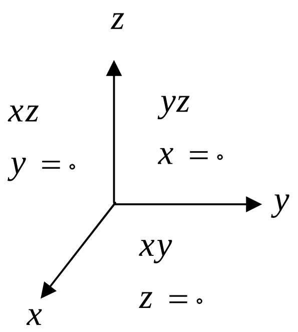
فصل ۱: بردارها

دستگاه مختصات سه بعدی: سه محور دو به دو عمود بر هم، تشکیل یک دستگاه مختصات سه بعدی می‌دهند.



$R^{۳} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$

نکته: اگر نقطه‌ای روی محور xها باشد، دو مولفه y و z آن برابر با صفر خواهد بود و ...

مثال: نقاط زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$(۱,۰,۰)$, $(۱,۲,۰)$, $(۱,۲,۳)$, $(-۱,۲,-۳)$

مثال: اگر نقطه‌ی $A = (m^{۲}, n^{۲} - ۱, n + ۱)$ روی محور ox و به فاصله‌ی ۴ از مبدا مختصات قرار داشته باشد، $m + n$ را به دست آورید.

مثال: اگر نقطه‌ی $B = (x - |x|, y, z - z^{۲})$ روی صفحه‌ی yz قرار داشته باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $۰ < z < ۱$ ۲) $y < ۰$ ۳) $x \geq ۰$ ۴) $x^{۲} < y^{۲} + z^{۲}$

تصویر و قرینه‌ی یک نقطه: تصویر یک نقطه بر یک خط یا صفحه، پای عمودی است که بر آن فرود می‌آید.

نکته: تصویر نقطه‌ی $A(x, y, z)$ بر محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر است با نقاط $(x, ۰, ۰)$ و $(۰, y, ۰)$ و $(۰, ۰, z)$.

مثال: اگر تصویر نقطه‌ی $A(۲, k - ۱, ۳)$ روی محور oy نقطه‌ی $B(m, ۳, ۱ - n)$ باشد، مقدار $m + n + k$ را بیابید.

نکته: تصویر نقطه‌ی $A(x, y, z)$ بر صفحات xy و yz و xz به ترتیب برابر است با $(x, y, ۰)$ و $(۰, y, z)$ و $(x, ۰, z)$.

مثال: تصویر منحنی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۲xy - ۲yz - ۲xz = ۰$ را بر صفحه‌ی xz بیابید.

نکته: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y, z)$ نسبت به محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر است $(x, -y, -z)$ و $(-x, y, -z)$ و $(-x, -y, z)$.

مثال: قرینه‌ی منحنی $xz + y = ۳$ را نسبت به محور oy بیابید.

نکته: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y, z)$ نسبت به صفحات xy و yz و xz به ترتیب برابر است با $(x, y, -z)$ و $(-x, y, z)$ و $(x, -y, z)$.

مثال: قرینه‌ی منحنی $xz + y^{۲} = ۲$ را نسبت به صفحه‌ی xz بیابید.

فاصله‌ی یک نقطه از مبدا مختصات: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x, y, z)$ از مبدا مختصات برابر است با $OA = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}$.

فاصله‌ی بین دو نقطه: فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_{۱}, y_{۱}, z_{۱})$ و $B(x_{۲}, y_{۲}, z_{۲})$ (طول پاره خط AB) برابر است با $AB = \sqrt{(x_{۲} - x_{۱})^{۲} + (y_{۲} - y_{۱})^{۲} + (z_{۲} - z_{۱})^{۲}}$.

مثال: نشان دهید نقطه‌های $A(۵,۱,۵)$ و $B(۴,۳,۲)$ و $C(-۳,-۲,۱)$ راس‌های یک مثلث قائم الزاویه‌اند.

مختصات وسط یک پاره خط: مختصات وسط پاره خطی که از نقاط $A(x_{۱}, y_{۱}, z_{۱})$ و $B(x_{۲}, y_{۲}, z_{۲})$ می‌گذرد برابر است با $M(\frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲}, \frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}, \frac{z_{۱} + z_{۲}}{۲})$.

مثال: اگر نقطه‌ی $A'(۱,-۳,۷)$ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۵,۷,۱)$ نسبت به نقطه‌ی M باشند. مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x, y, z)$ از صفحات xy، yz و xz به ترتیب برابر است با $|z|$، $|x|$ و $|y|$.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x, y, z)$ از محور xها برابر است با $\sqrt{y^{۲} + z^{۲}}$.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x, y, z)$ از محور yها برابر است با $\sqrt{x^{۲} + z^{۲}}$.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x, y, z)$ از محور zها برابر است با $\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۲,-۳,۱)$ را از محور xها به دست آورید.

بردار: بردار پاره‌خط جهت داری است که مبدا آن بر مبدا مختصات واقع است.

* هر سه تایی مرتب (a,b,c) هم نشان‌دهنده‌ی یک نقطه و هم نشان‌دهنده‌ی یک بردار می‌باشد.
* برداری که تمام مولفه‌های آن صفر باشد، بردار صفر نامیده می‌شود و آن را با نماد o نشان می‌دهیم. $o = (۰,۰,۰)$.

طول یک بردار: طول بردار $a = (a_{۱}, a_{۲}, a_{۳})$ برابر است با $|a| = \sqrt{a_{۱}^{۲} + a_{۲}^{۲} + a_{۳}^{۲}}$.

مثال: به ازای کدام مقدار m، طول بردار $a = (m \sin\theta, m \cos\theta, ۱ - m)$ برابر ۵ است؟

بردار یکه (واحد): برداری است که طول آن برابر با ۱ باشد.

مثال: بردار a، مولفه‌های برابر دارد و یکه است؛ مجموع مولفه‌های a را بیابید.

اعمال جبری روی بردارها:

اگر $a = (a_{۱}, a_{۲}, a_{۳})$ و $b = (b_{۱}, b_{۲}, b_{۳})$ دو بردار باشند و r یک عدد حقیقی باشد در این صورت:

$$a + b = (a_{۱} + b_{۱}, a_{۲} + b_{۲} + a_{۳} + b_{۳})$$

$a-b=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲+a_۳-b_۳)$

$ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)$

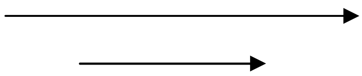
اگر $r>۱$ باشد، بردار ra در جهت a بزرگ می‌شود.

اگر $۱>r>۰$ باشد، بردار ra در جهت a کوچک می‌شود.

اگر $۰>r>-۱$ باشد، بردار ra در خلاف جهت a کوچک می‌شود.

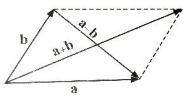
اگر $r<-۱$ باشد، بردار ra در خلاف جهت a بزرگ می‌شود.

مثال: در شکل زیر حدود k را بیابید.



$(۲k-۱)a$

* از نظر هندسی، جمع و تفریق بردارها را به صورت زیر می‌توان نشان داد.



مثال: بردارهای a و b به گونه‌ای هستند که $|a|=|b|$. در این صورت بردارهای $a+b$ و $a-b$ باهم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

مثال: اگر بردار $a=(m,۲,-۱)$ و $|b|=\sqrt{۴۱}$ و دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم باشند، مقدار m را بیابید.

بردارهای موازی: اگر $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند، آن‌گاه:

$$a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}=k$$

$k>۰ \Leftrightarrow$ a و b هم‌جهت‌اند

$k<۰ \Leftrightarrow$ a و b در خلاف جهت‌اند

به عبارت دیگر دو بردار وقتی موازی‌اند که یکی مضرب دیگری باشد.

مثال: به ازای کدام مقدار m و n بردارهای $a=(۱-m,۲n,۳)$ و $b=(m+۲,۳n+۱,۶n)$ هم‌جهت هستند؟

بردارهای یکه‌ی دستگاه مختصات: بردارهای $i=(۱,۰,۰)$ و $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$ را بردارهای یکه‌ی دستگاه مختصات می‌گوییم.

نکته: هر بردار در فضا توسط این سه بردار یکه ساخته می‌شود.

$(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱i+a_۲j+a_۳k$

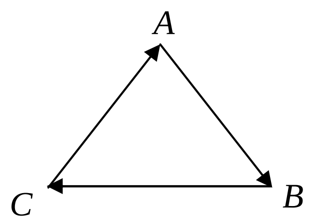
به عنوان مثال $(۲,-۳,۱)=۲i-۳j+k$.

یکه کردن یک بردار: اگر $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار باشد، آن‌گاه بردار $e_a=\frac{a}{|a|}$ بردار یکه‌ی متناظر با بردار a می‌باشد. که برداری است به طول ۱ و موازی و هم‌جهت با بردار a.

مثال: اگر $a=(۲,-۳,۵)$ و $b=(۳,۰,-۴)$ باشند، مطلوب است $e_{۲a+b}$.

نکته: برای تعیین زاویه‌ی بین دو بردار باید آنها را طوری انتقال دهیم که ابتدای آن‌ها بر هم منطبق باشند.

مثال: در مثلث متساوی الاضلاع زیر، زوایه‌ی بین دو بردار AB و BC را تعیین کنید.



ضرب داخلی بردارها: اگر a و b دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین این دو بردار باشد، حاصل‌ضرب داخلی این دو بردار که با نماد $a.b$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$a.b = |a||b|\cos\theta \ , \ 0 \le \theta \le \pi$$

* چون حاصل ضرب داخلی دو بردار همواره یک عدد است بنابر این به ضرب داخلی، ضرب نقطه‌ای نیز می‌گوییم.

مثال: اگر بردارهای a و b زاویه‌ی 150° بسازند و $|a| = \sqrt{2}$ و $b = (1,-1,2)$ باشند، $a.b$ را به دست آورید.

* اگر بردارها به صورت $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ باشند، حاصل‌ضرب داخلی به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال: اگر $a = (-2, 3, 1)$ و $b = 3i - k$ دو بردار باشند، $b.a$ را به دست آورید.

نکته: اگر دو بردار a و b زاویه‌ی منفرجه بسازند، $a.b < 0$ و برعکس.

* برای تعیین زاویه‌ی بین دو بردار از فرمول زیر استفاده می‌کنیم: $\cos\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|}$.

مثال: زاویه‌ی بین دو بردار $a = (1,1,0)$ و $b = (0,1,-1)$ را به دست آورید.

نکته: دو بردار a و b برهم عمودند اگر و تنها اگر $a.b = 0$.

ویژگی‌های ضرب داخلی: اگر a و b و c سه بردار باشند و r یک عدد حقیقی باشد:

$1)\, a.a = |a|^2 \qquad 2)\, a.a \ge 0 \qquad 3)\, a.b = b.a \qquad 4)\, a.(b+c) = a.b + a.c \qquad 5)\, r(a.b) = ra + rb$

$i.j = j.i = i.k = k.i = j.k = k.j = 0 \qquad\qquad i.i = j.j = k.k = 1$

مثال: اگر a و b دو بردار دلخواه باشند، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$1)\,(a+b).(a-b)$

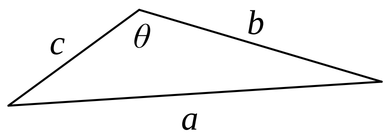
$2)\,(a-b).(a-b)$

$3)\,|a+b|^2$

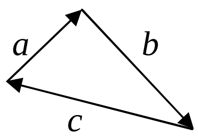
$4)\,|a+b|^2 + |a-b|^2$

مثال: اگر $|a| = 5$ و $|b| = 3$ و $|a-b| = 8$ باشد، مقدار $|a+b|$ را بیابید.

