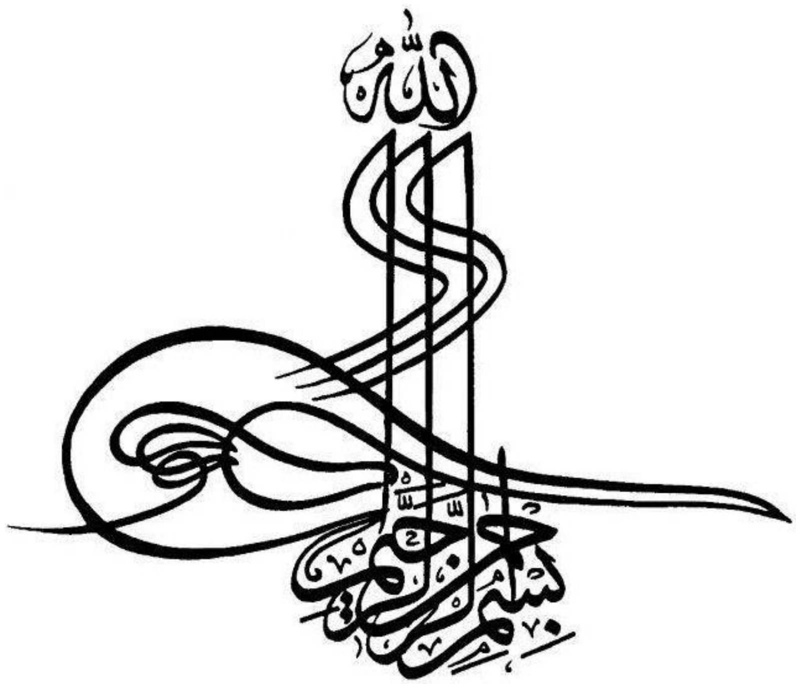

جهت تهیه جزو ات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی
کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس
دربرگزاری کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش وپرورش با شماره
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

انتگرال

رشته تجربی

فهرست

۵ محاسبه مساحت به کمک انتگرال.....................

۱قوانین و فرمول های انتگرال

۱-۱تعریف انتگرال

به صورت خیلی ساده انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری است اما چطور؟ به مثال زیر دقت کنید.

$$y = x^{۲} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = ۲x$$

حالا اگر از ما بپرسید چه تابعی هست که مشتقش شده, ۲x چی میگین؟حتماً سریع میگیم خب معلومه $x^{۲}$ شاید هم یکی بگه $x^{۲}+۴$ یا $x^{۲}+۱$ و همه این جواب ها هم درسته واقعیت این که نمیتونید بگید عدد ثابتی که با تابع $x^{۲}$ جمع شده چند بوده چون در مشتق گیری عدد ثابت حذف می شود(صفر می شود) بنابراین به صورت کلی میتونیم بگیم جواب $x^{۲}+\mathrm{c}$ هست که c یه عدد ثابته. به بیان انتگرال داریم.

مثال

$$\int ۲x dx = x^{۲} + c$$

$$(x^{۳}+c)' = ۳x^{۲} \Rightarrow \int ۳x^{۲} dx = x^{۳} + c$$

$$(sinx + c)' = cosx \Rightarrow \int cosx dx = sinx + c$$

شکل کلی یک انتگرال به صورت زیر هست:

$$\int_a^b f(x)dx$$

که a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می گوییم $f(x)$ هم تابع جلوی انتگرال است.

تذکر۱: اگر حدود انتگرال یعنی b و a داده شده باشند انتگرال را معین و در غیر این صورت انتگرال را نامعین می گوییم.

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ انتگرال معین

$\int f(x)dx \Rightarrow$ انتگرال نامعین

تذکر۲: dx یعنی انتگرال گیری نسبت به x انجام می شود (متغیر ما x است) بنابراین هر عبارتی که x ندارد عدد ثابت فرض می شود.

نکته مهم: اگر از جواب انتگرال نا معین مشتق بگیریم باید به تابع جلوی انتگرال برسیم

به بیان انتگرال:

$$\int f(x)dx = g(x) \longrightarrow g'(x) = f(x)$$

$$\int x^۲ dx = \frac{x^۳}{۳} + c \longrightarrow (\frac{x^۳}{۳} + c)' = x^۲$$

$$\int cosxdx = sinx + c \longrightarrow (sinx + c)' = cos\,x$$

سوال: آیا حاصل انتگرال های زیر را درست به دست آورده ایم؟

الف) $\int (x^۳ + ۲x)dx = \frac{x^٤}{٤} + x^۲ + c$

حل: اگر از جواب انتگرال مشتق بگیریم و به عبارت جلوی انتگرال برسیم درست است یعنی

$(\frac{x^{٤}}{٤}+x^{٢}+c)'=x^{٣}+٢x \longrightarrow$ درست است

ب) $\int \sin x dx = cosx + c \longrightarrow (cosx + c)' = -sinx \neq sinx$

۲-۱قوانین انتگرال

قانون ۱

همچنانکه برای مشتق گیری از جمع و تفریق چند تابع کافی از تک تک توابع جداگانه مشتق بگیریم در اینجا نیز برای انتگرال گیری هم به همین صورت عمل می کنیم یعنی اگر در جلوی انتگرال جمع یا تفریق چند تابع را داشته باشیم برای تک تک توابع جداگانه انتگرال می نویسیم.

به بیان انتگرال:

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm \cdots)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \cdots$$

به عنوان مثال:

$$\int (x^{٣}+٤x^{٢}-٥x+٣)dx = \int x^{٣}dx + \int ٤x^{٢}dx - \int xdx + \int ٣dx$$

تذکر۱: وقتی برای هر تابع جداگانه انتگرال نوشتید dx فراموش نشود.

قانون ۲

اگر یک عدد ثابت (مانند k) در تابع جلوی انتگرال ضرب شده باشند می توان آن را از انتگرال بیرون آورد.

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$$

همین ویژگی را برای مشتق گیری نیز داشتیم.

$$a)\ \int ۵f(x)dx = ۵\int f(x)dx \qquad b)\ \int ۵x^{۲}dx = ۵\int x^{۲}dx$$

$$c)\ \int \frac{۵}{۶}x^{۴}dx = \frac{۵}{۶}\int x^{۴}dx = ۰ \qquad d)\ \int \frac{x^{۷}}{۴}dx = \frac{۱}{۴}\int x^{۷}dx$$

$$e)\ \int \frac{۲}{۵x^{۲}}dx = \frac{۲}{۵}\int \frac{۱}{x^{۲}}dx \qquad f)\ \int \frac{x+cosx}{۵}dx = \frac{۱}{۵}\int (x+cosx)dx$$

قانون ۳

متاسفانه بعضی از بچه ها فکر میکنن برای انتگرال گیری از ضرب توابع هم(مثل مشتق) فرمول داریم اما متاسفانه چنین فرمولی وجود ندارد .

بنابراین

$$\int f(x).g(x)dx \neq \int f(x)dx.\int g(x)dx$$

$$\int x^{۲}(۱+x)^{۳}dx \neq \int x^{۲}dx \times \int (۱+x)^{۳}dx$$

تذکر: برای حل انتگرالهای به صورت حاصلضرب آنها را به صورت حاصل جمع و تفریق تبدیل می کنیم سپس از قانون ۱ حل می کنیم.

مثال ۱ $\int x^{۲}(۱+x^{۳})dx = \int (x^{۲}+x^{۵})dx = \int x^{۲}dx + \int x^{۵}dx$

مثال ۲ $\int x^{۳}(۱+x)^{۲}dx = \int x^{۳}(۱+۲x+x^{۲})dx$

یادآوری

$$a^{m}\times a^{n} = a^{m+n}$$

$$a^{n}\times b^{n} = (ab)^{n}$$

$$\Rightarrow \int (x^{۳} + ۲x^{۴} + x^{۵})dx = \int x^{۳}dx + \int ۲x^{۴}dx + \int x^{۵}dx$$

قانون ۴

برای انتگرال گیری از توابع کسری(تقسیم توابع) نیز در حالت کلی فرمولی وجود ندارد(به استثنای بعضی حالات خاص)

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

$$\int \frac{x^{۳} + ۴}{x^{۲} + ۵}dx \neq \frac{\int (x^{۳} + ۴)dx}{\int x^{۲} + ۵\ dx}$$

حالات خاص انتگرال توابع کسری

حالت خاص ۱

در توابع کسری اگر مشتق مخرج در صورت ظاهر شود جواب انتگرال برابر $\ln\left|\text{مخرج}\right|$ است. یعنی

$$\int \frac{\text{مشتق مخرج}}{\text{مخرج}}dx = ln\left|\text{مخرج}\right| + c$$

مثال ۱ $\int \frac{۲x}{x^{۲} + ۱}dx = ?$

چون مشتق مخرج در صورت ظاهر شد، یعنی $(x^{۲} + ۱)' = ۲x$ پس جواب می شود. $ln|x^{۲} + ۱| + c$

مثال ۲ $\int \frac{۱}{x}dx = ln|x| + c$

مثال ۳ $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

مثال ٤ $\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{1}{x}dx = 3\,ln|x| + c$

مثال ٥ $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}dx = ln|x^3+2x| + c$

مثال ٦ $\int \frac{x}{x^2+5}dx =?$

در مثال۶ چون مشتق مخرج برابر ۲x است و در صورت فقط x داریم می توانیم x را در ۲ ضرب کنیم و معکوس آن را پشت انتگرال بنویسیم یعنی

$$\int \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+5| + c$$

حالت خاص ۲

در صورتی که مشتق مخرج در صورت نباشد حتماً بایستی کاری کنیم که مخرج از بین برود که برای این کار از نکات زیر کمک می گیریم.

