داستان تصاعد در اعداد شطرنج

می‌گویند پادشاهی فرمان داده بود هرکس برایش سرگرمی جذاب و مفرحی بیاورد هر چیزی بخواهد به او خواهد داد. شخصی بازی شطرنج را برای او می‌برد و پادشاه نیز راضی می‌شود هرچه می‌خواهد به او پاداش بدهند ولی شخص درخواست عجیبی از پادشاه می‌کند. او میگوید من چیز زیادی نمی‌خواهم صفحه شطرنج من 64 خانه دارد ، در خانه اولی یک دانه گندم قرار بدهند و در خانه بعدی دو برابر خانه اول گندم قرار بدهند و در خانه بعدی دو برابر خانه قبلی اش ، همین‌طور تا خانه آخر و همان مقدار گندم برای من کافی است.

پادشاه به او می‌گوید که تو می‌توانستی چیزی بیشتر از کیسه گندم درخواست کنی و او می‌گوید من به همین مقدار راضی هستم. پادشاه فکر می‌کند با عجب آدم ساده لوح طرف است. دستور می‌دهد این مقدار گندم را محاسبه کنند و به شخص بدهند.

پس از چند روز مسئول انبار گندم خدمت پادشاه می‌رسد و گزارش می‌دهد که اگر تمام گندم های کل کشور را جمع کنیم و از همه کشور های همسایه هم قرض بگیریم حتی کفاف بخشی از گندم درخواستی را نمی‌دهد.

این مثال از عجایب یک تصاعد است که آن قدر بزرگ می شود حتی در ذهن انسان نمی‌گنجد. جالب است بدانید امروزه محاسبه کرده‌اند برای اینکه مقدار گندم درخواستی آن شخص کم توقع تأمین شود باید تمام سطح کرده زمین اعم از خشکی ها و دریاها 5 بار زیر کشت برود.

تاریخچه

ریاضیدانان مصر باستان ، توان های پشت سر هم عدد 2 را می‌شناختند و برای انجام عمل ضرب، از توانهای 2 استفاده می‌کردند. به عنوان نمونه، توجه می‌کردند که 235 را می‌توان مجموعی از توان های 2 نوشت؛ و این نخستین اندیشه در باره استفاده از تصاعد هندسی (توان های متوالی عدد 2)، برای انجام عمل ضرب بود. ولی بابلی ها جدولی تنظیم کرده بودند که شامل مجذور و توان سوم، جذر مکعب عدد ها بود. بابلی تصاعد را می‌شناختند و در جدول هایی که تنظیم کرده بودند، مجموع جمله های تصاعد حسابی، مجموع جمله های تصاعد هندسی، مجموع مجذور های عدد های طبیعی متوالی و بسیاری از محاسبه های دیگر را آورده بودند. آن را می‌توانستند، با در دست داشتن جمله k ام و مجموع n جمله از تصاعد ، قدر نسبت آن را محاسبه کنند. محاسبه‌ها طوری انجام شده است که گویا از همه دستور های امروزی مربوط به تصاعد ها اطلاع داشته اند. در یونان باستان و سپس در مکتب اسکندریه

هم با تصاعد ها (و بیشتر به یاری هندسه) کار می‌کردند. فیثاغورث (سده ششم بیش از میلاد)، سه نوع تناسب را توضیح می‌دهد. و می‌دانیم تناسب ها آغازی برای شناختن تصاعد ها هستند. اودوکس (سده چهارم بیش از میلاد) بحثی منظم تر درباره تصاعد ها داد، تا سر انجام اقلیدس (سده سوم پیش از میلاد)، در کتاب معروف «مقدمات» خود به همه این بحث ها، منطقی می‌دهد. ریاضیدانان هندی هم با تصاعد ها اشنا بودند. مهاویرا، ریاضیدان هندی سده نهم میلادی، مساله هایی در باره تصاعد حسابی ارایه داد .

تا سده شانزدهم میلادی، تصاعد را (چه حسابی و چه هندسی) از جایی آغاز می‌کردند و به سمت راست ادامه می دانند و دنباله تنها از یک سمت پیش می‌رفت. نخستین کسی که اندیشه ادامه جمله های تصاعد را از دو طرف مطرح کرد شتیفل (1486–1567 میلادی) ریاضیدان آلمانی بود.

ترادف ها

sequences ردیف ها ، ترادف ها ، سلسله ها

ردیف (ترادف یا تصاعد)

ردیف

ترتیب از اعداد را ردیف گویند و زمانیکه این ترتیب اعداد از قاعده خاصی پیروی نماید ترادف یا (تصاعد) نامیده می شود . مانند :

$$1,3,5,7,9,.........(2n-1)...$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},......\left(\frac{1}{n}\right)...$$

$$1,4,9,16,25,.......(n^2)...$$

ترادف های اعداد یا تصاعد ها

ترادف های عددی یکی از مو ضوعات عمده و اولیهٔ آنالیز ریا ضی ا ست که در تحلیل م سایل ب سیار مهم ریا ضی از جمله محا سبات عددی موارد ا ستعمال زیاد دارد. درینجا مفاهیم مقدماتی و بسیط ترادف ها معرفی می‌گردند.

تعریف ترادف

ترادف عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی باشد .

ویا به عبارت دیگر اعداد منتخب a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n ، ... به نام ترادف اعداد یاد می شوند، هر یک از اعداد فوق عنصری از ترادف مذکور ، a_1 عنصر اول و a_n عنصر nام این ترادف می‌باشند. عناصر یک ترادف می‌توانند بین همدیگر ارتباط منطقی و یا الجبری داشته باشند. مثلا

ترادف اعداد جفت $2 , 4 , 6 , 8,...,2n,...$

ترادف اعداد طاق $1 , 3 , 5\ 7,..., 2n-1,...$

ترادف اعداد مضرب 5 $5 , 10, 15 , 20,..., 5n ,...$

ترادف معکوس اعداد مضرب 3 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9},..., \frac{1}{3n},...$

انواع ترادف

معمولا یک ترادف بوسیله عنصر اختیاری nام تعریف و معین شده می‌تواند، مثـلا

ترادف اعداد جفت $a_n = 2n \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$

ترادف اعداد طاق $b_n = 2n-1 \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$

ترادف اعداد مضرب 5 $c_n = 5n \quad , \quad (n = 1,2,3,....)$

ترادف اعداد معکوس مضرب 3 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9},..., \frac{1}{3n},...$

ترادف معین (محدود): هرگاه تعداد حدود یک ترادف معین باشد آن را به نام ترادف معین می گویم . و یا به عبارت دیگر ترادفی که جمله آخر آن موجود باشد بنام ترادف معین یاد میشود . مانند : $2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22$

ترادف نامعین (نامحدود): هرگاه حدود ترادف معین نباشد آن را ترادف غیر معین گویند. ویا به عبارت دیگر ترادفی که جمله آخر آن موجود نباشد بنام ترادف نامعین یاد مشود.

مانند: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12},........, \frac{1}{n(n+1)},...$

تصاعد فوق یک تصاعد نامعین است زیرا برای هر n از اعداد طبیعی $\frac{1}{n(n+1)}$ یک جمله ای از ترادف یا تصاعد فوق است و چون اعداد طبیعی بی نهایت است لذا تعداد جملات این تصاعد هم بی نهایت می باشد و به این دلیل که جمله ای اخیر آنرا تعین نموده نمیتوانیم ترادف فوق را نا معین می گویم .

ترادف متناوب: تصاعدی را متناوب گویند که به ازای هر n از اعداد طبیعی جملات آن روی یک نظم خاص تکرار شوند مانند ترادف ذیل $\frac{1+(-1)^n}{2}$ $0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,...,$

در ترادف فوق دیده می‌شود که جملات ترادف مکرراً تکرار می‌گردد که چنین ترادف های را متناوب گویند.

ترادف صعودی (متزاید): ترادفی که قیمت عددی عناصر آن تدریجا افزایش میابد متزاید گفته می‌شود. مانند ترادف های اعداد جفت، اعداد طاق ، اعداد مضرب 5 و غیره.

ویا به عبارت دیگر ترادفی را صعودی یا متزاید گویند که به ازای هر n از اعداد طبیعی رابط $a_n < a_{n+1}$ بر قرار باشد یعنی $(d>0)$. مانند : $1,3,5,7,9,11,13,...,(2n+1)$

ترادف متناقص (نزولی): ترادفی که مقدار عناصرش بطور تدریجی کاهش میابند بنام ترادف متناقص یادمی‌گردد. مانند ترادف معکوس اعداد مضرب 3.

ویا به عبارت دیگر ترادفی را نزولی یا متناقص گویند که به ازای هر n از اعدادطبیعی رابط $a_n > a_{n+1}$ بر قرار باشد یعنی $(d<0)$. مانند : $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{12},...,\frac{1}{2n}$

مثال اول: ترادف های $a_n = n^2$ و $b_n = \frac{2}{n}$ متزاید یا متناقص اند؟

➢ **حل:** ابتدا چند قیمت مسلسل این ترادف ها را فهرست می‌کنیم.

$n:$	1	2	3	4	5	6
$a_n:$	1	4	9	16	25	36
$b_n:$	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$

دیده می‌شود که عناصر ترادف a_n افزایش می‌یابند لذا متزاید است و عناصر b_n کاهش می‌یابد بنابرین متناقص می‌باشد.

مثال دوم: ترادف های $a_n = n^2$ و $b_n = \frac{3}{n}$ متزاید اند یا متناقص.

➢ **حـــل**: دیده می‌شود که حدود تـرادف a_n افزایش می‌یابد؛ بنابر آن متزاید است و حدود ترادف کم می‌شود ؛ بنابر آن متناقص می‌باشد.

$$a_n = n^2 = 1,4,9,16,25,36,\ldots \quad , \quad b_n = \frac{3}{n} = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ldots$$

مثال سوم : ترادف $2,5,8,11,14,17,\ldots$ را در نظر گرفته از روی فرق مشترک ثابت کنید که متزاید است ؟

➢ **حـــل :**

$$2,5,8,11,14,17,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d = 5-2 = 3 \\ d = 8-5 = 3 \\ d = 11-8 = 3 \end{array}\right\} d = 3 > 0$$

چون $d > 0$ است پس ترادف حسابی متزاید است .

مثال چهارم : ترادف $4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ldots$ را در نظر گرفته از روی فرق مشترک ثابت کنید که متناقص است ؟

حـــل : چون $d < 0$ است پس ترادف حسابی متناقص است .

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d = 0-4 = -4 \\ d = -4-0 = -4 \\ d = -8-(-4) = -4 \\ d = -12-(-8) = -4 \\ d = -16-(-12) = -4 \end{array}\right\} d = -4 < 0$$

مثال پنجم : ترادف ذیل $1,7,25,79,\ldots$ چه نوع ترادف است :

۱)ترادف متزاید　　۲) ترادف متناقص　　۳) ترادف حسابی　　۴) ترادف هندسی

دریافت جملات یک ترادف از روی جمله‌ای عمومی

برای دریافت جملات یک ترادف در صورتیکه جمله‌ای عمومی (حد nام) آن داده شده با شد با قیمت گذاری بجای n در جمله عمومی میتوان جمله اول، دوم، سوم، چهارم ... وغیره جملات آنـرا دریافت نمود.

مثال اول : جمله عمومی یک ترادف $a_n = 2n^2 - 1$ می باشد، چند جمله ابتدایی آن را بنویسید.

➢ **حــل:** با قیمت گذاری دیده میشود که حدود ترادف فوق در حال زیاد شدن است ،پس ترادف صعودی یا متزاید می باشد.

$$a_n = 2n^2 - 1 \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = 1 \\ n=2 \Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow \quad \{a_n\}: 1, 7, 17, \ldots \\ n=3 \Rightarrow a_3 = 17 \end{cases}$$

مثال دوم: جمله عمومی یک ترادف $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ می باشد، چند جمله ابتدایی آن را بنویسید.

➢ **حــل:** با قیمت گذاری دیده میشود که حدود ترادف فوق در حال کم شدن است ،پس ترادف نزولی یا متناقص می باشد.

$$b_n = \frac{1}{n+10} \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{11} \\ n=2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \quad \{b_n\}: \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{13}, \ldots \\ n=3 \Rightarrow a_3 = \dfrac{1}{13} \end{cases}$$

مثال سوم: جمله عمومی یک ترادف $c_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ می باشد ، چند جمله ابتدایی آن را بنویسید .

➢ **حـــل:** حدود این ترادف بشکل تناوبی تکرار می شوند ، و به این ترادف یک ترادف تناوبی می گویم .

$$c_n = \sin\frac{n\pi}{2}\begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ n=2 \Rightarrow a_2 = \sin\pi = 0 \\ n=3 \Rightarrow a_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \\ n=4 \Rightarrow a_4 = \sin 2\pi = 0 \quad \Rightarrow \{c_n\}: 1,0,-1,0,1,0,-1,0,1,\ldots \\ n=5 \Rightarrow a_5 = \sin\frac{5\pi}{2} = 1 \\ n=6 \Rightarrow a_6 = \sin 3\pi = 0 \end{cases}$$

مثال چهارم : پنج جمله اول تصاعد که جملهٔ nام آن ذیلاً داده شده است دریافت نمائید.

➢ **حـــل :**

$$a_n = \frac{1}{n+1} \qquad n \in N$$

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ ,\quad a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}\ ,\quad a_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}\ ,\quad a_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}\quad a_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

مثال پنجم: جملات نهم ، دهم ، یازدهم و دوازدهم تصاعد که جمله nام آن ذیلاً داده شده است دریافت نمائید.

➢ **حـــل :**

$$a_n = 2n-1 \qquad n \in N$$

$$a_9 = 2(9)-1 = 17 \qquad a_{10} = 2(10)-1 = 19 \qquad a_{11} = 2(11)-1 = 21 \qquad a_{12} = 2(12)-1 = 23$$

مثال ششم : اگر حد عمومی یک ترادف $a_n=\frac{n}{n+1}$ داده شده باشد ، چهارحد اول آن را دریابید.

➢ **حـــل:** برای انکشاف قیمت های $n=1,2,3,4,5$ در حد عمومی وضع می کنیم .

$$a_n=\frac{n}{n+1}\Rightarrow\quad a_1=\frac{1+1}{1}=2\quad a_2=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}\quad a_3=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}\quad a_4=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}\quad\Rightarrow 2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots$$

مثال هفتم : اگر حد عمومی یک ترادف $a_n=\frac{n^2}{n+1}$ داده شده باشد ، 5 حد اول آن را دریابید.

➢ **حـــل:** برای دریافت 5 حد اول باید قیمت های $n=1,2,3,4,5$ در حد عمومی وضع شود حد ترادف اول به دست می‌آیـد.

$$a_n=\frac{n^2}{n+1}\Rightarrow\quad a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{2^2}{2+1}=\frac{4}{3}\ ,\ a_3=\frac{3^2}{3+1}=\frac{9}{4}\ ,\ a_4=\frac{4^2}{4+1}=\frac{16}{5}\ ,\ a_5=\frac{5^2}{5+1}=\frac{25}{6}\quad\Rightarrow\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{9}{4},\frac{16}{5},\frac{25}{6}$$

مثال هشتم: حد پنجم ترادفی که حد عمومی آن $a_n=2n^2-10$ می باشد ، را دریابید.

➢ **حـــل:** برای دریافت حد 5 ام قیمت $n=5$ در حد عمومی وضع شود حد $a_5=2\cdot5^2-10=40$

دریافت جمله‌ای عمومی یک ترادف

جمله ای عمومی یک تصاعد جمله ای است که بر حسب n بیان شده و قانون پیدا شدن اعداد ترادف را مشخص میکند. اما پیدا نمودن جمله عمومی برای یک تصاعد کاری است مشکل ، ولی با سعی و کوشش بالاخره میتوان برای تصاعد که چند جمله‌ای اولیه آن معلوم است جمله ای عمومی نوشت.

مثال اول: جملات اولیه تصاعدی $(1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ldots)$ می‌باشد ، برای این تصاعد جمله‌ای عمومی بنویسید.

➢ **حــل:** با کمی دقت بنظر می رسد که ترادف فوق به توان رساندن عدد 2 تشکیل گردیده طوریکه توان هر جمله یک واحد از توان جمله قبلی زیادتر است.

$$a_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$$
$$a_2 = 2 = 2^1 = 2^{2-1}$$
$$a_3 = 4 = 2^2 = 2^{3-1}$$
$$a_4 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$
$$a_5 = 16 = 2^4 = 2^{5-1}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^{n-1}$$

مثال دوم: جملات اولیه ترادفی $(2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$ می باشد ، برای این تصاعد جمله ای عمومی بنویسید.

➢ **حــل:** با کمی دقت بنظر می رسد که هر جمله از حاصل جمع عدد 2 با یک مضربی از 3 حاصل گردیده است.

$$a_1 = 2 = 2+0 = 2+0\cdot 3 = 2+(1-1)3$$
$$a_2 = 5 = 2+3 = 2+1\cdot 3 = 2+(2-1)3$$
$$a_3 = 8 = 2+6 = 2+2\cdot 3 = 2+(3-1)3$$
$$a_4 = 11 = 2+9 = 2+3\cdot 3 = 2+(4-1)3$$
$$a_5 = 14 = 2+12 = 2+4\cdot 3 = 2+(5-1)3$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2+(n-1)3$$

مثال سوم: جملات اولیه ترادف $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{5}{15}, \frac{7}{20}, \ldots$ قرار ذیل می باشد ، برای این ترادف جمله‌ای عمومی بنویسید.

➢ **حـل:** با کمی دقت متوجه می‌شویم که صورت این کسر ها ، اعداد طبیعی فرد و مخرج این کسر ها مضربهای از 5 می باشد. پس جمله عمومی این تصاعد بصورت $a_n = \dfrac{2n-1}{5n}$ مـی‌تـواند باشد.

مثال چهارم : جمله ی عمومی ترادف $4, -2, \dfrac{16}{9}, -2, ...$ کدام گزینه زیر است ؟

۱) $an = \dfrac{2\times(-2)^n}{n}$ ۲) $an = \dfrac{(-2)^{n+1}}{n^2}$ ۳) $an = \dfrac{2^{2n}}{n}$ ۴) $an = \dfrac{4\times(-2)^{n+1}}{n}$

➢ **حـل:** در این مدل تست ها ، بهترین کار این است که چند جمله از جمله های عمومی داده شده را بنویسید . به راحتی می توانید جمله عمومی ترادف مورد نظر را بیابید

$$an = \frac{(-2)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{(-2)^{1+1}}{1^2} = 4 \quad , \quad a_2 = \frac{(-2)^{2+1}}{2^2} = -2 \quad , \quad a_3 = \frac{(-2)^{3+1}}{3^2} = \frac{16}{9}$$

مثال پنجم : جمله ی عمومی ترادفی بصورت $a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & , \quad n \in 2n \\ \dfrac{n^2-1}{8} & , \quad n \in 2n-1 \end{cases}$ مجموعه جمله های چهارم و نهم این ترادف چه قدر است ؟

۱) 11 ۲) 14 ۳) 13 ۴) 16

➢ **حـل:** با توجه به جمله ی عمومی مربوط به جملات جفت $(n \in 2n)$ مقدار جمله چهارم را به دست می آوریم . $a_n = \dfrac{n^2}{4} \Rightarrow a_4 = \dfrac{4^2}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$

و مقدار جمله ی نهم با استفاده از جمله ی عمومی به $(n \in 2n-1)$ محاسبه می کنیم . $a_n = \dfrac{n^2-1}{8} \Rightarrow a_9 = \dfrac{9^2-1}{8} = \dfrac{81-1}{8} = \dfrac{80}{8} = 10$

که در نتیجه $a_4 + a_9 = 4 + 10 = 14$

مثال ششم: جمله ی $2n+3$ام ترادف برابر $\frac{2n^2+6n+5}{n+2}$است ، جمله ی هفتم این ترادف چه قدر است ؟

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{25}{4}$ ۳) $\frac{36}{16}$ ۴) $\frac{49}{25}$

➢ **حـــل:** برای تعین جمله هفتم ابتدا باید nای را تعین کنیم که به قیمت $2n+3$ برابر به 7 می شود ، چون ما مستقیم نمی توانیم nرا در جمله ی عمومی ترادف قرار دهیم و مقدار a_n را به دســت آوریم . پس معادله $2n+3=7$ را حل می کنیم: $2n+3=7 \Rightarrow 2n=4 \Rightarrow n=2$ اگر در جمله ی عمومی داده شــده nرا برابر 2 قرار دهیم جمله ی هفتم را محاسبه کرده میتوانیم بنابر این خواهیم داشت : $a_7=\frac{2(2)^2+6(2)+5}{2+2}=\frac{8+12+5}{4}=\frac{25}{4}$

مثال هفتم : جمله عمومی ترادف $a_1=1$ و $a_n=a_{n-1}+2n-1$ کدام گزینه زیر است ؟

۱) $an=\frac{n^2}{n+1}$ ۲) $an=n^2$ ۳) $an=\frac{n(n+1)}{2}$ ۴) $an=\frac{n(n+1)^2}{2}$

➢ **حـــل:** اول از همه چند جمله ی اول ترادف داده شده را به دست می آوریم:

$$a_2=a_1+3=1+3=4$$
$$a_3=a_2+5=4+5=9$$
$$a_4=a_3+7=9+7=16$$
$$a_5=a_4+9=16+9=25$$

پس جمله های ترادف بصورت $1,4,9,16,25,...$در می آید . بنابر این میتوان حدس زده که جمله ی nام ، برابر n^2است . پس جمله عمومی $a_n=n^2$

مثال هشتم : حد $n-$ام ردیف $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},...$ مساوی است به :

۱) $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ ۲) $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ ۳) $\frac{n+1}{n}$ ۴) $\frac{n}{n-1}$

مثال نهم : ترادف $1,2,4,8,...$ را در نظر گرفته حد $n-$ام آن را بنویسید.