قضیه‌ی کسینوس‌ها: در هر مثلث اندازه‌ی یک ضلع، بر حسب اندازه‌های دو ضلع دیگر و اندازه‌ی زاویه‌ی بین آن‌ها به صورت زیر قابل محاسبه است: (θ زاویه‌ی بین دو ضلع b و c است) $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲ab\cos\theta$.



مثال: در شکل زیر اندازه‌های بردارهای a, b, c به ترتیب برابر ۳,۵,۶ است. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a, b را بیابید.



زاویه‌های بین یک بردار با محورهای مختصات: اگر α و β و γ به ترتیب زاویه‌ی بین بردار $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ با محورهای x و y و z باشند، در این صورت:

$$\cos\alpha = \frac{a_۱}{|a|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_۲}{|a|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a_۳}{|a|}$$

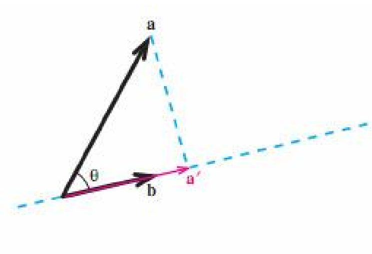
به $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$، کسینوس‌های هادی بردار a می‌گوییم.

مثال: به ازای کدام مقدار a، بردار $(۲,۲,a)$ با محورهای مختصات به ترتیب زاویه‌های ۴۵° و ۴۵° و ۶۰° می‌سازد.

نکته: $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$.

مثال: کسینوس‌های هادی بردار $u = ۲i - ۳j + k$ را به دست آورید.

تصویر قائم یک بردار روی امتداد برداری دیگر: تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

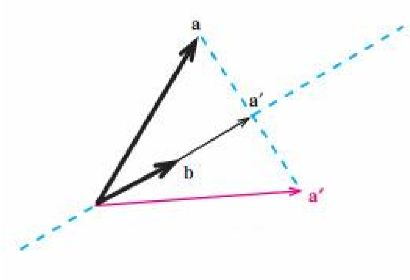


$$a' = (\frac{a.b}{|b|^۲})b$$

مثال: تصویر قائم بردار $a = ۲i - j + ۳k$ را بر امتداد بردار $b = i - ۳j - k$ به دست آورید.

مثال: اگر طول تصویر بردار $a = (\sqrt{۷}, ۱, -۱)$ بر بردار $b = (۲\sqrt{۷}, m + ۲, -n)$ برابر ۳ باشد، $m + n$ را بیابید.

قرینه‌ی یک بردار نسبت به امتداد یک بردار: قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار b از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.



$a'' = ۲a' - a$

مثال: قرینه‌ی بردار $a = i - j + ۲k$ را نسبت به بردار $b = (۰,۱,-۱)$ بیابید.

نکته: $|a| = |a''|$

مثال: اگر قرینه‌ی بردار $a = (۱,۱,۲)$ نسبت به بردار $b = (b_۱, b_۲, b_۳)$ به صورت $a'' = (m+۱)i - j - k$ باشد، مقادیر m را بیابید.

نکته: زاویه‌ی بین a و a'' دو برابر زاویه‌ی بین a و a' است.

مثال: اگر $a = i + j$ و $b = j - k$، و a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار b باشد، زاویه‌ی بین a و a'' را بیابید.

ضرب خارجی دو بردار: اگر $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $b = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار باشند، در این صورت $a \times b$ از طریق دترمینان نمادین زیر به دست می‌آید.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$
$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$

نکته: اندازه‌ی ضرب خارجی $a \times b$ را می‌توان از روش زیر به دست آورد:

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta \quad , \quad ۰ \le \theta \le \pi$$

مثال: اگر $a = (۱,-۲,۱)$ و $b = (۳,۰,۲)$ باشند، $a \times b$ و $b \times a$ را به دست آورید.

مثال: اگر $a = (۱,-۲,۳)$ و $b = (۲,۰,۱)$ و $c = (۲,-۳,۰)$، حاصل عبارت $a.(b \times c) + \sqrt{۵}|a \times b|$ را بیابید.

مثال: کدام عبارت زیر بی معنی است؟

۱) $(|a|b) \times a$ ۲) $(a.b)a - a \times b$ ۳) $(a + ۲b).c + ۲a \times b$ ۴) $\frac{a}{|a \times b|} - \frac{a.b}{b.b}b$

نکته: $a \times b$ برداری است که هم بر a و هم بر b عمود است و جهت آن از قانون دست راست پیروی می‌کند.

نکته: برای این‌که برداری بیابیم که بر دو بردار دلخواه a و b عمود باشد کافی است $a\times b$ یا $b\times a$ را به دست آوریم.

نکته: دو بردار غیر صفر a و b باهم موازی‌اند اگر و تنها اگر $a\times b=0$.

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار: اگر a و b و c سه بردار و r عددی حقیقی باشد:

۱) $a\times b=-b\times a$

۲) $a\times a=o$

۳) $a\times o=o\times a=o$

۳) $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$

۴) $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$

۵) $r(a\times b)=(ra)\times b=a\times(rb)$

۷) $i\times j=k \quad , \quad j\times k=i \quad , \quad k\times i=j \quad , \quad j\times i=-k \quad , \quad \dots$

۸) $i\times i=o \quad , \quad j\times j=o \quad , \quad k\times k=o$

۹) $|a\times b|$ = مساحت متوازی الاضلاعی که a و b دو ضلع مجاورش باشند

۱۰) $\frac{1}{2}|a\times b|$ = مساحت مثلثی که a و b دو ضلع مجاورش باشند

نکته: $|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2|b|^2$

نکته: اگر $a+b+c=o$، آن‌گاه $a\times b=b\times c=c\times a$.

مثال: اگر $|a|=2$ و $|b|=4$ و این دو بردار بر هم عمود باشند، اندازه‌ی بردار $a\times(a-b)$ چه قدر است؟

مثال: اگر a و b دو بردار یکه باشند که زاویه‌ی 60° می‌سازند، حاصل عبارت $|(a+2b)\times(3a-b)|$ را بیابید.

مثال: دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یک‌دیگر زاویه‌ی 30° می‌سازند، مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a-2b$ و $3a+2b$ تولید می‌شود چقدر است؟

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $i\times(j\times k)+j\times(k\times i)$

مثال: مساحت مثلثی را به دست آورید که $A=(2,2,4)$ و $B=(1,3,2)$ و $C=(2,6,3)$ سه راس آن باشند.

ضرب مختلط: اگر a و b و c سه بردار باشند، حاصل ضرب مختلط a و b و c را به صورت $a.(b\times c)$ تعریف می‌کنیم. (جواب حاصل‌ضرب مختلط، یک عدد می‌باشد و نه بردار)

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نکته: $a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)=-a.(c\times b)=-c.(b\times a)=-b.(a\times c)$

نکته: حجم متوازی السطوحی است که a و b و c سه یال مجاور آن هستند برابر است با $v=|a.(b\times c)|$.

نکته: حجم هرم بنا شده بر سه بردار همرس a و b و c برابر است با $v=\frac{۱}{۶}|a.(b\times c)|$.

مثال: اگر $A(۰,۰,۱)$ و $B(۱,۰,۱)$ و $C(۲,۳,-۱)$ و $D(۰,۲,۱)$ باشند، حجم متوازی السطوحی را بیابید که AB و AC و AD سه یال همرس آن باشند.

نکته: سه بردار a و b و c در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر $a.(b\times c)=۰$.

مثال: به ازای کدام مقدار m بردارهای $a=(۱,۱-m,m)$ و $b=(۱,۲,۰)$ و $c=(۰,۲,۳)$ هم صفحه هستند؟

ضرب سه گانه برداری: به $a\times(b\times c)$ ضرب سه گانه‌ی برداری می‌گوییم.

نکته: $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$.

نمونه سوال امتحانی فصل اول: بردارها

۱. نقطه‌ی $A=(۲,۴,۵)$ مفروض است.

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور yها بیابید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی xoy بیابید.

۲. محیط مثلث ABC را با فرض $A=(-۱,۰,۰)$ ، $B=(۲,۰,\sqrt{۷})$ و $C=(۳,\sqrt{۲},\sqrt{۷})$ پیدا کنید.

۳. نقاط $A(۲,-۱,-۲)$ و $B(۲,-۲,-۱)$ و $C(۱,-۲,-۲)$ سه رأس یک مثلث‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس A چقدر است؟

۴. اگر نقاط M و N به ترتیب تصاویر قائم نقطه‌ی $A=(۳,-۴,۲)$ بر صفحات xoz و yoz باشند، طول MN را محاسبه کنید.

۵. فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(۳,۲,-۴)$ را از محور yها به دست آورید.

۶. ثابت کنید سه نقطه‌ی $A=(۳,-۲,۴)$ ، $B=(۱,۱,۱)$ و $C=(-۱,۴,-۲)$ بر یک استقامتند.

۷. اگر a، b و c سه بردار باشند، ضرب داخلی بردار a را در بردار $b(a.c)-c(a.b)$ به دست آورید.

۸. نشان دهید بردارهای $a=(-۴,۵,۷)$ و $b=(۱,-۲,۲)$ برهم عمودند.

۹. زاویه‌ی بین دو بردار $a=(۱,۱,۰)$ و $b=(۰,-۱,-۱)$ را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید: $|a.b|\le|a||b|$. (خرداد ۸۲)

۱۱. a و b بردارهایی هستند به طوری که $a+b$ زاویه‌ی بین بردارهای a و b را نصف می‌کند؛ مقدار $|a|-|b|$ را محاسبه کنید.

۱۲. مقدار m را طوری بیابید که زاویه‌ی بین دو بردار $a=(m,-۱,۲)$ و $b=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵° باشد.

۱۳. برداری به طول واحد بیابید که بر بردارهای $a=(۱,۲,۲)$ و $b=(-۱,۲,-۲)$ عمود باشد.

۱۴. اگر $a=(۲,۱,۲)$ و $|b|=۲$ و زاویه‌ی بین a و b برابر $\frac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل $(۲a-۳b).(a-b)$ را تعیین کنید.

۱۵. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید: $|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲(|a|^۲+|b|^۲)$

۱۶. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث را ثابت کنید: $|a+b|\le|a|+|b|$

۱۷. فرض کنید a و b دو بردار غیر صفر باشند. ثابت کنید اگر a بر b عمود باشد آنگاه: $|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲$

۱۸. اگر $a+b+c=۰$ و $|a|=۳$ و $|b|=۵$ و $|c|=۷$، زاویه‌ی بین a و b چقدر است؟

۱۹. نقاط $A(۰,-۱,-۲)$ و $B(۳,۱,۴)$ و $C(۵,۷,۱)$ سه رأس یک مثلث‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس A چقدر است؟

۲۰. اگر بردارهای a و b زاویه‌ی ۱۲۰° بسازند و $|a|=۳$ و $|b|=۴$. حاصل $\left|۲a-\frac{۳}{۲}b\right|$ چقدر است؟

۲۱. اگر a، b و c سه بردار یکه‌ی دو به دو متعامد باشند، حاصل $|a+۲b-۳c|$ را به دست آورید.

۲۲. فرض کنید a ، b و c بردارهایی به ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $a+b+c=۰$. مقدار $a.b+b.c+c.a$ را محاسبه کنید.

۲۳. کسینوس‌های هادی بردار $u=۳i+j-k$ را به دست آورید.

۲۴. اگر بردار a با جهت مثبت محور xها و yها به ترتیب زوایای $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ تشکیل دهد، زاویه‌ی بین بردار a و محور zها را بیابید.

