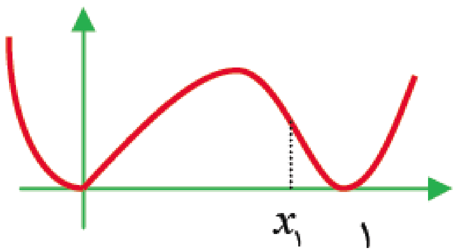
$f''(x)$ معادله‌ی درجه‌ی دوم است با توجه به شکل چون تقعر منحنی رو به بالاست پس همواره $f''(x)\geq 0$ است. چون $\mathrm{x}=0$ یکی از ریشه های f'' است. بنابراین برای اینکه شرط $f''(x)\geq 0$ برقرار باشد باید $\mathrm{x}=0$ ریشه‌ی مضاعف ان باشد زیرا در غیر صورت حتماً بازه ای وجود دارد که $f''<0$ شود پس باید $a=0$ شود. $3a+b=-4 \xrightarrow{a=0} b=-4$

📖 **سؤال:** تقعر نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2|x|$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است.

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱ ۵) $\frac{4}{3}$

[redacted] نمودار تابع را رسم می کنیم.

$$f(x)=(x-1)^2|x|=(x-1)(x-1)|x|$$



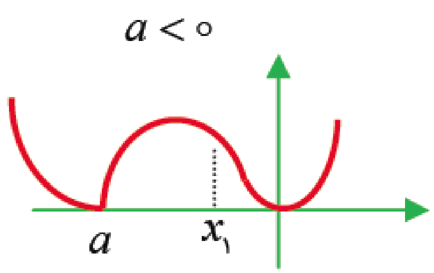
طول نقطه‌ی عطف $x_1=\frac{1+1+0}{3}=\frac{2}{3}$

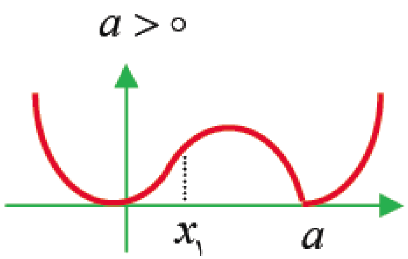
پس در بازه‌ی $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ تقعر رو پایین است.

📖 سؤال: بازه‌ی $(b,3)$ وسیع ترین بازه‌ای است که تقعر تابع $y=x^2|x-a|$ رو به پایین است. مقدار a^2+b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۴

[redacted] نمودار تابع به صورت زیر است:





چون در فرض سؤال گفته انتهای بازه ۳ است پس باید $a > \circ$ باشد:

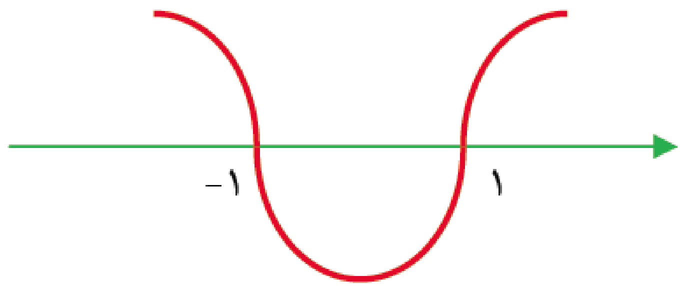
پس $(b,3) = (x_1, a)$ یعنی $a = 3$ است. $\Rightarrow a^2 + b = 3^2 + 1 = 10$

$$x_1 = \frac{\circ + \circ + 3}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

📖 **سؤال:** در کدام نقاط زیر جهت تقعر تابع $y=\sqrt[3]{x^{2}-1}$ عوض می شود.

۱) ±1 ۲) $1,0$ ۳) $\frac{1}{3},3$ ۴) ۱ ، ۳

$$y=\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}$$



واضح است در $x=\pm1$ جهت تقعر عوض می شود.

📖 **سؤال:** در کدام بازه تابع $y = x^{۲} e^{-x}$ نزولی با تقعر رو به پایین است.

۱) $(۲-\sqrt{۲}, ۲)$ ۲) $(۲, ۲+\sqrt{۲})$ ۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(۰, ۲-\sqrt{۲})$

نزولی بودن تابع مشتق پذیر y به معنای آن است که y' کوچکتر یا مساوی صفر باشد و رو به رو پایین بودن تقعر تابع دو بار مشتق پذیر y به معنای آن است که $y'' \le 0$ در نتیجه:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) \le 0 \xrightarrow{e^{-x}>0} 2x - x^2 \le 0 \Rightarrow \boxed{x \ge 2 \qquad x \le 0} \qquad (1)$$

$$y'' = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \le 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 \le 0 \Rightarrow \boxed{2 - \sqrt{2} \le x \le 2 + \sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x \in [2, 2 + \sqrt{2}]$$

📖 سؤال: به ازای چند مقدار صحیح a تقعر نمودار تابع $ax^{4}+(a-6)x^{3}+3x^{2}$ همواره روبه بالاست.