➢ **حــل:** حـد nام آن عبارت است از: $a_n=2^{n-1}$

مثال دهم: حد $n-$ام ردیف $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},...$ مساوی است به :

۱) $a_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$ ۲) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ۳) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ۴) $\frac{n}{n-1}$

مثال یازدهم : حد $n-$ام ردیف $1,8,27,....$ مساوی است به :

۱) $a_n=n$ ۲) $a_n=n^3$ ۳) $a_n=n^2$ ۴) $a_n=3n$

مثال دوازدهم : حد nام ترادف $1,7,25,79,....$ مساوی است به :

۱) $a_n=3^n+2$ ۲) $a_n=3^n-2$ ۳) $a_n=2^n+2$ ۴) $a_n=2^n-1$

---

1 ترادف حسابی (تصاعد حسابی)

هرگاه در یک ترادف فرق بین دو حد متعاقب آن همیـ شه یک عدد ثابت با شد آن را ترادف حـ سابی می نامند . این عدد ثابت d را بنام فرق مـ شترک $(common\ difference)$ نامیده میشـود. یعنی $(n=1,2,3,....)$, $a_{n+1}-a_n=d \Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+d$ در اینجا عدد d بنام تفاضـل مشـترک ترادف یاد می‌گردد و عدد a_1 عبارت از عنصـر اول ترادف مذکور است.

مثال اول :

$$\underset{a_1}{2},\ \underset{a_2}{5},\ \underset{a_3}{8},\ \underset{a_4}{11},\ \underset{a_5}{14},\ \underset{a_6}{17},\ .....$$

تفاضل یا فرق مشترک هر دوحد متعاقب درترادف فوق $d=3$ می‌باشد. طوریکه :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1+d = 2+3 = 5 \\ a_3 &= a_2+d = 5+3 = 8 \\ a_4 &= a_3+d = 8+3 = 11 \end{aligned}$$

یاداشت : اگر عنصر اول و تفاضل مشترک در یک ترادف حسابی مشخص باشد ترادف معین شده می‌تواند.

مثال دوم: ترادفی را تشکیل دهید که حد اول آن $\frac{3}{2}$ و فرق مشترک آن عدد 2 باشد .

➢ **حــل :** چون حد اول آن $a_1=\frac{3}{2}$ و فرق مشترک آن $d=2$ است ، بنابر آن به صورت عمومی می توان نوشت .

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

$$a_1\ ,\ (a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d)\ ,\ \ldots$$

$$\frac{3}{2},\ (\frac{3}{2}+2),\ (\frac{3}{2}+2+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2+2)\ ,\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{11}{2}\ ,\ \frac{15}{2}\ ,\ \ldots$$

مثال سوم : کدام یک از ترادف های زیر یک ترادف حسابی می‌باشد.

$a)\ \ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ldots$ $\qquad b)\ \ 1,2,4,8,16,\ldots$

➢ **حل جـــزء a:** نظر به تعریف ترادف حسابی، فرق مشترک حدود را به دست می‌آوریم.

$$1,\frac{3}{2},2\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow d=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$$

$$d=4-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$$

دیده می‌شود که فرق مشترک تمام حدود ترادف حسابی مساوی به عدد ثابت $\frac{1}{2}$ است؛ پس ترادف حسابی می‌باشد.

➢ **حل جـــزء b:**

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 8 \qquad 16$$

$$d=2-1=1 \qquad d=4-2=2 \qquad d=8-4=4 \qquad d=16-8=8$$

دیده می‌شود که: فرق بین تمام حدود ترادف حسابی مساوی به یک عدد ثابت نیست؛ پس ترادف حسابی نمی‌باشد.

مثال چهارم : جمله ی عمومی چند ترادف داده شده است کدام ترادف تشکیل تصاعد عددی یا حسابی می هد؟

۱) $an=\frac{8}{n}-1$ ۲) $an=8n-n^2$ ۳) $an=8+\frac{n}{8}$ ۴) $an=\frac{n^3}{8}$

➢ **حــل:** راه کمی هوشمندانه تر و ساده تر حل این سوال اینست که به عنوان جواب گزینه ای را انتخاب کنیم که در آن جمله ی عمومی ترادف درجه اول باشد . پس بنابر این گزینه سوم درست است .

و اگر چند جمله هر جواب را بدست آوریم و بعدا فرق مشترک شان را بیابید ، در صورتیکه فرق مشترک هر کدام از چهار جوابه های فوق یک عدد ثابت شد آن ترادف حسابی است : دیده میشود که فرق مشترک تمام جملات ترادف داده شده $d=\frac{1}{8}$ میشود ، پس گزینه سوم یک ترادف حسابی است .

$$an=8+\frac{n}{8} \Rightarrow a_1=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8} \quad , \quad a_2=8+\frac{2}{8}=\frac{66}{8} \quad , \quad a_3=8+\frac{3}{8}=\frac{67}{8} \qquad \Rightarrow d=\frac{1}{8}$$

دریافت حد n - ام در یک ترادف حسابی

تعین حد اختیاری ترادف حسابی

هرگاه a_1 عنصر اول , d فرق مشترک و a_n عنصر nام یک ترادف حسابی باشد رابطه بین آن ها قـرار ذیل بررسی می‌گـردد.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1+d \\
a_3 &= a_2+d = (a_1+d)+d = a_1+2d \\
a_4 &= a_3+d = (a_1+2d)+d = a_1+3d \\
a_5 &= a_4+d = (a_1+3d)+d = a_1+4d
\end{aligned}$$

و بالاخره نتیجه می‌شود که $\boxed{a_n = a_1+(n-1)d}$

مثال اول : اگر عنصر اول ترادف حسابی $a_1=5$ و تفاضل مشترک آن $d=2$ باشد، عنصر بیستم آن چند است؟

➢ **حــل:** $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_{20}=5+(20-1)2=5+19\cdot 2=43$

مثال دوم : ترادف حسابی را معین نمایید که در آن $a_6 = 27$ و $a_{12} = 57$ باشد.

➢ **حــل:** در اینجا a_1 و d را باید تعیین کرد. (از حل سیستم معادلات دو مجهوله‌ء فوق میابیم که)

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d = 27 \\ a_{12} = a_1 + 11d = 57 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 2 \ , \ d = 5$$

مثال سوم : حد اول یک تصاعد حسابی 5 و فرق مشترک آن 4 است حد 26 این تصاعد حسابی را بیابید.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 4 \\ a_{26} = ? \\ n = 26 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \\ a_{26} = 5 + (26-1)4 \Rightarrow \\ a_{26} = 5 + 100 \Rightarrow \\ \quad a_{26} = 105 \end{array}$$

مثال چهارم : حد 103 تصاعد حسابی ...., 14 , 11 , 8 , 5 را محاسبه کنید.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 3 \\ a_{103} = ? \\ n = 103 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \\ a_{103} = 5 + (103-1)3 \Rightarrow \\ a_{103} = 5 + (102)3 \Rightarrow \\ a_{103} = 5 + 306 \qquad a_{103} = 311 \end{array}$$

مثال پنجم : تعداد حدود ترادف حسابی $40, 45, \dots, 2000$ را دریافت کنید.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \\ n = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 2000 = 35 + (n-1) = 5 \Rightarrow 2000 = 35 + 5n - 5 \Rightarrow 2000 = 30 + 5n \Rightarrow 1970 = 5n \\ n = \dfrac{1970}{5} \Rightarrow n = 394 \end{array}$$

مثال ششم : دریک تصاعد حسابی حد اول آن $a+2b$ فرق و یا تفاضل مشترک آن $a-b$ است حد 51 این تصاعد را بیابید.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 8 \\ d &= a-b \\ a_{51} &= ? \\ n &= 51 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &an = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \\ &a_{51} = a + 2b + (50)a - b \Rightarrow \\ &a_{51} = a + 2b + 50a - 50b \\ &a_{51} = 51a - 48b \end{aligned}$$

مثال هفتم : حداول یک تصاعد حسابی 5 وفرق مشترک آن 4 است کدام حد از این تصاعد 201 می گردد.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ d &= 4 \\ an &= 201 \\ n &= ? \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &an = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \\ &201 = 5 + (n-1)4 \Rightarrow \\ &201 = 5 + 4n - 4 \Rightarrow \\ &201 = 1 + 4n \Rightarrow 200 = 4n \Rightarrow \\ &n = 50 \end{aligned}$$

مثال هشتم : حـد 30 ام ترادف حسابی $-2,5,12,\ldots$ را دریافت کنید.

➢ **حــل:**

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ d &= 5-(-2) = 7 \\ n &= 30 \\ a_{30} &= ? \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &a_n = a_1 + (n-1)d \\ &a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ &a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ &a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{aligned}$$

مثال نهم : تعداد حدود ترادف حسابی $30, \quad 40, \quad 45, \ \ldots \ , 2000$ دریافت کنید.

➢ **حـــل**: می دانیم کـه:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \\ n = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 2000 = 35 + (n-1)5 \Rightarrow 2000 = 35 + 5n - 5 \Rightarrow 2000 = 30 + 5n \\ 2000 - 30 = 5n \Rightarrow 1970 = 5n \Rightarrow n = \dfrac{1970}{5} \Rightarrow n = 394 \end{array}$$

مثال دهم : هرگاه حد اول یک ترادف حسابی $a_1 = 3$ و $a_{10} = 10$ باشد فرق مشترک یعنی قیمت d را در یافت کنید ؟

➢ **حـــل**: می دانیم کـه:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = ? \\ a_n = 30 \\ n = 10 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 30 = 3 + (10-1)d \Rightarrow \ 30 = 3 + 9d \Rightarrow 30 - 3 = 9d \Rightarrow 27 = 9d \\ d = 3 \end{array}$$

مثال یازدهم : چند عدد دو رقمی طبیعی داریم که مضرب از چهار باشد .

➢ **حـــل**: اولین عدد دو رقمی قابل تقسیم بر 4 عدد 12 می باشد و آخرین عدد دو رقمی طبیعی قابل تقسیم بر 4 عدد 96 می باشد یعنی

$12 \ , \ 16 \ , \ 20 \ , \ \ldots \ ,96$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ d = 16 - 12 = 4 \\ n = ? \\ a_n = 96 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 96 = 12 + (n-1)4 \\ 96 = 12 + 4n - 4 \\ 96 = 8 + 4n \Rightarrow 88 = 4n \Rightarrow n = 22 \end{array}\right.$$

مثال دوازدهم: جمله هشتم یک تصاعد حسابی پنج برابر جمله دوم آن است و جمله اول این تصاعد 1 است ، جمله یازدهم و فرق مشترک این تصاعد را بیابید.

➢ **حــل**: چون جمله $a_1 = 1$ است پس جمله دوم $a_2 = (1+d)$ و جمله هشتم $a_8 = (1+7d)$ می‌باشد پس نظر به اینکه جمله هشتم پنج برابر جمله دوم است، رابطه این دو جمله را می نویسیم.

$$(1+7d) = 5(1+d) \Rightarrow 1+7d = 5+5d \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

پس جمله یازدهم عبارت از $1+10d = 21$ می‌باشد.

مثال سیزدهم : اگـر جمله سوم یک تصاعد 7 و جمله هفتم آن 15 باشد جمله پنجم آنرا دریافت نمائید.

➢ **حــل**: نظر به اینکه $a_3 = 7$ و $a_7 = 15$ معادله تشکیل داده جملهٔ پنجم را در یافت می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1)d \Rightarrow 7 = a_1 + 2d \\ a_7 = a_1 + (7-1)d \Rightarrow 15 = a_1 + 6d \end{cases}$$

اکنون با حل سیستم فوق حد اول و فرق مشترک را دریافت نموده سپس جمله پنجم را دریافت می‌کنیم که عبارت از 11 است.

مثال چهاردهم : هرگاه حد n–ام ردیف $2 , -1 , -4 , -7 , \ldots , -49$ باشد، مقدار n را بیابید .

➢ **حــل :**

$$\begin{cases} n = ? \\ a_n = -94 \\ a_1 = 2 \\ d = -1-(2) = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -94 = 2 + (n-1)(-3 \\ -94 = 2 - 3n + 3 \\ -3n = -99 \Rightarrow n = 33 \end{cases}$$

مثال پانزدهم : در یک ترادف حسابی حد دوم 2 برابر حد هفتم است . مقدار کدام حد این ترادف برابر صفر است ؟

1) پنجم   2) ششم   3) دوازدهم   4) سیزدهم

➢ **حـل:** با توجه به این که $a_2 = 2a_7$ است ، رابط ی بین a_1 و d را بدست می آوریم یعنی :

$$a_2 = 2a_7 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_1 + d = 2(a_1 + 6d) = 2a_1 + 12d$$
$$\Rightarrow a_1 = -11d \Rightarrow a_1 + 11d = 0$$

از رابطه ی $a_1 + 11d = 0$ چه نتیجه می گیرید ؟ $a_1 + 11d$ یا حد دوازدهم این ترادف است . بنابر این جمله ی یا حد دوازدهم ترادف برابر صفر است .

مثال شانزدهم : مقدار x چه قدر باشد تا $x+2$, $6x+4$, $10x+8$ سه جمله ی متوالی یک ترادف حسابی باشند ؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

➢ **حـل:** با توجه به درس های گذشته مقدار x را حساب می کنیم .

$$6x+4 = \frac{10x+8+x+2}{2} = \frac{11x+10}{2} \Rightarrow 12x+8 = 11x+10 \Rightarrow x = 2$$

مثال هفدهم : اعداد $t_p = q$, $t_q = p$, $p \neq q$ ، فرق مشترک ترادف را بیابید ؟

۱) $p-q$ ۲) -1 ۳) $q-p$ ۴) 1

➢ **حـل:** با توجه به این که $t_p = q$ و $t_q = p$ است مقدار نسبت مشترک ترادف را تعین می کنیم .

$$d = \frac{t_p - t_q}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} = \frac{-(p-q)}{p-q} = -1$$

مثال هژدهم : اضلاع یک مثلث قایم الزاویه تشکیل ترادف حسابی می دهند ، اگر طول وتر این مثلث 15 باشد ، مجموع طول دو ضلع دیگر چه قدر خواهد بود ؟

۱) 19 ۲) 20 ۳) 21 ۴) 22

➢ **حـل:** اضلاع مثلث قایم الزاویه تشکیل ترادف حسابی می دهند ، اگر دو ضلع قایم مثلث را x و y بنامیم ، در این صورت خواهیم داشت

$$x \;,\; y \;,\; 15 \qquad \Rightarrow y = \frac{15+x}{2}$$

در مثلث قایم الزاویه رابطه ی فیثاغورث بر قرار است ، با توجه به رابطه بالایی و رابط فیثاغورث مقدار x و y را تعین می کنیم :

$$x^2+y^2=225 \to x^2+\frac{(15+x)^2}{4}=225 \Rightarrow 4x^2+225+x^2+30x=4\times 225 \Rightarrow 5x^2+30x=3\times 225 \Rightarrow x^2+6x=135$$

$$x=9 \quad \Rightarrow y=\frac{15+9}{2}=\frac{24}{2}=12 \Rightarrow x+y=9+12=21$$

مثال نوزدهم : اگربه فرق مشترک یک ترادف 3واحد اضافه کنیم ، به جمله ی ششم ترادف حاصل ،چند واحد اضافه می شود ؟

۱) 0 ۲) 2 ۳) 15 ۴) 6

➢ **حــل:** فرق مشترک جدید $d'=d+3$ فرض می کنیم . جمله ششم در تصاعد حسابی اول برابر a_1+5d است . در تصاعد حسابی جدید جمله ی ششم برابر است با:

$a_6=a_1+5d'=a_1+5(d+3)=a_1+5d+15$ بنابر این به جمله ششم 15واحد اضافه می شود .

مثال بیستم : در یک ترادف حسابی $t_1+t_7+t_{13}=39$، اگر $t_5=5$باشد ، فرق مشترک ترادف حسابی چه قدر است ؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) 3 ۴) -4

➢ **حــل:** با توجه به تساوی $t_1+t_7+t_{13}=39$، رابطه ای بین (جمله اول ترادف) و d (فرق مشترک ترادف) پیدا می کنیم .

$t_1+t_7+t_{13}=t_1+(t_1+6d)+(t_1+12d)=3t_1+18d=39 \Rightarrow t_1+6d=13$ با داشتن اینکه $t_5=5$ است ، به یک معادله و دو مجهول می رسیم . بر اساس ،آن مقدار d را حساب می کنیم . داریم که $\begin{cases} t_1+6d=13 \\ t_1+4d=5 \end{cases} \Rightarrow 2d=8 \Rightarrow d=4$

مثال بیست ویکم : در یک ترادف حسابی مجموعه دو جمله ی اول برابر $9/5$ ومجموعه جملات سوم و چهارم ، برابر $6/5$ است . فرق مشترک آن کدام است ؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

➢ **حـل:** مجموع جملات اول ، دوم ، و مجموع جملات سوم وچهارم در یک ترادف حسابی برابر است با:

$$a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$$
$$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d$$

اختلاف بین a_1+a_2 و a_3+a_4 برابر $4d$ است . پس می توانیم d را حساب کنیم . $(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=6/5-9/5=4d \Rightarrow d=-\frac{3}{4}$

مثال بیست و دوم : تفاصل جمله ی دهم از جمله ی دوازدهم یک ترادف حسابی 5 و مجموع دو جمله ی دهم و دوازدهم ، 25 است . جمله ی بیست و یکم این ترادف کدام است

۱) 35 ۲) 36 ۳) $37/5$ ۴) $38/5$

$$a_{12}-a_{10}=2d=5\Rightarrow d=\frac{5}{2}$$

➢ **حـل:** بر اساس فرض های موجود در تست مقدار a_1 و d را تعین می کنیم . داریم که : $a_{10}+a_{12}=(a_1+9d)+(a_1+11d)=2a_1+20d=25$

$$2a_1+50=25\Rightarrow 2a_1=-25\Rightarrow a_1=-\frac{25}{2}=-12/5$$

با داشتن a_1 و d مقدار جمله ی بیست ویکم این ترادف را حساب می کنیم. $a_{21}=a_1+20d=-12/5+20d=-12/5+50=37/5$

مثال بیست و سوم: در ترادف حسابی $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$ حاصل $\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}$ کدام است ؟

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

➢ **حـل:** با توجه به $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$ است ، مقدار d برابر است با : $d=a_2-a_1=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$

حاصل کسر داده شده را حساب می کنیم :

$$\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}=\frac{(a_{15}+a_{19})+a_{17}}{(a_{33}+a_{37})+a_{35}}=\frac{2a_{17}+a_{17}}{2a_{35}+a_{35}}=\frac{3a_{17}}{3a_{35}}=\frac{a_1+16d}{a_1+34d}=\frac{1+\frac{32}{3}}{1+\frac{68}{3}}=\frac{\frac{35}{3}}{\frac{71}{3}}=\frac{35}{71}$$

مثال بیست و چهارم : تعداد عددهای دو رقمی ای که باقی مانده ی تقسیم شان بر 9 برابر 2 باشد ، برابر است با :

۱) 10　　۲) 9　　۳) 11　　۴) 12

- **حـل:** تعداد اعداد دو رقمی ای را می خواهیم تعین کنیم که جمله ی عمومی آن ها $a_n=9n+2$ است .

$a_n=9n+2\Rightarrow a_1=11$

- ابتدا اولین عدد دو رقمی و آخرین عدد دو رقمی را تعین می کنیم . داریم : اولین عدد دو رقمی $a_n=9n+2<100\Rightarrow 9n<98\Rightarrow n<10/8$

$n\in IN,\quad n=10\Rightarrow a_{10}=92$

- می بینیم که جمله های a_1 تا a_{10} دو رقمی هستند . تعداد این اعداد دو رقمی برابر 10 می شود .