نکته ۱: اگر مخرج کسر یک جمله باشد با تفکیک کردن مخرج را ساده می کنیم یعنی

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

مثال

$$\int \frac{x^3+5x-3}{x} = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{3}{x}\right)dx = \int x^2 + 5 - \frac{3}{x})dx$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}+4x^2-2x+5}{2x^{\frac{1}{2}}}dx = \int \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^2}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}})dx$$

یادآوری	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

نکته ۲: در توابع گویا اگر مخرج کسر مجموع یا تفاضل دوجمله غیر رادیکالی باشد به کمک تجزیه ؛ مخرج را از بین می بریم.

$a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$ اتحاد مزدوج

$a^۳ \pm b^۳ = (a \pm b)(a^۲ \pm ab + b^۲)$

مثال ۱ $\int \frac{x^۲-۱}{x+۱} dx = \int \frac{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}{\cancel{x+۱}} dx = \int (x-۱) dx$

مثال ۲ $\int \frac{x^۳+۲۷}{x+۳} dx = \int \frac{\cancel{(x+۳)}(x^۲-۳x+۹)}{\cancel{(x+۳)}} dx = \int (x^۲ - ۳x + ۹) dx$

مثال۳ $\int \frac{x^۲-۵x+۶}{x-۲} dx = \int \frac{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}{\cancel{x-۲}} dx = \int (x-۳) dx$

نکته ۳: در توابع کسری اگر مخرج مجموع یا تفاضل دو جمله شامل رادیکال باشد به کمک گویاکردن؛ مخرج را از بین می بریم.

مثال ۴ $\int \frac{۱-x}{(۱+\sqrt{x})} dx = \int \frac{۱-x}{۱+\sqrt{x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}} dx = \int \frac{(۱-x)(۱-\sqrt{x})}{۱^۲ - (\sqrt{x})^۲}$

$= \int \frac{\cancel{(۱-x)}(۱-\sqrt{x})}{\cancel{۱-x}} dx = \int (۱-\sqrt{x}) dx$

مثال ۵ $\int \frac{۴-۴x}{\sqrt{x}-۱} dx = \int \frac{(۴-۴x)}{\sqrt{x}-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} dx = \int \frac{(۴-۴x)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})^۲ - ۱^۲}$

$= \int \frac{۴(۱-x)(\sqrt{x}+۱)}{x-۱} dx = \int \frac{۴(-\cancel{(x-۱)})(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}} dx$

$$= \int -۴(\sqrt{x}+۱)dx = -۴\int (\sqrt{x}+۱)dx$$

مثال۶ $\int \frac{x-۸}{\sqrt[۳]{x}-۲}dx = \int \frac{x-۸}{\sqrt[۳]{x}-۲} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲-\sqrt[۳]{x+۴)}}dx$

$$= \int \frac{(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{(\sqrt[۳]{x})^۳-(۲)^۳} = \int \frac{(\cancel{x-۸})(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{\cancel{x-۸}}dx$$

$$= \int \left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)dx$$

نکته ۴:اگر مخرج کسر، یک تابع مثلثاتی باشد با کمک فرمول های مثلثات مخرج را از بین می بریم.

$$\int \frac{cos^۲x}{۱+sinx}dx = \int \frac{(۱-sin\,x)(\cancel{۱+sinx})}{\cancel{۱+sinx}}dx = \int ۱-sinxdx$$

$$\boxed{cos^۲x = ۱-sin^۲x = (۱-sinx)(۱+sinx)}$$

$$\int \frac{sin^۲xdx}{۱-cosx} = \int \frac{(\cancel{۱-cosx})(۱+cosx)}{\cancel{۱-cosx}}dx = \int ۱+cosdx$$

$$\boxed{sin^۲x = ۱-cos^۲x = (۱-cosx)(۱+cosx)}$$

$$\int \frac{cos۲x}{sinx+cosx}dx = \int \frac{(cosx-sinx)(\cancel{cosx+sinx})}{\cancel{sinx+cosx}}dx = \int cosx-sinx$$

$$cos^۲x = cos^۲x - sin^۲x = (cosx-sinx)(cosx+sinx)$$

قانون پنجم

انتگرال توابع رادیکالی

$$\int \sqrt{f(x)}dx$$

بعدا در مورد آن مفصل صحبت خواهیم کرد.

۳-۱فرمولهای پایه ای انتگرال گیری:

فرمول ۱

$$\boxed{\int dx = x + c}$$

مثال $\int ۲dx = ۲\int dx = ۲x + c$

فرمول ۲

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c \qquad n \neq -۱}$$

رابطه۲ پرکاربردترین و مهمترین رابطه ی مباحث انتگرال می باشد.

تذکر ۱: در فرمول بالا n یعنی توان x می تواند هر عدد (کسر ،صحیح،...) به جزء ۱− باشد.

تذکر ۲: برای استفاده از فرمول بالا حتماً باید x^n در صورت کسر باشد. بنابراین اگر در مسئله داده شده n در مخرج کسر یا در زیر رادیکال باشد باید آن را با استفاده از روابط زیربه صورت توان دار در صورت کسر نوشت.

$\sqrt{x} = x^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ $\sqrt[۳]{x} = x^{\frac{۱}{۳}}$؛ $\sqrt[۳]{x^۲} = x^{\frac{۲}{۳}}$؛ $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$

$\frac{۱}{x^{-\frac{۱}{۳}}} = x^{\frac{۱}{۳}}$ ؛ $\frac{۲}{x^{+۳}} = ۲x^{-۳}$؛ $\frac{۱}{x^۲} = x^{-۲}$؛ $\boxed{\frac{۱}{x^n} = x^{-n}}$

$$\frac{۳}{\sqrt[۵]{x^۲}} = \frac{۳}{x^{\frac{۲}{۵}}} = ۳x^{-\frac{۲}{۵}}$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید؟

۱) $\int x^{۳}dx=\frac{x^{۳+۱}}{۳+۱}+c=\frac{x^{٤}}{٤}+c$

۲) $\int x^{-۵}dx=\frac{x^{-۵+۱}}{-۵+۱}+c=\frac{x^{-٤}}{-٤}+c$

۳) $\int x^{\frac{۱}{۳}}dx=\frac{x^{\frac{۱}{۳}+۱}}{\frac{۱}{۳}+۱}+c=\frac{x^{\frac{٤}{۳}}}{\frac{٤}{۳}}+c=\frac{۳}{٤}x^{\frac{٤}{۳}}+c$

٤) $\int x^{-\frac{٦}{۵}}dx=\frac{x^{-\frac{٦}{۵}+۱}}{-\frac{٦}{۵}+۱}+c=\frac{x^{-\frac{۱}{۵}}}{-\frac{۱}{۵}}+c=-۵x^{-\frac{۱}{۵}}+c$

۵) $\int \sqrt[۵]{x^{۲}}dx=\int x^{\frac{۲}{۵}}dx=\frac{x^{\frac{۲}{۵}+۱}}{\frac{۲}{۵}+۱}+c=\frac{x^{\frac{۷}{۵}}}{\frac{۷}{۵}}+c=\frac{۵}{۷}x^{\frac{۷}{۵}}+c$

٦) $\int \sqrt{x}dx=\int x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}+c=\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c$

۷) $\int \frac{۱}{x^{۳}}dx=\int x^{-۳}dx=\frac{x^{-۳+۱}}{-۳+۱}+c=\frac{x^{-۲}}{-۲}+c$

۸) $\int \frac{۷}{x^{-\frac{۲}{۵}}}dx=\int ۷x^{+\frac{۲}{۵}}dx=۷\int x^{\frac{۲}{۵}}dx=۷\left(\frac{x^{\frac{۲}{۵}+۱}}{\frac{۲}{۵}+۱}\right)+c=۷\left(\frac{x^{\frac{۷}{۵}}}{\frac{۷}{۵}}\right)+c$

