RIAZISARA

تبدیل نمودار توابع

تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

www.riazisara.ir

@riazisara

@riazisara.ir

رسم نمودار توابع مختلف یکی از مهم‌ترین مباحث در کنکور است. فرض کنید در ضابطهٔ توابع مختلفی که شکل آنها را می‌شناسیم (مانند $y = x^{۲}$ ، $y = \sqrt{x}$ ، $y = |x|$ ، $y = \frac{۱}{x}$ ، $y = \sin x$ و...)، یا تابعی که نمودار آن در سوال (تست) داده شده است، تغییراتی ایجاد شده باشد. در این موارد باید بتوانیم نمودار تابع جدید را رسم کنیم و تغییرات ایجاد شده در ضابطهٔ تابع را بر روی دامنه و برد تابع اعمال کنیم.

در هر تبدیل نمودار، یک یا چند تا از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱ – انتقال عمودی نمودار (انتقال نمودار به سمت بالا یا پایین)

۲ – انتقال افقی نمودار (انتقال نمودار به سمت چپ یا راست)

۳ – انقباض یا انبساط عمودی نمودار

۴ – انقباض یا انبساط افقی نمودار

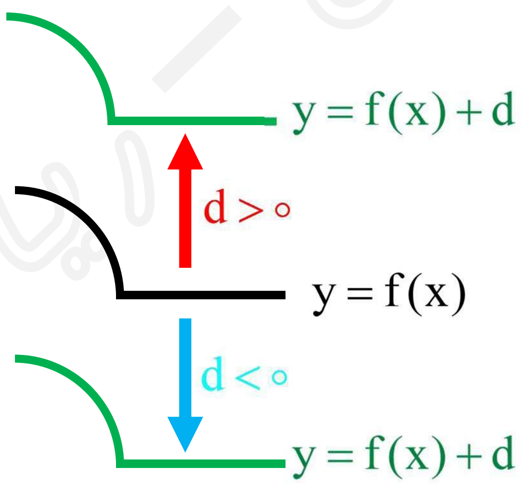
حالت اول - انتقال عمودی:

اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و $g(x)=f(x)+d$، آنگاه

$$g(x_\circ)=f(x_\circ)+d=y_\circ+d$$

بنابراین نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار تابع f با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ+d)$ روی نمودار تابع g متناظر است.

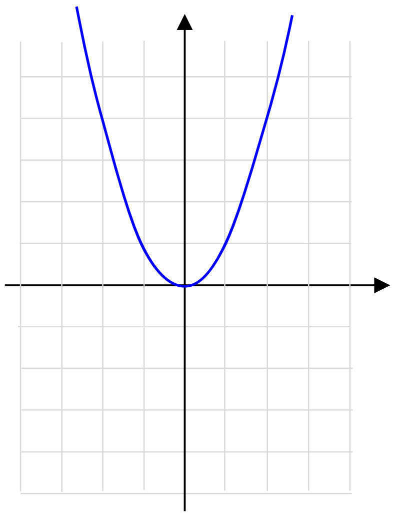
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+d$، در صورتی که $d>\circ$ باشد، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را d واحد در راستای قائم به سمت بالا و در صورتی که $d<\circ$ باشد، نمودار تابع $y=f(x)$ را $|d|$ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.



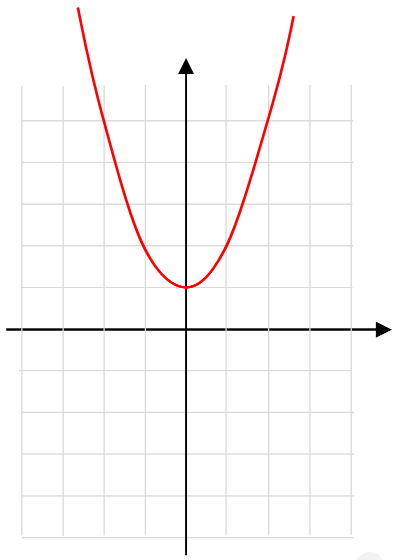
نکته

دامنهٔ توابع $y=f(x)$ و $y=f(x)+d$ با هم برابرند.

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$ را رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y = f(x) + ۱$ و $y = f(x) - ۴$ را رسم کنید.

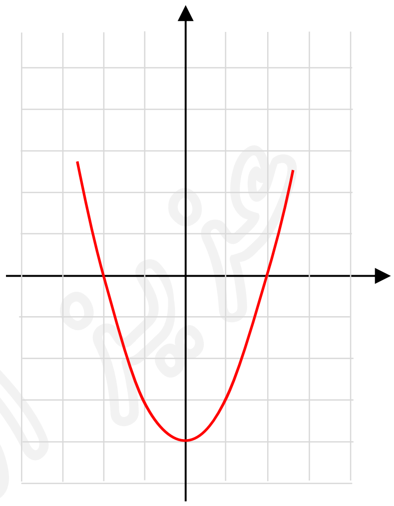


$f(x) = x^{۲}$



$y = f(x) + ۱$

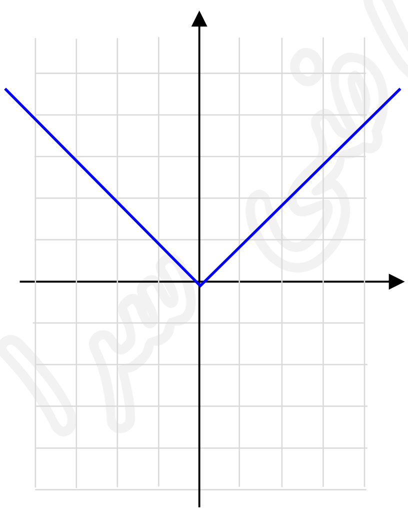
$y = x^{۲} + ۱$



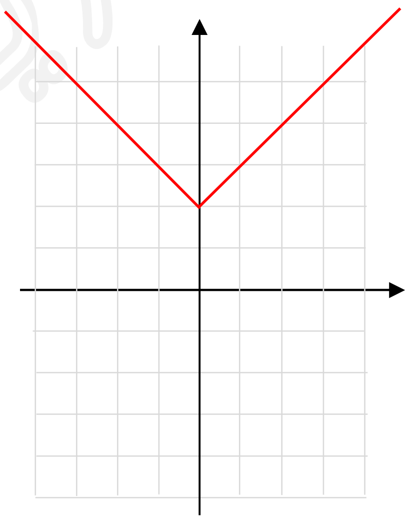
$y = f(x) - ۴$

$y = x^{۲} - ۴$

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y = f(x) + ۲$ و $y = f(x) - ۳$ را رسم کنید.

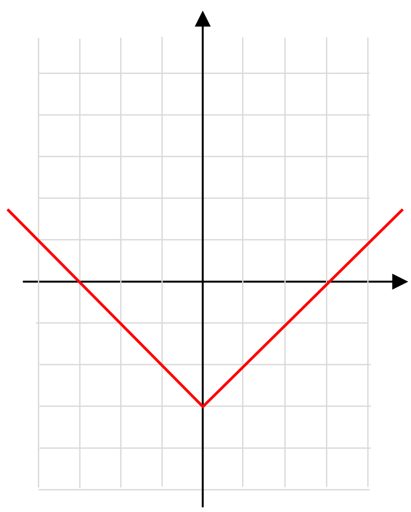


$f(x) = |x|$



$y = f(x) + ۲$

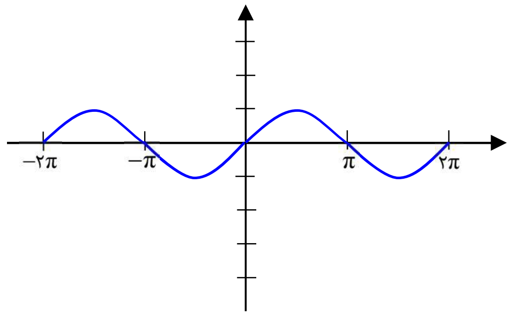
$y = |x| + ۲$



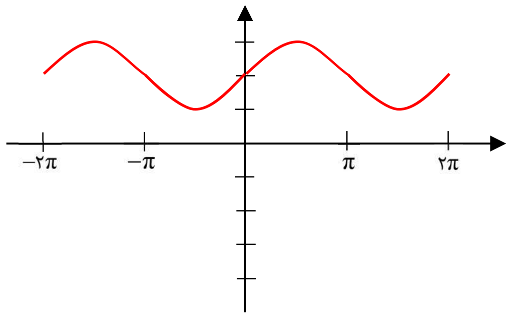
$y = f(x) - ۳$

$y = |x| - ۳$

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin(x)$ را در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y=f(x)+۲$ و $y=f(x)-۱$ را رسم کنید.

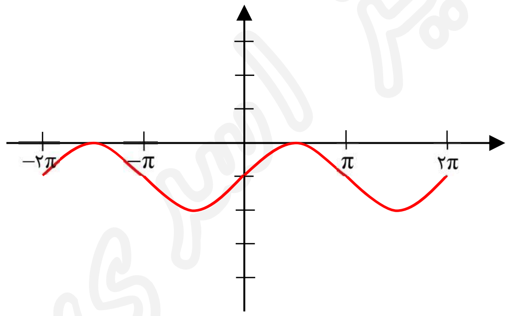


$f(x)=\sin(x)$



$y=f(x)+۲$

$y=\sin(x)+۲$



$y=f(x)-۱$

$y=\sin(x)-۱$

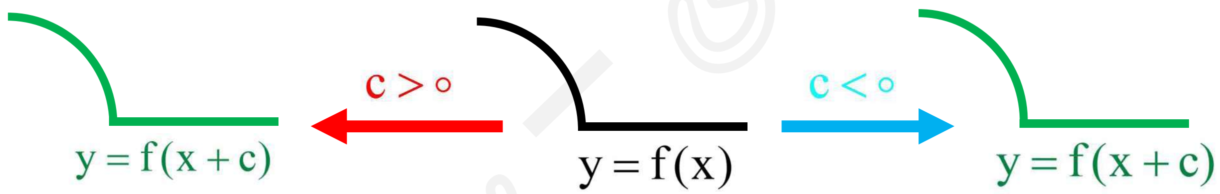
حالت دوم - انتقال افقی:

اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و $g(x) = f(x+c)$ آنگاه:

$$g(x_\circ - c) = f(x_\circ - c + c) = f(x_\circ) = y_\circ$$

بنابراین نقطهٔ $(x_\circ - c , y_\circ)$ روی نمودار تابع g با نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار تابع f متناظر است.

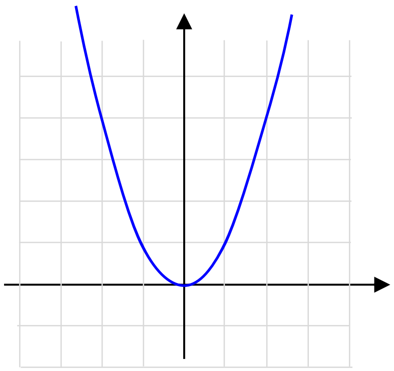
برای رسم نمودار تابع $y = f(x+c)$، در صورتی که $c > \circ$ باشد، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را c واحد در راستای افقی به سمت چپ و در صورتی که $c < \circ$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ را $|c|$ واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم.



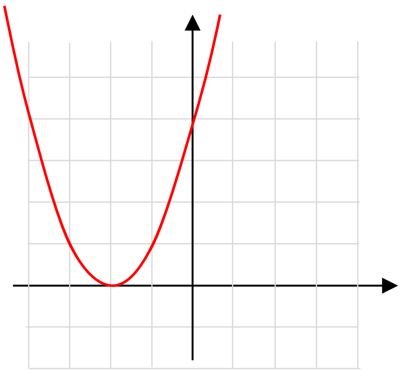
نکته

برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(x+c)$ با هم برابرند.

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^{2}$ را رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y=f(x+2)$ و $y=f(x-1)$ را رسم کنید.

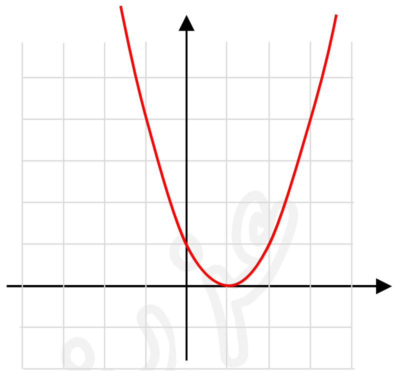


$f(x)=x^{2}$



$y=f(x+2)$

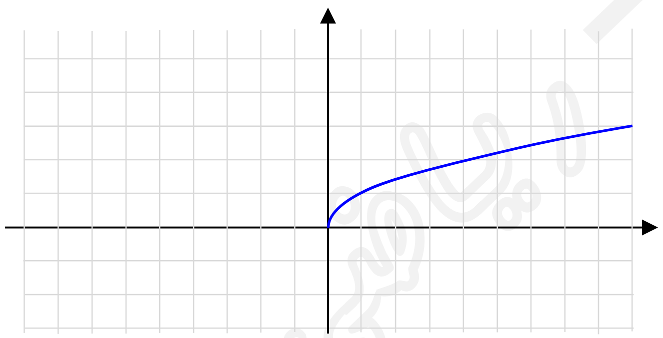
$y=(x+2)^{2}$



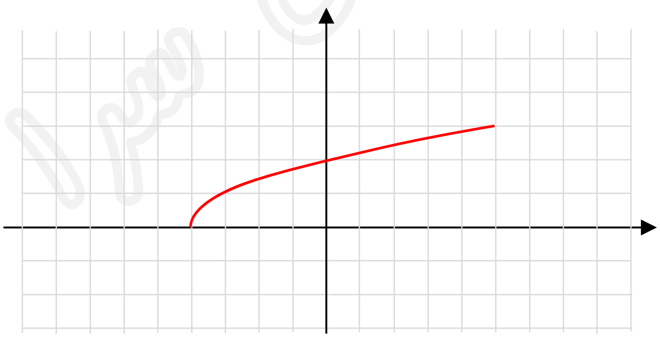
$y=f(x-1)$

$y=(x-1)^{2}$

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[0,9]$ رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y=f(x+4)$ و $y=f(x-2)$ را رسم کنید.

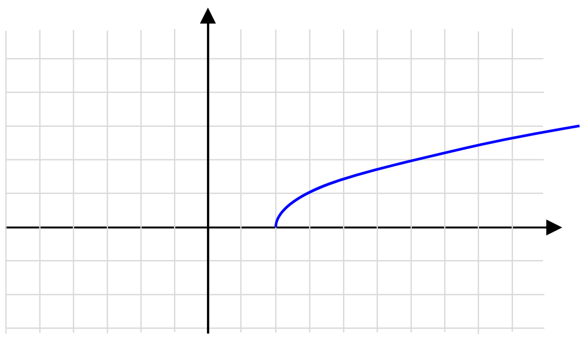


$f(x)=\sqrt{x}\quad ; x\in[0,9]$



$y=f(x+4)$

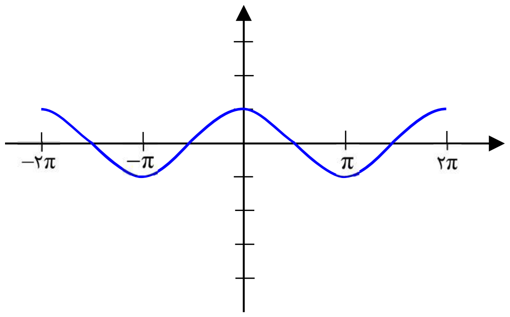
$y=\sqrt{x+4}\quad ; x\in[-4,5]$



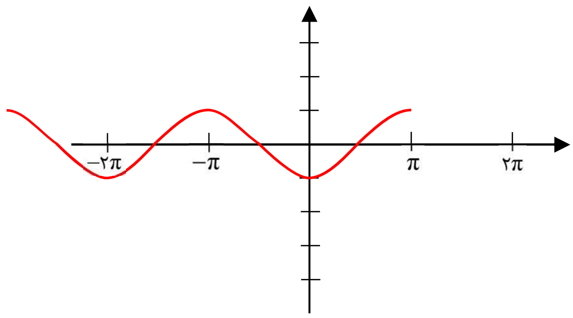
$y=f(x-2)$

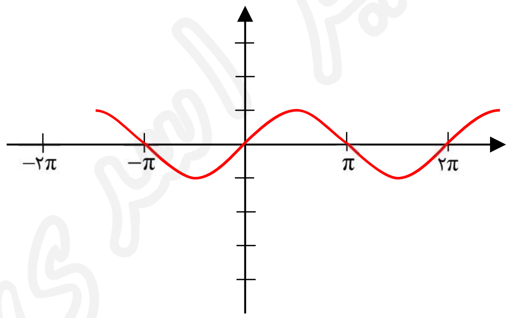
$y=\sqrt{x-2}\quad ; x\in[2,11]$

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=\cos(x)$ را در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار توابع $y=f(x+\pi)$ و $y=f(x-\frac{\pi}{۲})$ را رسم کنید .