مثال بیست و پنجم: اگر در یک ترادف حسابی $a_1+a_2+a_{12}=30$ باشد ، جمله ی پنجم a_5 چه قدر است ؟

۱) 10　　۲) 15　　۳) 8　　۴) 12

- **حـل:** تساوی داده شده را ساده می‌کنیم ، ببینید:

$$a_1+a_2+a_{12}=a_1+(a_1+d)+(a_1+11d)$$
$$=3a_1+12d=30\Rightarrow 3(a_1+4d)=30\Rightarrow a_1+4d=10$$

- اینکه a_1+4d همان a_5 است؟ پس جمله‌ی پنجم این تصاعد حسابی برابر 10 است.

مثال بیست و ششم : ترادف حسابی به جمله ی اول 63 و فرق مشترک -4 چند جمله ی مثبت دارد ؟

۱) 15 ۲) 16 ۳) 17 ۴) 18

- **حـل:** جمله ی عمومی ترادف حسابی را تشکیل می دهیم $a_n = a_1 + (n-1)d = 63 + (n-1)(-4) = -4n + 63 + 4 = -4n + 67$
- تعداد جمله هایی راتعین می کنیم که رابطه $a_n > 0$ بر قرار باشد . پس داریم که :

$a_n > 0 \Rightarrow -4n + 67 > 0 \Rightarrow 4n < 67 \Rightarrow n < 16/75 \quad \Rightarrow n \in IN \ , \quad n \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$ بنا بر این ترادف حسابی داری 16 جمله یی مثبت است .

مثال بیست و هفتم : در ترادف حسابی $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ طوریکه فرق مشترک d باشد ، پس a_{101} بشکل ذیل است .

1) $a_{101} = a_1 + 101d$ 2) $a_{101} = a_1 + 100d$ 3) $a_{101} = a_2 + 99d$ 4) $a_{101} = a_1 + 99d$

مثال بیست و هشتم : در یک ترادف حسابی $a_{26} = \frac{35}{2}$ و $a_{99} = 29$ ، حد چهارم این ترادف

1) $a_4 = \frac{11}{2}$ 2) $a_4 = 5/2$ 3) $a_4 = 1$ 4) $a_4 = \frac{13}{2}$

مثال بیست و نهم : اگر در یک ترادف حسابی حد اول 18 و فرق مشترک 2 باشد حد 15–ام آن مساوی است به:

1) $a_{15} = 48$ 2) $a_{15} = 46$ 3) $a_{15} = 49$ 4) $a_{15} = 50$

مثال سی ام : اگر حد n–ام یک ردیف $a_n = (-1)^{200h} 2h$ باشد ، پس حاصل جمع حد 20–ام ، حد 40–ام و حد 60–ام آن مساوی است به:

1) 0 2) -320 3) 320 4) 240

دریافت فرق مشترک در تصاعد حسابی

دریافت تفاضل مشترک در ترادف حسابی

برای دریافت فرق مشترک در ترادف حسابی سه حالت ذیل را در نظر می گیریم.

حالت اول

هرگاه جملات ترادف موجود باشند: برای دریافت فرق مشترک یک حد بالا تر را منفی یک حد پائین تر می سازیم یعنی $d = a_2 - a_1$

مثال اول : در ترادف $2,5,8,11,14,17,\ldots$ فرق مشترک را بیابید ؟

$$2,5,8,11,14,17,\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 5-2=3 \\ d &= 8-5=3 \\ d &= 11-8=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=3$$

حالت دوم

هرگاه دریک تصاعد حسابی حد اول و حد آخر موجود باشد، فرق مشترک را از رابطه ذیل دریافت می کنیم.

$$an = a_1 + (n-1)d$$

$$\frac{an - a_1}{(n-1)} = \frac{(n-1)d}{(n-1)}$$

$$d = \frac{an - a_1}{n-1}$$

مثال دوم : حد اول یک تصاعد حسابی 2 و حد چهارم آن 11 می باشد، فرق مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_4 &= 11 \\ d &= ? \end{aligned}\right\} \qquad d = \frac{an - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{11-2}{4-1} \Rightarrow d = \frac{9}{3} \Rightarrow d = 3$$

مثال سوم : دریک تصاعد حسابی حد اول آن 8 و حد پنجم 32 است فرق مشترک این تصاعد حسابی را بدست آورید .

$$\left.\begin{array}{l} a_1=8 \\ a_5 32 \\ d=? \\ n=5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an=a_1+(n-1)d \Rightarrow \\ 32=8+(5-1)d \Rightarrow \\ 32=8+4d \Rightarrow 24=4d \Rightarrow \\ \quad d=6 \end{array}$$

مثال چهارم: دریک تصاعد حسابی حد اول آن 12 و حد 7 آن 4 است فرق مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=12 \\ a_7=4 \\ d=? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an=a_1+(n-1)d \Rightarrow \\ 4=12+(7-1)d \Rightarrow \\ 4=12+6d \Rightarrow -8=6d \\ \quad d=-\dfrac{4}{3} \end{array}$$

حالت سوم

هرگاه غیر از حد اول یک حد دیگری همراه با حد آخر داده شده باشد، فرق مشترک را از رابطه ذیل بدست می آوریم:یعنی هرگاه an و am دوحد داده شده از یک تصاعد حسابی باشند درینصورت فرق مشترک را از رابطه ذیل بدست می آوریم.

$$\begin{array}{l} a_n=a_1+(n-1)d \\ a_m=a_1+(m-1)d \\ \hline an-am=dn-d-dm+d \Rightarrow \\ an-am=d(n-m) \Rightarrow \dfrac{an-am}{n-m}=d \end{array}$$

مثال پنجم : حدسوم یک تصاعد حسابی 12 و حد هفتم آن 32 است فرق مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_3=12 \\ a_7=32 \\ d=? \end{array}\right\} \qquad d=\frac{an-am}{n-m}\Rightarrow d=\frac{a_7-a_3}{7-3}\Rightarrow d=\frac{32-12}{4}\Rightarrow d=\frac{20}{4}\Rightarrow d=5$$

مثال ششم : در یک تصاعد حسابی جمله پنجم 12 و جمله هشتم 30 می‌باشد فرق مشترک این تصاعد را دریابید.

$$d=\frac{a_p-a_k}{p-k}=\frac{30-12}{8-5}=6$$

مثال هفتم : در یک تصاعد حسابی نزولی ، مجموع سه جمله ی متوالی برابر 27 و حاصل ضرب این سه جمله متوالی برابر 288 شده است . فرق مشترک این ترادف چند است ؟

1) -8 2) -7 3) -6 4) -4

- **حـــــل :** تصاعد حسابی نزولی، ترادفی است که در آن جملات ترادف به یک میزان ثابت نسبت به جمله ی قبل کاهش پیدا کنند . و میدانیم در ترادف حسابی نزولی فرق مشترک ترادف منفی است .
- اگر x,y,z این سه جمله ی متوالی باشند ، با توجه به این که $y=\frac{x+z}{2}$ داریم : $x+y+z=27\Rightarrow(x+z)+y=27\Rightarrow 2y+y=27\Rightarrow 3y=27\Rightarrow y=9$
- اگر فرق مشترک را d فرض کنیم ، x برابر $y-d$ و z برابر $y+d$ می شود .
- با دانستن حاصل ضرب این 3 جمله ی متوالی مقدار d را حساب می کنیم .

$$xyz=288\Rightarrow(y-d)y(y+d)=288\Rightarrow(9-d)9(9+d)=288\Rightarrow(9-d)(9+d)=32\Rightarrow 81-d^2=32\Rightarrow d^2=81-32=49\Rightarrow d<0\Rightarrow d=-7$$

مثال هشتم: در یک تصاعد حسابی ... , $\frac{4}{5}$, 1 جملات $a_5,a_{10},a_{15},\ldots$ تشکیل ترادف دیگری می دهند . فرق مشترک این ترادف ، چه قدر است ؟

1) $-\frac{1}{5}$ 2) -1 3) -5 4) $-\frac{1}{5}$

➢ **حـــل :** اختلاف دو جمله ی متوالی ترادف حسابی برابر فرق مشترک ترادف است اگر d' فرق مشترک ترادف جدید و d فرق مشترک ترادف اولیه باشد ، d' برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

$$d' = a_{10} - a_5 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 4d) = 5d = 5\left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \Rightarrow d' = -1$$

عنصر وسطی ترادف حسابی

هرگاه سه عنصر مسلسل a_{n-1} ، a_n و a_{n+1} در حالیکه $(n = 2,3,4,...)$ است از ترادف حسابی انتخاب گردد، داریم که:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

مثال اول : وسط حسابی اعداد 4 و 18 را بیابید.

➢ **حـل :**

$$b = \frac{4+18}{2} \Rightarrow \frac{22}{2} \Rightarrow b = 11$$

مثال دوم : وسط حسابی $2x-5$ ، $4x+17$ را بیابید.

➢ **حـل :**

$$b = \frac{2x-5+4x+17}{2} \Rightarrow \frac{6x+12}{2} \Rightarrow \frac{2(3x+6)}{2} \Rightarrow b = 3x+6$$

مثال سوم : به کدام قیمت x سه حد $2x+6$ ، $3x+1$ و $x-2$ یک تصاعد حسابی را تشکیل می دهند؟

➢ **حـل :**

$$3x+1=\frac{x-2+2x+6}{2}\Rightarrow\frac{3x+1}{1}=\frac{3x+4}{2}\Rightarrow 6x+2=3x+4\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

مثال چهارم : اوسط حسابی بین اعداد 7 و 23 عبارت است از:

➢ **حــل:**

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

مثال پنجم : عددی x را طوری تعیین کنید که سه حد ترادف حسابی را تشکیل دهد.

$$\underset{a_{n+1}}{2x+1}\ ,\ \underset{a_n}{2x-4}\ ,\ \underset{a_{n-1}}{3x+3}$$

➢ **حــل**: قیمت ها را در فورمول وسط حسابی قرار می‌دهیم.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow 2x-4=\frac{2x+1+3x+3}{2}=\frac{5x+4}{2}$$

$$2x-4=\frac{5x+4}{2}\Rightarrow 4x-8=5x+4\Rightarrow 4x-5x=4+8$$

$$\Rightarrow -x=12,\ x=-12$$

$$2(-12)+1,\ 2(-12)-4\ ,\ 3(-12)+3$$

$$-24+1,\ -24-4\ ,\ -36+3$$

$$-23\ ,\ -28\ ,\ -33\ ,\ldots$$

مثال کانکور خارج از کشور :

کوچکترین کران بالای ترادف $a_n=\dfrac{3n^2+1}{2n^2+n}$ را محاسبه کنید ؟

➢ **حـــل :** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n^2+n}\right)=\dfrac{3}{2}$

درج جملات در ترادف حسابی

هرگاه حد اول یک تصاعد حسابی a_1 و حد اخیر آن a_n باشد و بخواهیم بین حد اول و آخر k جمله درج نمائیم از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$a_1 \ , \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{k \text{ جمله}} , \ a_n$$

از ترادف فوق نتیجه می‌گیریم که تعداد جملات آن برابر است با k جمله به اضافه جمله اول و آخر یعنی

$$n = k + 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_n - a_1}{k+2-1} = \frac{a_n - a_1}{k+1}$$

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{k+1}}$$

مثال اول: جمله اول یک تصاعد 8 و جمله آخر آن 32 است سه جمله بین آنها درج نمائید.

➢ **حـل:**

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = 32 \\ k = 3 \end{cases} \qquad d = \frac{a_n - a_1}{k+1} = \frac{32-8}{3+1} = 6$$

بناً جملات تصاعد فوق عبارت از $(8 , 14 , 20 , 26 , 32)$ است.

مثال دوم : بین دو عدد 3 و 21 پنج جمله درج نمائید.

➢ **حــل :**

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 21 \\ k = 5 \end{cases} \qquad d = \frac{a_n - a_1}{k+1} = \frac{21-3}{5+1} = 3$$

بناً جملات تصاعد فوق عبارت از $(3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12\ ,\ 15\ ,\ 18\ ,\ 21)$ است.

مثال سوم : بین 4 و 29 چهار واسطه حسابی جای دهید.

➢ **حــل :**

$$4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots29$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{k+1} \Rightarrow \frac{29-4}{4+1} \Rightarrow \frac{25}{5}$$

$$\Rightarrow d = 5$$

$$4\ ,\ 9\ ,14\ ,\ 19\ ,\ 24\ ,\ 29\ldots\ldots\ldots$$

مثال چهارم: بین دو عدد که تفاضل آن ها 720است ، پنج واسطه ی حسابی درج شده است . فرق مشترک ترادف چه قدر است ؟

1) 180 2) 160 3) 140 4) 120

➢ **حــل :** دو عدد را a و b در نظر می گیریم . اگر a جمله ی اول ترادف حسابی باشد و بخواهیم بین a و b پنج واسطه ی حسابی درج کنیم ، در این صورت b جمله هفتم این ترادف خواهد بود . پس $a_1 = a$ و $a_7 = b$ است . بر اساس نتیجه گیری بالا فرق مشترک ترادف حسابی با توجه به فرض انجام شده در صورت تست به راحتی تعین می شود . ببینید : $b - a = 720 \Rightarrow a_7 - a_1 = 720 \Rightarrow 6d = 720 \Rightarrow d = 120$

مثال پنجم : بین دو عدد 19 و 39 ، چهار واسطه حسابی درج کرده ایم تا یک ترادف حسابی نزولی ایجاد شود . مجموع این چهار واسطه چه قدر است ؟

1) 109 2) 114 3) 121 4) 116

- **حــل :** چون ترادف حسابی نزولی است و می خواهیم چهار واسطه ی حسابی بین 19 و 39 داشته باشیم ، جمله ی اول ترادف را عدد بزرگ تر یا همان 39 و جمله ی ششم ترادف را (جمله ی اول 39 و 4 جمله هم واسطه های حسابی هستند . در مجموع 5 جمله قبل از 19 داریم) عدد کوچک تر یا همان 19 در نظر می گیریم .
- فرق مشترک ترادف حسابی نزولی برابر است با : $5d = a_6 - a_1 = 19 - 39 = -20 \Rightarrow d = -4$
- با تعین 4 واسطه ی حسابی بین 19 و 39 مجموع آن ها را تعین می کنیم . داریم :

$$a_2 = a_1 + d = 39 - 4 = 35$$
$$a_3 = a_2 + d = 35 - 4 = 31$$
$$a_4 = a_3 + d = 31 - 4 = 27$$
$$a_5 = a_4 + d = 27 - 4 = 23$$
$$\Rightarrow 35 + 31 + 27 + 23 = 116$$

نکته اول : شرط آنکه سه جمله تشکیل یک تصاعد حسابی را بدهند این است که باید دو برابر جمله وسط مساوی با مجموع دو جمله طرفین باشد یعنی $\boxed{2a_{k+1} = a_k + a_{k+2}}$

مثال A: عدد x را چنان تعیین کنید که سه عدد زیر جملات یک تصاعد حسابی باشد.

$$(x+1)\ ,\ (3x-2)\ ,\ (2x+7)$$
$$2(3x-2) = (x+1) + (2x+7) \Rightarrow 6x - 4 = 3x + 8 \Rightarrow x = 4$$

لذا اعداد $(5\ ,\ 10\ ,\ 15)$ بوده که فرق مشترک شان عبارت از 5 است.

نکته دوم : اگر $a_1\ ,\ a_k$ و a_m جملات تصاعد حسابی بوده طوریکه $k \rangle l$ و $m \rangle l$ رابطه ذیل بین این جملات برقرار است. $\boxed{\dfrac{a_k - a_1}{k - l} = \dfrac{a_m - a_1}{m - l}}$

مثال B: جمله سوم یک تصاعد حسابی برابر $5/3$ و جمله هفتم برابر 3 است ، مطلوب است جمله دهم تصاعد.

$$\frac{a_{10}-a_3}{10-3}=\frac{a_7-a_3}{7-3}$$

$$\frac{a_{10}-\frac{5}{3}}{10-3}=\frac{3-\frac{5}{3}}{7-3}\Rightarrow\frac{\frac{3a_{10}-5}{3}}{7}=\frac{\frac{4}{3}}{4}\Rightarrow\frac{3a_{10}-5}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3a_{10}-5}{21}=\frac{1}{3}$$

$$9a_{10}-15=21\Rightarrow 9a_{10}=21+15\Rightarrow 9a_{10}=36\Rightarrow a_{10}=4$$

نکته سوم : اگر $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4$ چهار جمله متوالی تصاعد حسابی باشد رابطهٔ ذیل نیز بین آنها برقرار است. $\boxed{a_1+a_4=a_2+a_3}$

مثال C: در صورتیکه حاصل جمع جملهٔ پنجم و هشتم یک تصاعد برابر با 24 و جمله هفتم آن 13 باشد جملات این تصاعد را دریافت نمائید.

$$\begin{cases}a_5+a_8=a_6+a_7\\24=a_6+13\\a_6=24-13\\a_6=11\end{cases}$$

$$d=a_7-a_6=13-11=2$$

$$\begin{cases}a_5=a_6-d=13-11=2\\a_4=a_5-d=9-2=7\\a_3=a_4-d=7-2=5\\a_2=a_3-d=5-2=3\\a_1=a_2-d=3-2=1\end{cases}$$

جملات تصاعد مورد نظر عبارت از $(1\ ,3\ ,5,\ 7\ ,9\ ,11\ ,13,......)$ بوده و فرق مشترک شان 2 می‌باشد.

نکته چهارم : در یک تصاعد حسابی هرگاه مجموعهٔ دو شماره جمله آن مساوی به مجموعه دو شماره جمله دیگر شود یعنی جملات شماره $n\,,\,m\,,\,p\,,\,q$ را باهم جمع نمائیم طوریکه $n+m=p+q$ باشد در اینصورت مجموعه آن دو جمله اول مساوی به مجموعه دیگر آن میباشد یعنی $\boxed{a_n+a_m=a_p+a_q}$

مثال D: در یک تصاعد حسابی مجموعه جملات پنجم و یازدهم برابر با 45 می‌باشد اگر جمله هشتم این تصاعد برابر 14 باشد جمله دوازدهم را بدست آورید.

➢ **حــل**:

$$a_5+a_{15}=45 \quad , \quad a_8=14 \quad , \quad a_{12}=?$$
$$n+m=p+q$$
$$5+15=8+12$$
$$a_n+a_m=a_p+a_p$$
$$a_5+a_{15}=a_8+a_{12}$$
$$45=14+a_{12}$$
$$a_{12}=31$$

نکته پنجم : اگر مجموعه دو شمارهٔ از جملات یک تصاعد حسابی برابر با دو چند کدام شمارهٔ دیگری باشد یعنی $n+m=2k$ یا به عبارت دیگر اگر جملات متساوی الفاصله باشند مربع جمله وسط برابر است با مجموعه دو جمله طرفین آن یعنی $\boxed{n+m=2k \;\Rightarrow\; a_n+a_m=2a_k}$

مثالE: در یک تصاعد حسابی جمله سوم 8 و جمله نهم 18 می‌باشد جمله پانزدهم این تصاعد را حساب نمائید.

$a_3=8 \quad , \quad a_{19}=18 \quad , \quad a_{15}=?$

$m+n=2k$

$3+15=2(9)$

$a_n+a_m=2a_k$

$a_3+a_{15}=2a_9$

$8+a_{15}=2(18)$

$a_{15}=28$

نکته ششم: در یک تصاعد حسابی جمله kام (a_k) از یک تصاعد حسابی معلوم و جمله nام (a_n) مجهول باشد در صورتیکه فرق مشترک تصاعد معلوم باشد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{a_n=a_k+(n-k)d}$$

مثال F: در یک تصاعد حسابی جمله هفتم 24 و فرق مشترک آن 5 می‌باشد جمله نوزدهم را حساب کنید.

حـــل:

$a_k=a_7=24 \quad , \quad d=5 \quad , \quad a_n=a_{19}=?$

$a_n=a_k+(n-k)d$

$a_{19}=24+(19-7)5$

$a_{19}=84$

سلسله ها

مجموعه قسمی ترادف حسابی

مجموع عناصر تـــرادف حســـابی

هرگاه در بین حدود ترادف حسابی علامت جمع موجود باشد آن را سلسله حسابی گویند و یا به عبارت دیگر حاصل جمع یک ترادف حسابی را سلسله گویند.