$=۷\left(\frac{۵}{۷}x^{\frac{۷}{۵}}\right)+c=۵x^{\frac{۷}{۵}}+c$

$$۹)\ \int \frac{۴}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} = \int \frac{۴}{۳x^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۴}{۳}\int x^{-\frac{۲}{۳}}dx = \frac{۴}{۳}\left(\frac{x^{-\frac{۲}{۳}+۱}}{-\frac{۲}{۳}+۱}\right) + c = \frac{۴}{۳}\left(\frac{x^{\frac{۱}{۳}}}{\frac{۱}{۳}}\right)$$

$$= \frac{۴}{۳}\left(۳x^{\frac{۱}{۳}}\right) + c = ۴x^{\frac{۱}{۳}} + c$$

$$۱۰)\ \int x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}dx = \int x^{۲}.x^{\frac{۲}{۳}}dx = \int x^{\frac{۸}{۳}}dx = \frac{x^{\frac{۸}{۳}+۱}}{\frac{۸}{۳}+۱} + c = \frac{x^{\frac{۱۱}{۳}}}{\frac{۱۱}{۳}} + c = \frac{۳}{۱۱}x^{\frac{۱۱}{۳}} + c$$

$$\boxed{x^m \times x^n = x^{m+n}}$$

$$۱۱)\ \int \frac{x^{۳}}{x^{۲}}dx = \int x^{۳-۲}dx = \int x^{۱}dx = \frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} + c = \frac{x^{۲}}{۲} + c$$

$$\boxed{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$$

$$۱۲)\ \int \frac{۲x^{۵}}{۳x^{\frac{۱}{۳}}}dx = \frac{۲}{۳}\int \frac{x^{۵}}{x^{\frac{۱}{۳}}}dx = \frac{۲}{۳}\int x^{۵-\frac{۱}{۳}}dx = \frac{۲}{۳}\int x^{\frac{۱۴}{۳}}dx = \frac{۲}{۳}\left(\frac{x^{\frac{۱۴}{۳}+۱}}{\frac{۱۴}{۳}+۱} + c\right)$$

$$= \frac{۲}{۳}\left(\frac{x^{\frac{۱۷}{۳}}}{\frac{۱۷}{۳}}\right) = \frac{۲}{\cancel{۳}}\left(\frac{\cancel{۳}}{۱۷} \times x^{\frac{۱۷}{۳}}\right) + c = \frac{۲}{۱۷}x^{\frac{۱۷}{۳}} + c$$

$$۱۳)\ \int \frac{x^{\frac{۱}{۳}}}{۴x^{۲}}dx = \frac{۱}{۴}\int x^{\frac{۱}{۳}-۲}dx = \frac{۱}{۴}\int x^{-\frac{۵}{۳}}dx = \frac{۱}{۴}\left(\frac{x^{-\frac{۵}{۳}+۱)}}{-\frac{۵}{۳}+۱}\right) + c = \frac{۱}{۴}\left(\frac{x^{-\frac{۲}{۳}}}{-\frac{۲}{۳}}\right) + c$$

$$= \frac{۱}{۴}\left(-\frac{۳}{۲}x^{-\frac{۲}{۳}}\right) + c = -\frac{۳}{۸}x^{-\frac{۲}{۳}} + c$$

۱٤) $\int \frac{\pi x^{٤}}{\sqrt{x}}dx = \pi\int \frac{x^{٤}}{x^{\frac{١}{٢}}}dx = \pi\int x^{٤-\frac{١}{٢}}dx = \pi\int x^{\frac{٧}{٢}}dx = \pi\left(\frac{x^{\frac{٧}{٢}+١}}{\frac{٧}{٢}+١}\right)+c = \frac{٢\pi}{٩}x^{\frac{٩}{٢}}+c$

۱۵) $\int x^{٥}(١+x^{٢})dx = \int(x^{٥}+x^{٧})dx = \int x^{٥}dx + \int x^{٧}dx = \frac{x^{٥+١}}{٥+١}+\frac{x^{٧+١}}{٧+١}+c$

$= \frac{x^{٦}}{٦}+\frac{x^{٨}}{٨}+c$

۱٦) $\int x^{\frac{١}{٢}}\left(x^{\frac{٣}{٢}}+x\right)dx = \int\left(x^{\frac{١}{٢}}.x^{\frac{٣}{٢}}+x^{\frac{١}{٢}}.x^{١}\right)dx = \int(x^{\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٢}}+x^{\frac{١}{٢}+١})dx = \int\left(x^{٢}+x^{\frac{٣}{٢}}\right)dx$

$= \int x^{٢}dx + \int x^{\frac{٣}{٢}}dx = \frac{x^{٢+١}}{٢+١}+\frac{x^{\frac{٣}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}+١}+c = \frac{x^{٣}}{٣}+\frac{x^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}}+c = \frac{x^{٣}}{٣}+\frac{٢}{٥}x^{\frac{٥}{٢}}+c$

۱۷) $\int \sqrt{x}(x^{٣}+\sqrt[٣]{x^{٢}})dx = \int x^{\frac{١}{٢}}\left(x^{٣}+x^{\frac{٢}{٣}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{٧}{٢}}+x^{\frac{٧}{٦}}\right)dx$

$= \int x^{\frac{٧}{٢}}dx + \int x^{\frac{٧}{٦}}dx = \frac{x^{\frac{٧}{٢}+١}}{\frac{٧}{٢}+١}+\frac{x^{\frac{٧}{٦}+١}}{\frac{٧}{٦}+١}+c = \frac{x^{\frac{٩}{٢}}}{\frac{٩}{٢}}+\frac{x^{\frac{١٣}{٦}}}{\frac{١٣}{٦}}+c = \frac{٢}{٩}x^{\frac{٩}{٢}}+\frac{٦}{١٣}x^{\frac{١٣}{٦}}+c$

۱۸) $\int x^{٢}\left(\sqrt{٢}+٥\sqrt{x}\right)dx = \int x^{٢}\left(\sqrt{٢}+٥x^{\frac{١}{٢}}\right)dx = \int\left(\sqrt{٢}x^{٢}+٥x^{٢}.x^{\frac{١}{٢}}\right)dx$

$= \int\left(\sqrt{٢}x^{٢}+٥x^{\frac{٥}{٢}}\right)dx = \int\sqrt{٢}x^{٢}dx + \int ٥x^{\frac{٥}{٢}}dx = \sqrt{٢}\int x^{٢}dx + ٥\int x^{\frac{٥}{٢}}dx$

$= \sqrt{٢}\frac{x^{٢+١}}{٢+١}+٥\frac{x^{\frac{٥}{٢}+١}}{\frac{٥}{٢}+١}+c = \sqrt{٢}\frac{x^{٣}}{٣}+٥\frac{x^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} = \sqrt{٢}\frac{x^{٣}}{٣}+٥\times\frac{٢}{٧}x^{\frac{٧}{٢}}+c = \frac{\sqrt{٢}}{٣}x^{٣}+\frac{١٠}{٧}x^{\frac{٧}{٢}}+c$

۱۹) $\int x^{٤}\left(x^{\frac{٢}{٣}}+\frac{١}{x}\right)dx = \int\left(x^{٤}.x^{\frac{٢}{٣}}+x^{٤}.\frac{١}{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{١٤}{٣}}+x^{٣}\right)dx = \frac{x^{\frac{١٤}{٣}+١}}{\frac{١٤}{٣}+١}+\frac{x^{٣+١}}{٣+١}+c$

$$=\frac{x^{\frac{۱۷}{۳}}}{\frac{۱۷}{۳}}+\frac{x^{٤}}{٤}+c=\frac{۳}{۱۷}x^{\frac{۱۷}{۳}}+\frac{x^{٤}}{٤}+c$$

$$۲۰)\ \int(x^{۲}+۱)^{۲}dx=\int\left(x^{٤}+۲x^{۲}+۱\right)dx=\int x^{٤}dx+\int ۲x^{۲}dx+\int ۱dx$$

$$=\frac{x^{٥}}{٥}+\frac{۲x^{۳}}{۳}+x+c$$

$$\boxed{(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}}$$

$$۲۱)\ \int(x^{۲}-x^{۳})^{۲}dx=\int\left(x^{٤}-۲x^{٥}+x^{٦}\right)dx=\frac{x^{٥}}{٥}-\frac{۲x^{٦}}{٦}+\frac{x^{۷}}{۷}+c$$

$$۲۲)\int(x-\sqrt{x})^{۲}\ dx=\int x^{۲}-۲x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^{۲}dx=\int\left(x^{۲}-۲x.x^{\frac{۱}{۲}}+x\right)dx$$

$$=\int x^{۲}dx-۲\int x^{\frac{۳}{۲}}dx+\int xdx=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}+۱}}{\frac{۳}{۲}+۱}+\frac{x^{۲}}{۲}+c=\frac{x^{۳}}{۳}-۲\times\frac{x^{\frac{٥}{۲}}}{\frac{٥}{۲}}+\frac{x^{۲}}{۲}+c$$

$$=\frac{x^{۳}}{۳}-۲\times\frac{۲}{٥}x^{\frac{٥}{۲}}+\frac{x^{۲}}{۲}+c=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{٤}{٥}x^{\frac{٥}{۲}}+\frac{x^{۲}}{۲}+c$$

$$۲۳)\ \int(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt{x})^{۲}dx=\int(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}-٤\sqrt[۳]{x^{۲}}\sqrt{x}+(۲\sqrt{x})^{۲}dx$$

$$=\int\left(\sqrt[۳]{x^{٤}}-٤x^{\frac{۲}{۳}}.x^{\frac{۱}{۲}}+٤x\right)dx=\int\left(x^{\frac{٤}{۳}}-٤x^{\frac{۷}{٦}}+٤x\right)dx$$