۲۵. مساحت مثلث به رئوس $A=(۱,۲,۰)$ ، $B=(۳,۰,-۳)$ و $C=(۵,۲,۶)$ را بیابید.

۲۶. بردارهای $a=(۲,۴,۴)$ و $b=(۲,۰,۲)$ را در نظر بگیرید:

الف) بردار یکه‌ی e_a را پیدا کنید.

ب) تصویر قائم بردار a را روی امتداد بردار b پیدا کنید.

ج) مساحت متوازی الاضلاعی را که بردارهای a و b دو ضلع مجاور آن هستند پیدا کنید.

۲۷. اگر $a=۲i-j+۲k$ و $b=i-j$ باشند:

الف) زاویه‌ی بین دو بردار a و b را تعیین کنید.

ب) تصویر قائم بردار a را روی امتداد بردار b تعیین کنید.

۲۸. اگر $a=(۲,۳,۰)$ و $b=(-۱,۱,۲)$ باشند:

الف) قرینه‌ی بردار a را نسبت به امتداد بردار b بیابید.

ب) مساحت مثلثی را که توسط بردارهای a و b تولید می‌شود پیدا کنید.

۲۹. بردارهای $a=(۱,۲,۳)$ و $b=(۸,۲,۰)$ مفروضند. تصویر و قرینه‌ی بردار b روی a را پیدا کنید.

۳۰. بردارهای $a=(۲,-۱,۲)$ و $b=(۱,۲,-۱)$ مفروضند. قرینه‌ی بردار $a+b$ را نسبت به امتداد بردار $a-b$ محاسبه کنید.

۳۱. بردارهای $a=(۲,-۱,۲)$ و $b=(۳,-۴,۲)$ مفروضند. قرینه‌ی بردار $a+b$ را نسبت به امتداد بردار $a-b$ محاسبه کنید.

۳۲. بردار یکه‌ای بیابید که بر بردارهای $i+j$ و $j+k$ عمود باشد.

۳۳. اگر a، b و c سه بردار در فضا باشند به طوری که $a+b+c=o$، ثابت کنید:

$$a\times b=b\times c=c\times a$$

۳۴. اگر $|a|=۶$ و $|b|=۴$ و $a.b=۱۲$. حاصل $|a\times b|$ را بیابید.

۳۵. اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند و $|a|=۳$ و $|b|=۴$. حاصل $|(۳a-b)\times(a-۲b)|$ را بیابید.

۳۶. اگر $|a|=۳$ و $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$. حاصل $|a.b|$ را بیابید.

۳۷. فرض کنید a و b بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $a-۲b$ و $۳a+۲b$ تولید می‌شود پیدا کنید.

۳۸. اگر $a.b=۱$ و $|a|=۲$ و $|b|=۱$ باشد، مساحت مثلثی که با دو بردار a و $a-b$ ساخته می‌شود چقدر است؟

۳۹. بردارهای a و b و c به طول واحد هستند و $a+b+c=۰$. اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو بردار $a+۲b$ و $۲a-b$ را حساب کنید.

۴۰. فرض کنید a و b و c و d چهار بردار باشند با این خاصیت که $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$. ثابت کنید بردارهای $a-d$ و $b-c$ موازی‌اند.

۴۱. حاصل $(a-b)\times(a+b)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۴۲. حاصل $(a-۲b+۳c)\times(۲a+۳b-۴c)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۴۳. حاصل عبارت $i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۴۴. بردارهای $a=(۲,۳,-۱)$ و $b=(-۴,-۱,۴)$ و $c=(-۳,-۱,۳)$ مفروضند:

الف) زاویه‌ی بین بردارهای $a+c$ و $b-c$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار b را روی امتداد بردار c پیدا کنید.

ج) مساحت مثلثی را که بردارهای $۲a+b$ و $a+c$ دو ضلع آن باشند حساب کنید.

۴۵. فرض کنید p ، q، r و s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای $a = p \times s$، $b = q \times s$ و $c = r \times s$ در یک صفحه قرار می‌گیرند.

۴۶. سه بردار $a = (-۴, m, ۱)$، $b = (۱, -۲, ۲)$ و $c = (۰, ۱, -۱)$ مفروض اند:

الف) مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار در یک صفحه باشند.

ب) زاویه‌ی بردار c را با محور yها تعیین کنید.

ج) مختصات تصویر b را روی c تعیین کنید.

۴۷. حجم متوازی السطوحی را که توسط بردارهای $a = (۱, ۲, ۰)$ ، $b = (۰, ۱, ۱)$ و $c = (۲, ۰, ۲)$ تولید می‌شود بیابید.

فصل ۲: معادلات خط و صفحه

* برای نوشتن معادله‌ی یک خط در فضا، باید یک نقطه از خط و یک بردار موازی آن خط معلوم باشد.

* معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ بگذرد و با بردار $u=(p,q,r)$ موازی باشد، به یکی از دو حالت زیر نوشته می‌شود. (به بردار u، بردار هادی خط می‌گوییم)

معادلات متقارن خط: $\dfrac{x-x_{\circ}}{p}=\dfrac{y-y_{\circ}}{q}=\dfrac{z-z_{\circ}}{r}$

معادلات پارامتری خط: $\begin{cases} x=x_{\circ}+pt \\ y=y_{\circ}+qt \\ z=z_{\circ}+rt \end{cases}$

مثال: معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(۲,-۱,۰)$ بگذرد و موازی بردار $u=۴i+۲j-۵k$ باشد.

مثال: معادلات متقارن خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(۴,۴,-۲)$ بگذرد و با خط به معادلات $x=۲-۳t$ و $y=۵+۲t$ و $z=t$ موازی باشد.

نکته: معادلات پارامتری و متقارن را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد.

مثال: معادلات پارامتری خط زیر را به صورت متقارن بنویسید. $x=t-۱\ ,\ y=۳t-۴\ ,\ z=۱-۲t$

مثال: معادلات پارامتری خط مقابل را بنویسید. $\dfrac{x}{۲}=\dfrac{y+۳}{۴}=۴z-۱$

مثال: بردار هادی خط $\dfrac{x-۵}{۳}=\dfrac{۲y+۱}{۴}=-z$ را بیابید.

مثال: روی هر یک از خط‌های زیر، دو نقطه‌ی دلخواه پیدا کنید.

الف) $\dfrac{x-۳}{۲}=\dfrac{y+۲}{-۴}=z$

ب) $x=t+۱$ و $y=-۲t-۲$ و $z=۴t-۵$

نکته: برای رسم نمودار خط در فضای سه بعدی، کافیست دو نقطه‌ی دلخواه از آن را پیدا کرده و به هم وصل کنیم.

نوشتن معادله‌ی خطی که از دو نقطه می‌گذرد: برای نوشتن معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲,z_۲)$ می‌گذرد، ابتدا بردار هادی خط را به صورت $u=\overrightarrow{AB}$ تعیین کرده و سپس با استفاده از یکی از نقاط A یا B، معادله‌ی خط را می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A=(۲,۵,-۱)$ و $B=(۴,۰,۲)$ بگذرد.

نوشتن معادله‌ی خطی که از یک نقطه بر یک خط عمود باشد: برای نوشتن معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی A بر خط d با بردار هادی u عمود باشد، ابتدا نقطه‌ی M را به صورت پارامتری بر حسب t روی خط d انتخاب

می‌کنیم. سپس از حل معادله‌ی $\overrightarrow{AM}.u=0$، مقدار t را به دست می‌آوریم که در نتیجه‌ی آن نقطه‌ی M و در نتیجه خط AM معلوم می‌شود.

مثال: نقطه‌ی $A=(5,4,3)$ و خط d به معادلات $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=z$ مفروض‌اند، از نقطه‌ی A خطی عمود بر d رسم کنید.

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط: فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط l برابر است با: $d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times u|}{|u|}$.

که در آن، P_0 یک نقطه‌ی دلخواه روی خط l و u بردار هادی خط l است.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(3,-1,4)$ را از خط به معادلات $x=-2+3t$ و $y=-2t$ و $z=1+4t$ به دست آورید.

فاصله‌ی بین دو خط موازی: برای به دست آوردن فاصله‌ی بین دو خط موازی، کافیست یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خط‌ها انتخاب کرده و فاصله‌ی آن نقطه را از خط دیگر به دست آوریم.

مثال: فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را به دست آورید.

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-2} \quad , \quad l_2:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$$

نکته: زاویه بین دو خط در فضا، همان زاویه‌ی بین بردارهای هادی دو خط می‌باشد.

وضعیت نسبی دو خط در فضا

دو خط l_1 و l_2 را با بردارهای هادی $u_1=(a_1,b_1,c_1)$ و $u_2=(a_2,b_2,c_2)$ در نظر می‌گیریم:

۱) دو خط l_1 و l_2 باهم موازی‌اند هرگاه: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

۲) دو خط l_1 و l_2 برهم عمودند هرگاه: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ یا $u_1.u_2=0$.

۳) دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند هرگاه یک و فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

۴) دو خط l_1 و l_2 متنافرند هرگاه نه موازی باشند و نه متقاطع.

اثبات متقاطع بودن دو خط غیر موازی

روش اول:

۱) هر دو خط را به صورت پارامتری می‌نویسیم. (یکی را بر حسب پارامتر t و دیگری را بر حسب پارامتر s می‌نویسیم)

۲) دستگاه دو معادله دو مجهولی مربوط به دو متغیر x و y را حل کرده و مقدار t و s را به دست می‌آوریم.

۳) اگر به ازای مقادیر به دست آمده برای t و s، مختص z نیز در هر دو خط برابر باشد، این دو خط باهم متقاطع‌اند، در غیر این صورت متنافرند.

روش دوم:

یکی از خط‌ها را به صورت متقارن نوشته و به جای x و y و z آن، معادلات پارامتری خط دوم را قرار می‌دهیم و

معادلات را دو به دو حل می‌کنیم. اگر t و sهای به دست آمده در هر دو دستگاه باهم برابر بودند، دو خط متقاطع‌اند؛ در غیر این‌صورت متنافرند.

مثال: ثابت کنید دو خط زیر متقاطع‌اند:

$$d:\begin{cases}x=2t+3\\ y=3t+5\\ z=2t+2\end{cases}\qquad d':\begin{cases}x=t\\ y=2t-1\\ z=-3t+11\end{cases}$$

مثال: نشان دهید دو خط زیر متنافرند:

$$d:\begin{cases}x=1-2t\\ y=t\\ z=5+4t\end{cases}\qquad d':\begin{cases}x=3+t\\ y=4+2t\\ z=-3t\end{cases}$$

صفحه در فضا

برای نوشتن معادله‌ی یک صفحه در فضا، باید مختصات یک نقطه از صفحه و همچنین یک بردار عمود بر آن صفحه (بردار نرمال) را داشته باشیم؛

* معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد و بر بردار $n=ai+bj+ck$ عمود باشد، از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

* اگر عبارت بالا ساده شود، معادله‌ی صفحه به فرم مقابل تبدیل می‌شود. $ax+by+cz+d=0$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(2,-1,4)$ بگذرد و عمود بر بردار $3i+j-6k$ باشد.

* معادله‌ی کلی صفحه‌ای که از مبدا مختصات می‌گذرد عبارت است از: $ax+by+cz=0$

معادله‌ی صفحه‌ای که سه نقطه‌ی آن معلوم است: برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که از سه نقطه‌ی A و B و C بگذرد، کافیست بردار نرمال را به صورت $n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ به دست آورده و با استفاده از یکی از نقاط، معادله‌ی صفحه را بنویسیم.

مثال: معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که ازسه نقطه‌ی $A=(2,-1,4)$ و $B=(5,3,5)$ و $C=(2,4,3)$ بگذرد.

معادله‌ی صفحه‌ای که از یک نقطه و یک خط بگذرد: برای نوشتن معادله‌ی معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی A و خط l بگذرد، ابتدا نقطه‌ی دلخواه B را روی خط l در نظر گرفته و بردار نرمال صفحه را به صورت $\overrightarrow{AB}\times u$ به دست می‌آوریم و با استفاده از یکی از نقاط، معادله‌ی صفحه را بنویسیم. (u بردار هادی خط l است)

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی گذرا ازنقطه‌ی $A=(1,-1,2)$ و خط $x+2=y+1=\frac{z+5}{2}$ را بنویسید.

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از دو خط موازی یا متقاطع: برای نوشتن معادله‌ی معادله‌ی صفحه‌ای که از دو خط موازی یا متقاطع l_1 و l_2 بگذرد، نقطه‌ی A را روی خط l_1 در نظر گرفته و بردار نرمال را به صورت $u_1\times u_2$ به دست می‌آوریم و با استفاده از نقطه‌ی A، معادله‌ی صفحه را بنویسیم. (u_1 و u_2 بردارهای هادی خط‌های l_1 و l_2 هستند)

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از یک نقطه و موازی یک صفحه: در این حالت، بردار نرمال صفحه‌ی خواسته شده همان بردار نرمال صفحه‌ی داده شده است.

معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از یک نقطه و عمود بر دو صفحه‌ی غیر موازی: در این حالت بردار نرمال صفحه‌ی خواسته شده برابر است با $n_1 \times n_2$. (n_1 و n_2 بردارهای نرمال دو صفحه‌ی داده شده هستند)

فاصله‌ی یک نقطه ازیک صفحه: فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ ازصفحه‌ی $ax+by+cz+d=0$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(-2,3,4)$ را از صفحه‌ی به معادله‌ی $5x-y+3z=6$ بیابید.

عمود مشترک دوخط متنافر: پاره‌خطی است که بر دو خط متنافر عمودباشد.

یافتن طول عمودمشترک دوخط متنافر (کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دوخط متنافر):

فرض کنیم دو خط l_1 و l_2 دارای بردارهای هادی u_1 و u_2 باشند. نقاط A و B را روی دو خط l_1 و l_2 انتخاب می‌کنیم و $\overrightarrow{AB}$ و همچنین $u=u_1\times u_2$ را به دست می‌آوریم. سپس طول عمود مشترک دو خط متنافر را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم.

$$D=\frac{|\overrightarrow{AB}.u|}{|u|}$$

مثال: طول عمود مشترک دو خط $L_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2$ و $L_2:x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ را بیابید.

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع: اگر دو صفحه متقاطع باشند، محل برخورد آن‌ها یک خط است که فصل مشترک دو صفحه نامیده می‌شود.

یافتن معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع: برای یافتن معادله‌ی خط فصل مشترک دو صفحه با بردارهای نرمال n_1 و n_2، بردار هادی خط را به صورت $u=n_1\times n_2$ به دست آورده و یک نقطه‌ی مشترک دلخواه روی هر دو صفحه پیدا می‌کنیم. (به یکی ازمتغیرها عدد می‌دهیم و دو متغیر بعدی را به دست می‌آوریم)

مثال: معادله‌ی فصل مشترک صفحه‌های $\Gamma_1: x-z=1$ و $\Gamma_2: 2x-3y+4z=2$ را بیابید.

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

۱) دو صفحه در فضا موازی اند، هرگاه بردارهای نرمال آن‌ها موازی باشند.

۲) دو صفحه در فضا متقاطع اند که در این صورت یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. (فصل مشترک)

۳) دو صفحه در فضا بر هم منطبق‌اند.

وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا: خط با بردار هادی u و صفحه‌ی با بردار نرمال n را در فضا در نظر می‌گیریم:

۱) خط و صفحه موازی اند هرگاه $n.u = ۰$. (بردارهای هادی و نرمال برهم عمود باشند)

۲) خط و صفحه متقاطع‌ند هرگاه یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند.

نکته: خط و صفحه برهم عمودند هرگاه $n \times u = ۰$. (بردارهای هادی و نرمال با هم موازی باشند)

یافتن نقطه‌ی تقاطع خط و صفحه: خط را پارامتری کرده و در معادله‌ی صفحه جایگذاری کرده و معادله‌ی به دست آمده را حل می‌کنیم و در نهایت پارامتر به دست آمده را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم.

مثال: نقطه‌ی تقاطع خط L با معادلات $\frac{x+۱}{۲} = \frac{y+۳}{۳} = -z$ را با صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $۳x - ۲y + ۴z = -۱$ را بیابید.

نکته: اگر دو صفحه متقاطع باشند، فصل مشترک آن‌ها یک خط خواهد بود. بنابر این معادلات خط را می‌توان با استفاده ازمعادلات دو صفحه‌ی متقاطع تعیین کرد.

مثال: معادلات متقارن خط زیر را بنویسید.

$$D: \begin{cases} x - y = ۰ \\ y + z = ۱ \end{cases}$$

نمونه سوالات امتحانی فصل ۲: معادلات خط و صفحه

۱. معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه‌ی $A=(-۲,۰,۳)$ و موازی خط $\frac{x+۲}{۵}=\frac{y-۳}{-۱}=z$ را بیابید.

۲. معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $p_۱=(۲,۳,-۱)$ و $p_۲=(۲,۳,۴)$ می‌گذرد.

۳. نشان دهید خط گذرنده از نقاط $(۰,۰,۵)$ و $(۱,-۱,۴)$ بر خط $\frac{x}{۷}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{z+۹}{۳}$ عمود است.

۴. a و b را طوری تعیین کنید تا نقطه‌ی $(a,b,۱)$ روی خط گذرا از نقاط $(۲,۵,۷)$ و $(۰,۳,۲)$ قرار گیرد.

۵. معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(۲,۱,۳)$ بگذرد و موازی خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{۱-y}{-۳}=z$ باشد.

۶. اگر محل تلاقی دو خط $d_۱:\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z-۱}{-۲}$ و $d_۲:\begin{cases}x-۲=-y\\ z=-۱\end{cases}$، نقطه‌ی A باشد. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A بگذرد و با محور xها موازی باشد.

۷. فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(۳,۰,۱)$ را از خط $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z}{۲}$ بنویسید.

۸. فاصله‌ی نقطه‌ی $P=(۱,۳,۲)$ را از خط $L:\begin{cases}y-z=۲\\ x+z=۰\end{cases}$ تعیین کنید.

۹. فاصله‌ی نقطه‌ی $(۲,۰,۱)$ را از خط $L:\begin{cases}x=-۲\\ y+۱=z\end{cases}$ تعیین کنید.

۱۰. فاصله‌ی دو خط موازی $L_۱:\frac{x}{۴}=\frac{y-۲}{-۲}=\frac{z-۳}{-۴}$ و $L_۲:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲}$ را بیابید. (خرداد ۸۲)

۱۱. نشان دهید دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۲}{-۱}$ و $L_۲:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{-۲}=\frac{z}{۲}$ متقاطع‌اند و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را بیابید.

۱۲. وضعیت نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲:\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ را بررسی کنید.

۱۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P_۰=(۲,-۱,۰)$ گذشته و بر صفحه‌ی $\Gamma:x+y-۲z=۴$ عمود باشد.

۱۴. خط L به معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=-z$ صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $۳x-۲y+۴z=-۱$ مفروض است.

الف) نقطه‌ی $P_۰$، نقطه‌ی تقاطع L و Γ را پیدا کنید.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی عمود بر L در نقطه‌ی $P_۰$ را پیدا کنید.

ج) معادله‌ی خط گذرا از $P_۰$ و عمود بر Γ را بنویسید.

۱۵. معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $P_۰=(\frac{۱}{۲},۰,۳)$ و عمود بر خط با معادلات $\frac{x+۱}{۴}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۵}$ را بنویسید.

۱۶. معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $P_۰=(۳,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶})$ و عمود بر خط $L:\begin{cases}x=t-۲\\ y=۲t+۱\\ z=۶t\end{cases}$ را بنویسید.

۱۷. معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی $P_۱:x+y+۴=۰$ و $P_۲:۲x+۳y-z+۹=۰$ را بنویسید.

۱۸. نقاط فصل مشترک صفحه‌های $P_۱:x+y=۱$ ، $P_۲:y+z=۲$ و $P_۳:x+z=۳$ را پیدا کنید.

۱۹. نقاط فصل مشترک صفحه‌های $P_1: x+y=1$ ، $P_2: y+z=2$ و $P_3: x+z=3$ را پیدا کنید.

۲۰. نقاط فصل مشترک صفحه‌های $P_1: x+y-z=2$ ، $P_2: -x+2y-z=3$ و $P_3: x-y-z=0$ را پیدا کنید.

۲۱. معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $A=(1,3,2)$ و خط $L: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=z$ را بنویسید.

۲۲. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط $A=(1,2,2)$ و $B=(2,-1,1)$ و $C=(0,1,-1)$ بگذرد.

۲۳. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه‌ی $A=(1,2,-1)$ و $B=(2,3,0)$ و $C=(-1,0,2)$ بگذرد.

۲۴. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از دو خط متقاطع $L_1: \frac{x-2}{2}=y+2=\frac{z-2}{-1}$ و $L_2: x-1=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ بگذرد.

۲۵. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $M_0=(1,2,1)$ گذشته و بر صفحه‌ی $\Gamma: 2x-y+2z=1$ عمود بوده و با خط $L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{1-z}{1}$ موازی باشد.

۲۶. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A=(0,1,2)$ و $B=(1,-2,1)$ گذشته و بر صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $2x-y+3z=1$ عمود باشد.

۲۷. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(-1,2,1)$ گذشته و بر دو صفحه‌ی $x-z=0$ و $2x+3y-z=1$ عمود باشد.

۲۸. معادله‌ی صفحه‌ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $(3,1,0)$ و $(5,-1,3)$ را پیدا کنید.

۲۹. فاصله‌ی نقطه‌ی $(3,-1,-2)$ را از صفحه‌ی $2x-y+3z=4$ بیابید.

۳۰. آیا چهار نقطه‌ی $(2,3,2)$، $(1,-1,-3)$، $(1,0,-1)$ و $(5,9,5)$ همگی روی یک صفحه قرار دارند؟

۳۱. وضعیت نسبی خط L به معادلات $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ و صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $2x+y-z=2$ را تعیین کنید.

۳۲. وضعیت نسبی خط L به معادلات $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{7}$ و صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $x-2y+2z=5$ را تعیین کنید.

۳۳. برای دو خط متنافر $L_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ و $L_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$، کوتاهترین فاصله (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.

فصل ۳: مقاطع مخروطی

دایره: دایره مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه‌ی ثابت O به نام مرکز، مقدار ثابتی باشد. (به آن مقدار ثابت شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم)

※ برای نوشتن معادله‌ی دایره، باید مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را داشته باشیم.

※ معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن، مبدا مختصات بوده و شعاع آن برابر با R باشد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$x^۲ + y^۲ = R^۲$$

※ معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن، (α,β) بوده و شعاع آن برابر با R باشد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$$ (فرم استاندارد)

※ معادله‌ی گسترده‌ی دایره به صورت زیر است: $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

که در آن: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و $R = \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}}$.