هرگاه a_1 حد اول an حد nام n تعداد حدود d فرق مشترک و sn مجموعه n حد تصاعد حسابی را نشان دهد درینصورت داریم که در ترادف حسابی مجموع n عنصر اول آن عبارت ست از

$$\boxed{a_1+a_2+a_3+......+a_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]}$$

ثبوت: اگر مجموع n عنصر اول آن S_n فرض شود یعنی $S_n=a_1+a_2+a_3+........+a_n$

ثبوت فورمول $Sn=\frac{n}{2}(a_1+an)$

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+...+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n........I$$
$$S=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+...+(a-2d)+(a+d)+a........II$$

رابطه 1 و 2 را طرف به طرف جمع می نمائیم.

$$2S=\underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+...+(a+a_n)+(a+a_n)+a+a_n}_{n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n)\Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)............I$$

فورمول فوق حاصل جمع سلسله حسابی را نشان می دهد که حد اول، حد اخیر و تعداد حدود آن معلوم باشد.

نتیجه: هرگاه a_1 عنصر اول و a_n عنصر nام ترادف حسابی باشد پس $a_1+a_2+a_3+....+a_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$

ثبوت میدانیم کـه

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$S_n=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]$$

چون $a_n = a_1 + (n-1)d]$ لهذا

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]}$$

مثال اول : مجموع اعداد مسلسل طبیعی از 1 تا 100 را محاسبه کنید.

حل: اعداد طبیعی ترادف حسابی را تشکیل می‌دهند طوریکه در آن $a_1 = 1 = d$ و می‌باشد. لذا در رابطه

$$a_a + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

می‌توان $n = 100$ و $a_n = 100$ وضع نمود لهذا داریم که

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50.101 = 5050$$

مثال دوم : دریک تصاعد حسابی حد اول 12 فرق مشترک 10 است مجموعه 15 حد این تصاعد را بدست آورید.

$$Sn = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\{24(14)10\} \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \cdot (3360) \Rightarrow S_{15} = 2520$$

مثال سوم : حد اول یک تصاعد حسابی 20 و حد چهلم آن 250 است مجموعه 40 حد این تصاعد حسابی را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 20 \\ an = 250 \\ n = 40 \\ S40 = ? \end{array}\right\}$$

$$Sn = \frac{n}{2}(a_1 + an) \Rightarrow$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}(20 + 250) \Rightarrow$$

$$S_{40} = 20 \cdot 270 \Rightarrow S_{40} = 5400$$

مثال چهارم : در تصاعد حسابی ذیل مجموعه حدود آن را بیابید.

$5+9.................+281$

$an=a_1+(n-1)d \qquad Sn=\frac{n}{2}(a_1+an)$

$281=5+(n-1)4 \qquad S_{70}=\frac{70}{2}(5+281)$

$281=1+4n \qquad S_{70}=35\cdot 286$

$280=4n \qquad S_{70}=10010$

$n=70$

مثال پنجم : مجموعه 20 حد یک تصاعد حسابی 1400 است هرگاه حد اول این تصاعد 10 باشد فرق مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} S_{20}=1400 \\ d=? \\ a_1=10 \end{array}\right\}$$

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\}$$

$$1400=\frac{20}{2}(20+19d)$$

$$1400=10(20+19d)$$

$$140=20+19d$$

$$120=19d \Rightarrow d=\frac{120}{19} \Rightarrow d=\frac{6}{3}$$

مثال ششم : شخصی روز اول 500m فاصله روز دوم 550m روز سوم 600m و به همین ترتیب به حرکت خود ادامه می دهد فاصله را که شخص در مدت 20 روز طی می نماید محاسبه نمائید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=500m \\ d=50 \\ S_{20}=? \\ n=20 \end{array}\right\}$$

$$Sn=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\} \Rightarrow$$

$$S_{20}=10\{1000+19\cdot 50\} \Rightarrow$$

$$S_{20}=10\{1000+950\} \Rightarrow$$

$$S_{20}=10\cdot 1950 \Rightarrow S_{20}=19500cm$$

مثال هفتم : حاصل جمع سلسلهٔ حسابی را معلوم نمایید در صورتی که $a=4$ ، $a_n=25$ و تعداد حدود آن 8 باشند.

➢ **حــل**: با استفاده از فورمول:

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ a_n=25 \\ n=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=\dfrac{n}{2}(a+a_n) \\ S=\dfrac{8}{4}(4+25) \Rightarrow S=4(29)=116 \end{array}$$

مثال هشتم : حاصل جمع 201 حد سلسله زیر را به دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} a=7 \\ d=4 \\ n=201 \\ S_{n=?} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7+11+15+.... \\ S=\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d] \end{array}$$

$$S=\frac{201}{2}[2\cdot 7+(201-1)4]$$

$$S=\frac{201}{2}(14+200\cdot 4) \Rightarrow S=\frac{201}{2}(14+800)=\frac{201}{2}\cdot 814=201\cdot 407=81807$$

$$S=81807$$

مثال نهم : سلسله اعداد جفت $2+4+6+8+.......$ را در نظر گرفته مجموع n حد آن را به دست آورید.

➢ **حــل**:

$$2+4+6+8+.......$$

$$s_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \Rightarrow s_n=\frac{n}{2}[4+2n-2] \Rightarrow s_n=n(n+1)$$

مثال دهم : حاصل جمع 200 حد اعداد جفت سلسله $2+4+...+$ را دریابید.

➢ **حـــل**:

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right| \begin{array}{l} S=200(200+1) \\ S_{200}=200(200+1) \\ S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

مثال یازدهم: در ترادف حسابی که جمله ی nام آن $a_n=2n+1$ است ، مجموع هفت جمله ی اول چه قدر است ؟

1) 42   2) 49   3) 56   4) 63

➢ **حـــل**: مقدار a_7(جمله ی هفتم) و a_1(جمله اول) ترادف حسابی را مشخص می کنیم .

$$a_n=2n+1 \Rightarrow a_7=(2\times 7)+1=14+1=15$$
$$a_n=2n+1 \Rightarrow a_1=(2\times 1)+1=2+1=3$$

➢ با استفاده از رابطه ی $s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ مجموع هفت جمله ی اول ترادف حسابی را بدست می آوریم : $s_7=\frac{7}{2}(a_1+a_7)=\frac{7}{2}(3+15)=\frac{7\times 18}{2}=63$

مثال دوازدهم : در یک ترادف حسابی جمله ی پنجم برابر 3 و هر جمله از جمله ی ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کم تر است . مجموع 10 جمله ی اول آن کدام است ؟

1) 22/5   2) 25   3) 30   4) 27/5

➢ **حــل:** معنی عبارت (هر جمله از جمله ی ما قبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کم تر است به این معنی که فرق مشترک $d=-\frac{1}{2}$ است .

➢ با توجه به این که $a_5=3$ است، مقدار a_1 را تعین می کنیم . $a_5=a_1+4d \Rightarrow \underline{a_5=3\ ,\ d=-\frac{1}{2}} \Rightarrow 3=a_1-2 \Rightarrow a_1=5$

➢ مجموع 10 جمله ی اول برابر است با : $s_{10}=\frac{10}{2}[2a_1+9d]=5\left(10-\frac{9}{2}\right)=5\times\frac{11}{2}=\frac{55}{2}=27/5$

مثال سیزدهم : در یک ترادف حسابی $a_6+a_{19}=25$ است . مجموع بیست و چهار جمله ی اول این ترادف برابر است با :

1) 200　　2) 250　　3) 300　　4) 350

➢ **حــل:** رابطه ی $a_6+a_{19}=25$ را باز می کنیم تا به نتایج مورد نظر مان دست پیدا کنیم . $(a_1+5d)+(a_1+18d)=25 \Rightarrow 2a_1+23d=25$

➢ با توجه به رابطه $s_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ در مورد مجموع جمله های ترادف حسابی ، مجموع بیست و چهار جمله ی اول این ترادف برابر است با :

$$s_{24}=\frac{24}{2}(2a_1+23d) \Rightarrow s_{24}=12\times 25=300$$

مثال چهاردهم : در یک ترادف حسابی جملات دوم و هشتم قرینه اند $(a_2+a_8=0)$ و جمله ی هفتم برابر چهار است $(a_7=4)$، مجموع هشت جمله ی اول چند میشود ؟

1) 18　　2) 0　　3) -8　　4) 4

➢ **حــل:** با توجه به دو رابطه ی $a_2+a_8=0$ و $(a_7=4)$، مقدار a_1 و d را محاسبه می کنیم . داریم :

$$a_2+a_8=(a_1+d)+(a_1+7d)=2a_1+8d=2(a_1+4d)=0 \Rightarrow a_1+4d=0 \Rightarrow a_1=-4d$$
$$a_7=a_1+4d=4 \Rightarrow -4d+6d=4 \Rightarrow 2d=4 \Rightarrow d=2 \quad , \quad \Rightarrow a_1=-4(2)=-8$$

مثال پانزدهم : اعداد $1,x,y,\frac{5}{2},...$ چهار جمله ی اول از یک ترادف حسابی اند . مجموع پانزده جمله ی اول این ترادف کدام است ؟

1) 57 2) $62/5$ 3) $67/5$ 4) 68

➢ **حــل:** x,y به شما داده شده تا سر گرم شوید ، خودتان را معطل این دو مجهول نکنید . جمله ی اول این ترادف حسابی برابر 1 و جمله ی چهارم آن برابر $\frac{5}{2}$ است ، بنابر این فرق مشترک برابر است با : $a_4-a_1=3d \Rightarrow \frac{5}{2}-1=3d \Rightarrow d=\frac{1}{2}$

➢ با دانستن این که $a_1=1$ و $d=\frac{1}{2}$ است ، مجموع پانزده جمله ی اول ترادف را حساب می کنیم . $s_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=\frac{15}{2}(2+7)=\frac{15\times 9}{2}=67/5$

مثال شانزدهم : در ترادف حسابی با جمله ی عمومی $a_n=\frac{1}{2}n+1$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله ی دهم و ختم جمله ی سی ام کدام است ؟

1) 168 2) 189 3) 231 4) 210

➢ **حــل:** مقدار جمله ی دهم و سی ام را حساب می کنیم . داریم که :

$$a_n=\frac{1}{2}n+1 \Rightarrow \begin{cases} a_{10}=\frac{10}{2}+1=5+1=6 \\ a_{30}=\frac{30}{2}+1=15+1=16 \end{cases}$$

➢ تعداد جملات ترادف حسابی با شروع از جمله ی دهم و ختم به جمله ی سی ام برابر 21 است . بنابر این مجموع این جملات برابر است با :

$$s=\frac{21}{2}(a_{10}+a_{30})=\frac{21}{2}(6+16)=21\times 11=231$$

مثال هفدهم : مجموع چند جمله از ترادف حسابی ... , 10 , 6 , 2 برابر جمله ی سیزدهم است ؟

1) 10 جمله 2) 6 جمله 3) 5 جمله 4) 8 جمله

➢ **حـل**: مقدار جمله ی سیزدهم را حساب می کنیم : $a_{13}=a_1+12d=2+(12\times 4)=2+48=50 \quad , \quad d=a_2-a_1=6-2=4$

➢ می خواهیم ببینیم مجموع چند جمله از این ترادف حسابی برابر 50 می شود . داریم :

$$s_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}\left[4+4(n-1)\right]=\frac{n}{2}(4n)=2n^2=50\Rightarrow n^2=25\Rightarrow n=5$$

مثال هژدهم : مجموع چند جمله از ترادف حسابی ... , 12 , 15 , 18 برابر صفر می شود ؟

1) 11 جمله 2) 10 جمله 3) 13 جمله 4) 14 جمله

➢ **حـل**: فرق مشترک ترادف حسابی داده شده برابر است با : $d=a_2-a_1=15-18=-3$

$$s_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}\left[36-3(n-1)\right]=\frac{n}{2}(39-3n)=0$$

➢ می خواهیم تعین کنیم مجموع چند جمله از این ترادف حسابی برابر صفر می شود . داریم :

$$n\neq 0$$
$$39-3n=0\Rightarrow 3n=39\Rightarrow n=13$$

مثال نوزدهم : در یک ترادف حسابی $s_5=a_1+a_2+\ldots+a_5=100$ و $s_4=a_1+\ldots+a_4=44$ فرق مشترک این ترادف را بیابید ؟

1) -9 2) -18 3) 18 4) 9

➢ **حـل**: یک رابطه ی دو معادله و دو مجهول بر اساس مجموع جملات داده شده تشکیل می دهیم . داریم :

$$s_5=100\Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1+4d)=100\Rightarrow 5a_1+10d=100\Rightarrow 5(a_1+2d)=100\Rightarrow a_1+2d=20$$

$$s_4=44=\frac{4}{2}(2a_1+3d)=44\Rightarrow 2a_1+3d=22$$

با حل این دو معادله و دو مجهول مقدار d یا همان فرق مشترک به دست می آید . $\begin{cases} a_1+2d=20 \\ 2a_1+3d=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1-4d=-40 \\ 2a_1+3d=22 \end{cases} \Rightarrow -d=-18 \Rightarrow d=18$

مثال بیستم : اگر مجموع هشت جمله ی اول از ترادف حسابی $a_1=1+2p$ و $a_2=p-1$ برابر 60 باشد $(s_8=60)$، فرق مشترک ترادف را بیابید ؟

1) 9 2) 7 3) -9 4) -7

- **حـــل:** فرق مشترک ترادف را به صورت پارامتری حساب می کنیم . (یعنی بر حسب p) داریم : $d=a_2-a_1=p-1-(1+2p)=-p-2$
- مجموع هشت جمله ی اول ترادف حسابی با جمله ی اول $a_1=1+2p$ و فرق مشترک $d=-p-2$ برابر 60 است . p برابر است با :

$$s_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d)=4(2a_1+7d)=60 \Rightarrow 2a_1+7d=15$$
$$\Rightarrow 2(1+2p)+7(-p-2)=2+4p-7d-14=15$$
$$-3p=27 \Rightarrow p=-9$$

بنا بر این فرق مشترک برابر است با : $d=-p-2=-(-9)-2=9-2=7$

مثال بیست و یکم : اگر مجموع n جمله ی اول یک ترادف حسابی از رابطه $s_n=n(3n+4)$ به دست بیاید ، جمله ی هفتم ترادف حسابی چه مقداری خواهد داشت ؟

1) 39 2) 43 3) 41 4) 45

- **حـــل:** جمله ی هفتم ترادف حسابی برابر اختلاف مجموع جمله های اول تا هفتم و مجموع جمله های اول تا ششم است . $s_n=s_n-s_{n-1}$

$$s_7=7\left[(3\times 7)+4\right]=7(21+4)=7\times 25=175$$
- $$s_6=6[(3\times 6)+4]=6(18+4)=6\times 22=132 \Rightarrow a_7=s_7-s_6=175-132=43$$

مثال بیست و دوم : در یک ترادف حسابی یا عدد مجموع چهار جمله ی اول 15 و مجموع پنج جمله ی بعدی آن 30 می باشد .جمله ی یازدهم این ترادف کدام است ؟

1) $7/5$ 2) 8 3) $8/5$ 4) 9

حــل: وقتی مجموع چهار جمله ی اول 15 و مجموع پنج جمله ی بعدی آن 30 می باشد.پس مجموعه نه جمله ی اول این ترادف برابر 45 است . بنابر این داریم :

$$s_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \Rightarrow 4a_1 + 6d = 15$$

$$s_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \Rightarrow a_1 + 4d = 5$$

$$a_1 + 4d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 4d$$

$$4a_1 + 6d = 20 - 16d + 6d = 15 \Rightarrow 10d = 5 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + \frac{10}{2} = 3 + 5 = 8$$

مثال بیست و سوم : یک ترادف حسابی صعودی متناهی از سیزده جمله تشکیل شده است ، مجموع این جملات برابر 325 است . اگر اختلاف جمله ی اول و آخر برابر 48 باشد ، جمله سوم چه قدر است ؟

1) 3　　2) 9　　3) 6　　4) 15

حــل: فرض های موجود در تست را به طور دقیق مشخص می کنیم . اول از همه می دانیم $s_{13} = 325$ است. هم چنین $a_{13} - a_1 = 48$ است . بنابر این داریم :

$$a_{13} - a_1 = 48 \Rightarrow 12d = 48 \Rightarrow d = 4$$

$$s_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = 325 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1 + 48) = 325 \Rightarrow 2a_1 + 48 = 50 \Rightarrow 2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

پس با یک ترادف حسابی با جمله ی اول ۱ و فرق مشترک 4 روبرو هستیم . $a_3 = a_1 + 2d = 1 + (4\times 2) = 1 + 8 = 9$

مثال بیست و چهارم : در ترادف حسابی $-27, x, -21, \ldots$ مجموع جملات منفی کدام است ؟

1) -150　　2) -135　　3) -75　　4) -270

➢ **حــل**: فرق مشترک ترادف را بدست می آوریم : $a_3 - a_1 = -21-(-27) = -21+27 = 6 = 2d \Rightarrow d = 3$

➢ بنابر این یک ترادف صعودی بافرق مشترک ۳ داریم .

➢ آخرین جمله ی منفی ترادف حسابی برابر -3 است .که نهمین جمله ی ترادف محسوب میشود . $-27,-24,-21,-18,-15,-12,-9,-6,-3$

➢ مجموع جملات منفی را بدست می آوریم : $s_9 = \frac{9}{2}(-27-3) = \frac{9}{2}(-30) = 9(-15) = -135$

مثال بیست و پنجم : اگر سه زاویه A ، B و C از مثلث ABC تشکیل تصاعد حسابی بدهند، اندازه زاویه B را بیابید.

➢ **حــل**:

$$\hat{B} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{180-\hat{B}}{2} \Rightarrow 2\hat{B} = 180-\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 60$$

مثال بیست و ششم : اگر $\log a$, $\log b$ جملات متوالی یک تصاعد حسابی باشند، نشان دهید معادله $ax^2+2bx+c=0$ دارای ریشه مضاعف است.

➢ **حــل**:

$$2\ \log b = \log a + \log c \Rightarrow \log b^2 = \log (ac) \Rightarrow b^2 = ac$$

بنابر این، مبین معادله درجه دوم داده شده برابر است با: $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4(b^2-ac) = 0$ و لذا معادله مزبور دارای ریشه مضاعف است

مثال بیست و هفتم: در یک تصاعد حسابی که 10 جمله دارد، مجموع سه جمله اول آن 35 و مجموع سه جمله آخر آن 175 است. مجموع جملات این تصاعد را بیابید.

➢ **حــل**:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 35 \\ a_8+a_9+a_{10} = 175 \end{cases}$$

بنابر این با جمع طرفین و روابط فوق داریم: $(a_1+a_{10})+(a_2+a_9)+(a_3+a_8) = 210$

از طرفی $a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8$ و لذا با استفاده از تساوی فوق واضح است که:

$$a_1+a_{10}=\frac{210}{3}=70$$

در نتیجه مجموع جملات تصاعد حسابی مورد نظر برابر است با:

$$S_{21}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times 70}{2}=350$$

مثال بیست هشتم : حاصل عبارت $S=10^2-9^2+8^2-7^2+\ldots+2^2-1^2$ را بیابید.