$$=\frac{x^{\frac{٤}{۳}+۱}}{\frac{٤}{۳}+۱}-٤\times\frac{x^{\frac{۷}{٦}+۱}}{\frac{۷}{٦}+۱}+٤\,\frac{x^{۱+۱}}{۱+۱}+c=\frac{۳}{۷}x^{\frac{۷}{۳}}-٤\times\frac{٦}{۱۳}x^{\frac{۱۳}{٦}}+٤\,\frac{x^{۲}}{۲}+c$$

$$=\frac{۳}{۷}x^{\frac{۷}{۳}}-\frac{۲٤}{۱۳}x^{\frac{۱۳}{٦}}+۲x^{۲}+c$$

$$24)\ \int (x^2+1)^3 dx = \int \left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)dx = \frac{x^7}{7} + 3\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + x + c$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$25)\ \int (\sqrt{x}-2)^3 dx = \int (\sqrt{x})^3 - 3(\sqrt{x})^2 \times 2 + 3\sqrt{x} \times 2^2 - 2^3$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 6x + 12x^{\frac{1}{2}} - 8\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 6\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + 12\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 8x + c$$

$$= \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - 3x^2 + 12 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x + c$$

$$26)\ \int x^3(x+1)^2 dx = \int x^3\left(x^2+2x+1\right)dx = \int \left(x^5+2x^4+x^3\right)dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$27)\ \int \frac{4x^3+5x^2}{x^2}dx = \int \left(\frac{4x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2}\right)dx = \int (4x+5)dx = \frac{4x^2}{2} + 5x + c$$

$$28)\ \int \frac{4x-5}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{4x}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}})dx = \int \frac{4x}{x^{\frac{1}{2}}}dx - \int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$= \int 4x^{1-\frac{1}{2}}dx - \int 5x^{-\frac{1}{2}}dx = 4\int x^{\frac{1}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 4\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 5\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 4\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 5 \times \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$29)\ \int \frac{3x-3}{4\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{3x}{4x^{\frac{2}{3}}} - \frac{3}{4x^{\frac{2}{3}}}dx = \frac{3}{4}\int x^{1-\frac{2}{3}}dx - \frac{3}{4}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx - \frac{3}{4}\int x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$=\frac{۳}{٤}\left(\frac{x^{\frac{۱}{۳}+۱}}{\frac{۱}{۳}+۱}\right)-\frac{۳}{٤}\left(\frac{x^{-\frac{۲}{۳}+۱}}{-\frac{۲}{۳}+۱}\right)+c=\frac{۳}{٤}.\frac{x^{\frac{٤}{۳}}}{\frac{٤}{۳}}-\frac{۳}{٤}.\frac{x^{\frac{۱}{۳}}}{\frac{۱}{۳}}+c=\frac{۳}{٤}\times\frac{٤}{۳}x^{\frac{٤}{۳}}-\frac{۳}{٤}\times\frac{۳}{۱}x^{\frac{۱}{۳}}+c$$

$$=x^{\frac{٤}{۳}}-\frac{۹}{٤}x^{\frac{۱}{۳}}+c$$

$$۳۰)\ \int\frac{۵x^{۳}-٤x}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{۵x^{۳}}{x^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{٤x}{x^{\frac{۱}{۲}}}\right)dx=۵\int x^{۳-\frac{۱}{۲}}dx-٤\int x^{۱-\frac{۱}{۲}}dx$$

$$=۵\int x^{\frac{۵}{۲}}dx-٤\int x^{\frac{۱}{۲}}dx=۵\times\frac{x^{\frac{۵}{۲}+۱}}{\frac{۵}{۲}+۱}-٤\times\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}+c=۵\times\frac{x^{\frac{۷}{۲}}}{\frac{۷}{۲}}-٤\times\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}$$

$$=۵\times\frac{۲}{۷}x^{\frac{۷}{۲}}-٤\times\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۱۰}{۷}x^{\frac{۷}{۲}}-\frac{۸}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c$$

$$۳۱)\ \int\frac{x^{۳}+\sqrt{x}}{x^{۲}\sqrt[۳]{x}}dx=\int\frac{x^{۳}}{x^{۲}\sqrt[۳]{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x^{۲}\sqrt[۳]{x}}dx=\int\frac{x^{۳}}{x^{۲}.x^{\frac{۱}{۳}}}dx+\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۲}.x^{\frac{۱}{۳}}}dx$$

$$=\int\frac{x^{۳}}{x^{\frac{۷}{۳}}}dx+\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{\frac{۷}{۳}}}dx$$

$$=\int x^{۳-\frac{۷}{۳}}dx+\int x^{\frac{۱}{۲}-\frac{۷}{۳}}dx=\int x^{\frac{۲}{۳}}dx+\int x^{-\frac{۱۱}{٦}}dx=\frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱}+\frac{x^{-\frac{۱۱}{٦}+۱}}{-\frac{۱۱}{٦}+۱}+c$$

$$=\frac{x^{\frac{۵}{۳}}}{\frac{۵}{۳}}+\frac{x^{-\frac{۵}{٦}}}{-\frac{۵}{٦}}+c=\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{٦}{۵}x^{-\frac{۵}{٦}}+c$$

$$۳۲)\ \int\frac{x^{۲}+\sqrt{x}+۱}{۲x^{۲}}dx=\int\frac{x^{۲}}{۲x^{۲}}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{۲x^{۲}}dx+\int\frac{۱}{۲x^{۲}}dx$$

$$=\int\frac{۱}{۲}dx+\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۲}}dx+\int\frac{۱}{۲}x^{-۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\int dx+\int x^{\frac{۱}{۲}-۲}dx+\frac{۱}{۲}\int x^{-۲}\,dx=\frac{۱}{۲}\int dx+\int x^{-\frac{۳}{۲}}dx+\frac{۱}{۲}\int x^{-۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}x+\frac{x^{-\frac{۳}{۲}+۱}}{-\frac{۳}{۲}+۱}+\frac{۱}{۲}\,.\frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱}+c=\frac{۱}{۲}x-\frac{۲}{۱}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}x^{-۱}+c$$

$$۳۳)\ \int\frac{(۲-\sqrt{x})^{۲}}{x^{۲}\sqrt{x}}dx=\int\frac{٤-٤\sqrt{x}+x}{x^{۲}.\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{٤}{x^{۲}\sqrt{x}}-\frac{٤\sqrt{x}}{x^{۲}\sqrt{x}}+\frac{x}{x^{۲}\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{٤}{x^{۲}.x^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{٤}{x^{۲}}+\frac{x}{x^{۲}.x^{\frac{۱}{۲}}}\right)dx=\int\frac{٤}{x^{\frac{٥}{۲}}}dx-\int\frac{٤}{x^{۲}}dx+\int\frac{x}{x^{\frac{٥}{۲}}}dx$$

$$=\int ٤x^{-\frac{٥}{۲}}-\int ٤x^{-۲}\,dx+\int x^{۱-\frac{٥}{۲}}dx=٤\int x^{-\frac{٥}{۲}}dx-٤\int x^{-۲}dx+\int x^{-\frac{۳}{۲}}dx$$

$$=٤\times\left(\frac{x^{-\frac{٥}{۲}+۱}}{-\frac{٥}{۲}+۱}\right)-٤\left(\frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱}\right)+\frac{x^{-\frac{۳}{۲}+۱}}{-\frac{۳}{۲}+۱}+c$$

$$=٤\times\frac{x^{-\frac{۳}{۲}}}{-\frac{۳}{۲}}-٤\times\frac{x^{-۱}}{-۱}+\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}}+c=٤\left(-\frac{۲}{۳}\right)x^{-\frac{۳}{۲}}+٤x^{-۱}-\frac{۲}{۱}x^{-\frac{۱}{۲}}+c$$

$$۳۲)\ \int\frac{(٤-\sqrt{x})^{۲}-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{(۱٦-۸\sqrt{x}+\cancel{x})-\cancel{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int\frac{۱٦-۸\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{۱٦}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{۸\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}dx=\int\frac{۱٦}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx-\int ۸dx$$

$$=\int ۱٦x^{-\frac{۱}{۲}}dx-\int ۸dx=۱٦\,\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}-۸x+c$$

$$=\frac{۱٦x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}-۸x+c=۱٦\times\frac{۲}{۱}x^{\frac{۱}{۲}}-۸x+c=۳۲x^{\frac{۱}{۲}}-۸x+c$$

۳۴) $\int \frac{(x+۲)^۳}{x^۵}dx = \int \frac{(x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸)}{x^۵}dx$

$= \int \left(\frac{x^۳}{x^۵}+\frac{۶x^۲}{x^۵}+\frac{۱۲x}{x^۵}+\frac{۸}{x^۵}\right)dx = \int x^{-۲}dx + \int ۶x^{-۳}dx + \int ۱۲x^{-۴}dx + \int ۸x^{-۵}dx$

$= \frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱} + ۶\times\frac{x^{-۳+۱}}{-۳+۱} + ۱۲\times\frac{x^{-۴+۱}}{-۴+۱} + ۸\times\frac{x^{-۵+۱}}{-۵+۱} = -x^{-۱} - ۶\times\frac{x^{-۲}}{-۲} + ۱۲\times\frac{x^{-۳}}{-۳} + \frac{۸x^{-۴}}{-۴} + c$

