هو أَعلم

نوع و تعداد ریشه های معادله درجه3

1.چند قضیه در جبر:

الف) قضیه اساسی جبر: هر تابع چند جمله ای از درجه n ($n \geq 1$)حداقل یک ریشه در اعداد مختلط دارد.(اولین اثبات این قضیه توسط گاوس انجام شد)

*نتیجه قضیه اساسی جبر: هر معادله چند جمله ای از درجه n دقیقاً n ریشه در اعداد مختلط دارد.

پس هر معادله درجه 3 دقیقاً 3 ریشه در اعداد مختلط دارد.

ب) هر معادله چند جمله ای از درجه n که n فرد است حتماً حداقل یک ریشه در اعداد حقیقی دارد.(اثبات توسط قضیه مقدار میانی)

پس هر معادله درجه 3 حتماً حداقل یک ریشه دارد.

ج) هر معادله چند جمله ای از درجه n حداکثر n ریشه در اعداد حقیقی دارد.

پس هر معادله درجه 3 حداکثر 3 ریشه دارد.

د) نتیجه قضیه رول : اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و f' دارای n ریشه در این بازه باشد f حداکثر $n+1$ ریشه در این بازه دارد.

و) اگرمجموع ضرایب معادله چندجمله ای ازدرجه n عددی فرد باشد آن معادله فاقدریشه گویاست و ریشه هایش گنگ است.

2. قاعده علامات دکارت

مفهوم واریاسیون : اگر دنباله $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ را در نظر بگیریم که دو جمله متوالی این دنباله دارای علامت های مخالف باشند گوییم این دو جمله نمایش یک واریاسیون است.

حال اگر معادله $f(x)=0$ یک معادله چند جمله ای به صورت مقابل باشد $a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$

طبق قاعده علامات دکارت :

1.با فرض اینکه تعداد تغییر علامت در جملات متوالی دنباله (تعداد واریاسیون های ضرایب $f(x)=0$) را با m و تعداد ریشه های مثبت حقیقی معادله $f(x)=0$ را با k نشان دهیم داریم

$m-k$ عددی زوج است , $k \leq m$

2.با فرض اینکه تعداد تغییر علامت در جملات متوالی دنباله (تعداد واریاسیون های ضرایب $f(-x)=0$) را با n و تعداد ریشه های منفی حقیقی $f(x)=0$ را با s نشان دهیم داریم :

$n-s$ عددی زوج است , $n \leq s$

نتایج قاعده علامات دکارت:

1.اگر ریشه های یک معادله چند جمله ای همه مثبت باشند علامت های ضرایب متناوباً مثبت و منفی اند.

2. اگر $p,q \in \mathbb{R}, q \neq 0$ معادله $X^3 + pX + q = 0$ وقتی $p\rangle 0$ است دارای 2 ریشه موهومی است.

مثال : نوع و تعداد ریشه های معادله $x^3 - x^2 - 10x + 4 = 0$ را مشخص کنید.

با فرض $f(x) = x^3 - x^2 - 10x + 4$ تعداد تغییر علامت در ضرایب $f(x) = 0$ برابر $\underline{2}$ است پس این معادله دارای 2 یا 0 ریشه مثبت است و تعداد تغییرعلامت در ضرایب $f(-x) = 0$ برابر$\underline{1}$ است پس معادله حتما دارای یک ریشه منفی است.

3.نوع ریشه های معادله درجه 3 $\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ , \ a \neq 0$

اگر Δ را اینگونه تعریف کنیم : $\quad \Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$

آنگاه داریم:

$\Delta\rangle 0 \quad \Rightarrow$ سه ریشه حقیقی متمایز

$\Delta = 0 \quad \Rightarrow$ یک ریشه مضاعف و همه ریشه ها حقیقی اند

$\Delta\langle 0 \quad \Rightarrow$ یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط

4.تشخیص تعداد ریشه های معادله درجه سه $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ در <u>مختصات حقیقی</u> به کمک تابع درجه 3 متناظر با آن:

ابتدا تابع درجه 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را در نظر میگیریم:

