انتگرال خور

نویسنده:

انجینیر صمیم «رنجبر»

انتیگرال (Integral)

طوریکه در فصل مشتق تذکر دادیم تحقیق روی دو مسئله پیدا کردن خط مماس بر منحنی در هر نقطه و محاسبه سطح زیر یک منحنی باعث شد تا دو مفهوم جدید مشتق و انتیگرال در ریاضیات بوجود آید. هر چند حل این مسئله(مسئله انتیگرال) را نمی توان تنها به فرد یا افراد خاصی نسبت داد، بلکه می توان آنرا نتیجه کوشش همه ریاضیدانان در طول تاریخ (تا آن زمان) دانست . اما نتیجه نهایی به نام دو شخص (گوتفرید لایب نیتز و نیوتن) ثبت گردید و بعدها تعریف کامل توسط ریمان آلمانی برای مفهوم انتیگرال ارئه شد.

معمولا مفهوم انتیگرال از دو نقطه نظر مطرح میگردد:

1) انتیگرال بحیث تابعی که مشتق آن معین باشد (انتیگرال غیر معین)

2) انتیگرال بحیث لیمت مجموع عددی (انتیگرال معین)

نکته: واژه انتیگرل در زبان فارسی ابتدا با ترجمه « حساب جامعه » وارد شد اما بعد ها برخی این ترجمه را نپذیرفتند و کلمه انتیگرال در زبان فارسی رایج گردید.

تابع اولیه

هرگاه تابع $f(x)$ مشتق تابع $F(x)$ باشد، تابع $\mathrm{F}(x)$ بنام تابع اولیه $f(x)$ گفته می شود و یا به عبارت دیگر تابع $F(x)$ تابع اولیه از $f(x)$ گفته میشود در صورتیکه داشته باشیم :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$
$$dF(x) = f(x)dx$$
$$F'(x) = f(x)$$

مثال: توابع $L(x) = x^2 + C ,..., H(x) = x^2 - \frac{1}{2} \ , G(x) = x^2 + 3 \ , F(x) = x^2$ توابع اولیه از $f(x) = 2x$ است زیرا :

$$F(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 2x = f(x)$$
$$G(x) = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad G'(x) = 2x = f(x)$$
$$H(x) = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \quad H'(x) = 2x = f(x)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$L(x) = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad L'(x) = 2x = f(x)$$

از حل نمونه های فوق به این نتیجه می رسیم که یک تابع می تواند بی نهایت (بی شمار) تابع اولیه داشته باشد به طوریکه تفاوت آن فقط در یک عدد ثابت C است.

نکته: تحت شرایط خاص، مقدار ثابت C را می توان مشخص کرد به طور مثال تابعی را پیدا می نماییم که مشتق آن برابر $f(x) = 2x$ بوده و گراف این تابع از نقطه $(1,6)$ بگذرد.

$$f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + c$$
$$F(1) = 6 \quad \Rightarrow F(1) = (1)^2 + c = 6 \Rightarrow 1 + c = 6 \Rightarrow c = 6 - 1 = 5$$

پس داریم که :

$$f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + c \Rightarrow F(x) = x^2 + 5$$

مفهوم انتیگـــــرال

به لمیت مجموعه ریمان انتیگرال گفته می شود.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(xi)\Delta x = \int F(x)\cdot dx$$

انتیگرال غیرمعین (نا معین)

هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ تعریف و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، ست توابع $F(x)+c$ را در حالیکه C یک عدد ثابت اختیاری است به نام انتیگرل غیر معین از $f(x)$ گفته میشود و می نویسند :

نماد $\int$ علامت انتیگرال (این نماد توسط لایب نیتز در سال 1675م بکار رفت و عبارت از S کشیده در امتداد قایم می باشد که از واژه Sum به معنی مجموع گرفته شده است و یا به عقیده بعضی شاید این علامت تغییر یافته حرف یونانی ς (سیگما) باشد.)، $f(x)$ تابع تحت انتیگرال (انتیگراند یا انتیگرالده انتیگرال) و x را متغییر انتیگرال گویند و dx به این معنی است که $f(x)$ نظر به متغییر (متحول) x انتیگرال گرفته می شود.

خواص انتیگرال غیر معین (قضایای متعارف)

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع تحت انتیگرال، u تابعی از x و c و k اعداد ثابت باشند ، خواص و قضایای زیر در قسمت انتیگرال بیان می گردد :

خاصیت اول:

$$\int 0\,dx = C$$

مثال:

$$\int 0\,dx = C$$

توجه: این C معلوم نیست چه عدد ثابتی بوده است .

خاصیت دوم:

$$\int k dx = kx + C$$

مثال:

$$\int 5dx = 5x + C$$

خاصیت سوم:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \neq -1$$

مثال1:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$

مثال 2:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C = \frac{1}{6}x^6 + C$$

مثال 3:

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$$

مثال 4:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

مثال 5:

$$\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{3+5}{5}}}{\frac{3+5}{5}} + C = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + C = \frac{5}{8}x \cdot \sqrt[5]{x^3} + C$$

خاصیت چهارم:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

مثال 1:

$$\int 5x^7 dx = 5\int x^7 dx = 5(\frac{x^8}{8} + c) = \frac{5}{8}x^8 + C$$

نکته: چون هر عدد ثابت ضرب عدد ثابت c مساوی به عدد ثابت C است، بنا از این پس نیازی نیست که عدد ثابت را در حالت ضرب با c در نظر بگیریم.

مثال 2:

$$\int \frac{-\sqrt{2}}{x^{10}} dx = -\sqrt{2}\int x^{-10} dx = -\sqrt{2}\,\frac{x^{-9}}{-9} + C = \frac{\sqrt{2}}{9}x^{-9} + C$$

خاصیت پنجم:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال 1:

$$\int (x^2 - 5x + 6)\,dx = \int x^2 dx - \int 5x\,dx + \int 6\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c_1 - \frac{5}{2}x^2 + c_2 + 6x + c_2 + c_3 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$$

و یا به طریقه کوتاه تر:

$$\int \left(x^2 - 5x + 6\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

مثال2:

$$\int (x + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 1)\,dx = ?$$

$$\int (x + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 1)\,dx = \int (x + x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 1)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x}{1} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-1} + x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{x} + x + C$$

نکته: باید به خاطر داشته باشیم که :

$$\int [f(x).g(x)]dx \neq \int f(x)dx.\int g(x)dx$$

$$\int \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

خاصیت ششم:

$$, \qquad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال 1:

$$\int (5x+1)^2\,dx = \frac{1}{5}.\frac{(5x+1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{5}.\frac{(5x+1)^3}{3} + C = \frac{1}{15}.(5x+1)^3 + C$$

مثال 2:

$$\int (-x+7)^4\,dx = \frac{1}{-1}.\frac{(-x+7)^{4+1}}{4+1} + C = -\frac{(-x+7)^5}{5} + C = -\frac{1}{5}.(-x+7)^5 + C$$

خاصیت هفتم: و یا به صورت کل:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال:

$$\int (5x+1)^2 dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x+1 = u \\ 5dx = du \\ dx = \frac{1}{5} du \end{array}\right\} \quad \int (5x+1)^2 dx = \int u^2 \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5}\int u^2 du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{15}u^3 + C = \frac{1}{15}(5x+1)^3 + C$$

خاصیت هشتم:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

مثال 1:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\int \frac{1}{x} dx = 2\ln|x| + C$$

مثال 2:

$$\int \sqrt{3}x^{-1} dx = \sqrt{3}\int \frac{1}{x} dx = \sqrt{3}\ln|x| + C$$

خاصیت نهم:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

مثال 1:

$$\int \frac{dx}{3x-2} = 3\ln|3x-2| + C$$

مثال 2:

$$\int \frac{5dx}{x+1} = 5\int \frac{1}{x+1} dx = 5\ln|x+1| + C$$

خاصیت دهم:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

مثال 1:

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

مثال 2:

$$\int -2.5^x dx = -2\int 5^x dx = -2\frac{5^x}{\ln 5} + C = -\frac{2}{\ln 5}.5^x + C$$

خاصیت یازدهم: و یا به صورت کلی

$$\int a^{nx} dx = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{nx}}{\ln a} + C$$

مثال 1:

$$\int a^{2x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^{2x}}{\ln a} + C$$

مثال 2:

$$\int 7^{\sqrt{2}x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7^{\sqrt{2}x}}{\ln 7} + C$$

خاصیت دوازدهم:

$$\int e^x dx = \frac{e^x}{\ln e} + C = \frac{e^x}{1} + C = e^x + C$$

مثال :

$$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + C$$

خاصیت سیزدهم: و یا به صورت کل :

$$\int e^{nx} dx = \frac{1}{n}e^{nx} + C$$

مثال:

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

خاصیت چهاردهم:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

مثال:

$$\int 2\sin x dx = 2\int \sin x dx = 2(-\cos x) + C = -2\cos x + C$$

خاصیت پانزدهم: و یا به صورت کل

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

مثال 1:

$$\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

مثال 2:

$$\int 2\sin(-3x)dx = \int -2\sin 3x\, dx = -2\int \sin 3x\, dx = -2(-\frac{1}{3}\cos 3x) + C = \frac{2}{3}\cos 3x + C$$

خاصیت شانزدهم:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

مثال:

$$\int \frac{2}{3}\cos x dx = \frac{2}{3}\int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin x + C$$

خاصیت هفدهم: و یا به صورت کل :

$$\int \cos a\, x dx = \frac{1}{a}\sin a\, x + C$$

مثال:

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

خاصیت هجدهم:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\ dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + C$$

مثال:

$$\int \frac{5dx}{\cos^2 x} = 5\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 5\tan x + C$$

خاصیت نزدهم:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + C$$

مثال:

$$\int -3\csc^2 x dx = -3\int \csc^2 x dx = -3(-\cot x) + C = 3\cot x + C$$

خاصیت بیستم:

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

مثال:

$$\int \frac{1}{2}\tan x dx = \frac{1}{2}\int \tan x dx = \frac{1}{2}\left(-\ln|\cos x|\right) + C = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + C$$

خاصیت بیست و یکم: و یا به صورت کل

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos a x| + C$$

مثال 1:

$$\int \tan 10x dx = -\frac{1}{10}\ln|\cos 10x| + C$$

مثال 2:

$$\int \tan \frac{1}{2}x dx = -\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln\left|\cos\frac{1}{2}x\right| + C = -2\ln\left|\cos\frac{1}{2}x\right| + C$$

خاصیت بیست و دوم:

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

مثال:

$$\int 6\cot x dx = 6\int \cot x dx = 6\ln|\sin x| + C$$

خاصیت بیست و سوم: و یا به صورت کل

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$$

مثال:

$$\int \cot 5x dx = \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$$

استاد صمیم رنجبر

خاصیت بیست و چهارم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C = -arc\cos x + C$$

مثال:

$$\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{4(1-x^2)}}dx = \int \frac{3}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{2}arc\sin x + C \Rightarrow -\frac{3}{2}arc\cos x + C$$

خاصیت بیست و پنجم: و یا به صورت کل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C = -\arccos\frac{x}{3} + C$$

خاصیت بیست و ششم:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\tan x + C = -arc\cot x + C$$

مثال:

$$\int \frac{5dx}{2+2x^2} = \int \frac{5dx}{2(1+x^2)} = \int \frac{5}{2}\cdot\frac{dx}{(1+x^2)} = \frac{5}{2}.\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{5}{2}arc\tan x + C = -\frac{5}{2}arc\cot x + C$$

خاصیت بیست و هفتم: و یا به صورت کل

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arc\tan\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}arc\cot\frac{x}{a} + C$$

مثال 1:

$$\int \frac{dx}{16+x^2} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4}arc\tan\frac{x}{4} + C = -\frac{1}{4}arc\cot\frac{x}{4} + C$$

مثال 2:

$$\int \frac{dx}{2+x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}arc\cot\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

خاصیت بیست و هشتم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(x^2+1)}} = \int \frac{dx}{3.\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

خاصیت بیست و نهم:

و یا به صورت کل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C = \operatorname{arc}\sin\mathrm{h}\frac{x}{a} + C$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right| + C = \operatorname{arcsin}\mathrm{h}\frac{x}{5} + C$$

خاصیت سی ام:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \operatorname{arc}\cos\mathrm{h}\frac{x}{a} + C$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right| + C = \operatorname{arc}\cos\mathrm{h}\frac{x}{5} + C$$

خاصیت سی و یکم:

$-1 < x < +1$

با شرط

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \operatorname{arc}\tan hx + C$$

مثال:

$$\int \frac{6dx}{1-x^2} = 6\int \frac{dx}{1-x^2} = 6.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = 3\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

خاصیت سی و دوم:

و یا به صورت کل

$-5 < x < 5$

به شرط

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}h\frac{x}{a} + c$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{25 - x^2} = \int \frac{dx}{5^2 - x^2} = \frac{1}{2.5}\ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right| + C$$

نکته:

باید به خاطر داشته باشیم که:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

مثال:

$$\frac{d}{dx}\left[\int\left(\sqrt{x}+1\right)dx\right] = \sqrt{x}+1$$

خاصیت سی و سوم:

$$\int \log_a^x dx = x\log_a^{\frac{x}{e}} + C = x(\log_a^x - \log_a^e) + C$$

مثال:

$$\int -\log^{x^2} dx = \int -2\log^x dx = -2\int \log^x dx = -2x\log^{\frac{x}{e}} + C$$

خاصیت سی و چهارم:

$$\int \ln x dx = x\log_e^{\frac{x}{e}} + C = x(\log_e^x - \log_e^e) + C = x\ln x - x + c$$

مثال:

$$\int (x + \ln x)dx = \int xdx + \int \ln xdx = \frac{1}{2}x^2 + x\ln x - x + C = x(\frac{1}{2}x + \ln x - 1) + C$$

روش های انتیگرال گیری

می دانیم که منظور از محاسبه انتیگرال نامعین، پیدا کردن تابعی است که مشتق آن یعنی $f(x)$ معلوم است. از نظر محاسبه، انتگرال ها را به سه دسته تقسیم می کنیم:

دسته اول: که موسوم به صور شناخته شده و یا متعارف است، انتیگرال های است که با استفاده از فارمول های مشتق به راحتی می توان تابع اولیه آنها را به دست آورد که اهم این فارمول ها را قبلاً بیان نمودیم .

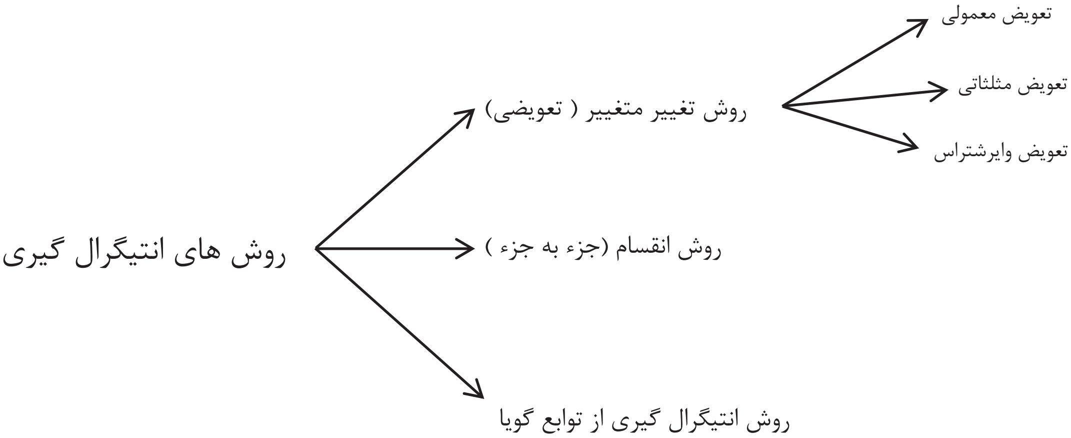
دسته دوم: انتیگرال هایی اند که جزء صور متعارف نبوده ولی با انجام روش هایی به شکل متعارف قابل تبدیل اند که این دسته را انتیگرال های قابل تبدیل به صور متعارف می نامیم. یکی از جمله مهم ترین این روش ها روش تغییر متغیر (روش تعویضی) می باشد . این روش خود نیز حاوی روش های متعددی مثل (تعویضی معمولی، تعویضی مثلثاتی و تعویض وایرشتراس) است .

یکی دیگر از این روش ها روش قسمی (جزء به جزء) و روش دیگر، محاسبه انیگرال های توابع گویا به کمک تجزیه کسرها (تجزیه به کسور قسمی یک کسر) می باشد. البته لازم به ذکر است که روش های خاصی برای محاسبه بعضی از انتیگرال های مثلثاتی نیز تعریف می گردد . یعنی با انجام این روش ها، ابتدا کوشش می نماییم تا انتیگرال داده شده را به شکل متعارف آن تبدیل و بعداً آنرا محاسبه نماییم.

دسته سوم: انتیگرال های غیر قابل تبدیل به صور متعارف نام دارند که برای محاسبه این دسته، از روش های تقریبی استفاده میشود، مانند روش ذوزنقه، روش سیمپسون، استفاده از سری ها (مجموعه ها) و ...

نکته: دسته اول تقسیم بندی محاسبه انتیگرال ها را که قبلاً مطالعه نمودیم، پس در این جا ابتدا دسته دوم را مطالعه نموده و در اخیر (بعد از مطالعه انتیگرال های معین) اشاره ای کوتاه به دسته سوم می نماییم.

روش های یاد شده برای دسته دوم با توجه به اهمیت و ارتباطی که با یکدیگر دارند به ترتیب زیر بیان می گردد:



1) انتیگرال گیری توسط تعویض (تغییر متغیر)

این روش بر اساس قانون مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری) قرار زیر تعریف میگردد:

هرگاه تابع $y=f(u)$ متمادی و تابع $u=g(x)$ مشتق پذیر باشد آنگاه :

$$\int f(g(x)).g'(x)dx=\int f(u)du$$

تذکر: بعد از تعویض و محاسبه انتیگرال، تابع اصلی بجای متحول تعویض شده ارجاع میگردد.

مثال اول:

$$\int (5x+1)^2 dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x+1=u \\ (5x+1)'=(u)' \\ 5dx=du \\ dx=\frac{1}{5}du \end{array}\right\} \int (5x+1)^2 dx = \int u^2.\frac{1}{5}du = \int \frac{1}{5}u^2 du = \frac{1}{5}\int u^2 du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{2+1}}{2+1}+C = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^3}{3}+C$$

$$= \frac{1}{15}u^3 + C = \frac{1}{15}(5x+1)^3 + C$$

مثال دوم:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = ?$$

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int \sqrt{x^3+1}\cdot x^2 dx = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du = \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C = \frac{2}{9}(x^3+1).\sqrt{(x^3+1)}+C$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3+1=u \\ 3x^2dx=du \\ x^2dx=\frac{1}{3}du \end{array}\right\}$$

مثال سوم:

$$\int x.\sqrt{x-1}dx = ?$$

$$\int x\cdot\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1).\sqrt{u}du = \int (u+1)u^{\frac{1}{2}}du = \int (u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x-1)^3}+C$$

$$= \frac{2}{5}(x-1)^2\cdot\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-1)\cdot\sqrt{x-1}+C$$

$$\left.\begin{array}{l} x-1=u \\ x=u+1 \\ 1dx=du \end{array}\right\}$$

مثال چهارم:

$$\int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \, dx = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= u \\ -\sin x dx &= du \\ \sin x . dx &= -du \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \, dx = \int \sqrt{u}\,(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\cos^3 x} + C$$

مثال پنجم:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = ?$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{8}}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{\frac{-1}{2}} du = -\frac{1}{8} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

$$\left.\begin{aligned} 1-4x^2 &= u \\ -8x dx &= du \\ x.dx &= -\frac{1}{8} du \end{aligned}\right\}$$

مثال ششم :

$$\int x^3 . \cos(x^4+2) dx = ?$$

$$\left.\begin{aligned} x^4+2 &= u \\ 4x^3 dx &= du \\ x^3 dx &= \frac{1}{4} du \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\int x^3 . \cos(x^4+2) dx = \int \cos(x^4+2) . x^3 dx = \int \cos u . \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin(x^4+2) + C \end{aligned}$$

مثال هفتم :

$$\int \sin^2 x . \cos x \, dx = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= u \\ \cos x dx &= du \end{aligned}\right\} \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

مثال هشتم :

$$\int e^x \cos e^x dx = ?$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= u \\ e^x dx &= du \end{aligned}\right\} \int e^x \cos e^x dx = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin e^x + C$$

استاد صمیم رنجبر

مثال نهم:

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=u \\ x=u-1 \\ dx=du \end{array}\right\} \int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{(u-1)^2}{u}du = \int \frac{u^2-2u+1}{u}du = \int (u-2+\frac{1}{u})du = \frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2(x+1) + \ln|x+1| + C = \frac{1}{2}(x^2+2x+1) - 2x - 2 + \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 2x - 2 + \ln|x+1| + C = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} + \ln|x+1| + C$$

مثال دهم:

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x\, dx = du \end{array}\right\} \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\cos x\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u + C$$

$$= arc\tan(\sin x) + C = \tan^{-1}(\sin x) + C$$

2– انتیگرال های قسمی (انتیگرال گیری به روش جزء به جزء)

این روش از مشتق گرفتن حاصل ضرب دو تابع ناشی می شود.

فرض می کنیم u و v دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند، در این صورت دیفرانسیل حاصل ضرب این دو تابع به صورت زیر است :

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

از طرفین رابطه انتیگرال می گیریم :

$$\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

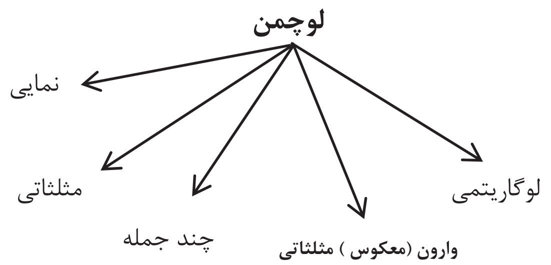
$$u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du \Rightarrow \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

این رابطه را فارمول انتیگرال گیری به روش جزء به جزء (انقسام) می نامند. استفاده از این روش زمانی موفقیت آمیز است که u و dv مناسب اختیار شود .

نکته 1 : اگر تابع تحت انتیگرال به یکی از صورت های زیر باشد، معمولاً حل آن از روش جزء به جزء ساده تر است.

1) تابع لوگاریتمی یا معکوس مثلثاتی
2) حاصل ضرب چند جمله ای (پولینوم) در تابع لوگاریتمی
3) حاصل ضرب چند جمله ای در معکوس مثلثاتی
4) حاصل ضرب چند جمله ای در تابع نمایی
5) حاصل ضرب چند جمله ای در تابع مثلثاتی
6) حاصل ضرب تابع نمایی در تابع مثلثاتی

نکته 2 : طوریکه قبلاً ذکر نمودیم در این روش باید در انتخاب u و dv توجه زیاد صورت گیرد تا محاسبه انتیگرال موفقیت آمیز باشد. پس بهتر است تا در انتخاب u از اولویت بندی زیر استفاده گردد:



متباقی قسمت تابع را dv انتخاب می نماییم .