$= -x^{-۱} + ۳x^{-۲} - ۴x^{-۳} - ۲x^{-۴} + c$

۳۵) $\int \frac{x^۲-۹}{x-۳}dx = \int \frac{(\cancel{x-۳})(x+۳)}{\cancel{x-۳}}dx = \int (x+۳)dx = \frac{x^۲}{۲} + ۳x + c$

۳۶) $\int \frac{x^۳-۶۴}{x-۴}dx = \frac{\int(\cancel{x-۴})(x^۲+۴x+۱۶)}{\cancel{x-۴}}dx = \frac{x^۳}{۳} + \frac{۴x^۲}{۲} + ۱۶x + c$

۳۷) $\int \frac{x^۳-۱}{۱-x}dx = \int \frac{(\cancel{x-۱})(x^۲+x+۱)}{-(\cancel{x-۱})}dx = \int(-x^۲-x-۱)dx = -\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۲}{۲} - x + c$

۳۸) $\int \frac{x^۲-۶x+۸}{x-۲}dx = \int \frac{(\cancel{x-۲})(x-۴)}{\cancel{x-۲}}dx = \int(x-۴)dx = \frac{x^۲}{۲} - ۴x + c$

۳۹) $\int \frac{۵-۵x}{۱-\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{۵-۵x}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{۵(\cancel{۱}-x)(۱+\sqrt{x})}{\cancel{۱}-x}$

$= ۵\int ۱+\sqrt{x} = ۵(\int ۱ + x^{\frac{۱}{۲}}dx = ۵\left(x + \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\right) + c = ۵x + \frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + c$

۴۰) $\int \frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}dx = \int \frac{(x^۲-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۴}+\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{\sqrt[۳]{x^۴}+\sqrt[۳]{x^۲}+۱}dx$

$= \int \frac{(x^۲-۱)(\sqrt[۳]{x^۴}+\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{x^۲})^۳-۱^۳} = \int \frac{(x^۲-۱)(\sqrt[۳]{x^۴}+\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{x^۲-۱}dx$

$= \int \left(x^{\frac{۴}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}} + ۱\right)dx = \frac{x^{\frac{۴}{۳}+۱}}{\frac{۴}{۳}+۱} + \frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱} + x = \frac{۳}{۷}x^{\frac{۷}{۳}} + \frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}} + x + c$

۴۱) $\int \frac{(۱ + ۲\sqrt{x})(\sqrt{x} - x)}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{\sqrt{x} - x + ۲(\sqrt{x})^{۲} - ۲\sqrt{x}.x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{x} - x + ۲x - ۲\sqrt{x}.x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}+x-۲\sqrt{x}.x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{۲\cancel{\sqrt{x}}.x}{\cancel{\sqrt{x}}} dx$$

$$= \int ۱\, dx + \int \frac{x}{x^{\frac{۱}{۲}}} dx - \int ۲x dx = \int ۱\, dx + \int x^{\frac{۱}{۲}} dx - ۲\int x dx$$

$$= x + \frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} - ۲\frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} = x + \frac{۲}{۳}.x^{\frac{۳}{۲}} - x^{۲} + c$$

۴۲) $\int \frac{(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲} - ۲}{\sqrt[۳]{x}} dx = \int \frac{\left((\sqrt{x})^{۲} + ۲\sqrt{x} \times \frac{۱}{\sqrt{x}} + (\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲}\right) - ۲}{\sqrt[۳]{x}} dx$

$$= \int \frac{(x\cancel{+۲}+\frac{۱}{x})\cancel{-۲}}{x^{\frac{۱}{۳}}} dx = \int \frac{x+\frac{۱}{x}}{x^{\frac{۱}{۳}}} dx = \int \frac{x}{x^{\frac{۱}{۳}}} dx + \int \frac{\frac{۱}{x}}{x^{\frac{۱}{۳}}}$$

$$= \int x^{۱-\frac{۱}{۳}} dx + \int \frac{۱}{x.x^{\frac{۱}{۳}}} dx = \int x^{\frac{۲}{۳}} dx + \int \frac{۱}{x^{\frac{۴}{۳}}} dx$$

$$= \int x^{\frac{۲}{۳}} dx + \int x^{-\frac{۴}{۳}} dx = \frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱} + \frac{x^{-\frac{۴}{۳}+۱}}{-\frac{۴}{۳}+۱} + c = \frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۳}{۱}x^{-\frac{۱}{۳}} + c$$

مثال: اگر $\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}} dx = f(x)\sqrt{x} + c$ آن گاه $f(x)$ برابر است با: (سراسری تجربی ۸۲)

۱) $۲x - ۱$ ۲) $۲x - ۴$ ۳) $۲x - ۲$ ۴) $۲x - ۳$

برای حل اینگونه سوالات مراحل زیر را انجام می دهیم.

مرحله ۱) بدون توجه به سمت راست جواب انتگرال سمت چپ را بدست می آوریم

مرحله ۲) جواب به دست آمده را مساوی عبارت سمت راست قرار می دهیم

مرحله ۳) کاری می کنیم که $f(x)$ تنها شود.

مرحله ۱ $\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{۳x}{\sqrt{x}} - \frac{۲}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{۳x}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx - \int \frac{۲}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx =$

$= \int ۳x^{۱-\frac{۱}{۲}}dx - \int ۲x^{-\frac{۱}{۲}}dx = ۳\int x^{\frac{۱}{۲}}dx - ۲\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx$

$= ۳ \times \frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} - ۲ \times \frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c = ۳ \times \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} - ۲ \times \frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} + c$

$= ۳ \times \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - ۲ \times \frac{۲}{۱}x^{\frac{۱}{۲}} + c = ۲x^{\frac{۳}{۲}} - ٤x^{\frac{۱}{۲}} + c$

مرحله ۲ $۲x^{\frac{۳}{۲}} - ۴x^{\frac{۱}{۲}} + c = f(x)\sqrt{x} + c \rightarrow ۲x^{\frac{۳}{۲}} - ۴x^{\frac{۱}{۲}} = f(x).x^{\frac{۱}{۲}}$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\div x^{\frac{۱}{۲}}} \frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{x^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{۴x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{f(x)\cancel{x^{\frac{۱}{۲}}}}{\cancel{x^{\frac{۱}{۲}}}} = ۲x^{۱} - ۴ = f(x)$

مثال: اگر $\int \frac{۱-x}{x\sqrt{x}}dx = \frac{۲f(x)}{\sqrt{x}} + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱خارج)

۱) $-x-۱$ ۲) $x-۲$ ۳) $x+۱$ ٤) $۲x-۱$

مرحله ۱ $\int \frac{۱-x}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{۱}{x\sqrt{x}}dx - \int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}dx$

$= \int \frac{۱}{x.x^{\frac{۱}{۲}}}dx - \int \frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx = \int \frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}dx - \int \frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

مرحله۲ $-2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \cancel{c} = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + \cancel{c} \rightarrow -2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} = \frac{2f(x)}{x^{\frac{1}{2}}}$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times x^{\frac{1}{2}}} -2x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2f(x)}{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}} \times x^{\frac{1}{2}} \rightarrow -2x^{0} - 2x^{1} = 2f(x) \xrightarrow{\div 2} -1 - x = f(x)$

مثال: اگر $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}\, f(x) + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵ خارج)

۱) $2-3x$ ۲) $2-x$ ۳) $3-x$ ۴) $3-2x$

مرحله ۱ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{1-\frac{1}{2}}dx$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

مرحله ۲ $2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cancel{+c} = \frac{2}{3}\sqrt{x}f(x) \cancel{+c} \Longrightarrow 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}f(x)$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times\frac{3}{2}} 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}f(x) \xrightarrow{\div x^{\frac{1}{2}}} \frac{3\cancel{x^{\frac{1}{2}}}}{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}f(x)}{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}} \Longrightarrow 3 - x^{1} = f(x)$

مثال اگر $\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \sqrt[3]{x}f(x) + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-4$ ۲) $x-2$ ۳) $2x-1$ ۴) $4x-1$

مرحله ۱ $\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{4x}{3x^{\frac{2}{3}}}dx - \int \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}dx = \frac{4}{3}\int x^{1-\frac{2}{3}}dx - \frac{4}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx - \frac{4}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{4}{3}\times\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{4}{3}\times\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = \frac{4}{3}\times\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}\times\frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}} + c = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + c$$

مرحله ۲ $x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + \cancel{c} = \sqrt[3]{x}f(x) + \cancel{c} \longrightarrow x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}f(x)$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\div x^{\frac{1}{3}}} \quad \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}f(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \longrightarrow x - 4 = f(x)$

مثال: اگر $\int \frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx = f(x)\left(2x\sqrt{x}\right) + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $x-2$ ۲) $x-1$ ۳) $3x-2$ ۴) $5x-3$

