



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

انتگرال

تابع اولیه: $F(x)$ را تابع اولیه یا پاد مشتق $f(x)$ در بازه I می نامیم، هرگاه داشته باشیم:

$$F'(x) = f(x)$$

هر تابعی که دارای تابع اولیه باشد، بی شمار تابع اولیه دارد که اختلاف آنها فقط در مقدار ثابت C است، که می توانیم در حالت های خاص، مقدار C را محاسبه کنیم.

نماد \int را انتگرال می نامیم، و در واقع علامت "S" کشیده است، که حرف اول "Sum" به معنی مجموع است.

$$\int f(x) dx = F(x) + c \leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

در واقع، معنی این فرمول این است که مشتق چه تابعی برابر $f(x)$ بوده است.

$$\int 2x dx \xrightarrow{\text{مشتق چه تابعی } 2x \text{ می شود}} x^2 + c$$

انتگرال نامعین: ضد عمل مشتق گیری است. $\int f(x) dx = F(x) + c$

ویژگی های انتگرال گیری:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (۱) \text{ ویژگی}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (۲) \text{ ویژگی}$$

نکته بسیار مهم: انتگرال بر روی ضرب و تقسیم پخش نمی شود.

فرمول های انتگرال نامعین:

$$\int k dx = k \int dx = kx + c \quad (۱) \text{ فرمول}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \quad (۲) \text{ فرمول}$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$a) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$b) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$c) \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c$$

$$d) \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{-2x^2} + c$$

$$e) \int (2x^5 - x^3) dx = 2 \int x^5 dx - \int x^3 dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + c$$

$$f) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$$

$$g) \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$h) \int \frac{x^7 + 3x^4}{x^2} dx = \int x^5 dx + 3 \int x^2 dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^3}{3} + c$$

$$i) \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2} \sqrt[5]{x^2} + c$$

چند نکته:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad x^2\sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}} \quad , \quad x^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{x^3\sqrt{x}} \quad , \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = x^{-\frac{3}{5}}$$

مثال: اگر $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ را بیابید. (تجربی ۸۳)

$$\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c = x^{\frac{1}{2}}(2x - 2) + c$$

$$= \sqrt{x}(2x - 2) + c \rightarrow f(x) = 2x - 2$$

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1 \quad (\text{فرمول ۳})$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1 \quad \text{نکته:}$$

به طور کلی، در انتگرال، اگر تابعی وجود داشت که شامل توان n بود، و مشتق آن در کنارش بود، برای انتگرال گیری از فرمول (3) استفاده می کنیم.

مثال: انتگرال های زیر را بیابید.

$$a) \int (x + 3)^4 dx = \frac{(x + 3)^5}{5} + c$$

$$b) \int \sin^6(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^7(x)}{7} + c$$

$$c) \int (\ln x)^5 \frac{dx}{x} = \frac{(\ln x)^6}{6} + c$$

$$d) \int (\tan^5 x + \tan^3 x) dx = \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1) dx = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

$$e) \int (2x - 1)^5 dx = \int (2x - 1)^5 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x - 1)^6}{6}$$

$$f) \int x(x+2)^{10} dx = \int (x+2-2)(x+2)^{10} dx = \int (x+2)^{11} dx - 2 \int (x+2)^{10} dx$$

$$= \frac{(x+2)^{12}}{12} - 2 \frac{(x+2)^{11}}{11} + c$$

$$g) \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \int (1+2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+2x} + c$$

$$h) \int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{x-1+3}{\sqrt{x-1}} dx = \int (x-1)^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} (x-1)\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} + c$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c \text{ (فرمول ۴)}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c \text{ نکته:}$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$a) \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$b) \int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + c$$

$$c) \int \frac{e^x}{e^x-3} dx = \ln|e^x-3| + c$$

$$d) \int \frac{x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + c$$

$$e) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

$$f) \int \frac{2 \cos x + \sin x}{2 \sin x - \cos x + 6} dx = \ln|2 \sin x - \cos x + 6| + c$$

$$\int e^u u' dx = e^u + c \text{ (فرمول ۵)}$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \text{ نکته:}$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$a) \int e^x dx = e^x + c$$

$$b) \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$c) \int \frac{dx}{e^{2x-1}} = \int e^{-2x+1} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x+1} + c$$

$$d) \int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + c$$

$$e) \int e^{e^x} e^x dx = e^{e^x} + c$$

$$f) \int e^{x^2} x \, dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$g) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$h) \int \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^x} \, dx = \int \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^x} \, dx = \int e^{3x} \, dx + 2 \int e^x \, dx + \int e^{-x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + 2e^x - e^{-x} + c$$

$$\int \sin u \, u' \, dx = -\cos u + c \quad , \quad \int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c \quad (\text{فرمول ۶})$$

$$\int \cos u \, u' \, dx = \sin u + c \quad , \quad \int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c \quad (\text{فرمول ۷})$$

$$\int (1 + \tan^2 u) \, u' \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 u} \, u' \, dx = \tan u + c \quad , \quad \int (1 + \tan^2(ax + b)) \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c \quad (\text{فرمول ۸})$$

$$\int (1 + \cot^2 u) \, u' \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 u} \, u' \, dx = -\cot u + c \quad , \quad \int (1 + \cot^2 ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c \quad (\text{فرمول ۹})$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$a) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$b) \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

$$c) \int \sin(\sin x) \cos x \, dx = -\cos(\sin x) + c$$

$$d) \int \sin(e^x) e^x \, dx = -\cos(e^x) + c$$

$$e) \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$f) \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

$$g) \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \, dx = 2 \sin(\sqrt{x}) + c$$

$$h) \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + c$$

$$i) \int (1 + \tan^2 3x) \, dx = \frac{1}{3} \tan 3x + c$$

$$j) \int (1 + \tan^2(\sin x)) \cos x \, dx = \tan(\sin x) + c$$

$$k) \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$$

$$l) \int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \int (1 + \cot^2 3x) dx = -\frac{1}{3} \cot 3x + c$$

$$m) \int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + c$$

$$n) \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$$

۱- اگر $\int x(1 - 5\sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} f(x) + c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۸۵)

$$x - x\sqrt{x} \quad (\text{ع})$$

$$x - 2\sqrt{x} \quad (\text{ب})$$

$$1 - 2\sqrt{x} \quad (\text{د})$$

$$1 - 4\sqrt{x} \quad (\text{ا})$$

$$\begin{aligned} \int x(1 - 5x^{\frac{1}{2}}) dx &= \int x dx - 5 \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^2}{2} - 5 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{x^2}{2} - 2x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{x^2}{2} \left(1 - 4x^{\frac{1}{2}} \right) + c \\ &= \frac{x^2}{2} (1 - 4\sqrt{x}) + c \rightarrow f(x) = 1 - 4\sqrt{x} \end{aligned}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲- اگر $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۸۹)

$$2 - \sqrt{x} + 3x \quad (\text{ع})$$

$$1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3} \quad (\text{ب})$$

$$1 + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x \quad (\text{د})$$

$$1 + \sqrt{x} + \frac{1}{3}x \quad (\text{ا})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1 - 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int dx + \frac{1}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x + \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x \right) + c = \sqrt{x} \left(1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x \right) + c \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x) = 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳- اگر $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x^2-4}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{8} \quad (\text{ع})$$

$$\frac{1}{8} \quad (\text{ب})$$

$$-\frac{1}{12} \quad (\text{د})$$

$$\frac{1}{12} \quad (\text{ا})$$

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}(3-x) + c \rightarrow f(x) = 3-x$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۴- اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۸۶)

۲) $2 + 2\sqrt{x}$ (۴)

۳) $2 + \sqrt{x}$

۲) $1 + 2\sqrt{x}$

۱) $1 + \sqrt{x}$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1 + 2\sqrt{x} + x - x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2 \int dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2x + c$$

$$= 2\sqrt{x} + 2x + c = \sqrt{x}(2 + 2\sqrt{x}) + c \rightarrow f(x) = 2 + 2\sqrt{x}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۵- اگر $\int \frac{5x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = f(x)(2x\sqrt{x}) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۴) $5x - 3$

۳) $3x - 2$

۲) $x - 1$

۱) $x - 2$

$$\int \frac{5x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 5 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 5 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}}(x - 1) + c$$

$$= 2x\sqrt{x}(x - 1) + c \rightarrow f(x) = x - 1$$

گزینه ۲ صحیح است.

۶- اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = 3\sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۴) $\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$

۳) $\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 6$

۲) $\frac{2}{9}x + 3\sqrt{x} + 6$

۱) $\frac{3}{2}x + 2\sqrt{x} + 2$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = \int \frac{1 + 3\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x}^3 - 1}{x} dx = 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 3 \int dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = 6x^{\frac{1}{2}} + 3x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = 3x^{\frac{1}{2}} \left(2 + \sqrt{x} + \frac{2}{9}x \right) + c$$

$$\rightarrow f(x) = 2 + \sqrt{x} + \frac{2}{9}x$$

گزینه ۴ صحیح است.

۷- اگر $\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = \sqrt[3]{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۴) $4x - 1$

۳) $2x - 1$

۲) $x - 2$

۱) $x - 4$

$$\int \frac{4x-4}{3x^{\frac{2}{3}}} dx = \frac{4}{3} \int x^{\frac{1}{3}} dx - \frac{4}{3} \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{4}{3} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + c = x^{\frac{1}{3}}(x-4) + c$$

$$= \sqrt[3]{x}(x-4) + c \rightarrow f(x) = x-4$$

گزینه ۱ صحیح است.

۸- اگر $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x})^2 dx = \frac{f(x)}{2x} + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۱) $x^3 - 8x\sqrt{x} - 2$ (۲) $4x^3 - 4x\sqrt{x} - 2$ (۳) $x - 4\sqrt{x} - 2$ (۴) $4x - 8x\sqrt{x} - 2$

$$\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x})^2 dx = \int (x - 2\sqrt{x}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) dx = \int x dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} + c = \frac{x^3 - 8x\sqrt{x} - 2}{2x} + c \rightarrow f(x) = x^3 - 8x\sqrt{x} - 2$$

گزینه ۱ صحیح است.

۹- اگر $\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2} dx = \frac{f(x)}{x} + c$ باشد، آنگاه حاصل $\int 3f(x) dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{x^5}{5} + 3x + c$ (۲) $\frac{x^5}{5} + 5x + c$ (۳) $x^4 + c$ (۴) $x^5 + 3x + c$

$$\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2} dx = \int \frac{x^4-1}{x^2} dx = \int x^2 dx - \int x^{-2} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + c = \frac{x^4+3}{3x} + c$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x^4+3}{3} \rightarrow \int 3f(x) dx = \int (x^4+3) dx = \int x^4 dx + 3 \int dx = \frac{x^5}{5} + 3x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۰- با شرط $x > 1$ داریم $\int \frac{(3-3x)}{1-\sqrt{x}} dx = xf(x) + c$ در اینصورت $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۰)

(۱) $3 + 2\sqrt{x}$ (۲) $3 + \sqrt{x}$ (۳) $3x - \sqrt{x}$ (۴) $2x - 3\sqrt{x}$

$$\int \frac{(3-3x)}{1-\sqrt{x}} dx = \int \frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}} dx = 3 \int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} dx = 3 \int (1+\sqrt{x}) dx = 3 \int dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3x + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = x(3 + 2\sqrt{x}) + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۱- با فرض اینکه $\int \sqrt{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + 4} dx = \frac{f(x)}{3x} + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۴)

(۱) $x^4 - 3$ (۲) $x^3 - 4$ (۳) $x^3 + 4$ (۴) $x^4 + 3$

$$\int \sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4} dx = \int \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} - 2x^2 \frac{1}{x^2} + 4} dx = \int \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2} dx = \int \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

$$= \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int x^2 dx + \int x^{-2} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + c = \frac{x^4 - 3}{3x} + c$$

$$\rightarrow f(x) = x^4 - 3$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$۱۲- اگر $\int \frac{7x^2 - 4x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)$$

$$x^2 - 2 \quad (۴)$$

$$x^2 - x \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3}x^2 - 1 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 2x \quad (۱)$$

$$\int \frac{7x^2 - 4x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 7 \int x^{\frac{4}{3}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx = 7 \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 4 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = 3x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + c = 3x^{\frac{1}{3}}(x^2 - x) + c$$

$$\rightarrow f(x) = x^2 - x$$

گزینه ۳ صحیح است.

$$۱۳- اگر $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f \circ f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵ با تغییر)$$

$$4x + 2 \quad (۴)$$

$$2x + 2 \quad (۳)$$

$$2x + 4 \quad (۲)$$

$$4x + 6 \quad (۱)$$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{x} + x - x - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + c = x^{-\frac{1}{2}}(2x + 2) + c = \frac{1}{\sqrt{x}}f(x) + c$$

$$\rightarrow f(x) = 2x + 2 \rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = 2(2x + 2) + 2 = 4x + 6$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$۱۴- اگر $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{\sqrt{x-1}}{5}f(x) + c$ باشد، آنگاه مقدار $f(x)$ چقدر است؟ (ویژه رشته ریاضی)$$

$$2x^2 - 2x - 12 \quad (۴)$$

$$2x^2 - 4x + 12 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 6) \quad (۲)$$

$$x^2 - 2x + 6 \quad (۱)$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1 + 1}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{(x-1)^2 + 1}{\sqrt{x-1}} dx = \int (x-1)^{\frac{3}{2}} dx + \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{5}(x-1)^{\frac{1}{2}}\{2(x-1)^2 + 10\} + c = \frac{\sqrt{x-1}}{5}(2x^2 - 4x + 12) + c$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 12$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۵- اگر $\int \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2} dx = \frac{x^2+f(x)}{x-1} + c$ باشد، آنگاه حاصل $f(-f(-2))$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰ با تغییر)

-6 (۴)

6 (۳)

4 (۲)

2 (۱)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1 + 4}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2} dx = \int dx + 4 \int (x-1)^{-2} dx \\ &= x + 4 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c = x - \frac{4}{x-1} + c = \frac{x^2 - x - 4}{x-1} + c \rightarrow f(x) = -x - 4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(-2) = -(-2 + 4) = -2 \rightarrow f(-f(-2)) = f(2) = -(2 + 4) = -6$$

گزینه ۴ صحیح است.