$f(x)=\cos(x)$





$y=f(x+\pi)$

$y=\cos(x+\pi)$

$; x\in[-۳\pi,\pi]$

$y=f(x-\frac{\pi}{۲})$

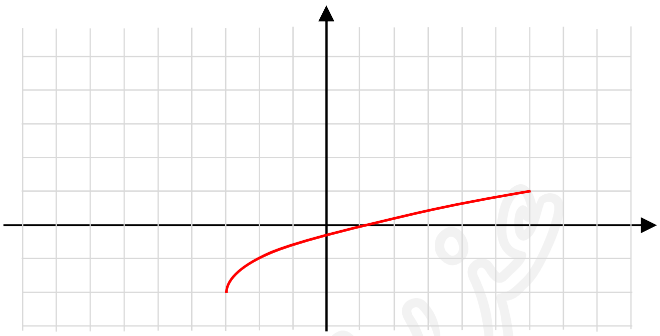
$y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

$; x\in[\frac{-۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}]$

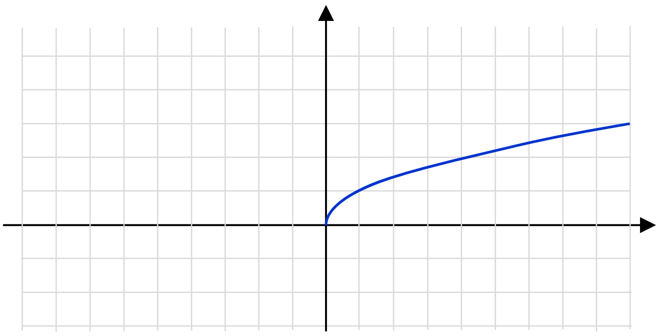
نکته

برای رسم نمودار $y=f(x+c)+d$ به کمک انتقال نمودار تابع $y=f(x)$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را $|c|$ واحد در جهت افقی (چپ یا راست با توجه به علامت c) و سپس $|d|$ واحد در جهت عمودی (بالا یا پایین با توجه به علامت d) انتقال می‌دهیم.

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۰,۹]$ رسم کنید، سپس به کمک انتقال آن، نمودار تابع $y=f(x+۳)-۲$ را رسم کنید.



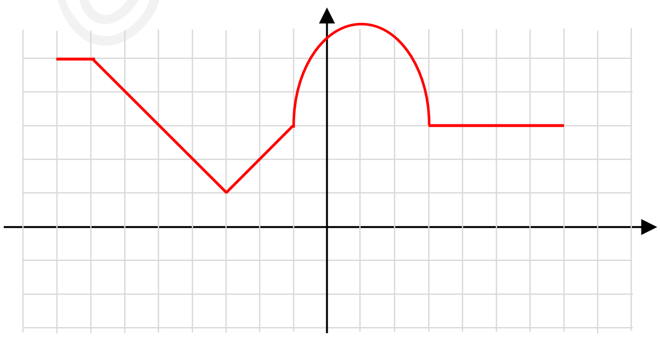
$f(x)=\sqrt{x+۳}-۲$



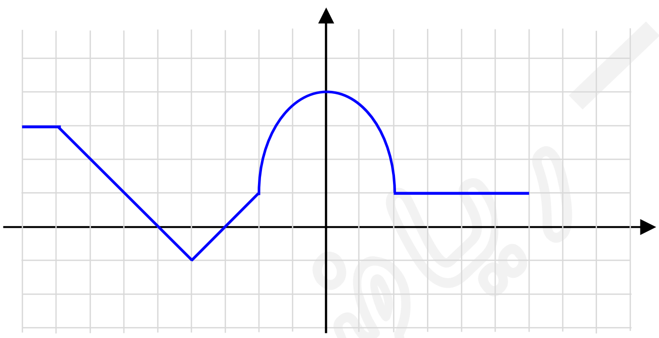
$f(x)=\sqrt{x}$

انتقال نمودار تابع $y=f(x)$، ۳ واحد به سمت چپ (در جهت منفی محور طول‌ها) و ۲ واحد به سمت پایین (در جهت منفی محور عرض‌ها)

مثال شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است، نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.



$g(x)=f(x-۱)+۲$



$y=f(x)$

انتقال نمودار تابع $y=f(x)$، ۱ واحد به سمت راست (در جهت مثبت محور طول‌ها) و ۲ واحد به سمت بالا (در جهت مثبت محور عرض‌ها)

✓ **نتیجه:**

اگر $(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و $g(x)=f(x+c)+d$ آنگاه:

$$g(x_۰-c)=f(x_۰-c+c)+d=f(x_۰)+d=y_۰+d$$

بنابراین نقطهٔ $(x_۰-c,y_۰+d)$ روی نمودار تابع g با نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f متناظر است.

مثال نقاط $A(-۳,۴)$ و $B(۲,-۵)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ با چه نقاطی روی نمودار تابع $g(x)=f(x-۶)+۸$ متناظرند؟

حل:

$$A=(-۳,۴) \Rightarrow A'=(-۳+۶,۴+۸) \Rightarrow A'=(۳,۱۲)$$

$$B=(۲,-۵) \Rightarrow B'=(۲+۶,-۵+۸) \Rightarrow B'=(۸,۳)$$

حالت سوم - انقباض یا انبساط عمودی:

اگر $(x_{\circ},y_{\circ})$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و $g(x)=af(x)$ آنگاه:

$$g(x_{\circ})=af(x_{\circ})=ay_{\circ}$$

بنابراین نقطهٔ $(x_{\circ},y_{\circ})$ روی نمودار تابع f با نقطهٔ $(x_{\circ},ay_{\circ})$ روی نمودار تابع g متناظر است.

برای رسم نمودار $y=af(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در عدد a ضرب کنیم.

نکته

دامنه توابع $y=f(x)$ و $y=af(x)$ با هم برابرند.

مثال اگر نقطهٔ $M(۲,-۳)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و M' نقطهٔ متناظر آن روی نمودار $y=-۴f(x)$باشد، مختصات M' را بیابید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x_{M'}=x_M=۲ \\ y_{M'}=-۴y_M=-۴(-۳)=+۱۲ \end{array}\right\} \rightarrow M'(۲\,,+۱۲)$$

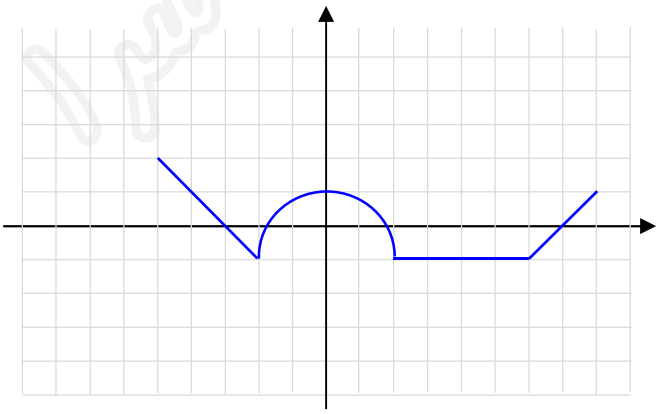
مثال شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است، نمودار هر کدام از توابع را رسم کنید .

الف) $g(x)=-۲f(x)$

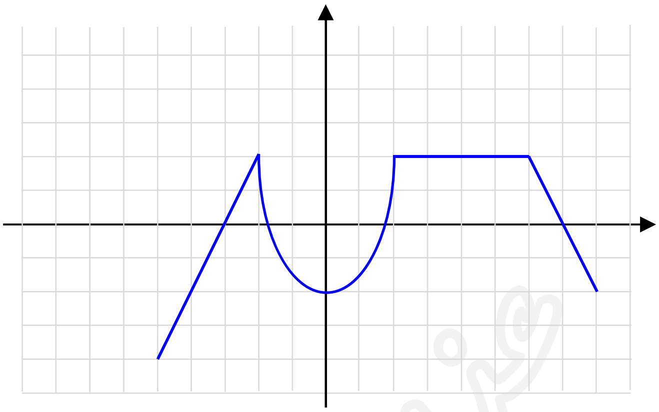
ب) $g(x)=۳f(x)$

ج) $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$

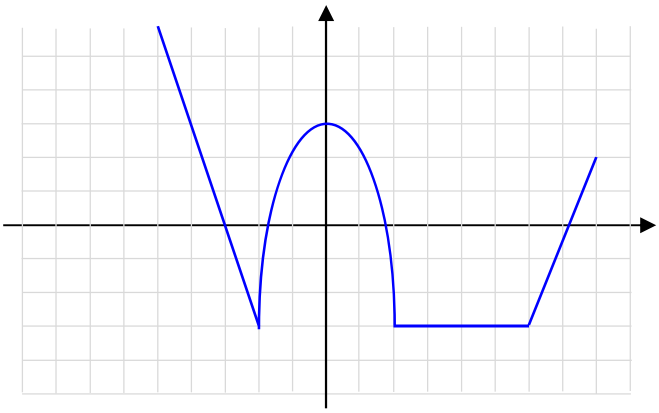
د) $g(x)=\frac{-۱}{۳}f(x)$



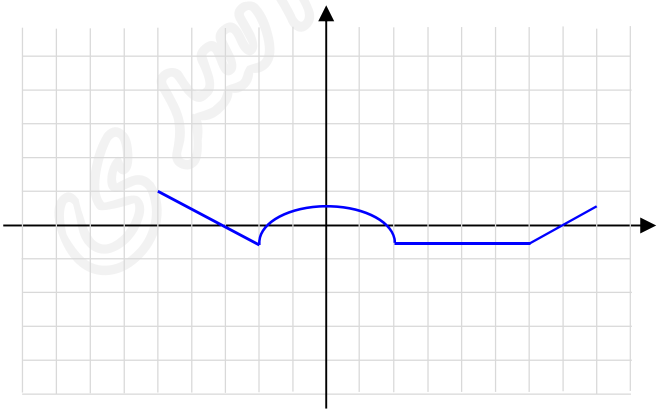
الف) $g(x) = -2f(x)$



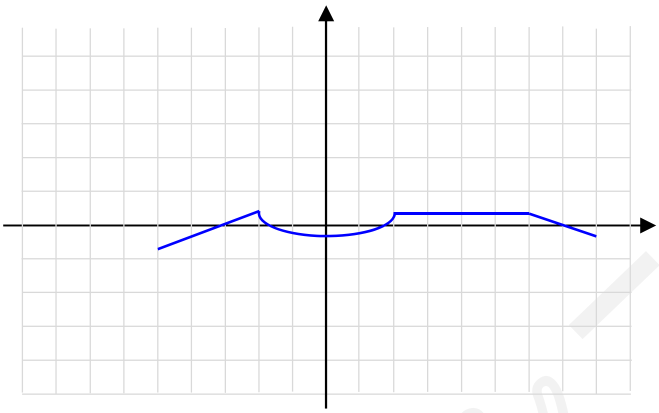
ب) $g(x) = 3f(x)$



ج) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$



د) $g(x) = \frac{-1}{3}f(x)$



نتیجه ۱ : اگر $a > 1$ نمودار تابع در جهت عمودی با ضریب a منبسط می‌شود.

نتیجه ۲ : اگر $0 < a < 1$ نمودار تابع در جهت عمودی با ضریب a منقبض می‌شود.

نتیجه ۳ : اگر $-1 < a < 0$ نمودار تابع با ضریب a منقبض و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

نتیجه ٤ : اگر $a < -1$ نمودار تابع با ضریب a منبسط و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

نکته

نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور xهاست.

تمرین اگر $y=\sin x$ و $x\in[\circ,۲\pi]$ باشد، نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y=۲\sin x$ ب) $y=-۳\sin x$ ج) $y=\frac{۱}{۲}\sin x$

د) $y=-\frac{۱}{۲}\sin x$ هـ) $y=-\sin x$

حالت چهارم) – انقباض یا انبساط طولی

اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطه ای دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و $g(x) = f(bx)$ آنگاه:

$$g(\frac{x_\circ}{b}) = f(b\frac{x_\circ}{b}) = f(x_\circ) = y_\circ$$

بنابراین نقطهٔ $(\frac{x_\circ}{b}, y_\circ)$ روی نمودار تابع g با نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ روی نمودار تابع f متناظر است.

برای رسم نمودار $y = f(bx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در عدد $\frac{۱}{b}$ ضرب کنیم.

نکته

برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(bx)$ با هم برابرند.

مثال اگر نقطهٔ $M(-۴,۲)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و M' نقطهٔ متناظر آن روی نمودار $y = f(-۵x)$ باشد، مختصات M' را بیابید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x_{M'} = \frac{۱}{-۵} x_M = \frac{۱}{-۵}(-۴) = \frac{۴}{۵} \\ y_{M'} = y_M = ۲ \end{array}\right\} \to M'(\frac{۴}{۵}, ۲)$$

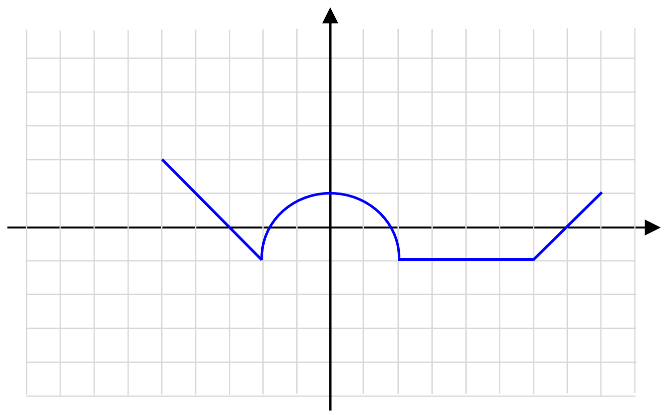
مثال شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است، نمودار توابع را رسم کنید.