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1.اگر $\Delta_{y'}\rangle 0$ باشد داریم :

$y_{\min} y_{\max} = 0 \Rightarrow$ عرض یکی از ریشه های مشتق تابع صفر است $\Rightarrow$ تابع یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده دارد

$y_{\min} y_{\max} \rangle 0 \Rightarrow$ تابع یک ریشه ساده دارد

$y_{\min} y_{\max} \langle 0 \Rightarrow$ تابع سه ریشه حقیقی دارد

2.اگر $\Delta_{y'} = 0$ باشد داریم:

تابع دارای عطف افقی است.تابع دارای یک ریشه ساده است.(علامت ریشه مخالف ad است)

3. اگر $\Delta_{y'}\langle 0$ باشد داریم:

تابع اکیدا یکنوا است. تابع دارای یک ریشه ساده است.(علامت ریشه مخالف ad است)

*اگر $y'\rangle 0$ یا $y'\langle 0$ باشد تابع اکیدا یکنواست و دارای یک ریشه ساده است.

5. بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه 3 کانونیک $X^3 + pX + q = 0$

*هر معادله درجه 3 $(ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$ را میتوان به صورت کانونیک $X^3 + pX + q = 0$ درآورد:

1. روش کلی : تغییر متغیر رو به رو را اعمال میکنیم : $x = X - \dfrac{b}{3a}$

به طوری که $p = \dfrac{-\dfrac{b^2}{3a} + c}{a}$ و $q = \dfrac{-\dfrac{b^3}{27a^2} - \dfrac{b}{3} + d}{a}$

2. اگر $c = 0$ بود $\Leftarrow$ $x = \dfrac{1}{X}$

مبین معادله درجه 3 کانونیک را اینگونه تعریف میکنیم: $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$

آنگاه با توجه به علامت p دو حالت داریم :

1. اگر $p<0$ آنگاه سه حالت داریم:

a) $\Delta<0$
- $q>0$ دو ریشه مثبت یک ریشه منفی
- $q<0$ دو ریشه منفی یک ریشه مثبت

b) $\Delta>0$
- $q>0$ یک ریشه منفی
- $q<0$ یک ریشه مثبت

c) $\Delta = 0$
- $q>0$ یک ریشه مضاعف مثبت یک ریشه ساده منفی
- $q<0$ یک ریشه مضاعف منفی یک ریشه ساده مثبت
- $q = p = 0$ یک ریشه سه گانه

*در حالت c داریم: ریشه مضاعف= $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$, ریشه ساده = $-2\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$

2. اگر $p>0$ باشد داریم:

$p>0$
- $q>0$ یک ریشه منفی
- $q<0$ یک ریشه مثبت

روش های حل معادلات درجه 3

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

1. اگر $x=\lambda$ یکی از ریشه های حقیقی معادله درجه سوم بالا باشد آنگاه معادله بر $(x-\lambda)$ بخش پذیر است. پس معادله را بر $(x-\lambda)$ تقسیم کرده و خارج قسمت را مساوی صفر قرار داده و ریشه ها را مشخص میکنیم.

مثال: اگر $x=2$ یکی از ریشه های معادله درجه سوم $x^3+mx^2-9x+18=0$ باشد ریشه های دیگر معادله را بدست آورید.

چون $x=2$ یکی از ریشه های معادله است پس آن را در معادله جایگذاری کرده و مساوی صفرمیگذاریم:

$$8+4m-18+18=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow x^3-2x^2-9x+18=0$$

سپس با تقسیم معادله بر $(x-2)$ داریم:

$$(x-2)(x^2-9)=0 \Rightarrow \{x=-3,\ x=3\ ,\ x=2\}$$

*روش هورنر در تقسیم چند جمله ای بر عامل $(x-\lambda)$

برای چندجمله ای درجه سه به صورت زیر عمل میکنیم:

$$ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow (x-\lambda)(Ax^2+Bx+C)$$

$$A=a\ ,\ B=a\lambda+b\ ,\ C=(a\lambda+b)\lambda+c=a\lambda^2+b\lambda+c$$

*این روش برای تقسیم چندجمله ای درجه n بر عامل $(x-\lambda)$ نیز قابل تعمیم است.

