به نام خداوند قادر متعال

اتحادها + فرمول های پایه ای مثلثات همراه با اثبات

حامد دستورانی

اقتصاد – قم المقدسه

ویرایش دوم شهریور **96**

هدیه به روان پاک پدرم

روح پدرم شاد که می گفت به استاد   فرزند مرا عشق بیاموز و دگر هیچ

اتحادهای ساده :

$$\boxed{(x+y)^n=\binom{n}{r}x^r y^{n-r} \quad ,\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$1)\begin{cases}(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\\(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\(x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}x^2+y^2=\otimes\to x^2-(-1)(y)^2=x^2-i^2y^2=(x+iy)(x-iy)\ \ ,\ \ i=\sqrt{-1}\to i^2=-1\\x^2-y^2=(x-y)(x+y)\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\\x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)\end{cases}$$

$$6)\begin{cases}x^4+y^4=\otimes\to (x^2)^2-(-1)(y^2)^2=(x^2)^2-i^2(y^2)^2=(x^2-iy^2)(x^2+iy^2)\\x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)\\x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)\end{cases}$$

$$8)\begin{cases}x^6+y^6=\otimes\to (x^3)^2-(-1)(y^3)^2=(x^3)^2-i^2(y^3)^2=((x^3)-(iy^3))((x^3)+(iy^3))\\x^6-y^6=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\end{cases}$$

اتحاد ها با نمایش دیگر :

$$9)\ x^{2n+1}-y^{2n+1}=(x-y)\left(x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^{2}+x^{2n-3}y^{3}....+x^{2n-n}y^{n}\right)$$
$$=(x-y)\left(x^{2}-2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^{2}\right)\left(x^{2}-2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^{2}\right)$$
$$.....\left(x^{2}-2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^{2}\right)$$

$$10)\ x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)\left(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^{2}-x^{2n-3}y^{3}....+x^{2n-n}y^{n}\right)$$
$$(x+y)\left(x^{2}+2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^{2}\right)\left(x^{2}+2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^{2}\right)$$
$$.......\left(x^{2}+2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^{2}\right)$$

$$11)\ x^{2n}-y^{2n}=(x-y)(x+y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}+...+x^{n-n}y^{n}\right)$$
$$\left(x^{n-1}-x^{n-2}y-x^{n-3}y^{2}+...-x^{n-n}y^{n}\right)$$
$$=(x-y)(x+y)\left(x^{2}-2xy\cos\frac{\pi}{n}+y^{2}\right)\left(x^{2}-2xy\cos\frac{2\pi}{n}+y^{2}\right)$$
$$......\left(x^{2}-2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+y^{2}\right)$$

$$12)\ x^{2n}+y^{2n}=\left(x^{2}+2xy\cos\frac{\pi}{n}+y^{2}\right)\left(x^{2}+2xy\cos\frac{3\pi}{2n}+y^{2}\right)$$
$$....\left(x^{2}+2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+y^{2}\right)$$

یک کاربرد :

عبارت $y = x^5 - 1$ را به عامل های اول تجزیه کنید :

با توجه به اتحاد های بالا : $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1)$

اما هنوز به عامل های اول تجزیه نشده است. از فرمول معادل آن عبارت را پیش می بریم :

$$(x^5 - 1) = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$$

$$\begin{cases} 1)\quad \cos\frac{4\pi}{5} = \cos(144) = \cos(180-36) = -\cos 36 = -\sin 54 \to -\cos 2(18) = -\sin 3(18) \\ \qquad -1 + 2\sin^2(18) = -3\sin(18) + 4\sin^3(18) \\ \qquad \to 4\sin^3(18) - 2\sin^2(18) - 3\sin(18) + 1 = 0 \\ \qquad 4t^3 - 2t^2 - 3t - 1 = 0 \to (t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 \begin{cases} t_1 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \\ t_2 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \otimes \end{cases} \end{cases}$$

دو مقدار برای سینوس 18 درجه بدست آمد که چون sin18>0 فقط مقدار مثبت قابل قبول می باشد.

حالا که سینوس 18 درجه محاسبه شد می توانیم بگوییم :

$$\boxed{\cos 36 = 1 - 2\sin^2 18 = 1 - 2\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \xrightarrow{\cos144 = -\cos36} \cos144 = -\cos 36 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

و از اینجا می توان حاصل $\cos\frac{2\pi}{5}$ را نیز محاسبه کرد:

$$2)\quad \boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \cos(72) = \sin(18) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

پس بطور کلی تجزیه به این صورت حاصل گردید :

$$(x^5 - 1) = (x-1)\left(x^2 - \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}x + 1\right)$$

دو اتحاد مهم اما غیر معروف :