الف) $g(x) = f(2x)$

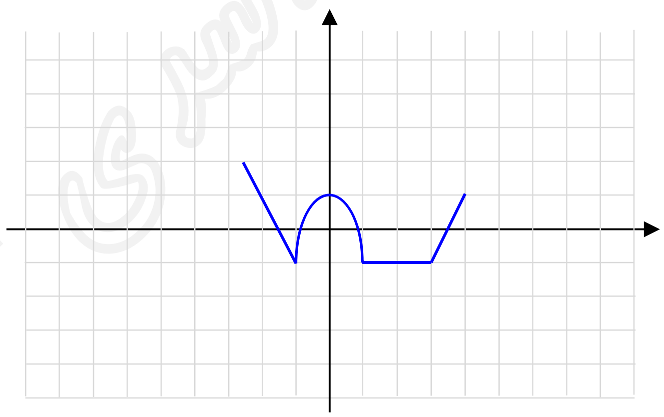
ب) $g(x) = f(-3x)$

ج) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$

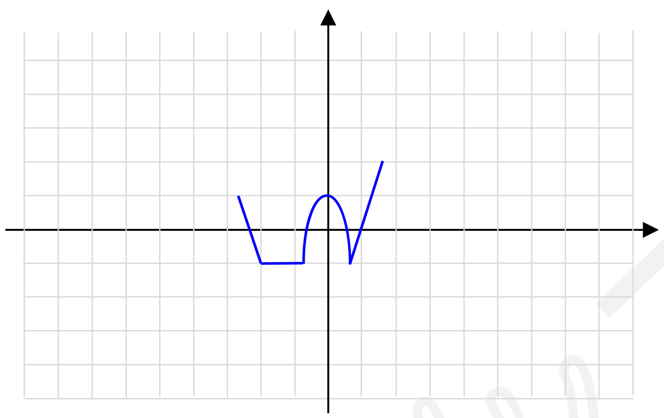
د) $g(x) = f(-\frac{2}{3}x)$



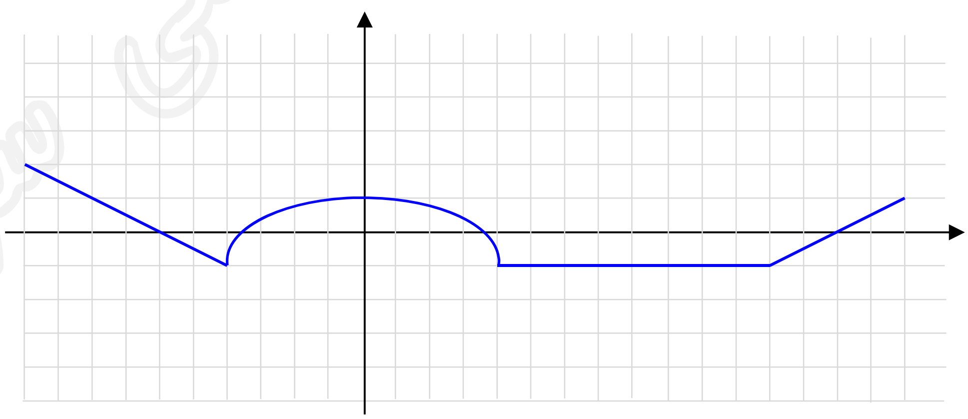
الف) $g(x) = f(2x)$



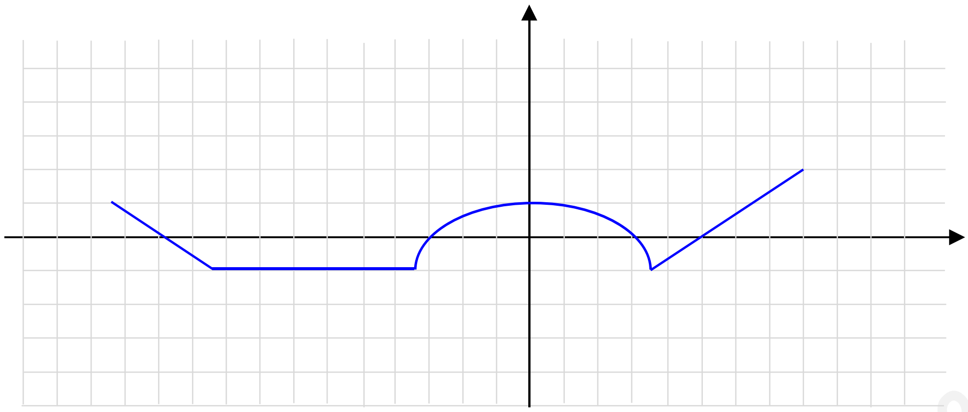
ب) $g(x) = f(-3x)$



ج) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$



د) $g(x) = f(-\frac{2}{3}x)$



نتیجه ۱: اگر $b > 1$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محورxها به دست می‌آید (نمودار با ضریب $\frac{1}{b}$ منقبض می‌شود).

نتیجه ۲: اگر $0 < b < 1$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور افقی به دست می‌آید (نمودار با ضریب $\frac{1}{b}$ منبسط می‌شود).

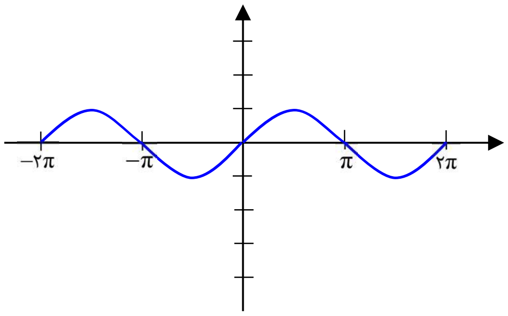
نتیجه ۳: اگر $-1 < b < 0$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انبساط نمودار تابع $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{b}$ در راستای محور xها و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور yها حاصل می‌شود .

نتیجه ٤: اگر $b < -1$ ، نمودار تابع $g(x) = f(bx)$ از انقباض نمودار تابع $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{b}$ در راستای محور xها و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور yها حاصل می‌شود .

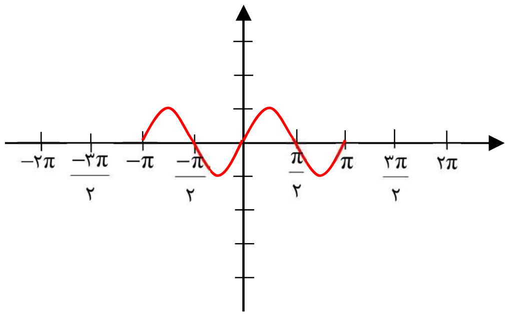
نکته

نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y هاست.

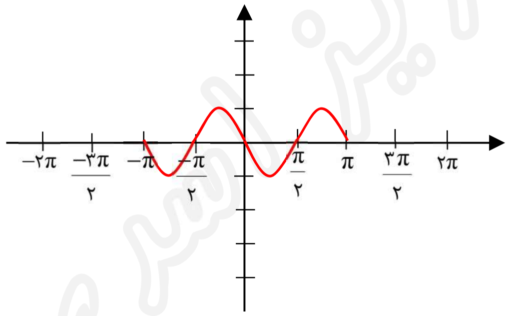
مثال با توجه به نمودار تابع $f(x)=\sin(x)$ (با دامنهٔ $x\in[-۲\pi,۲\pi]$)، نمودار توابع $y=f(۲x)$، $y=f(-۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.



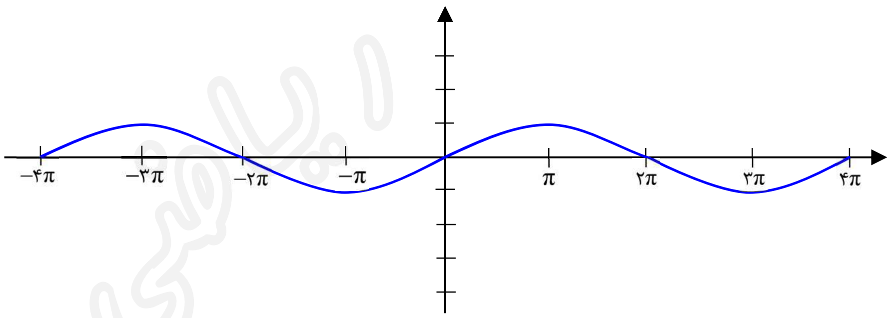
$f(x)=\sin(x)$



$y=f(۲x)=\sin(۲x)$



$y=f(-۲x)=\sin(-۲x)$



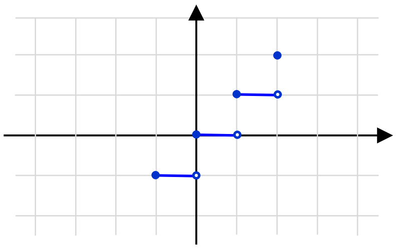
$y=f(\frac{x}{۲})=\sin(\frac{x}{۲})$

مثال ابتدا نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید، سپس با توجه به نمودار این تابع، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

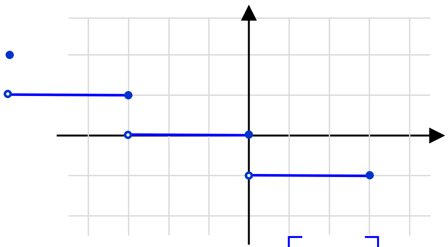
الف) $y=f(-x)$

ب) $y=f(۲x)$

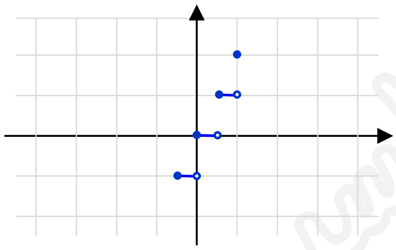
ج) $y=f(\frac{-x}{۳})$



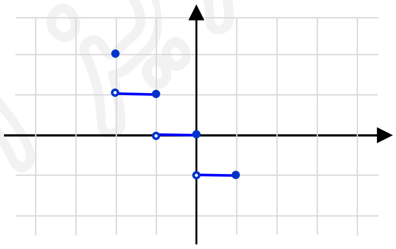
$f(x)=[x]$



$y=f(-\frac{x}{۳})=\left[-\frac{x}{۳}\right]$

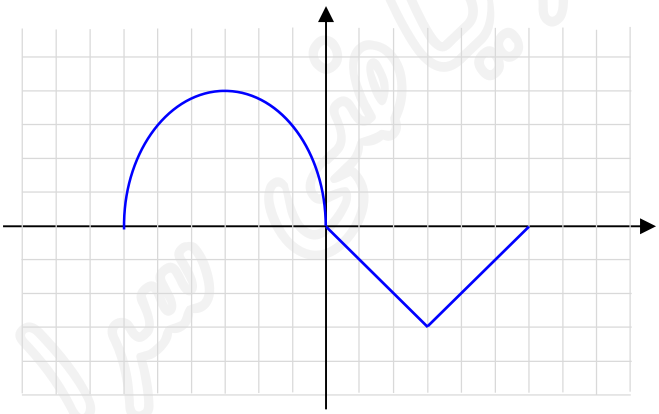


$y=f(۲x)=[۲x]$



$y=f(-x)=[-x]$

تمرین با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ (شکل زیر) نمودار توابع $y=f(\frac{x}{۲})$ و $y=f(۳x)$ را رسم کنید و دامنه و برد را در هر قسمت تعیین کنید.



حالت پنجم: (حالت کلی)

اگر (x_0, y_0) نقطه‌ای دلخواه روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و $g(x)=af(bx+c)+d$ آنگاه نقطهٔ $(\frac{x_0-c}{b}, ay_0+d)$ نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y=g(x)$ است.

بنابراین ابتدا تأثیر ضرائب c و b (روی محور x) و سپس تأثیر ضرائب a و d روی محور y را منظور می‌کنیم (البته می توانیم ابتدا تأثیر ضرائب a و d روی محور y و سپس تأثیر ضرائب c و b روی محور x را منظور کنیم)

بنایراین اولویت تأثیر ضرائب به شرح زیر است:

۱ – تاثیر ثابت c (انتقال افقی)

۲ – تاثیر ضریب b (انقباض یا انبساط افقی)

۳ – تاثیر ضریب a (انقباض یا انبساط عمودی)

۴ – تاثیر ثابت d (انتقال عمودی)

مثال نقطهٔ $A(۲, -۳)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد. مختصات A' (نقطه متناظر A) روی نمودار تابع $y=۲f(\frac{-x}{۳}+۴)-۱$ را تعیین کنید.

حل:

$$x=۲ \xrightarrow[\text{۴ واحد انتقال نمودار به سمت چپ}]{x \to x+۴} -۲ \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۳ قرینه آن نسبت به محور yها}]{x \to -\frac{x}{۳}} +۶$$

$$y=-۳ \xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}]{y \to ۲y} -۶ \xrightarrow[\text{انتقال ۱ واحد به پایین}]{y \to y-۱} -۷$$

بنابراین $A'(۶, -۷)$ نقطه مورد نظر است.

نکته

نمودار تابع $y=-f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ همزمان نسبت به هر دو محور x ها و y هاست.

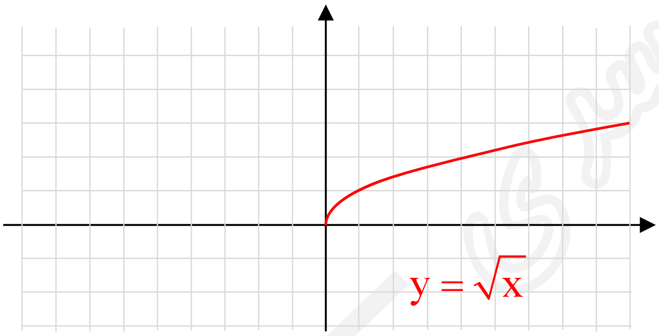
به عبارت دیگر $y=-f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبداء مختصات است.

مثال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم کرده سپس با توجه به آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

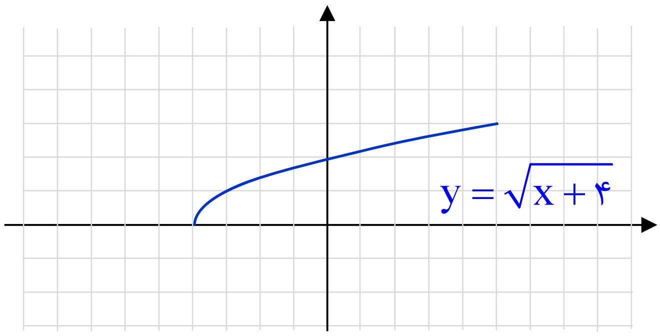
الف) $y=\sqrt{x+۴}$ ب) $y=\sqrt{x}+۱$ ج) $y=\sqrt{۲x}$ د) $y=\sqrt{-x}$

هـ) $y=-\sqrt{-x}$ و) $y=۲\sqrt{x+۳}$ ز) $y=-۲\sqrt{x-۱}+۳$ ح) $y=-۲\sqrt{\frac{x}{۲}+۲}+۳$

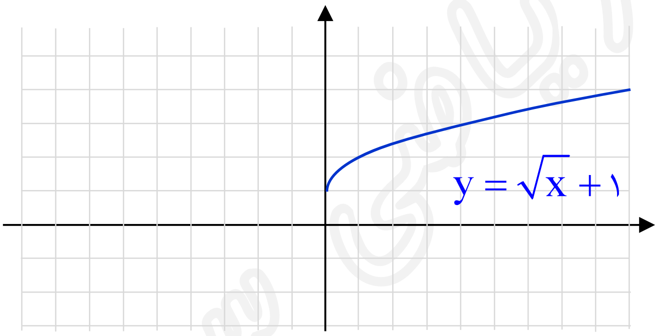
حل:



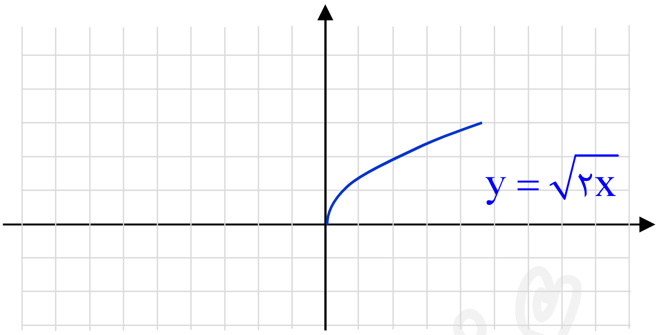
انتقال نمودار تابع $y=f(x)$، ۱ واحد به سمت راست (در جهت مثبت محور طول‌ها) و ۲ واحد به سمت بالا (در جهت مثبت محور عرض‌ها)



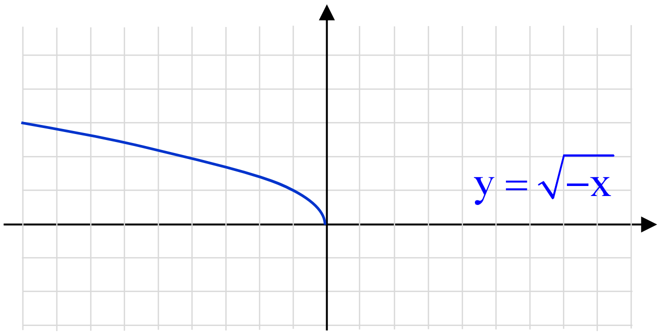
انتقال نمودار، ۴ واحد در جهت منفی محور طول‌ها



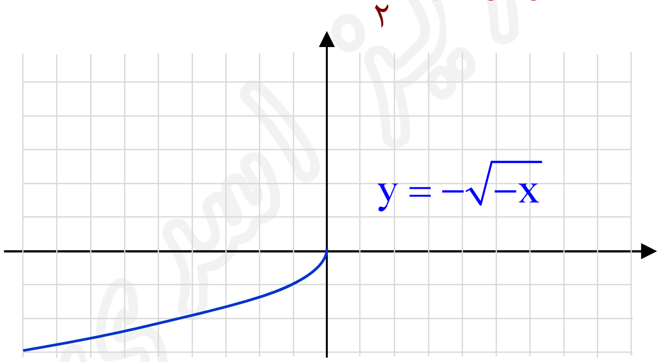
انتقال نمودار، ۱ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها



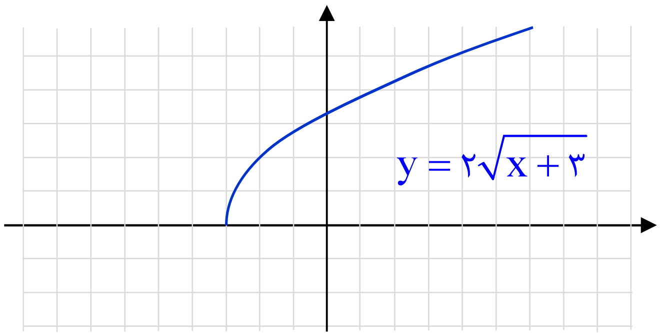
انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$



قرینه نمودار نسبت به محور عرض‌ها

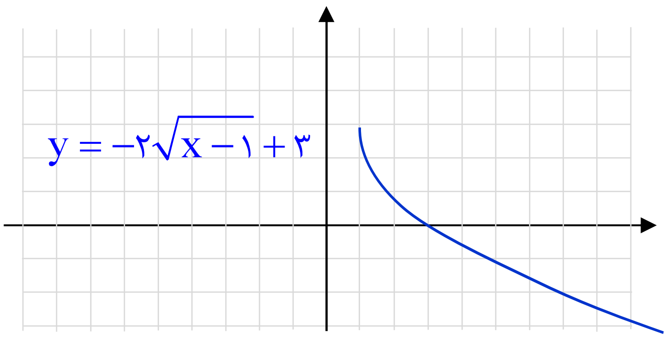


قرینه نمودار نسبت به هر دو محور طول‌ها و عرض‌ها



انتقال نمودار ۳ واحد در جهت منفی محور طول‌ها

انبساط عمودی با ضریب ۲

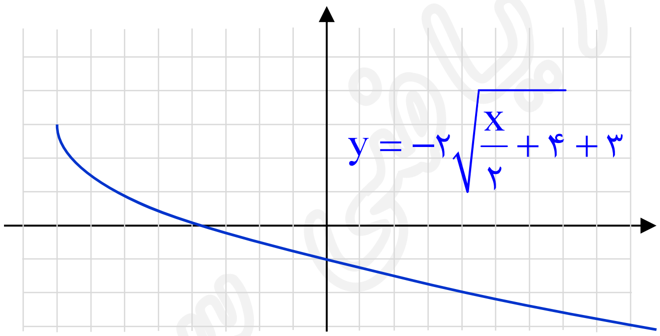


انتقال نمودار ۱ واحد در جهت مثبت محور طول‌ها

انبساط عمودی با ضریب ۲

قرینه نسبت به محور طول‌ها

انتقال نمودار ۳ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها



انتقال نمودار ۴ واحد در جهت منفی محور طول‌ها

انبساط افقی با ضریب ۲

انبساط عمودی با ضریب ۲

قرینه نسبت به محور طول‌ها

انتقال نمودار ۳ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها

نکته

اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[m,n]$ و $[p,q]$ باشد آنگاه دامنه و برد تابع $g(x)=af(bx+c)+d$ به صورت زیر است:

$$D_g=\begin{cases}\left[\dfrac{m-c}{b},\dfrac{n-c}{b}\right] & b>0\\[2mm] \left[\dfrac{n-c}{b},\dfrac{m-c}{b}\right] & b<0\end{cases}$$

$$R_g=\begin{cases}[ap+d\ ,aq+d] & a>0\\ [aq+d\ ,ap+d] & a<0\end{cases}$$

تذکر: اگر دامنه یا برد تابع f به صورت بازه‌های باز یا نیم‌باز باشد، دامنه و برد تابع g نیز به صورت بازه‌های باز یا نیم‌باز خواهد بود.

مثال دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب به صورت $D_f=(-۲\ ,\ ۵]$ و $R_f=[-۴\ ,\ ۷)$ است. دامنه و برد توابع $g(x)=۲f(-۳x-۱)+۴$ و $h(x)=-۲f(۲x+۳)-۱$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases}D_g=[\dfrac{۵+۱}{-۳},\dfrac{-۲+۱}{-۳})=[-۲\ ,\ \dfrac{۱}{۳})\\ R_g=[۲(-۴)+۴\ ,۲(۷)+۴)=[-۴\ ,\ ۱۸)\end{cases}$$

$$\begin{cases}D_h=(\dfrac{-۲-۳}{۲},\dfrac{۵-۳}{۲}]=(\dfrac{-۵}{۲}\ ,\ ۱]\\ R_h=(-۲(۷)-۱\ ,-۲(-۴)-۱]=(-۱۵\ ,\ ۷]\end{cases}$$

مثال اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر $[-۱,۳]$ و برد آن $(۰,۲]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ را بیابید.

(ریاضی۳ تجربی – هماهنگ دی ۱۴۰۱)

حل:

$$D_g=(-۲,۶]$$
$$R_g=(۰,۲]$$

مثال نقطه $(-۲,۴)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(۲x)$ برابر .... است. (ریاضی۳ تجربی – خرداد ۱۴۰۲)

حل:

طول نقطه نصف می‌شود و عرض آن بدون تغییر می‌ماند. بنابراین نقطهٔ متناظر آن $(-۱,۴)$ است.

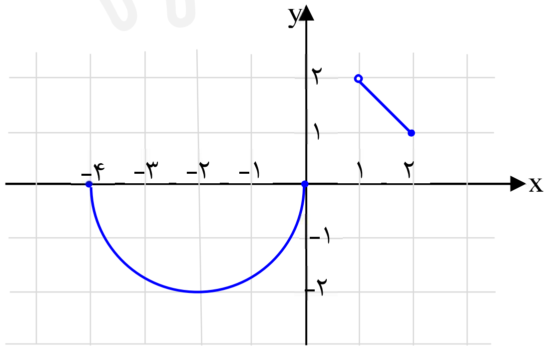
مثال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید را بنویسید. (ریاضی۳ تجربی – هماهنگ شهریور ۱۴۰۲)

حل:

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{۳ واحد انتقال نمودار به سمت راست}]{x\to x-۳} f(x)=\sqrt{x-۳}\xrightarrow[\text{عرض نقاط دوبرابر}]{f(x)\to ۲f(x)} f(x)=۲\sqrt{x-۳}$$

مثال نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(۱-x)+۱$ را رسم کنید.

(حسابان۲ – هماهنگ شهریور ۱۴۰۲)



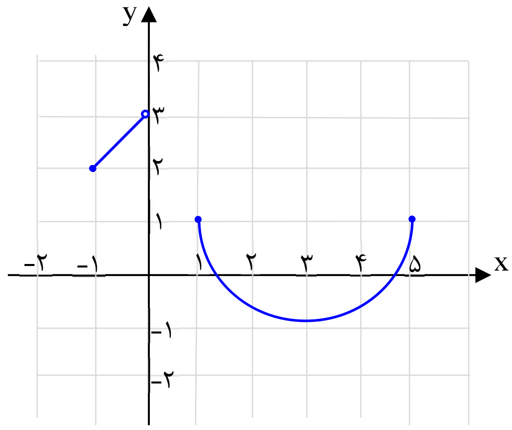
حل:

مراحل رسم نمودار تابع $y=f(۱-x)+۱$:

۱- یک واحد انتقال در جهت منفی محور طول‌ها

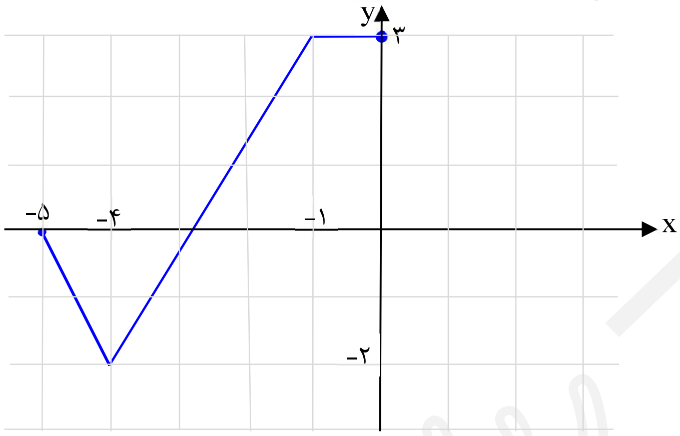
۲- قرینه نسبت به محور عرض‌ها

۳- یک واحد انتقال در جهت مثبت محور عرض‌ها



مثال نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x)=۲f(-x)$ را بنویسید.

(ریاضی۳ تجربی – هماهنگ دی ۱۴۰۲)

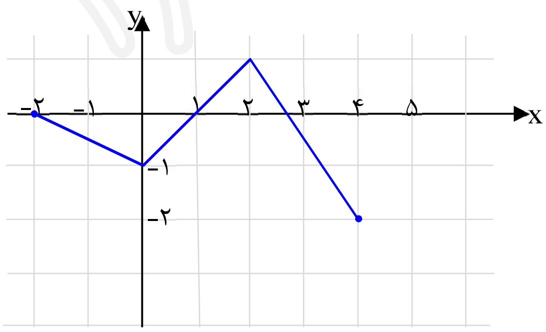


حل:

$D_f=[-۵,۰]$ $\qquad R_f=[-۲,۳]$

$D_g=[۰,۵]$ $\qquad R_g=[-۴,۶]$

مثال نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=-۳f(\frac{x}{۲})+۲$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را به تعیین کنید. (حسابان۲ – هماهنگ دی ۱۴۰۲)



حل:

مراحل رسم نمودار تابع $g(x)=-۳f(\frac{x}{۲})+۲$:

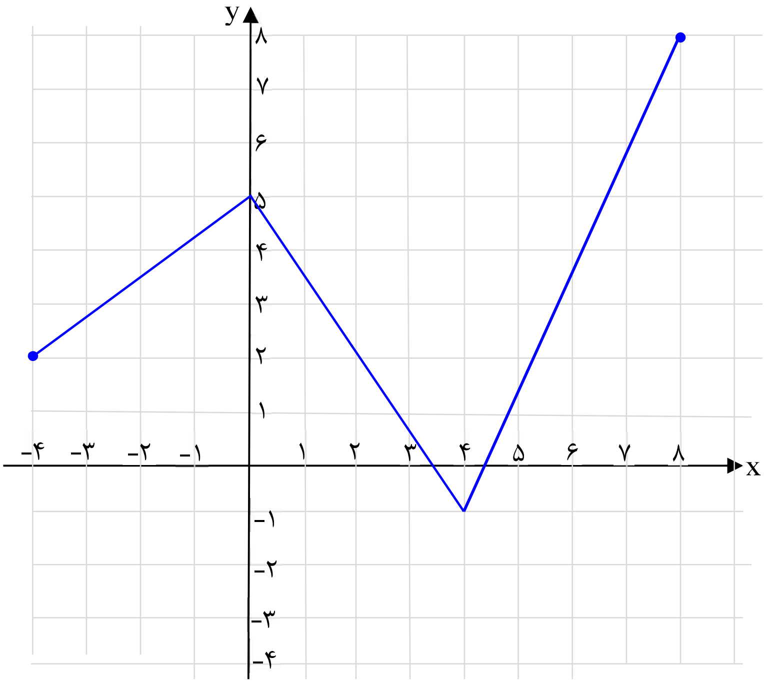
۱- انبساط افقی با ضریب ۲

۲- انبساط عمودی با ضریب ۳

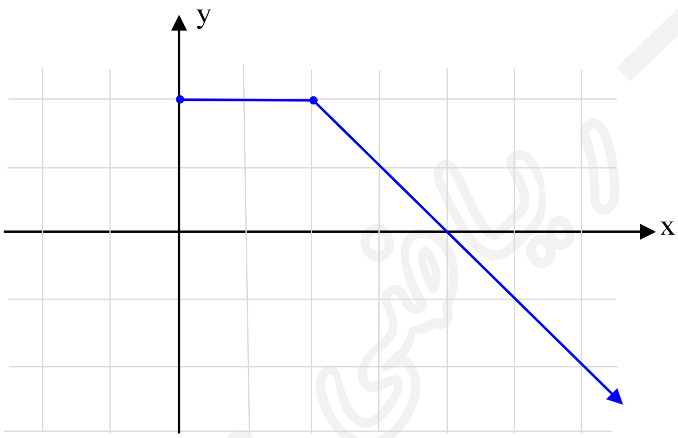
۳- قرینه نسبت به محور طول‌ها

۴- ۲ واحد انتقال در جهت مثبت محور عرض‌ها

$R=[-۱,۸]$

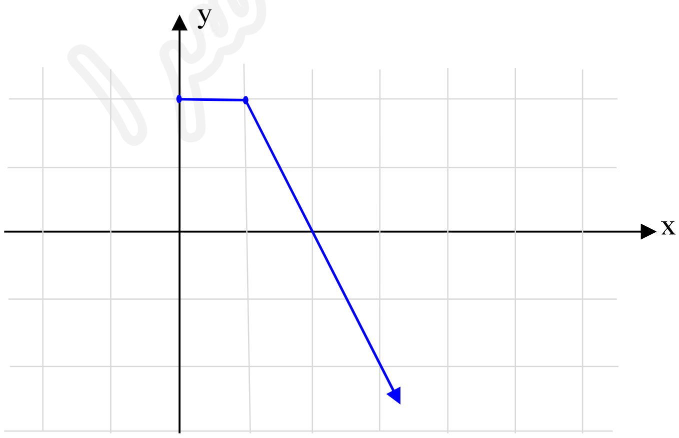


مثال در شکل روبرو نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=f(۲x)$ را رسم کنید. (ریاضی۳ تجربی – هماهنگ خرداد ۱۴۰۳)

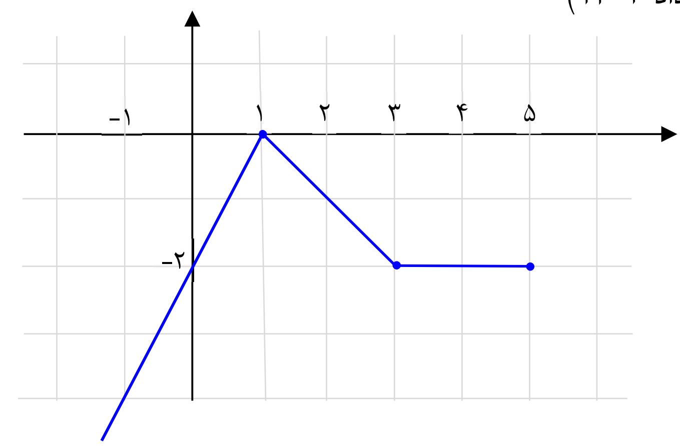


حل:

انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$



مثال نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(2x-1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. (حسابان۲ – هماهنگ خرداد ۱۴۰۳)



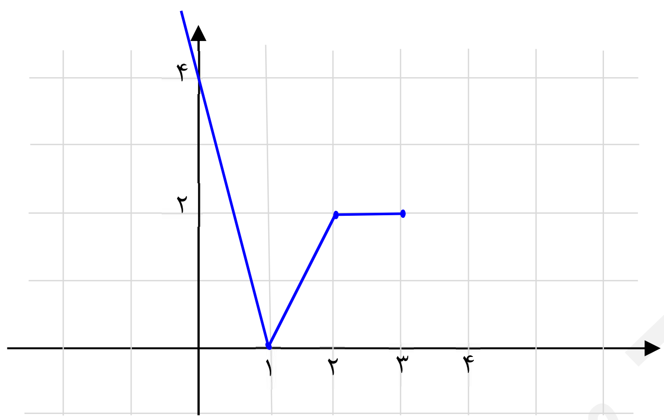
حل:

مراحل رسم نمودار تابع $y=-f(2x-1)$:

۱- یک واحد انتقال نمودار در جهت مثبت محور طول‌ها

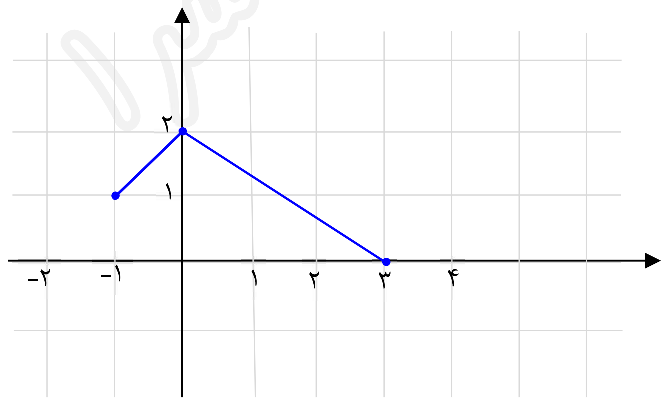
۲- انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