مرحله۱ $\int \frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5x^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx - \int \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 5\int x^{2-\frac{1}{2}}dx - 3\int x^{1-\frac{1}{2}}dx$

$$= 5\int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx = 5\times\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\times\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 5\times\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\times\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \longrightarrow 5\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + c$$

مرحله ۲ $2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + \cancel{c} = f(x)\left(2x\sqrt{x}\right) + \cancel{c} \longrightarrow 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} = f(x)\left(2x.x^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\longrightarrow 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} = f(x)(2x^{\frac{3}{2}})$$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\div ۲x^{\frac{۳}{۲}}} \quad \frac{۲x^{\frac{۵}{۲}}}{۲x^{\frac{۳}{۲}}}-\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۲x^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{f(x)(۲x^{\frac{۳}{۲}})}{۲x^{\frac{۳}{۲}}} \Longrightarrow x-۱=f(x)$

مثال : اگر $\int x(۱-۵\sqrt{x})dx=\frac{x^۲}{۲}f(x)+c$ تابع $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $۱-۴\sqrt{x}$ ‏ ‏ ۲) $۱-۲\sqrt{x}$ ‏ ‏ ۳) $x-۲\sqrt{x}$ ‏ ‏ ۴) $x-x\sqrt{x}$

مرحله ۱ $\int x(۱-۵\sqrt{x})dx=\int(x-۵x\sqrt{x})dx=\int x-۵\int x^۱.x^{\frac{۱}{۲}}dx=\int x-۵\int x^{\frac{۳}{۲}}dx$

$=\frac{x^۲}{۲}-۵\times\frac{x^{\frac{۳}{۲}+۱}}{\frac{۳}{۲}+۱}+c=\frac{x^۲}{۲}-۵\times\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+c=\frac{x^۲}{۲}-۲x^{\frac{۵}{۲}}+c$

مرحله ۲ $\frac{x^۲}{۲}-۲x^{\frac{۵}{۲}}+\cancel{c}=\frac{x^۲}{۲}f(x)+\cancel{c}\longrightarrow\frac{x^۲}{۲}-۲x^{\frac{۵}{۲}}=\frac{x^۲}{۲}f(x)$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times ۲}x^۲-۴x^{\frac{۵}{۲}}=x^۲f(x)\xrightarrow{\div x^۲}\frac{x^۲}{x^۲}-\frac{۴x^{\frac{۵}{۲}}}{x^۲}=\frac{x^۲f(x)}{x^۲}\longrightarrow ۱-۴x^{\frac{۱}{۲}}$

$=f(x)\longrightarrow ۱-۴\sqrt{x}=f(x)$

مثال : اگر $\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^۲dx=\frac{f(x)}{۲x}$ باشد $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خارج)

۱) $x^۳-۸x\sqrt{x}+۲$ ‏ ‏ ۲) $x^۳-۴x\sqrt{x}+۲$

۳) $x^۳-۸x\sqrt{x}-۲$ ‏ ‏ ۴) $x^۳-۴x\sqrt{x}-۲$

مرحله ۱ $\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^۲dx=\int(\sqrt{x})^۲-۲\times\sqrt{x}\times\frac{۱}{x}+(\frac{۱}{x})^۲dx$

$=\int\left(x-۲\times x^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)dx=\int(x-۲x^{\frac{۱}{۲}-۱}+\frac{۱}{x^۲})dx$

$=\int\left(x-۲x^{-\frac{۱}{۲}}+x^{-۲}\right)dx=\int xdx-۲\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx+\int x^{-۲}dx$

$$=\frac{x^{۱+۱}}{۱+۱}-۲\times\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}+\frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱}+c=\frac{x^{۲}}{۲}-۲\times ۲x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{x^{-۱}}{-۱}+c$$

$$=\frac{x^{۲}}{۲}-۴x^{\frac{۱}{۲}}-x^{-۱}+c$$

مرحله ۲ $\frac{x^{۲}}{۲}-۴x^{\frac{۱}{۲}}-x^{-۱}+\cancel{c}=\frac{f(x)}{۲x}+\cancel{c}$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times ۲x} x^{۳}-۸x^{\frac{۳}{۲}}-۲x^{۰}=\frac{f(x)}{۲x}\times ۲x \to x^{۳}-۸\sqrt[۲]{x^{۳}}-۲=f(x)\to x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲=f(x)$

مثال: اگر $\int\frac{(\sqrt{x}-۱)(x+\sqrt{x})}{x^{۲}}dx=\frac{۱}{\sqrt{x}}f(x)+c$ باشد آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

۱) $۲x+۲$ ۲) $۲x-۱$ ۳) $x-۲$ ۴) $۲x+۲$

مرحله ۱ $\int\frac{(\sqrt{x}-۱)(x+\sqrt{x})}{x^{۲}}dx=\int\frac{\left(x^{\frac{۱}{۲}}-۱\right)(x^{۱}+x^{\frac{۱}{۲}})}{x^{۲}}dx$

$$=\int\frac{x^{\frac{۳}{۲}}+x^{۱}-x-x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۲}}dx=\int\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{x^{۲}}dx-\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۲}}dx$$

$$=\int x^{\frac{۳}{۲}-۲}dx-\int x^{\frac{۱}{۲}-۲}dx=\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx-\int x^{-\frac{۳}{۲}}dx$$

$$=\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}-\frac{x^{-\frac{۳}{۲}+۱}}{-\frac{۳}{۲}+۱}+c=۲x^{\frac{۱}{۲}}+۲x^{-\frac{۱}{۲}}+c$$

مرحله ۲ $۲x^{\frac{۱}{۲}}+۲x^{-\frac{۱}{۲}}+\cancel{c}=\frac{۱}{\sqrt{x}}f(x)+\cancel{c}\longrightarrow ۲x^{\frac{۱}{۲}}+۲x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}f(x)$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times x^{\frac{۱}{۲}}} ۲x+۲x^{۰}=f(x)\longrightarrow f(x)=۲x+۲$

مثال : اگر $\int\frac{(۱+\sqrt{x})^{۳}-۱}{x}dx=۳\sqrt{x}f(x)$ باشد $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۳}x + ۳\sqrt{x} + ۲$ ۲) $\frac{۲}{۳}x + \sqrt{x} + ۶$

۳) $\frac{۲}{۹}x + ۳\sqrt{x} + ۶$ ۴) $\frac{۲}{۹}x + \sqrt{x} + ۲$

مرحله ۱ $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۳ - ۱}{x}dx = \int \frac{(۱^۳ + ۳(۱)^۲\sqrt{x} + ۳(۱)(\sqrt{x})^۲ + (\sqrt{x})^۳ - ۱}{x}dx$

$= \int \frac{۱ + ۳x^{\frac{۱}{۲}} + ۳x + x^{\frac{۳}{۲}} - ۱}{x}dx = \int \frac{۳x^{\frac{۱}{۲}}}{x}dx + \int \frac{۳x}{x}dx + \int \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{x}dx$

$= ۳\int x^{\frac{۱}{۲}-۱}dx + \int ۳dx + \int x^{\frac{۳}{۲}-۱}dx = ۳\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx + \int ۳dx + \int x^{\frac{۱}{۲}}dx$

$= ۳ \times \frac{(x^{-\frac{۱}{۲}+۱})}{-\frac{۱}{۲}+۱} + ۳x + \frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} + c = ۳ \times ۲x^{\frac{۱}{۲}} + ۳x + \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + c$

مرحله ۲ $۶x^{\frac{۱}{۲}} + ۳x + \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + c = ۳\sqrt{x}f(x) + c \longrightarrow ۶x^{\frac{۱}{۲}} + ۳x + \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} = ۳x^{\frac{۱}{۲}}f(x)$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\div ۳x^{\frac{۱}{۲}}} ۲ + x^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۲}{۹}x = f(x) \longrightarrow f(x) = ۲ + \sqrt{x} + \frac{۲}{۹}x$

مثال: اگر $\int \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲}dx = \frac{f(x)}{x} + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟(سراسری تجربی)

۱) $x - \sqrt{x}$ ۲) $x + \sqrt{x}$ ۳) $۱ - ۲\sqrt{x}$ ۴) $۲ - \sqrt{x}$

مرحله ۱ $\int \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^۲}dx - \int \frac{۱}{x^۲}dx = \int x^{\frac{۱}{۲}-۲}dx - \int x^{-۲}dx$

$= \int x^{-\frac{۳}{۲}}dx - \int x^{-۲}dx = \frac{x^{-\frac{۳}{۲}+۱}}{-\frac{۳}{۲}+۱} - \frac{x^{-۲+۱}}{-۲+۱} + c = \frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}} - \frac{x^{-۱}}{-۱} + c$

$= -۲x^{-\frac{۱}{۲}} + x^{-۱} + c$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times x} x \times (-۲x^{-\frac{۱}{۲}}) + x(x^{-۱}) = \frac{x \times f(x)}{x} \longrightarrow -۲x^{\frac{۱}{۲}} + x^{۰} = f(x)$

$\longrightarrow -۲\sqrt{x} + ۱ = f(x)$

مثال: اگر $\int \frac{x^۲+۱}{x\sqrt{x}} dx = \frac{f(x)}{۳\sqrt{x}} + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) $۲x - ۳$ ۲) $۳x - ۲$ ۳) $۲x^۲ - ۶$ ۴) $۲x^۲ + ۳$

مرحله ۱ $\int \frac{x^۲ + ۱}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^۲}{x\sqrt{x}} dx + \int \frac{۱}{x.\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^۲}{x^۱.x^{\frac{۱}{۲}}} dx + \int \frac{۱}{x.x^{\frac{۱}{۲}}} dx$

$= \int \frac{x^۲}{x^{\frac{۳}{۲}}} dx + \int \frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}} dx = \int x^{۲-\frac{۳}{۲}} dx + \int x^{-\frac{۳}{۲}} dx$

$= \int x^{\frac{۱}{۲}} dx + \int x^{-\frac{۳}{۲}} dx = \frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} + \frac{x^{-\frac{۳}{۲}+۱}}{-\frac{۳}{۲}+۱} + c = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + \frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}} + c$

$= \frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۱} x^{-\frac{۱}{۲}} + c$

مرحله ۲ $\frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} - ۲x^{-\frac{۱}{۲}} + c = \frac{f(x)}{۳\sqrt{x}} + c \longrightarrow \frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} - ۲x^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{f(x)}{۳x^{\frac{۱}{۲}}}$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times ۳x^{\frac{۱}{۲}}} ۲x^۲ - ۶x^{۰} = f(x) \longrightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۶$

تمرین: اگر $\int \frac{x-۱}{x^۳} dx = \frac{f(x)}{۲x} + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹خارج)

۱) $-x + ۲$ ۲) $x - ۲$ ۳) $-۲x + ۱$ ۴) $-۲x - ۱$

تمرین: با شرط $x > ۱$ داریم: $\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}} dx = xf(x) + c$ $f(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) $۳ + ۲\sqrt{x}$ ۲) $۳ + \sqrt{x}$ ۳) $۳ - \sqrt{x}$ ۴) $۲x - ۳\sqrt{x}$

تمرین: اگر $\int \left(۳\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx=\sqrt{x}f(x)+c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) $۳x-۱$ ۲) $۳x-۳$ ۳) $۲x-۲$ ۴) $x-۲$

تمرین: اگر $\int \frac{(۱-\sqrt{x})^۲}{۲\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}f(x)+c$ باشد $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱) $۱-\sqrt{x}+\frac{۱}{۳}x$ ۲) $۲-\sqrt{x}+۳x$ ۳) $۲-\sqrt{x}+\frac{۲}{۳}x$ ۴) $۱+\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}$

تمرین: اگر $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۲-x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}f(x)+c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۶)

۱) $۱+\sqrt{x}$ ۲) $۱+۲\sqrt{x}$ ۳) $۲+\sqrt{x}$ ۴) $۲+۲\sqrt{x}$

تمرین: اگر $\int \frac{۵x^۲+۳x}{\sqrt{x}}dx=x\sqrt{x}f(x)+c$ باشد آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵ خارج)

۱) $x+۲$ ۲) $x+۳$ ۳) $۲x+۲$ ۴) $۲x+۳$

تمرین: اگر $\int \frac{۷x^۲-۴x}{\sqrt[۳]{x^۲}}dx=۳\sqrt[۳]{x}f(x)+c$ باشد آن گاه $f(x)$ کدام است؟(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۲}x^۲-۲x$ ۲) $\frac{۲}{۳}x^۲-۱$ ۳) $x^۲-x$ ۴) $x^۲-۲$

تمرین: اگر $\int \frac{۴x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}}dx=\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^۲}$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۴ خارج)

۱) $۲x^۲-x$ ۲) $x^۲-x$ ۳) $x^۲-۱$ ۴) $۲x^۲-۱$

ویژه صددرصدی ها

فرمول (۳) $\quad n \neq -1 \quad \int (x \pm a)^n dx = \frac{(x \pm a)^{n+1}}{n+1} + c$	

تذکر۱: در رابطه بالا n یعنی توان پرانتز می تواند هر عدد (کسری، صحیح و ...) به جزء -1 باشد.

تذکر ۲: ضریب xحتماً بایستی یک باشد.

تذکر ۳: پرانتز بایستی در صورت قرار داشته باشد.

مثال:

مثال ۱ $\int (x+2)^3 dx = ?$

$$\int (x+2)^3 dx = \frac{(x+2)^{3+1}}{3+1} + c = \frac{(x+2)^4}{4} + c$$

مثال ۲ $\int (x-3)^4 dx = \frac{(x-3)^{4+1}}{4+1} + c = \frac{(x-3)^5}{5} + c$

مثال ۳ $\int (3x+2)^2 dx \longrightarrow$

چون ضریب x یک نیست پس نمی توان از این فرمول استفاده کرد پس ابتدا به توان می رسانیم سپس حل می کنیم

$$\int (3x+2)^2 dx = \int (9x^2 + 12x + 4) dx = \frac{9x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 4x + c$$

مثال ۴ $\int (x-2)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c = \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}+c$

مثال۵ $\int (x-2)^{-3}dx = \frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1}dx = \frac{(x-2)^{-2}}{-2}+c$

مثال ۶ $\int \frac{2}{(x+2)^{3}}dx = 2\int (x+2)^{-3}dx = 2\,\frac{(x+2)^{-3+1}}{-3+1}+c = -(x+2)^{-2}+c$

مثال ۷ $\int \frac{(x-1)}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}dx = \int (x-1)^{1-\frac{1}{3}}dx = \int (x-1)^{\frac{2}{3}}dx = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+c$

$= \frac{3}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}+c$

مثال ۸ $\int \frac{x-2}{\sqrt[5]{x-2}}dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^{\frac{1}{5}}}dx = \int (x-2)^{1-\frac{1}{5}}dx$

$= \int (x-2)^{\frac{4}{5}}dx = \frac{(x-2)^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} = \frac{5}{9}(x-2)^{\frac{9}{5}}+c$

تذکر: در حالتی که عبارت مشابه مخرج ؛ در صورت قرار نداشت با اضافه و کم کردن یک عدد ثابت کاری می کنیم که مشابه شوند یعنی کاری می کنیم که پایه ها مثل هم شوند که بتوانیم از قانون توان با پایه های مساوی استفاده کنیم.

مثال ۹ $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} = \int \frac{x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \int \frac{x-1+1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}dx$

$$=\int \frac{(x-۱)}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx+\int \frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx=\int (x-۱)^{۱-\frac{۱}{۳}}dx+\int (x-۱)^{-\frac{۱}{۳}}dx$$

$$=\int (x-۱)^{\frac{۲}{۳}}dx+\int (x-۱)^{-\frac{۱}{۳}}dx=\frac{(x-۱)^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱}+\frac{(x-۱)^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱}+c$$

$$=\frac{۳}{۵}(x-۱)^{\frac{۵}{۳}}+\frac{۳}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}+c$$

مثال ۱۰ $\int \frac{۳x}{\sqrt[۳]{x-۱}}=۳\int \frac{x}{\sqrt{x-۱}}dx=$ مانند مثال ۳ حل می کنیم

جواب نهایی $۳\left(\frac{۳}{۵}(x-۱)^{\frac{۵}{۳}}+\frac{۳}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}\right)+c=\frac{۹}{۵}(x-۱)^{\frac{۵}{۳}}+\frac{۹}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}+c$

مثال ۱۱ $\int \frac{x}{\sqrt[۵]{(x+۲)^۲}}dx=\int \frac{x}{(x+۲)^{\frac{۲}{۵}}}dx$ بصورت کسر ۲ + و ۲ – را اضافه و کم می کنیم

$$=\int \frac{x+۲-۲}{(x+۲)^{\frac{۲}{۵}}}dx=\int \frac{(x+۲)-۲}{(x+۲)^{\frac{۲}{۵}}}dx=\int \frac{(x+۲)}{(x+۲)^{\frac{۲}{۵}}}dx-\int \frac{۲}{(x+۲)^{\frac{۲}{۵}}}$$

$$=\int (x+۲)^{۱-\frac{۲}{۵}}dx-\int ۲(x+۲)^{-\frac{۲}{۵}}dx$$

$$=\frac{(x+۲)^{\frac{۳}{۵}+۱}}{\frac{۳}{۵}+۱}-۲\times\frac{(x+۲)^{-\frac{۲}{۵}+۱}}{-\frac{۲}{۵}+۱}=\frac{۵}{۸}(x+۲)^{\frac{۸}{۵}}-۲\times\frac{۵}{۳}(x+۲)^{\frac{۳}{۵}}+c$$

مثال : اگر $\int \frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}dx=f(x)\sqrt{x-۱}+c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷ خارج)

۱) $۲x+۱$ ۲) $۲x+۲$ ۳) $۲x+۳$ ٤) $۲x+٤$

مرحله ۱ $\int \frac{۳x}{\sqrt{x-۱}}dx=۳\int \frac{x-۱+۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx=۳\left[\int \frac{(x-۱)^۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx+\int \frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx\right]$

$$= ۳\left[\int (x-۱)^{\frac{۱}{۲}}dx + \int (x-۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx\right]$$

$$= ۳\left[\frac{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} + \frac{(x-۱)^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}\right] = ۳\times\left[\frac{۲}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۲}{۱}(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}\right] + c$$

$$= ۲(x-۱)^{\frac{۳}{۲}} + ۶(x-۱)^{\frac{۱}{۲}} + c$$

مرحله ۲ $۲(x-۱)^{\frac{۳}{۲}} + ۶(x-۱)^{\frac{۱}{۲}} + \cancel{c} = f(x)\sqrt{x-۱} \cancel{+c}$

$$۲(x-۱)^{\frac{۳}{۲}} + ۶(x-۱)^{\frac{۱}{۲}} = f(x)(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\div(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}} ۲(x-۱)^{۱} + ۶ = f(x) \longrightarrow f(x) = ۲x + ۴$$

ویژه صد در صدی ها

قانون پنجم

برای انتگرال توابع رادیکالی متأسفانه قانون خاصی وجود ندارد و برای حل اینگونه سوالات بایستی کار کنیم که عبارت زیر رادیکال را به صورت یک توان ۲ بنویسیم که از رادیکال بیرون بیاریم و رادیکال را حذف کنیم یعنی $\sqrt{u^{۲}} = |u|$

حالت اول: عبارت زیر رادیکال یک سه جمله ای باشد

در این حالت از اتحاد مربع دو جمله ای کمک می گیریم $a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲} = (a\pm b)^{۲}$

مثال ۱ $\int \sqrt{x^{۲} - ۴x + ۴}\,dx = ?$ با شرط $x > ۲$

$$\int \sqrt{x^{۲} - ۴x + ۴} = \int \sqrt{(x-۲)^{۲}}dx = \int |x-۲|dx \xrightarrow{x>۲ \text{ داخل قدر مطلق مثبت است}}$$

$$=\int (x-۲)dx=\frac{x^{۲}}{۲}-۲x+c$$

مثال ۲ $\int \sqrt{۹x^{۲}+۶x+۱}dx$ با شرط $x<-\frac{۱}{۳}$

$$\int \sqrt{۹x^{۲}+۶x+۱}=\int \sqrt{(۳x+۱)^{۲}}dx=\int |۳x+۱| \xrightarrow{x<-\frac{۱}{۳}\ \text{داخل قدر مطلق منفی}}$$

$$=\int (-۳x-۱)dx=-\frac{۳x^{۲}}{۲}-x+c$$

مثال ۳ $\int \sqrt{x^{۴}+۶x^{۲}+۹}dx=\int \sqrt{(x^{۲}+۳)^{۲}}dx=\int |x^{۲}+۳|dx \xrightarrow{x^{۲}+۳\ \text{همواره مثبت}}$

$$=\int (x^{۲}+۳)dx=\frac{x^{۳}}{۳}+۳x+c$$

مثال ۴ $\int \sqrt{x^{۴}+۲+\frac{۱}{x^{۴}}}dx=\int \sqrt{(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}}dx=\int \left|x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\right|dx \xrightarrow{x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\ \text{همواره مثبت}}$

$$\int (x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})dx=\int x^{۲}dx+\int x^{-۲}dx=\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{-۱}}{-۱}+c$$

مثال ۵ $\int \sqrt{۱+۲\sqrt{x}+x}\,dx=\int \sqrt{(۱+\sqrt{x})^{۲}}dx=\int |۱+\sqrt{x}|dx \xrightarrow{۱+\sqrt{x}\ \text{همواره مثبت}}$

$$\int (۱+\sqrt{x})\,dx=\int (۱+x^{\frac{۱}{۲}})dx=x+\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c$$

حالت۲: عبارت به صورت مقابل باشد $\sqrt{(a-b)^{۲}+c}$

در این حالت عبارت را به توان می رسانیم و ساده می کنیم تا به یک سه جمله ای برسیم سپس مانند حالت ۱ آن را حل می کنیم.

مثال ۶ $\int \sqrt{(x^۲ - \frac{۱}{x^۲})^۲ + ۴}\, dx = \int \sqrt{(x^۲ + \frac{۱}{x^۲})^۲} dx = \int \left|x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right| dx \xrightarrow{\text{مثال ۴ حالت ۱}}$

$$\left(x^۲ - \frac{۱}{x^۲}\right)^۲ + ٤ = \left(x^٤ - ۲ + \frac{۱}{x^٤}\right) + ٤ = x^٤ + ۲ + \frac{۱}{x^٤} = (x^۲ + \frac{۱}{x^۲})^۲$$

روش دوم

$$\int \sqrt{(a-b)^۲ + c}\, dx = \int |a+b| dx$$

$$\int \sqrt{(a+b)^۲ - c}\, dx = \int |a-b| dx$$

مثال ۷ $\int \sqrt{\left(\frac{۱}{۴}x^۲ - \frac{۱}{x^۲}\right)^۲ + ۱} dx = \int \left|\frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right| dx \xrightarrow{\frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\ \text{همواره مثبت}}$

$$\int (\frac{۱}{٤}x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) dx = \frac{۱}{٤}\int x^۲ dx + \int x^{-۲} dx = \frac{۱}{٤} \times \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^{-۱}}{-۱} + c$$

مثال ۸ $\int \sqrt{\left(۱ - \sqrt{x}\right)^۲ + ۴\sqrt{x}} = \int |۱ + \sqrt{x}| dx \xrightarrow{۱+\sqrt{x}\ \text{همواره مثبت}}$ مثال ۵ حالت ۱

تمرین ۳ صفحه ۲۴۹دیفرانسیل

مثال : اگر $\int \sqrt{\left(x^۲ - \frac{۱}{x^۲}\right)^۲ + ٤}\, dx = \frac{f(x)}{۳x} + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^٤ - ۳$ ۲) $x^۳ - ٤$ ۳) $x^۳ + ٤$ ٤) $x^۳ + ۳$

مرحله ۱ ابتدا انتگرال سمت چپ را بدست می آوریم (مثال ۶)

$$\int \sqrt{(x^۲ - \frac{۱}{x^۲})^۲ + ٤} = \frac{x^۳}{۳} - x^{-۱} + c$$

مرحله ۲

$$\frac{x^۳}{۳} - x^{-۱} + c = \frac{f(x)}{۳x} + c \longrightarrow \frac{x^۳}{۳} - x^{-۱} = \frac{f(x)}{۳x}$$

مرحله ۳ $\xrightarrow{\times ۳x} x^۴ - ۳x^۰ = \frac{f(x)}{۳x} \times ۳x \longrightarrow f(x) = x^۴ - ۳$

حالت ۳) در توابع مثلثاتی اگر عبارتی زیر رادیکال داشتیم از فرمول های زیر کمک می گیریم تا به یک عبارت درجه دوم برسیم و رادیکال را از بین ببریم.

فرمول $۱ - sin^۲u = cos^۲u$

مثال $\int \sqrt{۱ - sin^۲u}dx = \int \sqrt{cos^۲u}dx = \int |cos\,u|dx \longrightarrow \cdots$

مثال ۲ $\int \sqrt{۴ - ۴sin^۲x} = \int \sqrt{۴(۱ - sin^۲x)}dx = \int \sqrt{۴cos^۲x}dx = \int ۲|cosx|dx$

فرمول ۲ $۱ - cos^۲u = sin^۲u$

$$\int \sqrt{۱ - cos^۲x}dx = \int \sqrt{sin^۲x}dx = \int |sinx|dx \longrightarrow \cdots$$

فرمول ۳ $۱ + tg^۲u = \frac{۱}{cos^۲u}$

$$\int \sqrt{۱ + tg^۲x}dx = \int \sqrt{\frac{۱}{cos^۲x}}dx = \int \frac{۱}{|cosx|}dx \longrightarrow \cdots$$

فرمول ۴ $۱ + cot^۲u = \frac{۱}{sin^۲u}$

$$\int \sqrt{۱ + cot^۲x}dx = \int \sqrt{\frac{۱}{sin^۲x}}dx = \int \frac{۱}{|sinx|}dx \longrightarrow \cdots$$

نکته: اگر در زیر رادیکال عبارت $a \pm a\cos u$ داشتیم همانند آنچه که در حد گفته شد از فرمول های زیر استفاده می کنیم

اگر بین عبارت ها مثبت داشتیم ← $\cos u = ۲\cos^{۲}\frac{u}{۲} - ۱$

اگر بین عبارت ها منفی داشتیم ← $\cos u = ۱ - ۲\sin^{۲}\frac{u}{۲}$

$$\int \sqrt{۱ - \cos ۲x}\,dx = \int \sqrt{۱ - (۱ - ۲\sin^{۲} x)}\,dx = \int \sqrt{۲\sin^{۲} x}\,dx = \int \sqrt{۲}|\sin x|\,dx \longrightarrow \cdots$$

$$\int \sqrt{۲ + ۲\cos x}\,dx = \int \sqrt{۲ + ۲(۲\cos^{۲}\frac{x}{۲} - ۱)} = \int \sqrt{٤\cos^{۲}\frac{x}{۲}} = \int ۲\left|\cos\frac{x}{۲}\right| dx \longrightarrow \cdots$$