دانلود از سایت ریاضی سرا WWW.RIAZISARA.IR

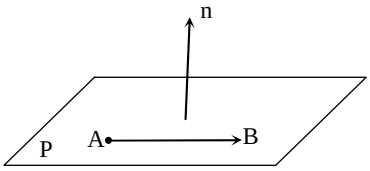
فصل دوم معادلات خط و صفحه

معادله صفحه

برای نوشتن معادله صفحه از خصوصیات بردار استفاده می‌کنیم.

معادله‌ی صفحه‌ای را که از نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ گذشته و بر بردار $n=(a , b , c)$ عمود است به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

نقطه‌ی $B(x , y , z)$ در صفحه‌ی P قرار دارد هرگاه $\overrightarrow{AB}\perp n$ باشد.



$\overrightarrow{AB}=(x-x_\circ \ , \ y-y_\circ \ , \ z-z_\circ)$

$n=(a,b,c)$

$\overrightarrow{AB}\perp n \Rightarrow \overrightarrow{AB}\ .\ n=\circ \Rightarrow a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$ معادله صفحه

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱ , -۱ , ۲)$ عبور کرده و بر بردار $n=(۲ , ۳ , ۴)$ عمود باشد.

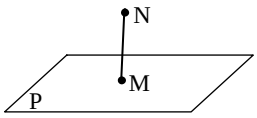
راه‌حل:

$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ \Rightarrow ۲(x-۱)+۳(y+۱)+۴(z-۲)=\circ \Rightarrow ۲x+۳y+۴x-۷=\circ$

تذکر: با توجه به آن‌چه که گفته شد برای نوشتن معادله صفحه کافی است یک نقطه از صفحه و بردار عمود بر صفحه را داشته‌باشیم. (به بردار عمود بر صفحه بردار نرمال می‌گویند.)

مسئله: اگر نقطه‌ی $M(-۱ , ۲ , ۳)$ تصویر قائم نقطه‌ی $N(۱ , ۱ , ۲)$ بر صفحه P باشد، آن‌گاه معادله صفحه‌ی P را بنویسید.

راه‌حل: با توجه به شکل $\overrightarrow{MN}$ بردار نرمال صفحه و نقطه‌ی M نقطه‌ی صفحه می‌باشد.



$\overrightarrow{MN}=(۲ , -۱ , -۱)$ و نرمال $M(-۱ , ۲ , ۳)$ نقطه

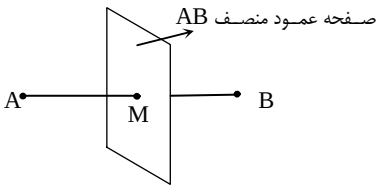
$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$

$۲(x+۱)-۱(y-۲)-۱(z-۳)=\circ$

$۲x-y-z+۷=\circ$

مسئله: نقاط $A(۱ , -۱ , \circ)$ و $B(۳ , ۱ , ۲)$ مفروضند. معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف AB را بنویسید.

راه‌حل: بردار $\overrightarrow{AB}$ بردار نرمال صفحه است و نقطه‌ی M وسط AB نقطه‌ی صفحه می‌باشد.



$\overrightarrow{AB}=(۲ , ۲ , ۲)$, $M=(۲ , \circ , ۱)$ $\Rightarrow$ $a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$

$۲(x-۲)+۲(y-\circ)+۲(z-۱)=\circ \Rightarrow x+y+z-۳=\circ$

تست: تصویر نقطه‌ی $(۱,۳,۴)$ بر کدام‌یک از صفحات زیر نقطه‌ی $(-۱,۴,۳)$ است؟

۱) $۲x+y-z+۱=\circ$ **۲)** $۲x-y+z+۳=\circ$ **۳)** $۲x+y-۲z+۴=\circ$ **۴)** $۲x-y+z=۳$

راه حل: اگر $A(۱,۳,۴)$ و $B(-۱,۴,۳)$، آن‌گاه $\overrightarrow{AB}$ بردار نرمال صفحه است و B نقطه‌ای از صفحه فوق می‌باشد.

$n=\overrightarrow{AB}=(-۲,۱,-۱) \Rightarrow -۲(x+۱)+۱(y-۴)-۱(z-۳)=\circ$

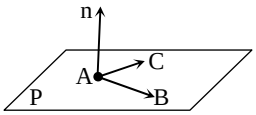
$\Rightarrow -۲x+y-z-۳=\circ$

پس گزینه‌ی ۲ درست است.

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقاط $A(۱,۱,۲)$ و $B(۰,-۱,۱)$ و $C(۲,۱,۰)$ را به‌دست آورید.

راه‌حل: با توجه به شکل حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بردار نرمال صفحه می‌باشد و یکی از این سه نقطه، نقطه‌ی صفحه است.

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-۱,-۲,-۱)\\ \overrightarrow{AC}=(۱,۰,-۲)\end{array} \Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۰ & -۲\end{vmatrix}=۴i-۳j+۲k$$

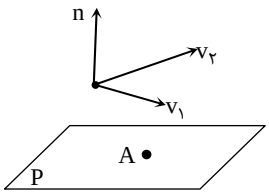


$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$
$$۴(x-۱)-۳(y-۱)+۲(z-۲)=۰\Rightarrow ۴x-۳y+۲z-۵=۰$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-۱,۱,۲)$ گذشته و با بردارهای $v_۱(۲,-۱,۰)$ و $v_۲(۱,-۲,۱)$ موازی باشند.

راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $v_۱$ و $v_۲$ بردار نرمال صفحه است.

$$n=v_۱\times v_۲=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱\end{vmatrix}=-i-۲j-۳k$$



$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$
$$-۱(x+۱)-۲(y-۱)-۳(z-۲)=۰$$
$$-x-۲y-۳z+۷=۰$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که با بردار $v(-۱,۲,۱)$ و محور xها موازی باشد و از نقطه‌ی A واقع بر محور yها به عرض ۲ عبور نماید.

راه حل: حاصلضرب خارجی بردارهای v و i بردار واحد محور x ها بردار نرمال صفحه مطلوب است و $A(۰,۲,۰)$ نقطه‌ای از صفحه است.

$$n=v\times i=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=j-۲k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰\Rightarrow ۱(y-۲)-۲(z-۰)=۰\Rightarrow y-۲z=۲$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که در نقطه‌ای به ارتفاع ۳ روی محور zها، بر محور zها عمود باشد.

راه‌حل: بردار $k(۰,۰,۱)$ بردار واحد محور zها بردار نرمال صفحه است و نقطه‌ی $A(۰,۰,۳)$ نقطه‌ای از صفحه است.

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$
$$۱(z-۳)=۰$$

معادله صفحه مطلوب $\boxed{z=۳}$

تست: فصل مشترک دو صفحه‌ی $P:ax+by-z+۲=۰$ و $P':bx-y+az=۲$ از نقطه‌ی $(۱,۲,۳)$ می‌گذرد. $۵(a-b)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۶ ۴) ۶-

راه حل: نقطه‌ی $A=(۱,۲,۳)$ در هر دو صفحه صدق می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l}A\in P\Rightarrow a+۲b-۳+۲=۰\\ A\in P'\Rightarrow b-۲+۳a=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a+۲b=۱\\ ۳a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۷}{۵}\\ b=-\frac{۱}{۵}\end{cases}\Rightarrow ۵(a-b)=۸$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

تذکر: اگر معادله‌ی صفحه را ساده‌تر کنیم به معادله زیر خواهیم رسید.

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$
$$ax+by+cz+\underbrace{(-ax_۰-by_۰-cz_۰)}_{d}=۰$$
$$ax+by+cz+d=۰$$

پس هر معادله درجه‌ی اول در فضای سه‌بعدی $R^۳$ معادله یک صفحه است.

وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر:

در مورد صفحات $P: ax+by+cz+d=0$ و $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$ خصوصیات زیر برقرار است.

۱- ضرایب x و y و z مختصات بردار نرمال می‌باشد.

۲- دو صفحه موازیند هرگاه بردارهای نرمال آن‌ها موازی باشند.

(به‌شرط غیر صفر بودن مختصات نرمال) $P \parallel P' \Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

۳- دو صفحه برهم منطبق هستند، هرگاه دو صفحه موازی بوده و یک نقطه از P در P' صدق کند.

$P \equiv P' \Leftrightarrow n \parallel n'$ و یک نقطه از P در P' باشد $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$.

۴- دو صفحه بر هم عمودند هرگاه بردارهای نرمال آن‌ها برهم عمود باشد $P \perp P' \Leftrightarrow n \perp n'$.

مسئله: از هر صفحه دو نقطه مشخص کرده، بردار نرمال آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $2x-y+z=3$, ب) $x+z=5$, پ) $z=-2$

راه‌حل:

الف) $B(1,0,1)$, $A(0,0,3)$, $n(2,-1,1)$

ب) $B(3,2,2)$, $A(2,0,3)$, $n(1,0,1)$

پ) $B(5,7,-2)$, $A(0,0,-2)$, $n(0,0,1)$

توجه کنید در مورد ب متغیر y هر مقدار حقیقی می‌تواند بگیرد زیرا ضریب y صفر است، نه خود y.

درضمن در مورد پ متغیرهای x و y هر مقدار حقیقی می‌توانند بگیرند.

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از نقطه‌ی $A(1,-2,0)$ عبور کرده و با صفحه $2x-y=7$ موازی باشد.

راه‌حل: بردار نرمال این صفحه بردار $n(2,-1,0)$ می‌باشد.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow 2(x-1)-1(y+2)=0 \Rightarrow 2x-y-4=0$$

تست: اگر نقطه $M(x,y,z)$ روی صفحه‌ی $2x-y+2z=3$ باشد، آن‌گاه مینیمم عبارت $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۱۰ ۴) ۱۰-

راه حل: عبارت فوق را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=(x^2-2x)+(y^2-4y)+z^2-4$$
$$=(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+z^2-4=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2-9$$

بنابراین کافی است مینیمم $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2$ را بدست آوریم.

بردارهای $a(x-1,y-2,z)$ و $b(2,-1,2)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نامساوی کوشی - شوارتز داریم:

$$|a.b| \le |a||b| \Rightarrow |2(x-1)-(y-2)+2z| \le \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}\sqrt{4+1+4}$$
$$\Rightarrow |2x-y+2z| \le 3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2} \Rightarrow 3 \le 3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}$$
$$\Rightarrow 1 \le (x-1)^2+(y-2)^2+z^2$$

پس مینیمم عبارت $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2$ برابر یک می‌باشد، در نتیجه مینیمم عبارات $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4$ برابر $1-9=-8$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۲ درست است.

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از نقطه‌ی $A(2,-2,3)$ گذشته، بر صفحات $P: x-2y+z=3$ و $Q: 2x-z=5$ عمود باشد.

راه‌حل: اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند، بردار نرمال آن‌ها نیز بر یکدیگر عمود است. پس حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال P و Q، بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب است.

$$\begin{matrix} n_P=(1,-2,1) \\ n_Q=(2,0,-1) \end{matrix} \Rightarrow n=n_P \times n_Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i+3j+4k$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow 2(x-2)+3(y+2)+4(z-3)=0 \Rightarrow 2x+3y+4z-10=0$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از دو نقطه‌ی $A=(۱,۲,-۱)$ و $B=(۰,۳,۱)$ عبور کرده، بر صفحه‌ی $P: ۲x-y-z=۵$ عمود باشد.

راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردار $\overrightarrow{AB}$ در بردار نرمال صفحه‌ی P، بردار نرمال صفحه مطلوب است.

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-۱,۱,۲)\\ n_P=(۲,-۱,-۱)\end{array} \Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times n_P=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & ۱ & ۲\\ ۲ & -۱ & -۱\end{vmatrix}=i+۳j-k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

$$۱(x-۱)+۳(y-۲)-۱(z+۱)=۰ \Rightarrow x+۳y-z-۸=۰$$

مسئله: نقاط تلاقی صفحه $۲x+y=۴$ را با محورهای مختصات به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

راه حل:

برخورد با محور x ها $\xrightarrow{y\,,\,z=۰} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow A(۲,۰,۰)$

برخورد با محور y ها $\xrightarrow{x\,,\,z=۰} y=۴ \Rightarrow B(۰,۴,۰)$

برخورد با محور z ها $\xrightarrow{x\,,\,y=۰} ۰=۴$ غیرممکن

بنابراین صفحه‌ی فوق با محور z ها برخورد ندارد، پس این صفحه با محور z ها موازی است.

نتیجه: معادله‌ی چند صفحه خاص به‌صورت زیر می‌باشد.

۱- صفحه‌ی $ax+by+cz=۰$ از مبدأ مختصات می‌گذرد. (در این صفحه $d=۰$ می‌باشد.)

۲- صفحه‌ی $ax+by+d=۰$ موازی محور z ها می‌باشد. (در این صفحه متغیر z وجود ندارد.)

۳- صفحه‌ی $ax+cz+d=۰$ موازی محور y ها می‌باشد. (در این صفحه متغیر y وجود ندارد.)

۴- صفحه‌ی $by+cz+d=۰$ موازی محور x ها می‌باشد. (در این صفحه متغیر x وجود ندارد.)

۵- صفحه‌ی $ax+by=۰$ یا $x+\frac{b}{a}y=۰$ یا $x+my=۰$ شامل محور z ها می‌باشد. (زیرا هر نقطه‌ای با مختصات $(۰,۰,z)$ در معادله‌ی آن صدق می‌کند)

۶- صفحه‌ی $ax+d=۰$ هم موازی با محور y ها و هم موازی با محور z ها می‌باشد. پس موازی صفحه‌ی yoz می‌باشد، به‌عبارتی این صفحه بر محور x ها عمود است.

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(۱,-۱,۲)$ و $B(۰,۱,۱)$ عبور کرده، با محور x ها موازی باشد.

راه‌حل اول: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و i بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب می‌باشد. زیرا بردار نرمال صفحه مطلوب باید هم بر $\overrightarrow{AB}$ و هم بر i عمود باشد.

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(۱,-۲,۱)\\ i=(۱,۰,۰)\end{array} \Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times i=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=j+۲k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow ۱(y-۱)+۲(z-۱)=۰ \Rightarrow y+۲z=۳$$

راه‌حل دوم: معادله‌ی صفحه‌ی موازی با محور x ها به فرم کلی $by+cz+d=۰$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} A\in \text{صفحه} \Rightarrow -b+۲c+d=۰\\ B\in \text{صفحه} \Rightarrow b+c+d=۰\end{array}\right\} \Rightarrow c=-\frac{۲d}{۳}\ ,\quad b=-\frac{d}{۳}$$

این مقادیر را در معادله صفحه قرار می‌دهیم.

$$-\frac{d}{۳}y-\frac{۲d}{۳}z+d=۰ \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در } -\frac{۳}{d}} y+۲z=۳$$

مسئله: صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB به‌طوری که $A(۲,۱,-۱)$ و $B(-۱,۱,۲)$، موازی با کدام یک از محورهای مختصات می‌باشد؟

راه‌حل: بردار نرمال این صفحه بردار $\overrightarrow{AB}=(-۳,۰,۳)$ می‌باشد، پس در معادله‌ی صفحه جمله‌ی شامل y وجود ندارد، زیرا ضریب y صفر است، پس صفحه‌ی فوق با محور y ها موازی است.