۳ – قرینه نسبت به محور طول‌ها



$D=[-\infty,3]$ $\qquad$ $R=[0,+\infty]$

مثال اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم کنید. (حسابان۲ – هماهنگ شهریور ۱۴۰۳)

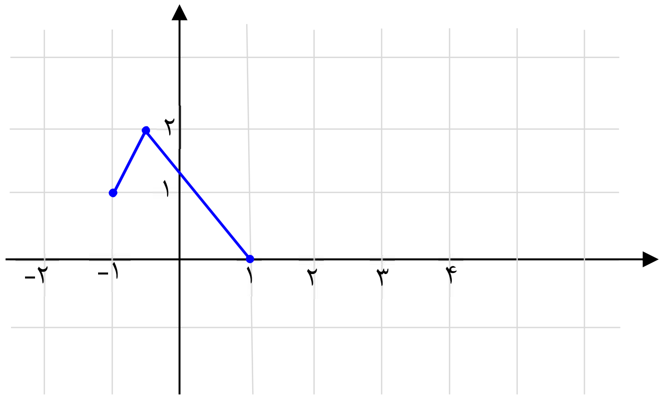


حل:

مراحل رسم نمودار تابع $y = f(۲x + ۱)$:

۱- یک واحد انتقال نمودار در جهت منفی محور طول‌ها

۲- انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$



مثال اگر دامنه تابع g بازهٔ $[-۲,۴]$ باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $k(x) = ۳g(-۲x)$ را به دست آورید. (حسابان۲ – هماهنگ شهریور ۱۴۰۳)

حل:

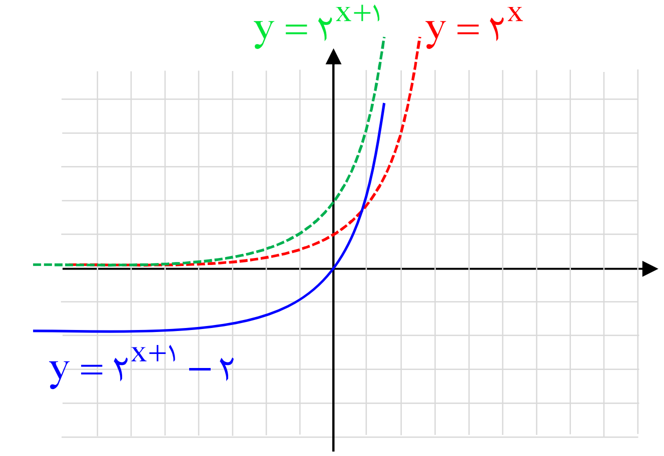
$$D_k = [-۲,۱]$$

مثال با توجه به نمودار تابع $f(x)=۲^{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=۲^{x+۱}-۲$ ب) $h(x)=۲^{(\frac{x}{۲})}+۱$

حل:

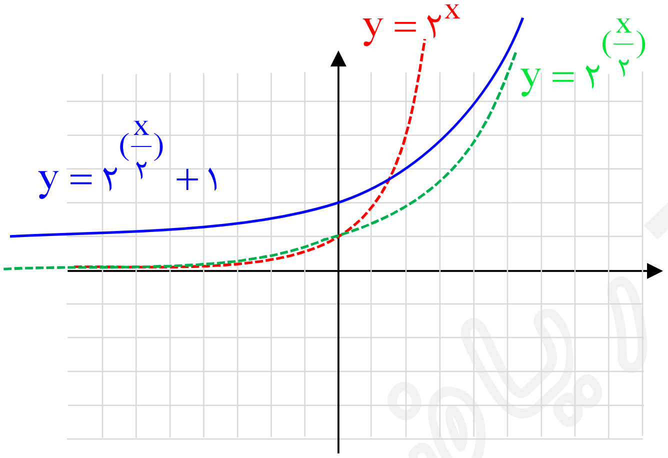
الف)



۱- انتقال نمودار ۱ واحد در جهت منفی محور طول‌ها

۲- انتقال نمودار ۲ واحد در جهت منفی محور عرض‌ها

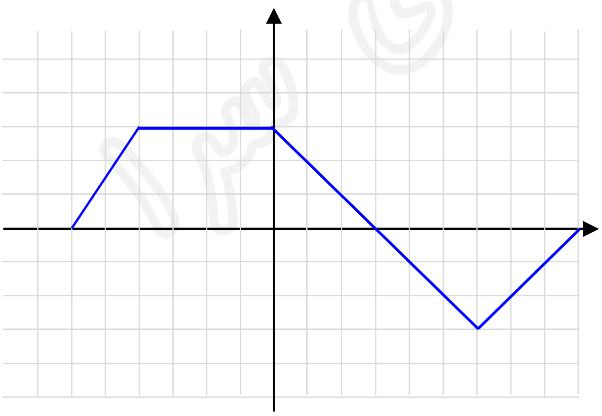
ب)



۱- انبساط افقی با ضریب ۲

۲- انتقال نمودار ۱ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها

تمرین شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است.



نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y=f(-۲x)$

ب) $y=-f(x+۳)+۲$

ج) $y=۲f(۳-x)$

د) $y=-۲f(۳+۲x)+۱$

تست نمودار تابع $y=-x^{2}+2x+5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (سراسری – ریاضی۹۸)

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

حل:

با توجه به انتقال ۳ واحدی نمودار تابع به طرف x های مثبت، در ضابطهٔ تابع به جای x ، $x-3$ قرار می‌دهیم. همچنین با توجه به انتقال ۲ واحدی به طرف y های منفی، از مقدار به دست آمده، ۲ واحد کم می‌کنیم.

$$y=-(x-3)^{2}+2(x-3)+5-2 \Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow y=-x^{2}+8x-12$$

$$-x^{2}+8x-12>x \Rightarrow -x^{2}+7x-12>0 \Rightarrow x^{2}-7x+12<0$$

$$(x-3)(x-4)<0 \Rightarrow 3<x<4$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست نمودار تابع $y=x^{2}-x-3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، زیر محور x ها است؟ (خارج کشور – ریاضی۹۸)

۱) $(-5,2)$ ۲) $(-5,3)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-2,5)$

حل:

با توجه به انتقال ۲ واحدی نمودار تابع به طرف x های منفی، در ضابطهٔ تابع به جای x ، $x+2$ قرار می‌دهیم. همچنین با توجه به انتقال ۹ واحدی به طرف y های منفی، از مقدار به دست آمده، ۹ واحد کم می‌کنیم.

$$y=(x+2)^{2}-(x+2)-3-9 \Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow y=x^{2}+3x-10$$

$$x^{2}+3x-10<0 \Rightarrow (x-2)(x+5)<0 \Rightarrow -5<x<2$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست اگر دامنه و برد تابع $y=\frac{1}{2}f(x-2)$ به ترتیب بازه‌های $[-2,3]$ و $[-1,2]$ باشند، اشتراک دامنه و برد تابع $y=-f(1-2x)$ کدام است؟

۱) $[0,2]$　　۲) $[-1,1]$　　۳) $[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$　　۴) $[0,\frac{1}{2}]$

حل:

ابتدا دامنه تابع $y=f(x)$ را تعیین می کنیم.

$$D_{\frac{1}{2}f(x-2)}=[-2,3] \Rightarrow -2\le x\le 3 \Rightarrow -4\le x-2\le 1 \Rightarrow D_{f(x)}=[-4,1]$$

برای تعیین دامنه تابع $y=-f(1-2x)$ کافی است نامعادلهٔ $-4\le 1-2x\le 1$ را حل کنیم.

$$-4\le 1-2x\le 1 \Rightarrow 0\le x\le \frac{5}{2} \Rightarrow D_{-f(1-2x)}=[0,\frac{5}{2}]$$

برای تعیین برد داریم:

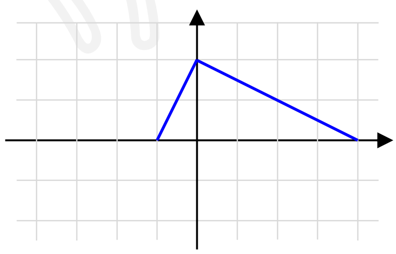
$$R_{\frac{1}{2}f(x-2)}=[-1,2] \Rightarrow -2\le R_{f(x)}\le 4$$

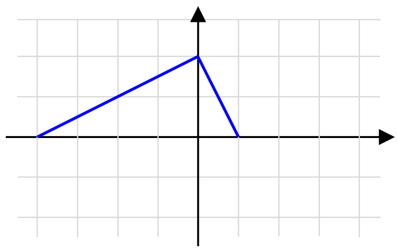
$$\Rightarrow -4\le R_{-f(x)}\le 2 \Rightarrow R_{-f(1-2x)}=[-4,2]$$

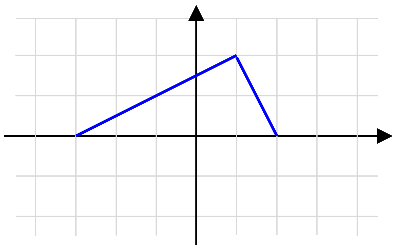
$$[0,\frac{5}{2}]\cap[-4,2]=[0,2]$$

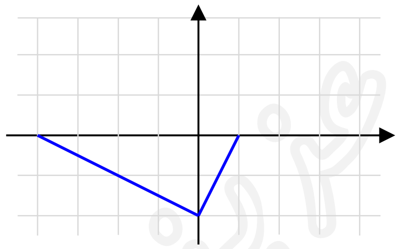
بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

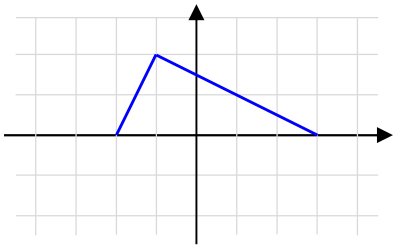
تست اگر نمودار تابع $y=f(\frac{1+x}{2})$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(\frac{1-x}{2})$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

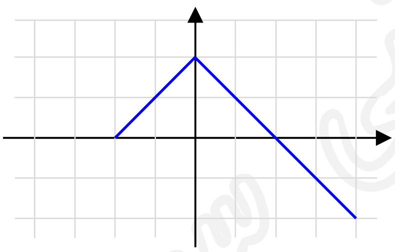
۴) 

حل:

برای این‌که از تابع $y = f(\frac{۱+x}{۲})$ به تابع $y = f(\frac{۱-x}{۲})$ برسیم، کافی است که x، در ضابطهٔ تابع اول را به $-x$ تغییر دهیم. به عبارت دیگر نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

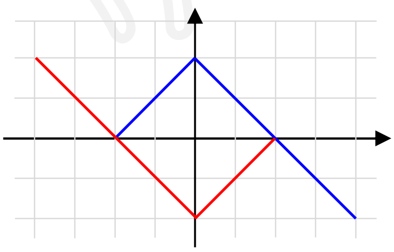
تست اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار $y=f(x)$ و $y=-f(-x)$ کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۳۲

۳) ۸ ۴) ۴

حل:



نمودار هر دو تابع در شکل مقابل رسم شده است. سطح محدود به دو نمودار، مربعی به قطر ۴ است. بنابراین مساحت آن $s = \frac{۴ \times ۴}{۲} = ۸$ است.

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تست نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع $y=۲f(x-۱)+۱$ با نقطهٔ $B(۱,۷)$ روی تابع $y=-f(۲x)+۳$ متناظر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱　　۲) -۲　　۳) -۳　　۴) -۴

حل:

نقطهٔ $B(۱,۷)$ روی تابع $y=-f(۲x)+۳$ قرار دارد.، بنابراین

$$۷=-f(۲)+۳ \quad \Rightarrow \quad f(۲)=-۴$$

برای آن‌که $x-۱$ مساوی ۲ شود باید $x=۳$ باشد:

$$y=۲f(x-۱)+۱ \xrightarrow{x=۳} y=۲f(۲)+۱=۲(-۴)+۱=-۷ \quad \Rightarrow A(۳,-۷)$$

در نتیجه: $a+b=۳+(-۷)=-۴$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تست اگر $D_f=[-۴,۱]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=۲f(۲x)-f(x+۲)$ کدام است؟

۱) $[-۶,-\frac{۱}{۲}]$　　۲) $[-۳,۱]$　　۳) $[-۶,-۲]$　　۴) $[-۲,-۱]$

حل:

دامنهٔ تابع $y=g(x)$ اشتراک دامنهٔ توابع $y_۱=f(x+۲)$ و $y_۲=۲f(۲x)$ است:

$$\left.\begin{aligned} &-۴\le x+۲\le ۱ \;\Rightarrow\; -۶\le x\le -۱ \;\Rightarrow\; D_{y_۱}=[-۶\,,-۱] \\ &-۴\le ۲x\le ۱ \;\Rightarrow\; -۲\le x\le \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; D_{y_۲}=[-۲\,,\frac{۱}{۲}] \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_g=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}=[-۲\,,-۱]$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تست نمودار تابع f را ابتدا دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت دو واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا تابع g با ضابطهٔ $g(x)=-|x+۵|+۲$ به دست آید. ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=|x+۳|-۴$
۲) $f(x)=|-x+۱|+۲$
۳) $f(x)=-|x+۳|+۴$
۴) $f(x)=-|x+۳|+۲$

حل:

برای رسیدن به ضابطهٔ تابع f مراحل فوق را به صورت برعکس از آخر به اول روی تابع g انجام می‌دهیم:

$y=-|x+۵|+۲$

$y=-|x+۵|+۴$ (۲ واحد به بالا)

$y=-(-|x+۵|+۴)$ (قرینه نسبت به محور xها) $\Rightarrow$ $y=|x+۵|-۴$

$g(x)=|x+۳|-۴$ (۲ واحد به راست)

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

مطالب تکمیلی (رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق)

الف) رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$

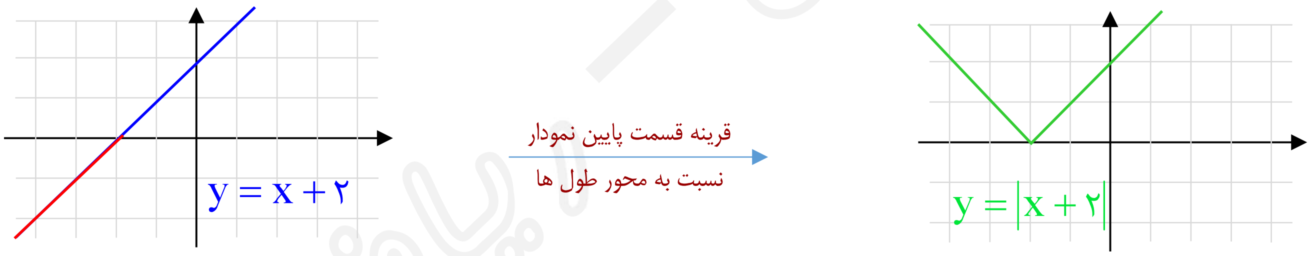
در این حالت کافی است قسمتی از نمودار تابع که پایین‌تر از محور x ها قرار گرفته (نقاط با عرض منفی) را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. بدیهی است سایر قسمت‌های نمودار بدون تغییر باقی می‌مانند.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

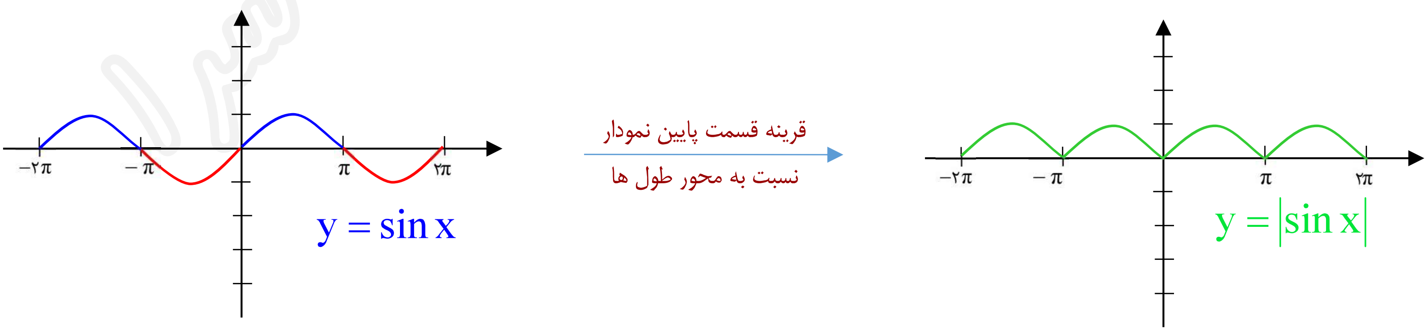
الف) $y=|x+2|$ ب) $y=|\sin x|$ ج) $y=\left|\frac{1}{x}\right|$ د) $y=\left|\frac{1}{x-1}\right|$