اتحاد لاگرانژ

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$

اتحاد اویلر

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab\right)\\&=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)\left(\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(a-b\right)^2\right)\\&\rightarrow if\ a+b+c=0, a=b=c\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc\end{aligned}$$

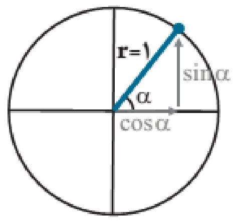
مجموع ها :

$$\begin{cases}a)1+2+3+...+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}\\ b)1+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n-1\right)}{6}\\ c)1+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}\\ d)1+2^4+3^4+...+n^4=\dfrac{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}\end{cases}$$

$$\begin{cases}e)1+3+5+...\left(2n-3\right)+\left(2n-1\right)=n^2\\ f)1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}{3}=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}\\ g)1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2\left(2n-1\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}h)1\times2+2\times3+3\times4+...+(n-1)n=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}\\ d)\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}\\ e)\dfrac{1}{1\times5}+\dfrac{1}{5\times9}+\dfrac{1}{9\times13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}\end{cases}$$

تمام فرمول های مثلثات همراه اثبات : دایره مثلثاتی همانند شکل زیر با شعاع یک واحد در نظر بگیرید. در ربع اول (به خاطر سادگی) یک کمان (مثلا 45 درجه) رسم کنید طبق رابطه فیثاغورس (که برای اثبات آن در کتب ریاضی چندین روش ذکر شده است) داریم:



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ابتدا تعدادی **فرمول ابتدایی** را معرفی و اثبات می کنیم تا سنگ بنایی باشد برای هر فرمولی دیگر :

$$\color{red}{1)}\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\color{red}{2)} \begin{cases} \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \tan x . \cot x = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \begin{cases} \xrightarrow{\div \cos^2 x} \color{red}{3)}\ 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \color{red}{4)} \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} \\ \xrightarrow{\div \sin^2 x} \color{red}{5)}\ 1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \color{red}{6)}\ \sin^2 x = \dfrac{1}{1 + \cot^2 x} \end{cases}$$

$$\color{red}{7)} \cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \xrightarrow{\text{because}} \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \xrightarrow{\div \sin^2 x} \ldots.$$

$$\color{red}{8)} \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\text{because}} \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \xrightarrow{\div \cos^2 x} \ldots.$$

$$\color{red}{9)} \quad \left(\sin x \pm \cos x\right)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x$$

$$because: \quad \left(\sin x \pm \cos x\right)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm 2 \sin x \cos x$$

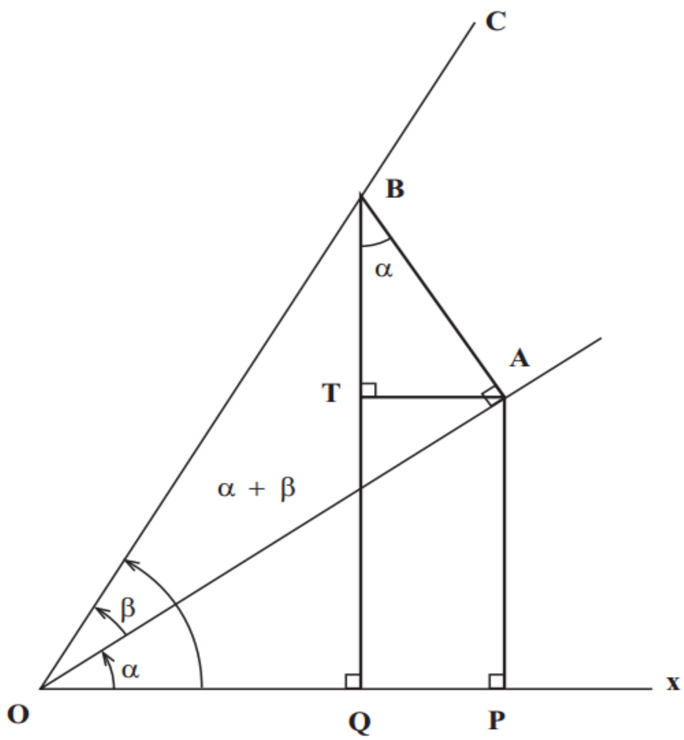
فرمول های جمع و تفریق دو کمان :

$$\color{red}{10)} \sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \xrightarrow{\text{because}} :$$

در شکل زیر فرض می کنیم نیم خط OA با محور OX زاوه α و با OC زاویه β بسازد از A بر OA عمودی خارج می کنیم تا OC را در نقطه B قطع کند از A عمود AP و از B عمود BQ را بر OX رسم می کنیم و نیز از A عمود AT را بر BQ فرود می آوریم زاویه ABT برابر α و داریم :