فاصله‌ی نقطه از صفحه:

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم که در آن B نقطه‌ای دلخواه از صفحه‌ی P می‌باشد و n بردار نرمال صفحه است.

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه‌ی } P = \frac{|\overrightarrow{AB}.\,n|}{|n|}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ از صفحه‌ی $P: x-y-۲z=۵$ را به‌دست آورید.

$$B \in P \Rightarrow B=(۵\,,\,۰\,,\,۰) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۴\,,\,-۲\,,\,-۳)\ ,\quad n=(۱,-۱,-۲)$$

$$\text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,n|}{|n|} = \frac{|۴+۲+۶|}{\sqrt{۱+۱+۴}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۶}} = ۲\sqrt{۶}$$

مسئله: ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰\,,\,y_۰\,,z_۰)$ از صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=۰$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه } P = \frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

راه‌حل: نقطه‌ی $B(۰\,,\,۰,-\frac{d}{c})$ را از صفحه انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(-x_۰\,,\,-y_۰\,,\,-\frac{d}{c}-z_۰) \quad \text{و} \quad n=(a\,,\,b\,,\,c)$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه‌ی } P = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,n|}{|n|} = \frac{|-ax_۰-by_۰-cz_۰-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} = \frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

(توجه کنید در این فرمول باید مختصات نقطه را در معادله صفحه قرار داده، حاصل را به‌اندازه‌ی بردار نرمال تقسیم کنیم.)

مسئله: فاصله‌ی نقطه‌ی A به ارتفاع ۳ روی محور zها را تا صفحه $x-۲y+z=۱$ به‌دست آورید.

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه} = \frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} = \frac{|۰-۰+۳-۱|}{\sqrt{۱+۴+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

مسئله: اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱\,,\,m\,,\,۲)$ از صفحه $۲x+y-z=۱$ برابر $\sqrt{۶}$ باشد، آن‌گاه m را به‌دست آورید.

راه‌حل:

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه} = \sqrt{۶}$$

$$\frac{|۲+m-۲-۱|}{\sqrt{۴+۱+۱}} = \sqrt{۶} \Rightarrow |m-۱|=۶ \Rightarrow \begin{cases} m-۱=۶ \Rightarrow m=۷ \\ m-۱=-۶ \Rightarrow m=-۵ \end{cases}$$

مسئله: اگر صفحات $۲x-y-z=۱$ و $۲x-y-z=۲$ دو وجه یک مکعب باشند، آن‌گاه حجم این مکعب را به‌دست آورید.

راه‌حل: این دو صفحه موازیند، زیرا بردارهای نرمال آن‌ها موازیند پس فاصله‌ی بین این دو صفحه برابر ضلع مکعب می‌باشد. برای به‌دست آوردن فاصله‌ی بین این دو صفحه‌ی موازی کافی است یک نقطه از یکی از صفحات را انتخاب کرده، فاصله‌ی آن‌نقطه را تا صفحه‌ی بعدی به‌دست آوریم.

$$A \in \text{صفحه‌ی اول} \Rightarrow A(۰\,,\,۰\,,\,-۱)$$

$$\text{ضلع مکعب} = \text{فاصله‌ی بین دو صفحه} = \text{فاصله‌ی } A \text{ تا صفحه‌ی دوم} = \frac{|۰+۰+۱-۲|}{\sqrt{۴+۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

$$\text{حجم مکعب} = (\text{ضلع مکعب})^۳ = (\frac{۱}{\sqrt{۶}})^۳ = \frac{۱}{۶\sqrt{۶}}$$

تست: فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی $۲x+ay+۳z+۵=۰$ و $bx-۶y-۶z+۱۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲۲}}{۲۲}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۲۲}}$ ۴) $\sqrt{۲۲}$

راه حل: دو صفحه موازیند پس بردارهای نرمال آن‌ها موازیند.

$$\left.\begin{matrix} n=(۲,a,۳) \\ n'=(b,-۶,-۶) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{n \parallel n'} \frac{۲}{b}=\frac{a}{-۶}=\frac{۳}{-۶} \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=-۴ \end{cases}$$

بنابراین معادله دو صفحه به صورت $۲x+۳y+۳z+۵=۰$ و $-۴x-۶y-۶z+۱۲=۰$ می‌باشد.

$$A \in \text{صفحه اول} \Rightarrow A=(-\frac{۵}{۲},۰,۰)$$

$$\text{فاصله دو صفحه موازی} = \text{فاصله } A \text{ تا صفحه دوم} = \frac{\left|-۴(-\frac{۵}{۲})+۰+۰+۱۲\right|}{\sqrt{۱۶+۳۶+۳۶}} = \frac{۲۲}{\sqrt{۸۸}} = \frac{۲۲}{۲\sqrt{۲۲}} = \frac{\sqrt{۲۲}}{۲}$$

پس گزینه ۱ درست است.

مسئله: نقطه‌ای با مختصات مثبت از صفحه $۲x+y+z=۱۲$ تعیین کنید به‌طوری که از صفحات مختصات به‌یک فاصله باشد.

راه‌حل: با توجه به آن که فاصله‌ی یک نقطه از صفحات مختصات قدرمطلق مختصات آن نقطه است، برای آن که فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ از سه صفحه‌ی مختصات برابر باشد، باید: $|x|=|y|=|z|$. حال چون نقطه‌ی مطلوب مختصات مثبت دارد، $A(x\,,\,x\,,\,x)$ می‌تواند نقطه‌ی موردنظر باشد $(x>۰)$.

$$A\in \text{صفحه} \Rightarrow ۲x+x+x=۱۲ \Rightarrow ۴x=۱۲ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow A(۳\,,\,۳\,,\,۳)$$

مسئله: مکان هندسی نقاطی از فضا را تعیین کنید که از دو صفحه‌ی متقاطع $P: ax+by+cz+d=۰$ و $P': a'x+b'y+c'z+d'=۰$ به یک فاصله باشند.

راه‌حل: فرض کنیم $M(x\,,\,y\,,\,z)$ نقطه‌ای از مکان موردنظر باشد، داریم: فاصله M تا صفحه‌ی P' = فاصله M تا صفحه‌ی P

$$\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{|a'x+b'y+c'z+d'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲+c'^۲}} \Rightarrow \frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'z+d'}{\sqrt{a'^۲+b'^۲+c'^۲}}$$

تذکر: در مسئله فوق به دو صفحه رسیده‌ایم که به هرکدام از آن‌ها صفحه نیمساز گفته می‌شود.

نکته: با روش مانند مسئله قبل ثابت می‌شود که مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه‌ی موازی $P: ax+by+cz+d=۰$ و $P': ax+by+cz+d'=۰$ به یک فاصله هستند، یک صفحه موازی آن‌ها به معادله $ax+by+cz+\frac{d+d'}{۲}=۰$ می‌باشد.

مسئله: معادله‌ی مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از دو صفحه $x-y=۱$ و $y+z=۰$ به یک فاصله باشند.

راه‌حل:

$$\frac{|x-y-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|y+z|}{\sqrt{۱+۱}} \Rightarrow |x-y-۱|=|y+z| \Rightarrow \begin{cases} x-y-۱=y+z \Rightarrow x-۲y-z=۱ \\ x-y-۱=-(y+z) \Rightarrow x+z=۱ \end{cases}$$

مسئله: روی محور zها نقطه‌ای پیدا کنید که از صفحات $x-۲y=۱$ و $۲x-z=۰$ به یک فاصله باشند.

راه‌حل: مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه‌ی فوق به یک فاصله هستند، عبارتند از:

$$\frac{|۲x-z|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|x-۲y-۱|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-z=x-۲y-۱ \Rightarrow x+۲y-z=-۱ \quad (۱) \\ ۲x-z=-(x-۲y-۱) \Rightarrow ۳x-۲y-z=۱ \quad (۲) \end{cases}$$

حالا کافی است هر صفحه را با محور zها قطع دهیم.

$$\text{از } (۱) \xrightarrow{x\,,\,y=۰} -z=-۱ \Rightarrow z=۱ \Rightarrow A(۰\,,\,۰\,,\,۱)$$

$$\text{از } (۲) \xrightarrow{x\,,\,y=۰} -z=۱ \Rightarrow z=-۱ \Rightarrow B(۰\,,\,۰\,,\,-۱)$$

زاویه‌ی بین دو صفحه:

برای به‌دست آوردن زاویه‌ی بین دو صفحه کافی است زاویه‌ی بین بردارهای نرمال دو صفحه را تعیین کنیم.

اگر n و n' بردارهای نرمال دو صفحه‌ی P و P' باشند و θ زاویه‌ی بین دو صفحه باشد، آن‌گاه داریم:

$$\cos\theta=\frac{|n\,.\,n'|}{|n||n'|}$$

مسئله: زاویه‌ی بین دو صفحه $\sqrt{۲}x+y-z=۷$ و صفحه‌ی xOy را به‌دست آورید.

راه‌حل: بردار نرمال صفحه‌ی اول $n(\sqrt{۲}\,,\,۱\,,\,-۱)$ و بردار نرمال صفحه‌ی دوم $n'(۰\,,\,۰\,,\,۱)$ می‌باشد.

$$\cos\theta = \frac{|n\,.\,n'|}{|n||n'|} = \frac{|۰+۰-۱|}{\sqrt{۱}\,\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ$$

مسئله: اگر دو صفحه با معادلات $x-z+۲a-۱=۰$ و $ax+۲y-۲z+a+۱=۰$ با هم زاویه‌ی ۴۵ درجه ساخته باشند آن‌گاه مقدار a را به‌دست آورید.

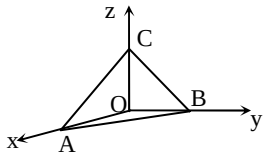
راه‌حل:

$$\begin{matrix} n=(۱\,,\,۰\,,\,-۱) \\ n'=(a\,,\,۲\,,\,-۲) \end{matrix} \Rightarrow \cos\theta=\frac{|n\,.\,n'|}{|n||n'|} \Rightarrow \cos ۴۵=\frac{|a+۲|}{\sqrt{۲}\,\sqrt{a^۲+۸}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{|a+۲|}{\sqrt{۲}\,\sqrt{a^۲+۸}} \Rightarrow \sqrt{a^۲+۸}=|a+۲| \Rightarrow a^۲+۸=a^۲+۴+۴a \Rightarrow ۴a=۴ \Rightarrow a=۱$$

مسئله: حجم محدود بین صفحه‌ی $2x+y+2z=4$ با صفحات مختصات را به‌دست آورید.

راه‌حل: مطابق شکل اگر نقاط A و B و C نقاط برخورد این صفحه با محورهای مختصات باشند، آن‌گاه این صفحه با صفحات مختصات هرم OABC را ایجاد می‌کند.



برخورد صفحه با محور x ها $\Rightarrow y , z=0 \Rightarrow x_A=2$

برخورد صفحه با محور y ها $\Rightarrow x , z=0 \Rightarrow y_B=4$

برخورد صفحه با محور z ها $\Rightarrow x , y=0 \Rightarrow z_C=2$

حجم هرم $=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x_A \cdot x_B)x_C=\frac{1}{6}x_A x_B x_C=\frac{1}{6}(2\times4\times2)=\frac{8}{3}$

تست: معادله مکان هندسی نقاطی که فاصله آن‌ها از صفحه $x+z=2$ برابر $\sqrt{2}$ است، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x+z=0$ ۲) $x+z=\sqrt{2}$ ۳) $x+z=2\sqrt{2}$ ۴) $x+z=3$

راه حل: فرض کنیم $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از این مکان باشد.

فاصله M تا صفحه $=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{|x+z-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow|x+z-2|=2\Rightarrow\begin{cases}x+z-2=2\Rightarrow x+z=4\\x+z-2=-2\Rightarrow x+z=0\end{cases}$

پس گزینه ۱ درست است.

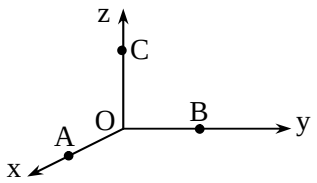
مسئله: ثابت کنید معادله‌ی صفحه‌ی شامل نقاط $A(p,0,0)$ و $B(0,q,0)$ و $C(0,0,r)$ عبارت است از:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

راه‌حل: اگر معادله‌ی صفحه را $ax+by+cz=d$ فرض کنیم، چون $A(p,0,0)$ روی صفحه است، داریم $pa=d$، پس $a=\frac{d}{p}$. به همین ترتیب: $b=\frac{d}{q}$ و $c=\frac{d}{r}$. در نتیجه:

$$\frac{d}{p}x+\frac{d}{q}y+\frac{d}{r}z=d\Rightarrow\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y+\frac{1}{r}z=1$$

مسئله: در شکل زیر اگر OA و OB و OC سه یال مکعبی باشند، آن‌گاه فاصله‌ی مرکز مکعب از صفحه‌ی گذرنده از نقاط A و B و C را به‌دست آورید. (نقاط A، B و C به ترتیب طول، عرض و ارتفاع ۱ دارند)



راه‌حل: رأس مقابل به رأس O در این مکعب نقطه‌ی $M(1,1,1)$ است و وسط OM نقطه‌ی $G(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ مرکز مکعب خواهد بود.

صفحه شامل A و B و C $\Rightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Rightarrow x+y+z=1$

فاصله G تا صفحه $=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

مسئله: ثابت کنید فاصله دو صفحه موازی $ax+by+cz+d=0$ و $ax+by+cz+d'=0$ از رابطه‌ی $\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ به‌دست می‌آید.

راه حل: برای به‌دست آوردن فاصله این دو صفحه موازی کافی است فاصله‌ی نقطه‌ای دلخواه از یک صفحه تا صفحه‌ی دیگر را به‌دست آوریم.