۱۶- اگر $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} dx = \frac{1+f(x)}{e^x} + c$ باشد، آنگاه ضابطه $f(x)$ کدام است؟

 xe^x (۴) e^{-x} (۳) e^{2x} (۲) e^x (۱)

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} dx &= \int \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x(e^x + 1)} dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x(e^x + 1)} dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x(e^x + 1)} dx \\ &= \int \frac{e^x - 1}{e^x} dx = \int dx - \int e^{-x} dx = x + e^{-x} + c = x + \frac{1}{e^x} + c = \frac{xe^x + 1}{e^x} + c \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x) = xe^x$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست های انتگرال مثلثاتی

۱۷- حاصل $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ کدام است؟

 $2x + c$ (۴) $\cos x + \sin x + c$ (۳) $\cos x - \sin x + c$ (۲) $x + c$ (۱)

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۸- حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$ کدام است؟ (خارج تجربی ۸۶)

 $x - \cos x + c$ (۴) $-x + \cos x + c$ (۳) $x - \sin x + c$ (۲) $x + \sin x + c$ (۱)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} dx = \int (1 + \cos x) dx = x + \sin x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۹- حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} dx$ کدام است؟ $(x \neq k\pi - \frac{\pi}{4})$

$\sin x + \cos x + c$ (۴) $\sin x - \cos x + c$ (۳) $-\sin x - \cos x + c$ (۲) $-\sin x + \cos x + c$ (۱)

$$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + c$$

گزینه ۴ صحیح است.

۲۰- حاصل $\int (\sin^3 x - \sin^3 x \cos^2 x) \cos x dx$ کدام است؟

$-\frac{1}{3} \cos^3 x + c$ (۴) $\frac{1}{6} \cos^6 x + c$ (۳) $-\frac{1}{3} \sin^6 x + c$ (۲) $\frac{1}{6} \sin^6 x + c$ (۱)

$$\int \sin^3 x (1 - \cos^2 x) \cos x dx = \int \sin^3 x \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^5 x \cos x dx = \frac{1}{6} \sin^6 x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۱- حاصل انتگرال $\int (\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x) dx$ کدام است؟

$\frac{1}{16} \sin 4x + c$ (۴) $-\frac{1}{4} \cos 4x + c$ (۳) $\frac{1}{4} \sin 4x + c$ (۲) $-\frac{1}{16} \cos 4x + c$ (۱)

$$\int \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{4} \int \sin 4x dx = -\frac{1}{16} \cos 4x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۲- حاصل انتگرال $\int \left(\frac{\sin 3x \cos x}{\sin x} - \cos 3x \right) dx$ کدام است؟

$-2 \cos x + c$ (۴) $-2 \sin x + c$ (۳) $2 \cos x + c$ (۲) $2 \sin x + c$ (۱)

$$\int \left(\frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x} \right) dx = \int \frac{\sin(3x - x)}{\sin x} dx = \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = 2 \int \cos x dx = 2 \sin x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۳- حاصل $\int \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x dx$ کدام است؟

$\frac{1}{64} \cos 8x + c$ (۴) $-\frac{1}{64} \sin 8x + c$ (۳) $-\frac{1}{64} \cos 8x + c$ (۲) $\frac{1}{64} \sin 8x + c$ (۱)

$$\int \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 2x \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin 4x \cos 4x dx = \frac{1}{8} \int \sin 8x dx = -\frac{1}{64} \cos 8x + c$$

گزینه ۲ صحیح است.

۲۴- حاصل $\int \cos^2 x dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \frac{1}{2}x + \sin x \cos x + c \quad \frac{1}{2}(x + \sin 2x) + c \quad \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + c = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۵- با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$ کدام است؟ (تجربی ۹۲)

$$-\sin x - \cos x + c \quad -\sin x + \cos x + c \quad \sin x - \cos x + c \quad \sin x + \cos x + c$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c$$

گزینه ۲ صحیح است.

۲۶- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ کدام است؟

$$-1 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + 1 - (-1 + 0) = 2$$

گزینه ۲ صحیح است.

۲۷- اگر $F(x) = \int (\sin x + \cos x)^2 dx$ و $F(0) = \frac{3}{2}$ باشد، آنگاه $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ چقدر است؟

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} \quad \pi + \frac{3}{2} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2} \quad \pi + \frac{5}{2}$$

$$F(x) = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \xrightarrow{F(0)=\frac{3}{2}}$$

$$F(0) = 0 - \frac{1}{2} + c = \frac{3}{2} \xrightarrow{c=2} F(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x + 2 \rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi + 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۲۸- حاصل $\int \frac{1+\cos^3 x}{1-\cos x+\cos^2 x} dx$ کدام است؟

$x - \cos x + c$ (۴)

$1 - \sin x + c$ (۳)

$1 + \sin x + c$ (۲)

$x + \sin x + c$ (۱)

$$\int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{1 - \cos x + \cos^2 x} dx = \int (1 + \cos x) dx = x + \sin x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۹- اگر $f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ باشد، حاصل $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ کدام است؟

3 (۴)

2 (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

1 (۱)

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \rightarrow f(x) = \int (1 + \cot^2 x) dx \rightarrow$$

$$f(x) = -\cot x + c \rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + c = 0 \rightarrow c = 1 \rightarrow f(x) = -\cot x + 1 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = +1 + 1 = 2$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳۰- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{2 \cos^2(x)-1} dx$ کدام است؟

1 (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

2 (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos 2x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -(0 - 1) = 1$$

گزینه ۴ صحیح است.

۳۱- حاصل $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ کدام است؟

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \cos 4x + c$ (۴)

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c$ (۳)

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{16} \cos 4x + c$ (۲)

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{16} \sin 4x + c$ (۱)

$$\begin{aligned} \int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx &= \int (1 - 2(\sin x \cos x)^2) dx = \int \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \sin^2 2x dx \\ &= x - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = x - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + c = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳۲- حاصل $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ کدام است؟

$$\frac{\cot^4 x}{4} + c \quad (۴)$$

$$\frac{\cot^3 x}{3} + c \quad (۳)$$

$$\frac{\tan^3 x}{3} + c \quad (۲)$$

$$\frac{\tan^4 x}{4} + c \quad (۱)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \cos^2 x} dx = \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۳- حاصل $\int \frac{(1 + \cos 2x)^2}{\sin^2 2x} dx$ کدام است؟

$$-x - \tan x + c \quad (۴)$$

$$\tan x - x + c \quad (۳)$$

$$-\cot x - x + c \quad (۲)$$

$$\cot x + x + c \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \cos^2 2x)^2}{1 - \cos^2 2x} dx &= \int \frac{(1 + \cos 2x)^2}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)} dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x} dx = \int \cot^2 x dx \\ &= \int (\cot^2(x) + 1 - 1) dx = -\cot(x) - x + c \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۳۴- حاصل $\int 2 \tan x \cot 2x dx$ کدام است؟

$$2x - \cot x + c \quad (۴)$$

$$2x - \tan x + c \quad (۳)$$

$$x + \cot x + c \quad (۲)$$

$$x + \tan x + c \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \int 2 \tan x \cot 2x dx &= 2 \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = 2 \int \frac{\sin x (2 \cos^2(x) - 1)}{\cos x (2 \sin x \cos x)} dx = \int \frac{2 \cos^2(x) - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int 2 dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \int dx - \int (1 + \tan^2 x) dx = 2x - \tan x + c \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳۵- حاصل $\int (\sin x + \cos x)^3 (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} (\cos x + \sin x)^3 + c \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} (\sin x + \cos x)^4 + c \quad (۳)$$

$$\frac{1}{5} (\cos x + \sin x)^5 + c \quad (۲)$$

$$x + c \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \int (\sin x + \cos x)^3 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx &= \int (\sin x + \cos x)^3 (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) dx \\ &= \int (\sin x + \cos x)^4 (\cos x - \sin x) dx = \frac{(\sin x + \cos x)^5}{5} + c \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۳۶- حاصل $\int (\tan x + \cot x)^7 (\tan x - \cot x) dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} (\tan x + \cot x)^6 + c \quad (۴)$$

$$\frac{1}{6} (\tan x - \cot x)^6 + c \quad (۳)$$

$$\frac{1}{7} (\tan x + \cot x)^7 + c \quad (۲)$$

$$\frac{1}{7} (\tan x - \cot x)^7 + c \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \int (\tan x + \cot x)^6 (\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x) dx &= \int (\tan x + \cot x)^6 (\tan^2 x - \cot^2 x) dx \\ &= \frac{(\tan x + \cot x)^7}{7} + c \end{aligned}$$

توجه: $(\tan x + \cot x)' = 1 + \tan^2 x - (1 + \cot^2 x) = \tan^2 x - \cot^2 x$

گزینه ۲ صحیح است.

۳۷- حاصل $\int (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1) dx$ کدام است؟

$-\cos 2x + c$ (۴) $\cos 2x + c$ (۳) $\frac{1}{2} \cos 2x + c$ (۲) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$ (۱)

$$\int ((\sin x + \cos x)^2 - 1^2) dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1) dx = \int (1 + 2 \sin x \cos x - 1) dx$$

$$= \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۸- حاصل $\int \frac{\sin 10x - \sin 6x}{\cos 10x + \cos 6x} dx$ کدام است؟ (ویژه رشته ریاضی فیزیک)

$\frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + c$ (۴) $-\frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + c$ (۳) $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$ (۲) $\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$ (۱)

صورت و مخرج را تبدیل به ضرب می کنیم،

$$\int \frac{\sin 10x - \sin 6x}{\cos 10x + \cos 6x} dx = \int \frac{2 \sin 2x \cos 8x}{2 \cos 8x \cos 2x} dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$$

گزینه ۲ صحیح است.

۳۹- حاصل $\int \cos 3x \cos x dx$ کدام است؟ (ویژه رشته ریاضی فیزیک)

$\cos 3x + \sin x + c$ (۴) $\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$ (۳) $\frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + c$ (۲) $\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$ (۱)

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به حاصل جمع}} \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

گزینه ۱ صحیح است.

۴۰- حاصل $\int \sin 2x \cos 3x dx$ کدام است؟ (ویژه رشته ریاضی فیزیک)

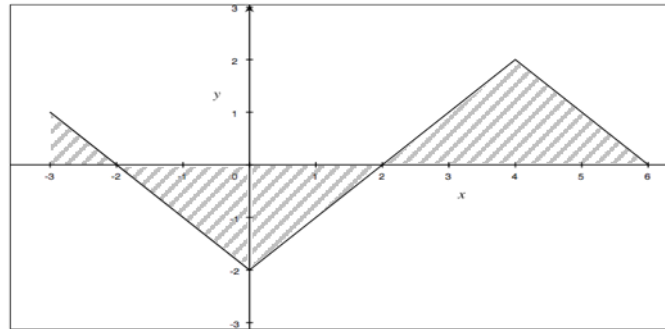
$-\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + c$ (۲) $-\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + c$ (۱)
 $-\frac{1}{5} \cos 5x + \cos x + c$ (۴) $-\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c$ (۳)

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به حاصل جمع}} \int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c$$

گزینه ۳ صحیح است.

انتگرال معین

رابطه انتگرال معین و مساحت: انتگرال معین تابع f در بازه $[a, b]$ برابر مساحت علامت دار محصور بین تابع f با محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ است. یعنی در هر بازه ای که نمودار تابع f زیر محور x هاست، حاصل انتگرال معین با مساحت در آن بازه برابر است، و در هر بازه ای که نمودار تابع f زیر محور x هاست، حاصل انتگرال معین با قرینه مساحت آن در آن بازه برابر است.



$$\int_{-3}^6 f(x) dx = s_1 - s_2 + s_3$$

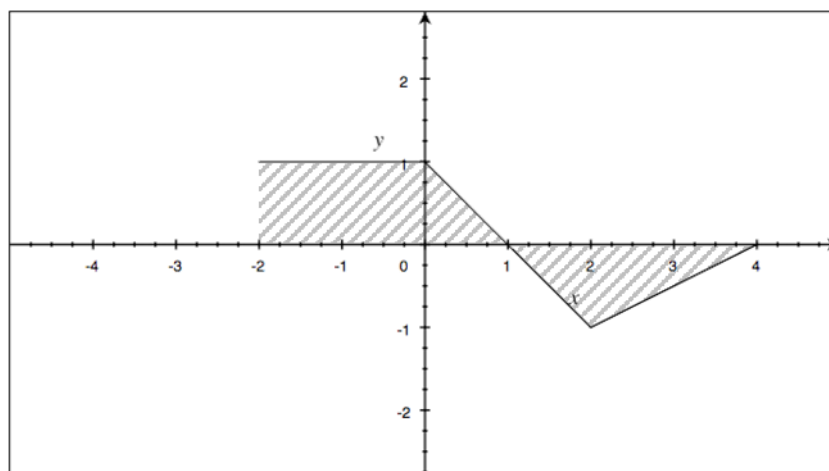
قضیه بنیادی دوم: اگر تابع f بر بازه ای شامل a, b پیوسته باشد، و $F(x)$ یک تابع اولیه برابر f باشد، یعنی $f(x) = F'(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

ویژگی انتگرال معین: اگر f و g دو تابع انتگرال پذیر در بازه $[a, b]$ باشند، آنگاه:

- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 2) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- 3) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- 4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$
- 5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- 6) $f(x) \leq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- 7) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- 8) $\int_a^b k dx = k(b - a)$

مثال: شکل مقابل نمودار f است، حاصل $\int_{-2}^4 f(x) dx$ را بیابید. (تجربی ۸۱)



$$\int_{-2}^4 f(x) dx = s_1 + s_2 - s_3 = (2)(1) + \frac{1}{2}(1)(1) - \frac{1}{2}(3)(1) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

نکته: در حالتی که عبارت جلوی انتگرال شامل قدر مطلق باشد، دو روش برای حل انتگرال وجود دارد:

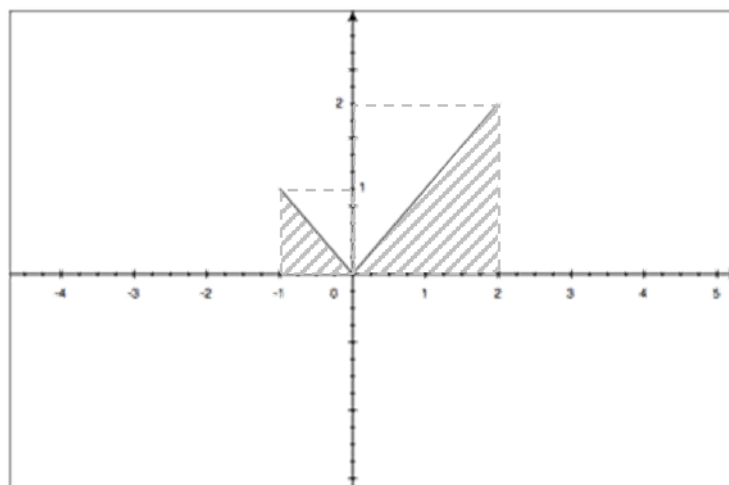
۱- بازه بندی انتگرال بر اساس ریشه های داخل قدر مطلق و حذف قدر مطلق

۲- رسم نمودار تابع و محاسبه مساحت علامت دار

مثال: حاصل $\int_{-1}^2 |x| dx$ را بیابید.