2. اگر در معادله درجه 3 مجموع ضرایب صفر باشد ($a+b+c+d=0$) یکی از ریشه های معادله $x=1$ است.

پس طبق قسمت 1معادله را بر $(x-1)$ تقسیم کرده وخارج قسمت را مساوی صفر قرار داده وریشه ها را بدست می آوریم.

مثال : معادله رو به رو را حل کنید. $x^3-6x^2+11x-6=0$

1-6+11-6=0 $\Rightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0 \Rightarrow \{x=2\ x=3\ ,\ x=1\}$

3. اگر در معادله درجه 3 ($a+c=b+d$) برقرار باشد یکی از ریشه ها $x=-1$ است. پس معادله را بر $(x+1)$ تقسیم کرده و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار داده و ریشه ها را مشخص میکنیم .

مثال: معادله روبه رو را حل کنید. $x^3+2x^2-5x-6=0$

1-5=2-6 $\Rightarrow (x+1)(x^2+x-6)=0 \Rightarrow \{x=2\ ,x=-1\ x=-3\}$

4. روش دسته بندی و فاکتورگیری

در این روش باید جملات معادله را بگونه ای دسته بندی کرد که بتوان از این جملات فاکتورگرفت و معادله را تجزیه کرد.

مثال: معادله رو به رو را حل کنید. $x^3-3x^2-4x+12=0$

$$x\left(x^2-4\right)-3\left(x^2-4\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2-4\right)\left(x-3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \{\ x=2 \ \ x=-2 \ \ x=3\}$$

5. روش خرد کردن

در این روش با شکستن برخی جملات میتوان معادله را به صورتی در آورد که از عامل یا عواملی فاکتور گرفت.

مثال: معادله رو به رو را حل کنید. $x^3+x-2=0$

$$x^3-1+x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x-1\right)\left(x^2+x+1+1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \ , \ x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

6. اگر ریشه های معادله درجه 3 عضو $\mathbb{Z}$ باشند عدد ثابت معادله (d)بر هر یک از ریشه هایش بخش پذیر است ، پس کافیست مقسوم علیه های مختلف آن را در معادله جایگذاری کنیم هر کدام که در معادله صدق کند ریشه معادله است سپس با استفاده از روش 1 معادله را حل میکنیم.

مثال: اگر ریشه های معادله $x^3-6x^2-x+30=0$ عضو $\mathbb{Z}$ باشند معادله را حل کنید.

d=30 بر اعداد $\{\pm1 \ \pm2 \ \pm3 \ \pm5 \ \pm6 \ \pm10 \ \pm15 \ \pm30\}$ بخش پذیر است . با توجه به قسمت 2 و 3 $x=\pm1$ ریشه نیستند.

با جایگذاری $x=-2$ متوجه می شویم که $x=-2$ ریشه تابع است. معادله را بر $\left(x+2\right)$ تقسیم کرده و سپس ریشه های معادله را پیدا می کنیم.

$$\left(x+2\right)\left(x^2-8x+15\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \{\ x=3,\ x=-2\ ,\ x=5\ \}$$

7. اگر ریشه های معادله درجه 3 به صورت کسرهایی گویا به فرم $\frac{p}{q}\left(p,\mathrm{q}\in\mathbb{Z},\mathrm{q}\neq0\right)$ باشند آنگاه $q\,|\,a \ , \ p\,|\,d$

مثال: اگر ریشه های معادله $16x^3-60x^2+56x=15$ به صورت کسر هایی گویا به فرم $\frac{P}{q}$ باشند معادله را حل کنید.

$$q\in\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16\} \quad x_1=\frac{P}{q} \quad , \quad P\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15\} \quad ,$$

با جایگذاری متوجه می شویم که یکی از ریشه ها $x=+\frac{1}{2}$ است پس معادله را بر $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ می کنیم.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(16x^2-52x+30\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{x=\frac{1}{2},\mathrm{x}=\frac{5}{2},\mathrm{x}=\frac{3}{4}\right\}$$

8.قضیه ویت $(vieta)$ (روابط بین ریشه ها)

اگر α,β,γ ریشه های معادله درجه 3 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ باشند داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\quad,\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a}\quad,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}\quad,\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}$$

قضیه نیوتون :عکس قضیه ویت نیز برقرار است، اگر داشته باشیم :

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0$$

آنگاه α,β,γ ریشه های معادله اند.