$A\in$ صفحه‌ی اول $\Rightarrow A(0,0,-\frac{d}{c})$

فاصله A تا صفحه دوم $=\frac{|0+0-d+d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

WWW.RIAZISARA.IR

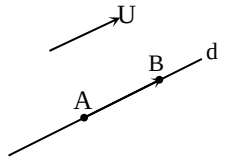
معادلات خط

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع یک خط می‌باشد. بنابراین اگر دو صفحه $P: ax+by+cz+d=0$ و $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$ متقاطع باشند، آن‌گاه دستگاه زیر معادله یک خط در فضای سه‌بعدی R^3 می‌باشد.

$$D:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

به‌عنوان مثال دستگاه $D:\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ معادله‌ی یک خط می‌باشد که از تلاقی دو صفحه به‌وجود آمده است، دستگاه فوق را می‌توان به‌صورت $D:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ نوشت که در این‌صورت مشخص‌کننده‌ی معادله‌ی محور z ها در فضا می‌باشد، زیرا نقاط روی محور z ها دارای طول و عرض برابر صفر هستند.

روش دیگر برای نوشتن معادله‌ی خط:



اگر خط d از نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ عبور کرده و با بردار $u(p,q,r)$ که بردار هادی خط نامیده می‌شود موازی باشد، آن‌گاه نقطه‌ی متغیر $B(x,y,z)$ روی خط d قرار خواهد داشت، در صورتی‌که $\overrightarrow{AB} \parallel u$ باشد.

$$\overrightarrow{AB} = (x-x_0\ ,\ y-y_0\ ,\ z-z_0) \qquad u=(p\ ,\ q\ ,\ r)$$

$\overrightarrow{AB} \parallel u$ ⟶ شکل متقارن خط: $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$

$\overrightarrow{AB} \parallel u$ ⟶ شکل پارامتری خط: $\overrightarrow{AB}=tu \Rightarrow \begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases}$

توجه کنید شکل متقارن خط به‌راحتی قابل تبدیل شدن به شکل پارامتری است، کافی است هریک از کسرها را برابر t قرار دهیم. و برعکس شکل پارامتری به‌شکل متقارن قابل تبدیل است، کافی است در هر تساوی t را محاسبه کنیم و مقادیر به‌دست آمده را با هم مساوی قرار دهیم. (دقت کنید در شکل متقارن هیچ‌یک از مقادیر p و q و r که مختصات بردار هادی خط هستند نباید صفر باشد. درصورت صفر بودن یکی از آن‌ها باید از شکل پارامتری استفاده کرد.)

تذکر: در معادله خط بردار هادی نمی‌تواند بردار صفر باشد، زیرا بردار صفر راستا ندارد و موازی بودن خط با بردار صفر معنی ندارد.

تذکر: در شکل متقارن خط مخرج‌های x و y و z تقسیم بر ضرایب آن‌ها مختصات بردار هادی خط می باشد و در شکل پارامتری خط ضرایب پارامتر تقسیم بر ضرایب x و y و z مختصات بردار هادی خط است و در شکل تلاقی دو صفحه حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه، مختصات بردار هادی خط است.

مثال: بردار هادی هر خط را به‌دست آورده درضمن از هر خط یک نقطه مثال بزنید.

۱) $\dfrac{x-2}{3}=y+1=z$

۲) $\dfrac{2x-1}{5}=1-y=\dfrac{1+3z}{2}$

۳) $\begin{cases} x=t-1 \\ 2y=\dfrac{1+t}{3} \\ z=-1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=y \\ z=1 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} x+y=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

۷) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

۸) $\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases}$

۹) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

راه‌حل: در قسمت (۱) معادله متقارن خط داده شده است. پس بردار $u(3\ ,\ 1\ ,\ 1)$ بردار هادی خط است. درضمن هریک از عبارات را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا یک نقطه از خط به‌دست آید.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{3}=0 \ \Rightarrow\ x=2 \\ y+1=0 \ \Rightarrow\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2\ ,\ -1\ ,\ 0)$$

با مساوی قرار هر عبارت با یک عدد حقیقی می‌توان نقاط دیگری از خط به‌دست آورد.

(۲) معادله‌ی متقارن خط داده شده است.

$u(\frac{۵}{۲}, -۱, \frac{۲}{۳})$ بردار هادی

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۲x-۱}{۵}=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۱-y=۰ \Rightarrow y=۱ \\ \frac{۱+۳z}{۲}=۰ \Rightarrow z=-\frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow A(\frac{۱}{۲}, ۱, -\frac{۱}{۳})$$

(۳) معادله‌ی پارامتری خط داده شده است. پس بردار $u(۱, \frac{۱}{۶}, ۰)$ بردار هادی خط است. درضمن کافی است t را یک عدد حقیقی انتخاب کنیم تا یک نقطه از خط به‌دست آید.

$$t=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=\frac{۱}{۳} \\ z=-۱ \end{cases} \Rightarrow A(۰, \frac{۱}{۳}, -۱)$$

(۴) در این‌مورد قسمتی از معادله‌ی خط به‌صورت متقارن و قسمت دیگر آن به‌صورت پارامتری است. در قسمت $z=۱$ پارامتر t وجود ندارد. پس $r=۰$ بنابراین بردار هادی خط $u(۲, ۱, ۰)$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-۱}{۲}=۰ \Rightarrow x=۱ \\ y=۰ \\ z=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow A(۱, ۰, ۱)$$ نقطه‌ای از خط

(۵) ابتدا معادله‌ی خط را به‌صورت $\begin{cases} x=۱-y \\ z=\frac{۱}{۲} \end{cases}$ می‌نویسیم همانند قسمت قبل نتیجه می‌گیریم، $u(۱, -۱, ۰)$ بردار هادی خط است و نقطه‌ی $A(۰, ۱, \frac{۱}{۲})$ نقطه‌ای از خط می‌باشد.

(۶) در این‌جا معادله خط به‌صورت تلاقی دو صفحه داده شده‌است.

بنابراین حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه بردار هادی خط است.

$$u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{vmatrix}=-i-۲j-۳k$$

برای پیدا کردن یک نقطه از خط مقدار x یا y یا z را عددی ثابت گرفته، دو متغیر دیگر را از دستگاه حاصل به‌دست می‌آوریم.

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۰+y-z=۱ \\ ۰-y=۰ \Rightarrow y=۰ \end{cases} \Rightarrow z=-۱ \Rightarrow A(۰, ۰, -۱)$$

(۷) همانند نمونه‌ی قبل می‌توان عمل کرد.

$$u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=-i-j+k$$

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۰-y=۱ \Rightarrow y=-۱ \\ ۰+z=۲ \Rightarrow z=۲ \end{cases} \Rightarrow A(۰, -۱, ۲)$$

(۸) معادله‌ی این خط هم به‌صورت تلاقی دو صفحه می‌باشد. ولی اگر توجه کنید x و z مقادیر ثابتی دارند و چون متغیر y در معادله‌ی خط وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم y هر عدد حقیقی می‌تواند بگیرد. به‌عبارتی معادله‌ی خط فوق را می‌توان به‌صورت $D:\begin{cases} x=۲ \\ y=t \\ z=۳ \end{cases}$ نمایش داد. پس $u(۰, ۱, ۰)$ بردار هادی خط است و نقطه‌ی $A(۲, ۱, ۳)$ نقطه‌ای از خط است. (مسلماً $A(۲, t, ۳)$، که t هر عدد حقیقی می‌باشد، نقطه‌های خط فوق می‌باشند.)

(۹) معادله‌ی داده شده را می‌توان به‌صورت $\begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}$ نوشت و همانند نمونه‌ی قبل معادله‌ی فوق را به‌صورت $\begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \\ z=t \end{cases}$ نوشت، پس $u(۰, ۰, ۱)$ بردارهادی خط بوده و نقطه‌ی $A(۲, -۱, ۱)$ نقطه‌ای از این خط می‌باشد.

مسئله: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,۲,۱)$ عبور کرده، با بردار $u(۵,۳,-۲)$ موازی باشد.

راه‌حل: A نقطه‌ی خط و u بردار هادی خط می‌باشد. از آن‌جایی که مختصات بردار هادی خط غیرصفر است از شکل متقارن خط استفاده می‌کنیم.

$$D:\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\Rightarrow D:\frac{x-۱}{۵}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z-۱}{-۲}$$

مسئله: معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $A(-۱,۱,\circ)$ و $B(۱,۲,۱)$ را بنویسید.

راه‌حل: بردار $\overrightarrow{AB}$ بردار هادی خط است و یکی از دو نقطه‌ی A و B نقطه‌ای از خط می‌باشد.

$$\overrightarrow{AB}=(۲,۱,۱)\Rightarrow\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\Rightarrow\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-\circ}{۱}$$

مسئله: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $A(۲,-۱,۳)$ گذشته و بر صفحه $۳x+y+z=۷$ عمود باشد.

راه‌حل: بردار نرمال صفحه بردار هادی خط مطلوب می‌باشد.

$$u=n=(۳,۱,۱)\Rightarrow\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\Rightarrow\frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۳}{۱}$$

تست: خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(-۱,۲,۱)$ و $B(۲,۱,-۱)$ از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(۴,\circ,-۳)$ **۲)** $(۵,\circ,-۳)$ **۳)** $(۵,\circ,-۲)$ **۴)** $(۴,\circ,-۲)$

راه حل: بردار $\overrightarrow{AB}$ بردار هادی این خط است و یکی از نقاط A و B نقطه‌ای از خط می‌باشد.

$$u=\overrightarrow{AB}=(۳,-۱,-۲)\Rightarrow\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۱}{-۲}$$

بین نقاط موجود در گزینه‌ها تنها نقطه $(۵,\circ,-۳)$ در این خط صدق می‌کند. پس گزینه ۲ درست است.

مسئله: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,\circ,-۱)$ عبور کرده و با صفحات $x-y=\circ$ و $۲x+y+z=۷$ موازی باشد.

راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه بردار هادی خط موردنظر می‌باشد.

$$u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & -۱ & \circ\\ ۲ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=-i-j+۳k$$

$$\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\Rightarrow\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y-\circ}{-۱}=\frac{z+۱}{۳}$$

مسئله: معادله‌ی فصل مشترک صفحات $P:x-y=۲$ و $P':x+z=۱$ را به‌دست آورید.

راه‌حل اول: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه بردار هادی فصل مشترک است.

$$u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & -۱ & \circ\\ ۱ & \circ & ۱\end{vmatrix}=-i-j+k$$

$$x=\circ\Rightarrow\begin{cases}\circ+z=۱ & \Rightarrow z=۱\\ \circ+-y=۲ & \Rightarrow y=-۲\end{cases}\Rightarrow A(\circ,-۲,۱)$$ نقطه‌ای از فصل مشترک

$$\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\Rightarrow\frac{x-\circ}{-۱}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z-۱}{۱}$$

راه‌حل دوم: x یا y یا z را برابر t قرار می‌دهیم و دو متغیر دیگر را برحسب t به‌دست می‌آوریم

$$x=t\Rightarrow\begin{cases}t-y=۲\Rightarrow y=t-۲\\ t+z=۱\Rightarrow z=۱-t\end{cases}\Rightarrow D:\begin{cases}x=t\\ y=t-۲\\ z=۱-t\end{cases}$$

به این‌صورت شکل پارامتری خط را به‌دست آورده‌ایم.

راه‌حل سوم:

$$\begin{cases}x-y=۲\Rightarrow x=۲+y\\ x+z=۱\Rightarrow x=۱-z\end{cases}\Rightarrow x=۲+y=۱-z$$ فصل مشترک دو صفحه

WWW.RIAZISARA.IR

مسئله: خط $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = y = \frac{1-z}{-1}$ با محور yها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

راه‌حل: کافی است زاویه‌ی بین بردار هادی خط با بردار j، بردار یکه محور yها را به‌دست آوریم.

$$\begin{matrix} u(\sqrt{2}\,,1,1) \\ j(0\,,1\,,0) \end{matrix} \Rightarrow \cos\theta = \frac{u\,.\,j}{|u||j|} = \frac{1}{\sqrt{4}\times\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

تست: دو نقطه‌ی ثابت $A(1,1,0)$ و $B(1,0,1)$ و نقطه‌ی متغیر M را در نظر می‌گیریم. اگر O مبدأ مختصات باشد آن‌گاه مکان هندسی نقطه‌ی M که در رابطه‌ی $\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OB}$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) خط $y+z=0$ و $x=0$ **۲) محور zها**

۳) صفحه xy **۴) صفحه** $y+z=0$

راه حل: با توجه به رابطه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ داریم:

$$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}\times(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{BA} = 0$$

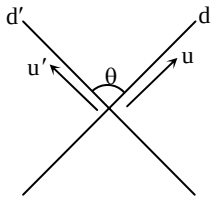
حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{BA}$ صفر است پس این دو بردار موازیند $(\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{BA})$. بنابراین M روی خطی است که از مبدأ مختصات گذشته و با بردار $\overrightarrow{BA}$ موازی است.

$$u = \overrightarrow{BA} = (0\,,1\,,-1) \Rightarrow M \text{ مکان هندسی } : \begin{cases} x=0 \\ \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:

بین دو خط d و d' با بردارهای هادی u و u' روابط زیر برقرار است.



الف) $d \parallel d' \Leftrightarrow u \parallel u'$

ب) $d \equiv d' \Leftrightarrow u \parallel u'$ و (علامت $\equiv$ به‌معنای انطباق است) یک نقطه از d در d' صدق کند

پ) $d \perp d' \Leftrightarrow u \perp u'$

ت) اگر θ زاویه‌ی بین دو خط باشد. $\Rightarrow \cos\theta = \frac{|u\,.\,u'|}{|u||u'|}$

صورت کسر در قدرمطلق قرار دارد تا زاویه کوچک تر بین دو خط بدست آید.

مسئله: نشان دهید دو خط $D: \frac{x-1}{2} = 1 + y = z$ و $D': \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-2 \\ z = t-1 \end{cases}$ بر هم منطبق هستند.

راه‌حل: بردار هادی خط D بردار $u(2\,,1\,,1)$ و بردار هادی خط D' بردار $u'(2\,,1\,,1)$ می‌باشد. چون $u \parallel u'$ پس $D \parallel D'$ است. از طرفی داریم:

$$A \in D' \overset{t=0}{\Rightarrow} A = (-1\,,-2\,,-1) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در خط } D} \frac{-1-1}{2} = 1-2 = -1$$

نقطه‌ی A در خط D صدق می‌کند، پس دو خط D و D' برهم منطبق هستند.

تذکر: معادله‌ی یک خط دارای شکل منحصر به‌فرد نیست و یک خط می‌تواند معادلات ظاهراً متفاوتی داشته‌باشد، در صورتی‌که همه‌ی آن‌ها نمایشگر یک خط هستند (به مسئله قبل توجه کنید.)

مسئله: معادله‌ی خطی بنویسید که با خط $\Delta: \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ z = 3 \end{cases}$ موازی بوده و از نقطه‌ی A به عرض ۲ واقع بر محور yها عبور کند.