مثال: مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y = ۵$ را به دست آورید.

نکته: معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰$، آن‌گاه معادله‌ی فوق یک دایره را مشخص می‌کند.

۲) اگر $a^۲ + b^۲ - ۴c = ۰$، آن‌گاه معادله‌ی فوق یک نقطه را مشخص می‌کند.

۳) اگر $a^۲ + b^۲ - ۴c < ۰$، آن‌گاه معادله‌ی فوق یک مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند.

نکته: در معادله‌ی گسترده‌ی دایره ضریب x و y برابر است.

نکته: در معادله‌ی گسترده‌ی دایره، جمله‌ی شامل xy وجود ندارد.

مثال: مقدار عددی شعاع دایره‌ی $mx^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$ را بیابید.

نکته: اگر معادله‌ی دایره به فرم گسترده باشد می‌توان با مربع کامل کردن، آن را به فرم استاندارد تبدیل کرد.

مثال: معادله‌ی دایره‌ی $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۸x + ۴y - ۸ = ۰$ را به صورت استاندارد بنویسید.

بررسی وضعیت یک نقطه نسبت به دایره: اگر شعاع یک دایره برابر با R باشد و d فاصله‌ی یک نقطه از مرکز دایره باشد، در اینصورت:

۱) اگر $d > R$ آن‌گاه نقطه بیرون دایره قرار دارد.

۲) اگر $d = R$ آن‌گاه نقطه روی دایره قرار دارد.

۳) اگر $d < R$ آن‌گاه نقطه درون دایره قرار دارد.

نکته: اگر d فاصله‌ی نقطه‌ی A از مرکز دایره‌ی C باشد، آن گاه $C(A)=d^{۲}-R^{۲}$. یعنی اگر مختصات نقطه‌ی A را در دایره‌ی C قرار دهیم $d^{۲}-R^{۲}$ به دست می‌آید. بنابر این:

۱) اگر $C(A)>۰$ آن‌گاه نقطه بیرون دایره قرار دارد.

۲) اگر $C(A)=۰$ آن‌گاه نقطه روی دایره قرار دارد.

۳) اگر $C(A)<۰$ آن‌گاه نقطه درون دایره قرار دارد.

مثال: بررسی کنید نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ چه وضعیتی نسبت به دایره‌ی $C: x^{۲}+y^{۲}-۶x+۴y-۱=۰$ دارد.

نکته: فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره‌ی C از نقطه‌ی A برابر $d+R$ و فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره از A برابر $|d-R|$ است.

مثال: بیشترین و کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۲,-۳)$ را از دایره‌ی به معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}+۴x=۲$ را به دست آورید.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P=(x,y)$ را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها ازنقطه‌ی $A=(۲,۴)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $B=(۱,۲)$ باشد.

نکته: هر خط مماس بر دایره، به شعاع گذرنده از نقطه‌ی تماس عمود است.

نکته: هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره می‌گذرد.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات بنویسید که از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ بگذرد.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $A(۲,۷)$ و $B(۶,-۳)$ دو سر یک قطر آن باشند.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکزمبدا مختصات بنویسید که بر خط $۴x+۳y=۱۰$ مماس باشد.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ی $(۳,۴)$ بر دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۲۵$ مماس باشد.

مثال: از نقطه‌ی $(۳,۰)$ دو مماس بر دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۳$ رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.

بیضی: مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطه‌ی ثابت صفحه، برابر مقدار ثابتی باشد. این مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهیم.
دو نقطه‌ی ثابت را کانون‌های بیضی نامیده و آن‌ها را با F و F' و فاصله‌ی بین دو کانون را با $۲c$ نشان می‌دهیم.

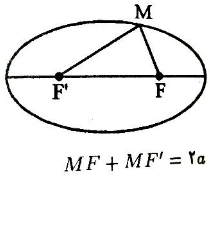
$$|MF'|+|MF|>F'F \Rightarrow ۲a>۲c \Rightarrow a>c$$

$A'A$ قطر بزرگ بیضی $=۲a$

$B'B$ قطر کوچک بیضی $=۲b$

$F'F$ فاصله‌ی بین دو کانون $=۲c$

$$a^{۲}-c^{۲}=b^{۲}$$



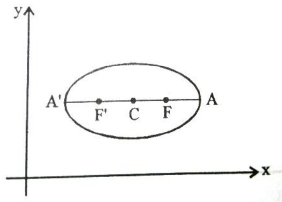
$MF+MF'=۲a$

نکته: برای نوشتن معادله‌ی بیضی، باید a و b و مختصات مرکز و همچنین افقی یا عمودی بودن بیضی معلوم باشد.

معادله‌ی بیضی افق (قطر بزرگ موازی محور xهاست):

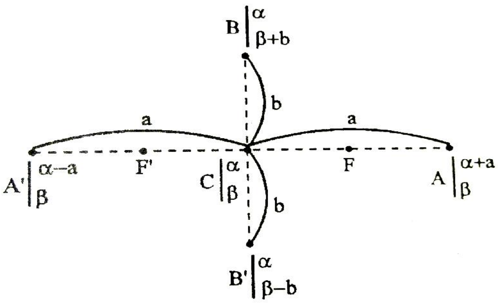
۱) معادله‌ی بیضی افقی به مرکز مبدا مختصات: $a > b$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

۲)معادله‌ی بیضی افقی به مرکز (α,β): $a > b$ $\quad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$



مثال: معادله‌ی یک بیضی افقی را بنویسید که مرکزآن $(2,-3)$ بوده و طول قطر بزرگ آن برابر ۸ و فاصله‌ی دو کانون آن برابر با ۶ باشد.

مختصات راس‌ها و کانون‌های بیضی افقی:



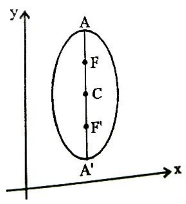
مثال: معادله‌ی یک بیضی به کانونهای $F'(0,1)$ و $F(4,1)$ را بنویسید که طول قطر بزرگ آن برابر با ۶ باشد.

مثال: معادله‌ی یک بیضی را بنویسید که دو خط به معادلات $x=-1$ و $y=3$، محورهای تقارن آن هستند و بر هر دو محورهای مختصات مماس است.

مثال: . بیضی به معادله‌ی $9x^2+16y^2=144$ را در نظر بگیرید:

مختصات نقاط برخورد با محور xها، کانون‌ها و طول قطر بزرگ و کوچک بیضی را به دست آورید.

معادله‌ی بیضی قائم (قطر بزرگ موازی محور yهاست):

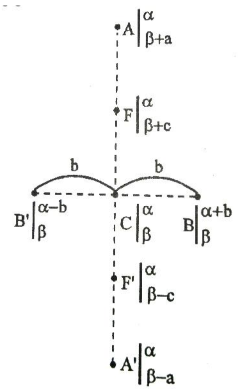


۱) معادله‌ی بیضی قائم به مرکز مبدا مختصات: $a > b$ $\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

۲) معادله‌ی بیضی قائم به مرکز (α,β): $a > b$ $\quad \frac{(x-\beta)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

مثال: معادله‌ی یک بیضی قائم به مرکز $C(2,-3)$ را بنویسید که طول قطر کوچک آن برابر با ۸ و طول قطر بزرگ آن برابر با ۱۰ باشد.

مختصات راس‌ها و کانون‌های بیضی قائم:



مثال: معادله‌ی یک بیضی را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(۲,-۳)$، فاصله‌ی کانونی آن ۲ و قطر کوچک آن برابر ۴ و محور کانونی آن موازی محور yها باشد.

مثال: مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $(۲,۰)$ برابر نصف فاصله‌ی آن‌ها از خط $x=۸$ باشد.

معادله‌ی گسترده‌ی بیضی: معادله‌ی گسترده‌ی بیضی به صورت زیر است: (A و B مخالف صفر اند)

$$Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰ \quad (A\neq B)$$

نکته: معادله‌ی به فرم بالا می‌تواند نشان‌دهنده‌ی یک بیضی، یک نقطه و یا مجموعه‌ی تهی باشد.

نکته: در بیضی‌های گسترده به فرم بالا، مرکز از رابطه‌ی $O(-\frac{C}{۲A},-\frac{D}{۲B})$ به دست می‌آید. به علاوه اگر $A>B$ بیضی قائم و در صورت $A<B$ بیضی افقی است. (به عبارت دیگر برای تعیین مرکز بیضی، یک بار نسبت به x مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم و یک بار نیز نسبت به y مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم)

نکته: اگر معادله‌ی بیضی به فرم گسترده باشد می‌توان با مربع کامل کردن آن را به فرم استاندارد تبدیل کرد.

مثال: مختصات مرکز، کانونها و رأس‌های بیضی به معادله‌ی $۹x^۲+۴y^۲-۱۸x-۱۶y=۱۱$ را به دست آورید.

مثال: کدام یک از معادلات زیر نشان دهنده‌ی یک بیضی و کدام‌یک نشان دهنده یک نقطه و کدام‌یک مجموعه‌ی تهی است؟

الف) $x^۲+۲y^۲+۸y+۱۰=۰$

ب) $x^۲+۳y^۲+۱۲y-۲x+۱۳=۰$

ج) $۲x^۲+۳y^۲-۴x+۶y-۱=۰$

خروج از مرکز بیضی: خروج از مرکز بیضی از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود: $(۰<e<۱)$ $e=\frac{c}{a}$ یا $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$.

مثال: طول قطرها و خروج از مرکز بیضی $۴x^۲+۹y^۲=۳۶$ را بیابید.

مثال: قطر بزرگ یک بیضی، دو برابر قطر کوچک آن است؛ خروج از مرکز آن را بیابید.

مثال: خروج از مرکز بیضی به معادله‌ی $x^۲+۴y^۲+۶x+۸y+۱۱=۰$ را به دست آورید.

مثال: بیضی به معادله‌ی $x^{۲}+۳y^{۲}-۴x+۱=۰$ در مستطیلی که اضلاعش موازی محورهای مختصات می‌باشد، محاط شده است. مساحت این مستطیل را بیابید.

※ **وتر کانونی بیضی**، پاره‌خطی است که در کانون بیضی، بر محور کانونی عمود شده و به بیضی محدود است.

نکته: طول وتر کانونی بیضی $\frac{۲b^{۲}}{a}$ است.

※ **وضعیت یک نقطه نسبت به بیضی:** فرض کنیم $E(x,y)=\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-۱$ باشد، آنگاه:

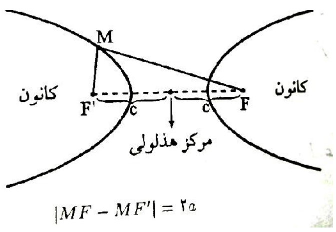
۱) نقطه‌ی $A(x_{۰},y_{۰})$ بیرون بیضی است اگر و تنها اگر $E(A)>۰$ به عبارتی: $\frac{x_{۰}^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y_{۰}^{۲}}{b^{۲}}>۱$

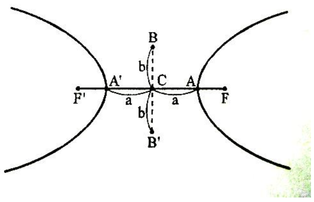
۲) نقطه‌ی $A(x_{۰},y_{۰})$ روی بیضی است اگر و تنها اگر $E(A)=۰$ به عبارتی: $\frac{x_{۰}^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y_{۰}^{۲}}{b^{۲}}=۱$

۳) نقطه‌ی $A(x_{۰},y_{۰})$ درون بیضی است اگر و تنها اگر $E(A)<۰$ به عبارتی: $\frac{x_{۰}^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y_{۰}^{۲}}{b^{۲}}<۱$

مثال: حدود m را طوری بیابید که نقطه‌ی $A(۱,۱-m)$ درون بیضی $۴x^{۲}+y^{۲}-x+۱۲y=۳$ باشد.

هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فاصله‌های این نقاط از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه، مقدار ثابتی باشد.





این مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهیم. دو نقطه‌ی ثابت را کانون‌های هذلولی نامیده و با F و F' نشان می‌دهیم. A' و A را **راس‌های کانونی** هذلولی می‌نامیم. خطی را که نقاط A',A,O,F',F روی آن قرار دارند، محور کانونی می‌نامیم. خطی را که در O بر محور کانونی عمود می‌شود **محور ناکانونی** می‌نامیم.

$A'A=۲a \quad , \quad FF'=۲c \quad , \quad c^{۲}-a^{۲}=b^{۲} \quad , \quad c>a$

※ برای نوشتن معادله‌ی هذلولی، باید مرکز هذلولی و مقادیر a و b و همچنین افقی یا عمودی بودن هذلولی معلوم باشند.

※ در هذلولی مقدار a می‌تواند بیشتر یا کمتر از b باشد.

معادله‌ی استاندارد هذلولی افقی (محور کانونی مواز محور xهاست):

۱) معادله‌ی هذلولی افقی که مرکز آن مبدا مختصات باشد: $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$

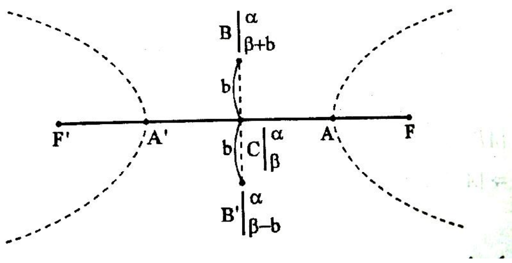
۲) معادله‌ی هذلولی افقی که مرکز آن (α,β) باشد: $\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱$

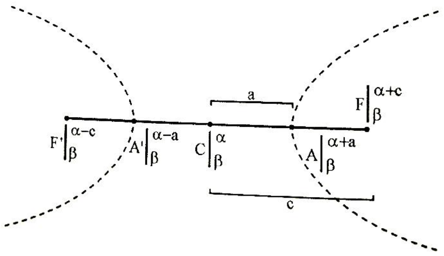
نکته: در معادله‌ی هذلولی، a^2 مخرج کسری است که اول نوشته می‌شود؛ به عبارت دقیق‌تر a^2 مخرج کسری است که ضریب آن مثبت است.

نکته: اگر ضریب $(x-\alpha)^2$ مثبت باشد، هذلولی افقی وگرنه قائم است.

مثال: معادله‌ی یک هذلولی افقی را بنویسید که مرکز آن $(0,5)$ بوده و فاصله‌ی دو راس کانونی آن ۴ و فاصله‌ی دو کانون آن ۶ باشد.

مختصات راس‌ها و کانون‌های هذلولی افقی:





مثال: معادله‌ی یک هذلولی را بنویسید که نقاط $(-1,2)$ و $(5,2)$ کانونها و $(0,2)$ و $(4,2)$ رأس‌های آن هستند.

مثال: فاصله‌ی دو کانون هذلولی $9x^2-4y^2=1$ را بیابید.

معادله‌ی استاندارد هذلولی قائم (محور کانونی موازی محور y هاست):

۱) معادله‌ی هذلولی قائم که مرکز آن مبدا مختصات باشد: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

۲) معادله‌ی هذلولی قائم که مرکز آن (α,β) باشد: $\dfrac{(y-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(x-\beta)^2}{b^2}=1$

مثال: معادله‌ی استاندارد یک هذلولی را بنویسید که کانون‌های آن $F(1,3+\sqrt{13})$ و $F'(1,3-\sqrt{13})$ بوده و فاصله‌ی بین دو راس A و A' برابر ۴ باشد.

نکته: اگر معادله‌ی هذلولی به فرم گسترده باشد می‌توان با مربع کامل کردن آن را به فرم استاندارد تبدیل کرد.

مثال: مختصات مرکز، کانون‌ها و راس‌های هذلولی $x^2-4y^2+6x+8y-11=0$ را بیابید.

خروج از مرکز هذلولی: خروج از مرکز بیضی از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود: $(e>1)$ $e=\dfrac{c}{a}$ یا $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$

مثال: معادله‌ی یک هذلولی را بنویسید که $C(-2,4)$ مرکز و $F(-2,7)$ یک کانون و $e=\dfrac{3}{2}$ خروج از مرکز آن باشد.

مجانب‌های هذلولی: برای تعیین مجانب‌های هذلولی، در سمت راست به جای عدد ۱ عدد صفر قرار داده و کسر با علامت منفی را به طرف دیگر انتقال داده و از طرفین جذر می‌گیریم که در نتیجه‌ی آن، معادلات دو مجانب هذلولی به دست می‌آید.

مثال: معادلات مجانب‌های هذلولی زیر را بنویسید: $\frac{(x-۳)^۲}{۴}-\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱$

مثال: معادلات مجانب‌های هذلولی $y^۲-۴x^۲-۲y-۱۶x-۱۹=۰$ را بنویسید.

نکته: در صورتی که مرکز هذلولی مبدا مختصات باشد:

معادلات مجانب‌های هذلولی افقی از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: $y=\pm\frac{b}{a}x$

معادلات مجانب‌های هذلولی قائم از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: $y=\pm\frac{a}{b}x$

نکته: مجانب‌های هذلولی در مرکز هذلولی متقاطع‌اند.

نکته: شیب مجانب‌های هذلولی افقی $\pm\frac{b}{a}$ و برای هذلولی قائم $\pm\frac{a}{b}$ است.

نکته: مجانب‌های هذلولی، قطرهای یک مستطیل هستند که ابعاد آن $۲a$ و $۲b$ می‌باشد.

رسم هذلولی: برای رسم هذلولی، ابتدا افقی یا عمودی بودن هذلولی و مرکز هذلولی و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم. سپس مستطیلی رسم می‌کنیم که مرکز آن، مرکز هذلولی بوده و اضلاع آن $۲a$ و $۲b$ باشد. قطرهای این مستطیل، مجانب‌های هذلولی هستند. بنابر این با استفاده از مجانب‌ها هذلولی را رسم می‌کنیم.

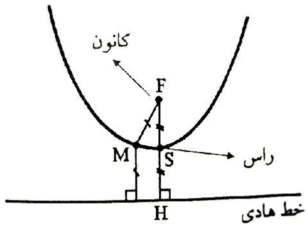
مثال: هذلولی $۴x^۲-y^۲=۱۶$ را رسم کنید.

وتر کانونی: پاره‌خطی که در کانون هذلولی بر محور کانونی عمود می‌شود و به هذلولی محدود است، وتر کانونی هذلولی نامیده می‌شود.

نکته: طول وتر کانونی هذلولی $\frac{۲b^۲}{a}$ است.

سهمی: سهمی مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت F و یک خط ثابت Δ به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی سهمی می‌گوییم.

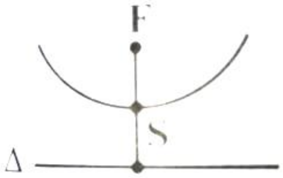
* فصله‌ی بین راس تا کانون با فاصله‌ی بین راس تا خط هادی برابر است و آن را با p نشان می‌دهیم. $۲p$ را که فاصله‌ی کانون تا خط هادی سهمی است، پارامتر هادی سهمی می‌گوییم.

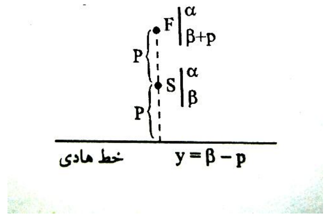


* برای نوشتن معادله‌ی سهمی باید راس سهمی، مقدار p و همچنین عمودی و افقی بودن سهمی و این که به کدام سمت باز می‌شود معلوم باشد. (سهمی به سمت کانون باز می‌شود)

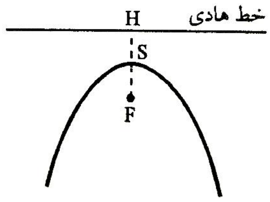
معادله‌ی سهمی قائم

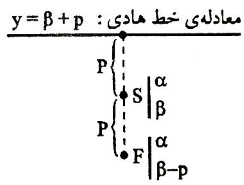
۱) معادله‌ی سهمی قائم که رو به بالا باز می‌شود: $(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$





۲) معادله‌ی سهمی قائم که رو به پایین باز می‌شود: $(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$





مثال: معادله‌ی یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطه‌ی $(2,3)$ بوده و خط هادی آن به معادله‌ی $y=4$ باشد.

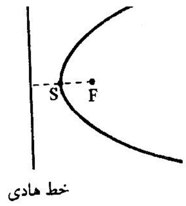
مثال: معادله‌ی سهمی را بنویسید که کانون آن $F(3,1)$ و راس آن $(3,-5)$ باشد.

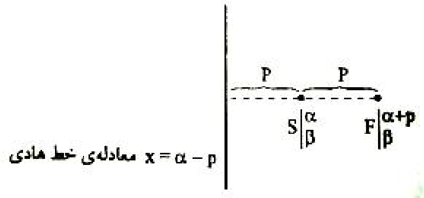
مثال: معادله‌ی یک سهمی را بنویسید که محور yها، محور تقارن آن بوده و راس آن بر مبدا مختصات واقع باشد و از نقطه‌ی $(-5,10)$ بگذرد.

مثال: سهمی به معادله‌ی $x^2 = -16y$ را رسم کرده و مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی آن را تعیین کنید.

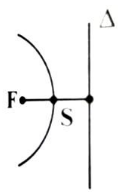
معادله‌ی سهمی افقی

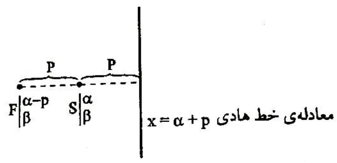
۱) معادله‌ی سهمی افقی که به سمت راست باز می‌شود: $(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$





۲) معادله‌ی سهمی افقی که به سمت چپ باز می‌شود: $(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$





مثال: معادله‌ی یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطه‌ی $F(2,1)$ بوده و خط هادی آن به معادله‌ی $x=4$ باشد.

مثال: معادله‌ی یک سهمی را بنویسید که محور xها، محور تقارن آن بوده و راس آن بر مبدا مختصات واقع باشد و از نقطه‌ی $(۴,۸)$ بگذرد.

مثال: سهمی به معادله‌ی $y^{۲} = ۴x$ را رسم کرده و مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی آن را تعیین کنید.

مثال: مختصات رأس، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $(y-۱)^{۲} = -(x-۲)$ را به دست آورید.

معادله‌ی گسترده‌ی سهمی:

مثال: مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی $x^{۲} + ۸x + ۸y = ۰$ را تعیین نموده و آن را رسم کنید.

مثال: مختصات رأس سهمی، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $x^{۲} + ۲y + ۴x + ۵ = ۰$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

مثال: به ازای چه مقداری از a، رأس سهمی $y^{۲} - a^{۲}y - ۴x + \frac{a^{۲}}{۴} + ۶a = ۰$ بر نیمساز ربع چهارم قرار می‌گیرد؟

محور کانونی: خط گذرا از نقاط S و F را محور کانونی می‌گوییم.