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}=\frac{BT+TQ}{OB}=\frac{BT+AP}{OB}\xrightarrow[\sin A=\frac{AP}{OA}\rightarrow AP=OA\sin\alpha]{\cos\alpha=\frac{BT}{BA}\rightarrow BT=BA\cos\alpha}$$

$$\frac{BA\cos\alpha+OA\sin\alpha}{OB}=\frac{BA}{OB}\cos\alpha+\frac{OA}{OB}\sin\alpha=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$



به همین ترتیب می توان برای $\cos(\alpha+\beta)$ نیز نوشت.

$$11)\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$12)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\xrightarrow{because}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\xrightarrow{\div(\cos\alpha\cos\beta)}$$

$$12-1)\rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}\xrightarrow{\tan x=\frac{1}{\cot x}}\cdots$$

$$13)\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\xrightarrow{because}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\xrightarrow{\div(\cos\alpha\cos\beta)}$$

$$13-1)\ \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\cot\beta-\cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta+1}\xrightarrow{\tan x=\frac{1}{\cot x}}\cdots$$

14) $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha.\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}\xrightarrow{\div(\sin\alpha\sin\beta)}\dots$

15) $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha.\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}\xrightarrow{\div(\sin\alpha\sin\beta)}\dots$

و در عبارات بالا اگر $\alpha=\beta$ باشد آنگاه :

16) $\sin 2x=2\sin x\cos x$ $\begin{cases}\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\xrightarrow{\text{because}}\sin 2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha\\ \sin 4a=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\xrightarrow{\text{because}}\sin 4a=\sin 2(2\alpha)\\ \sin 6a=2\sin 3\alpha\cos 3\alpha\xrightarrow{\text{because}}\sin 6a=\sin 2(3\alpha)\end{cases}$

17) $\sin 2x\begin{cases}\sin 2x=\dfrac{2\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\xrightarrow{because}\dfrac{\sin 2x}{1}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\overset{\div\sin^2 x}{=}\dfrac{2\cot x}{1+\cot^2 x}\\ \sin 2x=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\xrightarrow{because}\dfrac{\sin 2x}{1}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\overset{\div\cos^2 x}{=}\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\end{cases}$

18) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\begin{cases}\xrightarrow{\sin^2 x=1-\cos^2 x}19)\ \cos 2x=2\cos^2 x-1\to 20)\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\\ \xrightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x}21)\ \cos 2x=1-2\sin^2 x\to 22)\ \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\end{cases}$

23) $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\xrightarrow{because}\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}-\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

24) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\frac{\cos 2x+1}{2}}=\boxed{\tan^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$

25) $\tan 2x\begin{cases}\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\xrightarrow{\div\cos^2 x}\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\ \tan 2x=\dfrac{2\cot x}{\cot^2 x-1}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\xrightarrow{\div\sin^2 x}\dfrac{2\cot x}{\cot^2 x-1}\end{cases}$

26) $\cot 2x\begin{cases}\cot 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\xrightarrow{\div\cos^2 x}\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\\ \cot 2x=\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}\xrightarrow{\text{because}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\xrightarrow{\div\sin^2 x}\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}\end{cases}$

با توجه به فرمول های شماره 12 و 13 طبیعی است که :

$$27)\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\ ,\ \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

$$\xrightarrow{because}\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{\tan 45+\tan x}{1-\tan 45\tan x}$$

چند فرمول مهم و کاربردی که از نصف کردن کمان بدست می آید عبارتند از :

$$28)\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\xrightarrow{\text{because}}\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\xrightarrow{\div\cos^2\frac{x}{2}}\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\xrightarrow{then}\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$29)\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\xrightarrow{\text{because}}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\xrightarrow{\div\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\xrightarrow{then}\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$30)\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\to\sin^2 x=1-\cos^2 x=\csc x-\cot x$$

$$30.1)\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\xrightarrow{20,22}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}\overset{\times\sqrt{1+\cos x}}{=}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{\left(1+\cos x\right)^2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$31)\begin{cases}\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\sin\alpha\cos\beta\xrightarrow{because}\sin\alpha\cos\beta+\cancel{\sin\beta\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\beta\cancel{-\sin\beta\cos\alpha}\\ \sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{because}\dots\\ \cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)=2\cos\alpha\cos\beta\xrightarrow{because}\dots\\ \cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)=-2\sin\alpha\sin\beta\xrightarrow{because}\dots\end{cases}$$

$$32)\begin{cases}\tan x+\cot x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}\xrightarrow{because}\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\\ \tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}\xrightarrow{because}\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}\\ \tan x-\cot x=-2\cot 2x\xrightarrow{because}\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\dfrac{-\cos 2x}{\dfrac{\sin 2x}{2}}\end{cases}$$

$$33)\ \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}\xrightarrow{because}\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$34)\ \boxed{\cos^4 x-\sin^4 x=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x}$$