راه‌حل: بردار هادی خط را همان بردار هادی خط Δ درنظر می‌گیریم. درضمن $A(0\,,2\,,0)$ نقطه‌ای از خط می‌باشد.

$$u = (1,2,0) \Rightarrow D: \begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x = t \\ y = 2t+2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x = \frac{y-2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

مسئله: زاویه‌ی بین خطوط $D:\begin{cases}x-y=0\\z=x-1\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x+y=1\\z=-1\end{cases}$ **را به‌دست آورید.**

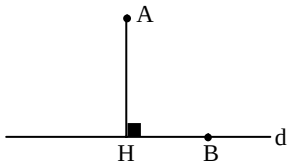
$$D:\begin{cases}x=y\\z=x-1\end{cases}\Rightarrow x=y=z+1\Rightarrow u=(1,1,1)\ \text{و}\ D':\begin{cases}x=1-y\\z=-1\end{cases}\Rightarrow u'=(1,-1,0)$$

$$\cos\theta=\frac{u\,.\,u'}{|u||u'|}=0\ \Rightarrow\ \theta=90^\circ$$

فاصله‌ی نقطه از خط:

فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d با بردار هادی u از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}$$



که در آن B نقطه‌ای دلخواه از خط می‌باشد.

زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ABH، واضح است که $|AH|=|AB||\sin\theta|$ که θ همان زاویه‌ی بین AB و خط d، یا به عبارت دیگر زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ است.

مسئله: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-1,1,2)$ **از خط** $x=y=z$ **را به‌دست آورید.**

راه‌حل:

$$B\in\text{خط}\Rightarrow B=(0,0,0)\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{AB}=(1,-1,-2)\ ,\ u=(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=i-3j+2k$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{1+9+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$$

مسئله: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(0,1,3)$ **از خط** $D:\begin{cases}\frac{x-1}{2}=y\\z=1\end{cases}$ **را به‌دست آورید.**

راه حل:

$$B\in\text{خط}\Rightarrow B=(1,0,1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,-1,-2),u=(2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&-2\\2&1&0\end{vmatrix}=2i-4j+3k$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{4+16+9}}{\sqrt{4+1+0}}=\sqrt{\frac{29}{5}}$$

تست: کم‌ترین فاصله بین دو خط $d:x-y=1\ ,\ z=1$ **و** $d':x-y=5\ ,\ z=-1$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

راه حل: بردار هادی هر دو خط بردار $u(1,1,0)$ می‌باشد، پس دو خط فوق موازیند. پس برای تعیین فاصله بین آن‌ها کافی است فاصله یک نقطه از خط اول تا خط دوم را بدست آوریم.

$$\begin{cases}A\in d\Rightarrow A(1,0,1)\\B\in d'\Rightarrow B(5,0,-1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4,0,-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix}i&j&k\\4&0&-2\\1&1&0\end{vmatrix}$$

WWW.RIAZISARA.IR

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{4+4+16}}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

پس گزینه ۳ درست است.

مسئله: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,-۱,۱)$ از فصل مشترک صفحات $P: x-y+z=۱$ و $Q: ۲x+y+z=۰$ را به‌دست آورید.

راه حل:

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} -y+z=۱ \\ y+z=۰ \end{cases} \Rightarrow z=\frac{۱}{۲}, y=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow B(۰,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$$ نقطه‌ای از فصل مشترک

$$u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۲i+j+۳k \quad , \quad \overrightarrow{AB}=(-۱,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۲i+۴j$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{۴+۱۶}}{\sqrt{۴+۱+۹}}=\sqrt{\frac{۲۰}{۱۴}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۷}}$$

وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:

در فضای سه‌بعدی $R^۳$ اگر دو خط d و d' موازی نباشند، آن‌گاه یا متنافرند یا متقاطع. برای تشخیص متقاطع یا متنافر بودن آن‌ها کافی است معادلات پارامتری یکی از آن‌ها را در خط دیگر قرار دهیم. اگر برای پارامتر جواب‌های یکسان به‌دست آوریم، دو خط متقاطع خواهند بود، در غیر این‌صورت دو خط متنافرند.

مسئله: وضعیت نسبی دو خط $D: x-۱=\frac{y}{۲}=z$ و $D': \frac{x}{۲}=y=z-۱$ را مشخص کنید.

راه‌حل: بردارهای هادی دو خط بردارهای $u=(۱,۲,۱)$ و $u'=(۲,۱,۱)$ می‌باشند. از آن‌جایی که $u \nparallel u'$ پس دو خط D و D' موازی نیستند. حالا خط D را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم.

$$D: x-۱=\frac{y}{۲}=z=t \Rightarrow D: \begin{cases} x=t+۱ \\ y=۲t \\ z=t \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در خط } D'} \frac{t+۱}{۲}=۲t=t-۱$$

از رابطه فوق به دو معادله‌ی زیر می‌توان رسید.

$$\frac{t+۱}{۲}=۲t \Rightarrow t+۱=۴t \Rightarrow t=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{t+۱}{۲}=t-۱ \Rightarrow t+۱=۲t-۲ \Rightarrow t=۳$$

از آن‌جایی که مقادیر t با هم فرق می‌کنند نتیجه می‌گیریم دو خط متنافر هستند.

مسئله: نشان دهید دو خط $D: \begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=y+۱ \\ z=-۱ \end{cases}$ و $D': x+۱=y+۳=۱-z$ متقاطعند. سپس نقطه تلاقی آن‌ها را به‌دست آورید.

راه‌حل: بردارهای هادی دو خط $u=(۲,۱,۰)$ و $u'=(۱,۱,-۱)$ می‌باشد چون $u \nparallel u'$ پس دو خط موازی نیستند.

$$D: \begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=y+۱=t \\ z=-۱ \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=t-۱ \\ z=-۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در خط } D'} ۲t+۲=t+۲=۲$$

به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$۲t+۲=۲ \Rightarrow t=۰$$

$$t+۲=۲ \Rightarrow t=۰$$

پس دو خط متقاطعند و نقطه‌ی $A(۱,-۱,-۱)$ نقطه تلاقی آن‌ها می‌باشد.

تست: به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $L_1: x-4=\frac{y-4}{2}=4-z$ **و** $L_2: \frac{x-7}{2}=-y-a=\frac{z-9}{2}$ **در یک صفحه قرار دارند؟**

۱) ۱ ۲) ۸- ۳) صفر ۴) ۸

راه حل: بردار هادی این دو خط با هم موازی نیستند پس دو خط موازی نیستند. از طرفی دو خط در یک صفحه قرار دارند بنابراین باید این دو خط متقاطع باشند، پس باید معادلات پارامتری خط L_1 در خط L_2 صدق کند.

$$L_1:\begin{cases}x=t+4\\ y=2t+4\\ z=4-t\end{cases}\xrightarrow{\text{در } L_2 \text{ قرار می‌دهیم}}\frac{t-3}{2}=-2t-4-a=\frac{-t-5}{2}$$

$$\frac{t-3}{2}=\frac{-t-5}{2}\Rightarrow 2t=-2\Rightarrow t=-1$$

$$-2t-4-a=\frac{-t-5}{2}\xrightarrow{t=-1}-2-a=-2\Rightarrow a=0$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسئله: از دو خط $D: x-1=y=\frac{z}{2}$ **و** $D': \frac{x}{2}=y=z+1$ **چند صفحه عبور می‌کند.**

راه‌حل: باید وضعیت این دو خط را بررسی کنیم.

$$\begin{matrix}u\,(1,1,2)\\ u'(2,1,1)\end{matrix}\Rightarrow u\nparallel u'\Rightarrow D\nparallel D'$$

$$D: x-1=y=\frac{z}{2}=t\Rightarrow D:\begin{cases}x=t+1\\ y=t\\ z=2t\end{cases}\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در خط } D'}\frac{t+1}{2}=t=2t+1$$

$$\frac{t+1}{2}=t\Rightarrow t+1=2t\Rightarrow t=1$$

$$t=2t+1\Rightarrow t=-1$$

پس این دو خط متنافرند درنتیجه از آن‌ها صفحه‌ای عبور نمی‌کند.

تست: فاصله مبدأ مختصات از نقطه تلاقی دو خط $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=-z-1$ **و** $\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{7-z}{3}$ **کدام است؟**

۱) $\sqrt{21}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{29}$ ۴) ۶

راه حل:

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=-z-1=t\Rightarrow\begin{cases}x=4t-1\\ y=5t-1\\ z=-t-1\end{cases}\xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در خط دوم}}$$

$$\frac{4t+2}{2}=\frac{5t+4}{3}\Rightarrow 12t+6=10t+8\Rightarrow t=1\Rightarrow$$

نقطه تلاقی $A=(3,4,-2)\Rightarrow OA=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$

پس گزینه ۳ درست است.

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط $x=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$ **و** $x+1=\frac{y+2}{2}=z+1$ **را به‌دست آورید.**

راه‌حل: بردارهای هادی این دو خط $u_1(1,2,3)$ و $u_2(1,2,1)$ هستند. چون $u_1\nparallel u_2$ پس دو خط موازی نیستند. از آن‌جایی که از آن‌ها صفحه‌ای عبور می‌کند پس نتیجه می‌گیریم دو خط متقاطعند، بنابراین حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی این دو خط بردارنرمال صفحه است و یک نقطه از یکی از دو خط یک نقطه از صفحه می‌باشد.

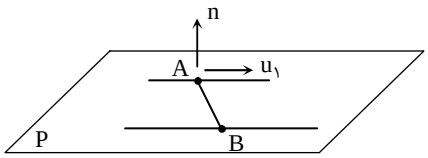
$$n=u_1\times u_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-4i+2j\quad,\quad A\in\text{خط}\Rightarrow A(0,0,-1)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Rightarrow -4(x-0)+2(y-0)=0\Rightarrow -4x+2y=0$$

مسئله: معادله‌ی صفحه شامل دو خط $\frac{x-1}{2}=y=z$ **و** $\frac{x}{2}=y+1=z$ **را بنویسید.**

راه‌حل: بردارهای هادی این دو خط $u_1(2,1,1)$ و $u_2(2,1,1)$ هستند، پس دو خط موازیند. نقاط A و B را از هر خط انتخاب کرده حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی یکی از دو خط مثلاً u_1 بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب است.

$$\left.\begin{array}{l}A(0,-1,0)\\B(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}(1,1,0)\Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=i-j-k$$



$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$1(x-0)-1(y+1)-1(z-0)=0$$
$$x-y-z-1=0$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ی شامل خط $D: x=2y-1=\frac{z}{2}$ **و نقطه‌ی** $A(2,-1,0)$ **را بنویسید.**

راه‌حل: نقطه‌ی B را از خط D درنظر گرفته حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ و بردار هادی خط D بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب است.

$$B\in D \Rightarrow B(0,\tfrac{1}{2},0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2,\tfrac{3}{2},0) \quad , \quad u(1,\tfrac{1}{2},2)$$

$$n=\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & \frac{3}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}=3i+4j-\frac{5}{2}k$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Rightarrow 3(x-2)+4(y+1)-\frac{5}{2}(z-0)=0\Rightarrow 3x+4y-\frac{5}{2}z-2=0$$

تست: صفحه‌ای که از نقطه تلاقی دو خط $D:\begin{cases}x=t\\y=t+1\\z=-t\end{cases}$ **و** $D':\begin{cases}x=2\\\frac{y-1}{2}=z+3\end{cases}$ **به موازات صفحه‌ی** $x-3y+z=7$ **رسم می‌شود، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟**

۱) صفر　　۲) ۷-　　۳) ۹　　۴) ۹-

راه حل: ابتدا نقطه تلاقی دو خط را به‌دست می‌آوریم.

$x=2, x=t\Rightarrow t=2\Rightarrow$ نقطه تلاقی $A=(2,3,-2)$, $n=(1,-3,1)$

معادله صفحه: $1(x-2)-3(y-3)+1(z+2)=0\Rightarrow x-3y+z+9=0$

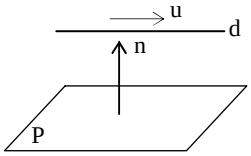
نقطه تلاقی صفحه با محور xها $\xrightarrow{y,z=0} x=-9$

پس گزینه ۴ درست است.

وضعیت خط و صفحه نسبت به یکدیگر:

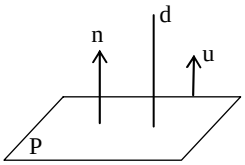
بین صفحه‌ی P با بردار نرمال n و خط d با بردار هادی u روابط زیر برقرار است.

(۱) $P\parallel d \Leftrightarrow n\perp u$

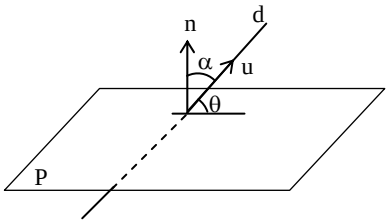


(۲) یک نقطه از خط در صفحه صدق می‌کند و $n\perp u \Leftrightarrow$ خط d بر صفحه‌ی P منطبق است.

(۳) $P\perp d \Leftrightarrow n\parallel u$



WWW.RIAZISARA.IR



اگر زاویه بین d و P برابر θ باشد. (۴)

$$\alpha+\theta=۹۰ \Rightarrow \cos\alpha=\sin\theta \Rightarrow \operatorname{Sin}\theta=\frac{|n\,.\,u|}{|n||u|}$$

(۵) برای به‌دست آوردن نقطه‌ی تلاقی خط و صفحه کافی است معادلات پارامتری خط را با صفحه قطع دهیم تا پارامتر و سپس نقطه تلاقی به‌دست آید.

مسئله: زاویه‌ی بین خط $\frac{x-۱}{\sqrt{۲}}=۱-y=z+\frac{۱}{۲}$ و صفحه xOy را به‌دست آورید.

راه‌حل: بردار هادی خط $u(\sqrt{۲}\,,-۱\,,۱)$ و بردار نرمال صفحه xOy بردار $n(۰\,,۰\,,۱)$ می‌باشد.

$$\operatorname{Sin}\theta=\frac{|u\,.\,n|}{|u||n|}=\frac{۱}{\sqrt{۴}\,\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۳۰^\circ$$

مسئله: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $M(۱\,,۲\,,۱)$ گذشته و بر صفحه‌ی $P:۲x-y+۲z=۱$ عمود بوده و با خط $L:\frac{x+۱}{۳}=y-۱=۱-z$ موازی باشد.

راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردار نرمال صفحه P در بردار هادی خط L بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب می‌باشد.

$$\begin{matrix} n'=(۲\,,-۱\,,۲) \\ u=(۳\,,۱\,,-۱)\end{matrix} \Rightarrow n=n'\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & -۱\end{vmatrix}=-i+۸j+۵k$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ-۱(x-۱)+۸(y-۲)+۵(z-۱)=\circ \Rightarrow -x+۸y+۵z-۲۰=\circ$$

مسئله: نقطه‌ی تلاقی خط $d:\frac{x}{۲}=y+۱=\frac{z-۱}{۳}$ با صفحه $P:۲x-y-۳z=۴$ را به‌دست آورید.