مثال اول :

$$\int \theta \cos\theta d\theta = ? \qquad \text{یا} \qquad \int x\cdot\cos xdx = ?$$

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu \Rightarrow \int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx \Rightarrow \int x\cdot\cos xdx = x\,\mathrm{sinx} - (-\cos x) + C$$

$$\Rightarrow \int x\cos xdx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\left.\begin{array}{r} x = u \\ dx = du \\ \cos xdx = dv \\ \sin x = v \end{array}\right\}$$

مثال دوم :

$$\int e^x \sin xdx = ?$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin xdx = \sin x\cdot e^x - \int e^x \cos xdx \Rightarrow \int e^x \sin xdx = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos xdx = du \\ e^x dx = dv \\ e^x = v \end{array}\right\}$$

قسمت تحت انتیگرال باقی مانده را دوباره با استفاده از روش جزء به جزء ساده می سازیم:

$$\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$$

$$\left.\begin{array}{r} \cos x = u \\ -\sin xdx = du \\ e^x dx = dv \\ e^x = v \end{array}\right\} \begin{array}{l} \int e^x \sin xdx = e^x \sin x - \left[\cos x\cdot e^x - \int e^x(-\sin x)dx\right] \\ \Rightarrow \int e^x \sin xdx = e^x\cdot\sin x - e^x\cos x - \int e^x\cdot\sin xdx \end{array}$$

اگر دقت شود انتیگرال اخیر همانند اصل سوال داده شده است، پس آنرا به سمت چپ معادله انتقال داده و با مشابه آن جمع می نماییم .

$$\int e^x \sin xdx + \int e^x \sin xdx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow 2\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \sin xdx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

مثال سوم:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = u \\ 2xdx = du \\ e^x dx = dv \\ e^x = v \end{array}\right\} \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2xdx \Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx$$

برای محاسبه $\int x \cdot e^x dx$ باید دوباره از روش جزء به جزء استفاده شود.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ dx = du \\ e^x dx = dv \\ e^x = v \end{array}\right\} \begin{array}{l} \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\left[x \cdot e^x - \int e^x du\right] \Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x du \\ \Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C \Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C \end{array}$$

مثال چهارم:

$$\int \arcsin xdx = ?$$

$$\int \arcsin xdx = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \int \arcsin xdx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin x = u \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du \\ dx = dv \\ x = v \end{array}\right\}$$

برای محاسبه $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ از روش تعویضی استفاده می نماییم.

$$\int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x - \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du \Rightarrow \int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\Rightarrow \int\int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow \int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\Rightarrow \int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x + \sqrt{(1-x^2)} + C$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-x^2 = u \\ -2xdx = du \\ x\cdot dx = -\frac{1}{2}du \end{array}\right\}$$

مثال پنجم :

$$\int x^2\cdot\ln x dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \\ x^2\cdot dx = dv \\ \frac{1}{3}x^3 = v \end{array}\right\} \begin{array}{l} \int x^2\cdot\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int x^2\cdot\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ \Rightarrow \int x^2\cdot\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow \int x^2\cdot\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \end{array}$$

مثال ششم:

$$\int \tan^{-1}x\cdot dx = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \arctan x = u \\ \frac{1}{1+x^2}dx = du \\ dx = dv \\ x = v \end{array}\right\} \int \tan^{-1}x\cdot dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \int \tan^{-1}x\cdot dx = x\cdot\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}dx$$

این قسمت انتیگرال را از روش تعویضی استفاده می نماییم:

$$\left.\begin{array}{l} 1+x^2=u \\ 2x\,dx=du \\ x\,dx=\dfrac{1}{2}du \end{array}\right\} \Rightarrow \int \tan^{-1}x\cdot dx = x\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}du \Rightarrow \int\tan^{-1}x\cdot dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln|u|+C$$

$$\Rightarrow \int\tan^{-1}x\cdot dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C \Rightarrow \int\tan^{-1}x\cdot dx = x\cdot\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

مثال هفتم :

$$\int x^5\cdot\cos(x^3)\cdot dx = ?$$

$$\int x^5\cdot\cos(x^3)\cdot dx = \int x^3\cdot\cos(x^3)\cdot(x^2)dx$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3=u \\ 3x^2dx=du \\ x^2dx=\dfrac{1}{3}du \end{array}\right\} \int x^3\cdot\cos(x^3)\cdot(x^2)dx = \int u\cos u\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u\cos u\,du$$

حالا از روش جزء به جزء کمک می گیریم: (این انتیگرال را در مثال اول محاسبه نموده بودیم) پس :

$$\int x^3\cdot\cos(x^3)\cdot(x^2)dx = \frac{1}{3}\int u\cos u\,du \Rightarrow \int x^3\cdot\cos(x^3)\cdot(x^2)dx = \frac{1}{3}\left(u\sin u+\cos u\right)+C$$

$$\Rightarrow \int x^5\cdot\cos(x^3)dx = \frac{1}{3}x^3\sin(x^3)+\frac{1}{3}\cos(x^3)+C$$

روش جدول

یک روش نسبتاً ساده برای انتیگرال گیری از روش جزء به جزء در محاسبه $\int f(x)\cdot g(x)dx$ برای حالتی که مشتقات $f(x)$ و انتیگرال های $g(x)$ به ساده گی بدست آید (بخصوص زمانیکه $f(x)$ چند جمله ای باشد)، استفاده از جدول زیر است:

$f(x)$ و مشتقات آن		$g(x)$ و انتیگرال های آن
$f(x)$	$+$	$g(x)$
$f'(x)$	$-$	$\int g(x)dx = h(x)$
$f''(x)$	$+$	$\int h(x)dx = k(x)$
$\vdots$		$\vdots$

این دو ستون را به موازات هم ادامه می دهیم تا جایی که ستون سمت چپ به صفر برسد (زمانیکه $f(x)$ چند جمله ای باشد) و اگر تابع $f(x)$ طوری باشد که مشتقات پی در پی آن منتهی به صفر نشود این عملیات تا یک مرحله مناسب (تا جایی که انتیگرال حاصل ضرب دو تابع سطر آخر به ساده گی قابل محاسبه باشد و یا اینکه حاصل ضرب دو تابع سطر آخر انتیگرال اولیه را تشکیل دهد) ادامه می یابد.

نکته : در انتخاب u یا $f(x)$ از همان اختصار شده « لوچمن » استفاده می نماییم.

مثال اول :

$$\int x\cdot\cos x dx=?$$

$$u=f(x)=x$$

و مشتقات آن x		و انتیگرال های آن $\cos x$
x	$+$	$\cos x$
1	$-$	$\sin x$
0		$-\cos x$

$$\Rightarrow \int x\cdot\cos x dx=x\cdot\sin x+\cos x+C$$

مثال دوم :

$$\int x^2\cdot e^x dx=?$$

$$u=f(x)=x^2$$

و مشتقات آن x^2		و انتیگرال های آن e^x
x^2	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0		e^x

استاد صمیم رنجبر

$$\int x^2\cdot e^x dx = x^2e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x + c = e^x(x^2-2x+2)+c$$

مثال سوم :

$$\int \arcsin x dx = ?$$

$u = f(x) = \text{arcsinx}$

$\arcsin x$ و مشتقات آن		و انتیگرال های آن 1
$\arcsin x$	$+$	1
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-$	x

$$\Rightarrow \int \arcsin x dx = x\cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \arcsin x dx = x\cdot \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{2}du) = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = x\cdot \arcsin x + u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\Rightarrow \int \arcsin x dx = x\cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\left.\begin{aligned} 1-x^2 &= u \\ -2xdx &= du \\ xdx &= -\frac{1}{2}du \end{aligned}\right\}$$

مثال چهارم :

$$\int e^x\cdot \sin x dx = ?$$

$u = f(x) = \sin x$

$\sin x$ و مشتقات آن		و انتیگرال های آن e^x
$\sin x$	$+$	e^x
$\cos x$	$-$	e^x
$-\sin x$	$+$	e^x

$$\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x dx \Rightarrow \int e^x \cdot \sin x dx + \int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

$$2\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x \Rightarrow \int e^x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

نکته 1: از آن جاییکه مشتق تابع $f(x) = e^x \cdot g(x)$ به صورت $f'(x) = e^x \cdot g(x) + e^x \cdot g'(x)$ و یا $f'(x) = e^x\left(g(x) + g'(x)\right)$ است

پس می توانیم داشته باشیم که :

$$\int e^x \left(g(x) + g'(x)\right) dx = e^x \cdot g(x) + C$$

مثال اول :

$$\int e^x (x^5 + 5x^4) dx = ?$$

$$\int e^x (\underset{g(x)}{x^5} + \underset{g'(x)}{5x^4}) dx = e^x x^5 + C = x^5 \cdot e^x + C$$

مثال دوم :

$$\int e^x (\cos x - \sin x) dx = ?$$

$$\int e^x \left(\underset{g(x)}{\cos x} + \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)}\right) dx = e^x \cdot \cos x + C$$

نکته 2 : اگر تابع تحت انتیگرال توان جفت (زوج) sin یا cos باشد از روابط زیر (که به فارمول های خطی کردن یا توان شکن معروف است)

استفاده میگردد:

1) $\sin^2 x = \frac{1 - cox2x}{2}$ یا $\sin^2 u = \frac{1 - cox2u}{2}$

2) $\cos^2 x = \frac{1 + cox2x}{2}$ یا $\cos^2 u = \frac{1 + cox2u}{2}$

مثال اول :

$$\int \sin^2 3x dx = ?$$

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1-\cos 2(3x)}{2} dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{\cos 6x}{2}) dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6} \sin 6x) + C$$

مثال دوم:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = ?$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \int (\frac{1}{2} \sin 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1-\cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4} \sin 4x) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

3– انتیگرال گیری از توابع کسری ناطق (گویا)

اگر تابع تحت انتیگرال یک کسر ناطق کسری بوده و قابل تجزیه به کسور قسمی باشد، ابتدا آن کسر را با استفاده از تجزیه به کسور قسمی به

شکل مجموعه الجبری چند کسر تجزیه نموده به طوریکه انتیگرال گیری از آن ساده باشد، بعداً از هر کسر، بصورت جداگانه انتیگرال می گیریم.

مثال اول :

$$\int \frac{3x+1}{x^2-1} dx = ?$$

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow 3x+1 = (A+B)x + A - B$$

$$A+B=3$$

$$\underline{A-B=1}$$

$$2A=4 \Rightarrow A=2 \quad , \quad B=1$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2-1} dx = \int (\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}) dx = \int (\frac{2}{x-1}) dx + \int (\frac{1}{x+1}) dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C = \ln\left|(x-1)^2(x+1)\right| + C$$

مثال دوم :

$$\int \frac{x-2}{x^2-6x+5}dx=?$$

$$\frac{x-2}{x^2-6x+5}=\frac{x-2}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}$$

$$x-2=Ax-5A+Bx-B \Rightarrow x-2=(A+B)x-5A-B$$

$$\begin{array}{l} A+B=1 \\ \underline{-5A-B=-2} \end{array}$$

$$-4A=-1 \Rightarrow A=\frac{1}{4} \quad , \quad B=\frac{3}{4}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-6x+5}dx=\int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}dx+\int \frac{\frac{3}{4}}{x-5}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-5}dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x-5|+C$$

مثال سوم :

$$\frac{x^6}{x^4+3x+2}=?$$

ابتدا صورت کسر را تقسیم مخرج آن می نماییم :

$$\begin{array}{l|l} x^6 & x^4+3x+2 \\ \underline{+x^6+3x^4+2x^2} & \overline{x^2-3} \\ -3x^4-2x^2 & \\ \underline{-3x^4-9x^2-6} & \\ \quad 7x^2+6 & \end{array}$$

پس :

$$\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}=x^2-3+\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}$$

حالا قسمت کسر غیر واقعی را به کسور قسمی آن تجزیه می نماییم:

$$\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}=\frac{7x^2+6}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$7x^2+6=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$$

$$7x^2+6=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

در نتیجه:

$A=0\ ,\ B=-1\ ,\ C=0\ ,\ D=8$

$$\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}=\frac{8}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx=\int\left[x^2-3+\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}\right]dx=\int\left(x^2-3+\frac{8}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int x^2dx-\int 3dx+\int\frac{8}{x^2+2}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int x^2dx-\int 3dx+8\int\frac{1}{\sqrt{2}^2+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\ \Rightarrow\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{3}x^3-3x+\frac{8}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\arctan x+C$$

نکته 1 : بعضی از توابعی که (کسوریکه) در مخرج شان افاده های مربعی (ax^2+bx+c) و یا این افاده تحت جذر قرار داشته باشد، می توان

آنرا با توجه به بعضی از عملیات و تعویض ها، به گونه ای تبدیل کرد که بتوان از آن با استفاده از فارمول های متعارف (که قبلاً مطالعه شد)

انتیگرال گیری نمود.

مثال اول:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=?$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{x^2+4x+4+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x+2}{3})+C$$

مثال دوم :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}=?$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4+6}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}$$

$$\left.\begin{matrix}x+2=u\\dx=du\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{u^2+6}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+6}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+4+6}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$$

استاد صمیم رنجبر

مثال سوم :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}=?$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9-9+6x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9-(9-6x+x^2)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(3-x)^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-3)^2}}=\arcsin\frac{(x-3)}{3}+C$$

نکته 2: داریم که :

1) $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C$

2) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

مثال اول :

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=?$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{3-2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C=\frac{1}{1}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

مثال دوم :

$$\int \frac{dx}{x^2-4}=?$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4}=\int \frac{dx}{x^2-2^2}=\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

انتیگرال گیری به روش تغییر متغییر مثلثاتی (تعویض های مثلثاتی)

اگر در تابع تحت انتیگرال عبارت هایی (افاده هایی) به شکل $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد $(a>0)$ و دارای فاکتور غیر ناطق

دیگری نباشد در اثر تعویض های مثلثاتی ذیل میتوان انتیگرال آنرا محاسبه نمود:

1) $x=a\sin t$ ، $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\sqrt{a^2\cdot\cos t^2}=a\cos t$$

$$x=a\sin t\Rightarrow dx=a\cos tdt$$

2) $x=a\tan t$ ، $-\frac{\pi}{2}\langle t\langle\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan t)^2}=\sqrt{a^2\left(1+\tan^2 t\right)}=\sqrt{a^2\cdot\sec^2 t}=a\sec t$$

$$x=a\tan t\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$$

3) $x=a\sec t$ ، $0\le t\langle\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\le t\langle\frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(a\sec t)^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(\sec^2 t-1\right)}=\sqrt{a^2\cdot\tan t^2}=a\tan t$$

$$x=a\sec t\Rightarrow dx=a\sec t\cdot\tan t\,dt$$

مثال اول :

$$\int\sqrt{9-x^2}dx=?$$

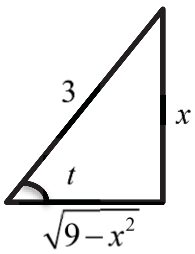
$$\int\sqrt{9-x^2}dx=\int\sqrt{3^2-x^2}dx\Rightarrow x=a\sin t\Rightarrow x=3\sin t\Rightarrow dx=3\cos tdt\Rightarrow t=\arcsin(\frac{x}{3})$$

$$\int\sqrt{9-x^2}dx=\int\sqrt{\left(3^2-3^2\sin^2 t\right)}dx=\int 3\cos tdx=\int(3\cos t)(3\cos tdt)=\int\left(3\cos t^2\right)dt=\int 9\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cdot\cos t)+C=\frac{9}{2}(t+\sin t\cdot\cos t)+C=\frac{9}{2}(\arcsin(\frac{x}{3})+\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3})+C$$

$$=\frac{9}{2}(\arcsin(\frac{x}{3})+\frac{x\cdot\sqrt{9-x^2}}{9})+C=\frac{9}{2}\arcsin(\frac{x}{3})+\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{9-x^2}+C$$

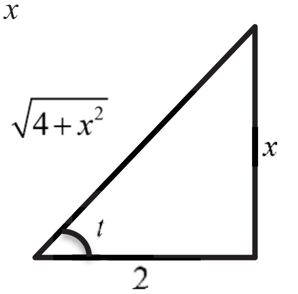
نکته : هر یک از این نوع افاده ها ذریعه ی مثلث قایم الزاویه ارائه گردیده می توانند. به طور نمونه در مثال فوق :



$$\Rightarrow\begin{cases}\sin t=\frac{x}{3}\\ \cos t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\end{cases}$$

مثال دوم :

$$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{4+x^2}}=?$$



$$x = a\tan t \Rightarrow x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2(1+\tan^2 t)dt$$

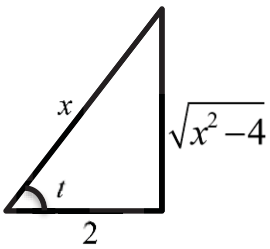
$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+(2\tan t)^2} = \sqrt{4\sec^2 t} = 2\sec t \Rightarrow \int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{4+x^2}} = \int\frac{2(1+\tan^2 t)}{(2\tan t)^2\cdot 2\sec t}dt = \int\frac{2\sec^2 t}{4\tan^2 t\cdot 2\sec t}dt$$

$$= \int\frac{\sec t}{4\cdot\tan^2 t}dt = \frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt = \frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt = \frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin t = u\\ \cos t dt = du\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{4u}+C = -\frac{1}{4\sin t}+C = -\frac{1}{4\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}+C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+$$

مثال سوم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = ?$$



$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sec t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\sec t \Rightarrow dx = 2\sec t\cdot\tan t dt\\ \tan t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\tan t\end{array}\right.$$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{(2\sec t)^2-4} = \sqrt{4(\sec^2 t-1)} = 2\tan x = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int\frac{2\sec t\cdot\tan t\cdot dt}{2\tan t} = \int\sec t dt$$

افاده تحت انتیگرال راهم ضرب و هم تقسیم افاده $(\sec t+\tan t)$ می نماییم .

$$\int\sec t dt = \int\sec t\cdot\frac{\sec t+\tan t}{\sec t+\tan t}dt = \int\frac{\sec^2 t+\sec t\cdot\tan t}{\sec t+\tan t}dt$$

با تعویض $\sec t+\tan t = u \Rightarrow du = (\sec t\cdot\tan t+\sec^2 t)dt$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln|\sec t+\tan t|+C = \ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C$$

نکته 1 : از مثال فوق نتیجه می شود که :

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \sec u du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$$

نکته 2 : به روش مشابه داریم که :

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \csc u du = \ln\left|\csc u + \cot u\right| + C$$

5– انتیگرال گیری از کسرهای گویای مثلثاتی (روش وایرشتراس)

شکل عمومی انتیگرال های که در آن کسرهای گویای مثلثاتی موجود است $\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{dx}$ بوده و راه کلی برای محاسبه این انتیگرال ها استفاده

از فارمول های تانجانت نصف زاویه است به طوریکه با تعویض $\tan\frac{x}{2} = t$ روابط زیر حاصل می گردد :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

پس داریم که :

$$\tan\frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

نکته : این روش به روش وایرشتراس $(1815-1897)$ ریاضی دان آلمانی معروف است .

مثال اول :

$$\int \sec x dx = ?$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2} \cdot \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int (\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}) dt = \int (\frac{1}{1+t}) dt + \int (\frac{1}{1-t}) dt$$

$$= \ln|1+t| + \ln|1-\mathrm{t}| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

مثال دوم:

$$\int \csc x dx = ?$$

$$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan(\frac{x}{2})\right| + C = \ln|\csc x - \cot\mathrm{x}| + C$$

مثال سوم:

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = ?$$

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+5-5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{8+2t^2}{\cancel{1+t^2}}} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{2^2-t^2} = \frac{1}{2(2)} \cdot \ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

انتیگرال گیری از توابع توان طاق $\sin x$ و $\cos x$

می دانیم که اگر تابع تحت انتیگرال از توان های جفت $\sin x$ و $\cos x$ باشد، برای محاسبه آن از فارمول های توان شکن استفاده می نماییم و اما

اگر در تابع تحت انتیگرال حداقل از توان ها طاق باشد قرار زیر عمل می نماییم .

مثال :

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx = ?$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx = \int \sin x \cdot \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x dx = \int \sin x (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x dx$$

$$\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) \cdot \sin x dx$$

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du \Rightarrow \sin x dx = -du$$

$$\int (u^4 - 2u^6 + u^8)(-du) = \int (-u^8 + 2u^6 - u^4) du = -\frac{1}{9}u^9 + \frac{2}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

انتیگرال گیری از توان های جفت $\tan x$ و $\cot x$

برای این منظور روابط زیر تعریف می گردد : $(n = 2k)$

$$1)\ \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \frac{1}{n-3}\tan^{n-3} x + \ldots + (-1)^k x + C$$

$$2)\ \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x + \frac{1}{n-3}\cot^{n-3} x - \ldots + (-1)^k \cot x - (-1)^k x + C$$

مثال اول :

$$\int \tan^6 x dx = ?$$

$$\int \tan^6 x dx = \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{1}\tan x + (-1)^3 x + C = \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C$$

مثال دوم :

$$\int \cot^6 x dx = -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x + (-1)^3 \cot x - (-1)^3 x + C = -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + x + C$$

انتیگرال گیری از توان های طاق $\tan x$ و $\cot x$

اگر $(n = 2k+1)$ باشد، داریم که:

$$1)\ \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \frac{1}{n-3}\tan^{n-3} x + \ldots + (-1)^k \ln|\sec x| + C$$

$$2)\ \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x + \frac{1}{n-3}\cot^{n-3} x - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{1}{2}\cot^2 x + (-1)^k \ln|\sin x| + C$$

مثال :

$$\int \tan^7 x\,dx = ?$$

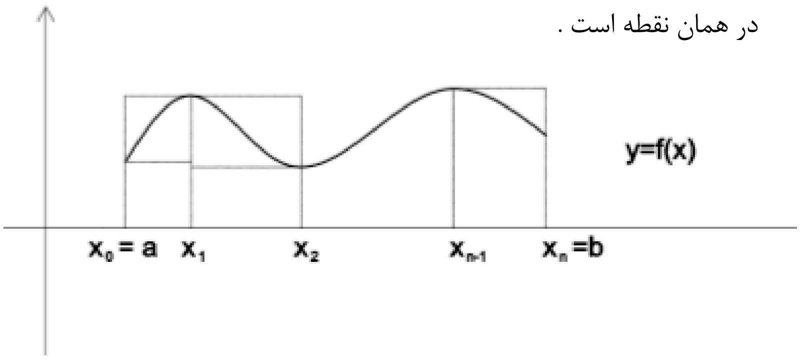
$$\int \tan^7 x dx = \frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + (-1)^3 \ln\left|\sec x\right| + C = \frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln\left|\sec x\right| + C$$

مجموع ریمان

فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ متمادی و تعریف شده است، اگر بخواهیم مساحت ناحیه واقع بین محور x و منحنی تابع

$y = f(x)$ را که قابل تبدیل به اشکال هندسی نیست (مانند شکل زیر) محاسبه کنیم، انتروال بسته $[a,b]$ را به n مستطیل ها تقسیم می

نماییم طوریکه عرض مستطیل ها از رابطه $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ به دست می آید و طول این مستطیل ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه است .



نکته: به هر اندازه که تعداد تقسیمات زیاد گردد و یا به عبارتی n بزرگ گردد $(n \to \infty)$، مساحت تحت گراف دقیق تر به دست می آید؛

طول هر انتروال این مستطیل ها برای $i = 1,2,3,...,n$ قرار زیر است :

$$x_0 = a \;,\; x_1 = a + \Delta x \;,\; x_2 = a + 2\Delta x \;,\; ... \;,\; x_i = a + i\Delta x \;,\; ... \;,\; x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \,,\, [x_1, x_2] \,,\, [x_2, x_3] \,,\, ... \,,\, [x_{i-1}, x_i] \,,\, ... \,,\, [x_{n-1}, x_n]$$

اگر مساحت های مستطیل های تحتانی شکل را به $f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ و مساحت مستطیل های فوقانی شکل را به $f(x_i) \cdot \Delta x$ نشان دهیم داریم که

مجموع مساحت های مستطیل های تحتانی $= f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x$

مجموع مساحت های مستطیل های فوقانی $= f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$

اگر مساحت محصور شده (بین منحنی و محور مختصات) را به A نشان دهیم واضح است که :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

اگر از اطراف لیمت بگیریم، نظر به قضیه ساندویچ داریم که :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = A$$

رابطه $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = A$ را مجموع ریمان و اگر از آن مجموع لیمت بگیریم یعنی $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$ آنگاه آنرا لیمت مجموع ریمان می

نامند.