روش اول: $\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = -\frac{1}{2}(0 - 1) + \frac{1}{2}(4 - 0) = \frac{5}{2}$

روش دوم: $\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(2)(2) = \frac{5}{2}$



نکته: در محاسبه انتگرال معین شامل جزء صحیح دو روش وجود دارد:

۱- بازه بندی انتگرال بر اساس اطلاعات جزء صحیح و تعیین مقدار عددی جزء صحیح و حل انتگرال

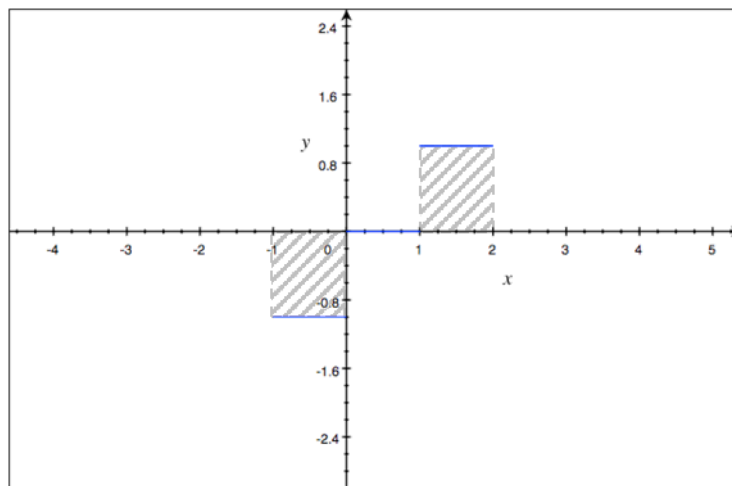
۲- رسم نمودار تابع جزء صحیح و محاسبه مساحت علامت دار آن

نکته: بازه های تابع $[ax]$ را به صورت $\frac{1}{|a|}$ ، $\frac{1}{|a|}$ تقسیم می کنیم.

مثال: حاصل $\int_{-1}^2 [x] dx$ را بیابید.

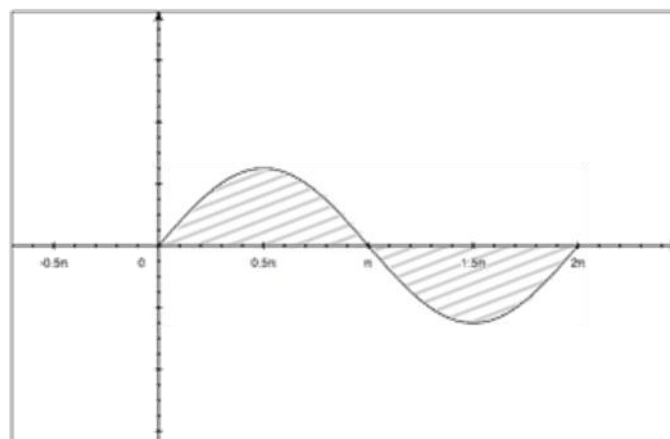
$$\text{روش اول: } \int_{-1}^2 [x] dx = \int_{-1}^0 -1 dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx = -1(0 + 1) + 0 + 1(2 - 1) = 0$$

$$\text{روش دوم: } \int_{-1}^2 [x] dx = -1 + 1 = 0$$

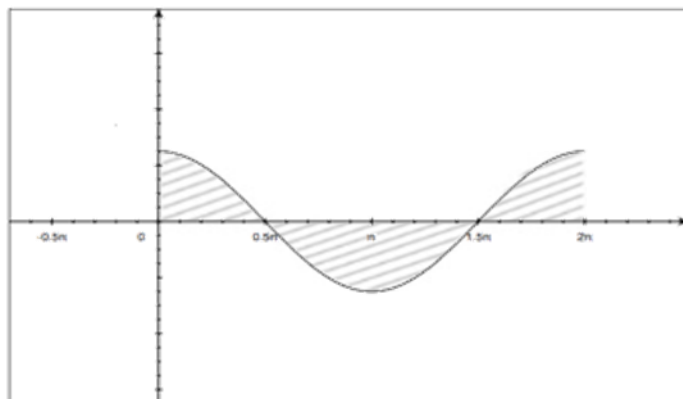


نکته: مساحت هر طاق $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر ۲ است.

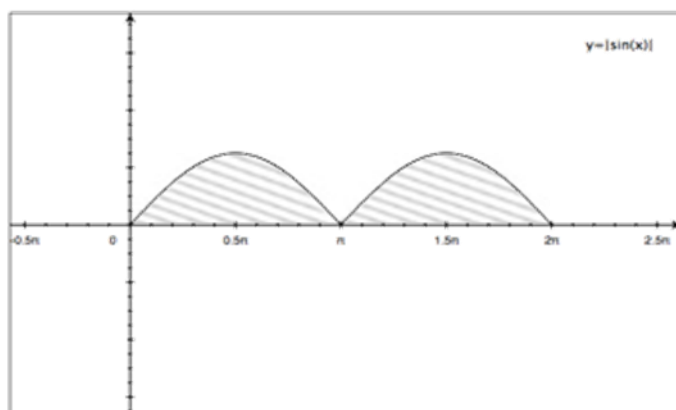
$$1) \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$



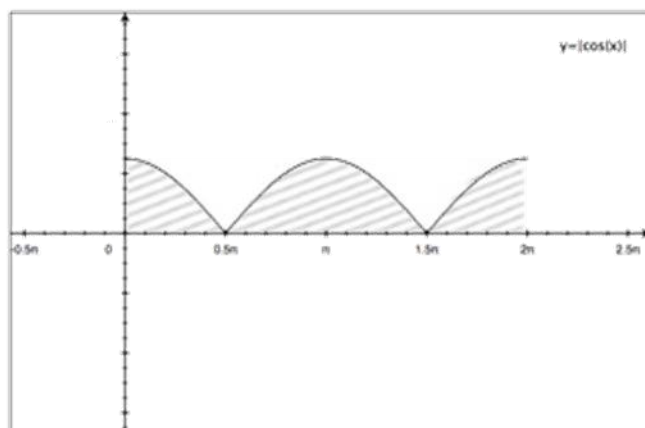
$$2) \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0$$



$$3) \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = 4$$



$$4) \int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx = 4$$



نکته: مساحت هر طاق $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{2}{|a|}$ است.

نکته: در محاسبه انتگرال ها و مساحت ها با توابعی روبرو می شویم که نمودار آنها نسبت به محور y ها تقارن دارند (توابع زوج) یا نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارند (توابع فرد)

در توابع فرد: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

در توابع زوج: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

توابع مانند x , x^3 , x^5 , $\sin x$ و ... توابع فرد هستند.

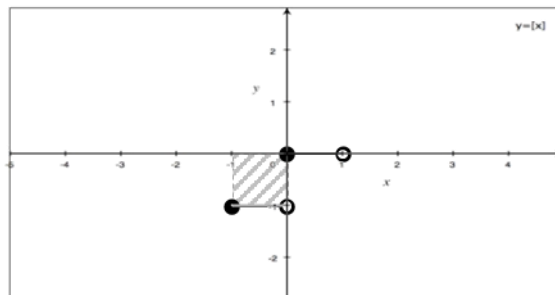
توابع مانند x^2 , x^4 , x^6 , $\cos x$, $|x|$ توابع زوج هستند.

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x dx = 0$$

مثال: حاصل $\int_{-1}^1 (x^3 + [x]) dx$ کدام است؟

$$\int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 [x] dx = 0 + \int_{-1}^1 [x] dx = -1$$



۱- با توجه به شکل مقابل حاصل $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ کدام است؟ (تجربی ۹۲)

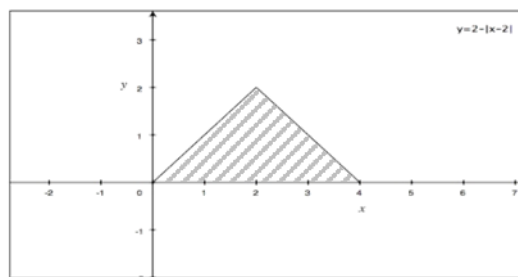
۳ (۴)

۳.۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

$$\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx = \frac{1}{2} (4)(2) = 4$$



گزینه ۲ صحیح است.

۲- با توجه به شکل روبرو حاصل $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۲π (۴)

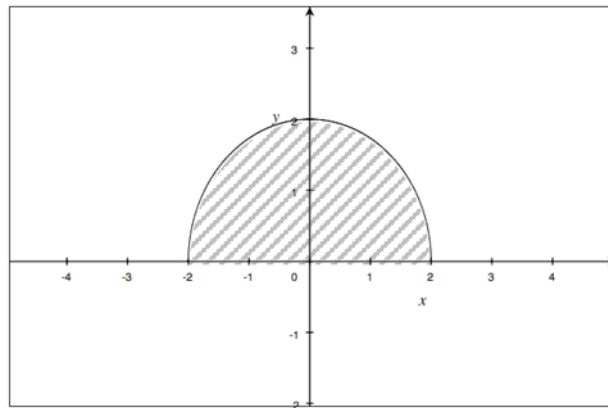
4π (۳)

2π - 2 (۲)

π + 2 (۱)

نکته: نمودار تابع به فرم $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ نیم دایره ای به شعاع a است.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi (2)^2 = 2\pi$$



گزینه ۴ صحیح است.

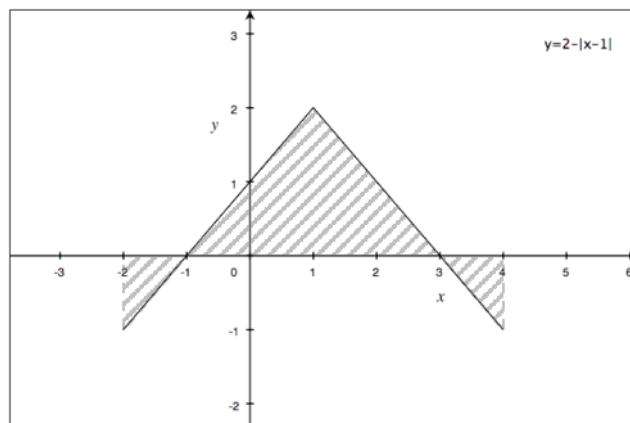
۳- با توجه به نمودار $f(x) = 2 - |x - 1|$ حاصل $\int_{-2}^4 f(x) dx$ کدام است؟ (تجربی ۸۹)

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{7}{2}$ (۳)

2 (۲)

3 (۱)



$x = 1 \xrightarrow{\text{محل شکست نمودار}} f(1) = 2 \rightarrow 2 - |x - 1| = 0 \rightarrow |x - 1| = 2 \rightarrow x - 1 = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$f(-2) = -1$ و $f(4) = -1$

$$\int_{-2}^4 (2 - |x - 1|) dx = -s_1 + s_2 - s_3 = -\frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(4)(2) - \frac{1}{2}(1)(1) = 3$$

گزینه ۱ صحیح است.

۴- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، $\int_{-2}^3 f(x) dx$ کدام است؟

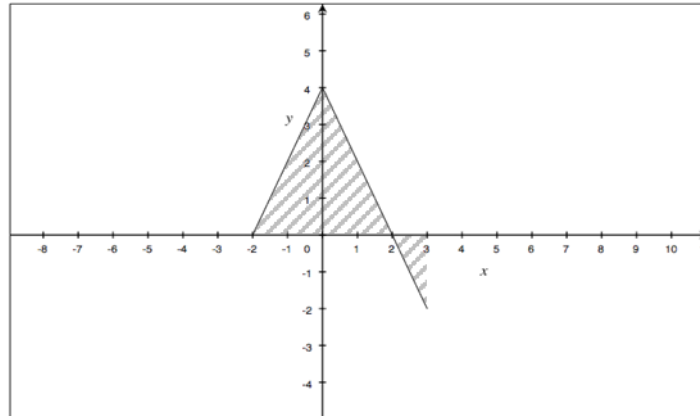
9 (۴)

7 (۳)

5 (۲)

3 (۱)

با داشتن دو نقطه $(0,4)$ و $(2,0)$ می توان معادله خط را نوشت، و مقدار تابع را در $x = 3$ تعیین کرد.



$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \xrightarrow{\times 4} y = 4 - 2x \rightarrow y(3) = -2$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \frac{1}{2}(4)(4) - \frac{1}{2}(1)(2) = 8 - 1 = 7$$

گزینه ۳ صحیح است.

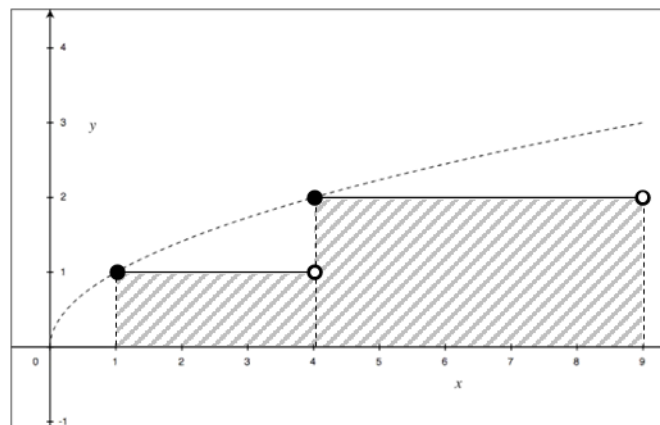
۵- حاصل $\int_0^9 [\sqrt{x}] dx$ کدام است؟

17 (۴)

12 (۳)

15 (۲)

13 (۱)



$$\int_0^9 [\sqrt{x}] dx = 0 + 3 \times 1 + 5 \times 2 = 13$$

گزینه ۱ صحیح است.

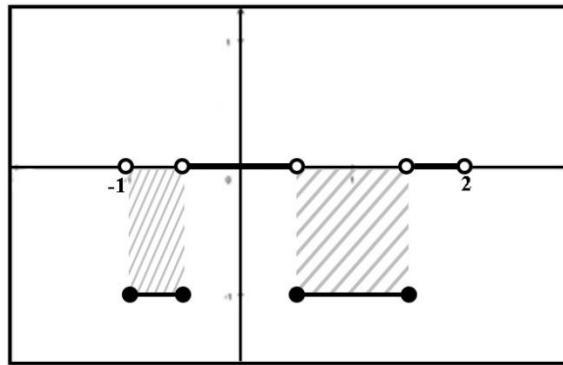
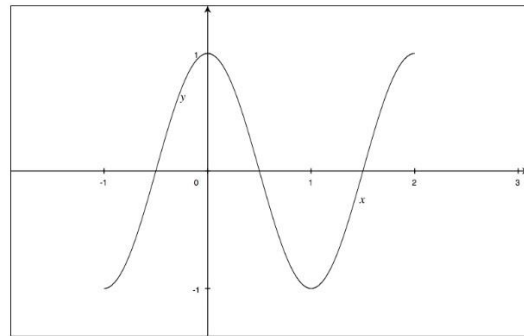
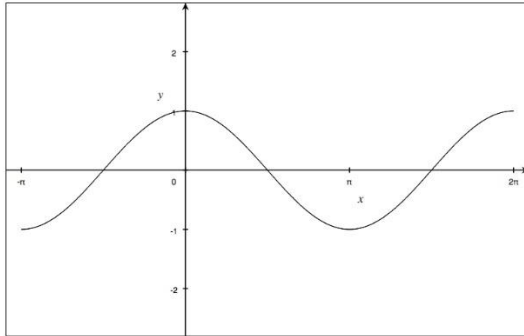
۶- حاصل $\int_{-1}^2 [\cos \pi x] dx$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)



$$\int_{-1}^2 [\cos \pi x] dx = -\left(\frac{1}{2}\right)(1) - (1)(1) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۷- حاصل $\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

2 (۴)

1 (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

0 (۱)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^\pi \sin x \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^\pi \sin x |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= -\frac{1}{4}(-1 - 1) + \frac{1}{4}(1 - (-1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۸- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$ کدام است؟

1 (۴)

0 (۳)

 $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x (1 - \cos^2 x)} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \sin^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} |\sin x| dx \xrightarrow{\text{در این بازه تابع زوج است}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x dx \\ &= -2 \frac{\cos^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3} (0 - 1) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۹- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۸۷)

4 (۴)

2 (۳)

1 (۲)

0 (۱)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \sqrt{1 + \tan^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \frac{1}{|\cos x|} dx \xrightarrow{\text{تابع زوج است}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \frac{1}{\cos x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^{-2} \sin x dx = -2 \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2(2 - 1) = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

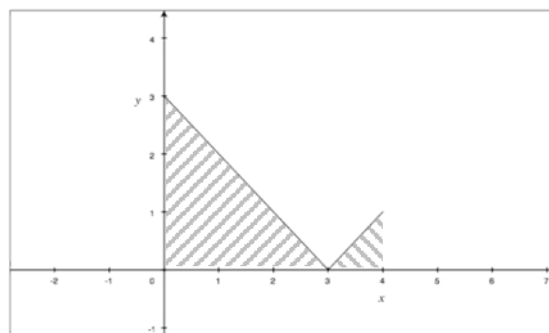
۱۰- حاصل $\int_0^4 |x - 3| dx$ کدام است؟

 $\frac{5}{2}$ (۴)

6 (۳)

4 (۲)

5 (۱)



$$\int_0^4 |x - 3| dx = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} (3)(3) + \frac{1}{2} (1)(1) = \frac{10}{2} = 5$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۱- حاصل $\int_{-2}^1 \frac{|x|}{x} dx$ کدام است؟

3 (۴)

1 (۳)

-1 (۲)

-3 (۱)

$$\int_{-2}^1 \frac{|x|}{x} dx = \int_{-2}^0 -\frac{x}{x} dx + \int_0^1 \frac{x}{x} dx = \int_{-2}^0 -1 dx + \int_0^1 1 dx = -(0 + 2) + (1 - 0) = -1$$

گزینه ۲ صحیح است.

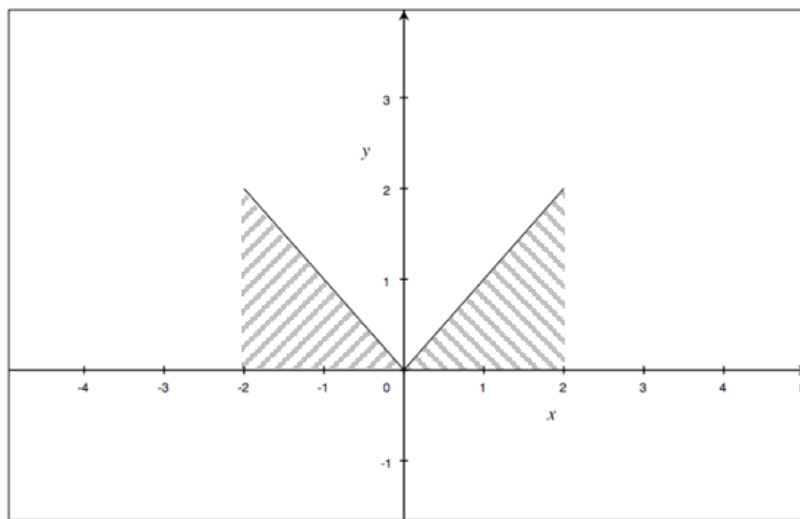
۱۲- حاصل $\int_{-2}^2 (2x + |x|) dx$ کدام است؟

8 (۴)

6 (۳)

4 (۲)

3 (۱)



$$\int_{-2}^2 2x dx + \int_{-2}^2 |x| dx = \int_{-2}^2 |x| dx = 2S_1 = 2 \left(\frac{1}{2} \right) (2)(2) = 4$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۳- حاصل $\int_0^1 |x^2 + x + 1| dx$ کدام است؟ $\frac{5}{6}$ (۴)

2 (۳)

 $\frac{11}{6}$ (۲) $\frac{13}{6}$ (۱)

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است}$$

$$\int_0^1 |x^2 + x + 1| dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{11}{6}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۴- حاصل $\int_{-1}^3 |x^2 - 2x| dx$ کدام است؟

۳ (۴)

 $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۲)

۴ (۱)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |x^2 - 2x| dx &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)_{-1}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)_2^3 = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۵- حاصل $\int_{-2}^2 |x + |x|| dx$ کدام است؟

۸ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

$$\int_{-2}^2 |x + |x|| dx = \int_{-2}^0 |x - x| dx + \int_0^2 |x + x| dx = 0 + 2 \int_0^2 |x| dx = 2 \int_0^2 |x| dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$$

گزینه ۲ صحیح است.

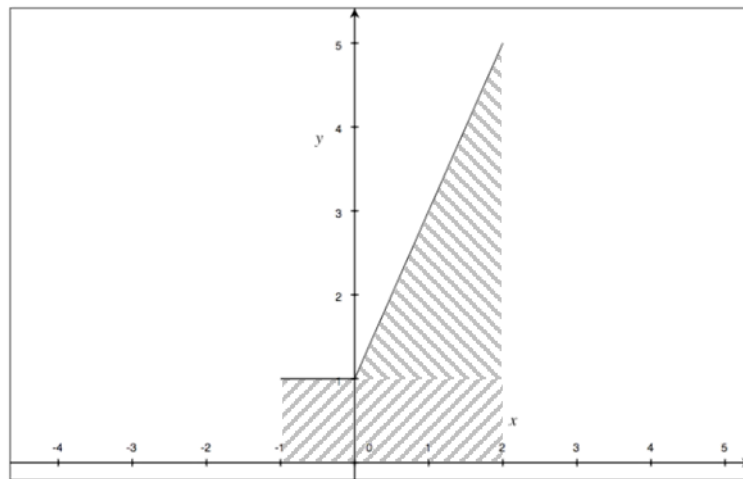
۱۶- اگر $f(x) = |x| + |x + 1|$ باشد، حاصل $\int_{-1}^2 f(x) dx$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۶.۵ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)



$$\int_{-1}^2 f(x) dx = s_1 + s_2 = 1 \times 1 + \frac{(1 + 5) \times 2}{2} = 1 + 6 = 7$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۷- حاصل $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$ کدام است؟

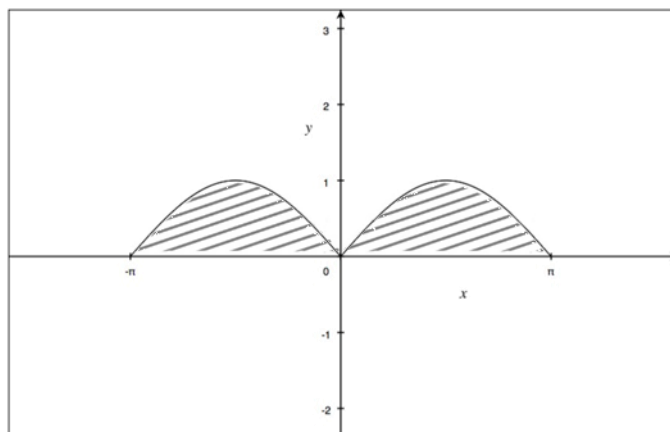
1 (۴)

4 (۳)

2 (۲)

3 (۱)

$$\text{روش اول: } \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 + 2 = 4$$



$$\text{روش دوم: } \int_{-\pi}^0 -\sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi}^0 - \cos x \Big|_0^{\pi} = (1 + 1) - (-1 - 1) = 4$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۸- حاصل $\int_0^{\pi} \left| \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} \right| dx$ کدام است؟

1 (۴)

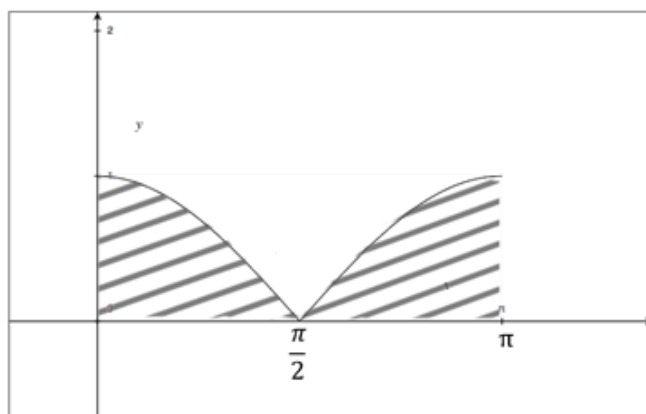
4 (۳)

2 (۲)

3 (۱)

$$\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} |-\cos x| dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2$$



گزینه ۲ صحیح است.

۱۹- حاصل $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ کدام است؟

۲ (۴) $2\sqrt{2}$

۱ (۳) 1

۲ (۲) 2

۰ (۱) 0

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2$$

گزینه ۲ صحیح است.

۲۰- حاصل $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} dx$ کدام است؟

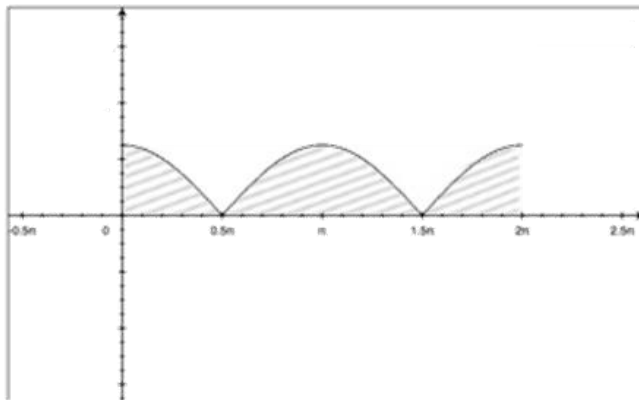
۴ (۴) 4

-4 (۳) -4

۲ (۲) 2

-2 (۱) -2

روش اول: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = 4$



روش دوم: $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$
 $= (1 - 0) - (-1 - 1) + (0 + 1) = 4$

گزینه ۴ صحیح است.

۲۱- حاصل $\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx$ کدام است؟

۲ (۴) $2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} - 2$ (۳)

$2 + 2\sqrt{2}$ (۲)

۰ (۱)

$\sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \rightarrow \tan x = -1 \xrightarrow{\text{بازه } (0, \pi)} x = \frac{3\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} -(\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} + (\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1 + 0) + (-1) - (0) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۴ صحیح است.

۲۲- حاصل $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

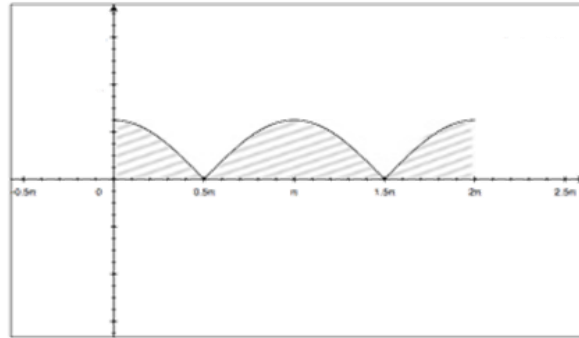
5 (۴)

2 (۳)

4 (۲)

3 (۱)

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_0^\pi |\cos x| dx = 2$$



گزینه ۳ صحیح است.

۲۳- حاصل $\int_{-2}^1 (|x| - [x]) dx$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

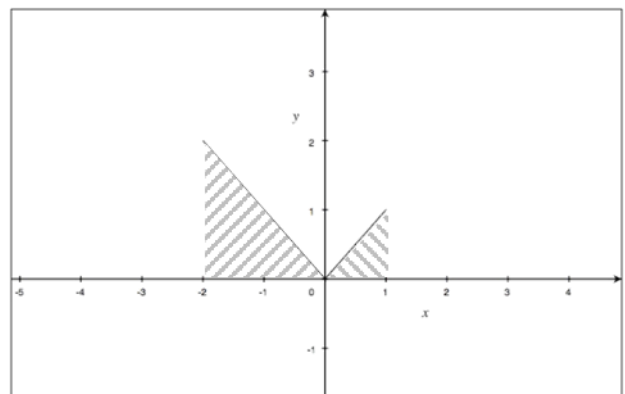
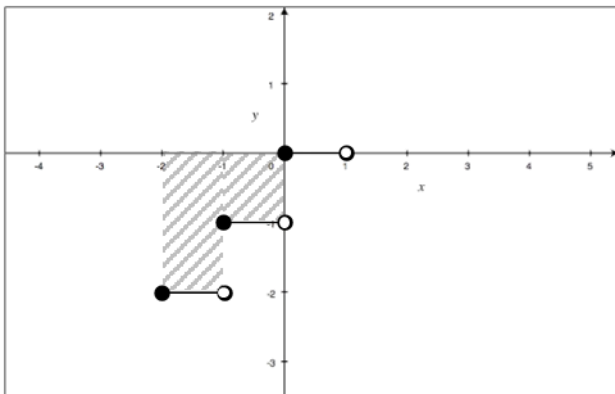
5.5 (۴)

5 (۳)

4.5 (۲)

4 (۱)

$$\int_{-2}^1 |x| dx - \int_{-2}^1 [x] dx = \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(1)(1) - (2 + 1) = 5.5$$



گزینه ۴ صحیح است.

۲۴- حاصل $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

8 (۴)

6 (۳)

4 (۲)

2 (۱)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos x)} dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)} dx = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx = -4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= -4(-1 - 1) = 8 \end{aligned}$$

تذکره: زاویه 2π برای $\sin \frac{x}{2}$ همانند زاویه π برای $\sin x$ است.

گزینه ۴ صحیح است.

۲۵- حاصل $\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

$2 - \sqrt{2} + \ln 2$ (۴) $2 + \sqrt{2} - \ln 2$ (۳) $4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$ (۲) $4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$ (۱)

$$0 \leq x < 2 \xrightarrow{+2} 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 0$$

$$2 \leq x < 4 \xrightarrow{+2} 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 0 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx + \int_2^4 1 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx &= \int_2^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \ln x \right) \Big|_2^4 \\ &= 4 - \ln 4 - (2\sqrt{2} - \ln 2) \xrightarrow{\ln 4 = 2 \ln 2} 4 - 2 \ln 2 - 2\sqrt{2} + \ln 2 = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2 \end{aligned}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۶- حاصل $\int_0^2 \frac{x^2 - [x]}{x+1} dx$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۴)

$1 + \ln 2$ (۴) $\frac{1}{2} + \ln 2$ (۳) $1 - \ln 2$ (۲) $\ln 2$ (۱)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 - 0}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \int_0^1 (x-1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 + \ln|x+1| \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 + \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \ln 2 \end{aligned}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۷- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ کدام است؟

$\sqrt{2} + 1$ (۴) $\sqrt{2} - 1$ (۳) $2\sqrt{2} - 2$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۱)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = (\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\sqrt{2} - 1) - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

تذکره: در ناحیه اول از بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ داریم، $\cos x \geq \sin x$ و در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ داریم، $\sin x \geq \cos x$

گزینه ۲ صحیح است.

۲۸- حاصل $\int_0^2 |\sqrt{x} - 1| dx$ چند برابر $(\sqrt{2} - 1)$ است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)

$$\int_0^2 |\sqrt{x} - 1| dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx + \int_1^2 (\sqrt{x} - 1) dx = \left(x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right) \Big|_1^2$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{3}2\sqrt{2} - 2 - \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲۹- حاصل $\int_1^{e^2} \frac{[\ln x]}{x} dx$ کدام است؟

 $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

2 (۲)

1 (۱)

$$1 \leq x < e \rightarrow 0 \leq \ln x < 1 \rightarrow [\ln x] = 0$$

$$e \leq x < e^2 \rightarrow 1 \leq \ln x < 2 \rightarrow [\ln x] = 1$$

$$\int_1^e 0 dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

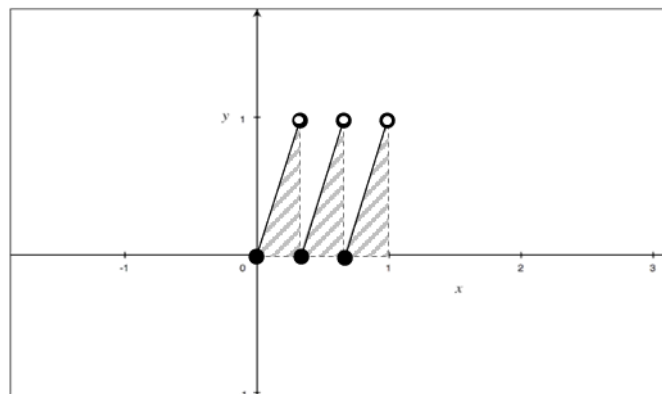
۳۰- حاصل $\int_0^1 (3x - [3x]) dx$ کدام است؟

1 (۴)

0 (۳)

 $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$y = ax - [ax]$ نمودار ازّه است، و دوره تناوب آن برابر $\frac{1}{|a|}$ است.



$$\int_0^1 (3x - [3x]) dx = 3 \times (\text{مساحت مثلث}) = \frac{1}{2}$$

تذکر: مساحت هر مثلث $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۱- حاصل $\int_0^2 [x]|x-1|dx$ برابر است با:

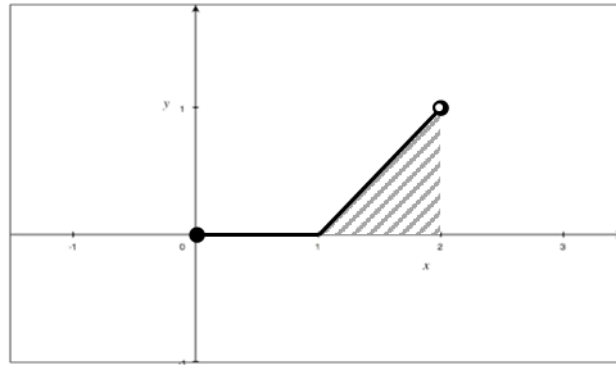
۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$[x]|x-1| = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



$$\int_0^2 [x]|x-1|dx = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۲- حاصل $\int_0^2 x^{-[x]} dx$ کدام است؟

$2 + \ln 2$ (۴)

$1 + \ln 2$ (۳)

$1 - \ln 2$ (۲)

$\ln 2$ (۱)

$$\int_0^2 x^{-[x]} dx = \int_0^1 x^0 dx + \int_1^2 x^{-1} dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x} = x|_0^1 + \ln x|_1^2 = 1 + \ln 2$$

گزینه ۳ صحیح است.

۳۳- حاصل $\int_0^3 |[x]-2|dx$ کدام است؟

۵ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$\int_0^1 |0-2|dx + \int_1^2 |1-2|dx + \int_2^3 |2-2|dx = 2(1-0) + 1(2-1) + 0 = 3$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۵- حاصل $\int_{-1}^2 x|x|[x]dx$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{10}{3}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

$$\int_{-1}^0 x(-x)(-1)dx + \int_0^1 x(x)(0)dx + \int_1^2 x(x)(1)dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + 0 + \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^0 + \frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{3}(8-1) = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۶- حاصل $\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} dx$ کدام است؟

$\frac{60}{13}$ (۴)

8 (۳)

$\frac{71}{12}$ (۲)

6 (۱)

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2} + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2}} dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{72}{12} = 6$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳۷- حاصل $\int_0^\pi |2 \cos x + 1| dx$ کدام است؟

$4 + \frac{2\pi}{3}$ (۴)

$4 - \frac{2\pi}{3}$ (۳)

$2 + \frac{\pi}{3}$ (۲)

$2 - \frac{\pi}{3}$ (۱)

$2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{باز } (0, \pi)} x = \frac{2\pi}{3}$

$$\int_0^\pi |2 \cos x + 1| dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2 \cos x + 1) dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi (2 \cos x + 1) dx = (2 \sin x + x) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} - (2 \sin x + x) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^\pi$$

$$= 1 + \frac{2\pi}{3} - \pi + 1 + \frac{2\pi}{3} = 2 + \frac{\pi}{3}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۳۸- حاصل $\int_0^\pi |\sin 2x| dx$ کدام است؟

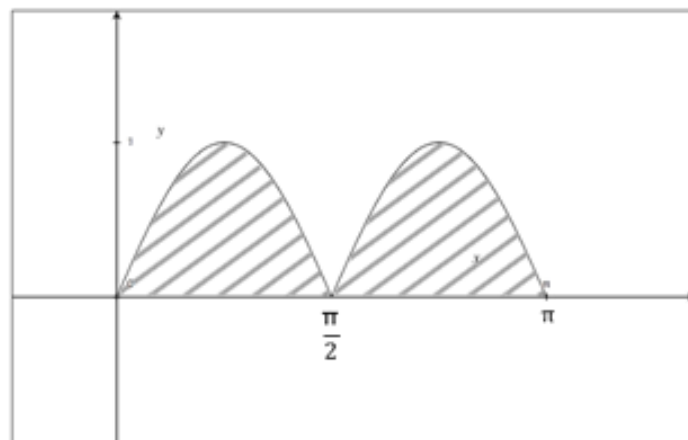
$\frac{3}{2}$ (۴)

2 (۳)

4 (۲)

1 (۱)

$$\int_0^\pi |\sin 2x| dx = 2 \left(\frac{2}{2}\right) = 2$$



گزینه ۳ صحیح است.

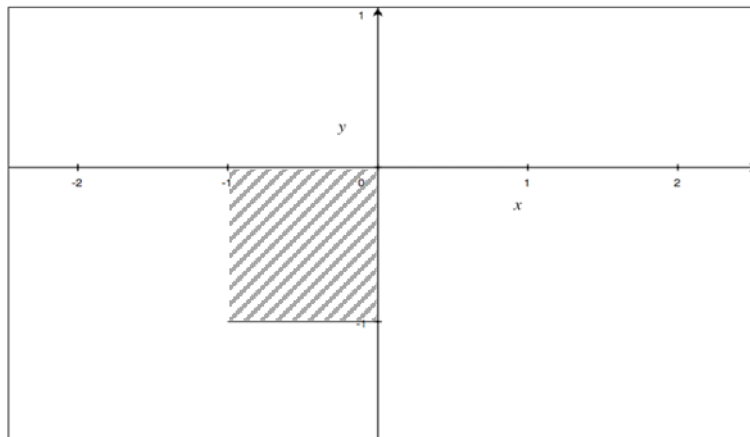
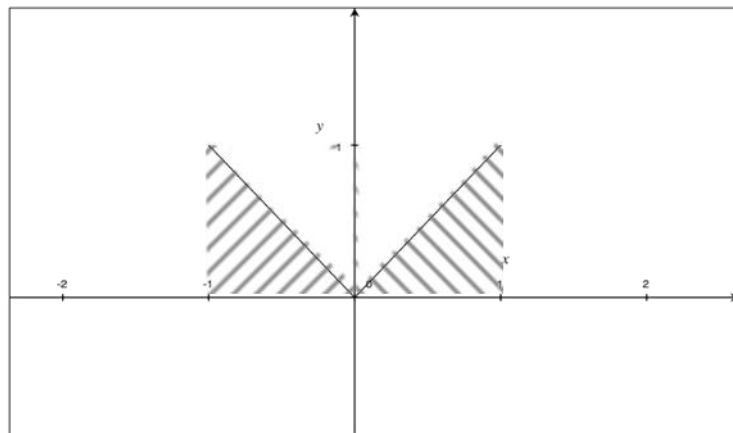
۳۹- حاصل $\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$\frac{7}{2}$ (۴)

3 (۳)

4 (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)



$$3 \int_{-1}^1 |x| dx - \int_{-1}^1 [x] dx = 3 \left(\frac{1}{2} (1)(1) + \frac{1}{2} (1)(1) \right) - (-1) = 3 + 1 = 4$$

گزینه ۲ صحیح است.

قضیه بنیادی اول (مشتق انتگرال):

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$\text{به طور کلی: } F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt \rightarrow F'(x) = g'(x) f(g(x))$$

مثال: اگر $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{4+t^3} dt$ باشد، آنگاه $F'(x)$ کدام است؟

$$F'(x) = \sqrt{4+x^3}$$

مثال: مشتق توابع زیر را با فرض اینکه $F(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2} dt$ بگیرید.

$$y = F(x) \rightarrow y' = F'(x) = \frac{\cos \pi x}{1+x^2}$$

$$y = F(x^3) \rightarrow y' = 3x^2 F'(x^3) = 3x^2 \frac{\cos \pi x^3}{1+x^6}$$

$$y = x^2 F(x) \rightarrow y' = 2xF(x) + x^2 F'(x) = 2x \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2} dt + x^2 \frac{\cos \pi x}{1+x^2}$$

۱- اگر $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}}$ باشد، مقدار مشتق $F(x^3)$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

$$F'(x) = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$y = F(x^3) \rightarrow y' = 3x^2 F'(x^3) \xrightarrow{x=2} y' = 12F'(8) = 12 \times \frac{1}{1+\sqrt[3]{8}} = 12 \times \frac{1}{1+2} = 4$$

گزینه ۴ صحیح است.

۲- اگر $F(x) = \int_0^x \frac{3dt}{1+t^3}$ باشد، آنگاه مشتق $F\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x = 2$ چقدر است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

$$F'(x) = \frac{3}{1+x^3}$$

$$y = F\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x=2} y'(2) = -\frac{1}{4} F'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \frac{3}{1+\frac{1}{8}} = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳- اگر $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$ باشد، آنگاه مشتق راست تابع $y = x G(x)$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (تجربی ۸۷)

 $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

$$G'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$G(2) = \int_2^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt = 0$$

$$y = x G(x) \rightarrow y' = G(x) + x G'(x) \xrightarrow{x=2} y'_+(2) = G(2) + 2 G'(2) \rightarrow y'_+(2) = 0 + 2 \times \frac{2}{\sqrt{1+8}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۴- اگر $f(x) = \int_x^2 \frac{t}{t+3} dt$ باشد، آنگاه مقدار $f''(1)$ کدام است؟

$$f(x) = -\int_2^x \frac{t}{t+3} dt \rightarrow f'(x) = -\frac{x}{x+3} \rightarrow f''(x) = \frac{-3}{(x+3)^2} \rightarrow f''(1) = \frac{-3}{16}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۵- هرگاه $f(x) = \int_1^x t\sqrt{t^2+3} dt$ باشد، آنگاه مشتق $(2+x)f(x+1)$ به ازای $x=0$ کدام است؟

$$y = (2+x)f(x+1) \rightarrow y' = f(x+1) + f'(x+1)(x+2) \rightarrow y'(0) = f(1) + 2f'(1) = 0 + 2(1)(\sqrt{1+3}) = 4$$

گزینه ۲ صحیح است.

۶- هرگاه $f(x) = \int_2^x (t^2 - t) dt$ و $g(x) = \int_1^x |t-1| dt$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x=2$ کدام است؟

$$y = f(x)g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \rightarrow y'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$

$$f(2) = \int_2^2 (t^2 - t) dt = 0 \quad (\text{نیازی به محاسبه } g'(2) \text{ نیست})$$

$$f'(x) = x^2 - x \rightarrow f'(2) = 4 - 2 = 2$$

$$g(2) = \int_1^2 |t-1| dt = \int_1^2 (t-1) dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)_1^2 = 2 - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$y'(2) = (2) \left(\frac{1}{2}\right) + (0)(g'(2)) = 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

۷- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار تابع f در $x=1$ واقع بر آن کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

$$2y = x - 1 \quad (۴) \quad 2y = x - 2 \quad (۳) \quad y = 2x - 1 \quad (۲) \quad y = 2x - 2 \quad (۱)$$

$$f(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \xrightarrow{\text{نقطه } (1,0)} f'(x) = \frac{1}{1+x^3} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} = m$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow 2y = x - 1$$

گزینه ۴ صحیح است.

۸- مقدار $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{3}{4} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} (1+\tan^2 x) = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6} \text{ به ازای}} F'(x) = \frac{1}{\cos x} \rightarrow F''(x) = \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} \rightarrow F''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۹- اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} dt$ باشد، آنگاه $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟ (ریاضی ۹۴)

$$3 \text{ (۴)}$$

$$1.5 \text{ (۳)}$$

$$2 \text{ (۲)}$$

$$1 \text{ (۱)}$$

$$G'(x) = 2x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} dt + \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2} x^2$$

$$G'(4) = 8 \int_2^2 \frac{\ln(t+2)}{t^2} dt + \frac{1}{2\sqrt{4}} \frac{\ln(2+2)}{(\sqrt{4})^2} (16) = 0 + \frac{1}{4} \frac{\ln 4}{4} (16) = \ln 4 = 2 \ln 2$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t - \sin t) dt}{x^4}$ کدام است؟

$$0 \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{24} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{4x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{12x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{12x^2} = \frac{1}{24}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۱- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{1+2t}{5+t^5} dt$ باشد، مشتق $f \circ f$ در $x = 1$ کدام است؟

$$\frac{3}{25} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{10} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{25} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{10} \text{ (۱)}$$

$$y = f(f(x)) \rightarrow y' = f'(x)f'(f(x)) \rightarrow y'(1) = f'(1)f'(f(1))$$

$$f'(x) = \frac{1+2x}{5+x^5} \rightarrow \begin{cases} f'(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ f'(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$f(1) = \int_1^1 \frac{1+2t}{5+t^5} dt = 0$$

$$y' = \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۲- اگر $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 + 1} dt$ و $g(x) = \sin \pi x$ باشد، مشتق تابع $g \circ f$ در $x = 1$ کدام است؟

$$-4\sqrt{\pi} \text{ (۴)}$$

$$4\sqrt{\pi} \text{ (۳)}$$

$$2\sqrt{\pi} \text{ (۲)}$$

$$-2\sqrt{\pi} \text{ (۱)}$$

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \rightarrow y' = f'(x)g'(f(x)) \rightarrow y'(1) = f'(1)g'(f(1))$$

$$f(1) = \int_1^1 \sqrt{t^3 + 1} dt = 0$$

$$f'(x) = \sqrt{x^3 + 1} \rightarrow f'(1) = \sqrt{2}$$

$$y'(1) = \sqrt{2}g'(0) \xrightarrow{g'(x) = \pi \cos \pi x \rightarrow g'(0) = \pi} y'(1) = \sqrt{2}\pi$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۳- اگر $F(x) = \int (x^3 + \ln x) dx$ باشد، حاصل $F''(1)$ کدام است؟

$$7 \text{ (۴)}$$

$$3 \text{ (۳)}$$

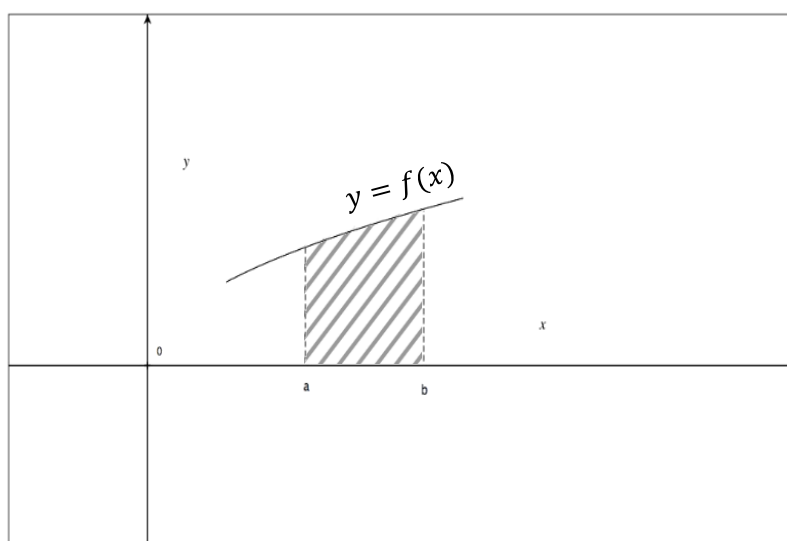
$$5 \text{ (۲)}$$

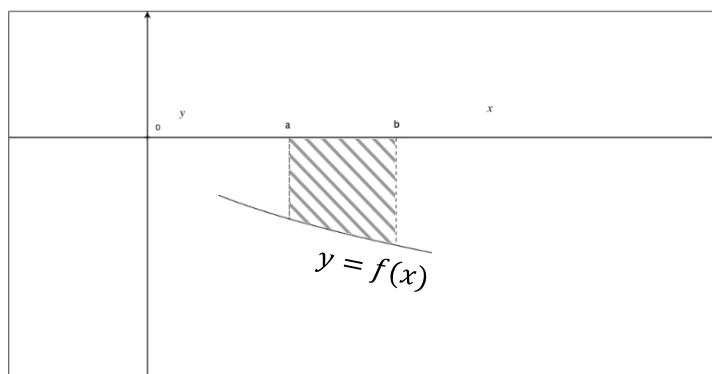
$$4 \text{ (۱)}$$

$$F'(x) = x^3 + \ln x \rightarrow F''(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} \rightarrow F''(1) = 4$$

گزینه ۱ صحیح است.

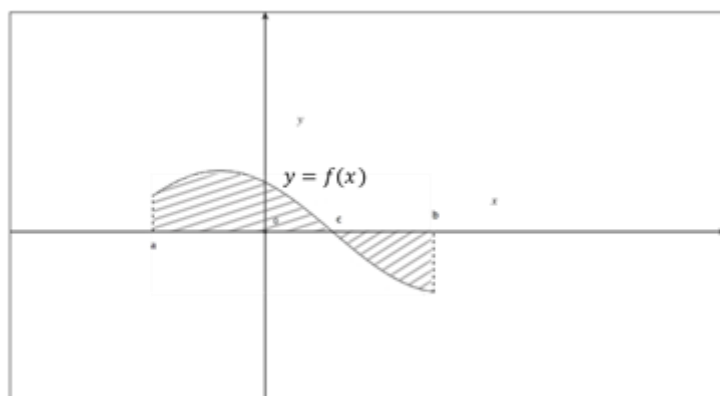
محاسبه سطح محصور: در محاسبه سطح محصور، حالت های زیر را خواهیم داشت:

حالت (۱) سطح محصور بین یک منحنی و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ (اگر f در یک طرف محور x ها باشد



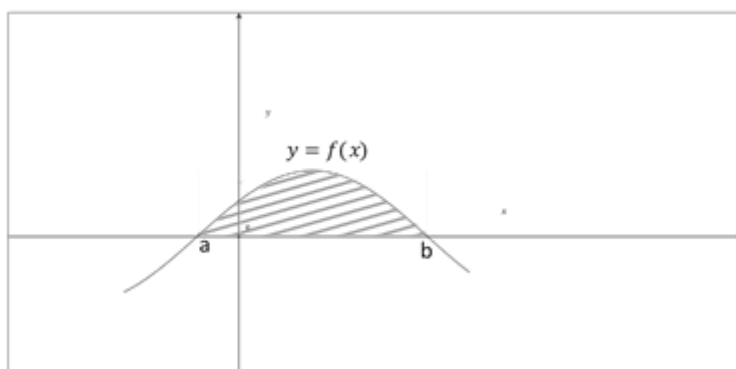
$$s = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

حالت ۲) سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ اگر f در بازه $[a, b]$ محور x ها را در نقطه ای به طول c قطع کند



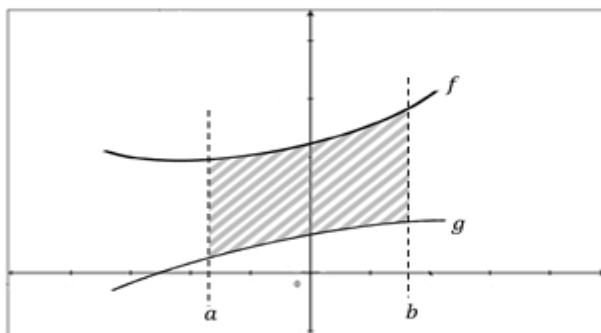
$$s = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

حالت ۳) سطح محصور بین یک منحنی با محور x ها: در این حالت منحنی را با محور x ها قطع می دهیم $(f(x) = 0)$ تا a و b را پیدا کنیم.



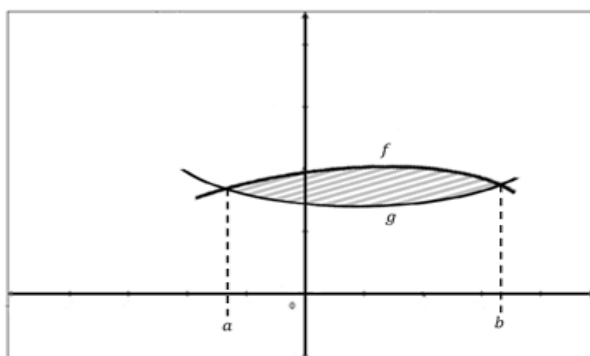
$$s = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

حالت ۴) سطح محصور بین دو تابع f و g در فاصله $x = a$ و $x = b$



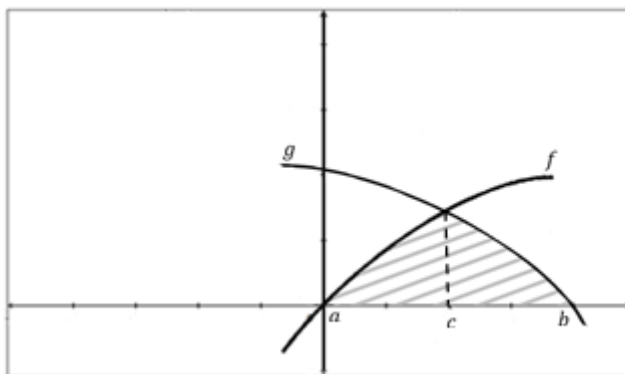
$$s = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

حالت ۵) سطح محصور بین دو منحنی: ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی می دهیم $(f(x) = g(x))$ طول های نقاط تلاقی، حدود انتگرال را مشخص می کنند.



$$s = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

حالت ۶) سطح محصور از بالا یا پایین به یک منحنی محدود نباشد.



$$f(x) = g(x) \rightarrow x = c$$

$$s = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b g(x) dx \right|$$

۱- سطح محصور به نمودار $y = e^x$ بین خطوط $x = 0$ تا $x = \ln 3$ کدام است؟

۴) $2 - \ln 2$

۳) $2 \ln 2$

۲) $\ln 2$

۱) 2

$$s = \int_0^{\ln 3} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 3} = e^{\ln 3} - e^0 = 3 - 1 = 2$$

گزینه ۱ صحیح است.

۲- مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = |2x - 1|$ و دو خط $x = 1$ و $x = -1$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

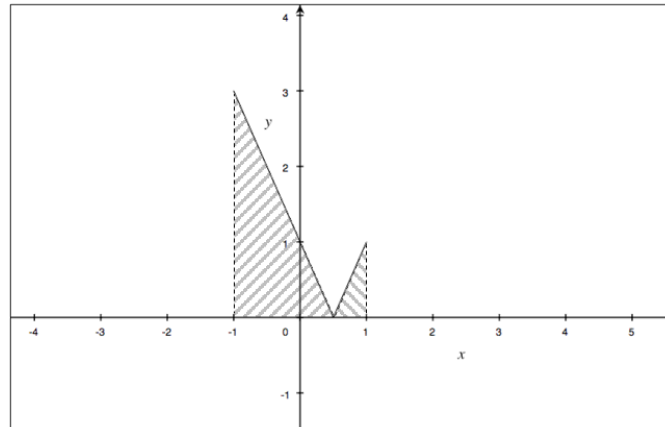
۴) 3

۳) $\frac{5}{2}$

۲) 2

۱) $\frac{3}{2}$

$$|2x - 1| = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$s = s_1 + s_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (3) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1) = \frac{5}{2}$$

گزینه ۳ صحیح است.

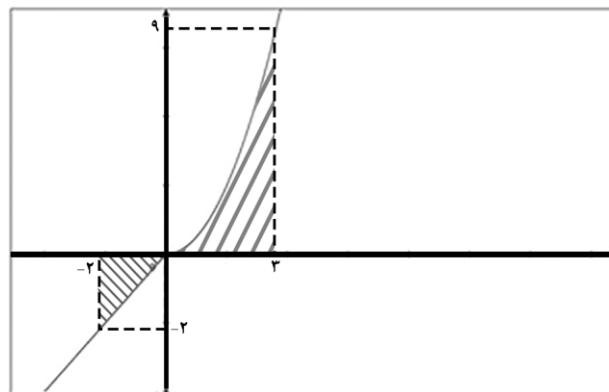
۳- مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ و محور Xها و دو خط $x = 3$ و $x = -2$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۴) 11

۳) 10

۲) 9

۱) 8



$$s = \left| \int_{-2}^0 x \, dx \right| + \left| \int_0^3 x^2 \, dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^0 + \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = (0 + 2) + (9 - 0) = 11$$

گزینه ۴ صحیح است.

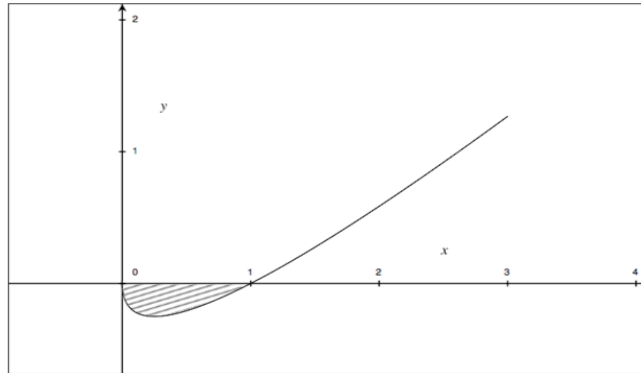
۴- با توجه به شکل تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)



$$x - \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = \sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$s = \left| \int_0^1 (x - \sqrt{x}) \, dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^1 = \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{6}$$

گزینه ۱ صحیح است.

۵- با توجه به قسمتی از نمودارهای تابع با ضابطه $f(x) = \sin x + \cos x$ در شکل زیر، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟ (تجربی خارج ۸۸)

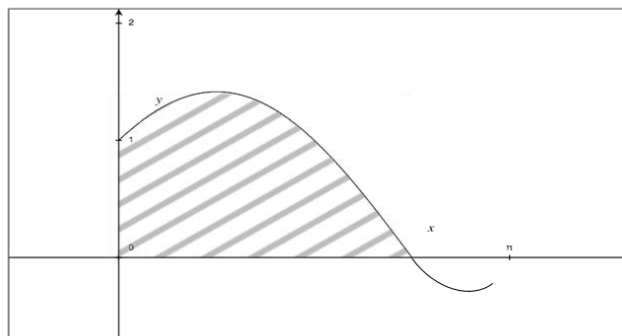
$1 + \sqrt{2}$ (۴)

2 (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$2 - \sqrt{2}$ (۱)

$$\sin x + \cos x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$



$$s = \left| \int_0^{3\pi/4} (\sin x + \cos x) \, dx \right| = \left| -\cos x + \sin x \right|_0^{3\pi/4} = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right| = \sqrt{2} + 1$$

گزینه ۴ صحیح است.

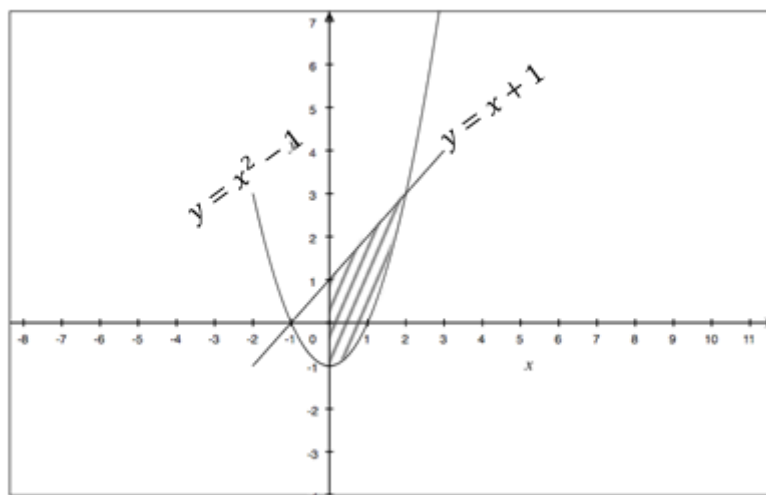
۶- مساحت قسمت رنگی کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{11}{3}$ (۲)

$\frac{10}{3}$ (۱)



$$x + 1 = x^2 - 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$s = \int_0^2 (x + 1) - (x^2 - 1) dx = \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

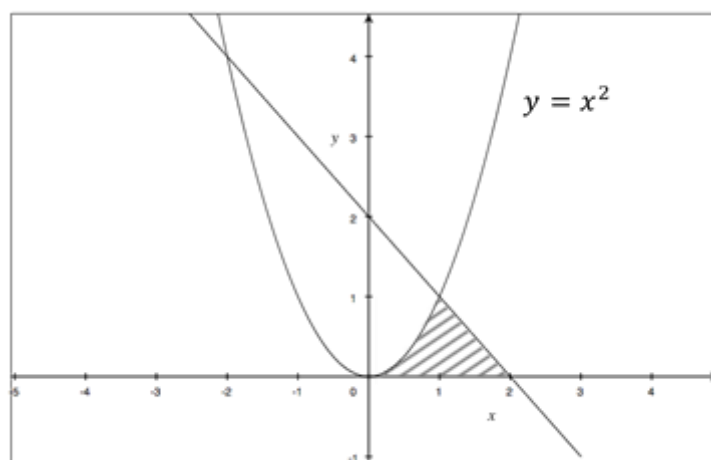
۷- با توجه به شکل، مساحت ناحیه سایه زده چقدر است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۳)

$\frac{7}{6}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)



$$\text{ابتدا معادله خط را می نویسیم} \rightarrow \begin{cases} (0,2) \\ (2,0) \end{cases} \rightarrow m = \frac{2-0}{0-2} = -1 \rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 2$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قطع}} x^2 = -x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ ق ق}$$

$$s = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + (-x^2 + 2x) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 + (-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۳ صحیح است.

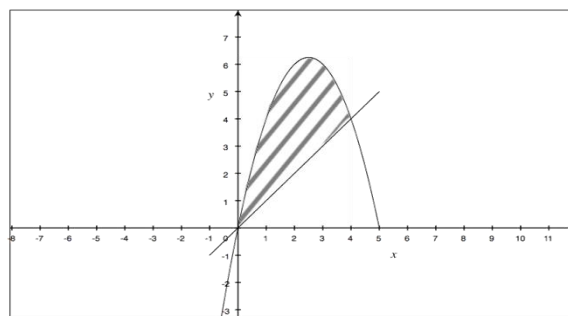
۸- مساحت ناحیه زیر منحنی به معادله $y = -x^2 + 5x$ و بالای خط $y = x$ کدام است؟ (تجربی ۸۷)

$\frac{32}{3}$ (۴)

$\frac{28}{3}$ (۳)

$-\frac{22}{3}$ (۲)

$\frac{16}{3}$ (۱)



$$-x^2 + 5x = x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$s = \int_0^4 (-x^2 + 5x - x) dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right) \Big|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

گزینه ۴ صحیح است.

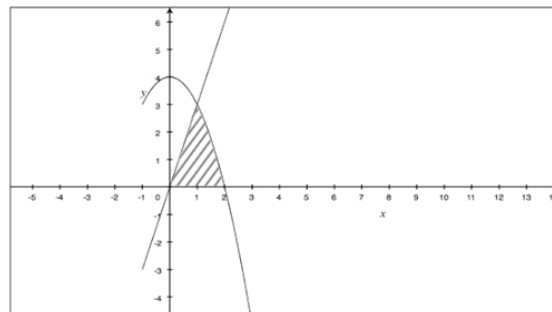
۹- مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = 4 - x^2$ و خط به معادله $y = 3x$ و محور x ها در ناحیه اول کدام است؟

$\frac{19}{6}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{13}{6}$ (۱)



$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2 \text{ ق ق}$$

$$4 - x^2 = 3x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ ق ق}$$

$$s = \int_0^1 3x \, dx + \int_1^2 (4 - x^2) \, dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{19}{6}$$

گزینه ۴ صحیح است.

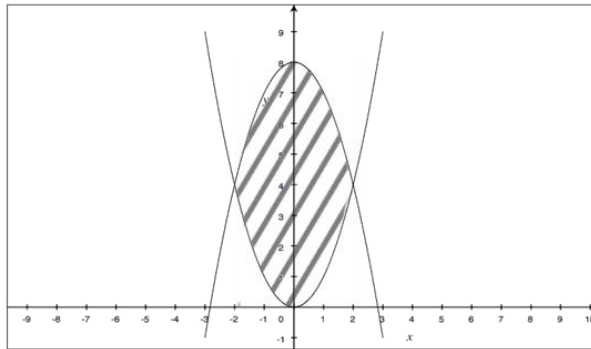
۱۰- مساحت ناحیه محدود به منحنی های $y = 8 - x^2$ و $y = x^2$ کدام است؟

$\frac{16}{3}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{32}{3}$ (۲)

$\frac{64}{3}$ (۱)



$$x^2 = 8 - x^2 \rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^2 (8 - x^2 - x^2) \, dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) \, dx \xrightarrow{\text{به علت تقارن}} 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) \, dx = 2 \left(8x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(16 - \frac{16}{3} \right) = \frac{64}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

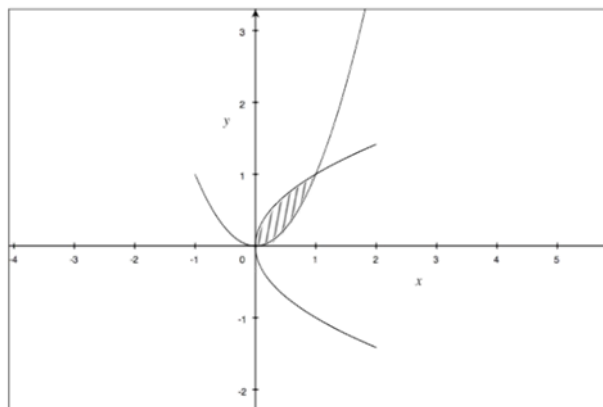
۱۱- مساحت ناحیه هاشور زده کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

1 (۱)



$$y^2 = x \rightarrow y = \pm \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x} \text{ ق ق}$$

$$\text{معادله قطع دو منحنی} \rightarrow x^2 = \sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$s = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۲- سطح بین منحنی $y = 2 + \cos 2x$ و محور x ها در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

۴) 4π

۳) 6π

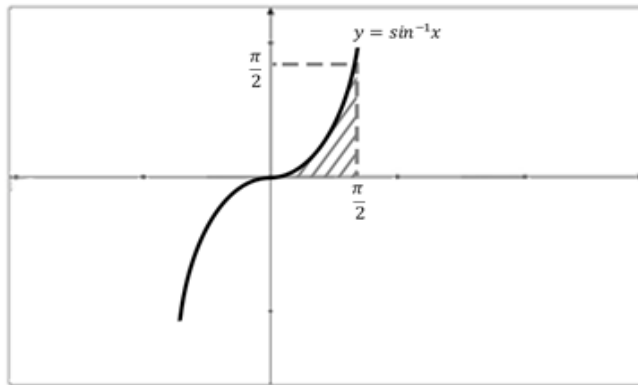
۲) 3π

۱) 2π

$$2 + \cos 2x \neq 0 \rightarrow s = \int_0^\pi (2 + \cos 2x) dx = \left(2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)_0^\pi = 2\pi$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۳- در شکل مقابل، قسمت رنگی چه مساحتی دارد؟



۴) $\frac{\pi}{2} - 1$

۳) $\pi - 1$

۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

۱) $\pi - 2$

$$s = s_1 - s_2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

گزینه ۴ صحیح است.

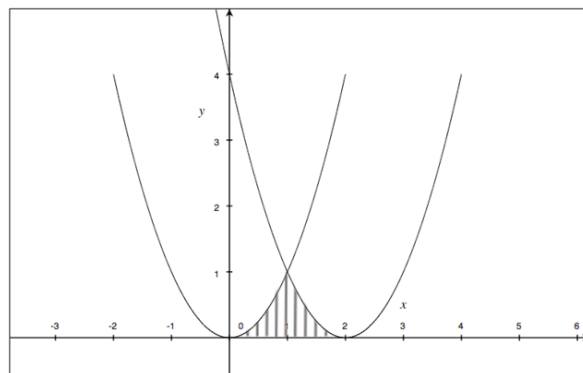
۱۴- مساحت ناحیه محدود به منحنی های $y = x^2$ و $y = (x - 2)^2$ و محور x ها کدام است؟ (تجربی خارج ۸۵)

۴) $\frac{4}{3}$

۳) 1

۲) $\frac{2}{3}$

۱) $\frac{1}{3}$



$$s = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$s_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \rightarrow s = 2s_1 = \frac{2}{3}$$

گزینه ۲ صحیح است.

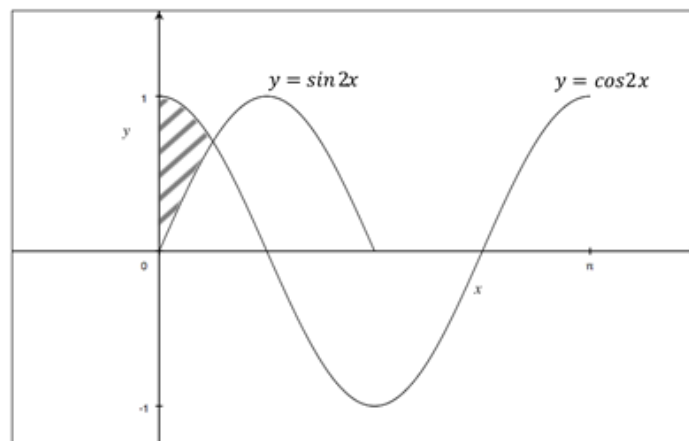
۱۵- مساحت ناحیه هاشور زده کدام است؟ (تجربی ۸۰)

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \quad (۲)$$

$$2 - \sqrt{2} \quad (۱)$$

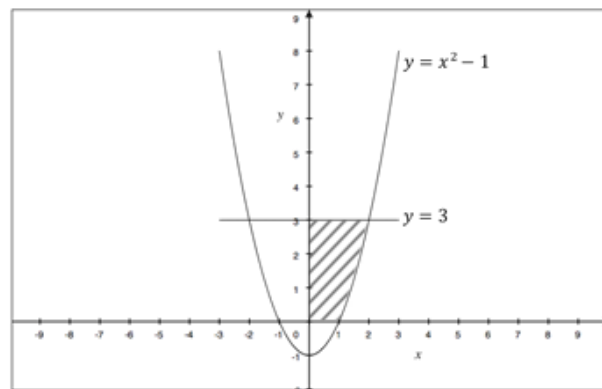


$$\sin 2x = \cos 2x \rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos 2x - \sin 2x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

گزینه ۲ صحیح است.

۱۶- سطح رنگی در شکل مقابل برابر کدام است؟



$$6 \quad (۴)$$

$$\frac{14}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ق ق}$$

$$x^2 - 1 = 3 \rightarrow x = 2 \text{ ق ق}$$

$$s_1 = \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right)_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

$$s_2 = 6 \rightarrow s = s_2 - s_1 = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۷- مساحت ناحیه محدود به $y = x^2|x|$ و خط $y = 8$ کدام است؟

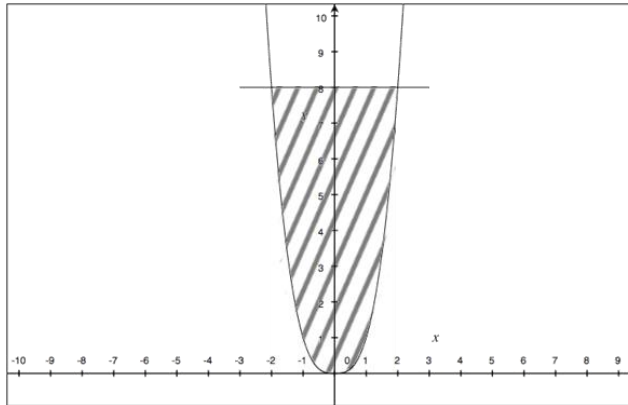
12 (۴)

16 (۳)

32 (۲)

24 (۱)

$$x^2|x| = 8 \rightarrow x = \pm 2$$



$$s = 2 \int_0^2 (8 - x^2|x|) dx = 2 \int_0^2 (8 - x^3) dx = 2 \left(8x - \frac{x^4}{4} \right)_0^2 = 2(16 - 4) = 24$$

گزینه ۱ صحیح است.

تمرین

۱- اگر $\int \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

2x + 3 (۴)

2x + 2 (۳)

x + 3 (۲)

x + 2 (۱)

۲- اگر $\int \frac{9-9x}{1+\sqrt{x}} dx = xf(x) + c$ باشد، آنگاه $f(1)$ کدام است؟

5 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

1 (۱)

۳- اگر $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} + 1) dx = \sqrt[6]{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه ضریب عددی جمله $x^3\sqrt{x}$ در تابع $f(x)$ کدام است؟ $\frac{11}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{6}{11}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

۴- اگر $\int \frac{x+8}{\sqrt[3]{x+2}} dx = \frac{3xf(x)}{10} + 4x + c$ باشد، آنگاه $f(1)$ کدام است؟

5 (۴)

7 (۳)

-5 (۲)

-3 (۱)

۵- اگر $\int \frac{x-1}{x^3} dx = \frac{f(x)}{2x^2} + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۸۹)

2x - 1 (۴)

-2x + 1 (۳)

x - 2 (۲)

-x + 2 (۱)

۶- اگر $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{f(x)}{2x} + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)

 $x^3 - 4x\sqrt{x} - 2$ (۴) $x^3 - 8x\sqrt{x} - 2$ (۳) $x^3 - 4x\sqrt{x} + 2$ (۲) $x^3 - 8x\sqrt{x} + 2$ (۱)

۷- اگر $\int \frac{(x\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}-1)}{x^2} dx = \frac{f(x)}{2x} + c$ باشد، آنگاه تابع اولیه تابع $f(x)$ کدام است؟

 $\frac{1}{4}x^4 + 2x + c$ (۴) $x^3 + x + c$ (۳) $x^3 - x + c$ (۲) $\frac{1}{4}x^4 - x + c$ (۱)

۸- اگر $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x}} dx = \frac{f(x)}{3x\sqrt{x}} + c$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ کدام است؟

6x - 1 (۴)

-3x + 2 (۳)

-6x + 2 (۲)

3x - 1 (۱)

۹- اگر $\int \sqrt{(1-\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{x}}{3}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

 $\sqrt{x} - x$ (۴) $\frac{\sqrt{x}}{3} - 2x$ (۳) $\sqrt{x} + 2x$ (۲) $3\sqrt{x} + 2x$ (۱)

۱۰- اگر $\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} dx = \frac{5x^2+f(x)}{10} + c$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ کدام است؟

 $8^4\sqrt{x}$ (۴) $-8x^4\sqrt{x}$ (۳) $4^4\sqrt{x}$ (۲) $-4x^4\sqrt{x}$ (۱)

۱۱- اگر $\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} dx = \frac{f(x)}{x} + c$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

25 (۴)

11 (۳)

17 (۲)

33 (۱)

۱۲- حاصل $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x} dx$ کدام است؟

1 (۴)

4 (۳)

2 (۲)

3 (۱)

۱۳- حاصل $\int_0^9 |\sqrt{x} - 2| dx$ کدام است؟

 $\frac{29}{3}$ (۴)

3 (۳)

 $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۱)

۱۴- حاصل $\int_{-1}^4 (x - |x - 2|) dx$ کدام است؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۱۵- حاصل $\int_{-2}^3 (|x| + 2[x]) dx$ کدام است؟

$\frac{13}{2}$ (۴)

$\frac{19}{2}$ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

$\frac{15}{2}$ (۱)

۱۶- حاصل $\int_{-1}^1 (1 - [x]) \cos \frac{\pi}{2} x dx$ کدام است؟

$-\frac{6}{\pi}$ (۴)

$-\frac{4}{\pi}$ (۳)

$\frac{6}{\pi}$ (۲)

$\frac{4}{\pi}$ (۱)

۱۷- اگر $f(x) = \int_0^x t|t^2 - 1| dt$ باشد، تعداد نقاط بحرانی چندتا است؟

3 (۴)

4 (۳)

5 (۲)

6 (۱)

۱۸- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1-t^2}$ باشد، مشتق دوم $f(\cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۹- فرض کنید G تابع مساحت با ضابطه $G(x) = \int_1^x \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt$ باشد، اگر $y = \frac{G(x)}{x^2}$ باشد، $y'(1)$ کدام است؟

$\sin \frac{1}{2}$ (۴)

$2 \sin \frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2} \sin 2$ (۲)

$\sin 2$ (۱)

۲۰- اگر $F(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{\sqrt{4t+1}} dt$ باشد، مشتق تابع $y = x^3 F\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{7}{6}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{6}$ (۱)

۲۱- حاصل $\int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} dx$ کدام است؟

$\frac{1}{4} \sin 2x + c$ (۴)

$\frac{1}{4} \cos 2x + c$ (۳)

$-\frac{1}{4} \cos 2x + c$ (۲)

$-\frac{1}{4} \sin 2x + c$ (۱)

۲۲- حاصل $\int \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$ کدام است؟

$-\sin x - \cos x + c$ (۴)

$\sin x - \cos x + c$ (۳)

$-\sin x + \cos x + c$ (۲)

$\sin x + \cos x + c$ (۱)

۲۳- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} dx$ کدام است؟

2 (۴)

-1 (۳)

1 (۲)

-2 (۱)

۲۴- حاصل $\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx$ در بازه $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

$2 \sin x + c$ (۴)

$-2 \cos x + c$ (۳)

$-2 \sin x + c$ (۲)

$2 \cos x + c$ (۱)

۲۵- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}} dx$ کدام است؟

1.5 (۴)

2 (۳)

1 (۲)

0 (۱)

۲۶- حاصل $\int_1^9 |x - 2| \sqrt{x} dx$ کدام است؟

43.5 (۴)

46.5 (۳)

45.5 (۲)

47.5 (۱)

۲۷- حاصل $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin^2 x} \sin x dx$ کدام است؟

0 (۴)

4 (۳)

-1 (۲)

1 (۱)

۲۸- اگر $f(x) = |x| - [x]$ باشد، حاصل $\int_{-1}^2 f(x) dx$ کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴)

2 (۳)

 $\frac{5}{2}$ (۲)

3 (۱)

۲۹- حاصل $\int_0^4 |1 - x| \sqrt{x} dx$ کدام است؟

14 (۴)

8 (۳)

12 (۲)

10 (۱)

۳۰- حاصل $\int_{-1}^4 (|x| - |x - 4|) dx$ کدام است؟

-4 (۴)

-2 (۳)

4 (۲)

2 (۱)

۳۱- اگر $F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^2+1}$ و $G(x) = \frac{x}{2x+1} F\left(\frac{1}{x}\right)$ باشد، حاصل $G'\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

 $\frac{1}{20}$ (۴) $-\frac{1}{10}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۳۲- حاصل $\int_{-1}^2 (x - [x]) dx$ کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴)

0 (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

3 (۱)

۳۳- حاصل $\int_{-1}^4 \left([x] + \left[\frac{x}{2} \right] - 1 \right) dx$ کدام است؟

1 (۴)

0 (۳)

-1 (۲)

2 (۱)

۳۴- حاصل $\int_{-3}^4 ([x] + [-x]) dx$ کدام است؟

-8 (۴)

7 (۳)

8 (۲)

-7 (۱)

۳۵- حاصل $\int_1^5 (|x| + |x - 4|) dx$ کدام است؟

12 (۴)

15 (۳)

16 (۲)

17 (۱)

۳۶- مساحت ناحیه محدود به منحنی های $y = x + 1$ و $y = x^2 - 1$ در قسمت مثبت محور طول ها کدام است؟

 $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۱)

۳۷- مساحت ناحیه محدود به نمودار $y = \frac{1-x}{1+x}$ و محورهای مختصات در ربع اول کدام است؟

 $\ln 2$ (۴) $-1 + \ln 4$ (۳) $-1 + \ln 2$ (۲) $3 - 2 \ln 2$ (۱)

۳۸- سطح محصور به نمودار $y = x^2 - |x|$ و محور x ها کدام است؟

$\frac{1}{12}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۳۹- سطح محصور به نمودار $y = x|x|$ و خط $y = 4$ تا محور عرض ها کدام است؟

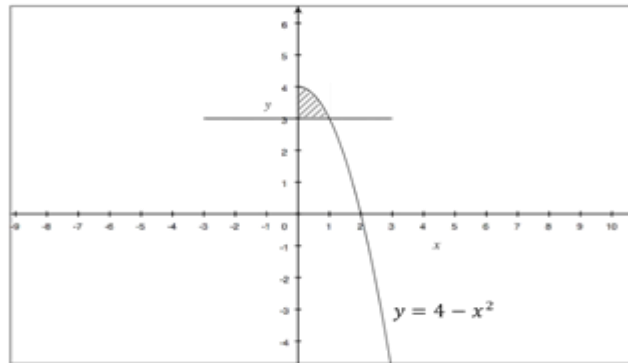
$\frac{10}{3}$ (۴)

4 (۳)

$\frac{16}{3}$ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

۴۰- سطح رنگی در شکل مقابل برابر کدام است؟



2 (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

1 (۱)

۴۱- مساحت ناحیه محدود به منحنی $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ و محور x ها بین خطوط $x = 2$ و $x = 4$ کدام است؟

$4 + \ln 2$ (۴)

$6 - \ln 2$ (۳)

8 (۲)

7 (۱)

۴۲- مساحت ناحیه محدود به معادلات $y = (x-3)^2$ و $y = -3x + 9$ کدام است؟

7.5 (۴)

6 (۳)

4.5 (۲)

3 (۱)

۴۳- سطح محصور بین منحنی تابع $y = x^3$ و معکوس آن کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۴۴- حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\sin^2 x} dx$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{\pi}{6} - 1$ (۳)

$1 - \frac{\pi}{6}$ (۲)

$1 - \sqrt{2}$ (۱)

۴۵- حاصل انتگرال $\int_0^6 \sqrt{(x^2 - 2x)^2} dx$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۹ (۴)

۸ (۳)

$\frac{20}{3}$ (۲)

$\frac{16}{3}$ (۱)

۴۶- حاصل $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{3}$ (۳)

$\sqrt{3} - 1$ (۲)

$2 - \sqrt{3}$ (۱)

۴۷- اگر $\int \frac{x-1}{x^3} dx = \frac{1}{2x^2} f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

(۱) $-2x+1$ (۲) $-x+2$ (۳) $x-4$ (۴) $2x-1$

۴۸- اگر $f(x)=|x-2|-2$ باشد، حاصل $\int_0^6 f(x)dx$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

(۱) $-2/5$ (۲) -۲ (۳) $-۱/۵$ (۴) -۱

۴۹- اگر $f(x)=x-|x-2|$ باشد، حاصل $\int_0^4 f(x)dx$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۰- اگر $\int (3x + \frac{1}{x})^2 dx = \frac{1}{x} f(x) + c$ باشد، آنگاه حاصل $f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $3x^3+6x^2-1$ (۲) $3x^3+3x-1$ (۳) $3x^4+3x^2-1$ (۴) $3x^4+36x^2-1$