راه‌حل: خط را پارامتری کرده و در صفحه قرار می‌دهیم.

$$\frac{x}{۲}=y+۱=\frac{z-۱}{۳}=t \Rightarrow d:\begin{cases} x=۲t \\ y=t-۱ \\ z=۳t+۱\end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} ۴t-t+۱-۹t-۳=۴$$

$$\Rightarrow -۶t=۶ \Rightarrow t=-۱ \Rightarrow \text{نقطه تلاقی}=(-۲\,,-۲\,,-۲)$$

تست: طول نقطه‌ای از خط $x=y=۲z$ که از صفحه $۲x-y+۲z=\circ$ به فاصله ۴ باشد، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ **۲) ۳-**

۳) ۴- **۴) ۶**

راه حل: خط را به صورت پارامتری نوشته و نقطه‌ای پارامتری از خط را با شرایط مسئله مطابقت می‌دهیم.

$$D:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=\frac{t}{۲}\end{cases} \Rightarrow A(t,t,\frac{t}{۲})$$

$$\text{فاصله A تا صفحه}=۴ \Rightarrow \frac{|۲t-t+t|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=۴ \Rightarrow |۲t|=۱۲ \Rightarrow \begin{cases} t=۶ \Rightarrow A(۶,۶,۳) \\ t=-۶ \Rightarrow A'(-۶,-۶,-۳)\end{cases}$$

پس طول نقطه‌ی A برابر ۶ یا ۶- می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ می‌تواند درست باشد.

مسئله: اگر خط $1-x=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$ صفحه‌ی $2x+y-3z+4k=2$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، آن‌گاه k را به‌دست آورید.

راه‌حل اول: خط را پارامتری کرده و در صفحه قرار می‌دهیم.

$$1-x=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1-t\\y=-2t+3\\z=2t-1\end{cases}\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}}2-2t-2t+3-6t+3+4k=2$$

$$\Rightarrow -10t=-4k-6\Rightarrow t=\frac{2k+3}{5}\qquad(1)$$

از آن‌جایی که طول نقطه تلاقی برابر ۲ می‌باشد، پس $2=1-t$، درنتیجه $t=-1$. با توجه به (۱) داریم:

$$-1=\frac{2k+3}{5}\Rightarrow 2k+3=5\Rightarrow k=-4$$

راه‌حل دوم: نقطه تلاقی هم در خط و هم در صفحه صدق می‌کند، پس در معادله خط $x=2$ را قرار می‌دهیم تا نقطه تلاقی به‌دست آید.

$$x=2\Rightarrow 1-2=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow\begin{cases}y=5\\z=-3\end{cases}\Rightarrow A(2,5,-3)\ \text{نقطه‌ی تلاقی}$$

نقطه تلاقی A باید در معادله صفحه صدق کند.

$$4+5+9+4k=2\Rightarrow 4k=-16\Rightarrow k=-4$$

مسئله: اگر نقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,1,-5)$ و $C(2,0,-2)$ سه رأس یک مثلث باشند، آن‌گاه معادله‌ی خطی را به‌دست آورید که از مرکز ثقل این مثلث گذشته و بر صفحه‌ی آن عمود باشد.

راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بردار عمود بر این صفحه درنتیجه بردار هادی خط مطلوب است. از طرفی اگر G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، داریم:

$$G=\frac{A+B+C}{3}=(2,1,-2)$$

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-6)\\\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-3)\end{matrix}\Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-2&-1&-6\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=-9i+3k$$

$$\text{خط مطلوب}:\begin{cases}x=pt+x_0\\y=qt+y_0\\z=rt+z_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-9t+2\\y=1\\z=3t-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-2}{-9}=\frac{z+2}{3}\\y=1\end{cases}$$

تست: چند نقطه روی خط $x+1=y-3=\frac{-2z}{3}$ وجود دارد به طوری که از محور zها به فاصله‌ی $2\sqrt{2}$ است؟

۱) هیچ **۲) ۱** **۳) ۲** **۴) بی‌شمار**

راه حل: خط را پارامتری می‌کنیم.

$$D:\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=-\frac{3}{2}t\end{cases}\Rightarrow A=(t-1,t+3,-\frac{3}{2}t)$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا محور zها}=2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(t-1)^2+(t+3)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow 2t^2+10+4t=8$$

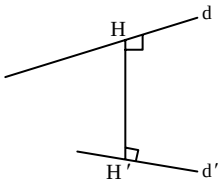
$$\Rightarrow 2t^2+4t+2=0\Rightarrow t^2+2t+1=0\Rightarrow(t+1)^2=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow A=(-2,2,\frac{3}{2})$$

پس تنها یک نقطه با این خصوصیت وجود دارد. بنابراین گزینه ۲ درست است.

عمود مشترک دو خط متنافر:

به خطی که به دو خط متنافر عمود باشد و هردوی آن‌ها را قطع کند، عمود مشترک دو خط متنافر می‌گوئیم.

در شکل مقابل اگر d و d' متنافر باشند، آن‌گاه HH' عمود مشترک این‌دو خط متنافر می‌باشد.

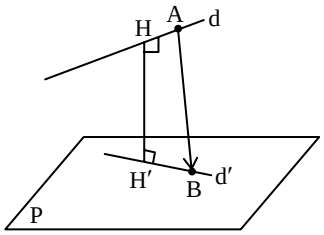


تذکر: اگر u و u' بردارهای هادی دو خط متنافر d و d' باشند، آن‌گاه $u\times u'$ بردار هادی عمود مشترک دو خط d و d' خواهد بود.

مسئله: ثابت کنید طول عمود مشترک دو خط متنافر d و d' با بردارهای هادی u و u' از رابطه زیر به‌دست می‌آید که در آن A و B نقاط دلخواهی از دو خط d و d' می‌باشند.

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,(u\times u')|}{|u\times u'|}$$

راه‌حل: صفحه‌ی P را از خط d' موازی با خط d می‌گذرانیم. چون $d \parallel P$ پس فاصله هر نقطه‌ی از خط d تا صفحه‌ی P برابر HH' (طول عمود مشترک دو خط متنافر) می‌باشد.



نقطه‌ی A را از خط d درنظر گرفته فاصله‌ی A تا صفحه‌ی P را به‌دست می‌آوریم.

مسلما بردار $u\times u'$ بردار نرمال صفحه P است، پس داریم:

$$B\in d' \Rightarrow B\in P \Rightarrow P \text{ تا صفحه } A \text{ فاصله} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,(u\times u')|}{|u\times u'|}$$

(توجه کنید که فاصله‌ی A از صفحه‌ی P را از فرمول « $\frac{|AB.n|}{|n|}$ = فاصله» به‌دست آورده‌ایم.)

مسئله: طول عمود مشترک دو خط متنافر $d:\frac{x-۱}{۲}=y=۱-z$ و $d':x=\frac{y}{۲}=z+۱$ را به‌دست آورید.

راه‌حل: نقاط A و B را از دو خط به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} A\in d \Rightarrow A(۱\,,\,۰\,,\,۱) \\ B\in d' \Rightarrow B(۰\,,\,۰\,,\,-۱) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-۱,۰,-۲)$$

$$\begin{matrix} u=(۲\,,\,۱\,,\,-۱) \\ u'=(۱\,,\,۲\,,\,۱) \end{matrix} \Rightarrow u\times u'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۳i-۳j+۳k$$

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,(u\times u')|}{|u\times u'|}=\frac{|-۳+۰-۶|}{\sqrt{۹+۹+۹}}=\frac{۹}{۳\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

مسئله: در صورتی‌که دو یال مکعبی در راستای خطوط متنافر $D:(x=۰\,,\,y=۵)$ و $D':(\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}\,,\,z=۰)$ قرار داشته‌باشند آن‌گاه حجم این مکعب را به‌دست آورید.

راه‌حل: دو خط D و D' متنافرند پس طول عمود مشترک آن‌ها برابر اندازه‌ی ضلع مکعب می‌باشد.

$$\begin{matrix} A\in D \Rightarrow A(۰\,,\,۵\,,\,۰) \\ B\in D' \Rightarrow B(۰\,,\,۰\,,\,۰) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۰\,,\,-۵\,,\,۰)$$

$$\begin{matrix} u=(۰\,,\,۰\,,\,۱) \\ u'=(۳\,,\,۴\,,\,۰) \end{matrix} \Rightarrow u\times u'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۰ \end{vmatrix}=-۴i+۳j$$

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,(u\times u')|}{|u\times u'|}=\frac{|-۱۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \Rightarrow \quad \text{حجم مکعب} = ۳^۳ = ۲۷$$

تست: معادله‌ی عمود مشترک دو خط متنافر $D:(\frac{x+۱}{۲}=y-۱,z=۱)$ و $D':(x=\frac{y+۱}{۳},z=۵)$ کدام است؟

۱) $(x=۱,y=۲)$ **۲)** $(x+y=۰,z=۴)$ **۳)** $(x=-۱,y=۱)$ **۴)** $(x-y=۰,z=۶)$

راه حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط D و D' بردار هادی عمود مشترک این دو خط متنافر است.

$$\begin{matrix} u_D=(۲,۱,۰) \\ u_{D'}=(۱,۳,۰) \end{matrix} \Rightarrow u=u_D\times u_{D'}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}=۵k \Rightarrow \text{بردار هادی عمود مشترک}=(۰,۰,۱)$$

بردار هادی خط گزینه ۱ برابر $(۰,۰,۱)$ است پس می‌تواند درست باشد.

بردار هادی خط گزینه ۲ برابر $(۱,-۱,۰)$ است پس نمی‌تواند درست باشد.

بردار هادی خط گزینه ۳ برابر $(۰,۰,۱)$ است پس می‌تواند درست باشد.

بردار هادی خط گزینه ۴ برابر $(۱,۱,۰)$ است پس نمی‌تواند درست باشد.

در ضمن گزینه ۳ درست نیست زیرا خط D را قطع نمی‌کند پس گزینه ۱ درست می‌باشد.

راه‌حل دیگر برای مسائل مربوط به خط و صفحه

دسته صفحه

به مجموعه تمام صفحه‌هایی که همگی از یک خط عبور کنند دسته صفحه می‌گوئیم.

هرگاه دو صفحه‌ی متقاطع $P: ax+by+cz+d=0$ و $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$ مفروض باشند معادله‌ی دسته صفحه‌ای که از فصل مشترک این دو صفحه می‌گذرد عبارت است از: $p'': \alpha P+\beta P'=0$

که در آن α و β دو عدد حقیقی‌اند به‌طوری که با همدیگر صفر نیستند. زیرا هر نقطه‌ای که روی فصل مشترک دو صفحه P و P' صدق می‌کند در هر ترکیب خطی از آن‌ها نیز صدق می‌کند یعنی P'' نیز از فصل مشترک آن‌ها می‌گذرد.

البته در معادله‌ی دسته صفحه P'' اگر طرفین را به α تقسیم کنیم و فرض کنیم $\frac{\beta}{\alpha}=m$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی دسته صفحه به‌صورت ساده‌تر $P+mP'=0$ درمی‌آید.

فقط اشکالی که در این معادله وجود دارد آن است که به‌ازای هیچ مقدار حقیقی m معادله P' به‌دست نمی‌آید. در مواردی که در حل مسائل با دسته صفحه، m حذف شود مطمئنا جواب مسئله همان صفحه P' می‌باشد.

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(0,1,-1)$ گذشته و شامل خط D به معادلات $\begin{cases}x=t\\y=t-1\\z=2t\end{cases}$ باشد.

راه‌حل: معادله دسته صفحه شامل D را می‌نویسیم و سپس مختصات نقطه‌ی A را در آن قرار می‌دهیم و m را به‌دست می‌آوریم. ابتدا D را به‌صورت تلاقی دو صفحه درمی‌آوریم.

$$D:\begin{cases}x=t\\y=t-1\\z=2t\end{cases}\Rightarrow x=y+1=\frac{z}{2}\Rightarrow D:\begin{cases}x=y+1\\x=\frac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow D:\begin{cases}y-x+1=0\\z-2x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (y-x+1)+m(z-2x)=0\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{A را در دسته صفحه}}(1+1)+m(-1)=0\Rightarrow m=2$$

لذا معادله‌ی صفحه مطلوب $5x-y-2z-1=0$ است.

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط D به معادلات $\frac{x-1}{2}=y=-z$ بوده و با خط D' به معادلات $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+3$ موازی باشد.

راه‌حل: خط D فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases}2z+x-1=0\\y+z=0\end{cases}$ است. لذا معادله دسته‌ی صفحه شامل خط D به‌صورت $2z+x-1+m(y+z)=0$ یا $x+my+(m+2)z-1=0$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{نرمال دسته صفحه } n\ (1\ ,\ m\ ,\ m+2)\\ \text{هادی خط } D' \ u\ (2\ ,\ -2\ ,\ 1)\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{بودن}]{\text{شرط موازی}}n.u=0\Rightarrow 2-2m+m+2=0\Rightarrow m=4$$

پس معادله صفحه مطلوب عبارت است از: $x+4y+6z-1=0$.

مسئله: دو خط D و D' به معادلات زیر مفروضند. $D:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ و $D':\begin{cases}2x-y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$ مطلوب است:

اولا: معادله صفحه‌ای که شامل خط D بوده و بر صفحه xoy عمود باشد.

ثانیا: معادله صفحه‌ای که شامل خط D' بوده و با خط D موازی باشد.

راه‌حل: اولا: دسته صفحه شامل خط D را می‌نویسیم.

$$D:\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}\\\frac{x-1}{3}=\frac{z+3}{-2}\end{cases}\Rightarrow D:\begin{cases}2x-3y+4=0\\2x+3z+7=0\end{cases}\Rightarrow (2x-3y+4)+m(2x+3z+7)=0$$

$$(2+2m)x-3y+3mz+7m+4=0$$

حالا شرط عمود بودن دسته صفحه بر صفحه xoy را می‌نویسیم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{نرمال دسته صفحه } n=(2+2m\ ,\ -3\ ,\ 3m)\\ \text{نرمال صفحه } xoy\ n'=(0\ ,\ 0\ ,\ 1)\end{array}\right\}\Rightarrow n.n'=0\Rightarrow 3m=0\Rightarrow m=0$$

پس صفحه مطلوب عبارت است از: $2x-3y+4=0$.

ثانیا: دسته صفحه شامل خط D' را می‌نویسیم.

$$(۲x-y+z+۳)+m(۳x-۲y+۲z+۱۷)=۰ \Rightarrow$$
$$(۲+۳m)x+(-۱-۲m)y+(۱+۲m)z+۳+۱۷m=۰$$

حالا شرط موازی بودن دسته صفحه با خط D را می‌نویسیم.