مثال: با تقسیم نمودن انتروال $[0,3]$ به شش قسمت مساوی، مساحت محصور بین خط $y=3x$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: انتروال داه شده را به شش قسمت مساوی قرار زیر تقسیم مینماییم :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پس داریم که :

$$x_0 = a = 0$$
$$x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + 2(\frac{1}{2}) = 1$$
$$x_3 = a + 3\Delta x = 0 + 3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$
$$x_4 = a + 4\Delta x = 0 + 4(\frac{1}{2}) = 2$$
$$x_5 = a + 5\Delta x = 0 + 5(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$
$$x_6 = a + 6\Delta x = 0 + 6(\frac{1}{2}) = 3$$

بخاطر دریافت طول مستطیل ها، قیمت توابع را دریافت می نماییم :

$$f(x) = 3x \Rightarrow f(0) = 3(0) = 0$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(1) = 3(1) = 3$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = 3(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(2) = 3(2) = 6$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(\frac{5}{2}) = 3(\frac{5}{2}) = \frac{15}{2}$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f(3) = 3(3) = 9$$

مجموع مساحت مستطیل های تحتانی $= 0(\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) + \frac{9}{2}(\frac{1}{2}) + 6(\frac{1}{2}) + \frac{15}{2}(\frac{1}{2})$

مجموع مساحت مستطیل های تحتانی $= 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{6}{2} + \frac{15}{4}$

مجموع مساحت مستطیل های تحتانی $= \frac{3+6+9+12+15}{4} = \frac{45}{4} = 11.25$

مجموع مساحت مستطیل های فوقانی $= \frac{3}{2}(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) + \frac{9}{2}(\frac{1}{2}) + 6(\frac{1}{2}) + \frac{15}{2}(\frac{1}{2}) + 9(\frac{1}{2})$

مجموع مساحت مستطیل های فوقانی $= \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{6}{2} + \frac{15}{4} + \frac{9}{2}$

مجموع مساحت مستطیل های فوقانی $= \frac{3+6+9+12+15+18}{4} = \frac{63}{4} = 15.75$

پس مساحت محصور بین خط $y = 3x$ و محور x در فاصله $[0,3]$ بین این دو مقدار قرار دارد :

$$11.25 < \mathrm{A} < 15.75$$

انتیگرال معین

لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ وقتی که عدد n به بی نهایت تقرب کند و بزرگترین طول انتروال های فرعی (Δx)

به صفر نزدیک گردد به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ یاد میشود و به شکل ذیل نشان داده میشود:

ویا

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

و

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

این جا a را سرحد (کران) پایینی و b را سرحد (کران) بالایی انتیگرال گویند.

نکته: از نگاه هندسی انتیگرال معین عبارت از محاسبه مساحت، بین منحنی گراف و محور مختصات (x و یا y) می باشد. اگر مقدار حاصل

صفر و یا منفی باشد دیگر تعبیر انتیگرال معین، مساحت نمی باشد .

مثال اول: محاسبه نمایید.

$$\int_2^5 7x\cdot dx=?$$

$$\int_2^5 7x\cdot dx=(7\frac{x^2}{2}+C)\Big|_2^5=(\frac{7}{2}x^2+C)\Big|_2^5=(\frac{7}{2}(5)^2+C)-(\frac{7}{2}(2)^2+C)=(\frac{7}{2}\cdot 25+C)-(\frac{7}{2}\cdot 4+C)$$

$$=(\frac{175}{2}+C)-(\frac{28}{2}+C)=\frac{175}{2}+C-\frac{28}{2}-C=\frac{175}{2}-\frac{28}{2}=\frac{175-28}{2}=\frac{147}{2}=73.5$$

نکته: طوریکه از مثال فوق مشاهده میگردد، در محاسبه انتیگرال های معین، مقدار ثابت C حذف میشود بناً از این پس در انتیگرال های معین

مقدار ثابت C را نمی نویسیم.

قضیه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه بر این فاصله انتیگرال پذیر خواهد بود.

نکته: ما دراین جا فقط با توابع پیوسته کار خواهیم کرد.

مثال دوم:

$$\int_{-2}^{3} 3x\,dx = ?$$

$$\int_{-2}^{3} 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_{-2}^{3} = (\frac{3}{2}(3)^2) - (\frac{3}{2}(-2)^2) = \frac{27}{2} - \frac{12}{2} = \frac{27-12}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

خواص انتیگرال معین

خاصیت اول : اگر C یک عدد ثابت باشد، آنگاه:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

مثال:

$$\int_7^{22} 12\,dx = ?$$

$$\int_7^{22} 12\,dx = 12(22-7) = 12(15) = 180$$

خاصیت دوم :

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

مثال:

$$\int_0^1 \sqrt{2}x^5 dx = ?$$

$$\int_0^1 \sqrt{2}x^5 dx = \sqrt{2}\int_0^1 x^5 dx = \sqrt{2}(\frac{1}{6}x^6)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}x^6\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}(1)^6 - \frac{\sqrt{2}}{6}(0)^6 = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

خاصیت سوم:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

مثال:

$$\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx = ?$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx = \int_{-1}^{1}x^3dx + \int_{-1}^{1}2dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} + 2x\Big|_{-1}^{1} = (\frac{1}{4}(1)^4-\frac{1}{4}(-1)^4)+(2(1)-2(-1)) = (\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+(2+2)=4$$

خاصیت چهارم:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال:

$$\int_{2}^{-1}(x^2-5x+6)dx = ?$$

$$\int_{2}^{-1}(x^2-5x+6)dx = -\int_{-1}^{2}(x^2-5x+6)dx = -(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x)\Big|_{-1}^{2} = -\left[\left(\frac{1}{3}(2)^3-\frac{5}{2}(2)^2+6(2)\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{5}{2}(-1)^2+6(-1)\right)\right]$$

$$= -\left[(\frac{8}{3}-\frac{20}{2}+12)-(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-6)\right] = -\left[\left(\frac{16-60+72}{6}\right)-\left(\frac{-2-15-36}{6}\right)\right] = -\left[(\frac{28}{6})-(\frac{-53}{6})\right] = -\left[\frac{28}{6}+\frac{53}{6}\right] = -\left[\frac{28+53}{6}\right]$$

$$= -\frac{81}{6} = -\frac{27}{2} = -13.5$$

خاصیت پنجم:

$$C\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) = \int_a^c f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)dx$$

نکته: این رابطه در برابر هر قیمت C حتی اگر متعلق به $[a,b]$ نباشد نیز بر قرار است.

مثال: قیمت انتیگرال $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ را در انتروال $[-1,4]$ دریابد اگر $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5$ و $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ باشد.

حل: نظر به خاصیت فوق می توانیم بنویسیم که :

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^{4} f(x)dx = 5 + (-2) = 5 - 2 = 3$$

خاصیت ششم:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

مثال اول:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = ?$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 0$$

مثال دوم :

$$\int_{2}^{2} 3x^2(e^x - e^{-x} + \sqrt{x})dx = ?$$

$$\int_{2}^{2} 3x^2(e^x - e^{-x} + \sqrt{x})dx = 0$$

خاصیت هفتم:

$$\left(\forall \times \in [a,b] : f(x) \geq 0\right) \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$$

مثال: میدانیم که تابع $f(x) = x^2$ در انتروال $[-2,5]$ دارای اشاره مثبت است، پس بنا بر خاصیت گفته شده حتماً حاصل انتیگرال معین آن

نیز یک مقدار مثبت است.

$$\int_{-2}^{5} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{5} = \frac{1}{3}(5)^3 - \frac{1}{3}(-2)^3 = \frac{125}{3} + \frac{8}{3} = \frac{125+8}{3} = \frac{133}{3} \approx 44.3$$

خاصیت هشتم:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$$

مثال اول:

میدانیم که برای توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2+1$ در انتروال $[0,2]$ رابطه $f(x)<g(x)$ برقرار است پس نظر به خاصیت گفته شده

داریم که:

$$\int_0^2 f(x)\,dx<\int_0^2 g(x)\,dx\Rightarrow$$
$$\int_0^2 x^2dx<\int_0^2\left(x^2+1\right)dx\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2<\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2=\frac{1}{3}(2)^3-\frac{1}{3}(0)^3<\left(\frac{1}{3}(2)^3+(2)^3\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3+0\right)$$
$$\Rightarrow\frac{8}{3}-0<\frac{8}{3}+2-0\Rightarrow\frac{8}{3}\langle 2\frac{8}{3}=\frac{8}{3}<\frac{14}{3}$$

مثال دوم: اگر $f(x)=1-\dfrac{x^2}{4}$ و $g(x)=1+\dfrac{x^2}{2}$ باشد، برای $x>1$ حاصل $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)dx$ را دریابید.

حل: چون $1-\dfrac{x^2}{4}<1+\dfrac{x^2}{2}$ است پس حتماً رابطه $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)dx$ نیز برقرار است که آنرا در زیر عملاً محاسبه مینماییم.

$$\int_a^b\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx\le\int_a^b\left(1+\frac{x^2}{2}\right)dx\Rightarrow\left(x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_a^b<\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_a^b\Rightarrow\left(x-\frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_a^b<\left(x+\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_a^b$$
$$\Rightarrow\left(b-\frac{1}{12}b^3\right)-\left(a-\frac{1}{12}a^3\right)<\left(b+\frac{1}{6}b^3\right)-\left(a+\frac{1}{6}a^3\right)\Rightarrow b-\frac{1}{12}b^3-a+\frac{1}{12}a^3<b+\frac{1}{6}b^3-a-\frac{1}{6}a^3\Rightarrow-\frac{1}{12}\left(b^3-a^3\right)<\frac{1}{6}\left(b^3-a^3\right)$$

میدانیم که $b-a\rangle 0$ بوده و از طرفی $b^3-a^3\rangle 0$ است بناءً :

$$\Rightarrow\frac{-\frac{1}{12}\cancel{\left(b^3-a^3\right)}}{\cancel{\left(b^3-a^3\right)}}<\frac{\frac{1}{6}\cancel{\left(b^3-a^3\right)}}{\left(b^3-a^3\right)}\Rightarrow-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\Rightarrow-1<2$$

خاصیت نهم:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$$

مثال: نشان دهید که :

$$\left|\int_1^3 (2x-10)\,dx\right| \le \int_1^3 |2x-10|\,dx$$

$$\left|\int_1^3 (2x-10)\,dx\right| \le \int_1^3 |2x-10|\,dx \Rightarrow \left|\left[\left(x^2-10x\right)\right]_1^3\right| \le \left[\left|\left(x^2-10x\right)\right|\right]_1^3$$

$$\Rightarrow \left|\left(3^2-10\cdot 3\right)-\left(1^2-10\cdot 1\right)\right| \le \left(\left|3^2-10\cdot 3\right|\right)-\left(\left|1^2-10\cdot 1\right|\right) \Rightarrow \left|(9-30)-(1-10)\right| \le \left(|9-30|\right)-\left(|1-10|\right)$$

$$\Rightarrow |-21+9| \le |-21|-|1-10| \Rightarrow |-12| \le 21-9 \Rightarrow 12=12$$

خاصیت دهم: اگر تابع $f(\mathrm{x})$ در انتروال $[a,b]$ متمادی و m، M به ترتیب قیمت های اصغری مطلق و اعظمی مطلق تابع در این انتروال

باشند، در این صورت:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

نکته: این رابطه را بنام قضیه تخمین انتیگرال یاد مینمایند .

مثال: انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ را طور تخمین محاسبه نمایید .

حل: تابع $f(x)=e^{-x^2}$ در انتروال $[0,1]$ متمادی بوده و برای قیمت های مبدأ و انجام انتروال داریم که :

$$x=0 \Rightarrow f(0)=e^0 \Rightarrow f(0)=1=M$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=e^{-1} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{e} \approx 0.3679=m$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow 0.3679(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1(1-0) \Rightarrow 0.3679 < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1$$

خاصیت یازدهم: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد در این صورت یک عدد حقیقی c طوریکه $a \le c \le b$ باشد، وجود دارد

که :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a) \quad \Rightarrow \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

نکته: این رابطه را بنام قیمت متوسط یاد میکنند.

مثال: تابع $f(x)=x$ را در انتروال $[0,2]$ در نظر گرفته، نظر به قضیه قیمت متوسط قیمت c را محاسبه نمایید.

حل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

$$x=c \Rightarrow f(c)=c$$

$$\int_0^2 x\,dx = c(2-0) \Rightarrow \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = c(2) \Rightarrow 2=2c \Rightarrow c=1$$

خاصیت دوازدهم: اگر تابع $f(x)$ یک تابع طاق باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال اول:

$$\int_{-5}^{5}\left(x^3+x\right)dx = ?$$

حل: تابع طاق است

$$\int_{-5}^{5}\left(x^3+x\right)dx = 0$$

مثال دوم:

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^3+\arctan x}{x^4+x^2}\,dx = ?$$

حل: چون تابع صورت کسر طاق و تابع مخرج کسر جفت و حاصل تقسیم این دو یک تابع طاق است بنأ نظر به خاصیت داده شده داریم که :

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^3+\arctan x}{x^4+x^2}dx=0$$

خاصیت سیزدهم: اگر $f(x)$ یک تابع جفت باشد، آنگاه :

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

مثال: $\int_{-10}^{10}x^2dx=?$

حل: چون تابع تحت انتیگرال جفت است پس داریم که:

$$\int_{-10}^{10}x^2dx=2\int_{0}^{10}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{10}=2\left(\frac{1}{3}\cdot10^3-\frac{1}{3}\cdot0^3\right)=2\left(\frac{1000}{3}\right)=\frac{2000}{3}$$

خاصیت چهاردهم: در حالت خاص داریم که :

$$\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$$

مثال: محاسبه نمایید :

$$\int_{0}^{4}\frac{\ln(x+5)}{\ln(x+5)+\ln(9-x)}dx=?$$

حل :

$$\int_{0}^{4}\frac{\ln(x+5)}{\ln(x+5)+\ln(9-x)}dx=\int_{0}^{4}\frac{\ln(x+5)}{\ln(x+5)+\ln((4-x)+5)}dx=\frac{4}{2}=2$$

قضیه اساسی اول مشتق و انتیگرال (قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتیگرال)

اگر تابع $f(x)$. در انتروال $[a,b]$ متمادی و x در این انتروال شامل باشد، پس داریم که :

$$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt \quad\Rightarrow\quad \forall x\in[a,b]\ ;\ F'(x)=f(x)$$

نکته: به عبارت ساده تر: مشتق انتیگرال برابر است با تابع تحت انتیگرال.

نتیجه: از این قضیه نتایج زیر حاصل می گردد:

1) مشتق انتیگرال های غیر معین برابر با تابع تحت انتیگرال است.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

مثال: اگر $F(x)=\int x\cdot e^x\cdot\sin x dx$ تعریف شده باشد، آنگاه $F'(x)=?$

حل: نظر به نتیجه (1) داریم که :

$$F(x)=\int x\cdot e^x\cdot\sin x dx \Rightarrow F'(x)=x\cdot e^x\cdot\sin x$$

2) در انتیگرال های معین اگر حدود تحتانی و فوقانی انتیگرال اعداد ثابت باشند، آنگاه مشتق آن برابر صفر است.

$$F(x)=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow F(x)=C \Rightarrow F'(x)=0$$

مثال: اگر $F(x)=\int_2^5 x\cdot e^{x^2}dx$ تعریف شده باشد، آنگاه $F'(x)=?$

حل: نظر به نتیجه (2) داریم که :

$$F(x)=\int_2^5 x\cdot e^{x^2}dx \quad \Rightarrow F'(x)=0$$

3) اگر a عدد ثابت و u تابعی مشتق پذیر از x باشد، آنگاه :

$$F(x)=\int_a^u f(t)dt \Rightarrow F'(x)=u'\cdot f(u)$$

مثال اول: اگر $F(t)=\int_0^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}dx$ باشد، آنگاه $F'(t)$ را محاسبه نمایید.

حل: نظر به نتیجه (3) داریم که :

چون :

$$u=\cos t \ , \ f(x)=\frac{1}{4-x^2}$$

پس :

$$F'(t)=u'\cdot f(u)\Rightarrow F'(t)=(\cos t)'\cdot\frac{1}{4-(\cos t)^2}\Rightarrow F'(t)=-\sin t\cdot\frac{1}{4-\cos^2 t}\Rightarrow F'(t)=\frac{-\sin t}{4-\cos^2 t}$$

مثال دوم: اگر $F(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt$ باشد، آنگاه $F'(x)$ را محاسبه نمایید.

$$F'(x)=u'\cdot f(u)=F'(x)=(x)'\cdot\frac{\sin x}{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{\sin x}{x}$$

4) اگر u و v توابعی مشتق پذیر از x باشند، آنگاه :

$$F(x)=\int_v^u f(t)dt\Rightarrow F'(x)=u'\cdot f(u)-v'\cdot f(v)$$

مثال اول: اگر $F(t)=\int_{\sin t}^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}dx$ باشد، آنگاه $F'(t)$ را محاسبه نمایید .

حل : $v=\sin t$ و $u=\cos t$

$$F'(t)=u'\cdot f(u)-v'\cdot f(v)$$

$$\Rightarrow F'(t)=(\cos t)'\cdot\frac{1}{4-\cos^2 t}-(\sin t)'\cdot\frac{1}{4-\sin^2 t}\Rightarrow F'(t)=\frac{-\sin t}{4-\cos^2 t}-\frac{\cos t}{4-\sin^2 t}$$

مثال دوم :

$$F(x)=\int_{\tan x}^{\cot x}\frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow F'(x)=?$$

حل :

$$F'(x)=(\cot x)'.\frac{1}{1+(\cot x)^2}-(\tan x)'\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}=-\csc^2 x\cdot\frac{1}{1+\cot^2 x}-\sec^2 x\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$=-(1+\cot^2 x)\cdot\frac{1}{(1+\cot^2 x)}-(1+\tan^2 x)\cdot\frac{1}{(1+\tan^2 x)}=-1-1=-2$$

قضیه اساسی دوم مشتق و انتیگرال (قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتیگرال)

اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ متمادی باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

نکته: این رابطه بین تابع اولیه F و انتیگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را بیان میکند که بنام رابطه (نیوتن – لایب نیتز) معروف است و این قضیه

بیان میکند که میتوان مقدار $\int_a^b f(x)dx$ را به ساده گی با کم کردن مقادیر $F(x)$ در نقاط ابتدا و انتهای انتروال $[a,b]$ به دست آورد.

توجه: از این رابطه قبلاً به کثرت استفاده نمودیم بنأ در این جا از ذکر مثال خود داری میکنیم.

محاسبه انتیگرال معین با استفاده از روش های تعویضی و انقسام

زمانیکه در محاسبه انتیگرال معین از روش تعویضی استفاده میکنیم باید حدود (سرحد های) انتیگرال را برای متحول (متغییر) جدید محاسبه

نماییم و در چنین حالتی انتیگرال معین را با همان متحول جدید محاسبه کرده و نیازی به برگشت (ارجاع) و کار با متحول اولیه نمی باشد.

مثال: محاسبه نمایید .

$$\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{9 - x^3} dx = ?$$

$$\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx=\int_9^1\sqrt{u}\left(-\frac{1}{3}du\right)=-\frac{1}{3}\int_9^1 u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^1$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\right]=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 27\right]=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}-\frac{18}{1}\right]=-\frac{1}{3}\left[\frac{2-54}{3}\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[-\frac{52}{3}\right]=\frac{52}{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &9-x^3=u\\ &-3x^2dx=du\\ &x^2dx=-\frac{1}{3}du\\ &x=0\Rightarrow u=9-(0)^3=9\\ &x=2\Rightarrow u=9-(2)^3=1\end{aligned}\right\}$$

برای محاسبه انتیگرال های معین به روش قسمی (جزء به جزء) از رابطه زیر استفاده می نماییم .

$$\int_a^b u\,dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

مثال: محاسبه نمایید:

$$\int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x\,dx=?$$

$$\int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sin 3x dx \Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\cdot\sin 3x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\sin 3x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\cdot\sin 3x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\cdot\sin 3x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = \left(\frac{1}{3}\cdot 2\pi\sin 3\cdot(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0\cdot\sin 3(0)\right) + \left(\frac{1}{9}\cos 3(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{9}\cos 3(0)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cos 3x\, dx = \left(\frac{2\pi}{3}\sin 6\pi\right) - (0\cdot\sin 0) + \left(\frac{1}{9}\cos 6\pi\right) - \left(\frac{1}{9}\cos 0\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = \left(\frac{2\pi}{3}\cdot 0\right) - (0) + \left(\frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{9}\right) = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} x\cdot\cos 3x dx = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x &= u \\ dx &= du \\ \cos 3x dx &= dv \\ \frac{1}{3}\sin 3x &= v \end{aligned}\right\}$$

نکته : به صورت عموم میتوان برای محاسبه انتیگرال های معین به روش های مختلف (تعویضی، انقسام، تجزیه کسرها و ...) ابتدا تابع اولیه را به

کمک انتیگرال نامعین به دست آورده، بعداً انتیگرال معین را محاسبه نمود .

مثال: محاسبه نمایید .

$$\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}dx = ?$$

$$\left.\begin{aligned} 9-x^3 &= u \\ -3x^2dx &= du \\ x^2dx &= -\frac{1}{3}du \end{aligned}\right\} \int x^2\cdot\sqrt{9-x^3}dx = \int\sqrt{u}\left(-\frac{1}{3}du\right) = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}\left(9-x^3\right)^{\frac{3}{2}}$$

پس :

$$\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}dx = -\frac{2}{9}\left(9-x^3\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \left[-\frac{2}{9}\left(9-2^3\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[-\frac{2}{9}\left(9-0^3\right)^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{2}{9}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(9)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot 27 = -\frac{2}{9} + \frac{6}{1} = \frac{-2+54}{9} = \frac{52}{9}$$

تطبیقات انتیگرال (کاربرد انتیگرال)

انتیگرال معین در رشته های مختلف علوم کاربردهای فراوانی دارد که اهم استفاده از آن در محاسبه سطوح، احجام، طول منحنی ها، محاسبه کار

در فیزیک، تعیین مختصات مرکز ثقل اجسام و غیره میباشد. در این جا به چند نمونه از این کاربردها اشاره میشود .