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

تابع f دو بار مشتق پذیر است پس رو به بالا بودن تقعر معادل است با مثبت بودن مشتق دوم پس مشتق دوم باید همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$$f'(x) = ۴ax^۳ + ۳(a-۶)x^۲ + ۶x$$

$$f''(x) = ۱۲ax^۲ + ۶(a-۶)x + ۶$$

در نتیجه اولاً $a > ۰$ ثانیاً $\Delta' \le ۰$

$$\Delta' = ۹(a-۶)^۲ - ۶\times ۱۲a \le ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲۰a + ۳۶ \le ۰ \Rightarrow (a-۱۸)(a-۲) \le ۰ \Rightarrow ۲ \le a \le ۱۸ \xrightarrow{a>۰} ۲ \le a \le ۱۸$$

یعنی ۱۷ مقدار صحیح برای a وجود دارد.

📖 **سؤال: به ازای چه مقادیری از a تابع $y=ax+\sqrt{۴-x^{۲}}$ ماکسیمم نسبی دارد.**

۱) $a \geq ۰$ ۲) $a \leq ۰$ ۳) $-۲ \leq a \leq ۲$ ۴) **جمیع مقادیر a**

مشتق دوم $y=\sqrt{۴-x^{۲}}$ منفی است چون یک نیم دایره است و تقعر آن رو به پایین است. مشتق دوم این تابع با مشتق دوم تابع $y=ax+\sqrt{۴-x^{۲}}$ یکسان است. پس تقعر این تابع همواره رو به پایین است و لذا همواره ماکسیمم دارد.

📖 سؤال: در کدام بازه زیر جهت تقعر تابع $y=x^{۲}-\sin ۲x$ رو به پایین است؟

۱) $\left(\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۱۱\pi}{۱۲}\right)$ ۲) $\left(۰,\frac{۷\pi}{۱۲}\right)$ ۳) $\left(\frac{۳\pi}{۸},\frac{۵\pi}{۸}\right)$ ۴) $\left(\frac{۵\pi}{۸},\pi\right)$

$$y'=۲x-\cos ۲x \Rightarrow y''=۲+۴\sin ۲x$$

$$y''<۰ \Rightarrow \sin ۲x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۷\pi}{۶}<۲x<\frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$\frac{۷\pi}{۱۲}<x<\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

سؤال: در کدام بازه‌ی زیر نمودار مشتق تابع $y=\cos^{۲}x-۲\cos x$ نزولی اکید است.

۱) $\left(۰,\frac{۲\pi}{۳}\right)$ ۲) $\left(\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}\right)$ ۳) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}\right)$ ۴) $\left(\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\right)$

$$y' = -۲\sin x\cos x + ۲\sin x = -\sin ۲x + ۲\sin x$$

$$y'' = -۲\cos ۲x + ۲\cos x$$

$$y'' < ۰ \Rightarrow -\cos ۲x + \cos x < ۰ \Rightarrow ۱ - ۲\cos^۲ x + \cos x < ۰$$

$$\Rightarrow (\underbrace{۱-\cos x}_{\text{همواره نامنفی}})(۲\cos x + ۱) < ۰ \Rightarrow ۲\cos x + ۱ < ۰ \Rightarrow \cos x < -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} < x < \frac{۴\pi}{۳}$$

📖 **سؤال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^{۲} x-۲\cos x\,;x\in[۰,۲\pi]$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است.**

(سراسری داخلی ریاضی ۹۶)

۱) $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳}\right)$ ۲) $\left(\pi,\frac{۴\pi}{۳}\right)$ ۳) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\pi\right)$ ۴) $\left(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲}\right)$

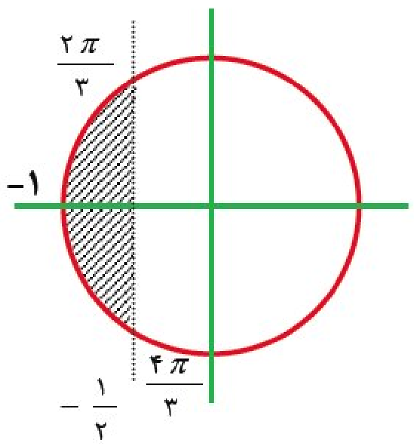
$$f'(x)=-2\sin x\cos x+2\sin x \xrightarrow[f'<0]{\text{نزولی}} 2\sin x(\underbrace{-\cos x+1}_{\text{همواره نامنفی}})<0 \Rightarrow 2\sin x<0 \Rightarrow \sin x<0$$