حـل:

$$S=(10-9)(10+9)+(8-7)(8+7)+\ldots+(2-1)(2+1)$$

بنابر این داریم: $S=19+15+\ldots+3=55$

سوالات تمرینی چهار جوابه | **مطابق به کانکور افغانستان و خارج از کشور**

1. اگر در یک ردیف حسابی حد پنجم 20 و حد پانزدهم 80 باشد، پس حد اول آن ؟
   1) $a_1=-4$ 2) $a_1=5$ 3) $a_1=3$ 4) $a_1=4$
2. اگر در یک ردیف حسابی حد $20-$ام 600 و فرق مشترک آن 40 باشد، پس حد اول آن مساوی است به:
   1) $a_1=-190$ 2) $a_1=-160$ 3) $a_1=-180$ 4) $a_1=-150$
3. حاصل جمع 51 حد ترادف $\ldots\ 15\ ,\ 11\ ,\ 7$ مساوی است به:
   1) 3767 2) 5457 3) 3144 4) 6617
4. در ردیف $\ldots,\ 9\ ,\ 6\ ,\ 3$ مجموعه چند حد مساوی به 165 می‌شود:
   1) $n=20$ 2) $n=40$ 3) $n=25$ 4) $n=10$
5. یک ردیف حسابی حد اول 2 و فرق مشترک آن 7 است، پس مجموعه ده حد اول آن مساوی است به:
   1) $S_{10}=357$ 2) $S_{10}=335$ 3) $S_{10}=338$ 4) $S_{10}=337$

6. اگر در یک تصاعد حسابی مجموع n جمله‌ی اول آن $S_n = n(3n+2)$ باشد ، جمله‌ی nام این تصاعد برابر است با:

1) $6n+1$ 2) $6n-1$ 3) $12n+2$ 4) $12n-2$

7. مجموع $2n+1$ جمله‌ی یک تصاعد حسابی 178 و جمله‌ی وسط 17 است. n کـدام است؟

1) 5 2) 7 3) 10 4) 12

8. مجموع چند جمله از تصاعد عددی ....، 5 ، 3 ، 1 برابر 64 است؟

1) 7 جمله 2) 9 جمله 3) 8 جمله 4) 6 جمله

9. در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a اگـر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع 20 جمله‌ی اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟

1) 160 2) 170 3) 180 4) 190

10. مجموع شش عدد متوالی در یک تصاعد عددی صعودی برابر 69 است. اگر بدانیم حاصل ضرب بزرگترین و کوچک ترین این عدد ها برابر 78 است. جمله‌ی سوم چه‌قدر خواهد بود؟

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

11. اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),...$ مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

1) 1691 2) 1710 3) 1729 4) 1748

12. چند جمله از تصاعد حسابی ...، 15 ، 9 ، 3 را باید جمع کنیم تا عدد 675 به دست بیابید؟

1) 13 2) 15 3) 17 4) 19

13. در یک تصاعد حسابی ، مجموع شش جمله‌ی اول برابر 102 و مجموع شش جمله‌ی بعدی برابر 318 است. مجموع جمله های ششم و پانزدهم چه‌قدر است؟

1) 115 2) 118 3) 119 4) 125

14. بین 1 و 81 چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله های تصاعد حسابی حاصل ، برابر 246 گردد؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

15. هرگاه داشته باشیم $S = 12^2 - 11^2 + 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + ... + 2^2 - 1^2$، مقدار S چه‌قدر است؟

1) 36 2) 55 3) 78 4) 105

16. اگر $3+7+11+...+(4n+3)=351$ باشد، n کدام است؟

1) 12 2) 13 3) 14 4) 15

17. در بیست جمله ی اول از تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد 135 و مجموع جملات ردیف زوج 150 می‌باشد جمله ی اول کدام است؟

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

مجموع اعداد مسلسل طبیعی

اعداد طبیعی ترادف حسابی است که در آن $a_1 = 1$ و $d = 1$ می‌باشد. لـذا مجموع n عدد مسلسل اول اعداد طبیعی عبارت ست از:

$$1+2+3+.....+n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] = \frac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)\cdot 1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

لهذا مجموع n عدد مسلسل طبیعی که از 1 شروع میشوند عبارت است از:

$$\boxed{1+2+3+^{\circ\circ\circ}+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال اول : مجموعه اعداد طبیعی از 1 الی 200 را بیابید.

حـــل :

$$1+2+3+4+5+6..........+200$$

$$S_n \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{200(200+1)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{200\cdot 201}{2} \Rightarrow S_n = 100\cdot 201 \Rightarrow 20100$$

مثال دوم مجموعه اعداد طبیعی از 20 الی 100 را بدست آورید.

حـــل :

$$20+21+22+...............+100$$

$$S_n \frac{100(101)}{2} = 5050$$

$$S_n = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$$

$$5050-190 \Rightarrow S_{20...200} = 4860$$

مجموع اعداد مسلسل طبیعی جفت

اعداد جفت یک ترادف یا ردیف حسابی است که فرق مشترک آن $(a_1 = 2 = d)$ می باشد هرگاه خواسته باشیم مجموعه n حد اول اعداد مسلسل جفت را بیابیم از رابط ذیل استفاده میکنیم .

$$2+4+6+...+2n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1).d] = \frac{n}{2}[2.2+(n-1).2] = n(n+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)}$$

مثال اول : مجموعه اعداد طبیعی زوج را از 1 الی 1000 بدست آورید.

➢ **حـــل:** چون اعداد زوج بین 1 و هزار 1000 تعداد 500 عدد می باشد لذا داریم

$$S_n = n(n+1) = 500(500+1) = 250500$$

مثال دوم : مجموعه 20 عدد جفت اول را بیابید.

➢ **حـــل :**

$$S_n = n(n+1) \Rightarrow S_{20} = 20(21) \Rightarrow S_{20} = 420$$

مثال سوم: مجموعه اعداد حفت از (1) تا 80 را بیابید.

حـــل:

$$\begin{cases} n = \dfrac{80}{2} \\ n = 40 \end{cases} \Rightarrow \{S_{40} = 40(40+1) \Rightarrow S_{40} = 1640$$

نوت : برای دریافت تعداد عدد های جفت آخرین عدد جفت را تقسیم 2 می کنیم.

مجموع اعداد مسلسل طبیعی طاق

اعداد طاق یک تصاعد حسابی با فرق مشترک 2 می باشند بناً مجموعه n حد اول آنها را طول ذیل بدست می آوریم (n تعداد اعداد طاق

میدانیم که در ترادف اعداد طاق $a_1 = 1$ و $d = 2$ مـی‌باشد.

لهذا

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)]=n^2$$

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

مثال اول : مجموعه 20 عدد طاق اول را بیابید.

$n=20 \quad , \quad S_n=n^2 \Rightarrow S_n=20^2 \Rightarrow S_{20}=400$

مثال دوم : مجموعه اعداد طاق از یک (1) الی 99 را بیابید.

$$n=\frac{99+1}{2}=50 \quad , \quad S_n=n^2 \Rightarrow 50^2 \Rightarrow S_n=2500$$

مثال سوم : مجموعه اعداد طاق از یک 1الی 1000 را بیابید.

$$n=\frac{1000}{2}=500 \quad , \quad S_n=n^2 \Rightarrow (500)^2 \Rightarrow S_{500}=250000$$

مجموع مربعات اعداد طبیعی

برای بدست آوردن مجموعه مربعات اعداد طبیعی از رابطهٔ ذیل استفاده می کنیم. $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (در استقرا ریاضی ثبوت میشود)

مثال اول : مجموعه مربعات اعداد طبیعی از 1 الی 20 را بدست آورید.

$$S_n \frac{20(20+1)[2(20)+1]}{6}=\frac{20(21)(40+1)}{6}=\frac{20(21)(41)}{6}=2870$$

مجموع مکعبات اعداد طبیعی

برای بدست آوردن مجموعه مکعبات اعداد طبیعی از رابطهٔ ذیل استفاده می کنیم.

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

مثال اول : مجموعه مکعبات اعداد طبیعی از 1 الی 10 را بدست آورید.

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{10(11)}{2}\right)^2 = \left(\frac{110}{2}\right)^2 = (55)^2 = 3025$$

نکته 1

اگر مجموعه m جمله اول و مجموعه m جمله آخر یک سلسله حسابی معلوم باشد، برای بدست آوردن مجموع جملهٔ اول و آخر تصاعد حسابی از رابطهٔ ذیل استفاده می کنیم.

$$a_1 + a_n = \frac{\text{مجموع } m \text{ جملهٔ آخر} + \text{مجموعه } m \text{ جملهٔ اول}}{m}$$

مثال: دریک تصاعد عددی 13 جمله ای مجموع سه جملهٔ اول برابر به 15 و مجموعه سه جملهٔ آخر برابر با 105 می باشد مجموعه تمام جملات این تصاعد را حساب نمایید.

$$a_1 + a_n = \frac{15+105}{3} = 40$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(40) = 260$$

نکته 2

اگر جمله وسط در یک تصاعد حسابی معلوم باشد، برای بدست آوردن مجموع جملات اول و آخر این تصاعد از رابطهٔ ذیل استفاده می کنیم.

$2 = a_1 + a_2$ برابر جمله وسط

مثال : در یک تصاعد حسابی که 21 جمله دارد جمله وسط 43 است مجموعه جملات این تصاعد را دریافت نمایید

$$a_1, \ldots, 43, \ldots, a_n$$
$$a_1 + a_2 = 2(43) = 86$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{21} = \frac{21}{2}(86) = 903$$

نکته 3

اگر از مجموع n جمله اول هر تصاعدی (خواه حسابی، خواه هندسی) مجموعه $n-1$ جمله اول را کم کنیم جمله n ام بدست می آید در نتیجه داریم:
$$Sn - S_{n-1} = a_n$$

مثال: مجموعه جملات تصاعد حسابی از رابطه $S_n = 4n^2 - 2n$ بدست می آید جملهٔ چهارم این تصاعد را بدست آورید

حل: اگر در رابطهٔ فوق $n = 4$ انتخاب شود داریم

$$a_4 = S_4 - S_3$$
$$\left.\begin{array}{l} n=4 \Rightarrow S_4 = 4(4)^2 - 2(4) = 64 - 8 = 56 \\ n=3 \Rightarrow S_4 = 4(3)^2 - 2(3) = 36 - 6 = 30 \end{array}\right. \Rightarrow a_4 = 56 - 30 = 26$$

نکته 4

اگر از مجموعهٔ n جملهٔ اول هر تصاعد (هندسی یا حسابی) مجموعهٔ $n-1$ جملهٔ اول را کم کنیم جملهٔ n ام بدست می آید. $S_n - S_{n-1} = a_n$

مثال: مجموعه n جملهٔ اول تصاعد هندسی $S_n = 3(2^n - 1)$ می باشد جملهٔ چهارم آنرا بدست آورید.

$$a_4 = S_4 - S_3 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \Rightarrow S_n = 3(2^4 - 1) = 45 \\ n=3 \Rightarrow S_n = 3(2^3 - 1) = 21 \end{cases} \Rightarrow a_4 = 45 - 21 = 24$$

ترادف هارمونیکی

یک ترادف a_n را زمانی هارمونیک می گویم که معکوس آن یعنی $b_n=\frac{1}{a_n}$ ترادف حسابی باشد . مانند $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{11}\ldots$

مثال ۱: ترادف $2,4,6,8,10$ یک ترادف حسابی گفته میشود . زیرا $d=2$ است ، معکوس حدود این ترادف یعنی $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\ldots$ را یک ترادف هارمونیک گویند .

مثال ۲: معکوس اعداد طبیعی یک ترادف هارمونیک است . حد $n-$ام آنرا بنویسید .

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n}\quad\Rightarrow\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

مثال ۳: هرگاه در یک ترادف هارمونیکی $a_1=\frac{1}{4}$ و $d=-3$ باشد ترادف هارمونیک آن را به دست آورید.

$$\frac{1}{4},(\frac{1}{4}-3),(\frac{1}{4},-3-3),(\frac{1}{4}-3-3-3),(\frac{1}{4}-3-3-3-3),\ldots$$
$$\frac{1}{4},\frac{-11}{4},\frac{-23}{4},\frac{-35}{4},\frac{-47}{4},\ldots$$

اوسط هارمونیکی

هرگاه حدود مسلسل a_{n-1} ، a_n ، a_{n+1} را در نظر بگیریم در حالیکه $n=2,3,4,\ldots$ باشد

با در نظر داشت اینکه $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n}$ و $\frac{1}{a_{n+1}}$ حدود یک ترادف هارمونیک است می‌توان نوشت که:

$$\frac{1}{a_n}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2}$$

رابطه اخیر را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

$$2(a_{n+1})(a_{n-1})=a_n(a_{n-1}+a_{n+1})\Rightarrow a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: اوسط هارمونیکی اعداد 2 و 8 را دریافت کنید.

➢ **حــل:** با استفاده از فورمول $a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ دریافت می کنیم:

$$a_n=\frac{2(2\cdot 8)}{2+8}=\frac{2\cdot 16}{10}=\frac{32}{10}=3.2$$

ترادف هندسی

Geometric Sequences

ترادفی که نسبت هر عنصر و عنصر ماقبل آن یکعدد ثابت q باشد بنام تـرادف هندسی گفته می‌شود ، یعنی

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n\quad q,(n=1,2,3,\dots)$$

در اینجا q نسبت مشترک و a_1 عنصر اول ترادف نامیده می‌شود. ترادف هندسی زمانی مشخص می‌گـردد که عنصر اول و نسبت مشترک آن معین باشد.

$3\ ,\ 6\ ,12\ ,24,\ ....\ q=2$

$16\ ,8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ....q=\frac{1}{2}$

$5\ ,15\ ,\ 45\ ,135\ ....q=3$

مثال اول : در یک ترادف هندسی $a_1=2$ و $q=3$ است عناصر a_2 , a_3 و a_4 آنـرا معین کنید.

حــل:

$$a_2=a_1\quad q=2.3=6$$
$$a_3=a_2\quad q=6.3=18$$
$$a_4=a_3\quad q=18.3=54$$

مقدار ثابتی که از حاصل تقسیم هر دو جمله متعاقب یک تصاعد هندسی بدست میآید بنام فرق مشترک آن تصاعد یاد می‌گردد و فرق مشترک را به r نمایش میدهند که برای بدست آوردن آن از رابطه ذیل استفاده می‌گردد. $\boxed{r=\frac{a_n}{a_{n-1}}}$

مثال دوم :ترادف هندسی $96,48,24,12,6$ را در نظر گرفته نسبت مشترک آن را دریافت کنید .

➢ **حــل:**

$$q=\frac{a_2}{a_1}$$
$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2}\quad,\quad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}\quad,\quad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}\quad,\quad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

مثال سوم :ترادف هندسی $2700,900,300,100$ را در نظر گرفته حد اول و نسبت مشترک آن را دریافت کنید و بگوید که ترادف هندسی فوق متزاید است یا متناقص.

➢ **حـل:** چون $q<1$ است پس ترادف متناقص است . $a_1 = 2700 \quad , \quad q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

مثال ۴: نسبت مشترک تصاعد هندسی که جمله اولی آن برابر با 12 و جمله دومی برابر با 6 است دریافت نمائید.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

نسبت مشترک تصاعد فوق عبارت از عدد $\frac{1}{2}$ و جملات آن $(12 , 6 , 3 , \frac{3}{2} , \frac{3}{4} ,.....)$ می‌باشد

دریافت حد nام ترادف هندسی

هرگاه a_1 عنصر اول و q نسبت مشترک ترادف هندسی باشد عنصر nام آن عبارت است از $a_n = a_1 q^{n-1}$

ثبوت: عناصر تصاعد را یکی به کمک دیگری متوالیاً بدست می‌آوریم.

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$
$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$
$$a_5 = a_4 q = (a_1 q^3) q = a_1 q^4$$
$$\boxed{\Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

مثال‌اول: جمله ششم تصاعد هندسی $(5 , -10 ,...)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ n = 6 \\ a_6 = ? \end{cases} \qquad a = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-10}{5} = -2 \qquad \begin{cases} a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ a_6 = 5(-2)^5 \\ a_6 = -160 \end{cases}$$

بناً حد ششم تصاعد مورد نظر عبارت از -160 می‌باشد.

مثال دوم: جمله اول یک تصاعد هندسی 2 و جمله آخر 162 باشد، تعداد جملات این تصاعد را حساب نمائید در صورتیکه نسبت مشترک آنها 3 باشد.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \\ a_n = 162 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 q^{n-1} \\ 162 = 2(3)^{n-1} \\ 81 = 3^{n-1} \\ 3^4 = 3^{n-1} \Rightarrow 4 = n-1 \Rightarrow n = 5 \end{cases}$$

مثال سوم: در یک تصاعد هندسی جملهٔ سوم مساوی است به جمله دوم به اضافه دو برابر جمله اول نسبت مشترک این تصاعد را دریافت نمائید.

➢ حل: با توجه به مطالب فوق داریم :

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \;..................(1)$$

با توجه به رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ داریم

$$a_2 = a_1q^{2-1} = a_1q$$
$$a_3 = a_1q^{3-1} = a_1q^2$$

قیمت های بدست آمده را در رابطه (1) گذشته داریم
$$a_1q^2 = a_1q + 2a_1 \Rightarrow q^2 = q+2 \Rightarrow q^2 - q - 2 = 0 \Rightarrow (q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

مثال چهارم: حداول یک تصاعد هندسی 5 و نسبت مشترک آن 2 است حد هفتم این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ r = 2 \\ n = 7 \\ a_7 = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \\ a_7 = 5 \cdot 2^{7-1} \Rightarrow \\ a_7 = 5 \cdot 2^6 \Rightarrow 5 \cdot 64 \Rightarrow \\ \quad a_7 = 320 \end{array}$$

مثال پنجم: حد دوازدهم ترادف هندسی ... , 2 , 4 , 8 را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} n = 12 \\ a = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_{12} = 8(\frac{1}{2})^{12-1} 8(\frac{1}{2})^{11} = 8\frac{1}{2^{11}} \\ a_{12} = \frac{8}{2^{11}} = \frac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} \end{array}$$

مثال ششم: دریک تصاعد هندسی حد اول آن 3 و نسبت مشترک آن 2 است کدام حد ازین تصاعد 192 می گردد؟

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ q = 2 \\ an = 192 \\ n = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \\ 192 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \\ 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow 6 = n-1 \Rightarrow n = 7 \end{array}$$

مثال هفتم: حد اول یک تصاعد هندسی 5 و حد ششم آن 160 است نسبت مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ an = 160 \\ n = 6 \\ q = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \\ 160 = 5 \cdot q^5 \Rightarrow 32 = q^5 \\ \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{q^5} \Rightarrow q = 2 \end{array}$$

مثال هشتم : دریک تصاعد هندسی حد اول $\frac{1}{2}$ و حد پنجم آن $\frac{1}{162}$ است نسبت مشترک این تصاعد هندسی را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{162} \\ n = 5 \\ q = ? \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} an = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \\ \frac{1}{162} = \frac{1}{2} \cdot q^{5-1} \Rightarrow \frac{1}{162} = \frac{1}{2} \cdot q^4 \\ \frac{1}{81} = q^4 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \end{array}$$

مثال نهم : حـد چهارم ترادف هندسی زیر را دریافت نمائید.

حـــل:

$$5\ , -10, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ q = \frac{-10}{5} = -2 \\ n = 4 \\ a_4 = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_4 = 5 \cdot (-2)^{4-1} \\ a_4 = 5(-2)^3 \Rightarrow a_4 = 5 \cdot (-8) \\ a_4 = -40 \end{array}$$

مثال دهم : حـد دوازدهم ترادف هندسی $...,2,4,8$ را دریابید.

حــل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\frac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\frac{8}{2^{11}}=\frac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256} \end{array}$$

مثال یازدهم : با فرض اینکه $(a_n/n\in IN)$ ترادف هندسی که تمام حدود آن مثبت و r نسبت مشترک آن باشد ، بنا این ترادف متناقص است اگر .

1) $-1<r<0$ 2) $r=1$ 3) $r\neq 1$ 4) $0<r<1$

مثال دوازدهم : $x,x^2,x^3,x^5,.....$ طوریکه $x>1$ چه نوع یک ردیف می باشد .

1)هارمونیک 2)متناقص 3)حسابی 4) هندسی

مثال سیزدهم : در ترادف $2,6,18,...$ اگر $a_n=486$ باشد ، پس n عبارت است از:

1) $n=8$ 2) $n=5$ 3) $n=6$ 4) $n=7$

مثال چهاردهم : در یک تصاعد هندسی تفاضل دو جمله پنجم و سوم $\frac{1}{32}$ است. اگر قدر نسبت برابر $\frac{1}{2}$ باشد، جمله اول کدام است؟

➢ **حل:** $q=\frac{1}{2}$, $aq^4-aq^2=\frac{1}{32} \Rightarrow a(\frac{1}{16}-\frac{1}{4})=\frac{1}{32} \Rightarrow a=-\frac{1}{6}$

دریافت نسبت مشترک در تصاعد هندسی

برای دریافت نسبت مشترک در تصاعد هندسی سه حالت ذیل را در نظر می گیریم:

حالت اول

هرگاه تمام حدود تصاعد موجود باشد برای دریافت نسبت مشترک یک حد بالاتر را تقسیم بر یک حد پائین تر می نمائیم.