I: محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

این مبحث را تحت عناوین زیر به بررسی میگیریم:

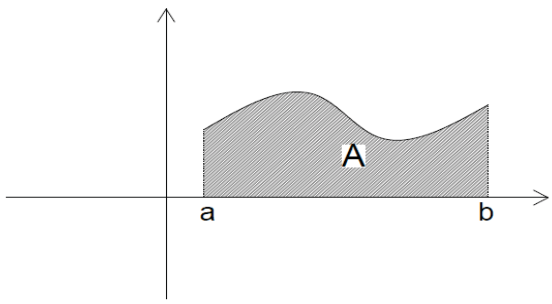
1) سطح محصور شده بین منحنی و محور x ها

هر گاه تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، برای محاسبه سطح محصور بین منحنی f و خطوط $x=a$ و $x=b$ یکی از حالت های

زیر را داریم :

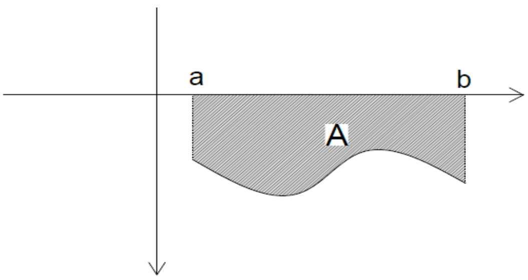
الف: اگر منحنی تابع در فاصله داده شده بالای محور x ها موقعیت داشته باشد $\left(f(x)\geq 0\right)$ در این حالت مساحت برابر است با :

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



ب: اگر منحنی تابع در فاصله داده شده زیر محور x ها موقعیت داشته باشد $\left(f(x)\leq 0\right)$دراین حالت مساحت برابر است با :

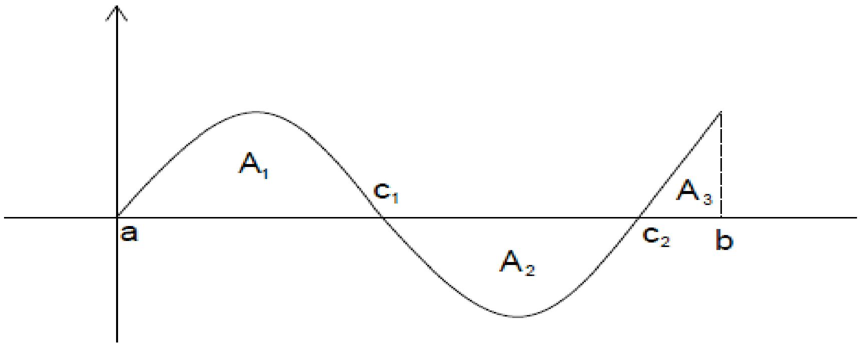
$$A=-\int_a^b f\left(x\right)dx$$



ج: اگر منحنی تابع در فاصله داده شده، قسمتی بالای محور x ها و قسمتی زیر محور x ها موقعیت داشته باشد در این حالت ابتدا جذور

(نقاط تقاطع با محور x ها) معادله تابع را دریافت نموده بعداً مساحت هر قسمت را جدا حساب و باهم جمع مینماییم

به طور مثال :



$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \left[-\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right] + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$$

نکته 1 : بصورت عموم میتوانیم برای حالت های (الف) و (ب) رابطه زیر را تعریف نماییم :

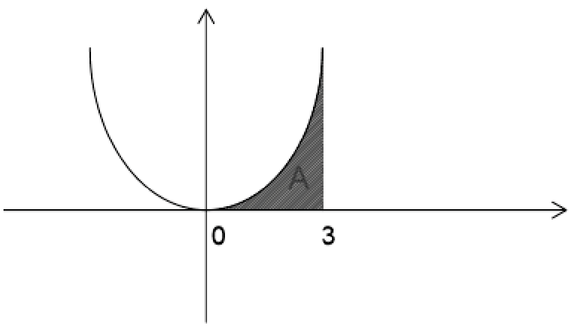
$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

نکته 2: به صورت عموم میتوانیم برای حالت (ج) رابطه زیر را تعریف نماییم :

$$A = \left|\int_a^{c_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{c_2}^{b} f(x)\,dx\right|$$

مثال: مساحت سطح محصور شده بین منحنی $f(x) = x^2$ و محور x بین خطوط $x = 0$ و $x = 3$ را محاسبه نمایید.

حل: ابتدا گراف آنرا ترسیم مینماییم:



پس داریم که:

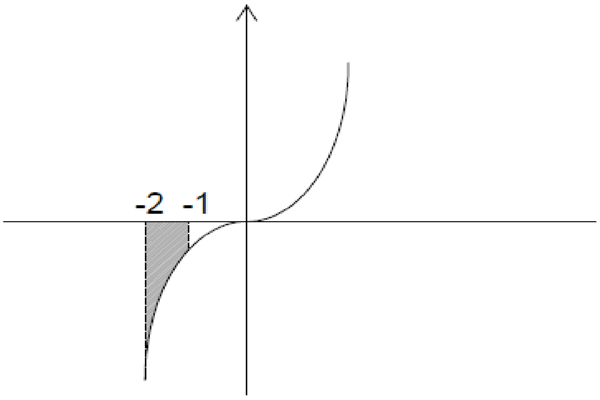
استاد صمیم رنجبر

$$A=\int_0^3 f(x)dx \Rightarrow A=\int_0^3 x^2dx$$

$$A=\int_0^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=\frac{1}{3}(3)^3-\frac{1}{3}(0)^3=9$$

مثال دوم: مساحت سطح محصور شده بین منحنی $f(x)=x^3$ و محور x را درانتروال $[-2,-1]$ محاسبه نمایید .

حل:



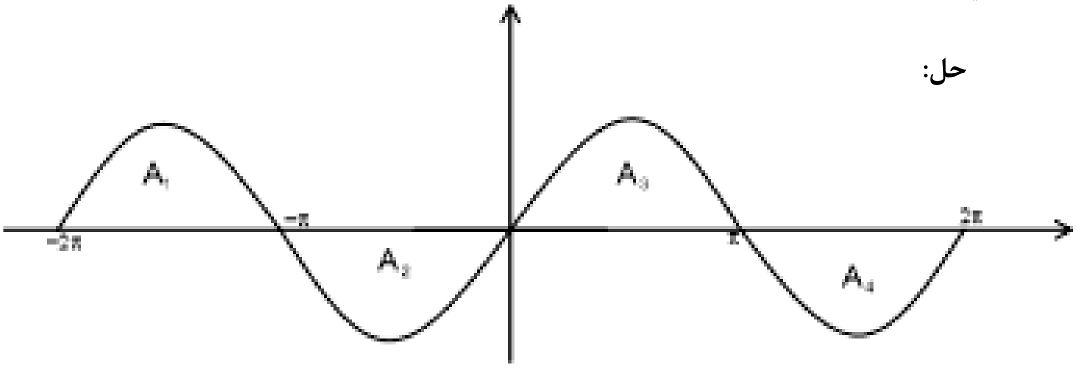
پس داریم که :

$$A=-\int_a^b f(x)dx$$

$$A=-\int_{-2}^{-1}x^3dx=-\frac{1}{4}x^4\Big|_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{4}(-1)^4\right)-\left(-\frac{1}{4}(-2)^4\right)=-\frac{1}{4}(1)+\frac{1}{4}(16)=-\frac{1}{4}+\frac{16}{4}=\frac{-1+16}{4}=\frac{15}{4}=3.75$$

مثال سوم: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\sin x$ و محور x را در انتروال $[-2\pi,2\pi]$ حساب کنید.

حل:



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = \int_{-2\pi}^{-\pi} \sin x dx - \int_{-\pi}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \Rightarrow A = (-\cos x)\Big|_{-2\pi}^{-\pi} - (-\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} + (-\cos x)\Big|_{0}^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$\Rightarrow A = -\cos x\Big|_{-2\pi}^{-\pi} + \cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow A = -[\cos(-\pi) - \cos(-2\pi)] + [\cos 0 - \cos(-\pi)] - [\cos\pi - \cos 0] + [\cos 2\pi - \cos\pi]$$

$$A = -[-1-1] + [1-(-1)] - [-1-1] + [1-1(-1)] \Rightarrow A = -(-2) + (2) - (-2) + (2) = 2+2+2+2 = 8$$

نکته: برای هر کدام از منحنی های $y = \sin ax$ یا $y = \cos ax$ مساحت هر قوس برابر $\frac{2}{|a|}$ است .

حل مثال سوم با استفاده از نکته: چون گراف تابع $y = \sin x$ درفاصله $[-2\pi, 2\pi]$ دارای چهار قوس است پس داریم که :

$$A = \frac{2}{|a|} + \frac{2}{|a|} + \frac{2}{|a|} + \frac{2}{|a|} = \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 8$$

مثال چهارم: مساحت سطح محصور بین منحنی $y = \cos x$ و محور x در فاصله $[0, 100\pi]$ را محاسبه نمایید.

حل: میدانیم که این تابع در هر دور کامل (تناوب اصلی) دارای دو قوس و انتروال $[0, 100\pi]$ دارای پنجاه دور کامل است، بنأ تعداد قوس ها در اینجا برابر 100 است پس :

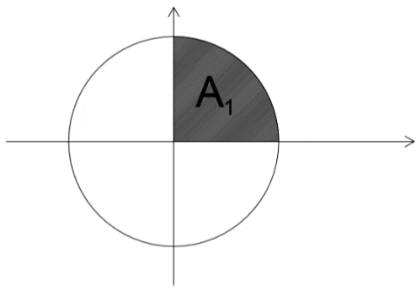
$$A = \int_{0}^{100\pi} \cos x dx = 100 \cdot \frac{2}{|1|} = 100 \cdot 2 = 200$$

مثال پنجم: مساحت دیره ای به شعاع r را محاسبه نمایید.

حل: اگر مرکز دایره را در مبدا کمیات وضعیه در نظر بگیریم معادله آن به شکل $x^2 + y^2 = r^2$ بوده و برای محاسبه مساحت ربع آن داریم

استاد صمیم رنجبر

که : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

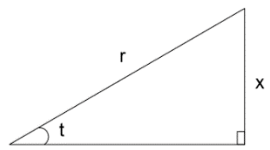


$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y=\sqrt{r^2-x^2}$$

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

با تعویض مثلثاتی $x=r\cdot\sin t$ نظر به مثلث و جای گذاری $dx=r\cdot\cos t dt$ داریم

که :



$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-(r\sin t)^2}\,(r\cos t\,dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2\left(1-\sin^2 t\right)}\left(r\cdot\cos t dt\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos t\cdot r\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{r^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2})\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right]=\frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right]=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r^2}{4}$$

پس مساحت کل دایره برابر است با:

$$A=4A_1=4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right)=\pi r^2\Rightarrow A=\pi r^2$$

نکته: اگر سطح محصور بین منحنی $f(x)$ و محور x مطلوب باشد در صورتیکه فاصله قید نشده باشد در این حالت با قرار دادن $f(x)=0$

جذور $f\left(x\right)$ را دریافت نموده و انتیگرال را محاسبه می نماییم .

مثال اول: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی با معادله $y=-x^2+4x-3$ و محور x را دریابید.

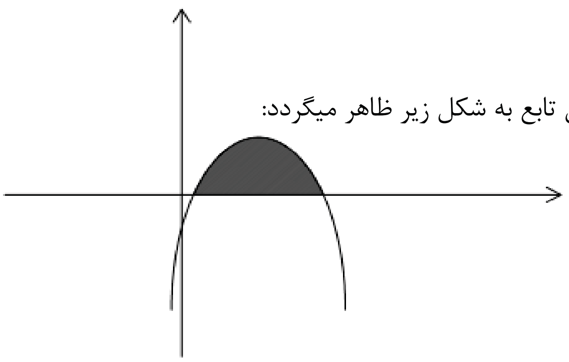
حل: ابتدا نقاط تقاطع با محور x را دریافت می نماییم .

$$-x^2+4x-3=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow\left(x-1\right)\left(x-3\right)=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=3$$

حالا انتیگرال معین را با این حدود محاسبه می نماییم:

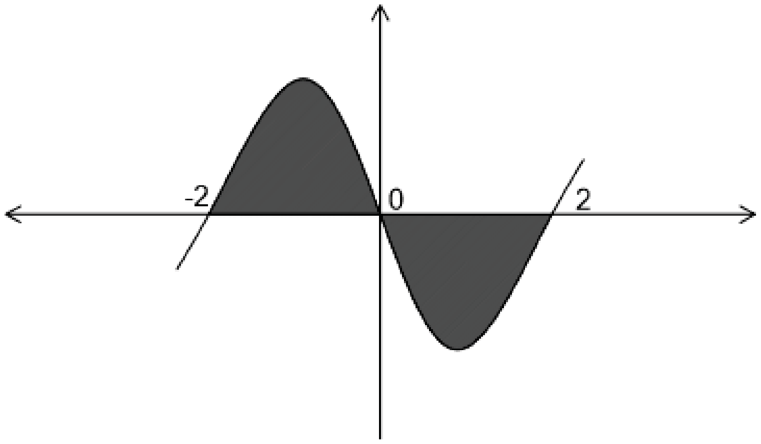
$$A=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\left[-\frac{1}{3}(3)^3+2(3)^2-3(3)\right]-\left[-\frac{1}{3}(1)^3+2(1)^2-3(1)\right]$$
$$=\left[-9+18-9\right]-\left[-\frac{1}{3}+2-3\right]=-\left[-\frac{4}{3}\right]=\frac{4}{3}$$

گراف این تابع به شکل زیر ظاهر میگردد:



مثال دوم: مساحت سطح محصور بین منحنی به معادله $y=x^3-4x$ و محور x ها را دریابید.

$$x^3-4x=0\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow x\left(x-2\right)\left(x+2\right)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=-2\ ,\ x=2$$

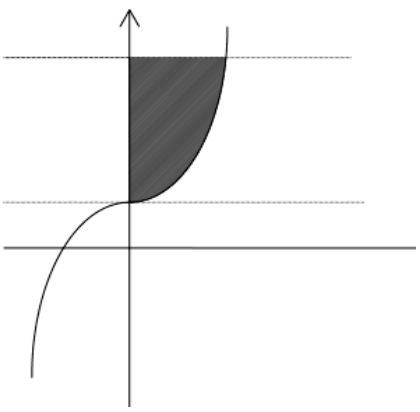


$$A=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx\right|=\left|2\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx\right|=\left|2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^2\right|=|2(4-8)|=|-8|=8$$

2) سطح محصور شده بین منحنی و محور y ها

مسائل مربوط به این مبحث نیز همانند مسائل مربوط به عنوان قبل حل میگردد با در نظر داشت اینکه ضابطه تابع برای x از جنس y حل میگردد.

مثال اول: مساحت سطح محصورشده توسط منحنی تابع $y=x^3+1$ و محور y بین خطوط $y=1$ و $y=2$ را محاسبه نمایید .



$$y=x^3+1\Rightarrow x^3+1=y\Rightarrow x^3=y-1\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$$

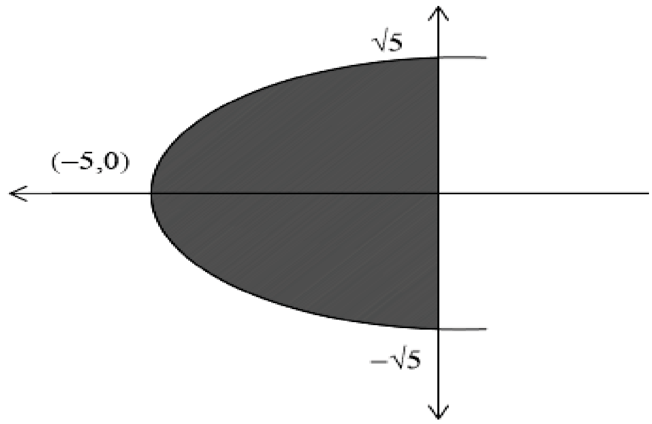
$$A=\int_1^2 x\,dy=\int_1^2\sqrt[3]{y-1}\,dy=\int_1^2(y-1)^{\frac{1}{3}}\,dy=\left[\frac{3}{4}(y-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2=\left[\frac{3}{4}(2-1)^{\frac{4}{3}}\right]-\left[\frac{3}{4}(1-1)^{\frac{4}{3}}\right]=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$

مثال دوم: مساحت سطح محصور بین منحنی $y^2-x-5=0$ و محور y را محاسبه نمایید.

حل:

$$y^2-x-5=0\Rightarrow -x=-y^2+5\Rightarrow x=y^2-5$$
$$x=0\Rightarrow y^2-5=0\Rightarrow y^2=5\Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$$

و نقطه بحرانی این تابع $V\left(\frac{4ac-b^2}{4a},-\frac{b}{2a}\right)=\left(\frac{4\cdot1(-5)}{4(1)},-\left(\frac{0}{2\cdot1}\right)\right)=(-5,0)$

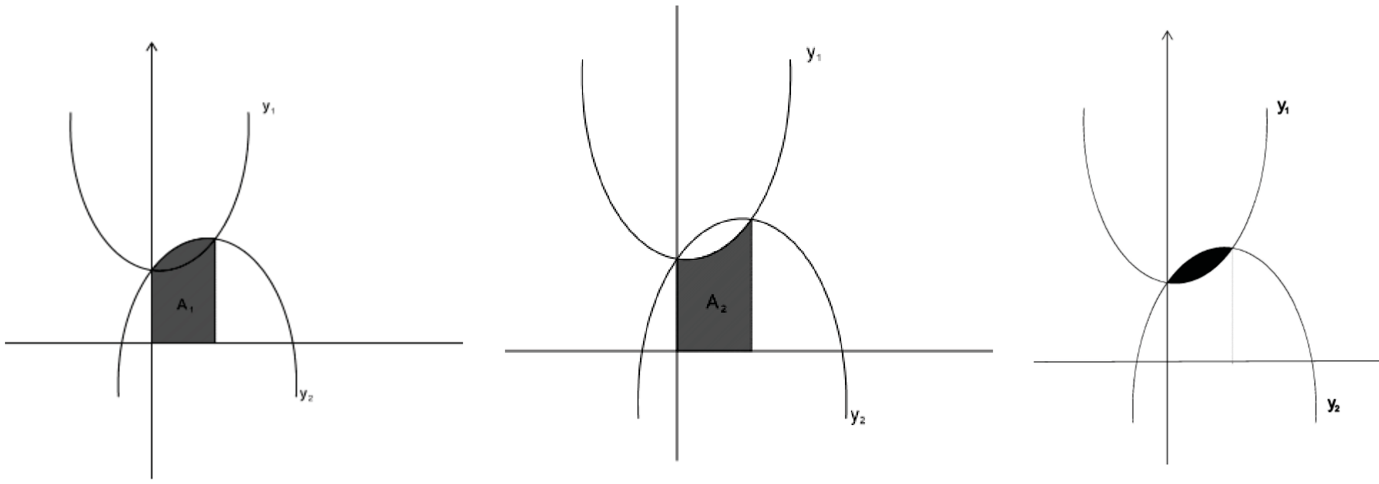


$$A=\left|\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}(x)\,dy\right|=\left|\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}\left(y^2-5\right)dy\right|=\left|2\int_0^{\sqrt5}\left(y^2-5\right)dy\right|=\left|2\left[\frac13y^3-5y\right]_0^{\sqrt5}\right|=\left|2\left[\frac13\left(\sqrt5\right)^3-5\left(\sqrt5\right)\right]\right|$$

$$=\left|2\left[\frac{5\cdot\sqrt5}{3}-\frac{5\cdot\sqrt5}{1}\right]\right|=\left|2\left(\frac{5\cdot\sqrt5-15\cdot\sqrt5}{3}\right)\right|=\left|2\left(-\frac{10\sqrt5}{3}\right)\right|=\left|\frac{-20\sqrt5}{3}\right|=\frac{20\sqrt5}{3}\approx\frac{20(2.236)}{3}=\frac{44.72}{3}=14.9$$

3) محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

برای منحنی های y_1 و y_2 در اشکال ذیل به وضوح داریم که :



$$\Rightarrow A_1-A_2=A$$

پس با در نظر داشت رابطه فوق تعریف ذیل را ارائه می نماییم:

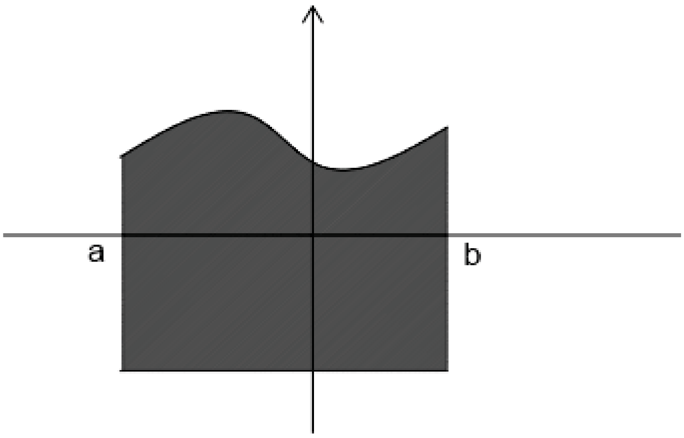
هرگاه توابع $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند برای محاسبه سطح محصور بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ و

خطوط $x=a$ و $x=b$ یکی از حالت های زیر را داریم :

الف: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ یکدیگر را قطع نکرده باشند و برای هر $x\in[a,b]$ رابطه $f(x)\geq g(x)$ برقرار باشد, در

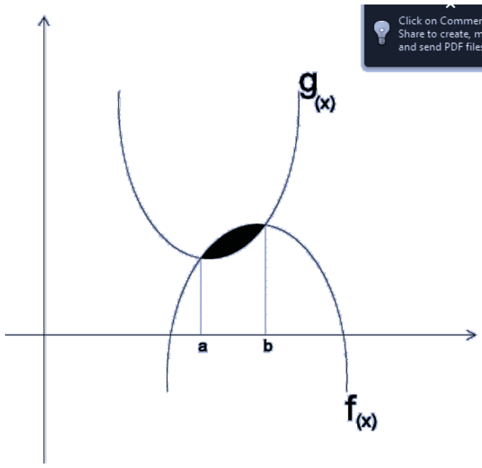
این حالت مساحت برابر است با :

$$A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

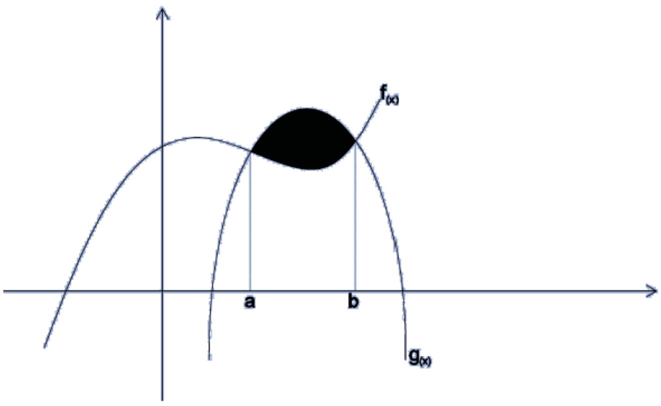


ب: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقاط $x=a$ و $x=b$ یکدیگر خود را قطع کنند داریم که :

$$f(x)\geq g(x)\ \Rightarrow\ A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

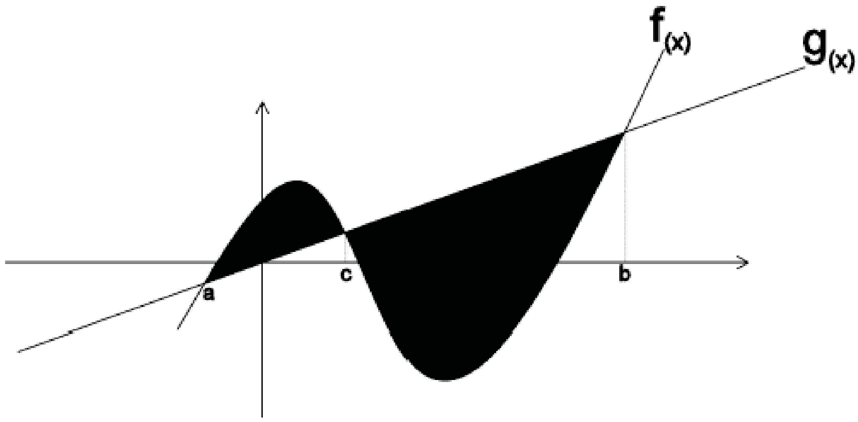


$$g(x)\geq f(x)\ \Rightarrow\ A=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$$



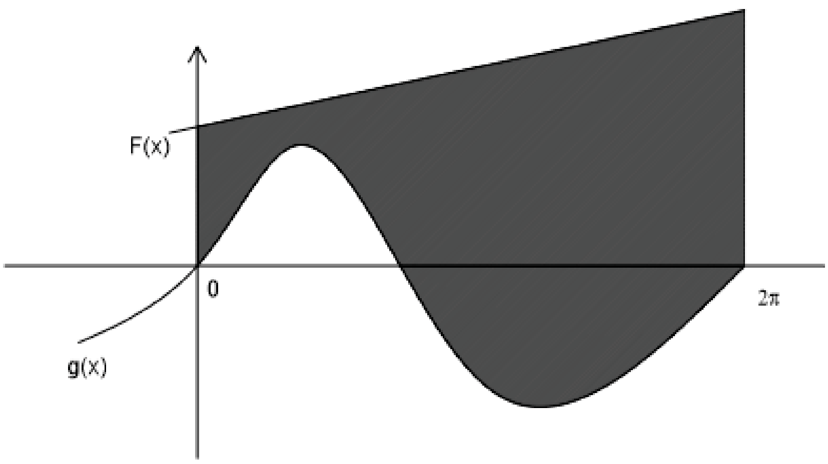
ج: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ در چند نقطه یکدیگر را قطع کرده باشند برای محاسبه سطوح محصور ابتدا نقاط تقاطع را

مشخص نموده، بعداً مساحت هر قسمت را جداگانه محاسبه و آنها را جمع مینماییم.



$$A=\int_a^c\left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_c^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

مثال اول: سطح محصور بین منحنی $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sin x$ و خطوط $x=0$ و $x=2\pi$ را محاسبه نمایید.



$$A=\int_0^{2\pi}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^{2\pi}\left[x+2-\sin x\right]dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x+\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(2\pi)^2+2(2\pi)+\cos 2\pi\right]-\left[\cos 0\right]=\left[2\pi^2+4\pi+1\right]-\left[1\right]=2\pi^2+4\pi=2\pi(\pi+2)$$

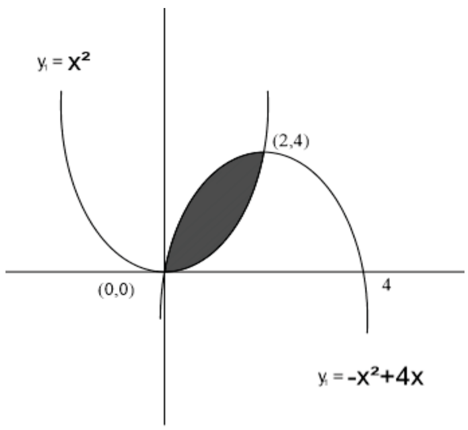
مثال دوم: مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1=x^2$ و $y_2=-x^2+4x$ را دریابید.