نرمال دسته صفحه $n=(۲+۳m\ ,\ -۱-۲m\ ,\ ۱+۲m)$

هادی خط D $u=(۳\ ,\ ۲\ ,\ -۲)$

$$n.u=۰ \Rightarrow ۶+۹m-۲-۴m-۲-۴m=۰ \Rightarrow m+۲=۰ \Rightarrow m=-۲$$

بنابراین صفحه مطلوب عبارت است از:

$$-۴x+۳y-۳z-۳۱=۰$$

تست: صفحه شامل نقطه‌ی $A(۱,-۱,۲)$ و خط $x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$ محور z را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) ۶ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) ۸

راه حل: دسته صفحه شامل خط را می‌نویسیم. برای این کار خط را به صورت تلاقی دو صفحه می‌نویسیم.

$$x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x+۲=y+۱ \\ x+۲=\frac{z+۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+۱=۰ \\ ۲x-z-۱=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y+۱)+m(۲x-z-۱)=۰$$

$$A\in \text{دسته صفحه} \Rightarrow (۱+۱+۱)+m(۲-۲-۱)=۰ \Rightarrow m=۳ \Rightarrow (x-y+۱)+۳(۲x-z-۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۷x-y-۳z-۲=۰$$

برخورد صفحه با محور zها $\xrightarrow{x,y=۰} -۳z-۲=۰ \Rightarrow z=-\frac{۲}{۳}$

پس گزینه ۳ درست است.

دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR

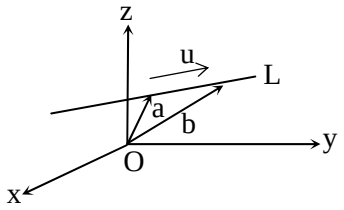
مسائل تکمیلی فصل ۲

معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $(۲ , -۱ , ۳)$ و موازی خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۳}{۲}=z$$

اگر u بردار موازی با خط L باشد، ثابت کنید.

$$u\times a=u\times b$$



فاصله‌ی مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطه‌ی $(-۳ , -۳ , ۳)$ و موازی بردار $(۴ , -۲ , -۴)$ پیدا کنید.

فاصله‌ی دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲} \quad , \quad \frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $(۲ , ۱ , ۰)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x=-۲ \ , \ y+۱=z$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از سه نقطه‌ی $(۲ , -۱ , ۴)$ و $(۵ , ۳ , ۵)$ و $(۲ , ۴ , ۳)$ را پیدا کنید.

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $(۱ , -۱ , ۲)$ و خط $x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$ را پیدا کنید.

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از دو خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۵}{۴} \quad , \quad \frac{x+۳}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z}{۴}$$

معادله‌ی فصل مشترک صفحه‌های $x-z=۱$ و $۲x-۳y+۴z=۲$ را پیدا کنید.

نشان دهید چهار نقطه‌ی $(۲ , ۳ , ۲)$ و $(-۳ , -۱ , ۱)$ و $(-۱ , ۰ , ۱)$ و $(۵ , ۹ , ۵)$ همگی روی یک صفحه قرار دارند.

روی خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z+۵}{۷}$ نقطه‌ای پیدا کنید که از صفحه $۲x+۲y-z+۴=۰$ به فاصله ۳ باشد.

وضعیت نسبی دو به دوی صفحات زیر را مشخص کنید.

الف) $x+۲y-۳z=۲$

ب) $۱۵x-۹y-z=۲$

پ) $-۲x-۴y+۶z+۴=۰$

در هر یک از موارد زیر، وضعیت نسبی خط و صفحه‌ی داده شده را بررسی کنید.

الف) $\frac{x-۳}{۸}=\frac{y-۴}{۵}=-z-۳$ و $x-۳y+۵z=۱۲$

ب) $\frac{x}{۸}=\frac{y+۱}{۲۳}=\frac{z+۱}{۲۲}$ و $۵x+۴y-۶z=۲$

پ) $\frac{x-۱}{-۴}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z}{۷}$ و $x-۲y+۲z=۵$

معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط و اصل بین دو نقطه‌ی $(۳ , ۱ , ۰)$ و $(۵ , -۱ , ۳)$ را پیدا کنید.

نقطه‌ی فصل مشترک دسته صفحات زیر را به‌دست آورید.

الف) $x+y=۱$ و $y+z=۲$ و $x+z=۳$.

ب) $x+y-z=۲$ و $-x+۲y-z=۳$ و $x-y-z=۰$.

کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط متنافر $L_۱ : \frac{x+۱}{۲}=-y=z+۲$ و $L_۲ : x=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ را پیدا کنید.

معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱ , ۰ , ۲)$ گذشته و به موازات خط D به معادله‌های $\begin{cases} x-y+z-۱=۰ \\ ۲x+y-۲z+۴=۰ \end{cases}$ باشد.

اولا ثابت کنید خط D به معادلات $x-۱=\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z}{۶}$ و صفحه‌ی P به معادله $۲x+۳y+z-۱=۰$ متقاطع‌اند و بعد مختصات نقطه تلاقی را پیدا کنید.

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,-۱,-۲)$ را از خط D به معادلات $\begin{cases} ۲x-۳y=۰ \\ ۴x-۳y+۳z-۱۸=۰ \end{cases}$ پیدا کنید.

معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,۰,-۱)$ گذشته و شامل خط D به معادلات $\frac{x-۴}{۲}=y=\frac{z-۱}{۴}$ باشد.

ثابت کنید دو خط $D:\frac{x-۳}{۲}=\frac{y-۵}{۳}=\frac{z-۲}{۳}$ و $D':\frac{x-۴}{۳}=\frac{y-۷}{۵}=\frac{z-۱}{۲}$ متقاطع‌اند و معادله‌ی صفحه‌ی شامل آن‌ها را بنویسید.

معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط D به معادلات $\begin{cases} x-z-۲=۰ \\ ۲x+y-z=۱ \end{cases}$ بوده و بر صفحه‌ی P به معادله $x-۳y-۲z+۷=۰$ عمود باشد.

روی خط $x=y-۲=z$ نقطه‌ای پیدا کنید که از دو نقطه‌ی $A(۲,۰,۳)$ و $B(۴,۲,-۵)$ به یک فاصله باشد.

معادله خط عمود مشترک دو خط متنافر $D:x-۲=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z+۱}{-۳}$ و $D':\frac{x}{-۲}=y-۲=z-۴$ را به‌دست آورید.

خط d به معادله‌ی $x=y-۱=۱-z$ و نقطه‌ی $M(۲,-۱,۱)$ مفروضند. معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از نقطه‌ی M و مبدأ مختصات بگذرد و با خط d موازی باشد.

خط $\Delta:\begin{cases} x-y-z=۰ \\ x+y=۱ \end{cases}$ مفروض است. معادلات پارامتری خط Δ را بنویسید و فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۴,۱,۱)$ را از آن محاسبه کنید.

دو خط متنافر $D:x=y-۱=\frac{z}{۳}$ و $D':\frac{x+۱}{۲}=y=z-۱$ مفروضند. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل D و موازی با D' باشد.

صفحه‌ی P به معادله $۲x+۳y-z+۱=۰$ و خط Δ به معادلات $x-۱=\frac{y}{۲}=z$ و نقطه‌ی $A(۲,-۲,۳)$ مفروض هستند. بر خط Δ مختصات نقطه‌ی B را چنان تعیین کنید که AB موازی صفحه‌ی P باشد.

معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل محور xها بوده و با خط $D:\begin{cases} x=t \\ y=t-۱ \\ z=۲t \end{cases}$ موازی باشد.

معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه‌ی $M(-۱,۰,۱)$ و $N(۲,۱,۲)$ بگذرد و بر صفحه‌ی $x+۲y+z=۱$ عمود باشد.

اولا معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $M(۱,۲,۳)$ بگذرد و با محورهای ox و oy به‌ترتیب زاویه‌های ۶۰° و ۴۵° بسازد. ثانیا بر روی محور yها نقطه‌ی N را چنان تعیین کنید که $\overrightarrow{MN}$ موازی با این خط باشد.

نقطه‌ی $A(۱,۰,۲)$ و خط d به معادلات $\frac{x}{۲}=\frac{y-۳}{۵}=\frac{z-۱}{۴}$ مفروضند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A بگذرد و خط d را با زاویه‌ی قائمه قطع کند.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۱,۲)$ را نسبت به خط $d:x=y=z$ به‌دست آورید.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ را نسبت به صفحه‌ی $x-y+z=۱$ را به‌دست آورید.

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,-۱,۱)$ گذشته و بر خط D به معادلات $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y}{۳}=z+۱$ عمود بوده و خط D' به معادلات $x=-y=\frac{z+۲}{۲}$ را قطع کند.

جواب تشریحی مسائل تکمیلی فصل ۲

۱- راه‌حل: بردار هادی خط داده شده بردار هادی خط مطلوب است.

$$u=(۴,۲,۱) \quad \Rightarrow \quad \text{خط}:\begin{cases} x=pt+x_۰ \\ y=qt+y_۰ \\ z=rt+z_۰ \end{cases} = \begin{cases} x=۴t+۳ \\ y=۲t-۱ \\ z=t+۲ \end{cases}$$

۲- راه‌حل: بردار $a-b$ در راستای خط L قرار دارد پس با بردار u موازی می‌باشد از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب خارجی دو بردار موازی صفر است، داریم:

$$u \parallel a-b \Rightarrow u\times(a-b)=o \Rightarrow u\times a-u\times b=o \Rightarrow u\times a=u\times b$$

۳- راه‌حل: اگر $A(۰,۰,۰)$ و $B(-۳,-۳,۳)$ و $u(۴,-۲,-۴)$ باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(-۳,-۳,۳) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۳ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۲ & -۴ \end{vmatrix}=۱۸i+۱۸k$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{۱۸^۲+۱۸^۲}}{\sqrt{۱۶+۴+۱۶}}=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۶}=۳\sqrt{۲}$$

۴- راه‌حل: کافی است یک نقطه از یک خط را انتخاب کرده، فاصله‌ی آن‌را تا خط بعدی به‌دست آوریم.

$$A\in \text{خط اول} \Rightarrow A(۱,-۱,۲) \qquad B\in \text{خط دوم} \Rightarrow B(۰,۲,۳)$$

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-۱,۳,۱)\\ u=(۲,-۱,-۲)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ & -۲ \end{vmatrix}=-۵i-۵k$$

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \text{فاصله } A \text{ تا خط دوم} = \frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{۵^۲+۵^۲}}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۳}$$

۵- راه‌حل:

$$B\in \text{خط} \Rightarrow B(-۲,۰,۱) \quad , \quad A(۲,۱,۰)$$

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-۴,-۱,۱)\\ u=(۰,۱,۱)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۴ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۲i+۴j-۴k$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

۶- راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نرمال صفحه است.

$$\begin{matrix}A=(۲,-۱,۴)\\ B=(۵,۳,۵)\\ C=(۲,۴,۳)\end{matrix} \begin{matrix}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۳,۴,۱)\\ \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(۰,۵,-۱)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{vmatrix}=-۹i+۳j+۱۵k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

$$-۹(x-۲)+۳(y+۱)+۱۵(z-۴)=۰ \Rightarrow -۳x+y+۵z-۱۳=۰$$

۷- راه‌حل: اگر $A(۱,-۱,۲)$ باشد و $B(-۲,-۱,-۵)$ نقطه‌ای از خط، آن‌گاه حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ در هادی خط بردار نرمال صفحه خواهد بود.

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\ (-۳,۰,-۷)\\ u\ (۱,۱,۲)\end{matrix} \Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۳ & ۰ & -۷ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۷i-j-۳k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

$$۷(x-۱)-۱(y+۱)-۳(z-۲)=۰ \Rightarrow ۷x-y-۳z-۲=۰$$

راه‌حل دوم: دسته صفحه شامل خط را می‌نویسیم.

$$x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x+۲=y+۱ \\ x+۲=\frac{z+۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+۱=۰ \\ ۲x-z-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow (x-y+۱)+m(۲x-z-۱)=۰$$

$$A\in \text{دسته صفحه} \Rightarrow (۱+۱+۱)+m(۲-۲-۱)=۰ \Rightarrow m=۳$$

پس معادله صفحه مطلوب عبارت است از:

$$(x-y+۱)+۳(۲x-z-۱)=۰ \Rightarrow ۷x-y-۳z-۲=۰$$

۸- راه‌حل: دو خط داده شده موازی هستند.

$$\begin{matrix}A\in \text{خط اول} \Rightarrow A(۱,-۱,۵)\\ B\in \text{خط دوم} \Rightarrow B(-۳,۴,۰)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-۴,۵,-۵) \quad , \quad u(۳,۲,۴)$$

$$n=\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۴ & ۵ & -۵ \\ ۳ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}=۳۰i+j-۲۳k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow ۳۰(x-۱)+۱(y+۱)-۲۳(z-۵)=۰ \Rightarrow ۳۰x+y-۲۳z+۸۶=۰$$

۹- راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه بردار هادی فصل مشترک است.

$$\begin{matrix} n=(۲\,,-۳\,,۴) \\ n'=(۱\,,۰\,,-۱)\end{matrix} \Rightarrow u=n\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۱\end{vmatrix}=۳i+۶j+۳k$$

در معادله هر دو صفحه $x=۰$ قرار می‌دهیم تا نقطه‌ای از فصل مشترک به‌دست آید.

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} -۳y+۴z=۲ \Rightarrow y=-۲ \\ -z=۱ \Rightarrow z=-۱\end{cases} \Rightarrow A(۰\,,-۲\,,-۱)$$

فصل مشترک: $\dfrac{x-x_۰}{p}=\dfrac{y-y_۰}{q}=\dfrac{z-z_۰}{r} \Rightarrow \dfrac{x-۰}{۳}=\dfrac{y+۲}{۶}=\dfrac{z+۱}{۳}$

۱۰- راه‌حل: معادله صفحه شامل نقاط $A(۲\,,۳\,,۲)$ و $B(۱\,,-۱\,,-۳)$ و $C(۱\,,۰\,,-۱)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\,(-۱\,,-۴\,,-۵) \\ \overrightarrow{AC}=(-۱\,,-۳\,,-۳)\end{matrix} \Rightarrow n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & -۴ & -۵ \\ -۱ & -۳ & -۳\end{vmatrix}=-۳i+۲j-k$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow -۳(x-۲)+۲(y-۳)-۱(z-۲)=۰ \Rightarrow -۳x+۲y-z+۲=۰$$

اگر توجه کنید نقطه‌ی $D(۵\,,۹\,,۵)$ در معادله صفحه گذرنده از نقاط A و B و C صدق می‌کند، زیرا $-۱۵+۱۸-۵+۲=۰$. پس این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند.