9. روشی برای حل معادله درجه 3 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

تعریف می کنیم:

$$\Delta=18abcd-4b^3d+b^2c^2-4ac^3-27a^2d^2$$

$$\Delta_0=b^2-3ac\ ,\ \Delta_1=2b^3-9abc+27a^2d\quad,\quad \Delta_1^{\,2}-4\Delta_0^{\,3}=-27a^2\Delta\quad,\quad M=\sqrt[3]{\frac{\Delta_1+\sqrt{\Delta_1^2-4\Delta_0^3}}{2}}$$

که با توجه به روابط بالا ریشه های معادله درجه 3 از فرمول زیر بدست می آیند:

$$x_k=-\frac{1}{3a}\left(b+U_kM+\frac{\Delta_0}{U_kM}\right)\quad,\quad k\in\{1,2,3\}$$

$$U_1=1\ ,\ U_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad,\quad U_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$***\ \Delta=0$

$\Delta_0=0 \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه حقیقی سه گانه است که از فرمول مقابل بدست می آید $x_0=-\frac{b}{3a}$

$\Delta_0\neq 0 \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده حقیقی است

ریشه مضاعف : $x_0=\frac{9ad-bc}{2\Delta_0}$ ریشه ساده : $x_1=\frac{4abc-9a^2d-b^3}{a\Delta_0}$

10.روشی از استاد بیژن اسدی برای حل معادله درجه سه $ax^3+bx^2+cx+d=0$

تعریف می کنیم:

$$p=\frac{3ac-b^2}{9a^2} \quad , \quad q=\frac{9abc-2b^3-27a^2b}{54a^3} \quad ,$$ مبین معادله: $D=p^3+q^2$

حال سه حالت زیر پیش می آید:

$D\rangle 0 \quad \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی است

ریشه حقیقی از رابطه رو به رو بدست می آید و دو ریشه موهومی از طریق تجزیه $x_1=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{q+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{D}}$

$D=0 \quad \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده حقیقی است

ریشه مضاعف $x_2=x_3=-\frac{b}{3a}-\sqrt[3]{q}$, ریشه ساده $x_1=-\frac{b}{3a}+2\sqrt[3]{q}$

$D\langle 0 \quad \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه سه گانه است

ابتدا با توجه به رابطه زیر زاویهθرا محاسبه می کنیم:

$$\theta=\arctan(\frac{\sqrt{|D|}}{q})$$

*در مواردی که q,D هر دو منفی هستند جواب منفی برای θ قابل قبول نیست و باید به آن π اضافه شود.

سپس ریشه ی سه گانه را با فرمول های زیر می توانیم بدست بیاوریم:

$$x_1=-\frac{b}{3a}+2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) , \quad x_2=-\frac{b}{3a}+2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) , \quad x_3=-\frac{b}{3a}+2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)$$

*اگر در هر یک از سه فرمول بالا مقدار $p=\frac{3ac-b^2}{9a^2}$ را جایگذاری و ساده کنیم خواهیم داشت:

$$x_1=-\frac{b}{3a}+2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)=\frac{-b+2\sqrt{b^2-3ac}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}{3a}$$

* اگر $D=0$ باشد در نتیجه $\theta=0$ یا $\theta=\pi$

$$\theta=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{-b+2\sqrt{b^2-3ac}}{3a} \quad , \quad \theta=\pi \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$$

که این دو فرمول شبیه فرمول معروف ریشه های معادله درجه 2 است $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

11.روش کاردانو

ابتدا معادله را به صورت کانونیک $X^3+pX+q=0$ درمی آوریم.

*شیپیونه دل فرو اولین کسی بود که حالت خاصی از معادله کانونیک را حل کرد.