مثال ۱: نسبت مشترک را از تصاعد 32 , 16 , 8 , 4 , 2 بیابید.

$$q=\frac{16}{8}=2 \quad , \quad q=\frac{8}{4}=2 \quad , \quad q=\frac{4}{2}=2$$

حالت دوم

هرگاه حد اول و حد آخر داده شده باشد از رابطه ذیل استفاده می کنیم:

$$an=a_1\cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{an}{a_1}=q^{n-1} \Rightarrow \sqrt[n-1]{\frac{an}{a_1}}=\sqrt[n-1]{q^{n-1}} \Rightarrow q=\sqrt[n-1]{\frac{an}{a_1}}$$

مثال ۲: حد اول یک تصاعد هندسی 2 و حد پنجم آن 32 است، نسبت مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{aligned} a_1&=2\\ a_5&=32\\ q&=?\end{aligned}\right\} \qquad q=\sqrt[n-1]{\frac{an}{a_1}} \Rightarrow q=\sqrt[5-1]{\frac{32}{2}} \Rightarrow q=\sqrt[4]{16} \Rightarrow q=2$$

حالت سوم

هرگاه غیر از حد اول یک حد دیگری همراه باحد آخر داده شده باشد، از رابطه ذیل استفاده می کنیم یعنی هرگاه an و am دو حد داده شده از یک تصاعد هندسی را نشان دهند q یا نسبت مشترک را طور ذیل می یابیم.

$$\frac{an}{am}=\frac{q^{n-1}}{q^{m-1}} \Rightarrow \frac{an}{am}=q^{n-m} \Rightarrow q=\sqrt[n-m]{\frac{an}{am}}$$

مثال۳: هرگاه حد دوم یک تصاعد هندسی 4 و حد پنجم آن 32 باشد نسبت مشترک را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_2=4 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \qquad q=\sqrt[n-m]{\frac{an}{am}} \Rightarrow q=\sqrt[5-2]{\frac{32}{4}} \Rightarrow q=\sqrt[3]{8} \Rightarrow q=2$$

مثال۴: حد سوم یک تصاعد هندسی 12 و حد هفتم آن 384 است نسبت مشترک این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_3=12 \\ a_7=384 \\ q=? \end{array}\right\} \qquad q=\sqrt[n-m]{\frac{an}{am}} \Rightarrow q=\sqrt[7-3]{\frac{a_7}{a_3}} \Rightarrow q=\sqrt[4]{\frac{184}{12}} \Rightarrow q=\sqrt[4]{32}$$

دریافت وسط هندسی (Geometric Mean)

هرگاه a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، و M عددی باشد که بین آنها قرار گرفته و هر سه باهم یک تصاعد هندسی را بسازند درینصورت M را وسط هندسی بین a و b گویند.

$$\frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b \Rightarrow M=\sqrt{ab}$$

ویا به عبارت دیگر هرگاه سه عنصر مسلسل a_{n-1} ، a_n و a_{n+1} در حالیکه $(n=2,3,4,....)$ است از ترادف هندسی انتخاب گردد ، داریم کـه

$$(a_{n-1})(a_{n+1})=(a_1 r^{n-2})(a_1 r^n)=(a_1 r^{n-1})^2$$

از اینجاست مـی‌آید کـه $\boxed{a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}}$

یا به عبارت دیگر $d=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}}{a_n}\ \boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$

مثال اول : وسط هندسی اعداد 12 و 3 را دریافت کنید.

$M = \sqrt{ab}$

$M = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

مثال دوم: وسط هندسی اعداد 3 و 27 را بیابید و یا به عباره دیگر بین 3 و 27 کدام عدد قرار گیرد تا هر سه عدد یک تصاعد هندسی را تشکیل دهند.

$b = \pm\sqrt{ac} \Rightarrow b = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} \Rightarrow$

$b = \pm 9 \qquad 3, 9, 27 \quad 3, -9, 27$

مثال سوم: وسط هندسی $2x$ و $32x^3$ را بیابید.

$b = \sqrt{32x^2 \cdot 2x} \Rightarrow b = \sqrt{64x^4} \Rightarrow b = 8x^2$

مثال چهارم: به کدام قیمت x سه عدد ذیل یک تصاعد هندسی را تشکیل می دهند.

$x-1 \ , \ 4 \ , \ x+1$

$4^2 = (x-1)(x+1) \Rightarrow 16 = x^2 - 1 \Rightarrow$

$x^2 = 17 \Rightarrow x = \pm\sqrt{17}$

مثال پنجم: اگر x' و x'' ریشه های معادله $x^2 + 3x + (\sqrt{7} - \sqrt{2})m = 0$ باشند، آنگاه مقداری از m را تعیین کنید که به قیمت آن عدد 5 واسطه هندسی x' و x'' باشد.

➢ **حــل:**

$$x'\,x'' = 5^2 = 25 \qquad \frac{c}{a} = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})m}{1} = 25 \Rightarrow m = 5(\sqrt{7} + \sqrt{2})$$

درج جملات در تصاعد هندسی

هرگاه حد اول یک تصاعد هندسی a_1 وحد اخیر آن a_n باشد و بخواهیم بین حد اول و آخر k جمله درج نمائیم از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$a_1 \ , \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{k \text{ جمله}} , \ a_n$$

از تصاعد فوق نتیجه میگیریم که تعداد جملات آن برابر است با k جمله به اضافه جمله اول و آخر یعنی

$n = k + 2$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 q^{k+2-1} \Rightarrow a_n = a_1 q^{k+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_1} = q^{k+2} \Rightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

بناً برای درج k جمله دلخواه بین جمله اول و آخر ، نسبت مشترک آن تصاعد حاصله را از رابطه فوق بدست می‌آید.

مثال: جمله اول یک تصاعد هندسی 3 و جمله آخر آن 96 است چهار جملهٔ بین آنها درج نمائید.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 96 \\ k = 4 \end{cases} \qquad r = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{3} = 2$$

- بناً جملات تصاعد فوق عبارت از $(3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96)$ است.

نکته1

برای بدست آوردن حاصل ضرب جملات تصاعد هندسی وقتی جملات اول و اخر و تعداد جملات نامعلوم باشد از رابطه ذیل استفاده می کنیم.

$$\boxed{P_n \quad \sqrt{(a_1 \quad a_n)^n}}$$

در رابطه فوق P_n عبارت از حاصل ضرب جملات و n عبارت از تعداد آنها می‌باشد.

مثال ۱: حاصل ضرب جملات $(2 , 6 , 18 , 54)$ را بدست آورید.

➢ چون تعداد جملات چهار است بناً $n=4$ بوده و داریم $P_4=\sqrt{(2\times 54)^4}=(2\times 54)^2=(108)^2=11664$

نکته 2

برای بدست آوردن حاصل ضرب جملات تصاعد هندسی وقتی تعداد جملات آن طاق باشد از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$\boxed{\text{حاصلضرب جملات} = p_n = (\text{جمله وسط})^n}$

مثال ۲: حاصل ضرب جملات تصاعد ذیل را بدست آورید.

$$(3\ ,\ 6\ ,\ 12,\ 24\ ,\ 48)$$
$$p_n=(12)^5=248832$$

نکته ۳

بین سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی رابطه زیر برقرار است. $\boxed{(a_{k+1})^2=a_k\cdot a_{k+2}}$

مثال ۳: x را چنان تعیین نمائید که جملات $(x+1)$, $(x+3)$, $(x-1)$ تشکیل تصاعد هندسی بدهند.

$$(a_{k+1})^2=a_k\cdot a_{k+2}\Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)\Rightarrow x^2-1=x^2+6x+9\Rightarrow 6x=-10\Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

نکته4

برای بدست آوردن جمله nام در صورتیکه جمله kام و نسبت مشترک معلوم باشد از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم. $\boxed{a_n=a_k(r)^{n-k}}$

مثال ۴: جمله دهم یک تصاعد هندسی 5 و نسبت مشترک ان 2 می‌باشد جمله سیزدهم این تصاعد را دریافت نمائید.

$$\begin{cases} a_k = a_{10} = 5 \\ a_n = a_{13} = ? \\ q = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & a_n = a_k (q)^{n-k} \\ & a_{13} = 5(2)^{13-10} \\ & a_{13} = 5(2)^3 = 5(8) = 40 \end{aligned}$$

نکته 5

در یک تصاعد هندسی هرگاه مجموعه دو جمله آن مساوی به مجموعه دو جمله دیگر شود یعنی $n+m=p+q$ باشد درینصورت حاصل ضرب آن دو جمله اول مساوی به حاصل‌ضرب دو جمله دیگر می‌باشد یعنی $\boxed{a_n \cdot a_m = a_p \cdot a_q}$

مثال ۵: جمله دوم یک تصاعد هندسی 6 جمله پنجم 48 و جمله نهم آن 768 می‌باشد جمله دوازدهم را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_2 \times a_{12} = a_5 \times a_9 \\ 6 \times a_{12} = 48 \times 768 \Rightarrow 6a_{12} = 36864 \Rightarrow a_{12} = 6144 \end{cases}$$

نکته 6

اگر مجموعه دو شمارهٔ از جملات یک تصاعد هندسی برابر با دو چند کدام شماره دیگری باشد یعنی $n+m=2k$ یا به عبارت دیگر اگر جملات متساوی الفاصله باشند مربع جمله وسط برابر است با حاصل ضرب دو جمله طرفین آن یعنی $\boxed{n+m=2k \Rightarrow a_n \cdot a_m = (a_k)^2}$

مثال۶: د ریک تصاعد هندسی جمله چهارم 24 و جمله هفتم 192 می باشد جمله دهم این تصاعد را حساب نمائید.

$$a_4 = 24 \quad , \quad a_7 = 192 \quad , \quad a_{10} = ?$$
$$m+n=2k \quad \Rightarrow \quad 4+10=14$$
$$a_n \cdot a_m = (a_k)^2 \Rightarrow a_4 \cdot a_{10} = (a_7)^2 \Rightarrow 24a_{10} = (192)^2 \Rightarrow a_{10} = 1536$$

نکته 7

اگر جمله nام و جمله kام از تصاعد هندسی معلوم باشد برای بدست آوردن نسبت مشترک از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{r = \sqrt[n-k]{\frac{a_n}{a_k}}}$$

مثال ۷: اگر جمله دهم یک تصاعد هندسی 5 و جمله سیزدهم آن 40 باشد نسبت مشترک این تصاعد را حساب نمائید.

$$\begin{cases} a_k = a_{10} = 5 \\ a_n = a_{13} = 40 \\ q = ? \end{cases} \qquad q = \sqrt[n-k]{\frac{a_n}{a_k}} = \sqrt[13-10]{\frac{a_{13}}{a_{10}}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

نکته 8

در تصاعد هندسی توان q یعنی توان نسبت مشترک از تعداد جملات یک واحد کمتر می‌باشد یعنی جملهٔ ششم a_1r^5 و جمله سیزدهم a_1r^{12} و جمله هجدهم a_1r^{17} می‌باشد که بعضی از مسایل به کمک این ارتباطات حل می‌گـردد.

مثال ۸: جمله سوم یک تصاعد هندسی 9 و جمله پنجم آن 81 می‌باشد نسبت مشترک و جمله اول این تصاعد را دریافت نمائید.

➢ **حــل:**

$$a_5 = 18 \quad , \quad a_3 = 9 \quad , \quad a_1 = ?$$

$$\begin{cases} a_1 r^4 = 18 \\ a_1 r^2 = 9 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{a_1} r^4}{\cancel{a_1} r^2} = \frac{18}{9} \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

نسبت مشترک را در یکی از دو رابطه فوق گذاشته a_1 را دریافت می‌کنیم.

$$a_1 r^2 = 9$$

$$a_1 (\sqrt{2})^2 = 9$$

$$2a_1 = 9$$

$$a_1 = \frac{9}{2}$$

مجموع عناصر ترادف هندسی

هرگاه a_1 حد اول q نسبت مشترک n تعداد حدود و Sn مجموعه n حد یک تصاعد هندسی را نشان دهد درینصورت درایم که:
مجموع n عنصر مسلسل ترادف هندسی عبارت است از:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$

ثبوت: وضع می‌کنیم

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n$$

و یـا

$$S_n = a_1 + a_1\ r + a_1\ r^2 + a_1\ r^3 + ...+ a_1\ r^{n-1} \qquad (1)$$

اطراف رابطه اخیر را با r ضرب نموده داریم که

$$r\ S_n = r\ a_1 + a_1 r^2 + a_1\ r^3 + a_1\ r^4 + ...+ a_1\ r^n \qquad (2)$$

حال رابطه (1) را از رابطه (2) طرف به طرف تفریق می‌نماییم

$$r\ S_n - S_n = a_1\ r^n - a_1 \Rightarrow S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}}$$

مثال اول : مجموعه 20 حد تصاعد هندسی ذیل را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ q = 2 \\ n = 20 \\ S_{20} = ? \end{array}\right\} \qquad 5 + 10 + 2040..............$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow S_{20} = 5\frac{2^{20} - 1}{2-1}$$

$$S_{20} = 5\cdot(2^{20} - 1) \Rightarrow S_{20} = 5\cdot 2^{20} - 5$$

مثال دوم : دریک ترادف هندسی حد اول 2 و نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است مجموعه 10 حد این تصاعد را بیابید.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q < 1$$

$$S_{10} = 2\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}\cdot\frac{4}{1} = 3.99609375$$

مثال سوم : دریک تصاعد هندسی حد اول آن 5 نسبت مشترک آن 3 است مجموعه 5 حد این تصاعد را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=5 \\ q=3 \\ n=5 \\ S_5=? \end{array}\right\}$$

$$S_n=a_1\cdot\frac{q^{n-1}}{q-1}\Rightarrow S_5=5\cdot\frac{3^{5-1}}{3-1}\Rightarrow$$

$$S_5=5\cdot\frac{243-1}{2}\Rightarrow S_5=5\cdot\frac{242}{2}$$

$$S_5=5\cdot121\Rightarrow S_5=605$$

مثال چهارم : صفحه شطرنج 64 خانه دارد هرگاه در خانه اول یک دانه گندم درخانه دو 2 دانه در خانه سوم 4 دانه گندم به همین ترتیب در هر خانه دو چند خانه قبلی آن گندم بگذاریم (A) تعداد گندم های را در آخرین خانه می گذاریم محاسبه نمائید (B) تعداد کل گندم ها را حساب نمائید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ q=2 \\ a_n=? \\ S_n=? \\ n=64 \end{array}\right\}$$

$$1,2,4,8,16,32,64,\ldots\ldots\ldots$$

$$(A)\ \ a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ \Rightarrow a_{64}=1\cdot2^{63}\Rightarrow$$

$$a_{64}=2^{64}-1$$

$$(B)=S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\Rightarrow S_{64}=1\frac{2^{64}-1}{2-1}\Rightarrow$$

$$S_{64}=2^{64}-1$$

مثال پنجم : n امین جمله یک تصاعد هندسی $\frac{1}{3}\ 5^{2n-2}$ است. مجموع 35 جمله نخست آن را بیابید.

حــل:

$$a_1=\frac{1}{3}\ 5^0=\frac{1}{3}$$

$$a_2=\frac{1}{3}\ 5^2=\frac{25}{3}$$

بنابر این $q=\frac{a_2}{a_1}=25$ و لذا داریم:

$$S_{35}=\frac{\frac{1}{3}(1-25^{35})}{1-25}=\frac{1}{72}\ (5^{70}-1)$$

مثال ششم : مقدار n حداقل چند باشد تا مجموع n جمله نخست تصاعد هندسی $1, 3, 9, \ldots$ بزرگتر از 10000باشد؟

➢ **حــل:**

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q} > 10000 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-3^n}{1-3} > 10000 \quad \Rightarrow \quad 3^n > 20001$$

از آنجایی که $3^9 = 19638$ و $3^{10} = 59049$ باید n حداقل برابر 10 باشد.

مثال هفتم : حـد مجموع جملات دنباله زیر را بیابید.
$$1 \,,\, \frac{2x}{x^2+4} \,,\, (\frac{2x}{x^2+4})^2, \ldots$$

➢ **حــل:**

جملات دنباله تشکیل تصاعد هندسی با قدر نسبت $r = \frac{2x}{x^2+4}$ می‌دهند به علاوه $-1 \le \frac{2x}{x^2+4} \le 1$ ، در نتیجه حد مجموع جملات دنباله برابر است با:

$$S = 1 + \frac{2x}{x^2+4} + (\frac{2x}{x^2+4})^2 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{2x}{x^2+4}} = \frac{1}{\frac{x^2+4-2x}{x^2+4}} = \frac{x^2+4}{(x-1)^2+3}$$

مثال کانکور خارج از کشور :

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک ترادف حسابی ، می توانند سه جمله ی متوالی از یک ترادف هندسی باشند نسبت مشترک؟

حــــل : $q = \frac{p-m}{m-n} = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$

مثال هشتم : تصاعد هندسی $...,\frac{1}{2},x,2$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

1) $\frac{41}{32}$ 2) $\frac{21}{16}$ 3) $\frac{11}{18}$ 4) $\frac{23}{16}$

➢ **حـــل :** نسبت مشترک تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_3}{a_1}=q^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}=q^2 \Rightarrow q=-\frac{1}{2}$$

چون در صورت نسبت شرط شده که تصاعد هندسی غیر نزولی است ، پس مقدار $q=\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است.

در واقع اگر $q=\frac{1}{2}$ باشد، تصاعد به‌صورت $2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$ می شود که نزولی است و به درد ما نمی‌خورد اما اگر $q=-\frac{1}{2}$ باشد، تصاعد به‌صورت $2,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$ می شود که نه نزولی است و نه صعودی در واقع هِی کم و زیاد می‌شود. به این دنباله ها، دنباله‌ی نوسانی می گوییم

مجموع شش جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2(1-(1-\frac{1}{2})^6)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\times\frac{63}{64}=\frac{21}{16}$$

مثال نهم : در یک تصاعد هندسی با نسبت مشترک $q=2$ مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

➢ **حـــل :** نسبت $\frac{s_6}{s_3}$ را حساب می کنیم :

$$\frac{s_6}{s_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}\frac{1-q^6}{1-q^3}\Rightarrow\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{(1-q^3)}=1+q^3\Rightarrow\frac{s_6}{s_3}=1+2^3=1+8=9$$

مثال دهم : در تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و 2 مجموع 5 جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله دوم است؟

1) 2^{10} 2) 2^2 3) 2 4) 2^5

➢ **حـــل :** نسبت مشترک ، وحد اول $a_1 = 2$ ، $q = \frac{1}{4}$ است .

➢ $$\frac{s_{10}-s_5}{s_5} = \frac{s_{10}}{s_5} - 1 = \frac{\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}} - 1 = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} \Rightarrow \frac{(q^5+1)(q^5-1)}{q^5-1} - 1 = q^5 \Rightarrow \frac{s_5}{s_{10}-s_5} = \frac{1}{q^5} = 2^{10}$$

مثال یازدهم : در یک تصاعد هندسی ، مجموع جملات اول و سوم برابر 1 و مجموع چهار جمله‌ی اول آن 3 می‌باشد. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) $10/8$ 2) $11/2$ 3) $12/6$ 4) $13/4$

➢ **حـــل :**

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1$$
$$s_4 = 3 \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow a_1q + a_1q^3 = 2 \Rightarrow a_1q(1+q^2) = 2 \Rightarrow q = 2$$
$$a_1(1+q^2) = 1 \Rightarrow a_1(1+4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$
$$s_6 = \frac{a_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{5}(2^6-1)}{2-1} = \frac{63}{5} = 12/6$$

مثال دوازدهم : حاصل $A = (1+x+x^2+\ldots+x^8)(1-x+x^2-\ldots+x^8)$ به قیمت $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

1) 507 2) 511 3) 512 4) 516

➢ **حـــل :** هر کدام از انتروال ها مجموع ۹ جمله از یک ترادف هندسی هستند . داریم :

$$(1+x+x^2+\ldots+x^8)=\frac{1(x^9-1)}{x-1}$$

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^8=\frac{\left[1(-x)^9-1\right]}{-x-1}$$

$$\frac{x^9-1}{x-1}\times\frac{x^9+1}{x+1}=\frac{x^{18}-1}{x^2-1}\Rightarrow\frac{(\sqrt{2})^{18}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=2^9-1=511$$

سلسله هندسی لایتناهی

هرگاه در یک ترادف هندسی نسبت مشترک q از انتروال $(-1,1)$ باشد یعنی $-1<q<1$ درینصورت برای قیمت های بزرگ n عدد q^n فوق العاده کوچک می‌شود ، به عبارت دیگر وقتی که n بطرف بینهایت نزدیک شود عدد q^n بطرف صفر تقرب می‌کند، لهذا از رابطه (یعنی عدد کوچکتر از یک و بزرگتر از منفی یک به توان لایتناهی مساوی به صفر میشود)

$$a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

با در نظر داشت $q^n=0$ بدست مـی‌آیـد کـه

$$\boxed{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots\ldots=\frac{a_1}{1-q}}$$

سمت چپ رابطه اخیر را بنام سلسله هندسی و سمت راست را با قیمت (مجموع) آن می‌نامند. سلسلهء هندسی را بصورت ذیل میتوان نوشت:

$$a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{a_1}{1-q}$$

$$\boxed{\Rightarrow 1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{1-q}}$$

سلسله متقارب (Convergent)

هرگاه با بی نهایت شدن تعداد حدود مجموعه به یک عدد معین نزدیک گردد درینصورت سلسله متقاب می گوئیم یک سلسله زمانی متقارب است که $|q| < 1$ باشد. مجموعه سلسله متقارب را از رابطه ذیل می یابیم .

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

سلسله متباعد(Divergent Series)

هرگاه با بی نهایت شدن تعداد، مجموعه نیز بی نهایت گردد ، درین صورت سلسله را متباعد می گوئیم یک سلسله زمانی متباعداست که $|q| > 1$ باشد.

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} \Rightarrow S_n = a_1\frac{q^\infty-1}{q-1} \Rightarrow S_n = a_1\frac{\infty-1}{q-1} \Rightarrow S_n = \infty$$

مثال اول : سلسله $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.........$ را محاسبه کنید.