$$35)\begin{cases}35-1)\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\sin^2 x\xrightarrow{\text{because}}\cos^2 x+\sin^2 x=1\to\\ \to\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=(1)^2\to\left(\cos^2 x\right)^2+\left(\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x=1\\ \to\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\sin^2 x\\ 35-2)\cos^4 x+\sin^4 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\xrightarrow{\text{because}}1-2\cos^2 x\sin^2 x=1-2\left(\underbrace{\cos x.\cos x}_{\frac{\sin 2x}{2}}.\sin x.\sin x\right)\end{cases}$$

$$36)\begin{cases}36-1)\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\cos^2 x\sin^2 x\xrightarrow{\text{because}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3=1\to\ldots..\\ 36-2)\cos^6 x+\sin^6 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\xrightarrow{\text{because}}1-3\cos^2 x\sin^2 x=1-3\underbrace{\cos x\cos x}_{\frac{\sin 2x}{2}}\sin x\sin x=..\end{cases}$$

فرمول های 3 و 4 برابر کمان :

$$37)\sin 3x=-\left(4\sin^3 x-3\sin x\right)\xrightarrow{\text{because}}\sin\left(2x+x\right)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x\to$$

$$2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-\sin^3 x\xrightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x}2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-\sin^3 x-\sin^3 x$$

$$=3\sin x-4\sin^3$$

$$38)\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\xrightarrow{\text{because}}\cos\left(2x+x\right)=\cos 2x\cos x-\sin x\sin 2x\to\ldots.$$

$$39)\ \tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\xrightarrow{\text{because}\ \ \tan 3x=\tan(2x+x)}=\frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x.\tan x}\xrightarrow{if\ \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}\ldots.$$

$$40)\cot 3x=\frac{3\cot x-\cot^3 x}{1-3\cot^2 x}\xrightarrow{\text{because}\ \ \cot 3x=\cot(2x+x)}=\frac{\cot 2x.\cot x-1}{\cot 2x+\cot x}\xrightarrow{if\ \cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}}\ldots.$$

41) $\sin 4x=(\sin x)(-4\cos x+8\cos^3 x)=4\sin x.\cos 3x-4\cos x.\sin 3x$

$=1-8\cos^2+8\cos^4 x$

42) $\cos 4x=1-8\cos^2+8\cos^4 x\xrightarrow{\text{because}}2\cos 3x.\cos x-\cos 2x\to$

$\to 2(-3\cos x+4\cos^3 x)\cos x-(-1+2\cos^2 x)\to(-6\cos^2 x+8\cos^4 x)-(-1+2\cos^2 x)$

43) $\tan 4x=\dfrac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}\xrightarrow{\text{because}}\tan 2(2x)=\tan(2x+2x)$

چند فرمول کاربردی دیگر:

44) $\cos 5x\ \ =5\cos x-20\cos^3 x+16\cos^5 x$

45) $\sin 5x=(\sin x)(1-12\cos^2 x+16\cos^4 x)$

$\cos nx=2\cos(n-1)x.\cos x-\cos(n-2)x\xrightarrow{\cos 4x}2\cos 3x\cos x-\cos 2x$

46) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{because}}\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

47) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{because}}\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

48) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{because}}\cdots\cdots$

49) $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{because}}\cdots\cdots$

فرمول های تبدیل ضرب به جمع یا تفریق :

$$50)\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}\Big[\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big]\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\Big[\cos(x-y)+\cos(x+y)\Big]\\ \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}\Big[\sin(x-y)+\sin(x+y)\Big]\end{cases}$$

because ; $\dfrac{1}{2}\Big[\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big]=\dfrac{1}{2}\Big[\cos x\cos y+\sin x\sin y-(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\Big]$

$=\dfrac{1}{2}\Big[\cos x\cos y+\sin x\sin y-\cos x\cos y+\sin x\sin y\Big]=\dfrac{1}{2}2\sin x\sin y$

تبدیل جمع و تفریق به ضرب :

$$51)\begin{cases}\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}\\ \cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{because}} 52)\sin\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)=2\sin x\cos y \quad if\ p=x+y,q=x-y\rightarrow x=\frac{p+q}{2},y=\frac{p-q}{2}$$

$$\rightarrow \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin^2 x-\cos^2 y=\sin\left(x+y\right)\cos\left(x-y\right)$$

$$53)\ \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}=\frac{\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$$

هزینه استفاده از این فایل تعداد سه صلوات نثار مادر امام زمان عج که چنین گلی را به عالم هدیه کرده است.

این اثر قطعا خالی از اشکال نخواهد بود پیشاپیش از عزیزانی که اصلاحات خود را به آدرس وبلاگم ارسال کنند تقدیر و تشکر می کنم.

موفق باشید حامد دستورانی