$\Rightarrow$ **x در ناحیه سوم یا چهارم** (۱)

$$f'(x)=-\sin 2x+2\sin x \Rightarrow f''(x)=-2\cos 2x+2\cos x=-2(2\cos^2 x-1)+2\cos x$$

$$=-4\cos^2 x+2\cos x+2<0 \Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1>0 \Rightarrow \underbrace{(\cos x-1)}_{\text{همواره منفی}}(2\cos x+1)>0$$

$$\Rightarrow 2\cos x+1<0 \Rightarrow \cos x<-\frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x \in \left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$$

📖 سؤال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^۲ x-۲\sin x; x\in[۰,۲\pi]$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

(خارج ریاضی ۹۶)

۱) $\left(\frac{۷\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ ۲) $\left(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۱۱\pi}{۶}\right)$ ۳) $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۵}\right)$ ۴) $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۶}\right)$

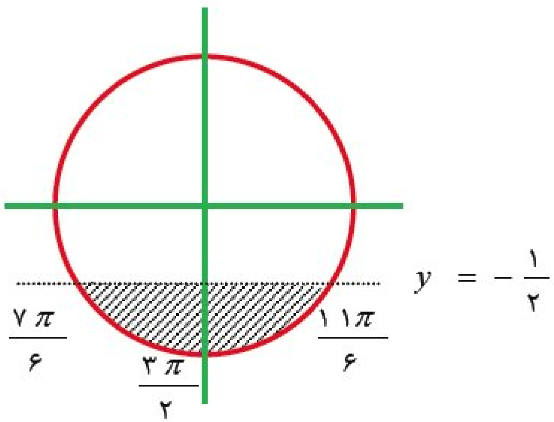
$$f'(x)=2\cos x\sin x-2\cos x\Rightarrow 2\cos x\underbrace{(\sin x-1)}_{\text{منفی}}>0\Rightarrow \cos x<0$$

$\Rightarrow$ x در ناحیه دوم یا سوم (۱)

$$f'(x)=\sin 2x-2\cos x\Rightarrow f''(x)=2\cos 2x+2\sin x=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x$$

$$=-4\sin^2 x+2\sin x+2<0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1>0\Rightarrow \underbrace{(\sin x-1)}_{\text{منفی}}(2\sin x+1)>0\Rightarrow 2\sin x+1<0\Rightarrow \sin x<-\frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$$

📖 سؤال: درکدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}e^{-x}$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالاست.

(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $(۰,۳-\sqrt{۳})$ ۲) $(۳-\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(۳,۳+\sqrt{۳})$ ۴) $(۳+\sqrt{۳},+\infty)$

ـ گزینه (۱)

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=(3x^2-x^3)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,3$$

x		0		3	
f'	$+$		$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

پس تابع در بازه‌ی $\tau_1=(-\infty,3)$ صعودی است حالا می رویم سراغ مشتق دوم:

$$f''(x)=(6x-3x^2)e^{-x}-e^{-x}(3x^2-x^3)=e^{-x}(6x-3x^2-3x^2+x^3)=e^{-x}(x^3-6x^2+6x)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow x=0,3\pm\sqrt{3}$$

		0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

پس تقعر تابع در بازه های $(0,3-\sqrt{3}),(3+\sqrt{3},+\infty)$ به سمت بالاست بنابراین بازه ای که تابع در آن هم صعودی و هم تقعرش به سمت بالا باشد می شود اشتراک این سه بازه یعنی: $(0,3-\sqrt{3})$

سؤال: در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=e^{x-۲x^۲}$ صعودی وتقعر نمودار آن رو به پایین است.

(سراسری ریاضی خارج ۹۳)

۱) $\left(-\infty,\frac{۱}{۴}\right)$ ۲) $\left(-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴}\right)$ ۳) $\left(-\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴}\right)$ ۴) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴}\right)$

ـ گزینه (۲)

$$f(x)=e^{x-۲x^۲} \Rightarrow f'(x)=(۱-۴x)e^{x-۲x^۲} \xrightarrow{\text{تابع صعودی است}} ۱-۴x>۰ \qquad (۱)$$

$$f''(x)=-۴e^{x-۲x^۲}+(۱-۴x)e^{x-۲x^۲}(۱-۴x)=e^{x-۲x^۲}(-۴+(۱-۴x)^۲) \xrightarrow{\text{تقعر پایین}} f''(x)<۰$$

$$(۱-۴x)^۲-۴<۰ \Rightarrow -۲<۱-۴x<۲ \qquad (۲)$$

$$(۱)\bigcap(۲) \qquad ۰<۱-۴x<۲ \Rightarrow -۱<-۴x<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}<x<\frac{۱}{۴}$$

سؤال: تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x\sqrt{x^{۲} + ۲}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است.