وتر کانونی: پاره‌خطی است که در کانون بر محور کانونی عمود است و دو سر آن بر سهمی محدود است.

* طول وتر کانونی برابر است با $۴p$.

نکته: خط هادی سهمی، مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که از آن‌ها می‌توان دو مماس عمود برهم بر سهمی رسم کرد.

دوران محورهای مختصات

* اگر معادله‌ی یک مقطع مخروطی فاقد جمله‌ی xy باشد، می‌گوییم این مقطع مخروطی به صورت استاندارد است.

(در این حالت محور کانونی با یکی از محورهای x یا y موازی است) $ax^{۲} + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰$

* اگر معادله‌ی یک مقطع مخروطی شامل جمله‌ی xy باشد، می‌گوییم این مقطع مخروطی به صورت غیر استاندارد است. (در این حالت محور کانونی با هیچ‌یک از محورهای x و y موازی نیست و با محور xها زاویه‌ای مثل θ می‌سازد) $ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰$

* اگر یک مقطع مخروطی به صورت استاندارد نباشد با دوران محورهای مختصات به اندازه‌ی θ می‌توان آن را به شکل استاندارد تبدیل کرد. بدین منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) زاویه‌ی دوران را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم. $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} \ , \ ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$

۲) به جای x و y در معادله‌ی مقطع مخروطی، مقادیر زیر را قرار داده و ساده می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

* به ماتریس $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$، ماتریس دوران به اندازه‌ی θ در جهت دایره‌ی مثلثاتی می‌گوییم.

یادآوری: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 2\theta = \frac{1}{1+\tan^2 2\theta}$

مثال: با انتخاب زاویه‌ی مناسب و با استفاده از دوران محورهای مختصات، نوع مقاطع مخروطی زیر را مشخص کنید.

۱) $xy = -3$

۲) $xy + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

۳) $x^2 + xy + y^2 = 6$

فصل ۴: ماتریس و دترمینان

ماتریس: ماتریس آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

به هر یک از a_{ij}ها یک درایه‌ی ماتریس A می‌گوییم.

ماتریس A که دارای m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس $m\times n$ نامیده می‌شود و به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ یا به طور خلاصه به صورت $A_{m\times n}$ نشان داده می‌شود.

ماتریس صفر: ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر باشد و آن را با نماد $O_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

ماتریس مربعی: ماتریسی است که در آن، تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است. ماتریس مربعی A از مرتبه‌ی n را به صورت A_n نشان می‌دهیم.

قطر اصلی یک ماتریس: در ماتریس مربعی $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، درایه‌های $a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{nn}$، درایه‌های قطر اصلی نامیده می‌شوند.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی A را قطری گوییم هرگاه تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشد. (البته درایه‌های قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی A را بالامثلثی گوییم هرگاه تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های قطر اصلی و بالای قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)

ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی A را پایین مثلثی گوییم هرگاه تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های قطر اصلی و پایین قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه‌ی $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ را مساوی گوییم هرگاه $\forall i\,,j\ ;\ a_{ij}=b_{ij}$. (به عبارت دیگر تمام درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند)

قرینه‌ی یک ماتریس: قرینه‌ی ماتریس A را با $-A$ نشان دهیم و برای تعیین آن باید تمام درایه‌های ماتریس A را قرینه کنیم.

جمع و تفریق ماتریس‌ها: مجموع و تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود. (درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر باهم جمع یا تفریق می‌کنیم)

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$A-B=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]_{m\times n}$$

ضرب یک عدد در یک ماتریس: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ یک ماتریس و λ یک عدد حقیقی باشد، ضرب عدد حقیقی λ در ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود. (λ را در تک تک درایه‌های ماتریس A ضرب می‌کنیم)

$$\lambda A=\left[\lambda a_{ij}\right]_{m\times n}.$$

قضیه: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ و $C=\left[c_{ij}\right]_{mn}$ سه ماتریس هم‌مرتبه باشند و r و s دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

۱) $A+B=B+A$

۲) $(A+B)+C=A+(B+C)$

۳) $A+O=O+A=A$

۴) $A+(-A)=-A+A=O$

۵) $r(A+B)=rA+rB$

۶) $(r+s)A=rA+sA$

۷) $(rs)A=r(sA)$

۸) $۱A=A$

ضرب ماتریس‌ها: ضرب دو ماتریس وقتی امکان‌پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. $A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$.

نکته: $A(B+C)=AB+AC$

مثال: گر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۲}+AB+۲B$ را بیابید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۲}+AB$ را به دست آورید.

ماتریس همانی: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن یک، و بقیه‌ی درایه‌های آن صفر باشد. ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n را با I_n نشان می‌دهیم. $I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$, $I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

نکته: $AI=IA=A$

ترانهاده‌ی یک ماتریس: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، ترانهاده‌ی ماتریس A برابر است با ماتریسی مانند $A^t=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ به طوری که $b_{ij}=a_{ji}$. (به عبارت دیگر، برای تعیین A^t، کافی است جای سطر و ستون‌های ماتریس A را عوض کنیم)

مثال: ترانهاده‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۷ & -۳ \end{bmatrix}$ را بنویسید.

قضیه: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ دو ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n باشند و r یک عدد حقیقی باشد، در این صورت:

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$

۲) $(rA)^t=rA^t$

۳) $(AB)^t=B^tA^t$

۴) $(A^t)^t=A$

۵) $(A^n)^t=(A^t)^n$

مثال: در صورتی که $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^۳-A^t+۲I$ را به دست آورید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $۳A^۲+AA^t$ را بیابید.

مثال: از تساوی ماتریسی مقابل، x را بیابید:
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$$

ماتریس خود توان: اگر ماتریسی در شرط $A^۲=A$ صدق کند، خودتوان نامیده می‌شود. (در واقع نه فقط توان دوم، بلکه هر توانی از آن با خودش برابر است)

مثال: ماتریس‌های زیر خودتوان هستند:
$$A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس پوچ‌توان: ماتریسی است که خودش غیر صفر است ولی توانی از آن برابر صفر است.

مثال: ماتریس‌های زیر پوچ‌توان هستند:
$$B=\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

نکته: اتحادهای جبری در ماتریس‌ها برقرار نیستند.

نکته: در حالت کلی $(AB)^n\neq A^nB^n$.

ماتریس متقارن: ماتریس مربعی A را متقارن گوییم هرگاه $A=A^t$. (درایه‌های ماتریس متقارن نسبت به قطر اصلی تقارن دارند)

مثال: فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی و متقارن از مرتبه‌ی ۳ باشند و داشته باشیم $AB=BA$. ثابت کنید ماتریس AB متقارن است.

مثال: اگر A و B دو ماتریس متقارن از مرتبه‌ی ۳ باشند و AB نیز متقارن باشد، ثابت کنید $AB=BA$.

ماتریس پادمتقارن: ماتریس مربعی A را متقارن گوییم هرگاه $A=-A^t$. (درایه‌های قطر اصلی ماتریس پادمتقارن صفر بوده و درایه‌های واقع بر بالای قطر اصلی و زیر قطر اصلی نسبت به قطر اصلی قرینه‌ی یکدیگرند)

نکته: ماتریس $A+A^t$ ماتریسی متقارن و ماتریس $A-A^t$ ماتریسی پادمتقارن است.

نکته: هر ماتریس مربعی را می‌توان با فرمول زیر، به صورت مجموع دو ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشت.

$$A=\frac{۱}{۲}(A+A^t)+\frac{۱}{۲}(A-A^t)$$

مثال: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.

مثال: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ -۳ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.

دترمینان ماتریس‌های ۲×۲: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که آن را با نماد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یا $|A|$ نشان می‌دهیم، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. $|A|=ad-bc$

کهاد: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریس دلخواه باشد، در این صورت ijامین کهاد ماتریس A را که با M_{ij} نشان می‌دهیم، ماتریسی ۲×۲ تعریف می‌کنیم که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به دست می‌آید.

همسازه: فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریس دلخواه باشد، در این صورت ijامین همسازه‌ی ماتریس A را که با A_{ij} نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می شود. $A_{ij}=(-۱)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$. که در آن $\left|M_{ij}\right|$ دترمینان ماتریس ۲×۲، M می‌باشد.

دترمینان ماتریس‌های ۳×۳: دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ را معمولا به یکی از دو روش زیر به دست می‌آوریم.
(روش‌های دیگری نیز با توجه به ویژگی‌های دترمینان وجود دارد)

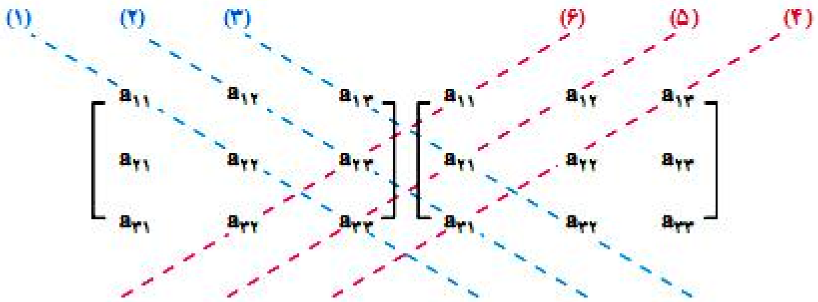
۱) روش بسط دادن نسبت به یک سطر یا ستون: دترمینان یک ماتریس ۳×۳ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های یک سطر (ستون) در همسازه‌های خود آن‌ها.

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ را یک بار با بسط نسبت به سطر اول و یک بار نیز با بسط نسبت به سطر دوم حساب کنید.

نکته: $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ معادله‌ی خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد.

نکته: مساحت مثلث به رئوس $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ و $(x_۳,y_۳)$ برابر است با $S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$.

۲) روش ساروس: در این روش ماتریس را دو بار کنار هم می‌نویسیم و دترمینان را به صورت زیر تعیین می‌کنیم.



$$|A|=(a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}+a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}+a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲})-(a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}+a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}+a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱})$$

مثال: دترمینان ماتریس مقابل را با روش ساروس محاسبه کنید: $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های ۳×۳:

۱) اگر تمام درایه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی، صفر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & b \\ c & ۰ & d \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$، آن گاه $|A|=۰$

۲) اگر درایه‌های دو سطر (ستون) ماتریسی برابر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۷ \\ ۴ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ & -۷ \end{bmatrix}$، آن گاه $|A|=۰$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} ۱ & x & x^{۲} \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{vmatrix}=۰$ کدامند؟

۱) ۱و۲ ۲) ۳و۱ ۳) ۳و۲ ۴) ۳و۲و۱

۳) اگر درایه‌های یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۲ \\ -۳ & ۹ & -۶ \end{bmatrix}$، آن گاه $|A|=۰$

۴) دترمینان هر ماتریس مثلثی، برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی آن است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۶ \\ ۰ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، آن گاه $|A|=۴(-۱)(۲)=-۸$

۵) اگر دو سطر (ستون) ماتریسی تعویض شوند، دترمینان آن قرینه می‌شود.

مثال: اگر $\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}=k$، دترمینان $\begin{vmatrix} a_۳ & a_۲ & a_۱ \\ b_۳ & b_۲ & b_۱ \\ c_۳ & c_۲ & c_۱ \end{vmatrix}$ چقدر است؟

۶) اگر یک سطر (ستون) یک ماتریس در عددی مثل λ ضرب شوند، دترمینان ماتریس نیز در λ ضرب می‌شود.