راه‌حل دوم: کافی است نشان دهیم حاصل‌ضرب مختلط بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ صفر است تا نتیجه بگیریم این نقاط در یک صفحه قرار دارند.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB}=(-۱\,,-۴\,,-۵) \\ \overrightarrow{AC}=(-۱\,,-۳\,,-۳) \\ \overrightarrow{AD}=(۳\,,۶\,,۳)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} -۱ & -۴ & -۵ \\ -۱ & -۳ & -۳ \\ ۳ & ۶ & ۳\end{vmatrix}=(-۱)(۹)+۴(۶)-۵(۳)=-۹+۲۴-۱۵=۰$$

۱۱- راه‌حل: خط را پارامتری می‌کنیم و نقطه‌ای پارامتری از خط را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z+۵}{۷}=t \Rightarrow \begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=۳t-۱ \\ z=۷t-۵\end{cases} \Rightarrow A(۲t+۱\,,۳t-۱\,,۷t-۵)$$

فاصله A تا صفحه $=۳ \Rightarrow \dfrac{|۴t+۲+۶t-۲-۷t+۵+۴|}{\sqrt{۴+۴+۱}}=۳ \Rightarrow |۳t+۹|=۹$

$۳t+۹=۹ \Rightarrow t=۰ \Rightarrow A(۱\,,-۱\,,-۵)$

$۳t+۹=-۹ \Rightarrow t=-۶ \Rightarrow A(-۱۱\,,-۱۹,-۴۷)$

پس مسئله دو جواب دارد.

۱۲- راه‌حل: اگر $n_۱(۱\,,۲\,,-۳)$ و $n_۲(۱۵\,,-۹\,,-۱)$ و $n_۳(-۲\,,-۴\,,۶)$ به‌ترتیب بردارهای نرمال صفحات الف و ب و پ باشند، داریم:

$n_۱\,.\,n_۲=۱۵-۱۸+۳=۰ \Rightarrow$ صفحه الف بر صفحه ب عمود است.

$\dfrac{۱}{-۲}=\dfrac{۲}{-۴}=\dfrac{-۳}{۶} \Rightarrow n_۱ \parallel n_۳ \Rightarrow$ صفحه الف و صفحه پ موازیند.

$n_۲\,.\,n_۳=-۳۰+۳۶-۶=۰ \Rightarrow$ صفحه ب و صفحه پ بر هم عمودند.

۱۳- راه‌حل: الف)

$$\begin{matrix} n=(۱\,,-۳\,,۵) \\ u=(۸\,,۵\,,-۱)\end{matrix} \Rightarrow n \not\parallel u \Rightarrow$$ خط بر صفحه عمود نیست

$n\,.\,u\neq ۰ \Rightarrow$ خط با صفحه موازی نیست بنابراین خط صفحه را قطع می‌کند

ب)

$$\begin{matrix} u=(۸\,,۲۳\,,۲۲) \\ n=(۵\,,۴\,,-۶)\end{matrix} \Rightarrow u\,.\,n=۴۰+۹۲-۱۳۲=۰ \Rightarrow$$ خط با صفحه موازی است

$A\in$ خط $\Rightarrow A(۰\,,-۱\,,-۱) \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} ۰-۴+۶=۲ \Rightarrow$ A در صفحه صدق می‌کند

پس خط بر صفحه منطبق است زیرا یک نقطه از خط در صفحه صدق می‌کند.

پ)

$$\begin{matrix} u=(-۴\,,\,۵\,,\,۷) \\ n=(۱\,,\,-۲\,,\,۲) \end{matrix} \Rightarrow u.n=-۴-۱۰+۱۴=۰ \Rightarrow \text{خط با صفحه موازی است}$$

$$A\in \text{خط} \Rightarrow A(۱\,,\,-۱\,,\,۰) \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} ۱+۲+۰=۵ \Rightarrow$$ A در صفحه صدق نمی‌کند

پس خط بر صفحه منطبق نیست، بنابراین خط و صفحه موازی و غیر منطبق اند.

۱۴- راه‌حل: اگر $A(۳\,,\,۱\,,\,۰)$ و $B(۵\,,\,-۱\,,\,۳)$ آن‌گاه $\overrightarrow{AB}$ بردار نرمال صفحه و نقطه‌ی M وسط AB نقطه‌ی صفحه می‌باشد.

$$\overrightarrow{AB}=(۲\,,\,-۲\,,\,۳)$$

$$\text{وسط AB}\ M=\frac{A+B}{۲}=(۴\,,\,۰\,,\,\frac{۳}{۲})$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow ۲(x-۴)-۲(y-۰)+۳(z-\frac{۳}{۲})=۰ \Rightarrow ۲x-۲y+۳z-\frac{۲۵}{۲}=۰$$

۱۵- راه‌حل: الف) فصل مشترک دو صفحه اول و دوم را به‌دست می‌آوریم که یک خط می‌باشد و خط حاصل را با صفحه‌ی سوم قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y+z=۲ \end{cases} \overset{y=t}{\Rightarrow} \begin{cases} x=۱-t \\ y=t \\ z=۲-t \end{cases} \xrightarrow[\text{سوم قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} ۱-t+۲-t=۳ \Rightarrow t=۰ \Rightarrow A(۱\,,\,۰\,,\,۲)$$

A نقطه‌ی تلاقی سه صفحه است.

ب) همانند قسمت الف عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x+y-z=۲ \\ -x+۲y-z=۳ \end{cases} \overset{y=t}{\Rightarrow} \begin{cases} x-z=۲-t \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} -۲z=۵-۳t \Rightarrow z=\frac{۵-۳t}{-۲} \\ -x-z=۳-۲t \xrightarrow{\text{تفریق می کنیم}} ۲x=-۱+t \Rightarrow x=\frac{-۱+t}{-۲} \end{cases}$$

$$\text{فصل مشترک دو صفحه}: \begin{cases} x=\frac{-۱+t}{۲} \\ y=t \\ z=\frac{۵-۳t}{-۲} \end{cases} \xrightarrow[\text{سوم قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} \frac{-۱+t}{۲}-t-\frac{۵-۳t}{-۲}=۰ \Rightarrow$$

$$-۱+t-۲t+۵-۳t=۰ \Rightarrow t=۱ \Rightarrow A(۰\,,\,۱\,,\,-۱)$$

A نقطه‌ی تلاقی سه صفحه است.

۱۶- راه‌حل: از رابطه‌ی $\frac{|\overrightarrow{AB}.(u\times u')|}{|u\times u'|}$ طول عمود مشترک را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} A\in L_۱ \Rightarrow A(-۱\,,\,۰\,,\,-۲) \\ B\in L_۲ \Rightarrow B(۰\,,\,۰\,,\,۰) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,(۱\,,\,۰\,,\,۲)$$

$$\begin{matrix} u=(۲\,,\,-۱\,,\,۱) \\ u'=(۱\,,\,۲\,,\,۳) \end{matrix} \Rightarrow u\times u'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=-۵i-۵j+۵k$$

$$\text{طول عمود مشترک}=\frac{|\overrightarrow{AB}.(u\times u')|}{|u\times u'|}=\frac{|-۵+۰+۱۰|}{\sqrt{۲۵+۲۵+۲۵}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۷- راه‌حل: بردار هادی خط D بردار هادی خط مطلوب می‌باشد. بردار هادی خط D مساوی حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه است.

$$\begin{matrix} n_۱\ (۱\,,\,-۱\,,\,۱) \\ n_۲\ (۲\,,\,۱\,,\,-۲) \end{matrix} \Rightarrow u=n_۱\times n_۲=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}=i+۴j+۳k$$

$$\frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r} \Rightarrow \frac{x-۱}{۱}=\frac{y-۰}{۴}=\frac{z-۲}{۳}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR

۱۸- راه‌حل: بردار هادی خط D بردار $u(۱ , -۲ , ۶)$ و بردار نرمال صفحه $n(۲ , ۳ , ۱)$ می‌باشد. از آن‌جایی که $n.u = ۲-۶+۶ = ۲ \neq ۰$، پس خط با صفحه موازی نیست، درنتیجه خط صفحه را قطع می‌کند.

$$D: x-۱ = \frac{y+۱}{-۲} = \frac{z}{۶} = t \Rightarrow D: \begin{cases} x = t+۱ \\ y = -۲t-۱ \\ z = ۶t \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} ۲t+۲-۶t-۳+۶t-۱ = ۰$$

$\Rightarrow t = ۱ \Rightarrow A(۲ , -۳ , ۶)$ نقطه‌ی تلاقی

۱۹- راه‌حل: بردار هادی این خط برابر حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه است.

$$\begin{matrix} n_۱ = (۲ , -۳ , ۰) \\ n_۲ = (۴ , -۳ , ۳) \end{matrix} \Rightarrow u = n_۱ \times n_۲ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۳ & ۰ \\ ۴ & -۳ & ۳ \end{vmatrix} = -۹i - ۶j + ۶k$$

$$B \in \text{خط} \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -۳y = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ -۳y + ۳z - ۱۸ = ۰ \Rightarrow z = ۶ \end{cases} \Rightarrow B = (۰ , ۰ , ۶)$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (-۱ , ۱ , ۸) \\ u = (-۹ , -۶ , ۶) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۱ & ۸ \\ -۹ & -۶ & ۶ \end{vmatrix} = ۵۴i - ۶۶j + ۱۵k$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{۵۴^۲ + ۶۶^۲ + ۱۵^۲}}{\sqrt{۹^۲ + ۶^۲ + ۶^۲}} = \frac{\sqrt{۷۴۹۷}}{\sqrt{۱۵۳}} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

۲۰- راه‌حل: نقطه‌ی $B(۴ , ۰ , ۱)$ از خط را انتخاب کرده حاصل‌ضرب خارجی AB و بردار هادی خط بردار نرمال صفحه است.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (۲ , ۰ , ۲) \\ u = (۲ , ۱ , ۴) \end{matrix} \Rightarrow n = \overrightarrow{AB} \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۲i - ۴j + ۲k$$

$$a(x-x_۰) + b(y-y_۰) + c(z-z_۰) = ۰ \Rightarrow -۲(x-۲) - ۴(y-۰) + ۲(z+۱) = ۰ \Rightarrow -۲x - ۴y + ۲z + ۶ = ۰$$

راه‌حل دوم: دسته صفحه شامل خط D را می‌نویسیم.

$$\frac{x-۴}{۲} = y = \frac{z-۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۴}{۲} = y \\ y = \frac{z-۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲y - ۴ = ۰ \\ ۴y - z + ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$(x - ۲y - ۴) + m(۴y - z + ۱) = ۰ \Rightarrow x + (-۲ + ۴m)y - mz - ۴ + m = ۰$$

$A \in$ دسته صفحه $\Rightarrow ۲ + m - ۴ + m = ۰ \Rightarrow m = ۱$

صفحه‌ی مطلوب $\Rightarrow x + ۲y - z - ۳ = ۰$

۲۱- راه‌حل: بردارهای هادی این دو خط $u(۲ , ۳ , ۳)$ و $u'(۳ , ۵ , ۲)$ می‌باشد. چون $u \nparallel u'$ پس دو خط D و D' موازی نیستند.

$$D: \begin{cases} x = ۲t+۳ \\ y = ۳t+۵ \\ z = ۳t+۲ \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم } D']{\text{در معادله خط}} \frac{۲t-۱}{۳} = \frac{۳t-۲}{۵} = \frac{۳t+۱}{۲}$$

$$\frac{۲t-۱}{۳} = \frac{۳t-۲}{۵} \Rightarrow ۱۰t - ۵ = ۹t - ۶ \Rightarrow t = -۱$$

$$\frac{۲t-۱}{۳} = \frac{۳t+۱}{۲} \Rightarrow ۴t - ۲ = ۹t + ۳ \Rightarrow ۵t = -۵ \Rightarrow t = -۱$$

پس دو خط D و D' متقاطع می‌باشند.

درضمن حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط D و D' بردار نرمال صفحه‌ی شامل آن‌ها می‌باشد و نقطه‌ی $A(۳ , ۵ , ۲)$ از خط D نقطه‌ای از صفحه است.

$$n = u \times u' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۵ & ۲ \end{vmatrix} = -۹i + ۵j + k$$

$$a(x-x_۰) + b(y-y_۰) + c(z-z_۰) = ۰ \Rightarrow -۹(x-۳) + ۵(y-۵) + ۱(z-۲) = ۰ \Rightarrow -۹x + ۵y + z = ۰$$

۲۲- راه‌حل: یک نقطه از خط D نقطه‌ای از صفحه است و حاصل‌ضرب خارجی بردار هادی خط D و بردار نرمال صفحه‌ی P بردار نرمال صفحه مطلوب است.

$n' = (۱ , -۳ , -۲)$ بردار نرمال صفحه‌ی P

$$D:\begin{cases} x - z - ۲ = ۰ \\ ۲x + y - z = ۱ \end{cases} \xrightarrow{x=t} z = t - ۲ \ , \ y = -t - ۱$$

$$D:\begin{cases} x = t \\ y = -t - ۱ \\ z = t - ۲ \end{cases} \Rightarrow A \in D \Rightarrow A(۰ , -۱ , -۲) \ , \ u = (۱ , -۱ , ۱)$$

$$n = u \times n' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \end{vmatrix} = ۵i + ۳j - ۲k$$

$$a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰ \Rightarrow ۵(x - ۰) + ۳(y + ۱) - ۲(z + ۲) = ۰ \Rightarrow ۵x + ۳y - ۲z - ۱ = ۰$$

۲۳- راه‌حل: نقطه‌ای پارامتری از خط را انتخاب می‌کنیم.

$$x = y - ۲ = z \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t + ۲ \\ z = t \end{cases} \Rightarrow M(t , t + ۲ , t)$$

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(t - ۲)^۲ + (t + ۲)^۲ + (t - ۳)^۲} = \sqrt{(t - ۴)^۲ + t^۲ + (t + ۵)^۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{t^۲} + ۴ - \cancel{۴t} + \cancel{t^۲} + ۴ + \cancel{۴t} + \cancel{t^۲} + ۹ - ۶t = \cancel{t^۲} + ۱۶ - ۸t + \cancel{t^۲} + \cancel{t^۲} + ۲۵ + ۱۰t$$

$$-۸t = ۲۴ \Rightarrow t = -۳ \Rightarrow M(-۳ , -۱ , -۳)$$

راه‌حل دوم: صفحه عمودمنصف AB را به‌دست آورده با خط داده شده قطع می‌دهیم.