حل:

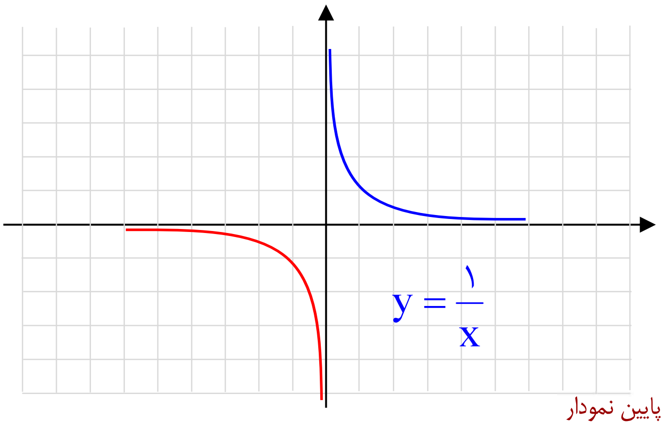
الف) $y=|x+2|$



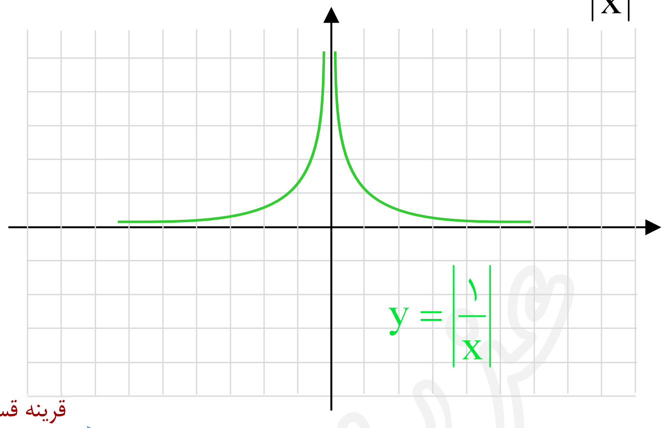
ب) $y=|\sin x|$



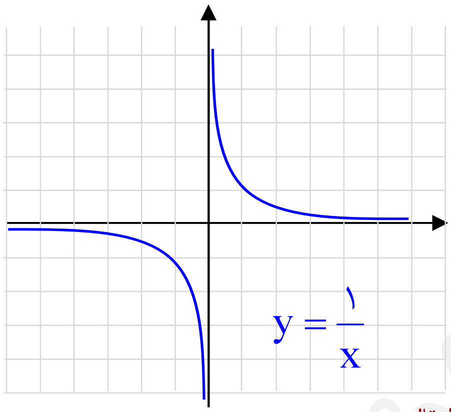
ج) $y=\left|\frac{۱}{x}\right|$



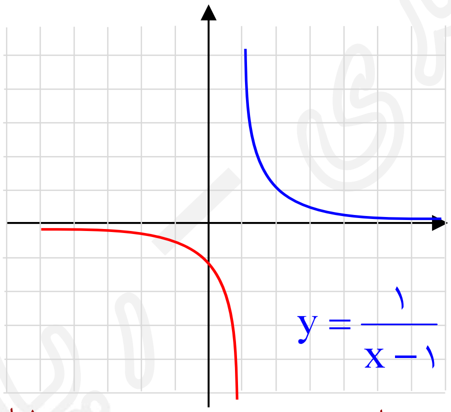
قرینه قسمت پایین نمودار
نسبت به محور طول ها



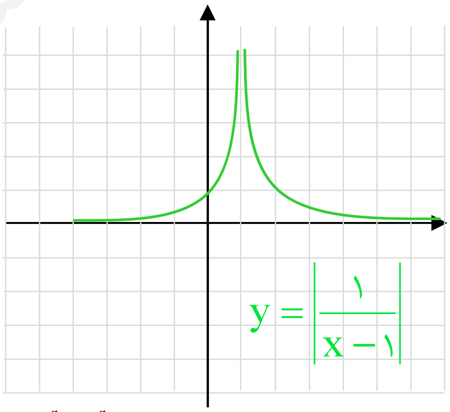
د) $y=\left|\frac{۱}{x-۱}\right|$



۱ واحد انتقال
در جهت مثبت محور طول‌ها



قرینه قسمت پایین نمودار
نسبت به محور طول ها

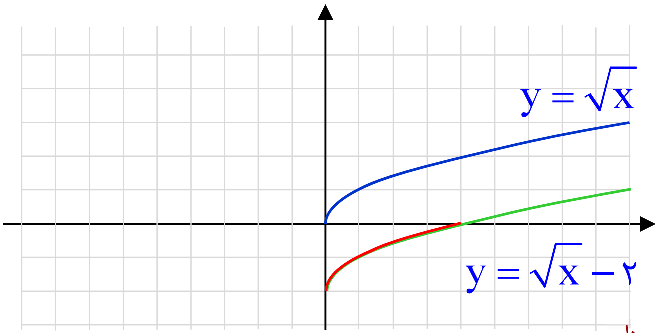


مثال با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\left|\sqrt{x}-۲\right|$ ب) $y=\left|۲\sqrt{x}-۲\right|-۱$ ج) $y=\left|\sqrt{x+۴}-۲\right|+۱$

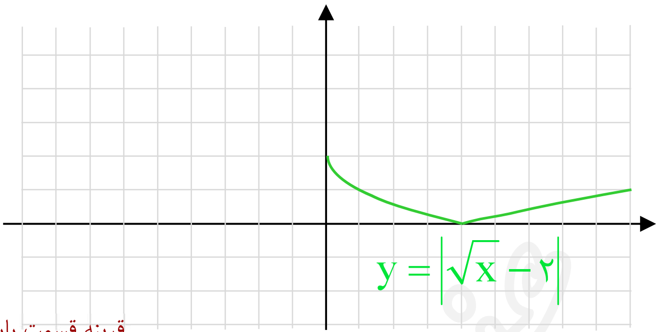
حل:

الف) $y=\left|\sqrt{x}-۲\right|$

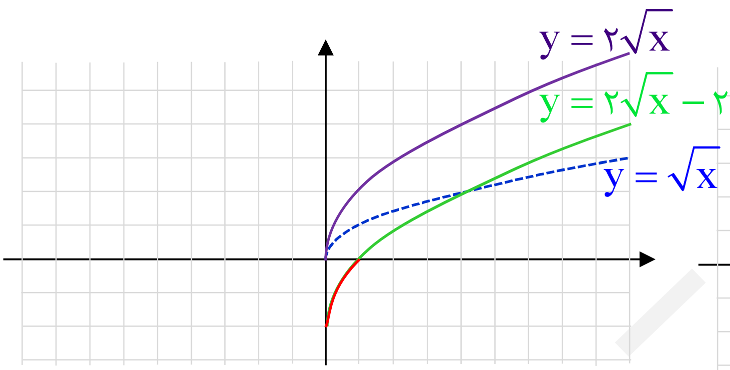


۲ واحد انتقال در جهت منفی محور عرض‌ها

قرینه قسمت پایین نمودار
نسبت به محور طول ها

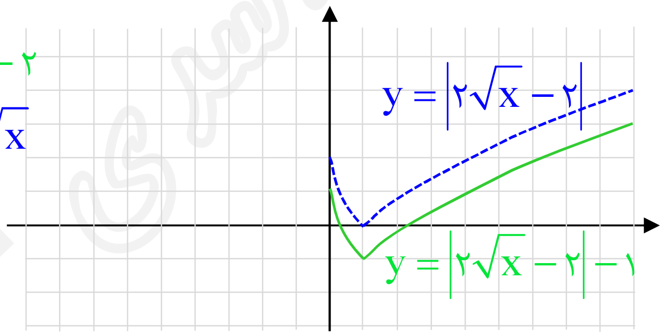


ب) $y=\left|۲\sqrt{x}-۲\right|-۱$



انبساط عرضی با ضریب ۲

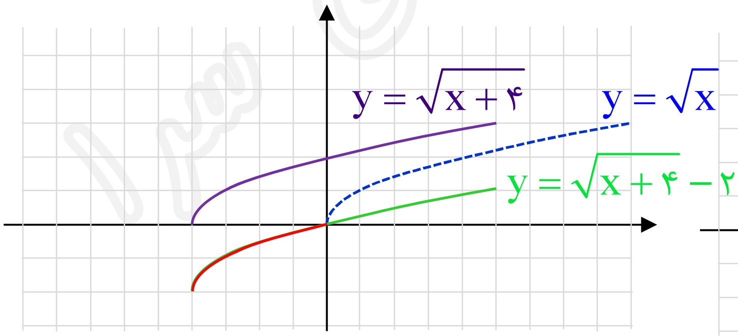
۲ واحد انتقال در جهت منفی محور عرض‌ها



قرینه قسمت پایین نمودار نسبت به محور طول ها

۱ واحد انتقال در جهت منفی محور عرض‌ها

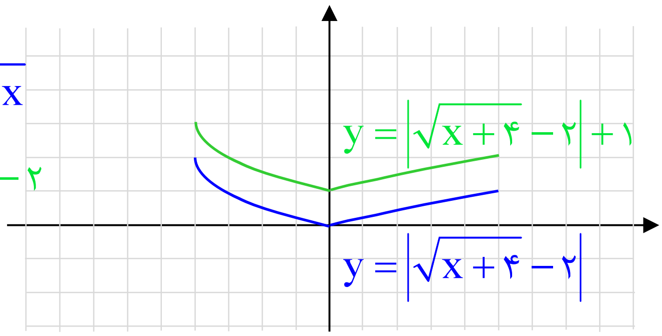
ج) $y=\left|\sqrt{x+۴}-۲\right|+۱$



۴ واحد انتقال در جهت منفی محور طول‌ها

۲ واحد انتقال در جهت منفی محور عرض‌ها

قرینه قسمت پایین نمودار
نسبت به محور طول ها



۱ واحد انتقال در جهت مثبت محور عرض‌ها

ب) رسم نمودار تابع $y=-|f(x)|$ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$

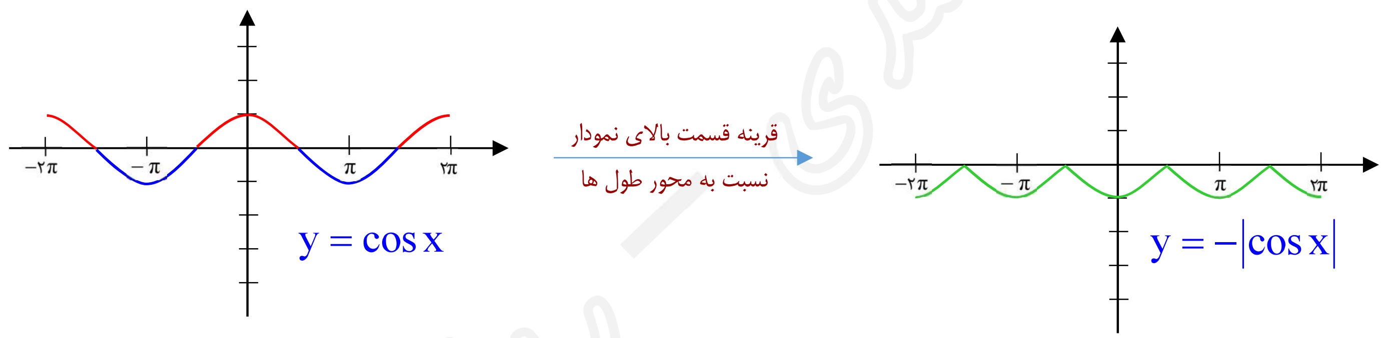
در این حالت کافی است قسمتی از نمودار تابع که بالاتر از محور x ها قرار گرفته (نقاط با عرض مثبت) را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. بدیهی است سایر قسمت‌های نمودار بدون تغییر باقی می‌مانند.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

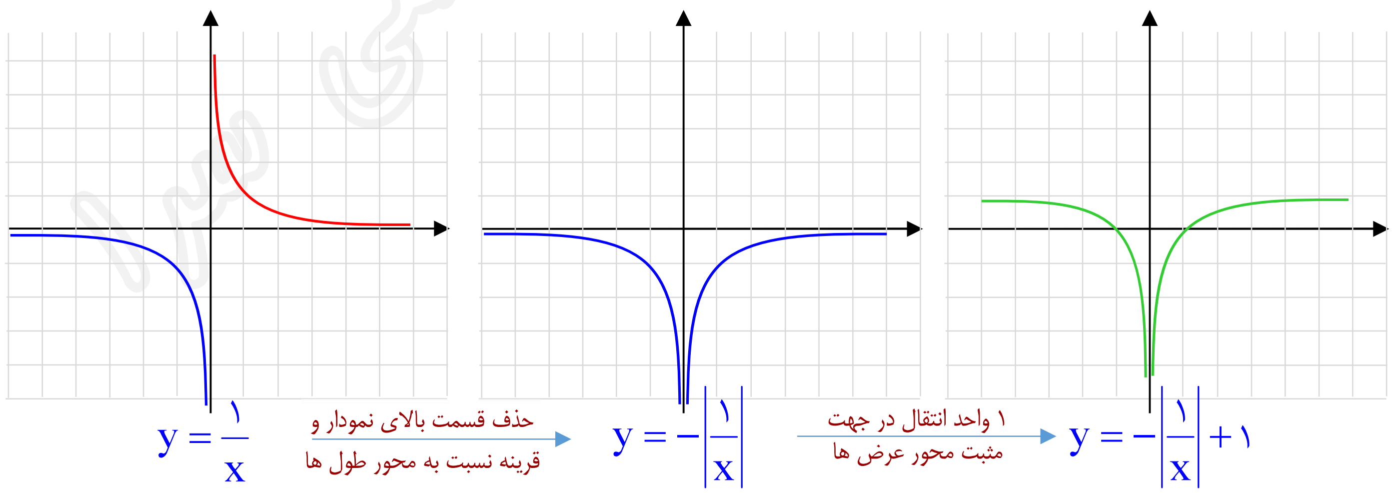
الف) $y=-|\cos x|$ ب) $y=-\left|\frac{۱}{x}\right|+۱$

حل:

الف) $y=-|\cos x|$



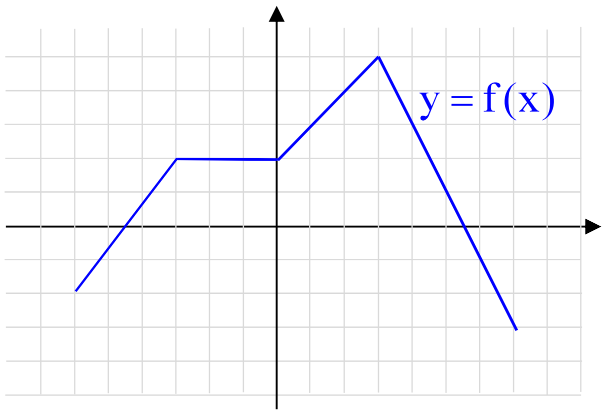
ب) $y=-\left|\frac{۱}{x}\right|+۱$



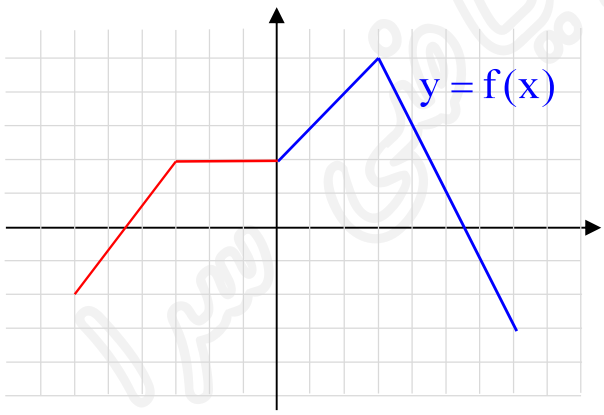
ج) رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$

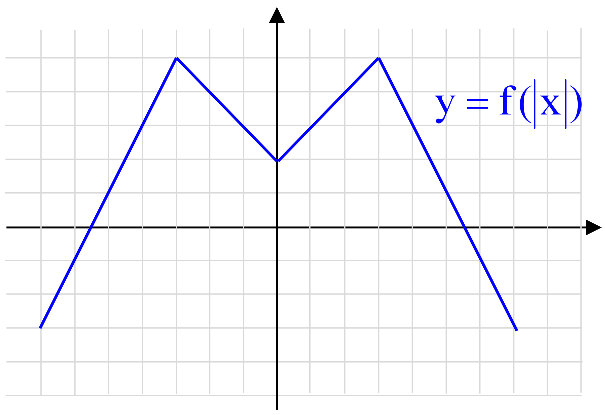
در این حالت کافی است قسمتی از نمودار تابع که سمت چپ محور y ها قرار گرفته (نقاط با طول منفی) را حذف نموده و بقیه قسمت‌های نمودار را نگه داشته و قرینهٔ آن را هم نسبت به محور y ها رسم کنیم. بدیهی است در این حالت محور y ها محور تقارن نمودار خواهد بود و دامنه تابع متقارن خواهد بود.

مثال شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است.
نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



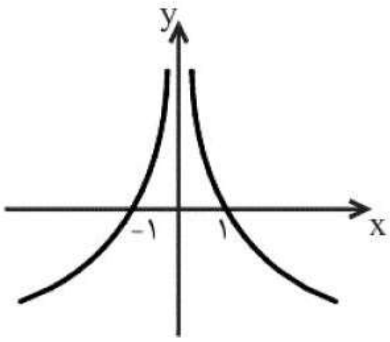
حل:





حذف قسمت سمت چپ نمودار و قرینه
قسمت سمت راست نسبت به محور عرض ها

تست ضابطهٔ تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=-\log|x|$

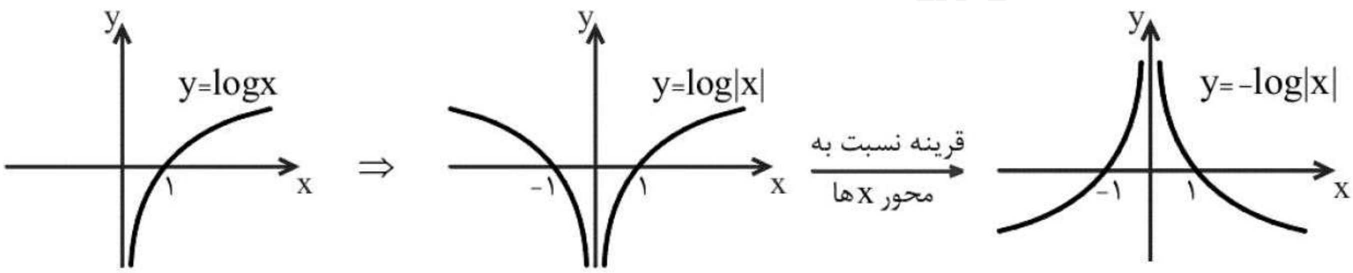
۲) $y=\log|x|$

۳) $y=\log x$

۴) $y=-\log x$

حل:

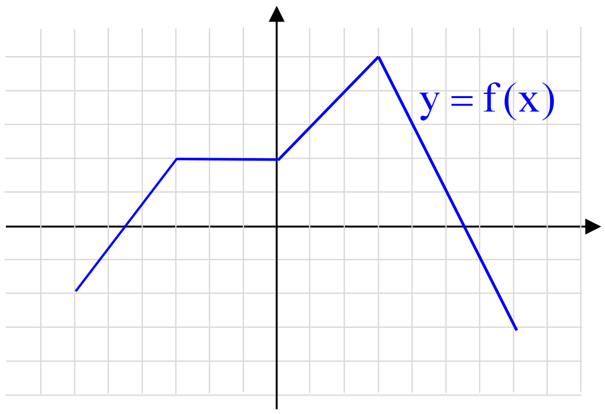
با توجه به نمودارهای زیر گزینه ۱ صحیح است.



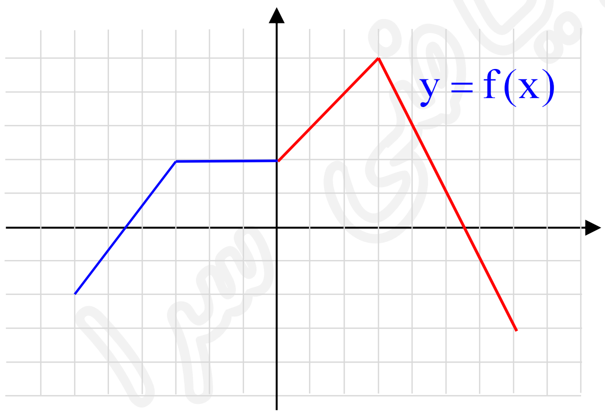
د) رسم نمودار تابع $y=f(-|x|)$ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$

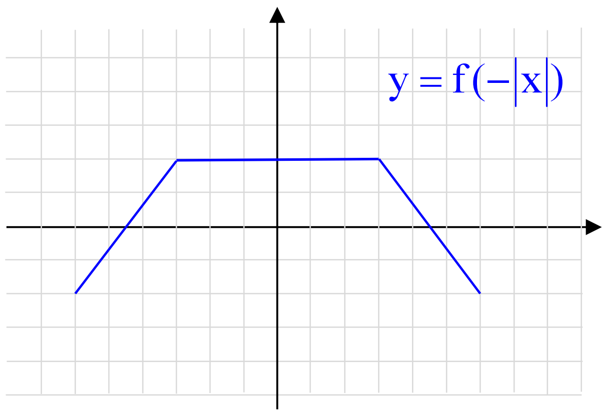
در این حالت کافی است قسمتی از نمودار تابع که سمت راست محور y ها قرار گرفته (نقاط با طول مثبت) را حذف نموده و بقیه قسمت‌های نمودار را نگه داشته و قرینهٔ آن را هم نسبت به محور y ها رسم کنیم. بدیهی است در این حالت محور y ها محور تقارن نمودار خواهد بود و دامنه تابع متقارن خواهد بود.

مثال شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



حل:





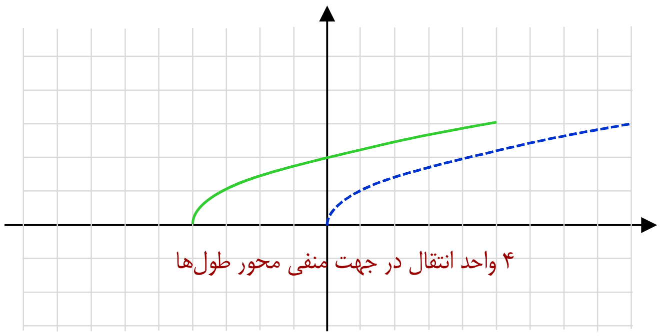
حذف قسمت سمت راست نمودار و قرینه
قسمت سمت چپ نسبت به محور عرض ها

مثال اگر $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

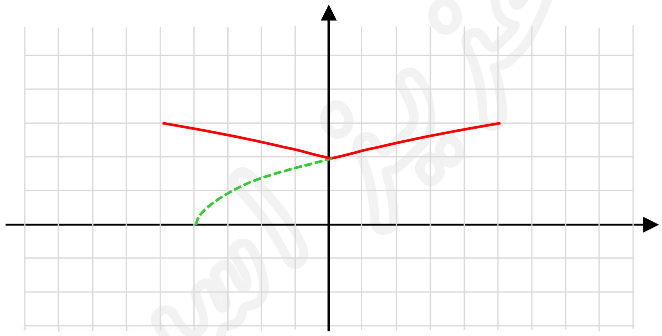
الف) $f(|x|+۴)$ ب) $f(|x+۱|)$ ج) $f(|x|)+۱$ د) $f(|x|-۲)$

حل:

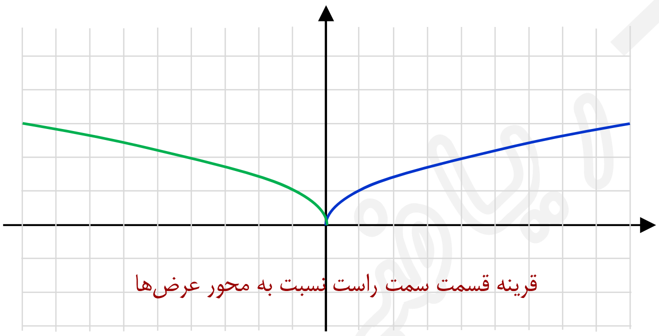
الف) $y=f(|x|+۴)=\sqrt{|x|+۴}$

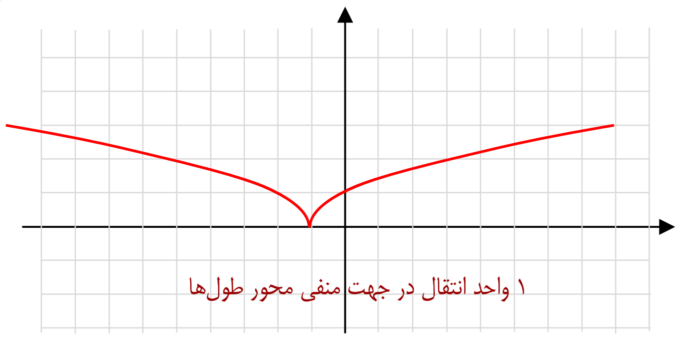


حذف نمودار قسمت سمت چپ محور عرض‌ها و
قرینه قسمت سمت راست نسبت به محور عرض‌ها



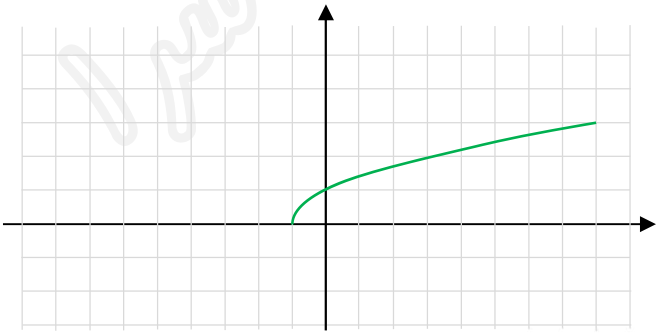
ب) $y=f(|x+۱|)=\sqrt{|x+۱|}$





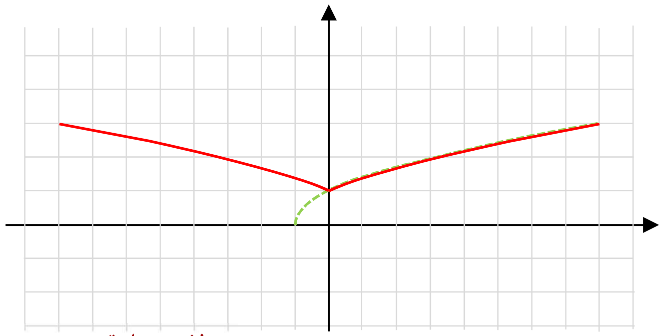
قرینه قسمت سمت راست نسبت به محور عرض‌ها

ج) $y=f(|x|+۱)=\sqrt{|x|+۱}$

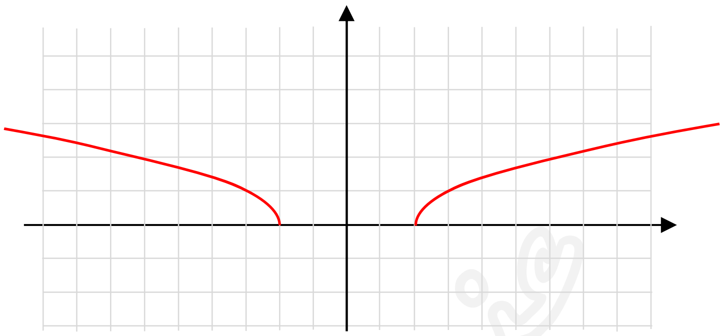


۱ واحد انتقال در جهت منفی محور طول‌ها

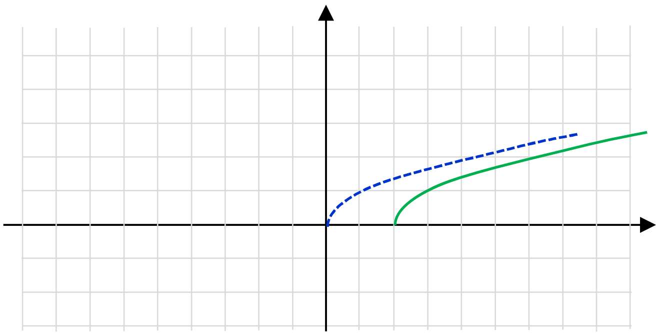
حذف نمودار قسمت سمت چپ محور عرض‌ها و
قرینه قسمت سمت راست نسبت به محور عرض‌ها



د) $y=f(|x|-۲)=\sqrt{|x|-۲}$



قرینه قسمت سمت راست نسبت به محور عرض‌ها



۲ واحد انتقال در جهت مثبت محور عرض‌ها

سوالات چهارگزینه‌ای

تست

۱- اگر دامنهٔ تابع $y=f(۲x-۱)+۳$ به صورت $[-۲,۶]$ باشد، آن گاه دامنهٔ تابع $g(x)=۳f(۴x-۲)-۳$ کدام است؟

۱) $[-۱,۳]$ ۲) $[-\frac{۳}{۴},\frac{۱۳}{۴}]$ ۳) $[-\frac{۳}{۸},\frac{۱۱}{۸}]$ ۴) $[-۳,۱]$

تست

۲- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

تست

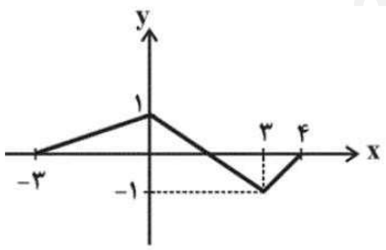
۳- نمودار تابع **f** را یک واحد به طرف چپ منتقل می‌کنیم. سپس آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در انتها عرض هر نقطه را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده است، کدام است؟

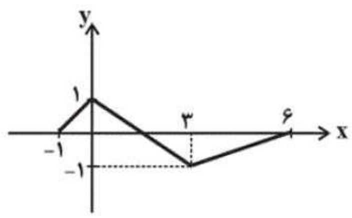
۱) $y=۲f(۱-x)$ ۲) $y=-۲f(x+۱)$

۳) $y=۲f(-۲x+۲)$ ۴) $y=-f(۲x+۲)$

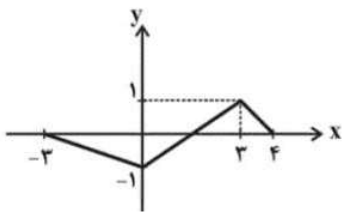
تست

۴- اگر نمودار $y=-f(x-۲)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(۱-x)$ کدام است؟

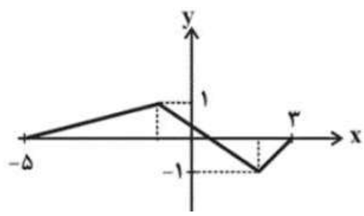




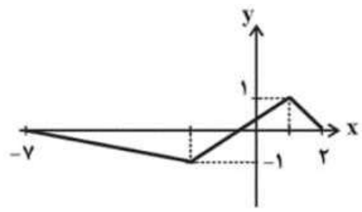
۱)



۲)



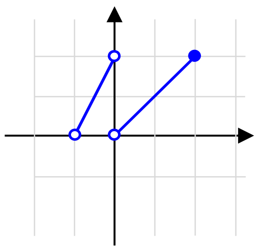
۳)



۴)

تست

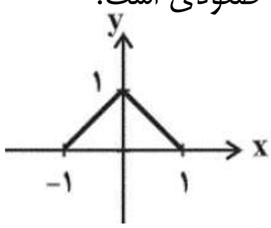
۵- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=4f(1-\frac{x}{3})-1$ چند عضو مشترک صحیح دارند؟



۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

تست

۶- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است. تابع $y=-2f(2-x)$ روی کدام بازه صعودی است؟