➢ **حـــل:** در این سلسله $a_1 = 1$ و $q = \frac{1}{2}$ میباشد. لهذا مطابق دستور

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

مثال دوم : هرگاه در یک تصاعد هندسی $a_1 = 2$ و $r = 2$ باشد. مجموع 5 عنصر را محاسبه کنید.

➢ **حـــل:** مطابق دستور داریم که

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_1\frac{1-q^5}{1-q}$$

بنابر این

$$2+6+18+54+162 = 2.\frac{1-3^5}{1-3} = 2.\frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1} = 3^5 - 1 = 242$$

مثال سوم : اگر عنصر اول یک تصاعد هندسی $a_1 = 27$ و نسبت مشترک در آن $q = \frac{1}{3}$ باشد مجموع سلسله عناصر آن را محاسبه کنید.

➢ **حـــل**: باز هم از فورمول را در نظر می‌گیریم.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = \frac{a_1}{1-r}$$

از اینـجا

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+........=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=40.5$$

مثال چهارم : کسر اعشاری متوالی $0,6\overline{23}$ را با استفاده از سلسله هندسی به کسر عام تبدیل می‌کنیم.

$$0,6\,\overline{23}=0,6\ 23\ 23\ 23...=0.6+0.023+0,00023+0,0000023+...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+....$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\left[1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+...\right]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\left[1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+...\right]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}.\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}.\frac{1}{\frac{99}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}.\frac{100}{99}$$

$$\Rightarrow 0,6\,\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}.$$

مثال پنجم : $0.\overline{2}$ را به کسر عام تبدیل نمائید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=0.2 \\ q=\frac{1}{10} \\ S_n=? \end{array}\right\}$$

$$0.\overline{2}=0.22222222.............$$

$$S_n=\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow S_n=\frac{0.2}{1-\frac{1}{10}}\Rightarrow S_n=\frac{0.2}{10-1}\Rightarrow\frac{0.2}{1}\cdot\frac{10}{9}\Rightarrow S_n=\frac{2}{9}$$

مثال ششم : کسراعشاری متوالی $0.\bar{3}$ رابه کسر عام تبدیل نمائید.

$$0.\bar{3} = 0.3333333..........$$

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003.......$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0.3 \\ q = \dfrac{1}{10} \\ n = \infty \\ S_n = ? \end{array}\right\}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{0.3}{1-\frac{1}{0}} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{0.3}{\frac{10-1}{10}} \Rightarrow \frac{0.3}{1}\cdot\frac{10}{9} \Rightarrow \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{1}{3}$$

مثال هفتم : حاصل عبارت $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+...$ کدام است؟

1) 1 2) $\frac{4}{3}$ 3) 2 4) $\frac{5}{4}$

➢ **حـــــل :** حد مجموع داده شده را باز نویسی می کنیم :

$$s = (\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+...$$
$$= (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...)$$

➢ می دانیم حد مجموع بی نهایت جمله از یک ترادف هندسی زمانیکه $q<1$ باشد از رابطه $s_\infty = \frac{a}{1-q}$ بدست می آید .

➢ $$s_\infty = \frac{\frac{1`}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

مثال هشتم : حد مجموع ... $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+...$ برابر است با:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{5}{4}$

➢ **حــــل :** حد مجموع داده شده را باز نویسی می کنیم

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+...=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)+(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...)$$

➢ $$s=1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال نهم : حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله‌ی nام $a_n=5(-\frac{2}{3})^{2n-1}$ ، برابر چند است؟

1) -6 2) -5 3) $-\frac{30}{13}$ 4) $\frac{-51}{5}$

➢ **حــــل :** چند حد ترادف را تشکیل می دهیم :

$$a_1=5(-\frac{2}{3})^{2-1}=5(-\frac{2}{3}) \quad , \quad a_2=5(-\frac{2}{3})^{4-1}=5(-\frac{2}{3})^3 \quad , \quad a_3=5(-\frac{2}{3})^{6-1}=5(-\frac{2}{3})^5$$

➢ نسبت مشترک ترادف را می آییم :

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{5(-\frac{2}{3})^3}{5(-\frac{2}{3})}=(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

➢ حد مجموع جملات ترادف هندسی برابر است با :

$$s_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5(-\frac{2}{3})}{1-\frac{4}{9}}=\frac{-\frac{10}{3}}{\frac{5}{9}}=-\frac{90}{15}=-6$$

مثال دهم : حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$ برابر k^2-8 است. قیمت k برابر است با:

1) ± 2 2) ± 3 3) ± 4 4) ± 5

➢ **حــــل :** حد مجموع جملات ترادف هندسی نا محدود را حساب می کنیم ، داریم :
$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=1 \Rightarrow k^2-8=1 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow k=\pm 3$$

مثال یازدهم : در تصاعد هندسی $a_1, \frac{a_1}{2}, \dots$ مقدار S_3 و S_6 را به صورت $S_6=a_6+a_7+\dots$ و $S_3=a_3+a_4+\dots$ تعریف می‌کنیم. کدام رابطه بین S_3 و S_6 برقرار است؟

1) $S_3=\frac{S_6}{8}$ 2) $S_3=8S_6$ 3) $S_3=S_6$ 4) $S_3=3S_6$

➢ **حــــل :** حد سوم و حد ششم ترادف هندسی داده شده را مشخص می کنیم .
$$q=\frac{\frac{a_1}{2}}{a_1}=\frac{1}{2} \quad , \quad a_3=a_1.q^2=a_1(\frac{1}{2})^2=\frac{a_1}{4} \quad , \quad a_6=a_1.q^5=a_1(\frac{1}{2})^5=\frac{a_1}{32}$$

➢ با استفاده از رابطه ی $s=\frac{a}{1-q}$ نسبت s_3 و s_6 را بدست می آوریم :
$$\frac{s_3}{s_6}=\frac{\frac{a_3}{1-q}}{\frac{a_6}{1-q}}=\frac{a_1q^2}{a_1q^5}=\frac{1}{q^3} \Rightarrow \frac{s_3}{s_6}=8 \Rightarrow s_3=8s_6$$

مثال دوازدهم : حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی بی‌پایان برابر 30 و حد مجموع مربعات آن جملات برابر 150 است. نسبت مشترک این تصاعد چه‌قدر است؟

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{7}{5}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{5}{7}$

➢ **حــــل :** حد مجموع جملات ترادف داده شده عبارت است : $s_\infty=\frac{a}{1-q}=30$

➢ حد مجموع مربع جملات : $s'_\infty = \dfrac{a^2}{1-q^2} = 150$

➢ با تغیرات در روابط بالا مقدار q را محاسبه می کنیم : $\dfrac{a^2}{1-q^2} = \dfrac{a\times a}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{a}{1-q}\times\dfrac{a}{1+q} = 30\times\dfrac{a}{1+q} = 150 \Rightarrow \dfrac{a}{1+q} = 5 \Rightarrow a = 5(1+q)$

➢ نسبت مشترک را بدست می آوریم : $\dfrac{a}{1-q} = 30 \Rightarrow \dfrac{5(1+q)}{1-q} = 30 \Rightarrow \dfrac{1+q}{1-q} = 6 \Rightarrow 1+q = 6-6q \Rightarrow 7q-5 = q = \dfrac{5}{7}$

مثال سیزدهم : توپی را از ارتفاع 15 متری رها می‌کنیم. اگر پس از هر بار برخورد کردن به زمین ، $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی را بالا برود، مجموع مسافتی که توپ طی می‌کند تا از حرکت متوقف شود چه‌قدر می‌شود؟

1) 21 2) 22 3) $23/5$ 4) 30

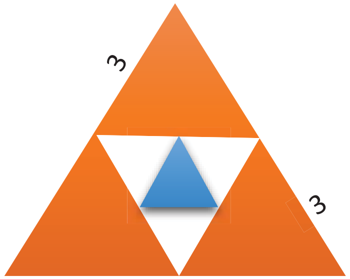
➢ **حل :** ابتدا ترادفی که نشان دهنده مسافت طی شده توسط توپ در هر مرحله است را تشکیل می دهیم : $15\ ,\ 5,\ 5,\ \dfrac{5}{3}\ ,\ \dfrac{5}{3}$

➢ مجموع مسافت طی شده به صورت ذیل قابل محاسبه است : $s_\infty = 15+2(5+\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\dots) = 15+2\times\dfrac{5}{1-\frac{1}{3}} = 15+2\left(\dfrac{5}{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow 15+2\times\dfrac{15}{2} = 15+15 = 30$

مثال چهاردهم : مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 6 مفروض است. وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث دیگری تشکیل شود. باردیگر وسط اضلاع مثلث داخلی را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث دیگری حاصل شود و ... این کار را بی‌شمار دفعه انجام می‌دهیم مجموع محیط های مثلث‌ها چه‌قدر خواهد بود؟

1) 30 2) 33 3) 36 4) 39

➢ **حل :** شکل گویا از توضیحات بیان شده را رسم می کنیم و ترادفی را که شامل محیط مثلث های متساوی الاضلاع است ، می نویسیم ، داریم :



محیط مثلث های متساوی الاضلاع : $3\times 6\ ,\ 3\times 3\ ,\ 3\times\frac{3}{2},\dots$

مجموع محیط مثلث های متساوی الاضلاع برابر حد مجموع ترادف هندسی نا محدود شده است .در نتیجه داریم :

$$s_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{18}{1-\frac{1}{2}}=18\times 2=36$$

مثال پانزدهم : حاصل $\dots+\frac{1}{729}-\frac{1}{243}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$ کدام است؟

1) $\frac{12}{27}$ 2) $\frac{12}{29}$ 3) $\frac{11}{26}$ 4) $\frac{11}{27}$

➢ **حــــل :** عبارت داده شده را ساده می سازیم :

$$s=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}-\frac{1}{729}+\dots$$
$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5-\left(\frac{1}{3}\right)^6+\dots$$
$$=(\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\dots..)-2((\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^6+\dots)$$

➢ با محاسبه ی حد مجموع هر یک از قوس ها مقدار s را بدست می آوریم :

$$s=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-2\times\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}-2\times\frac{\frac{1}{27}}{\frac{26}{27}}=\frac{1}{2}-\frac{2}{26}=\frac{1}{2}-\frac{1}{13}=\frac{13-2}{26}=\frac{11}{26}$$

مثال شانزدهم : بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

1) $30(2+\sqrt{2})$ 2) $48\sqrt{2}$ 3) $30(\sqrt{2}+1)$ 4) $36(\sqrt{2}+1)$

اوسط های اعداد:

اوسط های حسابی، هندسی و هارمونیک دو عدد حقیقی a و b عبارت اند از:

اوسط حسابی $A=\dfrac{a+b}{2}$

اوسط هندسی $G=\sqrt{a\cdot b}$

اوسط هارمونیک $H=\dfrac{2a.b}{a+b}$

به عبارت دیگر

(الف). اعداد b , A , a یک ترادف حسابی را می‌سازد،

(ب). اعداد b , G , a در یک ترادف هندسی واقع اند.

(ج). اعداد b , H , a در یک ترادف هارمونیک شامل می‌باشند.

مثال اول : اوسط های حسابی ، هندسی و هارمونیک اعداد 2 و 8 عبارت اند از:

$$A=\frac{2+8}{2}=5 \quad , \quad G=\sqrt{2\cdot 8}=4 \ , \ H=\frac{2(2\cdot 8)}{2+8}=3.2$$

بدین ترتیب

(اعداد 2 و 5 و 8 ترادف حسابی اند) ، (اعداد 2 و 4 و 8 در یک ترادف هندسی واقع اند) و(اعداد 2 و 3،2 و 8 ترادف هارمونیک را تشکیل می‌دهند)

قضیه: هرگاه A , G و H به ترتیب اوسط های حسابی، هندسی و هارمونیک دو عدد a و b باشند، پس

$$\boxed{1.\quad G=\sqrt{AH}}$$

$$\boxed{2.\quad H\le G\le A.}$$

ثبوت:

$$1.\quad G=\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2a\cdot b}{a+b}}=\sqrt{A\cdot H}\ ,$$

$$2.\quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{a\cdot b}\le a+b$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{a\cdot b}}{a+b}\le 1\Rightarrow\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\sqrt{ab}\le 1\cdot\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow H\le G\ \ldots\ (I)$$

به همین قسم

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{a\cdot b}\le a+b\Rightarrow\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow G\le A\ \ldots\ (II)$$

از مقایسه (I) و (II) داریم که

$$\boxed{H\le G\le A}$$

تعمیم اوسط های اعداد: قبلا اوسط حسابی، هندسی و هارمونیک برای دو عدد حقیقی تعریف گردید، اما این مفاهیم برای n عدد حقیقی a_1 و a_2 و a_3 و a_4 و .... و a_n نیز تعریف شده می‌توانند. یعنی:

$$H=\frac{n\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3.....a_n}{a_1+a_2+a_3+...+a_n} \quad , \quad G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n} \quad , \quad A=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

ادامه موضوع از حدود و حوصله بحث ما خارج است.

سلسله ها

مجموعه یا حاصل جمع جملات یک ردیف را بنام سلسله آن ردیف یاد می‌کنند.

بطور خلاصه و فشرده حاصل جمع جملات یک ردیف توسط سمبول یا نماد سیگما «$\sum$» نمایش میدهند ، بطور مثال حاصل جمع n جمله ردیف $a_1+a_2+a_3+..........+a_n$ را بصورت ذیل نمایش میدهند.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3\ ....a_n$$

افاده $\sum_{k=1}^{n}a_k$ (خوانده می‌شوند a_k از k مساوی به 1 تا k مساوی به n) یعنی a_k را به ازای کلیه مقادیر k از 1 تا n محاسبه کرده و سپس جملات حاصله را باهم جمع می‌کنیم ، که در آن a_k جمله عمومی ردیف مورد نظر n تعداد جملات ردیف و k را بنام اندکس می‌نامند. (k را بنام شاخص می‌گویند و به عوض آن میتوان از هر حرف دلخواه دیگری نیز استفاده نموده و بیشتر از حروف $i\ ,\ j\ ,k\ ,n$ استفاده می‌کنند)

مثال اول : مجموعه های ذیل را بطور خلاصه توسط علامت (سیگما) نمایش می‌دهند.

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, 2) $2^2+3^2+4^2+5^2$

3) $1+3+5+7+9+11+13$, 4) $2+4+6+8+......+2n$

5) $1+4+9+16+.........+n^2$

➢ **حــل**: ابتدا برای ردیف های 3 , 2 , 1 جمله عمومی نوشته آنها را قرار ذیل توسط علامت سیگما نمایش میدهیم.

$$1)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k} \qquad , \qquad 2)\quad 2^2+3^2+4^2+5^2=\sum_{k=1}^{5}$$

$$3)\quad 1+3+5+7+9+11+13 \qquad , \qquad 4)\quad 2+4+6+8+......+2n$$

$$5)\quad 1+4+9+16+.........+n^2$$

مثال دوم : $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}$ را به شکل انکشاف یافته بنویسید.

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\Rightarrow=\frac{5040+2520+1680+1260+1008+840+720}{5040}=\frac{13068}{5040}$$

مثال سوم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\sum_{k=1}^{n=3}\frac{2k+1}{k}\Rightarrow\frac{2\cdot1+1}{1}+\frac{2\cdot2+1}{2}+\frac{2\cdot3+1}{3}\Rightarrow\frac{3}{1}+\frac{5}{2}+\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{18+15+14}{6}\Rightarrow\frac{47}{6}$$

مثال چهارم : مجموعه ذیل را محاسبه نمایید.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}=\frac{1}{1}(-1)^{1+1}+\frac{1}{2}(-1)^{2+1}+\frac{1}{3}(-)^{3+1}+\frac{1}{4}(-1)^{4+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

مثال پنجم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\sum_{j=2}^{n=5}(3j-1)^2\Rightarrow(3\cdot2-1)^2+(3\cdot3-1)^2\ +(3\cdot5-1)^2\Rightarrow25+64+121+196\Rightarrow406$$

مثال ششم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\sum_{j=1}^{n=100}(2j-1)\Rightarrow S_n=n^2=100^2\Rightarrow S_n=10000\Rightarrow1+3+5+7.............199$$

درین سوالات باید اندکس خود را ببینم فورمول اعداد طاق است ، جفت است و یاهم برای اندکس چند قیمت بدهیم تاببینم مجموعه حسابی است هندسی است و یا هم دیگر چیزی.

مثال هفتم : مجموعه محدود ذیل را محاسبه نمایید.

$$\sum_{k=m}^{4}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\frac{1}{3(3+1)}+\frac{1}{4(4+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

مثال هشتم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\sum_{k-1}^{200}4k+1\Rightarrow 5+9+13+17.........+801$$

تصاعد حسابی است بناً:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+an)\Rightarrow S_{200}=\frac{200}{2}(5+801)\Rightarrow S_{200}=100\cdot 806\Rightarrow S_{200}=80600$$

مثال نهم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} q=\frac{1}{2}\\ n=\infty\\ S_n=?\end{array}\right\}\qquad \sum_{x=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^x\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}............\Rightarrow S_n=\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow S_n=1$$

مثال دهم : مجموعه ذیل را بیابید.

$$\sum_{x=8}^{10}(\frac{1}{2})^x\Rightarrow(\frac{1}{2})^8+(\frac{1}{2})^9+(\frac{1}{2})^{10}\Rightarrow\frac{1}{2}^8+\frac{1}{2}^{10}+\frac{1}{2}^{10}\Rightarrow\frac{4+2+1}{2^{10}}\Rightarrow\frac{7}{2}^{10}$$

مثال یازدهم : سلسله ذیل را به شکل سیگما تبدیل نمائید.

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{25}+\frac{5}{625}...............\Rightarrow\qquad\sum_{x=1}^{n}\frac{2x-1}{5^x}$$

مثال دوازدهم : سلسله ذیل را به شکل سیگما تبدیل نمائید.

$$1+4+7+10+.................+130$$

$$an = a_1 + (n-1)d \qquad 130 = 3n-2$$

$$an = 1+(n-1)3 \qquad 132 = 3n$$

$$an = 3n-2 \qquad 44 = n$$

$$\sum_{n=1}^{n=44} 3n-2$$

مثال سیزدهم : مجموعه های ذیل را بطور خلاصه توسط علامت سیگما نمایش دهید.

1. $2^2+3^2+4^2+5^2$
2. $2+4+6+8+\ldots+2n$
3. $1+4+9+16+\ldots+n^2$

حل: ابتدا برای ردیف های 3 , 2 , 1 جملهٔ عمومی نوشته آنها را قرار ذیل توسط علامت سیگما نمایش می دهیم.

1. $2^2+3^2+4^2+5^2=\sum_{k=1}^{5} k^2$
2. $2+4+6+8+\ldots+2n=\sum_{k=1}^{n} 2k$
3. $1+4+9+16+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$

مثال چهاردهم : مجموعه بی نهایت حد سلسله ..... $2+0.3+0.03+0.003+$ مساوی است به .

1) $s=\frac{2}{8}$ 2) $s=\frac{7}{3}$ 3) $s=\frac{3}{7}$ 4) $s=\frac{4}{7}$

مثال پانزدهم : مجموعه سلسله $\sum_{i=1}^{40} i$ مساوی است به .

1) 840 2) 810 3) 820 4) 830

مثال شانزدهم: ارایه یک سلسله اعداد $(1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+\ldots+(n^2-1)$ بصورت سیگما یکی از گزینه های .

1) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$ 2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$ 3) $\sum_{k=1}^{n}(k^2)$ 4) $\sum_{k=1}^{n}(1-k^2)$

مثال هفدهم: ارایه یک سلسله اعداد $(1^2-2)^3+(2^2-2)^3+(3^2-2)^3+\ldots+(6^2-2)^3$ بصورت سیگما یکی از گزینه های .

1) $\sum_{i=1}^{6}(i^3-2)$ 2) $\sum_{i=1}^{6}(i^2-2)$ 3) $\sum_{i=1}^{5}(i^2-2)^3$ 4) $\sum_{k=1}^{n}(i^2-2)^3$

خواص سلسله ها

روابطی بین سلسله ها بر قرار می باشد که هر یکی جداگانه بررسی و اثبات می نماییم.