۱) صفر　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) $-\infty$

ـ گزینه (۱)

$$y = x\sqrt{x^۲+۲} \Rightarrow y' = \sqrt{x^۲+۲} + x\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۲}}\right) = \frac{x^۲+۲+x^۲}{\sqrt{x^۲+۲}} = \frac{۲x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۲}}$$

$$y'' = \frac{۴x\sqrt{x^۲+۲} - \dfrac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۲}}(۲x^۲+۲)}{x^۲+۲} = \frac{۴x(x^۲+۲) - x(۲x^۲+۲)}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}} = \frac{۲x^۳+۶x}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۲x\overbrace{(x^۲+۳)}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}}_{\text{مثبت}}} > ۰ \Rightarrow x > ۰$$

یعنی تقعر منحنی در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ رو به بالاست بنابراین کمترین مقدار a برابر صفر است.

📖 **سؤال:** نمودار تابع $y = xLn\,|x|$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است. (خارج از کشور ریاضی ۹۴)

۱) $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ ۲) $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ ۳) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ ۴) $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

ـ گزینه (۲)

$$y' = Ln\,|x| + x.\left(\frac{1}{x}\right) = Ln\,|x| + 1 < 0 \Rightarrow Ln\,|x| < -1 \Rightarrow |x| < e^{-1} \Rightarrow -\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e} \qquad (1)$$

$$y'' = \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow x < 0 \qquad (2) \Rightarrow (1) \bigcap (2)\; -\frac{1}{e} < x < 0$$

📖 **سؤال:** **نمودار تابع $y=|x|e^{-x}$ درکدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است. (سراسری ریاضی ۹۴)**

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

ـ گزینه (۲)

$$y=\begin{cases} xe^{-x} & x\geq ۰ \\ -xe^{-x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} e^{-x}-xe^{-x} & x>۰ \\ -e^{-x}+xe^{-x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} e^{-x}(۱-x) & x>۰ \\ e^{-x}(x-۱) & x<۰ \end{cases}$$

$$y'<۰\Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x>۰\Rightarrow e^{-x}(۱-x)<۰\Rightarrow x>۱\Rightarrow x>۱ \\ \\ \text{اگر } x<۰\Rightarrow e^{-x}(x-۱)<۰\Rightarrow x<۱\Rightarrow x<۰ \end{cases}$$

پس تابع در دو بازه‌ی $(-\infty,۰),(۱,+\infty)$ نزولی است.

$$y''=\begin{cases} -e^{-x}(۱-x)-\mathrm{e}^{-x} & x>۰ \\ e^{-x}(۱-x)+\mathrm{e}^{-x} & x<۰ \end{cases}$$

$$y''=\begin{cases} e^{-x}(\mathrm{x}-۲) & x>۰ \\ e^{-x}(۲-x) & x<۰ \end{cases}$$

$$y''<۰\Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x>۰\Rightarrow e^{-x}(x-۲)<۰\Rightarrow x<۲\Rightarrow ۰<x<۲ \\ \text{اگر } x<۰\Rightarrow e^{-x}(۲-x)<۰\Rightarrow x>۲ \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس در بازه‌ی $(۰,۲)$ تقعر تابع رو به پایین است با توجه به گزینه ها تابع در بازه‌ی $(۱,۲)$ نزولی و تقعر رو به پایین است.

سؤال: طول بزرگترین بازه ای که تقعر تابع $f(x)=(x+k)Ln(x+۲)$ در آن رو به پایین است برابر ۵ می باشد، مقدار k کدام است.

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

ـ گزینه (۴)

دامنه‌ی تابع $(-۲,+\infty)$ است پس:

$$f'(x)=Ln(x+۲)+\frac{x+k}{x+۲}$$

$$f''(x)=\frac{۱}{x+۲}+\frac{۲-k}{(x+۲)^{۲}}=\frac{x+۴-k}{(x+۲)^{۲}}<۰\to x<k-۴$$

بین نامعادلات $x>-۲$ و $x<k-۴$ اشتراک می گیریم پس:

$$x\in(-۲,k-۴)\longrightarrow \text{طول بازه } =k-۲=۵\Rightarrow k=۷$$

پایان

موفق باشید