سپس مبین معادله درجه 3 کانونیک را اینگونه تعریف میکنیم: $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$

در مورد نوع ریشه های معادله کانونیک در قسمت اول بحث شد...

برای حل معادله فرض میکنیم :

$X=a+b$ جایگذاری در معادله $\Rightarrow \quad a^3+b^3+3ab(a+b)=-p(a+b)-q$

پس باید $a^3+b^3=-q \quad , \quad 3ab=-p$ در نتیجه $a^3b^3=-\frac{p^3}{27}$

به توجه به روابط بالا معادله درجه دومی تشکیل میدهیم که a^3,b^3 ریشه های آن باشند:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta} \quad , \quad z_1=a^3, z_2=b^3 \quad \Rightarrow$$

فرمول کاردانو برای بدست آوردن یکی از ریشه ها

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

* در زمان کاردانو جذراعداد منفی بی معنی بود به همین دلیل اگر Δ منفی میشد کاردانو این حالت را تحویل ناپذیرمی خواند اما چند سال بعد از او بومبلی این مشکل را با تعریف اعداد جدیدی که امروز به نام اعداد مختلط شناخته میشوند بر طرف کرد.(اگر دلتا منفی باشد معادله سه ریشه حقیقی دارد که برای محاسبه باید از اعداد مختلط استفاده کنیم)

12.روشی برای پیدا کردن ریشه های حقیقی معادله درجه سه $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \div a\Rightarrow \quad , \quad x^3+px^2+qx+r=0$$

تعریف میکنیم:

$$k_1=\frac{p^2}{3}-q \quad , \quad k_2=\frac{p^3}{27}-r \quad , \quad k_3=k_2-k_1\frac{p}{3} \quad , \quad k_4=\frac{k_1^3}{27}$$

آنگاه ریشه معادله از فرمول مقابل بدست می آید: $x=\sqrt[3]{\lambda}+\sqrt[3]{\mu}-\frac{p}{3}$

که در آن λ,μ ریشه های معادله $t^2-k_3t+k_4=0$ می باشند به طوری که $k_3=\lambda+\mu \quad , \quad k_4=\lambda\mu,$

حال با توجه به دلتای معادله درجه 2 بالا $(\Delta=k_3^2-4k_4)$ دو حالت خواهیم داشت

$$\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{k_3+\sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \mu = \frac{k_3-\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta \langle 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{k_3+\sqrt{-\Delta}i}{2} \quad , \quad \mu = \frac{k_3-\sqrt{-\Delta}i}{2}$$ که اعداد مختلط هستند

با استفاده از قواعد اعداد مختلط می توانیم ریشه معادله را برای حالت دوم به صورت زیر بدست آوریم:

$$k_3\rangle 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{\frac{k_1}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{D}{k_3}\right)\right)-\frac{p}{3}$$

$$k_3\langle 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{\frac{k_1}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{D}{k_3}\right))\right)-\frac{p}{3}$$

$$k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{k_1}-\frac{p}{3}$$

13. حل معادله $X^3+pX+q=0$ با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی با شرط $\Delta\langle 0$

$$X^3+pX+q=0 \quad , \quad X = r\cos(\theta)$$

$$r^3\cos^3(\theta)+\text{rp}\cos(\theta)+\text{q}=0 \;\Rightarrow\; 4\cos^3(\theta)+\frac{4p}{r^2}\cos(\theta)+\frac{4q}{r^3}=0 \quad , \; \cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4p}{r^2}=-3 \quad , \quad \frac{4q}{r^3}=-\cos(3\theta) \quad \Rightarrow \quad r=2\sqrt{\frac{-p}{3}}, p\langle 0 \quad , \quad \cos(3\theta)=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} \;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\theta) \quad , \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \quad , \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})$$

$$x_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\theta+\frac{2k\pi}{3}) = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{1}{3}\arccos(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}})+\frac{2k\pi}{3}), \text{k}=0,1,2$$

*همین روش را در مورد توابع هایپربولیک (هذلولوی) نیز می توان به کار برد:

$$X^3+pX+q=0$$

$$\Delta\rangle 0 \;,\; p\langle 0 \;\Rightarrow\; X_1 = -2\frac{|q|}{q}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\text{arccosh}\left(\frac{-3|q|}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)\right)$$

$$p\rangle 0 \;\Rightarrow\; X_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\text{arcsinh}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)\right)$$

*بعضی از معادلات درجه 3 با تغییر متغیر مثلثاتی حل می شوند:

1) $3x - 4x^3 - 1 = 0$

$$x = \sin(\alpha) \Rightarrow 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) = 1 \Rightarrow \sin(3\alpha) = 1 \Rightarrow 3\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad , \quad k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow (x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 (x + 1) = 0 \Rightarrow x = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

2) $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(1 - 3x^2) = 3x - x^3 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

$$x = \tan(\theta) \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\tan(\theta) - \tan^3(\theta)}{1 - 3\tan^2(\theta)} \Rightarrow \tan(3\theta) = \sqrt{3} \Rightarrow 3\theta = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta_k = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad , \quad k = 0,1,2 \Rightarrow x = \tan(\theta_k), k = 0,1,2$$

14.روشی از استاد خلیل عالی برای حل معادله درجه سه $X^3 + pX + q = 0$ با شرط $\Delta \rangle 0$

تعریف می کنیم :

$$a = \sqrt{-\frac{2p}{3} - \frac{q}{b}} \quad , \quad b = \sqrt{-\frac{p}{3}} \quad , \quad \cos(3\theta) = \frac{a}{2b}$$

$$x_1 = \frac{a}{2\cos(\theta)} + b \quad , \quad x_{2,3} = \frac{a}{-\cos(\theta) \pm \sqrt{3}\sin(\theta)} + b$$

15.حل معادله درجه سه $X^3 + pX - q = 0$ به روش هندسی خیام با شرط $p\rangle 0$

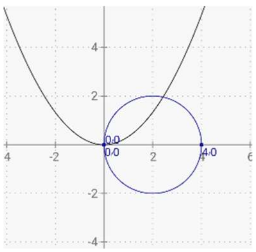
$$x^3 + px = q \quad \Rightarrow \quad x^4 + px^2 = qx \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{p} + x^2 - \frac{q}{p}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{p} + x\left(x - \frac{q}{p}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{x^4}{p} \quad \text{سهمی}: y = \frac{1}{\sqrt{p}}x^2 \quad , \quad \text{دایره}: y^2 + x\left(x - \frac{q}{p}\right) = 0$$

طول نقاط تقاطع سهمی و دایره به جز $x = 0$ ریشه های معادله هستند.

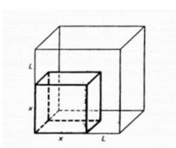
مثال:معادله $x^3 + 9x = 36$ را حل کنید.

$$\text{سهمی}: y = \frac{x^2}{3} \quad , \quad \text{دایره}: y^2 + x\left(x - \frac{36}{9}\right) = 0$$



16. حل معادله درجه سه $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ با روش هندسی داردی:

$$\div A \quad \Rightarrow \quad x^3 + bx^2 + cx = n \quad \textbf{(1)}$$



مکعبی به ضلع $(x + L)$ را در نظر میگیریم:

این مکعب را می توان به 8 قسمت تقسیم کرد: یک مکعب x^3 و سه بلوک x^2L و سه بلوک xL^2 و یک مکعب L^3

حال اگر فرض کنیم : 1. L^3=جمله افزوده ، 2. $3L^2 = c$ تعداد شیء ها ، 3. $3L = b$ تعداد مربع ها

با تقسیم 2 بر 3 خواهیم داشت : $L = \frac{c}{b}$

حال با توجه به معادله **(1)** و رابطه بالا داریم:

$$x^3 + bx^2 + cx + L^3 = x^3 + 3Lx^2 + 3L^2x + L^3 = (x + L)^3 = n + L^3$$

$$(x + L)^3 = n + L^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{n + L^3} - L = \sqrt[3]{n + \left(\frac{c}{b}\right)^3} - \frac{c}{b}$$

با توجه به راه حل هندسی این جواب فقط در صورتی صحیح است که $b, c\rangle 0$

17.روش جمشید کاشانی برای تعیین تقریبی ریشه معادله درجه 3 $ax^3-bx+c=0, \mathrm{a}\rangle 0$ با شرط $4b^3+27ac^2\langle 0$ که در آنالیز جدید از شکل کلی آن به عنوان "تعیین نقطه ثابت x_0 در تابع پیوسته و محدود f" تعبیر می شود.

قضیه 1: هرگاه تابع $f\left(x\right)$ تابعی عددی و پیوسته در بازه بسته $I\subset\mathbb{R}$ باشد و داشته باشیم $f\left(I\right)\subseteq I$ معادله $f\left(x\right)=x$ حداقل دارای یک ریشه در I می باشد.

قضیه 2 : قضیه نقطه ثابت: اگر f تابعی پیوسته در بازه بسته $I=\left[a,b\right]$ باشد به طوری که مشتق آن یعنی $f'(x)$ در نامساوی $\left|f'(x)\right|\le M\le 1$ صدق کند نقطه x_0 در بازه I وجود دارد به طوری که تمام مقادیر $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ در این نقطه ثابت x_0 همگرا می شوند و به ازای $n\rangle 1$ خواهیم داشت: $\left|x_n-x_0\right|\le M^n\left|x_1-x_0\right|, 0\langle M\langle 1$

حال اگر تابعی داشته باشیم که در شرایط قضیه 2 صدق کند برای تعیین نقطه ثابت x_0 الگوریتم زیر را در پیش میگیریم:

1. x_1 را مقدار دلخواهی در فاصله I اختیار میکنیم.

2. با استفاده از $x_n=f\left(x_{n-1}\right)$ وبه کمک استقرا رشته ی $\{x_n\}$ از عناصر I را برای $n\rangle 1$ تعیین میکنیم.

3.نشان می دهیم که رشته ی $\{x_n\}$ درنقطه ثابت x_0 همگرا می شود.حال اگر $f\left(x\right)$ تابعی صعودی ومحدب یا مقعرباشد، در این صورت هرگاه $x_1\rangle x_0$ باشد رشته ی $\{x_n\}$ نزولی است، درحالی که اگر $x_1\langle x_0$ باشد صعودی است.

حال برای معادله درجه 3 داریم:

$$ax^3-bx+c=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}x^3$$

طرف راست معادله را $f\left(x\right)=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}x^3$ فرض میکنیم اگر $f\left(x\right)$ در شرایط قضیه 2 صدق کند بنابراین $f\left(x\right)=x$ دارای یک و فقط یک ریشه خواهد بود.

برای تعیین این ریشه به صورت زیر عمل میکنیم:

$$x_1=\frac{c}{b} \quad\Rightarrow\quad x_2=f\left(x_1\right)=\frac{c}{b}+\frac{ac^3}{b^4} \quad,\quad x_3=f\left(x_2\right)=\frac{c}{b}+\frac{ac^3}{b^4}+\frac{3a^2c^5}{b} \quad ,...$$

هرگاه به همین نحو مقادیر دیگر x_n را تعیین کنیم بیش از پیش به ریشه منحصر به فرد x_0 معادله نزدیک خواهیم شد.

18. با استفاده از قضیه بولتزانو می توان حدود ریشه های حقیقی معادله را تعیین کرد.

قضیه بولتزانو: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\cdot f(b)<0$ آنگاه حداقل یک $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f(c)=0$ یعنی $x=c$ ریشه تابع است.

$x^3-3x-1=0$

$f(x)=x^3-3x-1$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	1	1	-3	1

$f(0)f(-1)<0 \quad \Rightarrow$ طبق قضیه بولتزانو معادله $f(x)=0$ حداقل 1 ریشه در بازه $(-1,0)$ دارد.

$f(-1)f(-2)<0 \quad \Rightarrow$ طبق قضیه بولتزانو معادله $f(x)=0$ حداقل 1 ریشه در بازه $(-2,-1)$ دارد.