حل: ابتدا با قرار دادن ضوابط توابع مساوی به هم، نقاط تقاطع را دریافت نموده انتیگرال آنرا در همان حدود محاسبه مینماییم.

$$x^2=-x^2+4x\Rightarrow x^2+x^2-4x=0\Rightarrow 2x^2-4x=0\Rightarrow 2x(x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=2$$

و از طرفی در انتروال $[0,2]$ رابطه $-x^2+4x\geq x^2$ بر قرار است پس :

$$A=\int_0^2\left[\left(-x^2+4x\right)-\left(x^2\right)\right]dx=\int_0^2\left[-2x^2+4x\right]dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=-\frac{2}{3}(2)^3+2(2)^2=-\frac{16}{3}+\frac{8}{1}=\frac{8}{3}$$



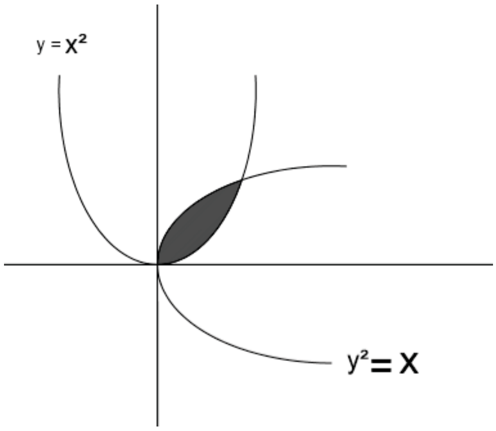
مثال سوم: مساحت محصور شده بین منحنی های $y=\sqrt{x}$ و $x=\sqrt{y}$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$x=\sqrt{y}\Rightarrow x^2=\left(\sqrt{y}\right)^2\Rightarrow y=x^2$$

برای دریافت نقاط تقاطع :

$$x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$



پس :

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\int_0^1\left[x^{\frac{1}{2}}-x^2\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(1)^3\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

نکته 1: سطح محصور بین منحنی های $y=x^n$ و $x=y^n$ یا $\left(y=\sqrt[n]{x}\right)$ برابر است با :

$$A=\begin{cases}\dfrac{2(n-1)}{n+1} & \text{برای } n \text{ طاق}\\[2mm] \dfrac{n-1}{n+1} & \text{برای } n \text{ جفت}\end{cases}$$

مثال: برای مثال قبل داریم که : $y=x^2 \quad , \quad y=\sqrt{x}$

$$A=\frac{n-1}{n+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

مثال: اگر سطح محصور بین منحنی های $y=x^n$ و $y=\sqrt[n]{x}$ مساوی به $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار n را معلوم نمایید.

حل: چون صورت کسر داده شده بزرگتر از مخرج آن است پس n یک عدد طاق بوده است .

$$\frac{2(n-1)}{n+1}=A\Rightarrow\frac{2(n-1)}{n+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4n-4=3n+3\Rightarrow 4n-3n=3+4\Rightarrow n=7$$

نکته 2: مساحت محصور بین منحنی های $x^2=ay$ و $y^2=bx$ مساوی به $A=\frac{|ab|}{3}$ است .

مثال: مساحت محصور بین منحنی $x^2+6y=0$ و $y^2=5x$ را محاسبه نمایید.

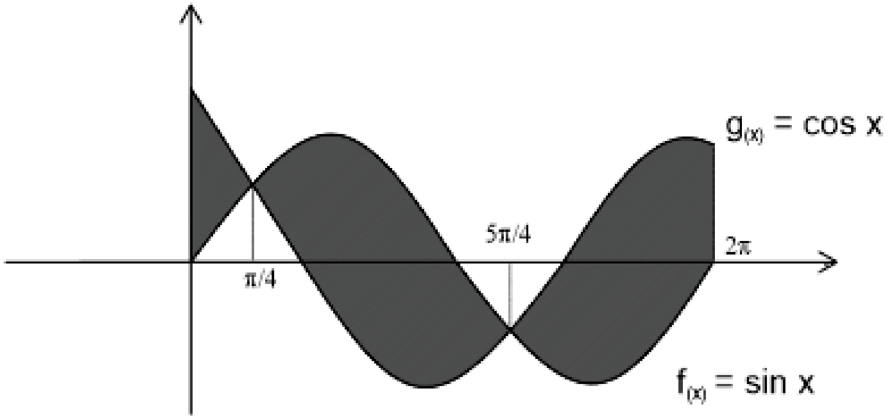
حل:

$$x^2+6y=0 \Rightarrow x^2=-6y$$
$$y^2=5x$$
$$A=\frac{|ab|}{3}=\frac{|-6\cdot 5|}{3}=\frac{|-30|}{3}=\frac{30}{3}=10$$

مثال چهارم: سطح محصور بین منحنی های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ و خطوط $x=0$ و $x=2\pi$ را محاسبه نمایید.

$$\sin x=\cos x$$
$$x_1=\pi/4$$
$$x_2=5\pi/4$$

پس:



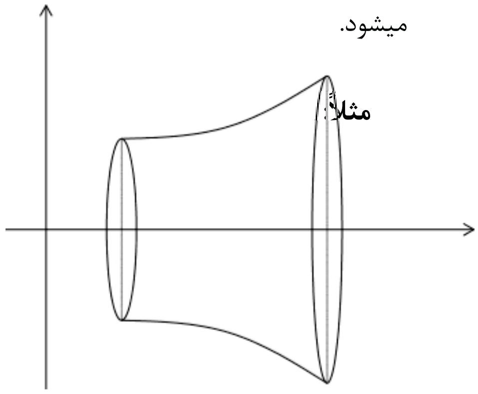
$$A=\int_0^{\pi/4}[\cos x-\sin x]dx+\int_0^{5\pi/4}[\sin x-\cos x]dx+\int_{5\pi/4}^{2\pi}[\cos x-\sin x]dx$$
$$=[\sin x+\cos x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4}+[\sin x+\cos x]_{5\pi/4}^{2\pi}$$
$$=\left[\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right]+\left[\left(-\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]+\left[(\sin 2\pi+\cos 2\pi)-\left(\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(1)\right]+\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+\left[(0+1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$
$$=\left[\sqrt{2}-1\right]+\left[\sqrt{2}+\sqrt{2}\right]+\left[1+\sqrt{2}\right]=\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$$

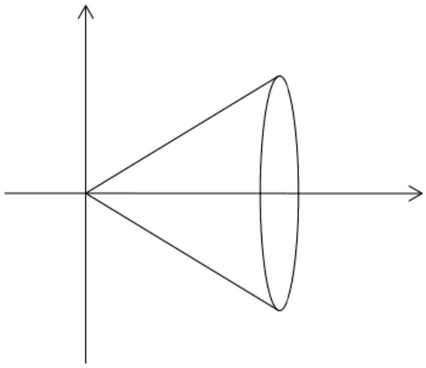
استاد صمیم رنجبر

ii محاسبه **حجم اجسام دورانی (اجسام دوار)**

تعریف: جسم حاصل از دوران یک ناحیه مسطح متناهی حول یک محور که از دوران ناحیه نمی گذرد، جسم دوار نامیده میشود.

مثلاً:





برای محاسبه حجم اجسام دوار دو حالت زیر وجود دارد:

1) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی و یکی از محورات (محور x یا محور y)

❖ حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها از $x=a$ تا $x=b$ حول محور x برابر است با:

$$V=\pi\cdot\left|\int_a^b (f(x))^2\,dx\right|$$

❖ اگر منحنی $y=f(x)$ محور x را در نقطه C بین فاصله $[a,b]$ قطع کند درایم که :

$$V=\pi\left|\int_a^c (f(x))^2\,dx\right|+\pi\left|\int_c^b (f(x))^2\,dx\right|$$

❖ حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی $x=f(y)$ از $y=a$ تا $y=b$ حول محور y برابر است با :

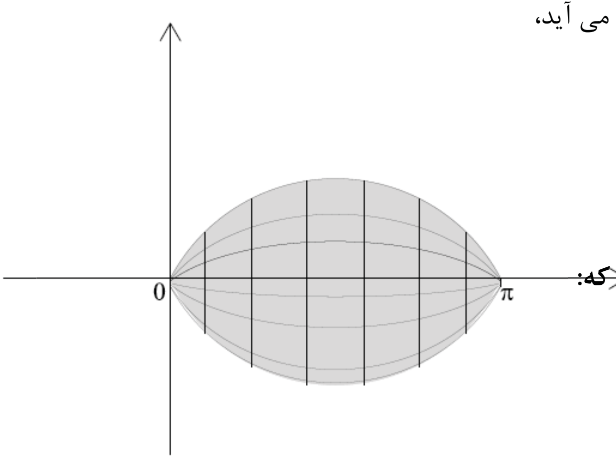
$$V=\pi\left|\int_a^b (f(y))^2\,dy\right|$$

❖ اگر منحنی $x=f(y)$ محور y را در نقطه C بین فاصله $[a,b]$ قطع کند داریم که :

$$V=\pi\left|\int_a^c (f(y))^2\,dy\right|+\pi\left|\int_c^b (f(y))^2\,dy\right|$$

مثال اول: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y=\sin x$ و دو خط $x=0$ و $x=\pi$ به حول محور x به وجود می آید،

حساب کنید.



حل: میدانیم که:

$$V=\pi\left|\int_a^b (f(x))^2dx\right|=\pi\left|\int_0^\pi \sin^2 xdx\right|=\pi\left|\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx\right|=\frac{\pi}{2}\left|\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi\right|$$

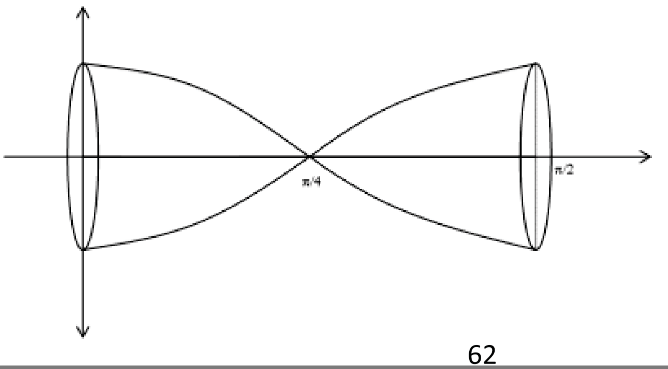
$$=\frac{\pi}{2}\left|\left[\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right]-\left[0-\frac{1}{2}\sin 2(0)\right]\right|=\frac{\pi}{2}\left|[\pi-0]-[0]\right|=\frac{\pi}{2}(\pi)=\frac{\pi^2}{2}$$ واحد حجم

مثال دوم: حجم جسمی که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\sin x-\cos x$ در انتروال $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حول محور x

به وجود می آید را حساب کنید.

حل: اگر گراف این تابع را ترسیم نماییم دیده میشود که در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ بین این انتروال محور x را قطع میکند یعنی $x=\frac{\pi}{4}$ یک نقطه

صفری این تابع است .



$$V=\pi\left|\int_0^{\pi/4}(\sin x-\cos x)^2\,dx\right|+\pi\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)^2\,dx\right|$$

$$\Rightarrow V=\pi\left|\int_0^{\pi/4}\left(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x\right)dx+\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x\right)dx\right|\right|$$

$$\Rightarrow V=\pi\left|\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2x)\,dx\right|+\pi\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-\sin 2x)\,dx\right|\Rightarrow V=\pi\left|\left[x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4}\right|+\pi\left|\left[x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right|$$

$$\Rightarrow V=\pi\left|\left[\pi/4+\frac{1}{2}\cos 2(\pi/4)\right]-\left[0+\frac{1}{2}\cos 2(0)\right]\right|+\pi\left|\left[\pi/2+\frac{1}{2}\cos 2(\pi/2)\right]-\left[\pi/4+\frac{1}{2}\cos 2(\pi/4)\right]\right|$$

$$\Rightarrow V=\pi\left|\left[\pi/4+0\right]-\left[\frac{1}{2}\right]\right|+\pi\left|\left[\pi/2-\frac{1}{2}\right]-\left[\pi/4\right]\right|\Rightarrow V=\pi\left|\pi/4-\frac{1}{2}\right|+\pi\left|\pi/2-\frac{1}{2}-\pi/4\right|\Rightarrow V=\pi\left|\frac{\pi-2}{4}\right|+\pi\left|\frac{2\pi-2-\pi}{4}\right|$$

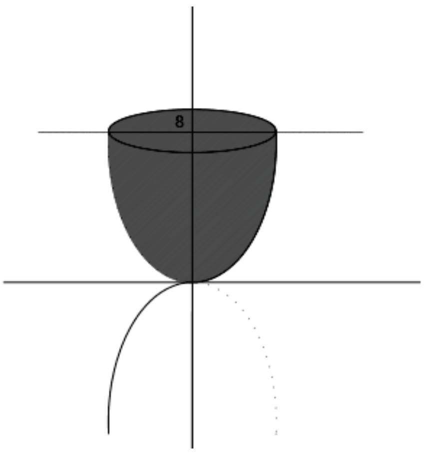
$$\Rightarrow V=\frac{\pi^2-2\pi}{4}+\frac{\pi^2-2\pi}{4}=\frac{\pi^2-2\pi+\pi^2-2\pi}{4}\Rightarrow V=\frac{2\pi^2-4\pi}{4}\Rightarrow V=\frac{2\pi^2}{4}-\frac{4\pi}{4}\Rightarrow V=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

مثال سوم: حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی $y=x^3$ و خط $y=8$ و $y=0$ به حول محور y به دست می آید را حساب

کنید.

حل:

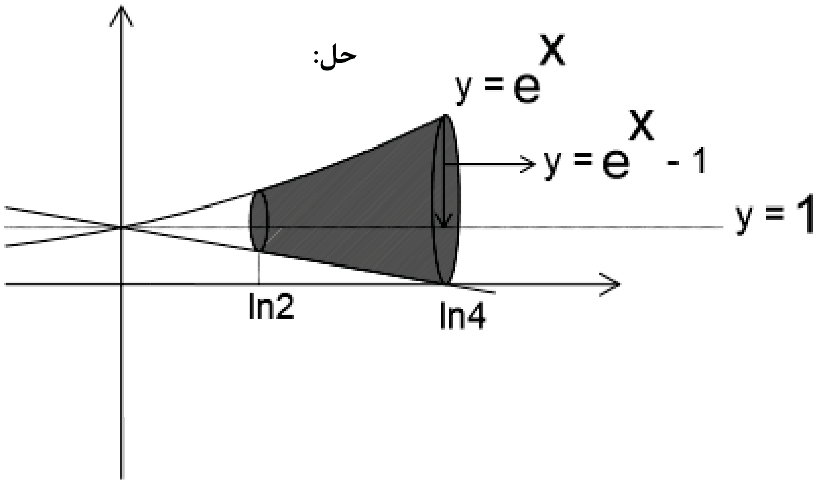
$$y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$$



$$V=\pi\int_a^b\left(f(y)\right)^2dy=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{y}\right)^2dy=\pi\int_0^8 y^{2/3}dy=\pi\left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8=\pi\left[\left(\frac{3}{5}(8)^{5/3}\right)-\left(\frac{3}{5}(0)^{5/3}\right)\right]=\pi\left(\frac{3}{5}\cdot 32\right)=\frac{96}{5}\pi$$

مثال چهارم: حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی $y=e^x$ و خطوط $x=\ln 2$، $x=\ln 4$ و $y=1$ حول خط $y=1$ را حساب نمایید.

حل:



$$V=\pi\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(e^x-1\right)^2dx=\pi\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left[e^{2x}-2e^x+1\right]dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

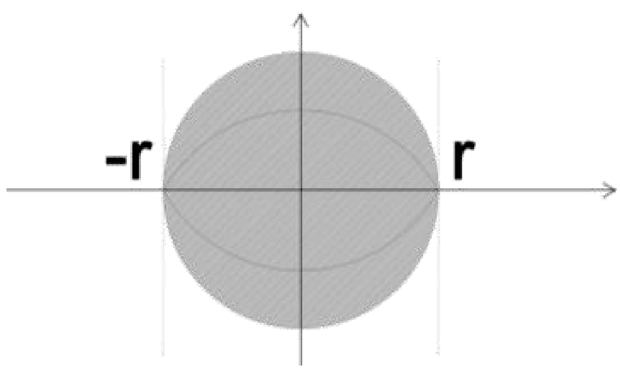
$$=\pi\left[\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-2e^{\ln 4}+\ln 4\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}+\ln 2\right)\right]=\pi\left[\left(\frac{1}{2}(16)-2(4)+2\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}(4)-2(2)+\ln 2\right)\right]$$

$$=\pi\left[(8-8+2\ln 2)-(2-4+\ln 2)\right]=\pi\left[2\ln 2+2-\ln 2\right]=\pi(\ln 2+2)$$

مثال پنجم: ثابت کنید که حجم کره ای با شعاع r برابر با $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ است.

حل: میدانیم که با دوران دایره $x^2+y^2=r^2$ حول یکی از محورات (محور x) کره ای با شعاع r ایجاد میگردد، پس با استفاده از انتیگرال

فارمول محاسبه حجم کره را قرار زیر محاسبه می نماییم.



$$V=\pi\cdot\int_a^b y^2dx$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y^2=r^2-x^2$$

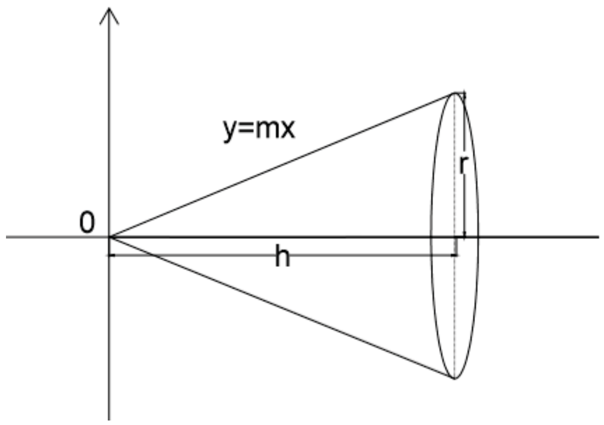
$$V=\pi\cdot\int_a^b y^2dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=2\pi\cdot\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\cdot\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r=2\pi\cdot\left[\left(r\cdot r^2-\tfrac{1}{3}r^3\right)-\left(r^2(0)-\tfrac{1}{3}(0)^3\right)\right]$$

$$=2\pi\left[r^3-\tfrac{1}{3}r^3-0\right]=2\pi\left(\frac{3r^3-r^3}{3}\right)=2\pi\left(\frac{2r^3}{3}\right)\Rightarrow V=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

مثال ششم: حجم مخروط را توسط انتیگرال محاسبه مینماییم.

حل: چون مخروط از دوران خط $y=mx$ حول محور x بدست می آید بنأ داریم که:



$$V=\pi\cdot\int_a^b y^2dx=\pi\cdot\int_0^h(mx)^2dx=\pi\cdot\int_0^h m^2x^2dx=\pi\cdot\left[\tfrac{1}{3}m^2x^3\right]_0^h=\pi\cdot\left[\tfrac{1}{3}m^2h^3\right]=\tfrac{\pi}{3}m^2h^3$$

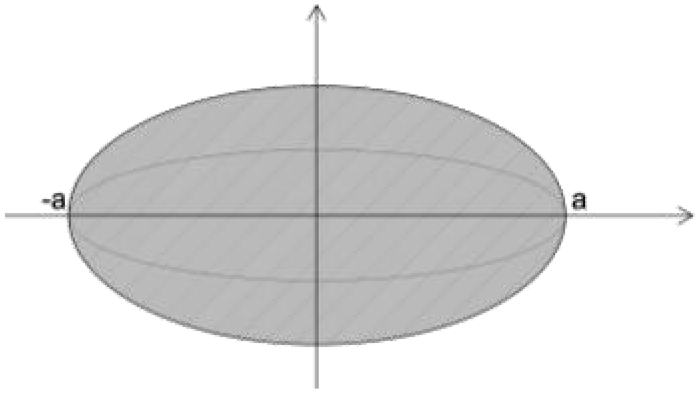
از روی شکل مشاهده می گردد که $y=r$ و $x=h$ است، پس:

$$y=mx\Rightarrow r=mh$$

$$V=\tfrac{\pi}{3}m^2h^3=\tfrac{\pi}{3}(mh)^2\cdot h=\tfrac{\pi}{3}(r)^2\cdot h\Rightarrow V=\tfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h$$

مثال هفتم: فارمول محاسبه حجم بیضوی (الپسوئید) حاصل از دوران بیضی (الپس) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور x ها را اثبات مینماییم .

حل:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\pi\cdot\int_a^b y^2dx$$

$$V=\pi\cdot\int_{-a}^{+a}\left(b^2-{}^{b^2}\!/_{a^2}\,x^2\right)dx=2\pi\cdot\int_0^a\left(b^2-{}^{b^2}\!/_{a^2}\,x^2\right)dx=2\pi\left[b^2x-{}^{b^2}\!/_{a^2}\cdot{}^{1}\!/_{3}\,x^3\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[b^2\cdot a-{}^{b^2}\!/_{3a^2}\cdot a^3\right]=2\pi\left(ab^2-{}^{1}\!/_{3}\,ab^2\right)=2\pi\left(\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right)=2\pi\left(\frac{2ab^2}{3}\right)\Rightarrow V={}^{4}\!/_{3}\,\pi ab^2$$

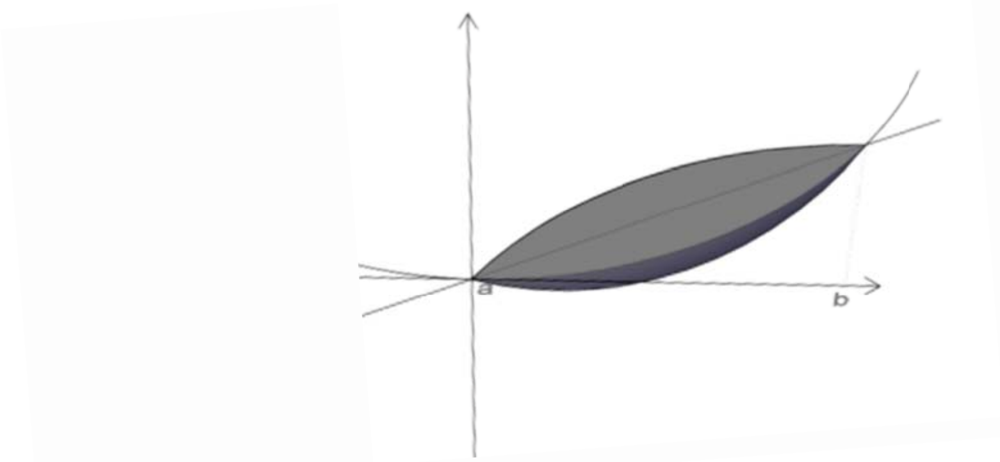
رابطه فوق حجم بیضوی را نشان میدهد که محراق های آن روی محور x قرار داشته باشد. اگر محراق ها روی محور y قرار داشته باشد

(بیضوی که حول قطر کوچک حاصل میگردد)، آنگاه حجم آن از رابطه $V={}^{4}\!/_{3}\,\pi a^2b$ محاسبه میگردد.

2) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین دو منحنی

هرگاه توابع $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشند، حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی های $f(x)$ و

$g(x)$ و دو خط $x=a$ و $x=b$ حول محور x تشکیل میشود از رابطه زیر به دست می آید:



$$f(x)\ge g(x)\Rightarrow V=\pi\int_a^b\left(y_1^2-y_2^2\right)dx=\pi\cdot\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$

$$g(x)\ge f(x)\Rightarrow V=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx=\pi\cdot\int_a^b\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx$$

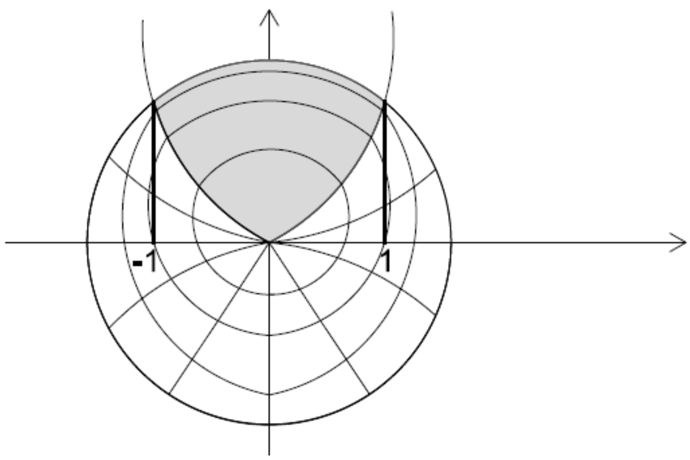
مثال: حجم جسمی که از دوران سطح محصور شده توسط دو منحنی تابع $y=x^2$ و دایره $x^2+y^2=2$ حول محور x به وجود می آید را

محاسبه نمایید.

حل:

$$\left.\begin{matrix} y=x^2 \\ y=\sqrt{2-x^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow x^4=2-x^2\Rightarrow x^4+x^2-2=0\Rightarrow\left(x^2+2\right)\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=\pm1$$

$$\left.\begin{matrix} y=x^2 \\ x^2+y^2=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$



$$y^2 = 2 - x^2 \geq y = x^2$$

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-\left(x^2\right)^2\right]dx = \pi \cdot \int_{-1}^{+1}\left(2-x^2-x^4\right)dx = \pi\left[2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{+1}$$

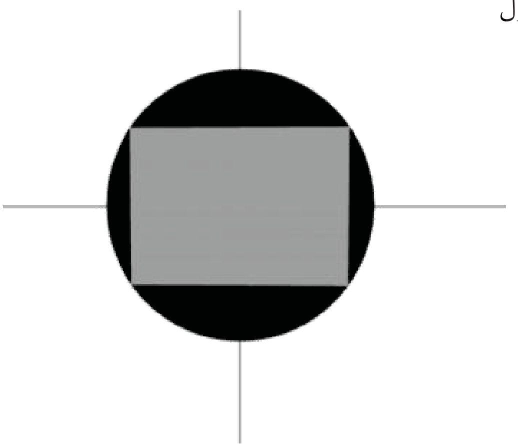
$$= \pi\left[\left(2(1) - \tfrac{1}{3}(1)^3 - \tfrac{1}{5}(1)^5\right) - \left(2(-1) - \tfrac{1}{3}(-1)^3 - \tfrac{1}{5}(-1)^5\right)\right] = \pi\left[\left(2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(-2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(\frac{30-5-3}{15}\right) - \left(\frac{-30+5+3}{15}\right)\right] = \pi\left[\left(\tfrac{22}{15}\right) - \left(\tfrac{-22}{15}\right)\right] = \pi\left[\tfrac{22}{15} + \tfrac{22}{15}\right] = \pi\left[\frac{22+22}{15}\right] = \frac{44}{15}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{44}{15}\pi$$

مثال دوم: در یک کره به شعاع 10 حفره ای به قطر 12 به موازات قطر ایجاده کرده ایم، حجم قسمت باقیمانده را بیابید. (این جسم مشابه دانه های تسبیح است) .

حل: مطابق شکل دیده میشود که حجم این جسم، حجم حاصل از دوران سطح محصور بین نیم دایره $y = \sqrt{10^2 - x^2}$ و خط $y = 6$ حول محور x ها میباشد.



$$\left.\begin{aligned} y &= 6 \\ y &= \sqrt{100 - x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} = 6 \Rightarrow x = \pm 8$$

$$V = \pi \cdot \int_{-8}^{8}\left[\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2 - (6)^2\right]dx = \pi \cdot \int_{-8}^{8}\left(64 - x^2\right)dx = 2\pi\int_{0}^{8}\left(64-x^2\right)dx = 2\pi\left[64x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{8}$$

$$2\pi\left[64(8) - \tfrac{1}{3}(8)^3\right] = 2\pi\left[512 - \frac{512}{3}\right] = 2\pi\left[\frac{1536-512}{3}\right] = 2\pi\left[\frac{1024}{3}\right] = \frac{2048}{3}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{2048}{3}\pi \Rightarrow V = 2143.6$$

نکته: اگر توبع f و g در فاصله داده شده یک دیگر خود را در چند نقطه قطع کنند، حجم هر قسمت را جداگانه محاسبه و در اخیر با هم جمع

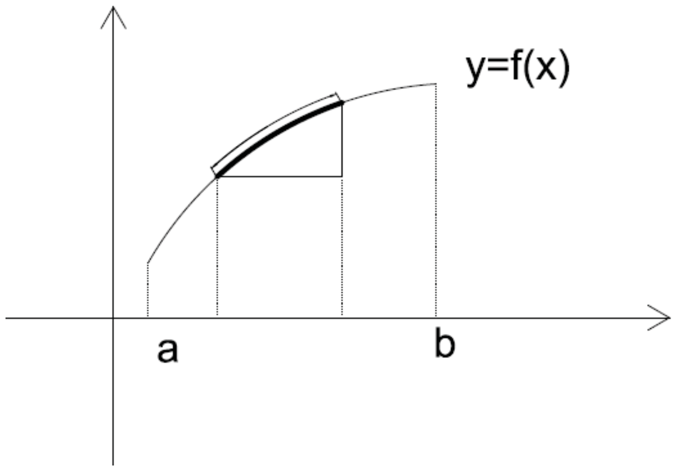
می نماییم .

iii محاسبه طول قوس (طول منحنی)

هر گاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ مشتق پذیر و y' در فاصله (a,b) پیوسته باشد برای محاسبه طول منحنی $y=f(x)$ بین دو

خط $x=a$ و $x=b$ با تقسیمات آن به n مستطیل طوری که قسمتی از طول منحنی به عنوان وتر مثلث قایم الزاویه قرار می گیرد و با در

نظر داشت فارمول فاصله بین دو نقطه و مجموع ریمان، رابطه زیر تشکیل میگردد:



$$L\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$ یا $$L\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

اگر معادله منحنی $x=f(y)$ در انتروال $[a,b]$ داده شده باشد، با توجه به پارامتر مانند y طول قوس منحنی را از رابطه زیر محاسبه می

نماییم :

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}dy$$ یا $$L=\int_a^b \sqrt{1+(x')^2}dy$$

اگر ضابطه تابع به صورت پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ باشد، آنگاه طول منحنی از t_1 تا t_2 برابر است با :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt$$

مثال اول: طول قوس منحنی $f(x) = \frac{1}{2}x^{3/2}$ را در انتروال $0 \le x \le 1$ محاسبه کنید.

حل :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{1/2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{9}{16}x = u \\ &\frac{9}{16}dx = du \\ &dx = \frac{16}{9}du \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \sqrt{1 + \frac{9}{16}x}\,dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{16}{9}du\right) = \frac{16}{9}\int u^{1/2}du = \frac{16}{9} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{32}{27} \cdot u^{3/2} \Rightarrow \frac{32}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{32}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}(1)\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{16}(0)\right)^{3/2}\right] = \frac{32}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{32}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) = \frac{32}{27}\left(\frac{125 - 64}{64}\right) = \frac{32}{27}\left(\frac{61}{64}\right) = \frac{61}{54}$$

$L = \frac{61}{54}$ واحد طول یا $L \simeq 1.13$ واحد طول

مثال دوم: طول منحنی $x = f(y) = y^{3/2}$ را در انتروال $[1,4]$ محاسبه کنید.

حل:

$$x = y^{3/2} \Rightarrow x' = \frac{3}{2} y^{1/2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2} y^{1/2}\right)^2}\,dy = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4} y}\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{9}{4}y = u \\ \frac{9}{4}dy = du \\ dy = \frac{4}{9}du \end{array}\right\} \Rightarrow \int\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy = \int\sqrt{u}\left(\frac{4}{9}du\right) = \frac{4}{9}\int u^{1/2}du = \frac{4}{9}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{8}{27}u^{3/2}$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}(4)\right)^{3/2} - \left(1+\frac{9}{4}(1)\right)^{3/2}\right] = \frac{8}{27}\left[(10)^{3/2} - \left(13/4\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{1000} - \frac{\sqrt{2197}}{8}\right] = \frac{8}{27}\left[10\cdot\sqrt{10} - \frac{13\cdot\sqrt{13}}{8}\right] \simeq \frac{8}{27}\left(10(3.2) - \frac{13(3.6)}{8}\right) = \frac{8}{27}\left(32 - \frac{46.8}{8}\right) =$$

$$\simeq \frac{8}{27}(32-5.85) = \frac{8}{27}(26.15) = \frac{209.2}{27} = 7.75$$

مثال سوم: طول قوس منحنی $x = t^2$ و $y = t^3$ را در انتروال $0 \le t \le 1$ حساب کنید.

حل: چون $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ است، پس داریم که :

$$x = t^2 \Rightarrow x' = 2t$$

$$y = t^3 \Rightarrow y' = 3t^2$$

$$L=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2(4+9t^2)}\,dt=\int_0^1 t\cdot\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l}4+9t^2=u\\18t\,dt=du\\t\cdot dt=\dfrac{1}{18}du\end{array}\right\}\Rightarrow\int t\cdot\sqrt{4+9t^2}\,dt=\int\sqrt{u}\left(\frac{1}{18}du\right)=\frac{1}{18}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}=\frac{1}{27}\cdot u^{3/2}=\frac{1}{27}\left(4+9t^2\right)^{3/2}$$

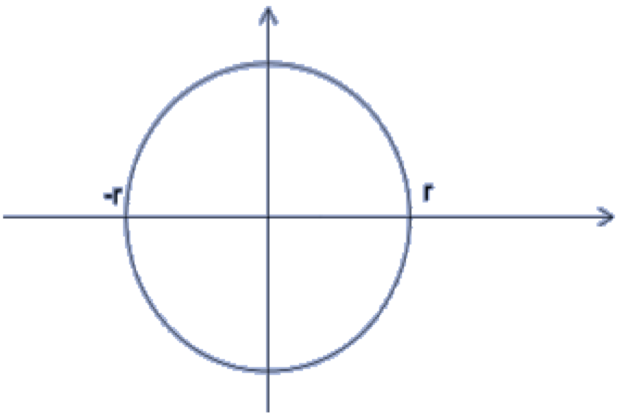
$$\Rightarrow L=\int_0^1 t\cdot\sqrt{4+9t^2}\,dt=\frac{1}{27}\left[\left(4+9t^2\right)^{3/2}\right]_0^1\Rightarrow L=\frac{1}{27}\left[\left(4+9(1)^2\right)^{3/2}-\left(4+9(0)^2\right)^{3/2}\right]$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{27}\left[(13)^{3/2}-(4)^{3/2}\right]=\frac{1}{27}\left(13\cdot\sqrt{13}-8\right)\simeq\frac{1}{27}\left(13(3.6)-8\right)=\frac{1}{27}(46.8-8)=\frac{1}{27}(38.8)=\frac{38.8}{27}=1.44$$

مثال چهارم: ثابت نمایید که محیط (طول قوس، طول منحنی) دایره ای به شعاع r برابر با $L=2\pi r$ است.

حل:

$$x^2+y^2=r^2\Rightarrow y=\sqrt{r^2-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{r^2-x^2}}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$



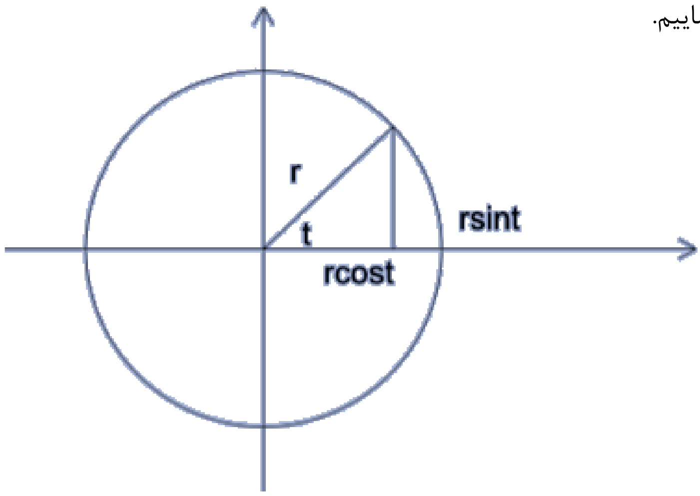
دو چند طول نصف محیط را محاسبه میکنیم .

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\int_{-r}^{+r}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\int_{-r}^{+r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\int_{-r}^{+r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_{-r}^{+r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=2r\cdot\int_{-r}^{+r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=2r\cdot2\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4r\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r$$

$$=4r\left[\arcsin\frac{r}{r}-\arcsin\frac{0}{r}\right]=4r\cdot\left[\arcsin(1)-\arcsin(0)\right]=4r\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=4r\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi r\Rightarrow L=2\pi r$$

روش دوم: برای محاسبه محیط دایره میتوانیم از تابع پارامتری دایره که به صورت $\begin{cases} x = r\cdot\cos t \\ y = r\cdot\sin t \end{cases}$ تعریف می گردد نیز استفاده نماییم.



$$x = r\cdot\cos t \Rightarrow x' = -r\cdot\sin t$$

$$y = r\cdot\sin t \Rightarrow y' = r\cdot\cos t$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt \Rightarrow L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cdot\cos t)^2}\,dt = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\cdot\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt = 2\int_0^{\pi} r\,dt = 2[r\cdot t]_0^{\pi} = 2[r(\pi)-r(0)] = 2(\pi r) = 2\pi r \Rightarrow L = 2\pi r$$

نکته 1: برای محاسبه محیط بیضی (الپس) مشابه محاسبه محیط دایره عمل میکنیم، ولی به انتیگرال میرسیم که حل آن غیر ممکن است. لذا

برای محیط بیضی فارمول های تقریبی متعددی ارائه شده است. بعضی از این فارمول ها عبارت اند از :

$$L \simeq \pi\cdot\sqrt{2(a^2+b^2)} \qquad \text{یا} \qquad L \simeq 2\pi\cdot\sqrt{ab}$$

نکته 2 : برای محاسبه انتیگرال های دشوار و یا غیر ممکن از روش های تقریبی و یا ماشین حساب استفاده میگردد.

iV محاسبه کار به وسیله انتیگرال معین

فرض میکنیم یک نقطه مادی مانند M در امتداد خط مستقیم، تحت قوه f حرکت نماید به طوریکه جهت قوه و جهت حرکت منطبق بر هم

باشند. میخواهیم کار انجام شده توسط این قوه را هنگامی که نقطه M از a تا b حرکت میکند پیدا کنیم:

1) اگر قوه f ثابت باشد میدانیم که در این صورت کار انجام شده برابر با حاصل ضرب قوه در فاصله تغییر مکان است.

$$W = f \cdot d$$

2) اگره قوه f ثابت نبوده و بستگی به وضعیت نقطه مادی M داشته باشد، یعنی قوه تابعی به صورت $f(x)$ باشد به طوری که $a \le x \le b$

، و با فرض متمادی بودن f در این فاصله، کار انجام شده برابر است با :

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

مثال: فنری تحت فشار $f(x) = cx$ (c موسوم به ثابت فنر) قرار گرفته است، مطلوب است محاسبه کار انجام شده در صورتی که فنر با قوه

10kg فشرده شود، با فرض آن که اگر فنر با قوه $1kg$ فشرده شود، 2cm از طولش کاسته شود.

حل: ابتدا مقدار c و نقاط a و b را مشخص می نماییم:

$$f = cx \Rightarrow 1 = c \cdot 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$f = cx \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 20 \qquad , \qquad a = 0\ ,\ b = 20$$

$$W = \int_a^b f(x)dx = \int_0^{20} cxdx = \int_0^{20} \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{20} = \frac{1}{4}(20)^2 = 100\text{kg} \cdot \text{cm}$$

۷ محاسبه مختصات مرکز ثقل

برای محاسبه مرکز ثقل منحنی $y = f(x)$ روی صفحه، در فاصله $a \le x \le b$ رابطه زیر تعریف میگردد:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2}dx}{\int_b^a \sqrt{1 + (y')^2}dx} \qquad y_c = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx}$$

طوریکه مختصات $P_c\left(x_c, y_c\right)$ مرکز ثقل منحنی $y=f\left(x\right)$ را نشان می دهد.

مثال: مطلوب است تعیین مرکز ثقل نیم دایره $x^2+y^2=1$ که بالای محور x ها واقع است.

حل:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x_c=\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx}=\frac{\int_{-1}^{+1} x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx}{\int_{-1}^{+1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx}=\frac{\int_{-1}^{+1} x\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx}{\int_{-1}^{+1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx}$$

$$=\frac{\int_{-1}^{+1} x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}=\frac{\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{+1}}{\left[\arcsin x\right]_{-1}^{+1}}=\frac{\left(-\sqrt{1-(1)^2}\right)-\left(-\sqrt{1-(-1)^2}\right)}{\arcsin(1)-\arcsin(-1)}=\frac{0+0}{\pi/2-\left(-\pi/2\right)}=\frac{0}{\pi}=0 \Rightarrow x_c=0$$

$$y_c=\frac{\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx}=\frac{\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx}{\int_{-1}^{+1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx}=\frac{\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}=\frac{\int_{-1}^{+1}1dx}{\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

$$=\frac{\left[x\right]_{-1}^{+1}}{\left[\arcsin x\right]_{-1}^{+1}}=\frac{(+1)-(-1)}{\arcsin(1)-\arcsin(-1)}=\frac{1+1}{\pi/2-\left(-\pi/2\right)}=\frac{2}{\pi/2+\pi/2}=\frac{2}{\pi} \Rightarrow y_c=\frac{2}{\pi}$$

پس نقطه $P_c=\left(x_c, y_c\right)=\left(0, 2/\pi\right)$ عبارت از مرکز ثقل نیم دایره $x^2+y^2=1$ را نشان میدهد.

انتیگرال های غیر عادی (مجازی، نامتعارف، ناسره)

انتیگرال $\int_a^b f\left(x\right)dx$ غیر عادی گفته میشود، هرگاه $f\left(x\right)$ حداقل در یکی از نقاط انتروال $\left[a,b\right]$ غیر متمادی بوده و یا یکی از حدود

انتیگرال بی نهایت باشد.

در این بخش به بررسی انتیگرال روی فاصله های $[a,+\infty)$ ، $(-\infty,a]$ و $(-\infty,+\infty)$ یعنی حداقل یکی از حدود انتیگرال نامتناهی باشد

(نوع اول) و بررسی انتیگرال بعضی از توابع غیر متمادی (نوع دوم) می پردازیم.

نوع اول انتیگرال های غیر متمادی: حالت های که حداقل یکی از سرحد های (کران های) انتیگرال بی نهایت است.

1) هر گاه $f(x)$ بر $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، تعریف میگردد که :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

2) هر گاه $f(x)$ بر $(-\infty,a]$ پیوسته باشد، تعریف می گردد که :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

3) هر گاه $f(x)$ بر $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و $c\in R$ باشد، تعریف میگردد که :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$$

مثال اول:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = ?$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\ln 1\right] = \ln(+\infty)-\ln(1) = +\infty-0 = +\infty$$

مثال دوم:

$$\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^x dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^x dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 x^2\cdot e^x dx = \lim_{b\to-\infty}\left[x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2\cdot e^x\right]_b^0$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\left[(0-0+2)-\left(b^2\cdot e^b-2b\cdot e^b+2e^b\right)\right] = \lim_{b\to-\infty}\left[2-b^2e^b+2b\cdot e^b-2e^b\right] = (2-0+0-0) = 2$$

مثال سوم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_a^b=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan(0)-\arctan(a)\right]+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan(b)-\arctan(0)\right]$$

$$=0-\arctan(-\infty)+\arctan(+\infty)-0=-\left(-\pi/2\right)+\left(\pi/2\right)=\pi$$

نوع دوم انتیگرال های غیر عادی: حالت هایی که تابع تحت انتیگرال غیرمتمادی است.

1) هر گاه $f(x)$ بر $[a,b)$ متمادی و در b غیر متمادی باشد، تعریف میگردد که :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

2) هر گاه $f(x)$ بر $(a,b]$ متمادی و در a غیر متمادی باشد، تعریف میگردد که :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

3) هر گاه $f(x)$ بر $[a,b]$ به جز در c $(a<c<b)$ متمادی باشد، تعریف میگردد که:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

مثال اول:

$$\int_{-4}^{-2}\frac{1}{x+2}dx=?$$

چون این تابع در $x=-2$ غیر متمادی است بناً :

$$\int_{-4}^{-2}\frac{1}{x+2}dx=\lim_{c\to-2^-}\int_{-4}^{c}\frac{1}{x+2}dx=\lim_{c\to-2^-}\left[\ln|x+2|\right]_{-4}^{c}=\lim_{c\to-2^-}\left[\ln|c+2|-\ln|-4+2|\right]$$

$$=\lim_{c\to-2^-}\left[\ln|c+2|-\ln 2\right]=\ln|-2+2|-\ln 2=\ln\left|0^+\right|-\ln 2=-\infty-\ln 2=-\infty$$

استاد صمیم رنجبر

مثال دوم:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$$

چون این تابع در $x=0$ غیر متمادی است بناً :

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c\to 0^+} \left[2\cdot\sqrt{x}\right]_c^4 = \lim_{c\to 0^+} \left[2\cdot\sqrt{4} - 2\cdot\sqrt{c}\right] = 4 - 2\cdot\sqrt{0} = 4$$

مثال سوم:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = ?$$

حل: چون در $x=0$ که در بین حدود داده شده است، غیر متمادی می باشد بناً :

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^c \frac{1}{x^2} dx + \lim_{c\to 0^+} \int_c^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^c + \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_c^2$$

$$= \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{1}{c} - \frac{1}{-1}\right] + \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{c}\right)\right] = \left[-\frac{1}{0^-} + 1\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{0^+}\right] = \left[+\infty + 1\right] + \left[-\frac{1}{2} + \infty\right] = \infty + \infty = +\infty$$

تذکر: اگر بدون توجه به نا پیوستگی تابع در $x=0$ انتیگرال می گرفتیم نتیجه نادرست زیر حاصل می شد .

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^2 = -\tfrac{3}{2}$$

نکته: هرگاه انتیگرال در هر یک از حالت های فوق (حالت های نوع اول و نوع دوم) یک عدد حقیقی شود، میگوییم انتیگرال موجود بوده و آنرا

متقارب (همگرا) مینامیم؛ در غیر این صورت میگوییم انتیگرال موجود نبوده و آنرا متباعد (واگرا) می نامیم.

انتیگرال گیری تقریبی

میدانیم که اگر بتوان تابع اولیه تابع تحت انتیگرال را محاسبه نمود، مقدار آن نیز به ساده گی تعیین میشود (با در نظر داشت قضیه اساسی دوم

مشتق و انتیگرال) و اما تعیین مقدار دقیق یک انتیگرال معین در دو حالت زیر امکان پذیر نیست:

1) اگر یافتن تابع اولیه مشکل و یا غیر ممکن باشد.

مثلاً: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^3}dx$ و $\int_0^1 e^{x^2}dx$ و یا

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$$

2) عدم در اختیار داشتن ضابطه تابع، یعنی فقط جدول داده ها مطرح میگردد نه ضابطه تابع. در چنین حالت هایی برای محاسبه مقدار انتیگرال

معین، از روش های تقریبی استفاده میشود که اهم آن روش ذوزنقه، روش سیمپسون و استفاده از سری ها (مجموعه ها) می باشد.

روش ذوزنقه

اگر $y=f(x)$ تابع تحت انتیگرال و $h=\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ارتفاع ذوزنقه مورد نظر و n تعداد تقسیمات فاصله $[a,b]$ را نشان دهد (میدانیم

که هرگاه تعداد تقسیمات زیاد باشد، حاصل دقیق تر می باشد)، برای محاسبه مقدار تقریبی انتیگرال به روش ذوزنقه فارمول زیر تعریف میگردد:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

یا

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right]\cdot\Delta x$$

مثال: مقدار تقریبی $\int_0^2 e^{x^2}dx$ را برای $n=4$ محاسبه کنید.

حل :

$$f(x)=e^{x^2} \quad \text{و} \quad h=\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$x_0=0\Rightarrow f(x_0)=e^0=1 \quad , \quad x_1=\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{4}}=e^{0.25} \quad , \quad x_2=1\Rightarrow f(1)=e^1=e$

$x_3=\frac{3}{2}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}=e^{2.25} \quad , \quad x_4=2\Rightarrow f(2)=e^4$

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\frac{1}{2}f(x_4)\right]\Rightarrow \int_0^2 e^{x^2}dx\approx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1)+\left(e^{0.25}\right)+e+\left(e^{2.25}\right)+\frac{1}{2}\left(e^4\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^2 e^{x^2}dx\approx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+1.28+2.71+9.48+27.29\right]\approx 20.63\Rightarrow \int_0^2 e^{x^2}dx\approx 20.63$$

مثال: راننده یک موتر با مشاهده مانعی بریک میکند و موتر پس از $5\sec$ متوقف میشود. اگر سرعت موتر در لحظات مختلف این $5\sec$ در

جدول زیر داده شده باشد:

t (زمان برحسب ثانیه)	0	1	2	3	4	5
v (سرعت بر حسب متر بر ثانیه)	70	38	21	12	5	0

آنگاه فاصله ای که این موتر در مدت $5\sec$ پیموده است را محاسبه نمایید .

حل: در این جا ضابطه تابع مشخص نبوده ولی ولی میتوان توسط روش های تقریبی (مثلاً روش ذوزنقه) با استفاده از داده های (داتا های)

داده شده آنرا محاسبه نمود.

$$\Delta x=h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-0}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$\int_0^5 v(t)dt\approx h\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right]\Rightarrow \int_0^5 v(t)dt\approx 1\left[\frac{1}{2}(70)+38+21+12+5+\frac{1}{2}(0)\right]\approx 111m$$

$$\Rightarrow \int_0^5 v(t)dt\approx 111m$$

روش سیمپسون

این روش برای محاسبه انتیگرال معین از روش ذوزنقه دقیق تر می باشد. در این روش از رابطه زیر که به رابطه سیمپسون (توماس سیمپسون

1761-1710) معروف می باشد استفاده می نماییم.

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\Delta x}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+2y_3+\ldots+4y_{n-1}+y_n\right]$$

نکته: در این روش n عددی جفت (زوج) است.

مثال: مقدار تقریبی انتیگرال $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$ را با استفاده از روش سیمپسون محاسبه کنید. (با در نظر داشت $n=4$)

حل:

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 0.5 \Rightarrow f(0.5) = 1.062 \Rightarrow y_1 = 1.062$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow f(1) = 1.414 \Rightarrow y_2 = 1.414 \quad , \quad x_3 = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = 2.092 \Rightarrow y_3 = 2.092$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow y_4 = 3$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx = \frac{0.5}{3}\left[1+4(1.062)+2(1.414)+4(2.092)+3\right] \approx 3.24$$

روش استفاده از سری ها

در این روش به کمک سری ها، تابع زیر انتیگرال را با یک تابع چند جمله ای از درجه n تقریب زده و سپس انتیگرال معین را محاسبه می کنیم.

مثال: به کمک سری ها مقدار تقریبی $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$ را بیابید.

حل: سری ماکلورن تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots.$$

هر گاه تابع زیر انتیگرال را با کمک تابع چند جمله ای از درجه 4 تقریب بزنیم، مقدار تقریبی انتیگرال برابر است با:

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx \approx \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\right]_1^2 = \left[\left(2 - \frac{2^3}{3\cdot 3!} + \frac{2^5}{5\cdot 5!}\right) - \left(1 - \frac{1^3}{3\cdot 3!} + \frac{1^5}{5\cdot 5!}\right)\right]$$

$$= \left[\left(2 - \frac{8}{18} + \frac{32}{600}\right) - \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right)\right] \approx 0.663 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx \approx 0.663$$

سوالات چهارگزینه یی

1. لمیت مجموع ریمان را:

1) مشتق گویند 2) انتیگرال گویند

3)سیگما گویند 4)هیچکدام

2. با تقسیم نمودن انتیگرال $[0,2]$ هار قسمت مساوی مساحت بین منحنی تابع $y=x^2+1$ و محور x را دریابید؟

1) $3{,}75<A<5{,}75$ 2) $5{,}2<A<1{,}23$

3) $78{,}1<A<48{,}1$ 4)هیچکدام

3. لمیت مجموع ریمان را برای تابع $f(x)=1+x$ در انتروال $[1{,}10]$ دریابید؟

1) $52{,}6$ 2) $58{,}5$ 3) $52{,}3$ 4) $58{,}3$

4. با تقسیم نمودن انتروال $[0{,}3]$ به شش قسمت مساوی مساحت محصور بین خط $y=3x$ و محور x را محاسبه کنید؟

1) $12{,}2<A<14{,}5$ 2) $19{,}2<A<13{,}9$

3) $12{,}5<A<13{,}4$ 4) $11{,}25<A<15{,}75$

5. هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ تعریف و $f(x)$ باشد ست توابع $f(x)+c$ را در حالیکه یک عدد ثابت اختیاری است بنام:

1) انتیگرال معین یاد میکنند

2) انتیگرال غیر معین یاد میکنند

3) تابع یاد می کنند

4) لمیت یاد می کند

6. انتیگرال غیر معین $\int xdx$ را بدست آرید؟

1) x^2+c 2) $\frac{x^2}{2}+c$ 3) $\frac{x^3}{3}+c$ 4) $\frac{x^4}{4}+c$

7. انتیگرال غیر معین $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$ را بدست آورید؟

1) $\frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4}+c$ 2) $\frac{7}{3}\sqrt[4]{x^2}+c$

3) $\frac{3}{2}\sqrt[2]{x^3}+c$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$

8. انتیگرال غیر معین $\int x^{\frac{3}{2}}dx$ را دریابید؟

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x^2}+c$ 2) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+c$

3) $\frac{1}{5}\sqrt{x^4}+c$ 4) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}+c$

9. انتیگرال غیر معین $\int\sqrt[5]{x^3}\,dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{1}{5}\sqrt{x^5}+c$ 2) $\frac{1}{2}\sqrt{x^4}+c$

3) $\frac{2}{5}\sqrt{x^3}+c$ 4) $\frac{5}{8}\sqrt{x^4}+c$

10. انتیگرال غیر معین $\int\frac{1}{x^4}dx$ را بدست آورید؟

1) $-\frac{1}{3x^3}+c$ 2) $\frac{1}{2x^2}+c$

3) $2x^3+3x^2+c$ 4) $\frac{1}{x^5}+c$

11. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ را بدست آورید؟

1) $\sqrt[3]{x}+c$ 2) $\sqrt[5]{x}+c$ 3) $2\sqrt{x}+c$ 4) هیچکدام

12. انتیگرال غیر معین $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^2}}$ رابدست آورید؟

1) $\frac{1}{5}\sqrt[2]{x^3}+c$ 2) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{x^2}+c$

3) $\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}+c$ 4) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{x}+c$

13. قیمت انتیگرال غیر معین $\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ را بدست آورید؟

1) x^2+c 2) $\ln\sqrt{x}+c$ 3) $\sqrt[6]{x}+c$ 4) $x+c$

14. حاصل انتیگرال غیر معین $\int \sqrt[8]{x^4}\,xdx$ عبارتند از:

1) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}+c$ 2) $\frac{2}{3}\sqrt[2]{x^5}+c$

3) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{x^3}+c$ 4) $\frac{1}{8}\sqrt[5]{x^4}+c$

15. حاصل انتیگرال غیر معین $\int 5dx$ کدام اند؟

1) $x+c$ 2) $5+c$ 3) $5x+c$ 4) $\sqrt{5x}+c$

16. حاصل انتیگرال غیرم معین $\int x^4dx$ کدام اند؟

1) $\frac{1}{2}x^3+c$ 2) $\frac{1}{7}x^4+c$

3) $\frac{1}{5}x^5+c$ 4) $\frac{1}{3}x^4+c$

17. قیمت انتیگرال غیر معین $\int 2x^2dx$ را دریابید؟

1) $\frac{1}{3}x^2+c$ 2) $\frac{2}{3}x^3+c$ 3) $\frac{1}{7}x^3+c$ 4) هیچکدام

18. قیمت انتیگرال غیر معین $\int (2x^2+3x)dx$ کدام اند؟

1) x^2+x+c 2) x^3+x^2+c

3) $\frac{2}{3}x^3+3x+c$ 4) $\frac{1}{3}x^2+x+c$

19. قیمت انتیگرال غیر معین $\int (8-2x)dx$ را دریابید؟

1) $8x - x^2 + c$ 2) $2x - x^3 + c$

3) $7x^2 + x + c$ 4) $\frac{1}{7}x^3 + 2x + c$

.20 قیمت انتیگرال غیر معین $\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]\, dx$ را دریابید؟

1) $\frac{x^3}{2} + x^2 + c$ 2) $\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$

3) $\frac{x^5}{2} + \frac{x^3}{3} + c$ 4) $\frac{x^5}{2} + \frac{x^4}{3} + 9x + c$

.21 انتیگرال غیر معین $\int -17dx$ را حساب کنید:

1) $-17x^2 + c$ 2) $-17x + c$

3) $\frac{17x^3}{3}$ 4) $\frac{17x^2}{2} + c$

.22 انتیگرال غیر معین $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}$ را حساب کنید؟

1) $x + \frac{x^2}{2} + c$ 2) $x + \frac{x^3}{2} + c$

3) $x + \frac{x^4}{3} + c$ 4) $x^2 + x + c$

.23 قیمت انتیگرال غیر معین $\int 2x^4 dx$ را بدست آورید؟

1) $x^4 + c$ 2) $\frac{3}{5}x^3 + c$ 3) $\frac{x^2}{2} + c$ 4) $\frac{2}{5}x^5 + c$

.24 قیمت انتیگرال غیر معین $\int \left(2x^2 + 4x^3 - 5x + 9\right)$ عبارت اند از؟

1) $x^3 + \frac{1}{2}x^3 + x^4 + c$ 2) $\frac{2}{3}x^3 + x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + c$ 3) $\frac{7}{2}x^3 + x^4 + x^2 + c$ 4) $\frac{7}{5}x^3 + x^2 + c$

.25 قیمت انتیگرال غیر معین $\int \frac{1}{x^5} dx$ را بدست آرید؟

1) $-\dfrac{1}{3x^2}+c$
2) $\dfrac{2}{x^3+2}+c$
3) $\dfrac{-1}{4x^4}+c$
4) $\dfrac{1}{3x^2}+c$

26. حاصل انتیگرال غیر معین $\int(2x+3)^6$ را بدست آرید؟

1) $\dfrac{1}{8}(2x+3)^2+c$
2) $\dfrac{1}{14}(2x+3)^7+c$
3) $\dfrac{1}{8}(2x+3)^7+c$
4) $(2x+3)^{10}+c$

27. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\dfrac{x^3+2x^2}{x^2}sx$ را بدست آورید؟

1) $\dfrac{x^3}{3}+x+c$
2) $\dfrac{x^2}{2}+2x+c$
3) $2x+\dfrac{x^2}{2}+c$
4) $\dfrac{x^4}{2}+3x+c$

28. قیمت انتیگرال غیر معین $\int(2+x)dx$ را حساب کنید؟

1) $\dfrac{x^3}{2}+x+c$
2) x^3+x^2+c
3) $2x+\dfrac{x^2}{2}+c$
4) هیچکدام

29. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\cos 3x dx$ را دریابید؟

1) $\dfrac{1}{3}\cos x+c$
2) $\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$
3) $\dfrac{1}{7}\cos x+c$
4) هیچکدام

30. حاصل انتیگرال غیر معین $\int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\,dx$ را دریابید/

1) $-\frac{5}{14}\sqrt[5]{(1-4x)^7}$ 2) $-\frac{14}{5}\sqrt[7]{(1-4x)^5}+c$ 3) $\frac{2}{3}\sqrt[5]{1-2x}+c$ 4)هیچکدام

31. قیمت انتیگرال غیر معین $\int 2x(x^2+3)^4 dx$ را بدست آورید؟

1) $\frac{(x^2+3)^5}{5}+c$ 2) $\frac{(x\ \ +8)^8}{3}+c$

3) $\frac{(x\ \ +2)^4}{4}+c$ 4) $\frac{(x\ \ +7)^6}{3}+c$

32. حاصل انتیگرال غیر معین $\int \cos x \sin x dx$ کدام است؟

1) $\frac{2}{3}\sqrt[2]{\sin^3 x}+c$ 2) $-\frac{2}{3}\sqrt[2]{\cos^3 x}+c$

3) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{\sin x}+c$ 4) هیچکدام

33. انتیگرال غیر معین $\int x \sin x dx$ را پیدا کنید؟

1) $-x\cos x+\sin x+c$ 2) $-\sin x\cos x+c$

3) $3\sin x+\cos x+c$ 4)هیچکدام

34. انتیگرال غیر معین $\int \theta\cos\theta d\theta$ را حساب کنید؟

1) $\sin\theta+\cos\theta+c$ 2) $\theta\cos\theta+\cos\theta+c$

3) $\theta\cos\theta+c$ 4) $\sin^2 0+\cos\theta+c$

35. قیمت انتیگرال غیر معین $\int x^5\cos(x^3)dx$ کدام است؟

1) $\frac{x^3}{3}\sin x^2+c$ 2) $\frac{x^2}{2}\sin(x^3)+c$

3) $\frac{x^3}{2}+\sin x^2+c$ 4) هیچکدام

36. حاصل انتیگرال غیر معین $\int e^x \sin x dx$ کدام است؟

1) $\frac{e^x}{3}(\cos x-\sin x)+c$ 2) $\frac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)+c$ 3) $\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+c$ 4) $\frac{e^x}{5}(\cos^2 x+\sin x)+c$

37. قیمت انتیگرال غیر معین $\int[\sin x+8x^3]dx$ را محاسبه کنید؟

1) $\sin x+\cos x+c$ 2) $-\cos x+2x^4+c$

3) $\sin^3 x+\cos x+c$ 4) $3\sin^2 x+\cos x+c$

38. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\left[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^3}+x\right]$ عبارت اند از؟

1) $\frac{x^6}{6}-\frac{4}{3x^3}+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}x^2+c$

2) $\frac{2}{2x^3}+\frac{1}{3x^2}+c$

3) $\frac{7}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+c$

4) $\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$

39. قیمت انتیگرال غیر معین $\int x(1-2x^2)dx$ عبارت اند از؟

1) $-\frac{(1+2x)^2}{7}$ 2) $-\frac{(1-2x^2)^2}{8}$

3) $\frac{1-2x^2}{8}+c$ 4) $x+\frac{2x^4}{3}+c$

40. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\sin x dx$ عبارت اند از؟

1) $\cos x+c$ 2) $\frac{1}{2}\sin x+c$

3) $-\cos x+c$ 4) $-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

41. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ عبارت اند از؟

1) $\sin x+c$ 2) $\cos x+c$

3) $\sin 2x+c$ 4) $\cos 2x+c$

42. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{(1-x)^2}{1-x}dx$ کدام اند؟

1) $x-\frac{1}{3}x^3+c$ 2) $x-\frac{1}{2}x^2+c$

3) $\frac{1}{2}x^2+x^3+c$ 4) $x^2-\frac{1}{3}x^2+c$

43. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\sqrt[2]{x^3}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{2}{3}\sqrt[8]{x}+c$ 2) $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+c$

3) $\frac{2}{8}\sqrt[5]{x}+c$ 4) $\frac{1}{8}\sqrt[8]{x^5}+c$

44. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{3x^2+8x}{x}$ کدام اند؟

1) x^2+8x+c 2) $\frac{3}{2}x^2+8x+c$

3) $\frac{4}{7}x^3+c$ 4) $\frac{7}{4}x^5+9x+c$

45. حاصل انتیگرال غیر معین $\int(2x^2+3)dx$ کدام اند؟

1) $\frac{2}{3}x^3+3x+c$ 2) $\frac{1}{4}x^2+2x+c$

3) $\frac{1}{8}x^3+2x+c$ 4) $\frac{1}{7}x^3+2x+c$

46. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}$ عبارت اند از؟

1) $\sqrt{x^2}+2+x$ 2) $2\sqrt{x^3+2}+c$

3) $2\sqrt{x^3+3}+c$ 4) $7\sqrt{x^2+3}+c$

47. حاصل انتیگرال غیر معین $\int(3x^2+x-1)$ عبارت اند از؟

1) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$ 2) x^2+x+c

3) x^3+2x^2-x+c 4) x^4+x^3+x+c

48. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}$ عبارت اند از؟

1) $\ln|x^2|+c$ 2) $\ln|x|+c$

3) $14x+x+c$ 4) $x-x^2+c$

49. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\cos(2x+1)\,dx$ کدام اند؟

1) $\frac{4}{3}\sin(2x+1)+c$ 2) $\frac{3}{2}\sin(2x+1)+c$

3) $\frac{7}{3}\sin(2x+1)+c$ 4) $\cos\frac{(2x+1)}{3}+c$

50. انتیگرال غیر معین $\int\sqrt{3x+5}\,dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{2}{9}\sqrt[2]{(3x+5)^3}+c$ 2) $\frac{3}{8}\sqrt[2]{3x+5}+c$

3) $(3x+5)^2+c$ 4) $\sqrt[6]{(3x+7)^7}+c$

51. انتیگرال غیر معین $\int\frac{2\,dx}{x+2}$ عبارت اند از؟

1) $3\ln(x+2)+c$ 2) $2\ln|x+2|+c$

3) $5\ln|x+1|+c$ 4) $8\ln(x+2)+c$

52. قیمت انتیگرال غیر معین $\int(3x+6)^3\,dx$ کدام اند؟

1) $\frac{3x+6}{2}+c$ 2) $\frac{(3x+6)^4}{12}+c$

3) $\frac{(3x+6)^3}{4}$ 4) $\frac{(2x+1)^3}{4}+c$

53. انتیگرال غیر معین $\int x^3\sqrt{x^4+2dx}$ را حساب کنید؟

1) $\frac{\sqrt{x^4+2}}{3}+c$ 2) $\frac{\sqrt{(x^4+2)^3}}{6}+c$

3) $\frac{\sqrt[3]{x^4+2}}{5}+c$ 4) $\frac{\sqrt{3x+2}}{2}+c$

54. انتیگرال غیر معین $\int (x^3+2)^2 3x^2dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{(x^3+1)^2}{2}+c$ 2) $\frac{(x^3+2)^3}{3}+c$

3) $\frac{(x^2+1)^3}{4}+c$ 4) هیچکدام

55. حاصل انتیگرال غیر معین $\int \frac{1}{(x-10)^7}$ کدام اند؟

1) $-\frac{1}{6(x-10)^6}+c$ 2) $\frac{1}{3(x-2)^6}+c$

3) $\frac{7}{x-10}+c$ 4) $\frac{8}{(x-10)^3}+c$

56. انتیگرال غیر معین $\int (4-3x)^7dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{(2-3x)^5}{8}+1$ 2) $\frac{(7-2x)^5}{2}$

3) $\frac{(4-3x)^8}{24}+c$ 4) $\frac{(7-2x)^3}{9}+c$

57. انتیگرال غیر معین $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$ را حساب کنید؟

1) $\dfrac{4\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)^3}}{9}+c$ 2) $\dfrac{7\sqrt{x^2+1}}{5}+c$

3) $\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}+c$ 4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^3+2}}+c$

58. انتیگرال غیر معین $\int x\cos xdx$ را حساب کنید؟

1) $x\sin x+\cos x+c$ 2) $x\cos x-\sin x+c$

3) $\sqrt{x}\sin x+c$ 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x+c$

59. حاصل انتیگرال غیر معین $\int e^x\cos xdx$ عبارت اند از؟

1) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos\ x)+c$ 2) $\dfrac{e^x}{3}\left(\cos x-\sin x\right)+c$ 3) $\dfrac{e^x}{4}\left(\cos x+\sin x\right)+c$ 4) $\dfrac{e^x}{3}\left(\cos^2 x-\sin^2\right)+c$

60. انتیگرال غیر معین $\int xe^{-x}dx$ عبارتند از؟

1) xe^x+x+c 2) $-xe^{-x}+e^{-x}+c$

3) e^x+c 4) $-x+ex^2+c$

61. انتیگرال غیر معین $\int x\sqrt{1+x}dx$ را حساب کنید؟

1) $\sqrt[2]{\left(1+x\right)^3}+c$

2) $x^2\sqrt{1+x}dx+c$

3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x}+c$

4) $\dfrac{2}{3}x\ \sqrt[2]{\left(1+x\right)^3}-\dfrac{4}{15}\sqrt{\left(1x\right)^5}+c$