۱) $[1,2]$ ۲) $[2,3]$

۳) $[-1,0]$ ۴) $[-2,-1]$

تست

۷- مجموع صفرهای تابع f برابر ۶ و مجموع صفرهای تابع $g(x)=f(1-\frac{x}{2})$ برابر ۴- است. تابع f چند صفر دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

تست

۸- تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. سپس آن را ۱ واحد به چپ می‌بریم و در آخر در راستای محور افقی با ضریب ۲ آن را منبسط می‌کنیم. نمودار جدید خط $y=1$ را با کدام قطع می‌کند؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

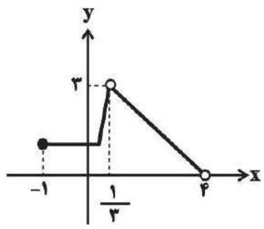
تست

۹- نمودار تابع $f(x)=3|x+2|-4$ را ۳ واحد به طرف x های منفی و سپس ۲ واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم و در نهایت نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. نمودار تابع حاصل در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $[3,5]$ ۲) $[8,12]$ ۳) $[0,6]$ ۴) $[3,12]$

تست

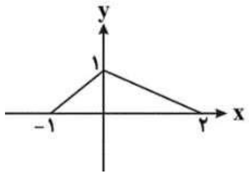
۱۰- اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر و $g(x)=2f(1-\frac{2}{3}x)-1$ باشد، اشتراک دامنه و برد تابع g شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

تست

۱۱- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است. مساحت محدود به نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{3})$ و محور xها کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

تست

۱۲- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل در کدام فاصله بالای خط $y=x$ قرار می‌گیرد؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $(-\infty,2)$

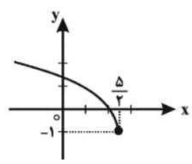
تست

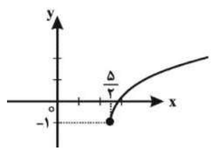
۱۳- اگر f و g دو تابع با دامنه‌های $D_f=[3,6]$ و $D_g=[-2,1]$ باشند، دامنهٔ تابع $h(x)=f(\frac{3x}{2})-g(x-3)$ کدام است؟

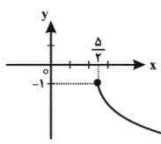
۱) $[2,4]$ ۲) $[1,4]$ ۳) $[-2,6]$ ۴) $[1,6]$

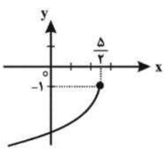
تست

۱۴- نمودار تابع $y=\sqrt{5-2x}-1$ کدام است؟

۱)


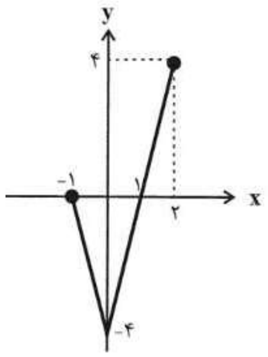
۲)


۳)


۴)


تست

۱۵- نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. بیشترین مقدار تابع $y=|2f(3x+1)-2|$ کدام است؟



۸(۱

۱۰(۲

۶(۳

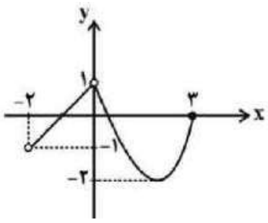
۱۲(۴

تست

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & , x<0\\ x^2-3x & , x\geq 2\end{cases}$ باشد، نمودار تابع $y=-f(2x+1)$ از کدام ناحیه (یا نواحی) دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) فقط اول ۲) فقط دوم ۳) دوم و چهارم ۴) فقط سوم

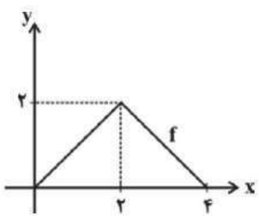
تست



۱۷- نمودار تابع f به صورت زیر است. اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)=-4-3f(2x-3)$، شامل چند عدد صحیح است؟

۴(۱ ۳(۲ ۲(۳ ۱(۴

تست

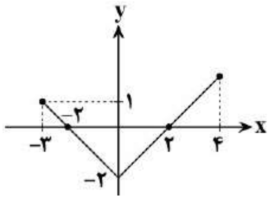


۱۸- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x)=f(2x)$ باشد، مساحت سطح محدود به نمودارهای دو تابع f و g کدام است؟

$\frac{2}{3}$(۱ ۱ (۲ $\frac{3}{4}$(۳ $\frac{1}{2}$(۴

تست

۱۹- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است، برد تابع $y=\sqrt{|۳f(x)-۱|}$ کدام است؟



۱) $[۰,\sqrt{۵}]$　　۲) $[-۲,۳]$　　۳) $[۰,\sqrt{۸}]$　　۴) $[۰,\sqrt{۷}]$

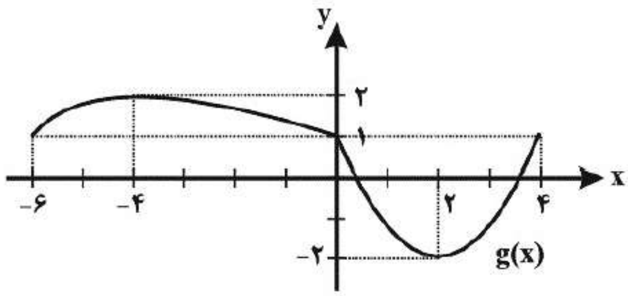
تست

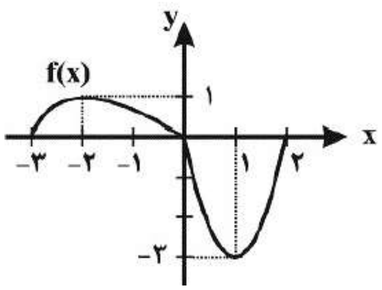
۲۰- قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۲　　۲) $۰/۵$　　۳) ۱　　۴) $۱/۵$

تست

۲۱- با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟





۱) $g(x)=f(\frac{x+۲}{۲})$

۲) $g(x)=f(۲x)+۱$

۳) $g(x)=f(\frac{x}{۲})+۱$

۴) $g(x)=f(x+۲)+۲$

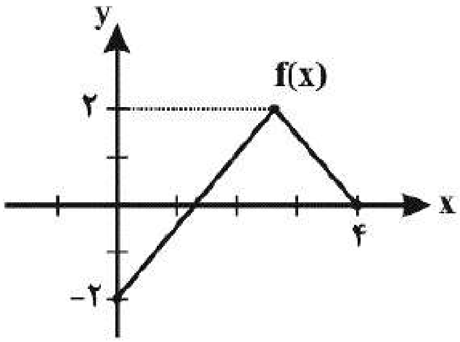
تست

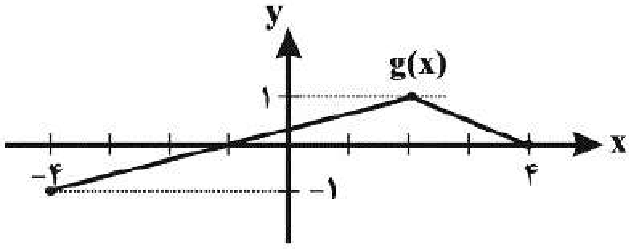
۲۲- نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۲$ را در راستای محورهای مختصات دو واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل کرده‌ایم تا نمودار تابع $g(x)$ به دست آید. عرض نقطهٔ تلاقی دو نمودار f و g کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۹}{۱۶}$

تست

۲۳- با توجه به نمودارهای داده شده، اگر دامنه و برد دو تابع $y_1=\frac{1}{2}f(x+a)+1$ و $y_2=g(2x)+b$، دوبه‌دو با هم برابر باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟





۱) ۲

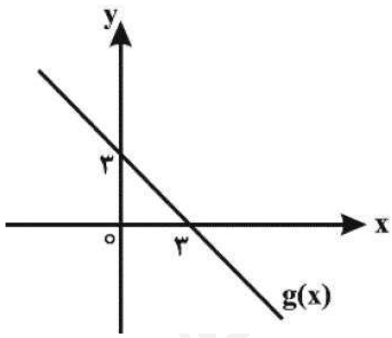
۲) ۳

۳) -2

۴) -3

تست

۲۴- نمودار $g(x)=f(x)-2$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $h(x)=3f(2x-1)$ و محورهای مختصات چقدر است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۷

تست

۲۵- نقطهٔ $A(-1,3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x-5)-7$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

۱) -2　　۲) صفر　　۳) ۲　　۴) ۴

۲۶- نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y=۲f(۲x-۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴

۲) ۱۲

۳) ۶

۴) ۸

۲۷- تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷$ مفروض است. تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ با کدام یک از انتقال‌های زیر بر تابع $f^{-۱}$ منطبق می‌شود؟

۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

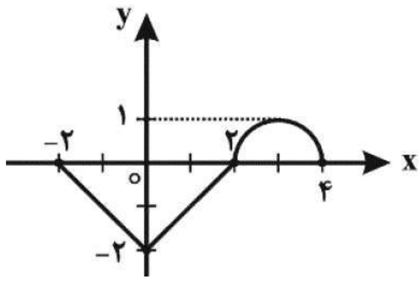
۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۲۸- اگر شکل زیر

تست

۲۹- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حدود m کدام باید باشد تا معادلهٔ $|f(۲x)+۱|-m=۰$، چهار ریشه داشته باشد؟



۱) $۰\le m\le ۱$ ۲) $۰\le m\le ۲$

۳) $۰< m\le ۱$ ۴) $۰< m\le ۲$

تست

۳۰- نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده‌ایم و سپس قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور xها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده‌ایم و تابع $y=-|۳x-۱۲|$ به‌دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

۱) $y=۹|x-۶|$ ۲) $y=\frac{۱}{۳}|۲-x|$ ۳) $y=|x-۶|$ ۴) $y=|x-۲|$

تست

۳۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه در کدام تابع زیر، دامنه و برد برابر نیستند؟

۱) $f(x+۱)-۱$ ۲) $f(x-۱)+۱$ ۳) $f(x-۲)-۲$ ۴) $f(x)$

تست

۳۲- با اعمال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع $y=f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۴}f(۱-x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای افقی

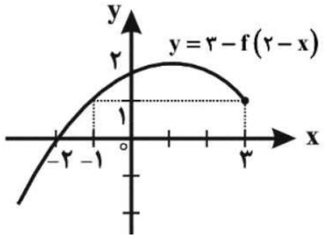
۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای عمودی

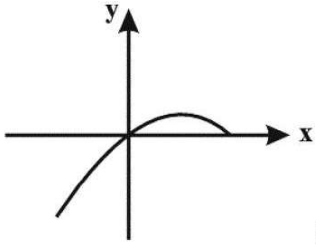
۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای افقی

۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای عمودی

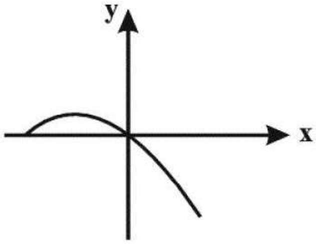
تست

۳۳- با توجه به نمودار $y=3-f(2-x)$، نمودار تابع $y=2-f(x+3)$ کدام است؟

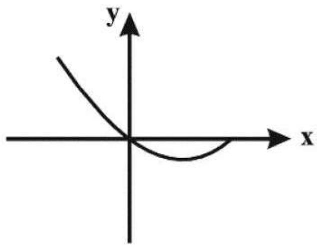




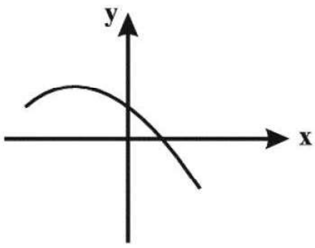
۱)



۲)



۳)



۴)

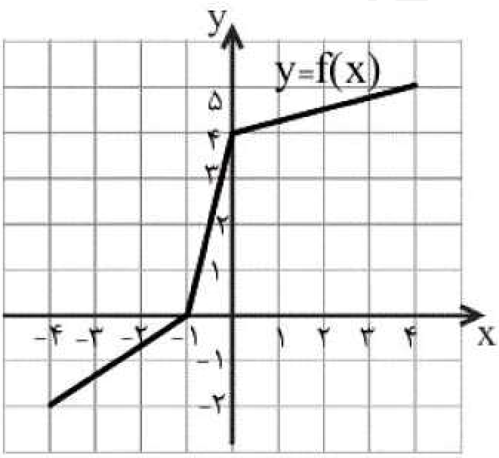
تست

۳۴- معادلهٔ $||x|-2|=\sqrt{x-k}$ به ازای مقادیر مختلف k، حداکثر چند جواب دارد؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

تست

۳۵- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد و نمودار تابع $g(x)=kf(x)+b$ از مبدأ مختصات عبور کند، زوج مرتب (k,b) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-2,-8)$

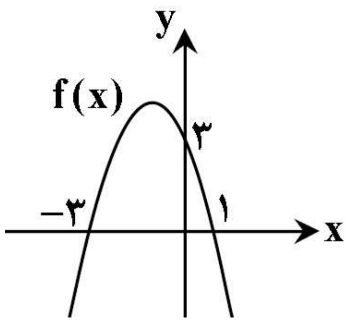
۲) $(\frac{1}{2},-2)$

۳) $(2,-4)$

۴) $(\frac{1}{2},2)$

تست

۳۶- نمودار سهمی $f(x)$ به صورت مقابل است. عرض رأس سهمی $y=2f(1-x)$ کدام است؟



۱) -1

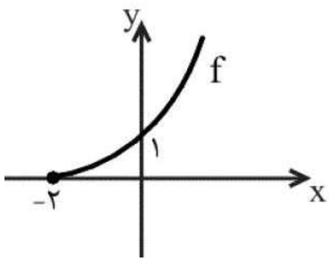
۲) ۲

۳) -3

۴) ۸

تست

۳۷- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ از کدام ناحیه (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

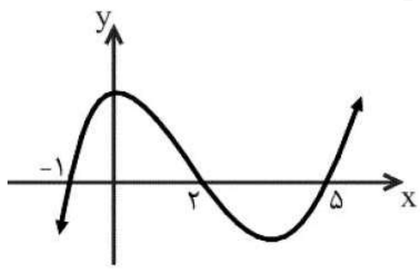


۱) دوم　　۲) سوم

۳) سوم و چهارم　　۴) دوم و سوم

تست

۳۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، به ازای کدام مقدار a، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x-a)=0$ صفر است؟



۱) ۲

۲) -2

۳) ۳

۴) -3

تست

۳۹- اگر برد تابع f بازهٔ $R_f=[-\sqrt{5},1]$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x)=-\sqrt{2}f(x+1)-3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ٤

تست

۴۰- نقطهٔ $A'(\frac{x_\circ+۱}{۳},۲y_\circ+۱)$ روی نمودار تابع $g(x)$ متناظر نقطهٔ $A(x_\circ,y_\circ)$ روی نمودار $f(x)$ است. رابطهٔ بین توابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x)=۲f(۳x-۱)+۱$

۲) $g(x)=۲f(\frac{x+۱}{۳})+۱$

۳) $f(x)=۲g(۳x-۱)+۱$

۴) $f(x)=۲g(\frac{x+۱}{۳})+۱$

پاسخ کلیدی تست‌ها

۲(۱	۴(۱۱	۳(۲۱	۳(۳۱
۳(۲	۱(۱۲	۴(۲۲	۲(۳۲
۱(۳	۱(۱۳	۲(۲۳	۲(۳۳
۱(۴	۱(۱۴	۴(۲۴	۲(۳۴
۳(۵	۲(۱۵	۲(۲۵	۲(۳۵
۲(۶	۲(۱۶	۳(۲۶	۴(۳۶
۱(۷	۳(۱۷	۳(۲۷	۴(۳۷
۲(۸	۱(۱۸	۳(۲۸	۲(۳۸
۲(۹	۴(۱۹	۳(۲۹	۱(۳۹
۲(۱۰	۳(۲۰	۴(۳۰	۱(۴۰

امیدوارم این فایل مورد استفاده شما دانش آموزان عزیز و داوطلبان کنکور قرار گرفته باشد.

لطفا اشکالات تایپی، علمی و... را به اینجانب گزارش دهید.

با تشکر

عزیز اسدی (ریاضی سرا) - مهر ماه ۱۴۰۳