$f(1)f(2)<0 \quad \Rightarrow$ طبق قضیه بولتزانو معادله $f(x)=0$ حداقل 1 ریشه در بازه $(1,2)$ دارد.

19.روش نصف کردن برای تقریب ریشه معادله $f(x)=0$

با فرض اینکه ریشه حقیقی معادله $f(x)=0$ در بازه $[a_1,b_1]$ قرار دارد و پیوسته بودن تابع $f(x)$ در این بازه داریم:

وسط این بازه را $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ در نظر میگیریم اگر $f(c_1)=0$ که $x=c_1$ ریشه معادله است در غیر این صورت یا $f(a_1)\cdot f(c_1)<0$ یا $f(c_1)\cdot f(b_1)<0$ در حالت اول ریشه در بازه (a_1,c_1) و در حالت دوم ریشه در بازه (c_1,b_1) قرار دارد.بازه ای که ریشه در آن قرار دارد را (a_2,b_2) می نامیم به همان ترتیب قبل نقطه $c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$ را در نظر میگیریم و این روش را تکرار میکنیم و n را بزرگ میکنیم تا طول بازه $[a_n,b_n]$ از هر مقدار که بخواهیم کوچکتر بشود و مقدار تقریبی ریشه دقیق تر شود. در این صورت هر عددی در این بازه میتواند ریشه تقریبی با خطای کمتر از مقدار دلخواه $\frac{b-a}{2^n}$ تلقی شود.

20. روش نیوتون برای تقریب ریشه معادله $f(x)=0$

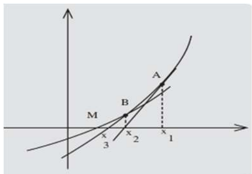
برای پیدا کردن ریشه معادله ، x_1 را ریشه تقریبی معادله $f(x)=0$ فرض میکنیم.سپس خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ را درنقطه $(x_1,f(x_1))$ رارسم می کنیم.معادله این خط عبارت است از $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

و اگر $f'(x_1)\neq 0$ باشد محل تلاقی این خط با محور x ها

$y=0 \quad \Rightarrow \quad -f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ است

این عمل را برای نقطه $\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ مجدداً تکرار میکنیم و محل تلاقی خط مماس با محور x ها x_3 می نامیم.اگر این روش را مجدداً تکرار کنیم در نهایت دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه بازگشتی $n=1,2,3,\ldots$ $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$

به ریشه تابع همگراست.



*اگر x_1 نقطه اکسترمم باشد امکان ادامه روش نیوتون وجود ندارد چون $f'\left(x_1\right)=0$ و $\{x_n\}$ به ریشه همگرا نیست.

*دراین روش معمولاًفرض میشود که تابع f در یک بازه شامل ریشه،پیوسته ومشتق آن(f')درآن بازه مخالف صفر است.

مثال: ریشه تقریبی معادله $x^3-x^2+1=0$ را بدست بیاورید. $x_1=0$ $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3-x_n^2+1}{3x_n^2-2x_n},$

n	x_n	$f\left(x_n\right)$	$f'\left(x_n\right)$
1	0	1	1
2	-1	-1	5
3	-0.8	-0.152	3.52
4	-0.756		

*روش های دیگری نیز برای تقریب ریشه معادله $f\left(x\right)=0$ وجود دارند که برای یادگیری می توان به کتاب آنالیز عددی مراجعه کرد.

گرد آورنده : مهدی شاه رجبیان

دانشجوی مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی امیرکبیر 96/10/20

ID: @Infiltrator1

****

شعر زیبای حکیم عمر خیام برای به خاطر سپردن عدد π

گر کسی از تو بپرسد ره آموختن پی — پاسخی ده که خردمند تو را آموزد

خرد و دانش و آگاهی دانشمندان — ره سرمنزل مقصود بما آموزد

3 . 1 4 1 5 9 — 2 6 5 3 5

تعداد حروف هر کلمه بیت دوم نشان دهنده یک رقم از عدد π است (کلمه سرمنزل چسبیده است)

3.1415926535