62. قیمت انتیگرال غیر معین $\int x^2e^{2x}dx$ عبارت اند از؟

1) $\dfrac{1}{2}x^2e^2-\dfrac{1}{2}xe^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{2x}+c$

2) $\frac{1}{3}x^2e^x+\frac{1}{2}x^2+c$

3) $\frac{1}{5}x^2c^x+\frac{1}{3}x^2+c$

4) هیچکدام

63. حاصل انتیگرال غیر معین $\int e^{2x}\sin 3xdx$ عبارت اند از؟

1) $\frac{3}{13}e^{3x}\left(\frac{2}{3}\sin 3x-\cos 3x\right)+c$

2) $x^2+e^{2x}\sin x+c$

3) $\frac{2}{7}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\cos x+\sin x\right)+c$

4) $\frac{7}{5}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\cos x-\sin x\right)+c$

64. انتیگرال غیر معین $\int e^{2x}e^{-x}dx$ را حساب کنید؟

1) $-x^2x^2+2x^2+c$

2) $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

3) $\frac{2}{7}e^{7x}\left(\frac{2}{3}\cos x+\sin x\right)+c$

4) $\frac{7}{5}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\cos x-\sin x\right)+c$

65. حاصل انتیگرال غیر معین $f(x)=\int 2^{x-3}dx$ دریابید؟

1) $\frac{2^x}{\ln x}+c$
2) $\frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

3) $\frac{1}{8}\frac{2^3}{\ln 2}+c$
4) $\frac{1}{8}\frac{2^x}{\ln 2}+c$

66. قیمت انتیگرال تابع اکسپو نشیل $\int 3^{x+1}dx$ عبارت اند از؟

1) $3\dfrac{3^x}{\ln 3}+c$ 2) $4\dfrac{4^x}{\ln 2}+c$ 3) $5\dfrac{5^x}{\ln 5}+c$ 4) $7\dfrac{7^x}{\ln 3}c$

67. حاصل انتیگرال تابع اکسپونشیل $\int 6^{x-1}dx$ کدام اند؟

1) $\dfrac{1}{5}\dfrac{\ln 3}{2}+c$ 2) $\dfrac{1}{2}\dfrac{2^3}{\ln 2}+c$ 3) $\dfrac{1}{5}\dfrac{6^x}{\ln 5}+c$ 4) $\dfrac{1}{6}\dfrac{6^x}{\ln 6}+c$

68. قیمت انتیگرال غیر معین $\int 3^{x+1}dx$ کدام اند؟

1) $5\dfrac{2^x}{\ln 2}+c$ 2) $9\dfrac{2^5}{\ln 9}+c$ 3) $\dfrac{3^x}{\ln 2}+c$ 4) $3\dfrac{3^x}{\ln 3}+c$

69. قیمت انتیگرال غیر معین $\int 2^{-x}dx$ کدام اند؟

1) $-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}+c$ 2) $-\dfrac{2^x}{\ln 3}+c$ 3) $-\dfrac{2^x}{\ln 2}+c$ 4) هیچکدام

70. قیمت انتیگرال غیر معین $\int a^{x+b}dx$ کدام اند؟

1) $\dfrac{a^{x+b}}{\ln a}+c$ 2) $\dfrac{a^b}{\ln b}+c$ 3) $\dfrac{a^c}{\ln c}+c$ 4) $\dfrac{a^{x+b}}{2}+c$

71. قیمت انتیگرال غیر معین $\int \dfrac{1}{a^x}$ کدام اند؟

1) $-\dfrac{a^{-x}}{\ln a}+c$ 2) $\dfrac{a^x}{\ln 2}+c$ 3) $\dfrac{3^x}{\ln 3}+c$ 4) $\dfrac{a^x}{\ln 2}+c$

72. قیمت انتیگرال تابع اکسپوننشیل $\int 2^x 3^x dx$ عبارتند از؟

1) $\dfrac{6^x}{\ln 6}+c$ 2) $\dfrac{2^x}{\ln 2}+c$ 3) $\dfrac{3^x}{\ln 3}+c$ 4) هیچکدام

73. قیمت انتیگرال غیر معین $\int \dfrac{5^x+3^x}{2^x}dx$ کدام اند؟

1) $\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{\ln\frac{5}{2}}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}$ 2) $\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{\ln\frac{5}{2}}+\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}$

3) $\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^x \ln 2}{\ln\frac{5}{2}+\ln 3}+c$ 4) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}$

74. قیمت انتیگرال غیر معین $\int(1+2x)dx$ عبارتند از؟

1) $x+\dfrac{2^x}{\ln 2}+c$ 2) $x+\dfrac{2^3}{\ln 3}+c$

3) $x^2+\dfrac{\ln x}{\ln 2}+c$ 4) $\dfrac{x^2+2^x}{\ln 2}+c$

75. انتیگرال غیر معین $\int \ln 3x dx$ رابدست آورید؟

1) $x(\ln 2x+c)+c$ 2) $x(\ln 3x-1)+c$

3) $x(\ln 5x+1)+c$ 4) هیچکدام

76. انتیگرال غیر معین $\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$ عبارت اند از؟

1) $\frac{1}{2}e^{-2x+1}$ 2) e^{2-2x+3}

3) $\frac{1}{2}e^{2x-3}+c$ 4) $-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+c$

77. انتیگرال غیر معین $I=\int\frac{2dx}{x+2}$ عبارت اند از؟

1) $2\ln|x+2|+c$ 2) $x(\ln 2x+c)+c$

3) $x(\ln 2x+c)+c$ 4) $x(\ln 2x+c)+c$

78. انتیگرال غیر معین $\int e^{2x}+dx$ را دریابید؟

1) $\frac{1}{3}e^{3x}+c$ 2) $\frac{1}{5}e^{x}$ 3) $\frac{1}{2}e^{2x}+c$ 4) $\frac{1}{5}e^{x}+c$

79. انتیگرال غیر معین $\int x\ln x^2 dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{1}{2}x\ln x+c$ 2) $\frac{1}{2}\ln x+c$

3) $x^2\ln x+c$ 4) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln x^2+c$

80. قیمت انتیگرال غیر معین $\int \ln 2x^3 dx$ عبارت اند از؟

1) $x\ln 2+\frac{x}{3}+c$

2) $3x\ln x-(3-\ln)x+c$

3) $3x^2+\ln 2+c$

4) $2x^2+\ln 2+c$

81. حاصل انتیگرال غیر معین $\int \ln\sqrt{x}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{2}x+c$ 2) $\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{2}x+c$

3) $\frac{x}{4}+\ln x+c$ 4) $\frac{x}{2}\ln x+c$

82. قیمت انتیگرال غیر معین $\int \log\frac{x}{2}dx$ عبارت اند از؟

1) $x\log\frac{x}{2e}+c$ 2) $x\log\frac{x}{2}+c$

3) $x\log\frac{x}{3}+c$ 4) هیچکدام

83. حاصل انتیگرال غیر معین $\int 3\log\frac{1}{x}dx$ کدام اند؟

1) $-2x+\frac{1}{2}\log x+c$ 2) $-5x\log\frac{2}{x^2}+c$

3) $-3x\log\frac{x}{e}+c$ 4) $10x\log\frac{x}{e}+c$

84. انتیگرال غیر معین $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ را حساب کنید؟

1) $\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+c$ 2) $\ln\left[\frac{(x-4)^4}{x-2}\right]+c$

3) $\ln\left[\frac{x-2}{x-4}\right]+c$ 4) $\ln(x-2)+\ln(x+4)+c$

85. انتیگرال غیر معین $\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}$ را حساب کنید؟

1) $\ln\frac{(x+1)^2}{x+1}+c$

2) $\frac{\ln(x+1)^2}{(x+3)^4}$

3) $\ln(x-2)+\ln(x+2)+c$

4) $\ln\left[|x-2|^{-\frac{1}{5}}\cdot|x+3|^{-\frac{24}{5}}\right]+c$

86. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{\ln(x+1)}{(x+1)(2x+1)}+c$ 2) $\frac{\ln(x-3)}{\ln(2x+1)}+c$

3) $\ln\left[\frac{(1-x)}{(3-x)^{\frac{3}{8}}(x+2)^2}\right]+c$ 4) $\ln\left[\frac{(1-x)}{(3-x)^{\frac{3}{8}}(1+x)^{\frac{1}{8}}}\right]+c$

87. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}$

2) $\frac{1}{3}\ln\left(x^2-6x+13\right)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x+3}{2}$

3) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+\ln x-2$

4) $\frac{1}{7}\ln\left(x^2-6x+13\right)+\arcsin\left(\frac{x+3}{2}\right)$

88. انتیگرال غیر معین $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$ را دریابید؟

1) $\frac{x^2}{2}-2x-arctgx+2\sqrt{2}$

2) $\frac{x^3}{3}-3x-\arctan x+4\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

3) $\frac{x^2}{2}+3x+\arctan x+2\sqrt{3}+c$

4) $\frac{1}{2}x+\arctan x+2\sqrt{3}+c$

89. قیمت انتیگرال غیر معین $\int 5t^7dt$ را دریابید؟

1) $\frac{5}{2}t^6+c$ 2) $\frac{5}{8}t^8+c$ 3) $5t^9+c$ 4) $\frac{3}{2}x^7+c$

90. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{x^3-3}{x^2}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{x^3-3}{x}+c$ 2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{x}+c$

3) $\frac{x^2}{x-3}+c$ 4) x^2+x+c

91. قیمت انتیگرال غیر معین $\int\left(2\cos x-5\sin x+e^x\right)$ عبارت اند از؟

1) $2\sin x+5\cos x+e^x+c$

2) $3\sin x+\cos x+e^x+c$

3) $3\cos^2 x+e^x+c$

4) $2\cos^2 x+3\sin^5 x+c$

92. انتیگرال غیر معین $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ را دریابید؟

1) $\frac{1}{4}\sqrt{\cos^3 x}+c$ 2) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{\cos x}+c$

3) $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c$ 4) $\frac{7}{2}\sqrt{\cos x-\sin x}+c$

93. حاصل انتیگرال غیر معین $\int xe^{-x}dx$ کدام اند؟

1) $-xe^{-x}-e^{-x}+c$ 2) $xe^{x}-e^{2x}+c$

3) $e^{x}-xe^{x}+c$ 4) $2x^2+x+c$

94. حاصل انتیگرال غیر معین $\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{\ln|x+1|}{x+2}+c$ 2) $\frac{\ln|x+2|}{x+3}=c$

3) $\ln\left|\frac{x-2}{2x+1}+c\right|$ 4) $\ln\left|\frac{x-1}{2x+2}\right|+c$

95. حاصل انتیگرال غیر معین $\int_1^3 x^2dx$ را دریابید؟

1) $\frac{22}{3}$ 2) $\frac{26}{3}$ 3) $\frac{27}{2}$ 4) $\frac{28}{9}$

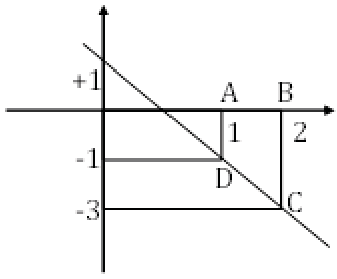
96. مساحت محصور توسط خط $y=3$ و محور x در انتروال $[-1,4]$ را حساب کنید؟

1) 16 2) 17 3) 15 4) 18

97. مساحت محصور شده توسط خط $y=x-1$ و محور x را در انتروال $[0,3]$ دریابید؟

1) 1.2 2) 7.3 3) 2.5 4) 1.7

98. با استفاده از شکل مقابل مساحت محصور بین خط $y=-2x+1$ و محور x را محاسبه کنید؟



1) 3 2) 5 3) 7 4) 2

.99 انتیگرال معین $\int_3^4 dx$ را محاسبه کنید؟

1) 5 2) 8 3) 4 4) 1

.100 انتیگرال معین $\int_2^4 4dx$ را محاسبه کنید؟

1) 12 2) 16 3) 15 4) 17

.101 انتیگرال $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ با هم چی رابطه دارد؟

1)مساوی 2) مساوی نیست 3) هر دو 4) هیچکدام

.102 انتیگرال معین $\int_3^3 3x^2dx$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 3 3) 5 4) 0

.103 انتیگرال معین $\int_0^1 \left(4+3x^2\right)$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 7 3) 5 4) 6

.104 انتیگرال معین $\int_0^3 \left(x^2-1\right)dx$ را حساب کنید؟

1) 7 2) 5 3) 6 4) 8

.105 اگر انتیگرال $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ و $\int_0^8 f(x)dx = 12$ باشند قیمت $\int_8^{10} f(x)dx$ را حساب کنید؟

1) 12 2) 7 3) 5 4) 9

.106 رابطه $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ را بنام چه یاد می کنند؟

1) قضیه تطبیقی انتیگرال 2) قضیه تخمینی انتیگرال

3) تطبیقات انتیگرال 4) همه

.107 انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ را طور تخمینی حساب کنید؟

1) بین عدد 2 و 3 2) بین عدد 0.2 و 4.3

3) بین عدد 1 و 0.3679 4) بین عدد 7 و 8.9

.108 تابع $f(x)=x^2$ را در انتروال $[1,4]$ در نظر بگیرید درین صورت قیمت C در قضیه قیمت متوسط تابع عبارت اند از؟

1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $-\sqrt{7}$ 4) $\sqrt{7}$

.109 انتیگرال معین $\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{7}{4}$ 2) $\frac{5}{3}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) $\frac{9}{2}$

.110 قیمت انتیگرال معین $\int_2^5 7xdx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{117}{2}$ 2) $\frac{118}{7}$ 3) $\frac{147}{2}$ 4) $\frac{149}{7}$

.111 حاصل انتیگرال معین $\int_{-2}^{4}(-x)\,dx$ را بدست آرید؟

1) 7 2) 3 3) 8 4) -6

.112 قیمت انتیگرال معین $\int_1^3 \sqrt{x}dx$ عبارت اند از؟

1) $\frac{7}{2}$ 2) $\frac{13}{3}$ 3) $\frac{15}{2}$ 4) $\frac{14}{3}$

113. حاصل انتیگرال معین $\int_{-2}^{2} 3x dx$ کدام اند؟

1) $\frac{7}{2}$ 2) $\frac{13}{3}$ 3) $\frac{15}{2}$ 4) $\frac{14}{3}$

114. قیمت انتیگرال معین $\int_{1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)$ را دریابید؟

1) $\frac{18}{9}$ 2) $\frac{13}{3}$ 3) $\frac{15}{2}$ 4) $\frac{14}{3}$

115. حاصل انتیگرال معین $\int_{-4}^{4} \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$ را بدست آرید؟

1) $\frac{213}{2}$ 2) $\frac{517}{4}$ 3) $\frac{512}{5}$ 4) $\frac{714}{5}$

116. قیمت انتیگرال معین $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$ را در انتروال $[-1, 4]$ دریابید اگر $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 5$ و $\int_{1}^{4} f(x)\, dx = -2$ باشد:

1) 7 2) 5 3) 8 4) 3

117. تابع $f(x) = x$ را در انتروال $[0, 2]$ در نظر گرفته و از آن قیمت c را در قضیه متوسط دریابید؟

1) $\sqrt{7}$ 2) 3 3) 2 4) 7

118. حاصل انتیگرال معین $\int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{(3-5x)^2}$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 1 3) 5 4) 3

119. انتیگرال معین $\int_{0}^{1} x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{1}{7}$ 2) $\frac{1}{8}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{14}$

120. انتیگرال معین $\int_{0}^{1} x^2 \left(1 + 2x^5\right) dx$ را محاسبه کنید؟

استاد صمیم رنجبر

1) $20.\overline{2}$ 2) 19.3 3) 17.4 4) 18.5

121. قیمت انتیگرال معین $\int_0^2 \sqrt{4+3x}dx$ را بدست آرید؟

1) $\frac{201}{3}$ 2) 26 3) $\frac{205}{7}$ 4) $\frac{304}{9}$

122. قیمت انتیگرال معین $\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+10}$ عبار اند از؟

1) $\frac{\ln 35}{2}-\ln\frac{10}{2}$ 2) $\ln\frac{3.5}{2}$

3) $\ln\frac{5}{2}+\frac{7}{3}$ 4) 1 و 2 درست است اند

123. انتیگرال معین $\int_0^1 -xe^x dx$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 5 3) 6 4) -1

124. انتیگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x\cos 2\ xdx$ را دریابید؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{8}$

125. قیمت انتیگرال معین $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$ کدام اند؟

1) $\frac{44\sqrt{2}-16}{15}$ 2) $\sqrt{2}+12$

3) $7\sqrt{2}+13$ 4) $8\sqrt{7}+\sqrt{5}$

126. حاصل انتیگرال معین $\int_0^1 xe^x\ dx$ کدام اند؟

1) 0 2) -1 3) 1 4) e^2

127. حاصل انتیگرال معین $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ عبارت اند از؟

1) 0 2) 1 3) $\frac{\pi}{6}$ 4) 2

128. حاصل انتیگرال معین $\int_{-4}^{4}\left[2x^2-\frac{1}{8}x^4\right]$ عبارت اند از؟

1) 85.33 2) 32.2 3) $34.\overline{13}$ 4) هیچکدام

129. حاصل انتیگرال معین $\int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx$ را بدست آرید؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{8}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{2}{3}$

130. انتیگرال معین $\int_{0}^{3}4dx$ را حساب کنید؟

1) 11 2) 12 3) 15 4) 5

131. حاصل انتیگرال معین $\int_{1}^{3}\sqrt{x}dx$ را دریابید؟

1) $2\sqrt{3}$ 2) $\frac{6\sqrt{3}-2}{3}$ 3) $\frac{7\sqrt{3}-3}{4}$ 4) $\frac{8\sqrt{2}-8}{4}$

132. انتیگرال معین $\int_{1}^{2}\left(x^2-x^5\right)dx$ را دریابید؟

1) $\frac{17}{2}$ 2) $\frac{13}{4}$ 3) $-\frac{49}{6}$ 4) $\frac{7}{5}$

133. انتیگرال معین $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 0 3) 5 4) 6

134. انتیگرال معین $\int_{-2}^{0}\left[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right]dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{1}{6}$ 2) $-\frac{1}{9}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{7}{3}$

135. انتیگرال معین $\int_{0}^{3}\left(x^3+x^2\right)dx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{121}{12}$ 2) $\frac{271}{12}$ 3) $\frac{1218}{141}$ 4) $\frac{12}{11}$

136. قیمت انتیگرال معین $\int_{-2}^{2}\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right]$ را دریابید؟

1) $\frac{57}{2}$ 2) $\frac{56}{3}$ 3) $\frac{58}{4}$ 4) 27

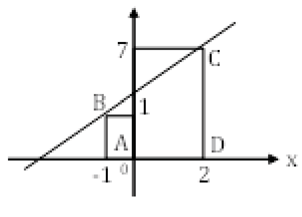
137. انتیگرال معین $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$ را حساب کنید؟

1) -1 2) 0 3) 4 4) 2

138. انتیگرال معین $\int_{1}^{2}x^2 dx$ را بدست آرید؟

1) $\frac{7}{9}$ 2) $\frac{7}{3}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{3}{10}$

139. مساحت محصور شده انتیگرال زیر را با استفاده از شکل حساب کنید؟



$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$$

1) 11 2) 13 3) 12 4) 17

140. انتیگرال معین $\int_{0}^{2}\frac{dt}{(s-2t)^2}$ را بدست آرید؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{7}{3}$

141. انتیگرال معین $\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$ را حساب کنید.

1) $\frac{53}{8}$ 2) $\frac{52}{9}$ 3) $\frac{56}{7}$ 4) $\frac{58}{4}$

142. انتیگرال معین $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^3 xdx$ را حساب کنید؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{5}{7}$ 4) $\frac{1}{8}$

143. انتیگرال معین $\int_0^\pi \sin x\cos dx$ عبارت اند از؟

1) 2 2) 3 3) 1 4) 0

144. حاصل انتیگرال معین $\int_0^{2\pi} x\cos 3xdx$ را حساب کنید؟

1) 2 2) 5 3) 3 4) 0

145. انتیگرال معین $\int_{-1}^1 e^{2x}dx$ را دریافت کنید؟

1) 1.731 2) 2.118 3) 3.627 4) هیچکدام

146. قیمت انتیگرال معین $\int_1^2 2x\ln x^2dx$ را دریابید؟

1) 1.213 2) 2.545 3) 1.73 4) 2.48

147. حاصل انتیگرال معین $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$ کدام اند؟

1) $1+e^3$ 2) $2-2e^2$ 3) $1+e^2$ 4) $1-e^4$

استاد صمیم رنجبر

.148 مشتق $\int_{2}^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}dt$ را بیابید؟

1) $\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$ 2) $\frac{3x}{(x^2+1)^2+2}$

3) $\frac{4x}{(x^2+1)^3+1}$ 4) $\frac{5x}{2x+3}$

.149 مشتق $\int_{\sin t}^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}dx$ کدام اند؟

1) $1-\frac{\tan 1}{8-\sin t}$ 2) $\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{\sec t}{4-\cos t}$

3) $\frac{\sin t}{4-\cos^2 t}-\frac{\cos t}{4-\sin^2 t}$ 4) هیچکدام

.150 مشتق $f(t)=\int_{-\pi}^{t}\frac{\cos y}{1+y^2}dy$ را دریابید؟

1) $\frac{\cos t}{1+t^2}$ 2) $\frac{\sin y}{1+t^2}$ 3) $\frac{\cos y}{1+\cos^2 y}$ 4) $\frac{\sin y}{1-\sin^2 y}$

.151 مشتق $f(x)=\int_{-\pi}^{t}\frac{\cos y}{1+y^2}dy$ را دریابید؟

1) $\frac{\cos t}{1+t^2}$ 2) $\frac{\sin y}{1+t^2}$ 3) $\frac{\cos y}{1+\cos^2 y}$ 4) $\frac{\sin y}{1+\sin^2 y}$

.152 مشتق $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ عبارت اند از؟

1) $\frac{\cos t}{x^2}$ 2) $\frac{\sin x}{x}$ 3) $\frac{\cos x}{x^2}$ 4) $-\frac{\sin^2 x}{t}$

.153 مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $x=4-y^2$ و محور y را حساب کنید؟

1) $\frac{32}{3}$ 2) $\frac{31}{2}$ 3) $\frac{35}{7}$ 4) $\frac{17}{8}$

.154 مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=1-\frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه کنید؟

1) 1.2242 2) 1.8853 3) $2,589$ 4) 1.577

.155 گراف تابع $y = x^3 - 3x$ با محور x یک سطح را محصور نموده است مساحت این سطح را حساب کنید؟

1) 6.27 2) 16.9247 3) 61.3464 4) 6.9247

.156 گراف منحنی تابع $y = x^2 - 3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x را در انتروال $[-1,4]$ محاسبه کنید؟

1) $\frac{17}{8}$ 2) $\frac{32}{7}$ 3) $\frac{42}{13}$ 4) $\frac{49}{6}$

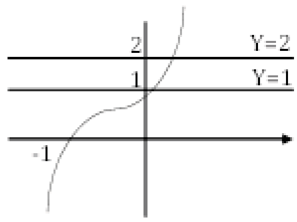
.157 مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x$ و محور x عین خطوط $x = 2$ و $x = -1$ را دریابید؟

1) $\frac{2}{7}$ 2) $\frac{8}{3}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{7}{12}$

.158 مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x$ و محور x را در انتروال $[-2\pi, 2\pi]$ حساب کنید؟

1) 7 2) 3 3) 5 4) 8

.159 مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = x^3 + 1$ و محور y وخطوط $y = 1$ و $y = 2$ را نظر به شکل دریابید؟



1) $\frac{17}{2}$ 2) $\frac{19}{4}$ 3) $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{14}{8}$