1. درصورتیکه c یک عدد ثابت باشد داریم: $\sum_{k=1}^{n}c=nc$

➢ **اثبات:** نظر به اینکه برای k عدد c ثابت است و نظر به تعریف ضرب داریم

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+c+\ldots+c}_{n}=nc$$

2. در صورتیکه a_k یک ردیف بوده و c عدد ثابت باشد داریم

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

➢ **اثبات:**

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\ldots+ca_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

3. درصورتیکه a_k و b_k دو سلسله باشد رابطه بین آنها بر قرار است.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

اثبات:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

دو رابطهٔ فوق را طرف به طرف جمع نموده داریم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

4. در صورتیکه a_k و b_k دو سلسله باشد رابطه بین آنها بر قرار است.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$$

➢ **اثبات:**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

دو رابطه فوق را طرف به طرف تفریق نموده داریم.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$$

5. رابطهٔ زیر نیز بین اجزای یک سلسله موجود است.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k \qquad m > n \ , \ m,n \in N$$

اثبات:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_m$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

---

6. درصورتیکه $(a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots , a_m)$ یک ردیف از اعداد باشد و $i \in Z$ داریم

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = \sum_{k=n-i}^{m-i} a_k$$

➢ **اثبات:** از تعریف استفاده نموده داریم

$$\sum_{k=n-i}^{m-i} a_{k+i} = a_{(n-i)+i} + a_{(n-i+1)+i} + a_{(n-i+2)+i} + \ldots + a_{(m-i)+i} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ \ldots \ a_m$$

---

7. درصورتیکه $(a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots , a_m)$ یک ردیف از اعداد باشد و $i \in Z$ داریم.

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n+i}^{m+i} a_{k-i}$$

➢ **اثبات:** از تعریف استفاده نموده داریم.

$$\sum_{k=n+i}^{m+i} a_{k-i} = a_{(n+i)-i} + a_{(n+i+2)-i} + \ldots + a_{(m+i)-i} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ \ldots \ a_m$$

نوعی ثبوت

استقرای ریاضی

جهت اثبات روابط و قضایای ریاضی سه روش مروج است که عبارتند از روش مستقیم ، روش غیر مستقیم و روش استقرای ریاضی.

در روش مستقیم از تحلیل منطقی فرضیه های قضیه، صحت موضوع به طور مستقیم ثبوت می‌شود و بیشترین استعمال را در ساحه ریاضیات دارد.

در روش غیر مستقیم عکس نتیجه مطلوب فرض می‌گردد و با تحلیل این فرضیه حصول یک نتیجه غیر ممکن به ثبوت می‌رسد و منشاء اصلی تناقص همان فرضیه اولی پنداشته شده و نقص آن مورد قرار می‌گیرد، بدین ترتیب نتیجه مطلوب به طور غیر مستقیم حاصل می‌شود.

اما روش استقرای ریاضی را که در اثبات روابط و قضایای مربوط به اعداد طبیعی و ترادف ها به کار برده می‌شود، تحت مطالعه قرار می‌دهیم

در این روش به منظور اثبات خاصیت $P(n)$ از اعداد طبیعی n دو مرحله مد نظر قرار می‌گیرد.

مرحله اول: صحت رابطه $P(n)$ برای $n=1$ آزمایش و تایید می‌گـردد.

مرحله دوم: در این مرحله فرض می‌شود که قضیه برای $n=k$ درست باشد، آنگاه به استناد آن ، ادعا برای $n=k+1$ به اثبات می‌رسد.

مثال اول : ثبوت کنید که برای هر عدد طبیعی n رابطه ذیل صدق می‌کند:

$$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ثبوت: خاصیت $P(n)$ را برای هر قیمت اصلی طبیعی n به شکل ذیل در نظر می‌گیریم:

$$P(n)\ :\ 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مرحله اول: برای $k=1$ داریم که:

$$p(1):1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

در نتیجه $P(1)$ درست است.

مرحله دوم: اکنون فرض می کنیم که $P(k)$ برای عدد طبیعی k صدق می‌نماید یعنی: $P(k):1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که $P(k+1)$ نیز درست است به اطراف رابطه اخیر $(k+1)^2$ را علاوه می‌کنیم:

$$1^2+2^2+3^2+....+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right]=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1)][(2(k+1)+1]}{6}.=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

لهذا $P(k+1)$ درست می‌باشد.

مثال دوم : ثبوت کنید که برای هر عدد طبیعی n رابطه ذیل صدق می‌کند: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+....+n)^2$

ثبوت: چون $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد لذا خاصیت $P(n)$ را برای هر قیمت طبیعی n به شکل ذیل در نظر می گیریم: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

مرحله اول: برای $k=1$ داریم که: $P(1):1^3=\left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$ در نتیجه $P(1)$ درست است.

مرحله دوم: اکنون فرض می‌کنیم که $P(k)$ برای هر عدد طبیعی k صدق می‌نماید یعنی: $P(k):1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

موضوع را برای $P(k+1)$ تعقیب می نماییم. به اطراف رابطه اخیر $(k+1)^3$ را علاوه می‌کنیم:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$
$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}\right]^2$$

لهذا $P(k+1)$ درست می‌باشد.

مثال سوم : غیر تساوی برنولی 1 را ثبوت کنید: $\boxed{(1+a)^n\geq 1+na \qquad , \qquad a>0}$

ثبوت: مرحله اول: برای $n=1$ داریم که $(1+a)^1\geq 1+1\cdot a \qquad \Rightarrow \qquad (1+a)^1=1+1\cdot a$

لذا غیر مساوات برای $n=1$ بر درست است.

مرحله دوم: فرض کنیم غیر تساوی برای $n=k$ صحت داشته باشد یعنی: $(1+a)^k\geq 1+ka$

حال اطراف رابطه اخیر را با $(1+a)$ ضرب می‌کنیم

$$(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)$$
$$\Rightarrow \quad (1+a)^{k+1}\geq 1+a+ka+ka^2\geq 1+a+ka$$
$$\Rightarrow \quad (1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a.$$

لهذا این غیر مساوات برای $n=k+1$ نیز صحت دارد.

فکتوریل:

برای عدد طبیعی n مفهوم عددی n فکتوریل قرار ذیل تعریف می‌شود $n!=1\cdot 2\cdot 3......n$ اما صفر فکتوریل عدد یک تعریف می‌گردد یعنی $0!$

که میتوان گفت فاکتوریل حاصل ضرب اعداد مسلسل طبیعی است .

مثال :

1. $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$
2. $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$
3. $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$
4. $(n+1)!=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)...3\cdot 2\cdot 1$
5. $\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)....3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)....3\cdot 2\cdot 1}=n+1$
6. $\dfrac{9!}{(3!)(6!)}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot}{1\cdot 2\cdot 3}=84$
7. $\dfrac{n!}{(r!)(n-r)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)....3\cdot 2\cdot 1}{[r\cdot(r-1)...3\cdot 2\cdot 1][(n-r)\cdot(n-r-1)....3\cdot 2\cdot 1]}=$
   $=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

ترکیب اعداد طبیعی

هرگاه r و n دو عدد طبیعی باشند طوریکه $0\le r\le n$ درینصورت ترکیب n و r عبارت ست از :

$$\boxed{\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)}{r!}}$$

بعضاً در عوض سمبول $\binom{n}{r}$ از سمبول C_n^r استفاده می‌شود.

مثال :

$$\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\frac{9!}{(3!)(6!)}+\frac{9!}{(4!)(5!)}=\frac{4(9!)+6(9!)}{(4!)(6!)}=\frac{10!}{(4!)(6!)}=\binom{10}{4}.$$

قضیه پاسکال1 : برای اعداد طبیعی r و n در حالیکه $0\le r\le n$ باشد، داریم که:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}.$$

ثبوت:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{r(n!)+(n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!}=\frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=\binom{n+1}{r}\ \square$$

بینوم نیوتن:

برای اعداد حقیقی a و b عدد طبیعی n داریم که $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\ldots+\binom{n}{n}b^n$.

ثبوت: (بروش استقراء ریاضی)

مرحله اول: برای $n=1$ داریم که

$$(a+b)^1=a+b=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b.$$

مرحله دوم: فرض کنیم رابطه اصلی برای $n=k$ صدق نماید یعنی.

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}.b+\ldots+\binom{k}{k}b^k$$

اطراف رابطه اخیر را به $(a+b)$ ضرب می‌کنیم

$$(a+b)^{k+1}=(a+b).\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}.b+\ldots+\binom{k}{r}a^{k-r}.b^r+\ldots+\binom{k}{k}b^k\right]$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^k.b+\ldots.$$

$$+\left[\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}\right]a^{k-r}.b^r+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}$$

مـی دانیم که

$$\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=\binom{k+1}{r} \quad , \quad \binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

بنابریـن

$$(a+b)^{k+1}=$$
$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^{k}b+\ldots+\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\ldots+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

لهذا قضیه برای $n=k+1$ نیز درست است.

مجموع ضرائب بینوم

هرگاه در اصل بینوم و حالت انکشاف یافته اش $a=1=b$ وضع گردد میابیم که

$$2^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{r}+\ldots+\binom{n}{n}$$

مثال ۱:

$$(a+b)^{5}=\binom{5}{0}a^{5}+\binom{5}{1}a^{4}\,b+\binom{5}{2}a^{3}\,b^{2}+\binom{5}{3}a^{2}\,b^{3}+\binom{5}{4}a\,b^{4}+\binom{5}{5}b^{5}$$
$$\Rightarrow (a+b)^{5}=a^{5}+5a^{4}\,b+10a^{3}\,b^{2}+10a^{2}\,b^{3}+5a\,b^{4}+b^{5}$$
$$2^{5}=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\Rightarrow 2^{5}=1+5+10+10+5+1$$

ارایهء سمبولیک بینوم

بینوم نیوتن را طور سمبولیک قرار ذیل نیز ارایه می‌نمایند.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \equiv \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)}a^{n-k}b^k$$

خواص انکشاف بینوم

الف) تعداد حدود $(a+b)^n$ بعد از انکشاف مساوی به $n+1$ حـد است.

ب) مجموع ضرایب بینوم فوق در حالت انکشاف برابر با 2^n می‌باشد.

ج) حدود متناظر از هر دو طرف بسمت وسط دارای ضرایب مساوی اند.

د) مجموع توان های a و b در هر یک از حدود مساوی به عدد n است.

هـ) حد موقعیت kام عبارت از $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$ است.

مثلث پاسکال

با در نظر داشت قضیهء پاسکال و ضرائب $\binom{1}{0}$ و $\binom{1}{1}$ ، میتوان ضریب های حالت انکشاف یافته بینوم را تدریجا برای $n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5,...$ بحیث یک مثلث عددی (مثلث پاسکال) قرار ذیل فهرست نمود:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

ویا برای اعداد $n=0,1,2,3,4,5$ مثلث پاسکال عبارت است از

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 50 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

اشاره کوتــا به چند موضوع مهم

مجموعه مسایل اصلی شمارش

مثال هــا:

مثال اول : با ارقام 7 , 5 , 6 چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت طوریکه

الف: تکرار ارقام جایز نباشد

ب: تکرار ارقام جایز باشد

➢ **حــل:**

الف: رقم یکها را به سه طریقه می‌توان انتخاب کرد حالا یکی از اعداد به عنوان رقم یکها انتخاب می‌شود و فقط 2 عدد باقی مانده ، لذا برای انتخاب رقم دها فقط 2 انتخاب داریم بنابر این مقدار کل انتخاب ها مساوی است با: $3 \cdot 2 = 6$

ب: برای رقم یکها سه انتخاب داریم و چون تکرار ارقام جایز نیست ، لذا برای انتخاب رقم دهـا نیز سه انتخاب داریم: بنابر این تعداد کل انتخاب ها مساوی است بـا:

$$3 \cdot 3 = 9$$

مثال دوم : با ارقام 5 , 0 , 3 , 7 و 1 چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت طوریکه تکرار ارقام جایز نباشد.

➢ **حــل:** رقم صدها نمی‌تواند صفر باشد ، لذا برای رقم صد ها چهار انتخاب داریم. حال چهار عدد دیگر باقی‌مانده و برای رقم دها چهار انتخاب و برای رقم یکها سه انتخاب داریم لذا تعداد کل انتخاب ها مساوی است با: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

مثال سوم : از بین 3 قلم خودکار سیاه و چهار قلم خودکار سبز به چند طریق می‌توان دو قلم انتخاب نمود که یکی سیاه و دیگری سبز باشد.

➢ **حـــل:** برای انتخاب قلم خودکار سیاه، سه انتخاب و پس از انتخاب یکی از قلم خودکار سیاه، برای انتخاب قلم خودکار سبز ، چهار انتخاب داریم بنابر این تعداد کل انتخاب ها مساوی است با: $4\cdot3=12$

مثال چهارم : به چند طریقه میتوان به 5 سوال چهار جوابه امتحان کانکور جواب داد.

➢ **حـــل:** سوال اول را به چهار طریقه و سوال دوم را نیز به چهار طریقه و به همین ترتیب سوالات سوم، چهار و پنجم را نیز هر کدام به چهار طریق می‌توان جواب داد، لذا تعداد کل مساوی است با: $5^{1}=1024$

مثال پنجم : با حروف کلمه (تایمنی) چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت طوریکه حروف تکرار نشوند.

➢ **حـــل:** تعداد حروف 6 تا می‌باشد ، لذا برای انتخاب حرف اول 6 انتخاب و برای حرف دوم، پنج انتخاب و برای حرف سوم، چهار انتخاب داریم: تعداد کل مساوی است با:

$$6\cdot5\cdot4=120$$

مثال ششم : با ارقام $0\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8$ و 6 چند عدد دورقمی می‌توان ساخت طوریکه ارقام تکراری نباشند:

➢ **حـــل:** چون رقم دها نمی‌تواند صفر باشد، لذا برای رقم دها، چهارم انتخاب داریم حال چهار عدد دیگر داریم، بنابر این برای رقم یکها نیز چهار انتخاب داریم پس تعداد کل انتخاب ها مساوی است بـا: $4\cdot4=16$

مثال هفتم : بـا ارقام $0\ ,1\ ,2\ ,\ 3\ ,\ 4$ و 5 چند عدد دو رقمی که بر 5 قابل تقسیم باشد می‌توان نوشت طوریکه ارقام تکراری نباشند.

➢ **حـــل:** میدانیم عددی بر 5 پوره قابل تقسیم است که رقم یکها آن صفر یا پنج انتخاب برای رقم صد ها چهار انتخاب داریم لذا $5\cdot4\cdot1=20$ انتخاب برای اعداد سه رقمی که رقم یکها آن صفر باشد داریم:

حال اگر 5 رقم یکها باشد چون صفر نمی‌تواند رقم صد ها باشد، لذا برای رقم صد ها چهار انتخاب و برای رقم دها نیز چهار انتخاب داریم و تعداد اعداد سه رقمی که رقم یکها آن 5 باشد مساوی است با: $4\cdot4\cdot1=16$ و تعداد کل انتخاب ها مساوی است با: $20+16=36$

مجموعه مسایل تبدیلی

مثال اول : با ارقام 3 , 7 , 6 , 5 چند عد چهار رقمی می‌توان نوشت طوریکه ارقام تکرار نباشند.

➢ **حــل**: $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

مثال دوم : تعداد تبیدلی های دور n شی متمایز برابر $(n-1)$ می‌باشد به چند طریق 6 نفر می‌توانند اطراف یک میز غذا خوری قرار گیرند.

➢ **حــل**: $(6-1)!=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

مثال سوم : به چند طریق می‌توان 7 درخت متفاوت را در یک محیط یک زمین دایروی غرض نمود.

➢ **حــل**: $(7-1)!=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

5: پنج محصل پولی تخنیک تایم صبح و سه محصل نهاری به چند طریق میتوانند در یک ردیف قرار گیرند که محصلین دوره نهاری در کنار هم باشند.

حــل: ابتدا فرض می‌کنیم سه محصل تایم نهاری پهلوی هم قرار گیرند در این صورت آنها را به منزله یک فرد حساب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که شش نفر می‌خواهند در یک ردیف قرار گیرند. تعداد حالات ممکن برابر $6!$ است و از جانب دیگر به $3!$ طریق سه محصل نهاری می‌توانند پهلوی هم باشند، لذا تعداد کل حالات مساوی است با:

$$6!\cdot3!=720+6=4320$$

مجموع مسایل ترکیب و ترتیب

مثال اول : مقادیر ذیل را محاسبه کنید.

الف: $p(5\ ,\ 4)$ ، ب: $p(7\ ,\ 3)$ ، ج: $p(8\ ,\ 6)$ ، د: $p(n\ ,1)$ ، و: $p(n\ ,\ n-1)$

➢ حـــل:

الف:

$$p(5\ ,\ 4)=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{5!}{4!}=\frac{5!}{1!}=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$$

ب:

$$p(7\ ,\ 3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\cdot4\cdot5\cdot4!}{4!}=120$$

ج:

$$p(8\ ,\ 6)=\frac{8!}{(8-6)!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!}=20160$$

د:

$$p(n\ ,1)=\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)}=n!$$

و:

$$p(n\ ,\ n-1)=\frac{n!}{(n,n+1)}=n!$$

مثال دوم : از مساوات ذیل n را دریابید:

الف: $p(n\ ,\ 6)=6p(n\ ,\ 4)$ ، ب: $p(7\ ,\ 4)=np(4\ ,\ 2)$

➢ **حــل:**

الف:

$$(n-4)!=6\cdot(n-6)!=>(n-4)(n-5)(n-6)!$$
$$=6\cdot(n-6)(n-4)(n-5)=6=>6=>n^2-9n+14=0$$
$$n=7$$

$$\frac{7!}{(7-4)!}=n\cdot\frac{4!}{(4-2)!}$$
$$7\cdot6\cdot5\cdot4=n\cdot4\cdot3=>\ n=70$$

مثال سوم : از یک گروپ 10 نفره ، به چند طریق می‌توان گروپ های 4 نفره انتخاب کرد که هر یک جهت مشخص را داشته باشد،

➢ **حــل:**

$$p(10\ ,\ 4)=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!}=5040$$

مثال چهارم : با حروف کلمه در ((یوسف)) چند کلمه 2 حرفی می‌توان نوشت {بدون تکرار حروف}

➢ **حــل:**

$$p(4\,,\,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=12$$

مثال پنجم : با ارقام $9\,,\,7\,,\,5\,,\,3\,,\,1$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت {بدون تکرار ارقام}

$$p(5\,,\,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!}=60$$

مثال ششم : مقادیر ذیل را محاسبه کنید

الف: $\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ ، ب: $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ ، ج: $\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}$

➢ **حــل:**

الف:

$$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4!}=70$$

ب:

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2\cdot1}=10$$

ج:

$$\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}=\frac{9!}{6!(9-6)!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!3\cdot2\cdot1}=84$$

مثال هفتم: به چند طریق می‌توان یک کمیت 5 نفره از میان 4 دوکتور و 3 نرسنگ انتخاب نمود.

الف: وجود دوکتور و نرس تفاوتی ندارد.

ب: کمیت شامل 2 دوکتور باشد.

ج: کمیت شامل 2 نرس باشد.

➢ حـــل:

الف: $$\begin{bmatrix}4+3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}=\frac{7!}{5!(7-5)!}=\frac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2\cdot1}=21$$

ب: در این کمیت باید 2 دوکتور باشد ، لذا تعداد نرس برابر 3 است.

تعداد راه های انتخاب 2 دکتور $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\frac{4!}{2!2!}=6$

تعداد راه های انتخاب 3 نرس $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\frac{3!}{3!0!}=1$

بنابر اصل اساسی شمارش تعداد راه های انتخاب برابر است با $6\cdot1=6$

ج: کمیت شامل 2 نرس و 3 دوکتور می‌باشد.

تعداد راه های انتخاب 3 دوکتور $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\dfrac{4!}{3!1!}=4$

تعداد راه های انتخاب 2 نرس $[\overset{3}{2}]=\dfrac{3!}{2!1!}=3$

بنابر اصل اساسی شمارش تعداد راه ها برابر است بـا: $4\cdot 3=12$

مجموعه توسعه دو جمله‌ای

مثال اول : دو جمله‌ای های ذیل را توسعه دهید:

الف: $(a-b)^2$ ، ب: $(a-b)^3$ ، ج: $(a-b)^4$ د: $(a-b)^n$

➢ **حـل:**

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=\sum_{r=0}^{2}\left[r^2\right]a^{2-3}(-b)^r$$

الف:

$$=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}a^2(-b)^0+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}a^1(-b)^1+\left[2^2\right]a^0(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

ب:

$$(a+b)^3=(a+(-b))^3=\sum_{r=0}^{3}\begin{bmatrix}3\\r\end{bmatrix}a^{3-r}(-b)^r$$

$$=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}a^3(-b)^0+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}a^2(a-b)^1+\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}a^1(-b)^2$$

$$+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}a^0(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

ج:

$$(a-b)^4=(a+(-b))^4=\sum_{r=0}^{4}\begin{bmatrix}4\\r\end{bmatrix}a^{4-r}(-b)^r$$

$$=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}a^4(-b)^0+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}a^3(-b)^1+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}a^2(-b)^2$$

$$+\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}a^1(-b)^3+\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}a^0(-b)^4$$

$$=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$(a-b)^n=\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}a^{n-1}(-b)^r=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}a^{n-r}b^r$$