۷) اگر تمام درایه‌های ماتریسی ۳×۳ در λ ضرب شوند، دترمینان ماتریس در $\lambda^{۳}$ ضرب می‌شود.

۸) اگر در یک ماتریس، حاصل‌ضرب درایه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر اضافه کنیم تا ماتریس جدید به دست آید، آن‌گاه دترمینان ماتریس جدید با دترمینان ماتریس اولیه برابر است.

مثال: اگر $\begin{vmatrix} m & -۲ & n+۱ \\ ۳ & ۲m & n \\ p & ۱ & q \end{vmatrix}=۳$، مقدار $\begin{vmatrix} ۲m & -۴ & ۲n+۲ \\ ۴m+۳ & ۲m-۸ & ۵n+۴ \\ p+۳ & ۲m+۱ & q+n \end{vmatrix}$ چقدر است؟

نکته: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و

$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ka+d & kb+e & kc+f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ kd+a & ke+b & kf+c \\ g & h & i \end{bmatrix}$

در این صورت $|A|=|B|$ ولی $|C|\neq|A|$ در واقع $|C|=k\,|A|$.

مثال: مقدار $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$ را حساب کنید.

۹) اگر A ماتریسی باشد که سطر iام آن به صورت

$$b_{i۱}+c_{i۱} \quad b_{i۲}+c_{i۲} \quad b_{i۳}+c_{i۳}$$

باشد. اگر B و C را ماتریس‌هایی در نظر بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالا سطر iام، با سطرهای A یکی باشد و سطر iام B

$$b_{i۱} \quad b_{i۲} \quad b_{i۳}$$

و سطر iام C

$$c_{i۱} \quad c_{i۲} \quad c_{i۳}$$

باشد، آن‌گاه $|A|=|B|+|C|$

۱۰) دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده‌ی آن برابر است. $|A^t|=|A|$

مثال: فرض کنید A و B دو ماتریس ۳×۳ باشند که A متقارن و B پادمتقارن است، ثابت کنید:

$$|A+B|=|A-B|$$

اثبات:

$$(A+B)^t=A^t+B^t=A-B \Rightarrow |(A+B)^t|=|A-B| \Rightarrow |A+B|=|A-B|$$

۱۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آن‌گاه $|AB|=|A||B|$

نکته: $|A+B|\neq|A|+|B|$

۱۲) اگر A ماتریسی مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$، دترمینان $(A^t)^۲$ را بیابید.

۱۳) اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^n|A|$.

مثال: ماتریس A از مرتبه‌ی ۳ و دترمینان آن برابر ۲ است. دترمینان ماتریس $۴A$ چقدر است؟

مثال: به کمک ویژگی‌های دترمینان ثابت کنید: $\begin{vmatrix} ۱+x & y & z \\ x & ۱+y & z \\ x & y & ۱+z \end{vmatrix}=۱+x+y+z$.

مثال: بدون بسط دترمینان و با استفاده از ویژگی‌های دترمینان، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & x^{۲} & -۳ \\ ۱ & y & y^{۲} & -۳ \\ ۱ & z & z^{۲} & -۳ \end{vmatrix} = (z-y)(y-x)(z-x)$$

مثال: بدون بسط و با استفاده از ویژگی‌های دترمینان ثابت کنید: $\begin{vmatrix} ۱۰۰۰ & ۱۰۰۱ & ۱۰۰۲ \\ ۱۰۰۳ & ۱۰۰۴ & ۱۰۰۵ \\ ۱۰۰۶ & ۱۰۰۷ & ۱۰۰۸ \end{vmatrix} = ۰$.

مثال: با استفاده از ویژگی‌های دترمینان و بدون بسط، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & ۲ & ۲ \\ ۲ & a & ۲ \\ ۲ & ۲ & a \end{vmatrix} = (a+۴)(a-۲)^{۲}$$

مثال: به کمک ویژگی‌های دترمینان ثابت کنید: $\begin{vmatrix} ۱ & x & ۲xy \\ ۱ & ۲y & xz \\ ۱ & z & ۲xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & x & x^{۲} \\ ۱ & ۲y & ۴y^{۲} \\ ۱ & z & z^{۲} \end{vmatrix}$

مثال: اگر $۸ = \begin{vmatrix} ۱ & b & a+۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} ۱ & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}$ را بیابید.

نکته: ماتریس $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ در اثر روی نقاط $R^{۲}$، آن‌ها را به اندازه‌ی θ در جهت مثلثاتی حول مبدا مختصات دوران می‌دهد. به ماتریس فوق ماتریس دوران می‌گوییم.

نکته: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۰}$ را محاسبه کنید.

مثال: با استفاده از دوران، حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}^{۱۳}$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۰۰}$ را محاسبه کنید.

فصل ۵: دستگاه معادلات خطی

ماتریس وارون‌پذیر: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد. اگر ماتریس مربعی B موجود باشد به طوری که $AB = BA = I$، آن‌گاه می‌گوییم A وارون‌پذیر است و B را وارون A می‌نامیم.

نکته: اگر A و B مربعی باشند، برقراری یکی از تساوی‌های $AB = I$ و $BA = I$ برای این‌که A و B وارون یک‌دیگر باشند، کافی است.

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارون‌پذیر است. در این صورت وارون A منحصر به فرد است.

* وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم. بنابر این $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارون‌پذیر است. در این صورت $|A| \neq 0$.

مثال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & m+1 \\ 2m & m+3 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقادیر m رابیابید.

مثال: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارون‌پذیر است. ثابت کنید: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

مثال: ماتریس A در شرط $A^2 = 2A + I$ صدق می‌کند. وارون ماتریس A را بیابید.

مثال: اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند به طوری که $A + B = AB$، ثابت کنید با فرض وارون‌پذیری A، ماتریس B نیز وارون‌پذیر است و داریم $A^{-1} + B^{-1} = I$.

اثبات: فرض کنیم A^{-1} وارون A باشد، طرفین فرض را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم در نتیجه:

$$A^{-1}(A+B) = A^{-1}(AB) \Rightarrow A^{-1}A + A^{-1}B = (A^{-1}A)B \Rightarrow I + A^{-1}B = IB$$

$$\Rightarrow B - A^{-1}B = I \Rightarrow B(I - A^{-1}) = I$$

چون $B(I - A^{-1}) = I$، پس B وارون‌پذیر است و وارون آن ماتریس $I - A^{-1}$ است. یعنی $B^{-1} = I - A^{-1}$

در نتیجه $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} + I - A^{-1} = I$.

مثال: اگر ماتریس مربعی A در شرط $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I = 0$ صدق کند، به طوری که α و β γ اعداد حقیقی دلخواه باشند و $\gamma \neq 0$ باشد، وارون ماتریس A را بیابید.

نکته: فرض کنیم A و B ماتریس‌های مربعی وارون‌پذیر باشند و λ یک عدد حقیقی غیر صفر باشد. در این صورت:

۱) AB وارون‌پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

۲) A^t وارون‌پذیر است و $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۳) λA وارون‌پذیر است و $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

۴) $(A^{-1})^{-1} = A$

روش تعیین وارون ماتریس‌های ۲×۲: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از رابطه‌زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ را بیابید.

روش تعیین وارون ماتریس‌های ۳×۳: وارون ماتریس ۳×۳ را به دو روش می‌توان حساب کرد:

روش اول) ماتریس A را نوشته و سمت راست آن ماتریس همانی ۳×۳ را می‌نویسیم. با استفاده از اعمال زیر، ماتریس A را به همانی تبدیل می کنیم. در این صورت ماتریس سمت راست A^{-1} خواهد بود.

۱) ضرب (تقسیم) یک عدد در یک سطر.

۲) جمع و تفریق دو سطر و قرار دادن آن به جای یکی از سطرها.

۳) تعویض جای دو سطر.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

روش دوم) در این روش مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ماتریس همسازه را می‌سازیم.

۲) ترانهاده‌ی ماتریس همسازه (ماتریس الحاقی) را می یابیم.

۳) درایه‌های آن را به دترمینان ماتریس تقسیم می‌کنیم.

❋ به طور خلاصه اگر $A^{-1}=\left[a'_{ij}\right]$ باشد، آن‌گاه $a'_{ij}=\frac{A_{ji}}{|A|}$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌ی سطر اول و ستون سوم از ماتریس A^{-1} را بیابید.

حل: $a'_{۱۳}=\frac{A_{۳۱}}{|A|}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$

دستگاه معادلات خطی سه معادله‌ی سه مجهولی

یک دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

به ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$، ماتریس ضرایب و به ماتریس $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و به ماتریس $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ مقادیر سمت راست می‌گوییم.

با قراردادهای فوق، دستگاه معادلات خطی سه معادله‌ی سه مجهولی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی به شکل زیر نمایش داد. $AX = B$.

در صورتی که b_1, b_2, b_3 همگی برابر صفر باشند، دستگاه را همگن گوییم.

حل دستگاه معادلات خطی سه معادله‌ی سه مجهولی: دستگاه را می‌توان به یکی از روش زیر حل کرد.

۱) **روش کرامر:** فرض کنیم $A_j \ , \ j = 1,2,3$ ماتریسی 3×3 باشد که از تعویض ستون j ام A با مقادیر سمت راست به دست آمده باشد، در این صورت:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ را به کمک دستور کرامر حل کنید.

۲) روش حذفی گاوس: در این روش، ابتدا ماتریس ضرایب را نوشته و ماتریس مقادیر سمت راست را در طرف راست ماتریس ضرایب می‌نویسیم و با استفاده از قواعد زیر، ماتریس ضرایب را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم. سپس از عملیات برگشتی از پایین به بالا جواب را پیدا می‌کنیم.

الف) اگر طرفین یکی از معادلات را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم، جواب دستگاه تغییری نمی‌کند.

ب) اگر طرفین یکی از معادلات را به معادله‌ی دیگری بیفزاییم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند.

ج) اگر جای دو معادله را عوض کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند.

مثال: دستگاه معادلات مقابل را از روش حذفی گاوس حل کنید: $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 8 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

مثال: دستگاه مقابل را به روش حذفی گاوس حل کنید:
$$\begin{cases} x+y+z=۴ \\ x-y+۲z=۱ \\ ۳x+۴y-۶z=۵ \end{cases}$$

۳) روش حذفی گاوس – جردن: این روش شبیه روش حذفی گاوس است با این تفاوت که در این روش باید تمام عناصر غیر از قطر اصلی در هر ستون، به صفر تبدیل شود.

مثال: دستگاه معادلات مقابل را به روش حذفی گاوس - جردن حل کنید.
$$\begin{cases} x_۱-x_۲+x_۳=۳ \\ -x_۱+x_۳=-۴ \\ ۲x_۱+x_۲-x_۳=۱۲ \end{cases}$$

پایانی اول	بارم	پایانی دوم	بارم
فصل ۱: بردارها	۷	فصل ۱: بردارها	۲
فصل ۲: معادلات خط و صفحه	۶	فصل ۲: معادلات خط و صفحه	۱/۵
فصل ۳: مقاطع مخروطی - تا ابتدای بخش انتقال محورهای مختصات	۷	فصل ۳: مقاطع مخروطی - تا ابتدای بخش انتقال محورهای مختصات	۱/۵
		فصل ۳: مقاطع مخروطی - از ابتدای بخش انتقال محورهای مختصات تا پایان فصل سوم	۴
		فصل ۴: ماتریس و دترمینان	۶
		فصل ۵: دستگاه معادلات خطی	۵
جمع	۲۰	جمع	۲۰