نرمال صفحه $\overrightarrow{AB} = (۲ , ۲ , -۸)$
وسط AB $M = (۳ , ۱ , -۱)$ $\Rightarrow ۲(x - ۳) + ۲(y - ۱) - ۸(z + ۱) = ۰$

$$D: x = y - ۲ = z \Rightarrow D:\begin{cases} x = t \\ y = t + ۲ \\ z = t \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه عمودمنصف}} ۲t + ۲t + ۴ - ۸t - ۱۶ = ۰ \Rightarrow$$

$$۴t = -۱۲ \Rightarrow t = -۳ \Rightarrow M'(-۳ , -۱ , -۳)$$

۲۴- راه‌حل: نقاط A و B را به‌صورت پارامتری از دو خط D و D' به‌دست آورده، سپس از شرط عمود بودن $\overrightarrow{AB}$ بر هردو خط استفاده کرده، این نقاط را که پای‌های عمود مشترک دو خط متنافر است به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} D:\begin{cases} x = t + ۲ \\ y = ۲t + ۲ \\ z = -۳t - ۱ \end{cases} \Rightarrow A(t + ۲ , ۲t + ۲ , -۳t - ۱) \\ D':\begin{cases} x = -۲t' \\ y = t' + ۲ \\ z = t' + ۴ \end{cases} \Rightarrow B(-۲t' , t' + ۲ , t' + ۴) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-۲t' - t - ۲ , t' - ۲t , t' + ۳t + ۵)$$

$$u = (۱ , ۲ , -۳) , u' = (-۲ , ۱ , ۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} . u = ۰ \Rightarrow -۲t' - t - ۲ + ۲t' - ۴t - ۳t' - ۹t - ۱۵ = ۰ \\ \overrightarrow{AB} . u' = ۰ \Rightarrow ۴t' + ۲t + ۴ + t' - ۲t + t' + ۳t + ۵ = ۰ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} -۳t' - ۱۴t = ۱۷ \\ ۶t' + ۳t = -۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۶t' - ۲۸t = ۳۴ \\ ۶t' + ۳t = -۹ \end{cases} \Rightarrow -۲۵t = ۲۵ \Rightarrow t = -۱ \ , \ t' = -۱$$

$\overrightarrow{AB}$ $(۱ , ۱ , ۱)$ بردار هادی عمود مشترک و $A(۱ , ۰ , ۲)$

$$\frac{x - x_۰}{p} = \frac{y - y_۰}{q} = \frac{z - z_۰}{r} \Rightarrow \frac{x - ۱}{۱} = \frac{y - ۰}{۱} = \frac{z - ۲}{۱}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR

۲۵- راه‌حل: اگر $O(\circ , \circ , \circ)$ آن‌گاه حاصل‌ضرب خارجی بردار $\overrightarrow{OM}$ و بردار هادی خط d بردار نرمال صفحه مطلوب می‌باشد.

$$\begin{matrix}\overrightarrow{OM}=(۲ , -۱ , ۱)\\ u=(۱ , ۱ , -۱)\end{matrix} \Rightarrow n=\overrightarrow{OM}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۱\end{vmatrix}=۳j+۳k$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ \Rightarrow ۳(y-\circ)+۳(z-\circ)=\circ \Rightarrow y+z=\circ$$

۲۶- راه‌حل:

$$x=t \Rightarrow y=۱-t \Rightarrow t-۱+t-z=\circ \Rightarrow z=۲t-۱$$

$$\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=۱-t\\ z=۲t-۱\end{cases} \Rightarrow B\in\Delta \Rightarrow B(\circ , ۱ , -۱) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۴ , \circ , -۲) \quad , \quad u=(۱ , -۱ , ۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۴ & \circ & -۲\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=-۲i-۱\circ j-۴k$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{۴+۱\circ\circ+۱۶}}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{\sqrt{۱۲\circ}}{\sqrt{۶}}=\sqrt{۲\circ}=۲\sqrt{۵}$$

۲۷- راه‌حل: یک نقطه از خط D نقطه‌ای از صفحه است و حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط D و D' بردار نرمال صفحه مطلوب می‌باشد.

$$\begin{matrix}u=(۱ , ۱ , ۳)\\ u=(۲ , ۱ , ۱)\end{matrix} \Rightarrow n=u\times u'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & ۱ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=-۲i+۵j-k$$

$$A\in D \Rightarrow A(\circ , ۱ , \circ)$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ \Rightarrow -۲(x-\circ)+۵(y-۱)-۱(z-\circ)=\circ \Rightarrow -۲x+۵y-z-۵=\circ$$

راه‌حل دوم: دسته صفحه شامل خط D را می‌نویسیم.

$$D: x=y-۱=\frac{z}{۳} \Rightarrow D:\begin{cases}x=y-۱\\ x=\frac{z}{۳}\end{cases} \Rightarrow D:\begin{cases}x-y+۱=\circ\\ ۳x-z=\circ\end{cases}$$

$$(x-y+۱)+m(۳x-z)=\circ \Rightarrow (۱+۳m)x-y-mz+۱=\circ$$

$u'=(۲ , ۱ , ۱)$ بردار هادی خط D' ، $n=(۱+۳m , -۱ , -m)$ بردار نرمال دسته صفحه

$$n.u'=\circ \Rightarrow ۲+۶m-۱-m=\circ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵}x-y+\frac{۱}{۵}z+۱=\circ \Rightarrow ۲x-۵y+z+۵=\circ$$

۲۸- راه‌حل: نقطه‌ای پارامتری از خط Δ درنظر می‌گیریم.

$$\Delta:\begin{cases}x=t+۱\\ y=۲t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow B\in\Delta \Rightarrow B(t+۱ , ۲t , t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t-۱ , ۲t+۲ , t-۳)$$

شرط موازی بودن $\overrightarrow{AB}$ با صفحه‌ی P آنست‌که $\overrightarrow{AB}$ بر بردار نرمال صفحه P عمود باشد.

$$n=(۲ , ۳ , -۱) \Rightarrow AB.n=\circ \Rightarrow ۲t-۲+۶t+۶-t+۳=\circ \Rightarrow ۷t+۷=\circ \Rightarrow t=-۱ \Rightarrow B(\circ , -۲ , -۱)$$

۲۹- راه‌حل: اولاً نقطه $O(\circ , \circ , \circ)$ نقطه‌ای از صفحه می‌باشد. ثانیا حاصل‌ضرب خارجی بردار i و بردار هادی خط D بردار نرمال صفحه مطلوب است.

$$\begin{matrix}u=(۱ , ۱ , ۲)\\ i=(۱ , \circ , \circ)\end{matrix} \Rightarrow n=u\times i=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & ۱ & ۲\\ ۱ & \circ & \circ\end{vmatrix}=۲j-k$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ \Rightarrow ۲(y-\circ)-۱(z-\circ)=\circ \Rightarrow ۲y-z=\circ$$

راه‌حل دوم: معادله صفحه‌ی شامل محور xها به‌صورت $y+mz=\circ$ می‌باشد. چون این صفحه با خط D موازی است باید بردار نرمال آن بر بردار هادی خط D عمود باشد.

$$\begin{matrix}n\ (\circ , ۱ , m)\\ u\ (۱ , ۱ , ۲)\end{matrix} \Rightarrow u.n=\circ \Rightarrow ۱+۲m=\circ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

پس معادله‌ی صفحه مطلوب به‌صورت $y-\frac{۱}{۲}z=\circ$ یا $۲y-z=\circ$ می‌باشد.

۳۰- راه‌حل: حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و بردار نرمال صفحه، بردار نرمال صفحه‌ی مطلوب است.

$$\begin{matrix}\overrightarrow{MN}=(۳\,,۱\,,۱)\\ n'=(۱\,,۲\,,۱)\end{matrix}\ \Rightarrow\ n=\overrightarrow{MN}\times n'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۳ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=-i-۲j+۵k$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ\Rightarrow -۱(x-۲)-۲(y-۱)+۵(z-۲)=\circ\Rightarrow -x-۲y+۵z-۶=\circ$$

۳۱- راه‌حل:

اولاً: زوایایی که یک خط با محورهای مختصات می‌سازد برابر زوایایی است که بردار هادی خط با محورهای مختصات می‌سازد. اگر γ زاویه‌ای باشد که خط با محور oz می‌سازد، خواهیم داشت.

$$Cos^۲۶۰+Cos^۲۴۵+Cos^۲\gamma=۱\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴}+Cos^۲\gamma=۱\Rightarrow Cos^۲\gamma=\frac{۱}{۴}\ \Rightarrow Cos\gamma=\pm\frac{۱}{۲}$$

بنابراین بردار هادی این خط بردار $u(\frac{۱}{۲}\,,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,,\pm\frac{۱}{۲})$ می‌باشد.

$$\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\ \Rightarrow\ \frac{x-۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{y-۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{z-۳}{\pm\frac{۱}{۲}}$$

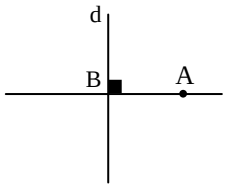
همان‌طور که دیده می‌شود این مسئله دو جواب دارد.

ثانیاً: چون نقطه‌ی N روی محور yها قرار دارد پس $N(\circ\,,y\,,\circ)$ می‌باشد.

$$\begin{matrix}\overrightarrow{MN}=(-۱\,,y-۲\,,-۳)\\ u=(\frac{۱}{۲}\,,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,,\pm\frac{۱}{۲})\end{matrix}\ \xrightarrow{\overrightarrow{MN}\parallel u}\ \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{y-۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{-۳}{\pm\frac{۱}{۲}}$$

این تساوی هرگز برقرار نیست زیرا $\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}\neq\frac{-۳}{\pm\frac{۱}{۲}}$ پس چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۳۲- راه‌حل: نقطه‌ی پارامتری B را از خط d انتخاب کرده از شرط عمود بودن $\overrightarrow{AB}$ بر خط d استفاده کرده، پارامتر و درنهایت نقطه‌ی B را به‌دست می‌آوریم.



$$d:\begin{cases}x=۲t\\ y=۵t+۳\\ z=۴t+۱\end{cases}\Rightarrow B\in d\Rightarrow B(۲t\,,۵t+۳\,,۴t+۱)$$

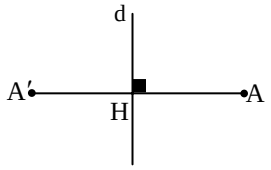
$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(۲t-۱\,,۵t+۳\,,۴t-۱)\ ,\ u=(۲\,,۵\,,۴)$$

$$\overrightarrow{AB}\perp d\ \Rightarrow\overrightarrow{AB}\,.\,u=\circ\ \Rightarrow ۴t-۲+۲۵t+۱۵+۱۶t-۴=\circ\ \Rightarrow ۴۵t+۹=\circ\ \Rightarrow t=-\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=(-\frac{۷}{۵}\,,۲\,,-\frac{۹}{۵})$$ بردار هادی خط

$$\frac{x-x_\circ}{p}=\frac{y-y_\circ}{q}=\frac{z-z_\circ}{r}\ \Rightarrow\ \frac{x-۱}{-\frac{۷}{۵}}=\frac{y-\circ}{۲}=\frac{z-۲}{-\frac{۹}{۵}}$$

۳۳- راه‌حل: همانند مسئله قبل عمل کرده ابتدا نقطه H را به‌دست می‌آوریم.



$$d:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow H(t\,,t\,,t)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AH}=(t-۱,\,t+۱,t-۲)\ ,\ \ u=(۱\,,۱\,,۱)$$

$$\overrightarrow{AH}\,.\,u=\circ\ \Rightarrow\ t-۱+t-۱+t-۲=\circ\ \Rightarrow\ t=\frac{۴}{۳}\ \Rightarrow H(\frac{۴}{۳}\,,\frac{۴}{۳}\,,\frac{۴}{۳})$$

اگر A' قرینه‌ی A نسبت به خط d باشد، آن‌گاه نقطه‌ی H وسط AA' است.

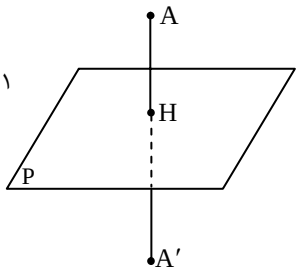
$$H=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲H-A\Rightarrow A'=۲(\frac{۴}{۳}\,,\frac{۴}{۳}\,,\frac{۴}{۳})-(۱\,,۱\,,۲)\Rightarrow A'=(\frac{۵}{۳}\,,\frac{۵}{۳}\,,\frac{۲}{۳})$$

۳۴- راه‌حل: ابتدا معادله خط AH را نوشته با صفحه‌ی P قطع می‌دهیم تا نقطه‌ی H به‌دست آید.

$u = n = (۱ , -۱ , ۱)$

معادله پارامتری خط AH : $\begin{cases} x = pt + x_\circ \\ y = qt + y_\circ \\ z = rt + z_\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + ۱ \\ y = -t + ۲ \\ z = t + ۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه}} t + ۱ + t - ۲ + t + ۳ = ۱$

$\Rightarrow ۳t = -۱ \Rightarrow t = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow H(\frac{۲}{۳} , \frac{۷}{۳} , \frac{۸}{۳})$



اگر A' قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی p باشد، آن‌گاه H وسط AA' خواهد بود.

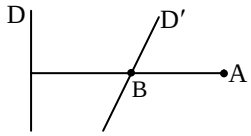
$H = \frac{A + A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲H - A \Rightarrow A' = ۲(\frac{۲}{۳} , \frac{۷}{۳} , \frac{۸}{۳}) - (۱ , ۲ , ۳) \Rightarrow A' = (\frac{۱}{۳} , \frac{۸}{۳} , \frac{۷}{۳})$

۳۵- راه‌حل: اگر خط موردنظر خط D' را در نقطه‌ی B قطع کند، آن‌گاه B را برحسب پارامترهای خط D' نوشته، از شرط عمود بودن $\overrightarrow{AB}$ بر خط D استفاده کرده، پارامتر و درنهایت نقطه‌ی B را به‌دست می‌آوریم. سپس معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را می‌نویسیم.

$D' : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = ۲t - ۲ \end{cases} \Rightarrow B \in D' \Rightarrow B(t , -t , ۲t - ۲) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(t - ۱ , -t + ۱ , ۲t - ۳) \ , \ u = (۲ , ۳ , ۱)$

$\overrightarrow{AB} \perp D \Rightarrow \overrightarrow{AB} . u = ۰ \Rightarrow ۲t - ۲ - ۳t + ۳ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (۱ , -۱ , ۱)$ بردار هادی خط مطلوب

$\frac{x - x_\circ}{p} = \frac{y - y_\circ}{q} = \frac{z - z_\circ}{r} \Rightarrow \frac{x - ۱}{۱} = \frac{y + ۱}{-۱} = \frac{z - ۱}{۱}$



دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR