



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

جزوه آموزش

حسابان

یازدهم ریاضی

کارک از استاد بابالویان



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل اول : جبر و معادله

درس اول : مجموعه جملات دنباله حسابی و هندسی

درس دوم : معادلات درجه دوم

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

درس اول : مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی :

یه روز معلمی از بچه های کلاسش می خواد که اعداد ۱ تا ۱۰۰ رو جمع بزنن و پس از چند دقیقه دانش آموزی به نام گاوس (که بعد ها ریاضی دان بزرگی شد) این کارو انجام داد که باعث حیرت معلم شد . روش دانش آموزو ببینید :

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + 100 \\ 100 + 99 + \dots + 1 \\ \hline 101 + 101 + \dots + 101 = 100 \times 101 \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} \end{array}$$

پس در حالت کلی میشه گفت :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین : با روش گاوس فرمولی برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی به جمله اول a و قدر نسبت d پیدا کنید .

$$S_n = a + a + d + a + 2d + \dots + a + (n-1)d \quad \text{اینم کمک من به شما :}$$

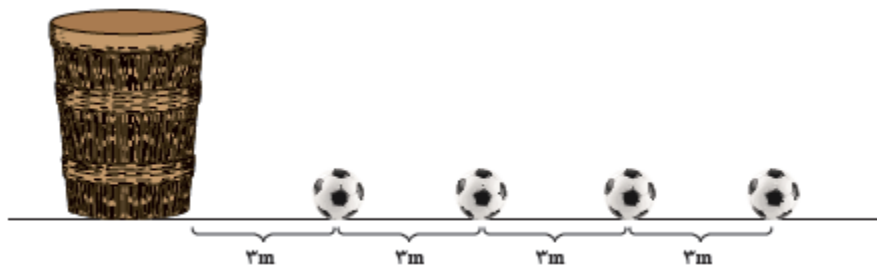
حالا با توجه به فرمول جمله آخر دنباله ، فرمولی که بدست آوردید رو بر حسب جمله آخر دنباله بنویسید .

تمرین: مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله ... و ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳ را بدست آورید.

تمرین: مجموع همه عدد های طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را حساب کنید.

تمرین: مجموع همه عدد های دو رقمی که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۲ دارند را بیابید.

تمرین: در یک مسابقه به صورت شکل زیر باید شرکت کننده در مدت زمان مشخص به طور مکرر از کنار سبد حرکت کرده و توپ اول را برداشته و بازگردد و درون سبد بیندازد. اگر شخصی در پایان ۱۵۳۸ متر را طی کرده باشد. چند توپ را داخل سبد انداخته است؟



نکته : هرگاه مجموع $n-1$ جمله اول را از مجموع n جمله اول کم کنیم جمله n ام باقی می ماند : $S_n - S_{n-1} = a_n$

در ضمن مجموع یک جمله اول در واقع همان جمله اول است : $S_1 = a$

تمرین : در یک دنباله حسابی $S_n = 5n^2 - 4n$ است . قدر نسبت دنباله و جمله دهم را مشخص کنید .

مجموع جملات دنباله هندسی :

یه روز مخترع شطرنج (این بازی رو به شاه نشون میدی و شاه که از این بازی خوشش اومده بود بهش میگه هر چی بخواد می تونه به عنوان جایزه درخواست کنه و اون شخص می خواد که برای خونه اول شطرنج بهش یه دونه گندم و برای خونه دوم ۲ تا و برای خونه سوم ۴ تا و به همین ترتیب برای هر خونه بعدی هم دو برابر خونه قبلی بهش دونه گندم بده . شاه با ساده لوحی دستور میده بهش یه کوئی گندم بدن ولی اون قبول نمیکنه و مقدار دقیق اون گندم ها رو میخواد و بعد از محاسبات ریاضیدانان اون زمون مشخص میشه در کل دنیا این مقدار دونه گندم پیدا نمیشه .

حتماً متوجه شدید که داستان قبل در مورد مجموع جملات دنباله هندسی هستش ، حالا بیایید یه فرمول برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی بدست بیاریم تا بتونیم مساله رو حل کنیم :

اگر مجموع جملات رو به صورت زیر بنویسم :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

و راهنماییتون کنم که یار کل این عبارت رو در q ضرب کنید به نظرتون برای ادامه چه کاری میشه کرد تا به عبارت ساده تری برسیم ؟

تمرین : مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی زیر چقدر است ؟

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots$$

تمرین : اگر یک لایه محافظتی خاص بتواند نصف اشعه خطرناک رادیو اکتیو را جذب کند . حداقل چند لایه نیاز است تا لااقل 97 درصد از شدت اشعه را کاهش دهد ؟

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \quad \text{کمک من :}$$

تمرین : در دنباله ای هندسی $4 - 2^{n+2} = S_n$ است . قدر نسبت دنباله را بیابید .

تمرین : حاصل عبارت $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)(1 - x + x^2 - \dots + x^6)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است ؟

تمرین : تمرینات صفحه ۶ کتاب را حل کنید .

درین دوم : معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم :

سال قبل دیدیم که فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جواب های زیر رو به ما داد :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالا با جمع و ضرب و تفریق کردن این جواب ها رابطه ای بین ریشه های معادله درجه دوم و ضرایب معادله پیدا کنید :

حالا فرض کنید جواب های یه معادله درجه دوم رو داریم و میخوایم خود معادله رو بنویسیم به نظرتون چیکار باید کرد ؟
کمک من به شما اینه که بگم یه معادله درجه دوم رو در حالت کلی در نظر بگیرید و کلتشو بر a تقسیم کنید حالا به نظرتون ضرایب آشنا نیستن ؟

تمرین : اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشد مقدار $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید .

تمرین : در معادله $x^2 - 6x + 3 = 0$ مقدار $x_1^2 + x_2^2$ را بدست آورید . (توجه : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$)

تمرین: اگر x_1, x_2 ریشه های معادله $x^2 - 4\sqrt{3}x - 17 = 0$ باشند، مقدار $|x_1 - x_2|$ را بیابید.

تمرین: در معادله $x^2 - (m+1)x - 8 = 0$ رابطه $x_1 = x_2^2$ بین ریشه ها برقرار است. مقدار m را بیابید.

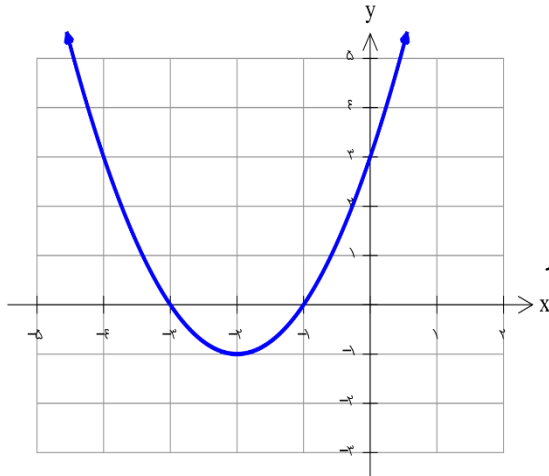
تمرین: در معادله $x^2 - mx + m - 1 = 0$ یکی از جواب ها عکس و قرینه و جواب دیگر است m . را بیابید.

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $3 - 2\sqrt{5}$ و $3 + 2\sqrt{5}$ باشد.

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن نصف ریشه های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشد.

تمرین: محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۳۸ و ۸۴ است. طول و عرض آن را بیابید.

صفرهای تابع :



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبرو رسم شده است .

الف) معادله $f(x) = 0$ را حل کنید .

ب) چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور طول ها وجود دارد ؟

برای هر تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ رو در صورت وجود، صفرهای تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x ها است .

نکته : اگر $x = a$ یکی از صفرهای تابع f باشد حتماً تابع f عاملی به صورت $(x - a)$ داره . در نتیجه برای به سهمی

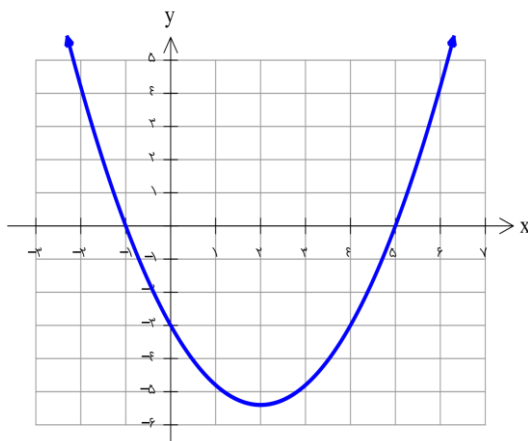
اگر x', x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشن، همیشه تابع رو به صورت زیر نوشت :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

اثبات :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(x^2 - Sx + P) \\ &= a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'') \\ &= a(x - x')(x - x'') \end{aligned}$$

تمرین : اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد . ضابطه سهمی را بنویسید .



تمرین: $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 - kx^2 - x + 2$ است. k و صفرهای دیگر تابع را بیابید.
راهنمایی: تابع دارای عامل $(x - 1)$ است و با تقسیم می توان عوامل دیگر را یافت.

تمرین: تمام صفرهای تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) + 3$ را بیابید.

تمرین: تمام صفرهای تابع $f(x) = x^4 - 10x^2 + 16$ را بیابید.

تمرین: بدون حل معادله و فقط به کمک Δ, P, S تعداد و علامت صفرهای توابع زیر را مشخص کنید.

$$y = x^2 - 7x + 12$$

$$y = 2x^2 - x - 6$$

$$y = x^2 + x + 1$$

تمرین : به ازای چه مقادیری از m معادله $x^2 + (m-4)x + 2m+6 = 0$ دو ریشه مثبت دارد ؟

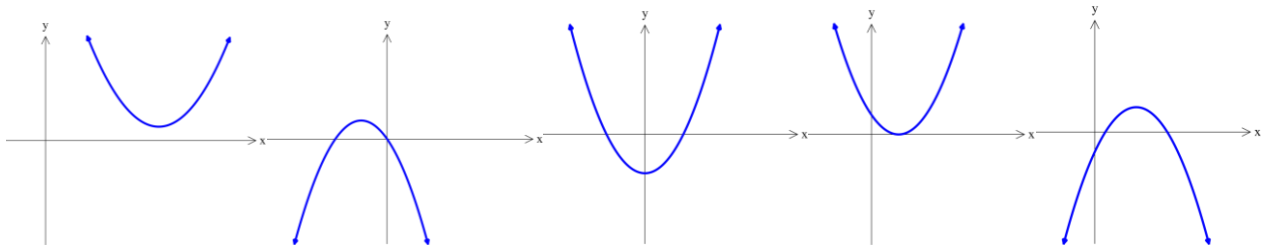
تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آق :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی دارد یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبت و اگر به سمت پایین باشن a منفیه .

و از اونجایی که $f(0) = c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل برخورد تابع با محور عرض ها ، علامت c رو تشخیص بدیم .

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

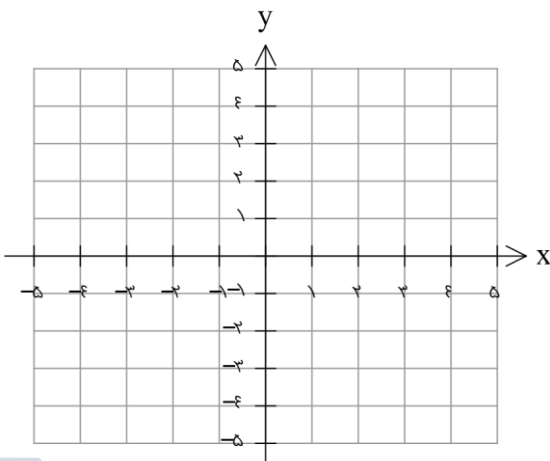
تمرین : نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند ، علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید .



روش هندسی حل معادلات :

الف) معادله $\frac{1}{4}x + 1 = (x-1)^2$ رو تو چرک نویس حل کنید .

ب) توابع $f(x) = (x^2-1)^2$ و $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ رو رسم کنید .

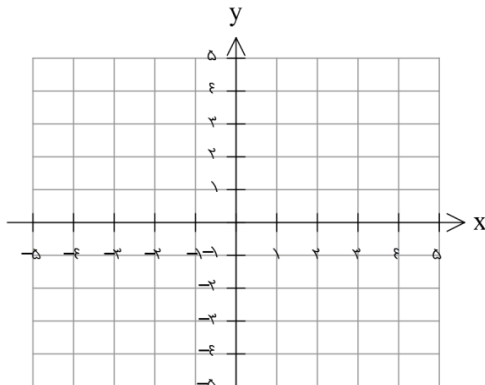


ج) جواب های معادله قسمت الف و طول محل برخورد نمودار های قسمت ب با هم چه ارتباطی دارن ؟

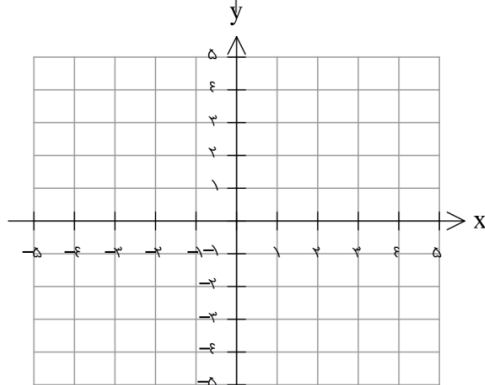
نتیجه :

تمرین : تعداد و مقدار ریشه های معادله های زیر را به روش هندسی بدست آورید .

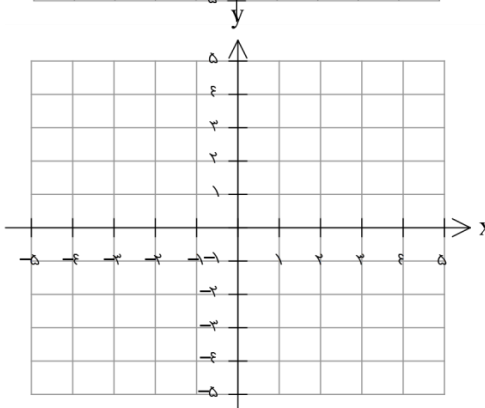
الف) $|x - 1| = x^2 - 2x + 1$



ب) $(x - 2)^2 + 1 = -2x + 5$



ج) $-|x + 1| + 1 = \frac{1}{3}x$



تمرین : تمرین های صفحه ۱۵ و ۱۶ را حل کنید .

درس سوم : معادلات گویا و کنگ

معادلات شامل عبارت های گویا :

در بعضی از معادله ها عبارت های کسری بوجود میاد که صورت و مخرج چند جمله ای هستند . به این نوع معادله ها معادله های گویا می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : در یک مغازه ماهی های تزئینی ، برای نگه داری ماهی های آب شود محلول آب نمک ۵ درصد نیاز است ولی کارگر مبتدی مغازه ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب ۳ درصد درست کرده است . اگر در مغازه به اندازه کافی نمک وجود داشته باشد چقدر نمک لازم است تا محلول ۵ درصد شود ؟

بیاید با کمک هم حلش کنیم :

گام اول : وزن نمک و وزن محلول فعلی چقدره ؟

گام دوم : اگر ما x گرم نمک دیگه بهش اضافه کنیم وزن نمک و وزن محلول هر کدام چقدر میشه ؟

گام سوم : اینکه میگییم محلول ۷ درصد یعنی نسبت چی به چی باید $۰/۰۷$ بشه ؟ درستون رو بنویسید .

گام چهارم : حالا آیا میشه گفت ابنی که بدست اومده معادله گویاست ؟ پیشنهاد من برای حلش اینه که بجوری مخرج ها رو از بین ببریم ، روش شما برای از بین بردن مخرج ها چیه ؟ خوب حلش کنید .

تمرین : مساله قبل رو با فرض اینکه تو مغازه هیچ نمک دیگه ای موجود نباشه و کارگر مغازه مجبور بشه کمی از آب محلول رو تبخیر کنه حلش کنید . یعنی در واقع وزن آبی که باید تبخیر بشه رو بدست بیارین .

نکته : در حل معادلات گویا جوابهایی که مخرج را صفر کنند مورد قبول نخواهند بود .

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{24}{10+x} + 1 = \frac{24}{10-x} \quad (\text{ج})$$

تمرین : به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است .

تمرین: دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند. هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند؟

تمرین: یک محلول آب نمک با غلظت ۸۰ داریم و به آن ۵ لیتر محلول آب نمک ۳۰ درصد اضافه می کنیم. اگر محلول بدست آمده دارای غلظ ۵۰ درصد باشد، حجم محلول اولیه چند لیتر بوده است؟

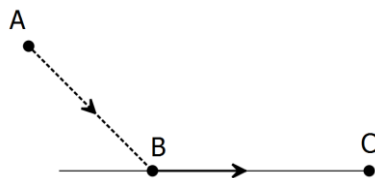
تمرین: قطاری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را طی می کند ولی در راه برگشت از سرعت خود ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته و به همین دلیل نیم ساعت دیر تر می رسد. زمان رفت این قطار چقدر بوده است؟

تمرین: «مصریان باستان معتقد بودند مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر با نسبت مجموع این دو به طول است زیباترین مستطیل خواهد بود ($\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$) و این نسبت را در ریاضیات نسبت طلایی می نامند. این نسبت در بیشتر اندامهای بدن و شبکه چشم انسان رعایت شده است و از این نسبت برای ساخت بناهای تاریخی بسیاری استفاده شده است. اگر بخواهیم زمینی با محیط ۱۴۴ متر و نسبت طلایی بسازیم طول و عرض آن چقدر باید باشد؟

معادلات شامل عبارت های گنگ :

در بعضی از معادله ها عبارت های رادیکالی بوجود میاد که به این نوع معادله ها معادله های گنگ می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : معمولاً مرغای دریایی برای شکار ماهی قستی از مسیر خودشونو تو هوا و قسمتیشو



هم رو سطح آب طی می کنن تا کمترین انرژی ممکنو مصرف کنن !!! حالا به مرغ

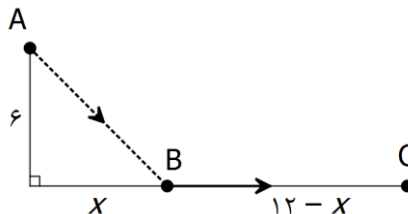
دریای رو تصور کن که مثل شکل پایین میخواد اول تو نقطه B خودشو به سطح

آب برسونه بعدش رو سطح آب تا محل شکار یعنی نقطه C حرکت کنه .

اگر انرژی لازم برای هر متر پرواز در هوا برآشون ۱۴ کیلو کالری و انرژی لازم برای پرواز به موازات سطح آب ۱۰ کیلو کالری باشه و فاصله مرغ دریایی از سطح آب ۶ متر و فاصله افقی از محل شکار ۱۲ متر باشه طبق محاسبه زیست شناسان این پرنده با مصرف ۱۸۰ کیلو کالری به محل شکار میرسه چون این عدد بهینه ترین مقدار مصرف انرژی هستش !!! هدف ما اینه که محاسبه کنیم بینیم نقطه فرود یعنی B تو چه فاصله ای از نقطه شکار یعنی C قرار میگیره ؟؟؟

حالا بیایید با هم مساله رو حل کنیم :

در این مساله اعداد مربوط به فاصله ها ۶ و ۱۲ متره که می تونه تو شکل برای مشخص کردن مجهولات مورد استفاده قرار بگیره .



حالا شما میتونید فاصله AB رو حساب کنید و به تساوی بنویسید که مجموع انرژی مصرف شده در کل مسیر ۱۸۰ بشه . سوال اصلی من از شما اینه : روش پیشنهادیتون برای حل معادله چیه ؟

نکته: در حل معادلات گنگ جواب ها حتماً باید در معادله صدق کنند در غیر این صورت پذیرفته نیستن چون عمل توان رسانی میتونه جواب های اضافی وارد معادله کنه.

مثلاً: در حل معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ پس از توان رسانی و حل دو جواب ۲ و ۷ بدست می آید که فقط یکی از آنها درست است و آن هم عدد ۷ است زیرا $\sqrt{2+2} \neq 2-4$ ولی $\sqrt{7+2} = 7-4$

تمرین: مختصات نقاطی روی محور x را بیابید که فاصله آنها از نقطه (۲, ۳) برابر ۵ باشد.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+3} + x = 6 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\text{ج) } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$$

$$\text{د) } \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x} = 0 \quad (\text{آیا می توان بدون حل به نتیجه رسید ؟!!!})$$

تمرین : بدون حل معادله بگویید چرا معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-4} + 2 = 0$ ریشه حقیقی ندارد .

تمرین : تمرین های صفحه ۲۲ حل شود .

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

تعریف قدر مطلق :

سال قبل با قدر مطلق آشنا شدیم و دیدیم که قدر مطلق یک عدد حقیقی به صورت زیر تعریف می شه :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید .

$$|\sqrt{2} - 2| =$$

$$|\sqrt{5} - \sqrt{3}| =$$

$$|1 - 2(2 - 3)| =$$

ویژگی های قدر مطلق :

$$|x| \geq 0 \quad (\text{الف})$$

تمرین : معادله $|x + 1| + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ چند جواب دارد ؟

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (\text{ب})$$

تمرین : عبارت های زیر را تا حد ممکن ساده کنید .

$$\sqrt{4a^4 + 4a^2 + 1} =$$

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} =$$

تمرین : ثابت کنید $|ab| = |a||b|$ و $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

$$|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = a \text{ یا } x = -a$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

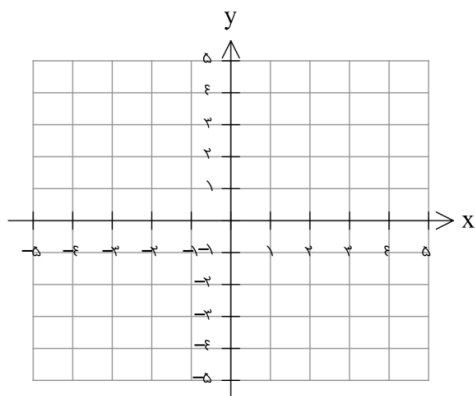
$$|x - 1| = 2$$

$$|x + 9| = 2x + 3$$

$$|x| = |a| \longleftrightarrow x = a \text{ یا } x = -a$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$|x + 9| = |2x + 3|$$



$$|-x| = |x|$$

تمرین: تابع $y = |1 - x|$ را رسم کنید.

و $|x|^2 = x^2$ (با این نکته می شه معادله های قسمت ج و د رو هم حل کرد)

تمرین: معادله $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ چند جواب دارد؟ جواب‌ها را مشخص کنید.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad \text{یا}$$

تمرین: نامعادله $|2x - 1| < 3$ را حل کنید.

تمرین: ثابت کنید $|a + b| \leq |a| + |b|$ (نامساوی مثلثی)

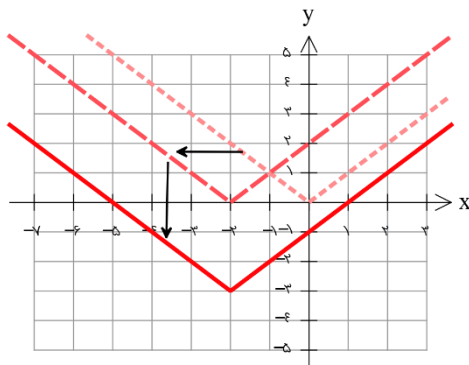
راهنمایی: از آنجایی که $|a| \leq |a|$ پس می‌توان نوشت $-|a| \leq a \leq |a|$ و همین‌طور $-|b| \leq b \leq |b|$.

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \quad \text{یا} \quad x < -a \quad \text{ح}$$

تمرین: جواب نامعادله $|1 - 2x| > 3$ را بیابید.

رسم توابع قدر مطلق :

الف) رسم تابع با یک قدر مطلق بدون ضرب و توان : به کمک انتقال رسم کنید راحت تره .

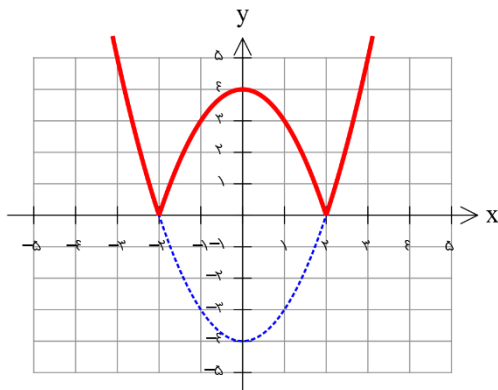


مثال : تابع $y = |x + 2| - 3$ رو با استفاده از تابع $y = |x|$ و یک واحد حرکت به راست و یک واحد به پایین رسم می کنیم .

ب) رسم تابع شامل یک قدر مطلق با ضرب یا توان : در این صورت راحت تره که اول تابع داخل قدر مطلقو رسم و بعدش قسمت زیر محور X رو پاک کرده و قرینه اونو بالای محور رسم کنیم چون :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

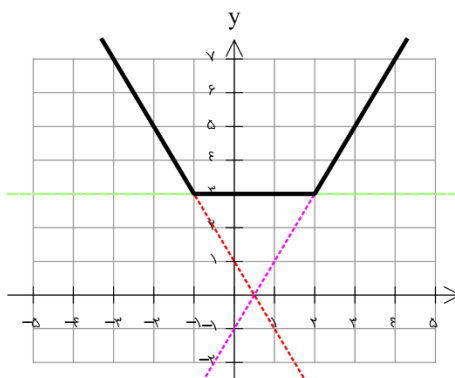
بالای محور خود تابع $f(x) \geq 0$
پایین محور قرینه تابع $f(x) < 0$



مثال : برای رسم تابع $y = |x^2 - 4|$ اول $f(x) = x^2 - 4$ رو

رسم می کنیم بعدش قسمت پایینو پاک کرده و قرینشو بالا می کشیم .

ج) رسم تابع قدر مطلق پیچیده (چند قدر مطلق یا ترکیب عبارت قدر مطلق و غیر قدر مطلق) :



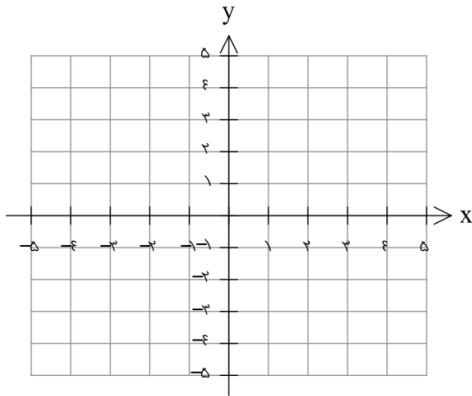
مثال : برای رسم تابع $y = |x + 1| + |x - 2|$ اول ریشه های هر قدر

مطلقو مشخص می کنیم که ۱ و ۲ هستند. بعدش هر قدر مطلقو تعیین علامت می کنیم .

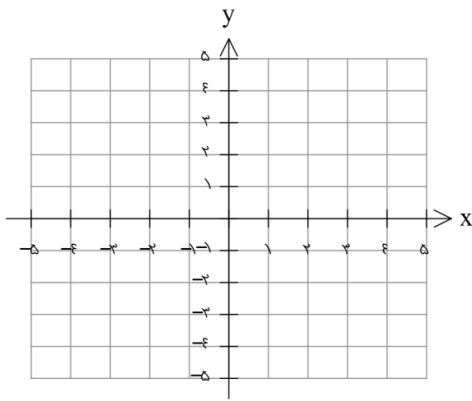
$$y = \begin{cases} -(x+1) - (x-2) & x < -1 \\ (x+1) - (x-2) & -1 \leq x \leq 2 \\ (x+1) + (x-2) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x + 1 & x < -1 \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

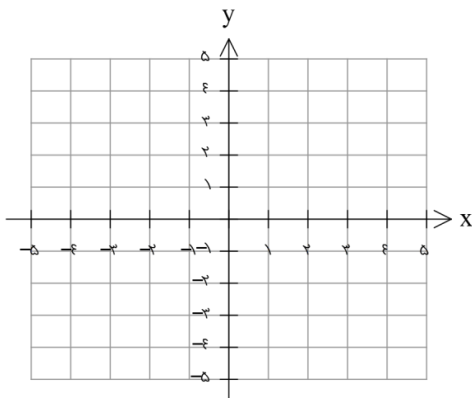
(الف) $y = 3|x^2 - 2x| + 1$ (ضریب میتونه برگرده توی قدر مطلق)



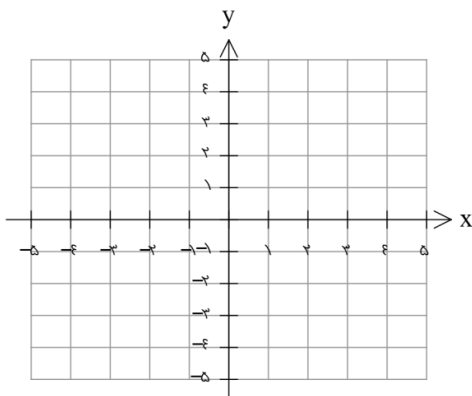
(ب) $y = |x - 1| - |x + 3|$



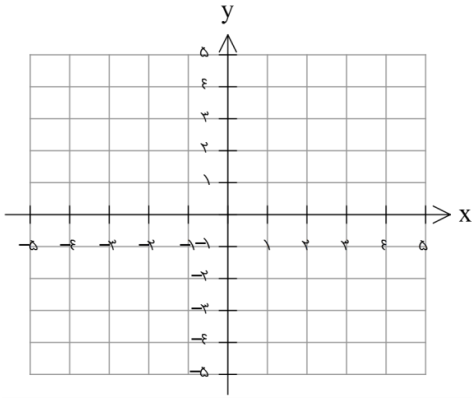
(ج) $y = ||x + 1| - 1|$



(د) $y = |2x + 1| + |3x - 2|$

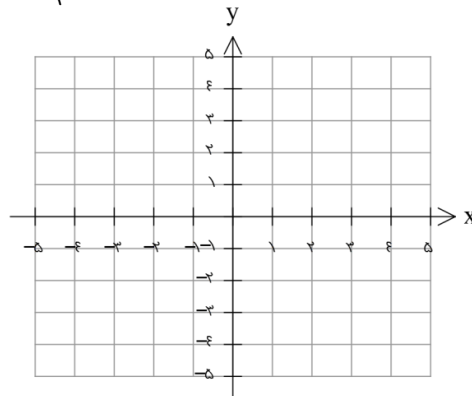
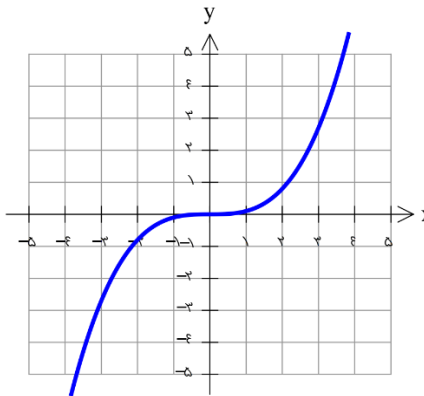


$$y = x - 3|x - 1| + 2 \quad (5)$$

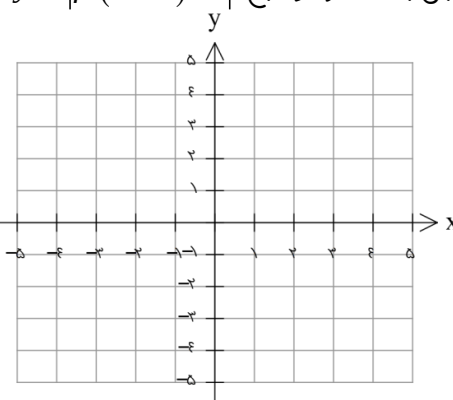
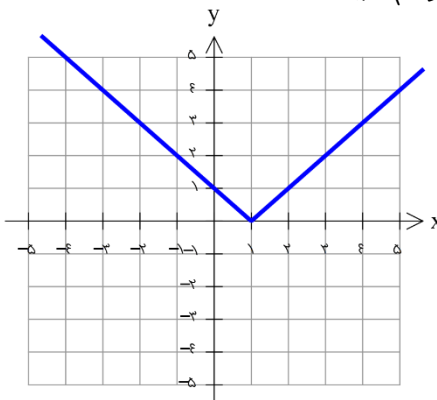


تمرین: معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را به روش هندسی حل کنید.

تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ را رسم کنید.



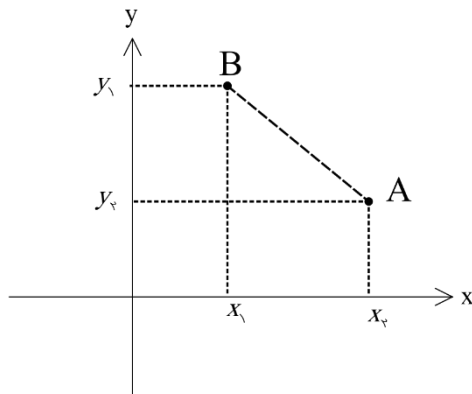
تمرین: اگر نمودار f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = |f(x+1) - 1|$ را رسم کنید.



تمرین: تمرینات صفحه ۲۸ را حل کنید.

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی در واقع ترکیب هندسه و جبر مقدماتیه . در واقع تو هندسه تحلیلی به هر نقطه تو صفحه به آدرس داده میشه که بهش مختصات می گن و با همین آدرس ها معادلات جبری شکل ها نوشته میشن . بنیانگذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما تو قرن ۱۷ ام بودن .



فاصله بین دو نقطه :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه مثل شکل

تو صفحه مختصات باشن به کمک قضیه فیثاغورس به فرمول

برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بدست بیارین .

تمرین : اگر $A(1, 3), B(-1, 2), C(5, -5)$ سه راس یک مثلث باشند .

الف) طول اضلاع را بیابید .

ب) نشان دهید این مثلث قائم الزاویه است .

ج) شیب پاره خط AB, AC نسبت به هم چگونه اند ؟ کدام دو ضلع مثلث هستند ؟

حدس شما در مورد شیب و عمود بودن :

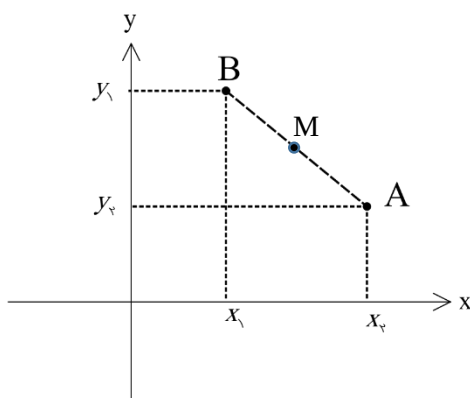
تمرین: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به هم وصل می کند.

راهنمایی: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است بنابراین اگر $P(x, y)$ نقطه ای باشد که $PA = PB$ آنگاه این نقطه روی عمود منصف پاره خط است:

تمرین: در سوال قبل شیب خط بدست آمده چه رابطه ای با شیب پاره خط دارد؟ آیا حدس قبل درست بوده؟

🔗

تمرین: آیا نقطه $(4, 1)$ روی عمود منصف پاره خط واصل بین $A(1, 1), B(2, -2)$ قرار دارد؟



مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر $A(x_2, y_2)$ و $B(x_1, y_1)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات

باشن و M مختصات وسط پاره خط باشه تصویر این نقاط رو روی

محورهای مختصات تصور کن و فرمولی برای بدست آوردن مختصات

M بنویس:

تمرین : معادله عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به کمک نقطه تقاطع و شیب پاره خط بنویسید .

تمرین : نقاط $A(1, 4), B(-3, 1), C(0, -1)$ رئوس مثلث هستند. طول میانه وارد بر ضلع BC را بیابید .

تمرین : قرینه نقطه $A(1, -3)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 3)$ بدست آورید .

تمرین : قرینه نقطه $A(3, -4)$ را نسبت به مبدأ مختصات بدست آورید .

فاصله یک نقطه از یک خط :

اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه و $ax + by + c = 0$ معادله یک خط باشد، فاصله نقطه و خط از این فرمول بدست میاد :

$$|AH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین: فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را بدست آورید.

تمرین: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $3x + 4y = k$ برابر ۲ است. k را بیابید.

تمرین: اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

تمرین: دو خط $3x + 2y = 1$ ، $2x - 3y = 2$ معادله های دو ضلع یک مستطیل هستند و نقطه $A(2, 5)$ یک راس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

تمرین: مساحت مستطیلی که اضلاع آن روی دو خط $2x + y = 2$ ، $4x + 2y + 6 = 0$ قرار دارد چقدر است؟

(راهنمایی: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با: $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

تمرین: تمرین های صفحه ۳۵ و ۳۶ را حل کنید.

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

درس دوم : انواع تابع

درس سوم : وارون تابع

درس چهارم : اعمال بیع و تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

تعریف : یک تابع از مجموعه A به مجموعه B یک رابطه بین دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود . A را دامنه و B را هم دامنه تابع می گویند . (هم دامنه در واقع هر مجموعه دلخواه شامل برد را می گویند)

تمرین : تمام توابع از مجموعه $A = \{1, 2\}$ به $B = \{a, b\}$ را بنویسید . (از نمودار پیکانی استفاده کنید)

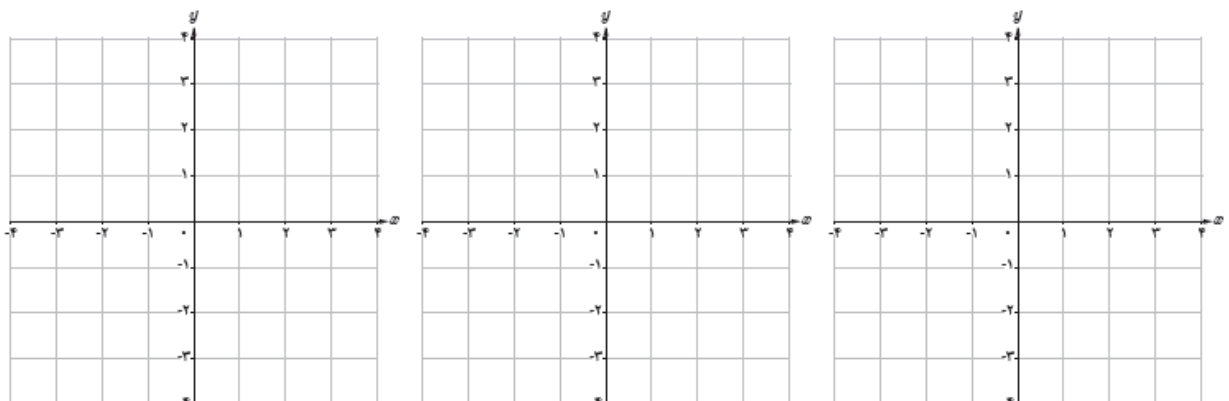
تمرین : از یک مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی ، چقدر تابع می توان نوشت ؟ چرا ؟

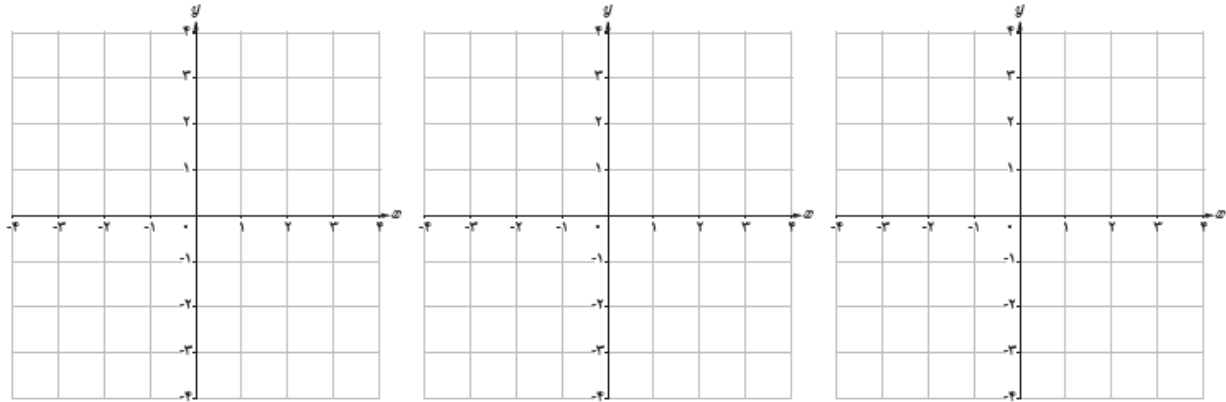
نکته : برای مشخص بودن یک تابع باید حتماً دامنه ، هم دامنه و ضابطه تابع مشخص باشد . اگر برای تابعی دامنه و هم دامنه بیان نشده باشد دامنه آن بزرگ ترین دامنه ممکن خواهد بود و هم دامنه نیز هر مجموعه ای شامل برد .

مثال : تابع با ضابطه با دامنه $[-1, 2]$ و برد $(2, 8]$ را می توان به صورت های زیر نمایش داد .

$$\begin{cases} f : (-1, 2] \rightarrow R \\ f(x) = 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} f : (-1, 2] \rightarrow (2, 8] \\ f(x) = 2x^2 \end{cases}$$

تمرین : تابع $y = 3x, y = x^2$ را با دامنه های $R, [-1, 2], \{1, 2, 3, 4, 5\}$ رسم کنید . برد هر کدام را نیز بیابید .





تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم مساوی هستند هرگاه (الف) دامنه هر دو برابر باشد (ب) به ازای هر x از دامنه $f(x) = g(x)$

تمرین : کدامیک از زوج توابع زیر با هم برابرند و کدام یک نیستند . چرا ؟

(الف) $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$

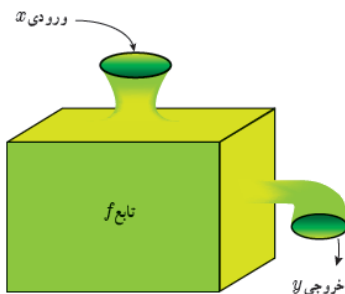
(ب) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ و $g(x) = 2$

(ج) $f(x) = \sqrt{4x^2}$ و $g(x) = 2x$

(د) $f(x) = x^2$ و $g(x) = x|x|$

$$g(x) = |x^2 - x| \text{ و } f(x) = |x(x-1)| \quad ۵$$

$$g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \text{ و } f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad ۶$$



مقدار تابع (تابع به عنوان ماشین) :

یک تابع مانند ماشینی عمل می کند که مقداری را به عنوان ورودی دریافت کرده و بعد از انجام چند عملیات روی آن ، مقداری را به عنوان خروجی به ما می دهد .

تمرین : اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ چقدر است ؟

تمرین : اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$ حاصل $f(2)$ را بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۴۲ و ۴۳ را حل کنید .

درس دوم : انواع تابع

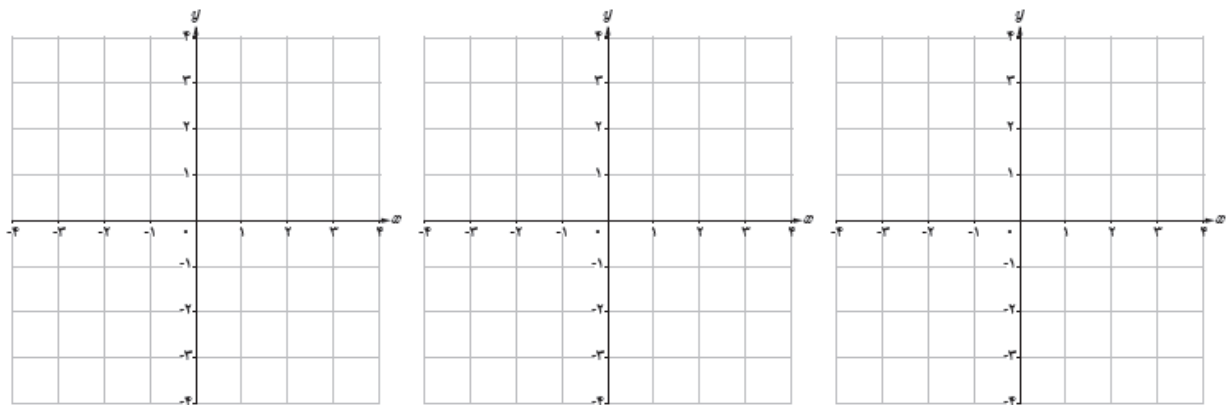
توابع گویا :

توابعی به صورت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که صورت و مخرج چند جمله ای و مخرج مخالف صفر است . مانند :

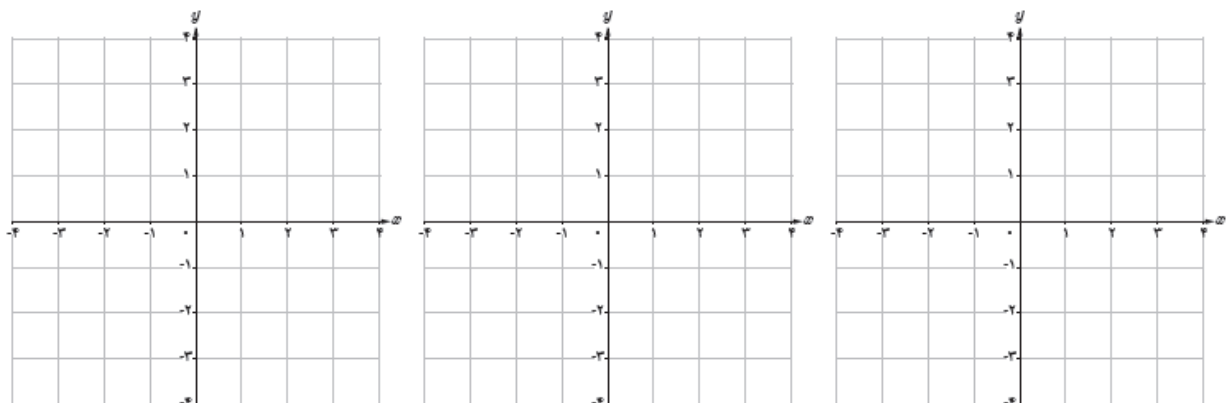
$$f(x) = \frac{5}{x+2} \quad g(x) = \frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-7x+1} \quad h(x) = \frac{\sqrt{5}x+2}{x^3+1}$$

دامنه توابع گویا تمام اعداد حقیقی به جز مقادیری است که مخرج را صفر کنند : $D = R - \{x \mid g(x) = 0\}$ اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y = \frac{1}{x}$ را در دامنه های $R - \{0\}, R^+, \{1, 2, 3\}$ رسم کنیم .



تمرین : نمودار توابع $y = \frac{1}{x+1}, y = \frac{-1}{x}, y = \frac{1-x}{x}$ را رسم کنید . و برد آنها را بنویسید.

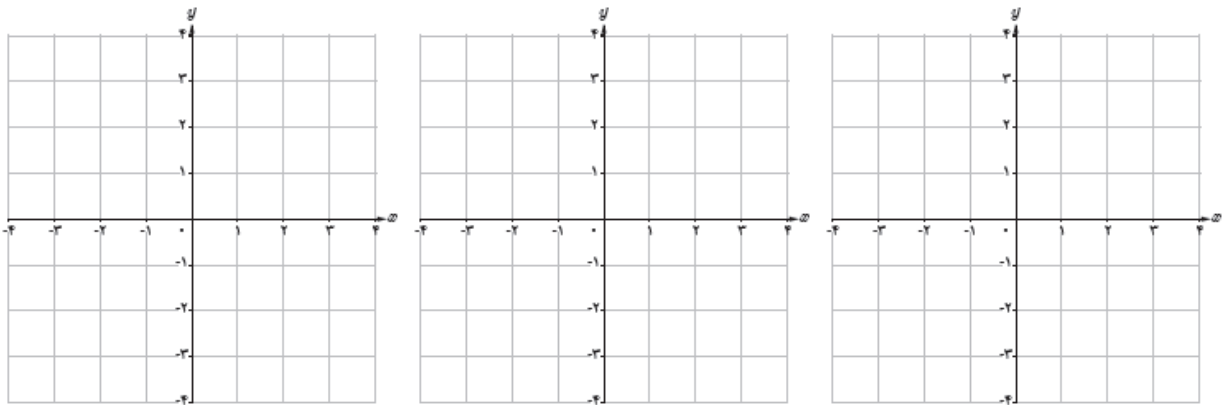


توابع رادیکالی :

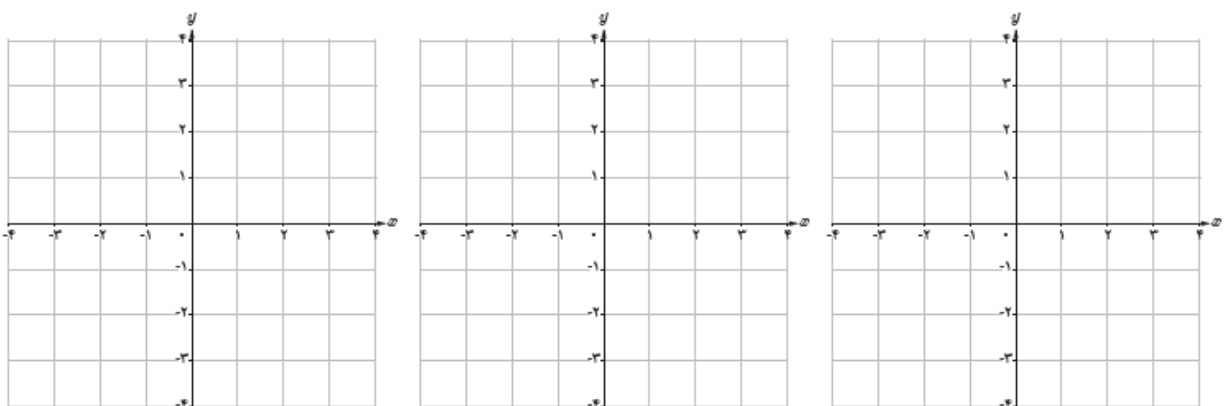
توابعی شامل عبارت رادیکالی را توابع گنگ یا رادیکالی می گویند .

دامنه توابع $y = \sqrt{f(x)}$ اعدادی است که زیر رادیکال را مثبت کند : $D = \{ x \mid f(x) \geq 0 \}$ اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y = \sqrt{x}$ را در دامنه های $\{1, 2, 3\}, R^+, [1, 4)$ رسم کنیم .

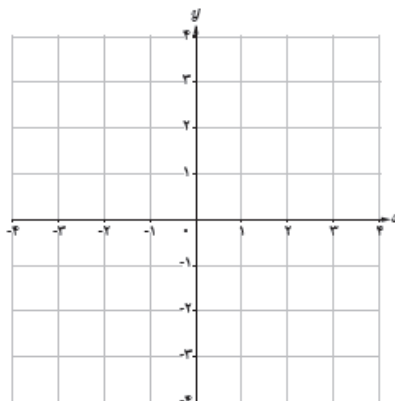


تمرین : نمودار توابع $y = \sqrt{x+1} - 1, y = 1 - \sqrt{x}, y = \sqrt{x-2}$ را رسم کنید و برد آنها را بنویسید.



تمرین : نمودار تابع زیر را رسم کنید .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$



تمرین : دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x) = \frac{x+2}{2-x}$

ب) $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+2}$

ج) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+5x+6}$

د) $f(x) = \sqrt{3x-2}$

ه) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$

و) $f(x) = \sqrt{4-2x}$

ز) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-2}$

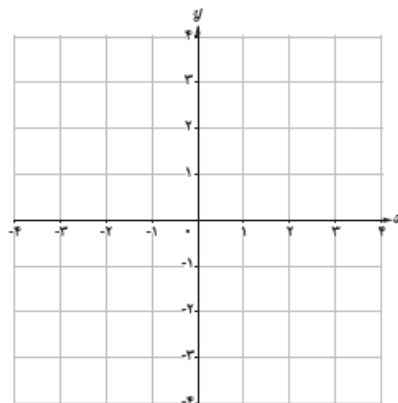
تابع پله ای :

توابعی که از چند تابع ثابت تشکیل شده است را تابع پله ای می نامند.

مثال : هزینه پست برای ارسال بسته های مختلف با توجه به وزن آنها به صورت زیر است .

w (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < w \leq 2$	$2 < w \leq 5$	$5 < w \leq 10$	$10 < w \leq 12$
$f(w)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	5	10	17	20

تابع مربوطه را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .



تابع چتر صحیح :

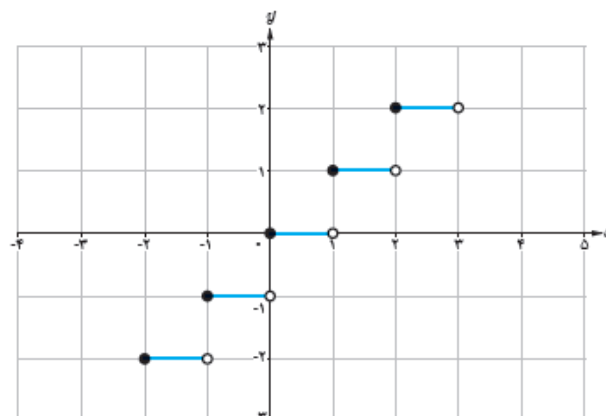
گونه خاصی از تابع پله ای است که کاربرد فراوانی دارد . و به صورت $y = [f(x)]$ تعریف می شود .

جزء صحیح عدد حقیقی x در واقع بزرگ ترین عدد صحیح نا بزرگ تر از x است .

مثال : $[-2] = -2$, $[2/99] = 2$, $[-2/1] = -3$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\frac{-1}{3}] = -1$

مثال : تابع $y = [x]$ در بازه $[-3, 3]$ رسم شده است جدول را کامل کنید . (این تابع دارای دامنه R و برد Z است)

w	$y = [w]$
$-2 \leq w < -1$	$y = -2$
$-1 \leq w < 0$	
$0 \leq w < 1$	
$1 \leq w < 2$	
$2 \leq w < 3$	



تمرین: نمودار تابع $y = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$

$$-2 \leq 2x < -1 \rightarrow [2x] = -2, \quad -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$-1 \leq 2x < 0 \rightarrow [2x] = -1, \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

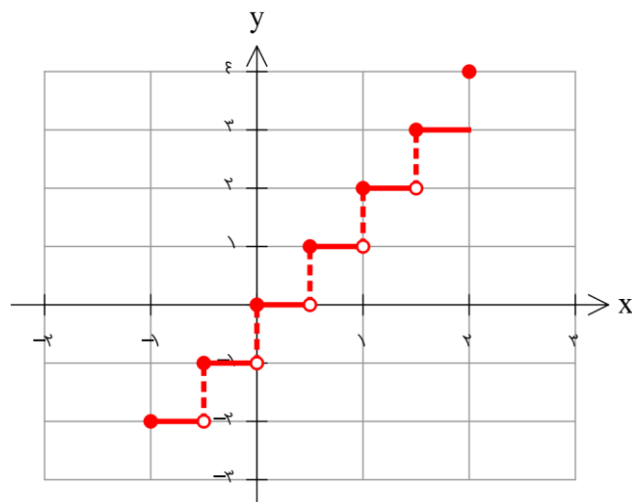
$$0 \leq 2x < 1 \rightarrow [2x] = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \rightarrow [2x] = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

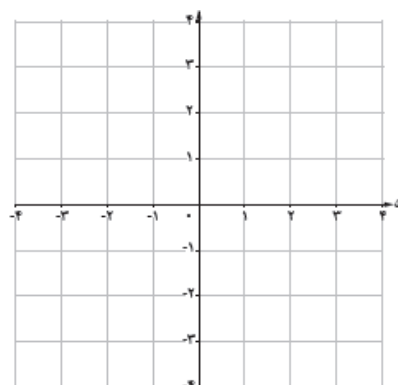
$$2 \leq 2x < 3 \rightarrow [2x] = 2, \quad 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$3 \leq 2x < 4 \rightarrow [2x] = 3, \quad \frac{3}{2} \leq x < 2$$

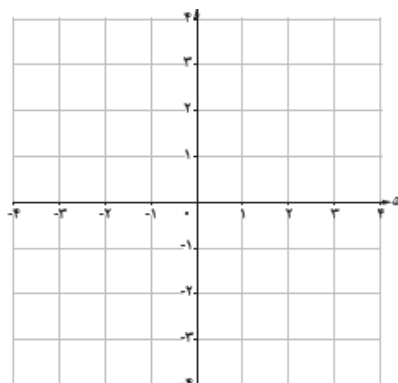
$$2x = 4 \rightarrow [2x] = 4, \quad x = 2$$



تمرین: نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{3} \right]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.



تمرین: نمودار تابع $y = x + 2[x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید برد این تابع در دامنه R چیست؟



معادله تابع :

معادلات شامل دو متغیر x و y یک رابطه را نمایش می دهند مثلا $x + y = 1$ مجموعه زوج مرتب هایی است که مجموع مولفه های آن 1 است . نمودار این معادله یک خط است که معمولا به صورت $y = -x + 1$ نمایش می دهند . اما همه معادلات با دو متغیر x و y تابع نیستند و فقط آنهایی تابع خواهند بود که به ازای هر x تنها یک y به ما بدهند .

مثال : $y = |x| + 1$ تابع است ولی $x = |y| + 1$ تابع نیست زیرا مثلا ض به ازای $x = 2$ مقدار $y = \pm 1$ می دهد .

مثال : $y = 1$ تابع است زیرا برای هر x یک مقدار y (مقدار 1) را به ما می دهد ولی $x = 1$ تابع نیست زیرا به ازای هر x هر مقداری برای y می دهد . (می توانید در نمودار آنها این مطلب را به وضوح ببینید)

تمرین : کدام یک از روابط زیر تابع و کدام یک تابع نیست ؟ چرا ؟

$$\text{الف) } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{ب) } |x + y| = 1$$

$$\text{ج) } \sqrt{x} + y = 1$$

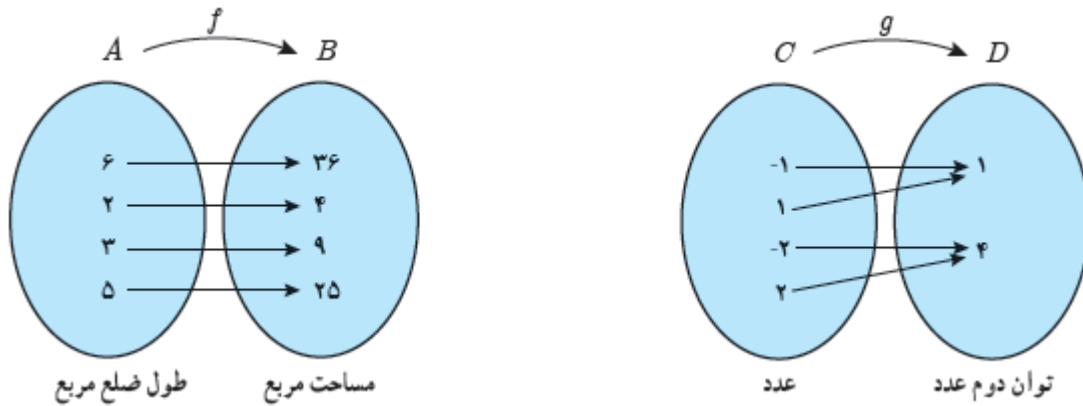
$$\text{د) } x + \sqrt{y} = 1$$

$$\text{ه) } f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 2 \\ x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{و) } f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

درس سوم : وارون تابع

دو تابع f و g را در نظر بگیرید .



هر دو تابع را به صورت زوج مرتب نوشته سپس جای مولفه ها را عوض کنید .

کدام یک از روابط جدید بدست آمده تابع هستند ؟

تابع وارون :

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهند و به صورت $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ تعریف می کنند . اگر f^{-1} تابع باشد آنگاه f را وارون پذیر و f^{-1} را وارون تابع f می نامند .

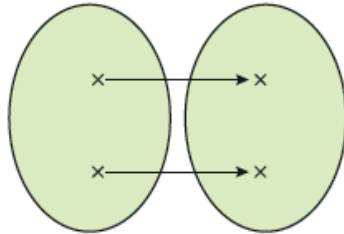
نکته : عدد منفی یک در بالای f صرفاً یک علامت است و به توان منفی نیست پس f^{-1} را با $\frac{1}{f}$ اشتباه نگیریم .

سوال : با توجه به دو تابع ذکر شده در اول درس فکر می کنید یک تابع برای آن که وارون پذیر باشد چه شرایطی باید داشته باشد ؟

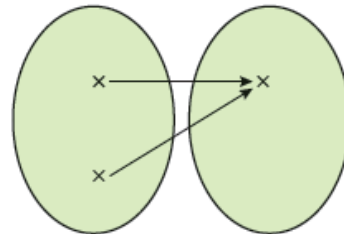
تابع یک به یک :

توابعی وارون پذیر هستند که به هر عضو از برد دقیقاً یک عضو از دامنه نظیر شود. در این صورت تابع را یک به یک می گویند. پس شرط وارون پذیری تابع آن است که تابع یک به یک باشد.

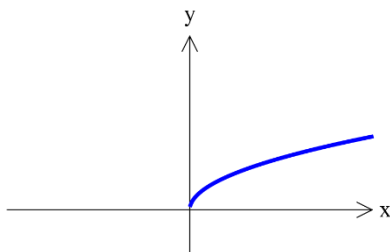
پس از نظر نموداری تابعی یکی به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. چرا؟؟؟



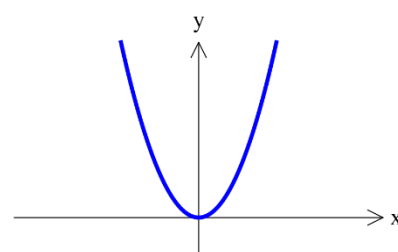
تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.



تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.

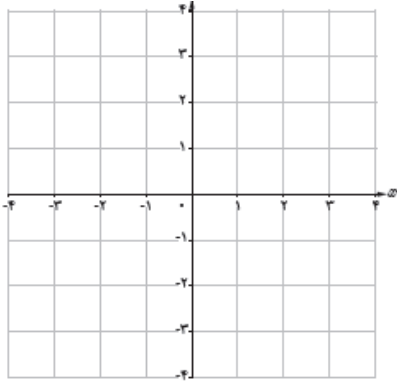
تمرین : تابع $f = \{(a+b, 1), (2, 3), (6, 1), (a-b, 3), (5, 6)\}$ یک به یک است. مقدار a و b را بیابید.

تمرین : اگر $f(x) = x^2 + 2x - 6$ باشد مقدار $f^{-1}(-6)$ را بیابید.

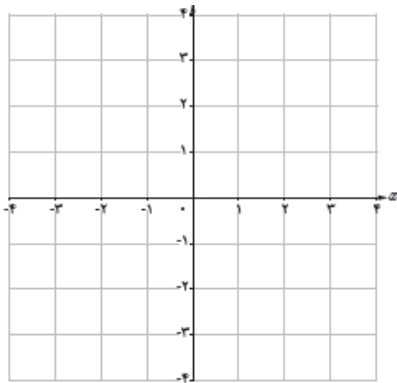
تمرین : دامنه وارون تابع $y = \sqrt{x} - 1$ را بیابید. (توجه : برد تابع f دامنه تابع f^{-1} است)

تمرین: با رسم توابع زیر مشخص کنید کدام یک وارون پذیرند. آنگاه یکی که یک به یک نیستند را با محدود کردن دامنه یکی به یک کنید.

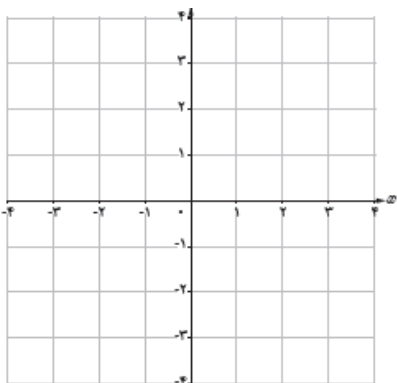
الف) $y = (x + 1)^2$



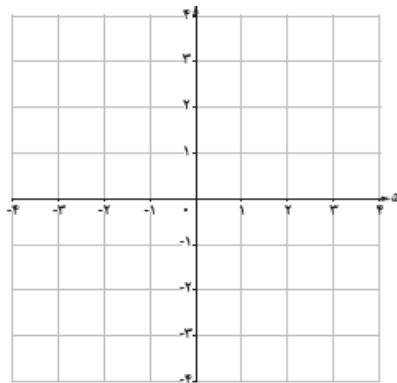
ب) $y = |2 - x|$



ج) $y = -\sqrt{x} + 1$



د) $y = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$



محاسبه وارون یک تابع :

برای نوشتن معادله تابع وارون کفایت در خود تابع x را به صورت تابعی از y بنویسیم و در نهایت می توانیم به جای x علامت $f^{-1}(y)$ را قرار دهیم (همان طور که به جای y علامت $f(x)$ قرار می دهیم) در این صورت y ها همان اعضای دامنه تابع جدید هستند پس می توان برای پرهیز از اشتباهات سهوی، جای x و y را عوض کنیم.

توجه کنیم که دامنه تابع وارون همان برد تابع اصلی و برد تابع وارون همان دامنه تابع اصلی است.

مثال : وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ را بدست آورید.

$$y = \sqrt{x-1} + 2$$

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{y-2 \geq 0} (y-2)^2 = x-1$$

$$x = (y-2)^2 + 1 \longrightarrow f^{-1}(y) = (y-2)^2 + 1 ; y \geq 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1 ; x \geq 2$$

نکته : می توانستیم برد تابع را از روی نمودار آن بدست بیاوریم و به عنوان دامنه تابع وارون بنویسیم. در ضمن اگر دامنه تابع وارون بدست آمده از ضابطه خود آن مشخص بود نیازی به نوشتن دامنه در کنار آن نبود.

تمرین : وارون توابع زیر را بیابید.

الف) $y = -3x + 2$

ب) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ (برد این تابع $R - \{2\}$ است)

ج) $y = x^2 - 4x$; $x < 2$

$$y = \begin{cases} 3x + 4 & x \leq 1 \\ 2x + 5 & x > 1 \end{cases} \quad \text{د}$$

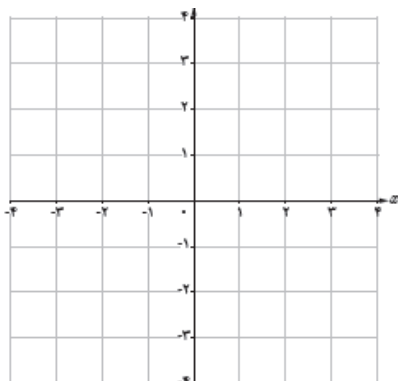
$$y = 2 - \sqrt{x - 1} \quad \text{ه}$$

تمرین: شرط آنکه تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ خود و ارون باشد (یعنی و ارونش با خودش برابر باشد) چیست؟

رسم نمودار و ارون تابع:

تابع $y = \sqrt{x - 1}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه و ارون آن را بنویسید.

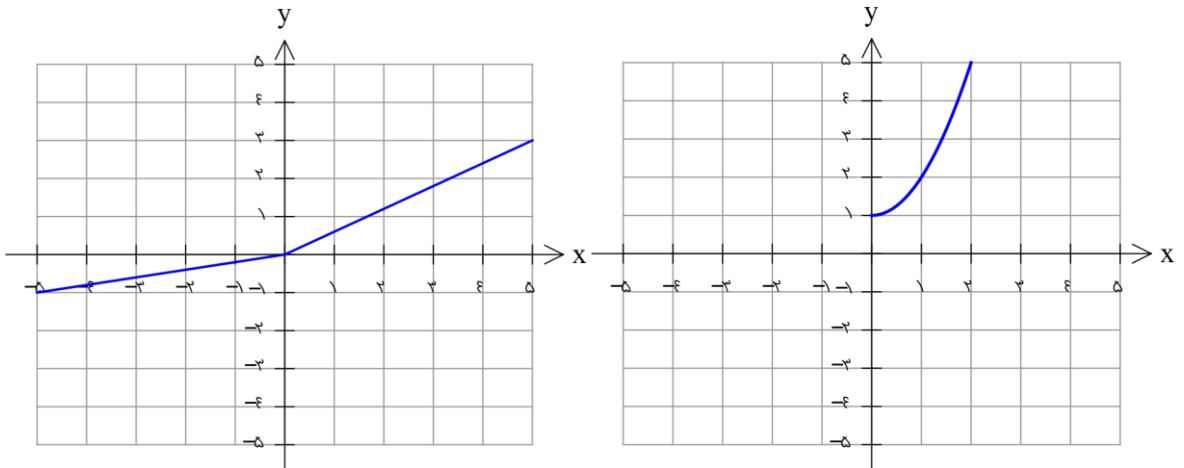


ب) تابع و و ارونش را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ج) حدستان را در مورد ارتباط بین نمودار تابع f و f^{-1} در قالب نتیجه زیر بنویسید؟

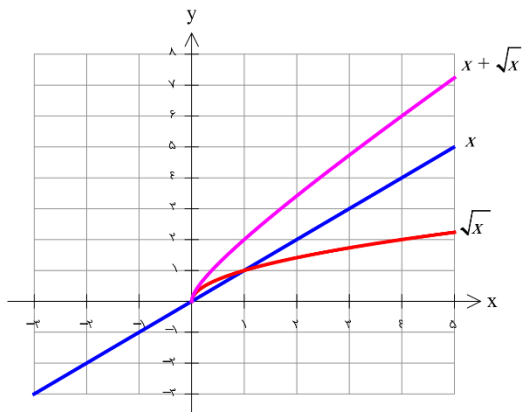
📌 : تابع f و f^{-1} نسبت به خط ، هستند بنابراین برای رسم نمودار f^{-1} کافیست قرینه نمودار f را نسبت به خط رسم کنیم .

تمرین : وارون توابع زیر را در در همان دستگاه رسم کنید.



تمرین : تمرین های صفحه ۶۲ را حل کنید .

درس چهارم : اعمال روی توابع



همان گونه که اعمال جمع و ضرب در مورد اعداد و چند جمله ای ها انجام می شود در مورد توابع نیز می تواند استفاده شود با این تفاوت که توابع فقط در دامنه های مشترک (دامنه ای که هر دو تابع در آن حضور داشته باشند) می توانند با هم جمع یا ضرب شوند .

اعمال روی توابع :

الف) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

ب) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

ج) $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

د) $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

تمرین : اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (2, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(-1, 4), (0, 0), (2, 8), (4, 3)\}$ و $h = \{(1, 2), (3, 7), (-1, -1)\}$ حاصل موارد خواسته شده را بیابید .

الف) حاصل $(f + g)(-1) - (f \cdot h)(1)$ را بیابید .

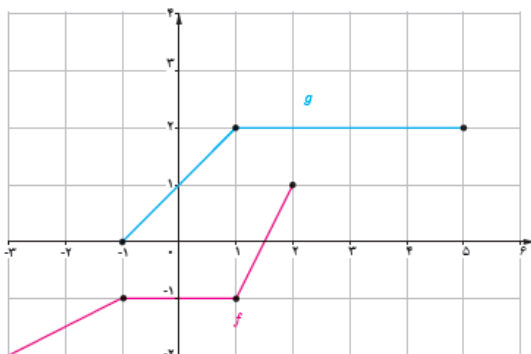
ب) توابع $f - h, g \cdot h, f / g$ را با اعضایشان مشخص کنید .

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ و $g = \{(-1, 2), (0, 1), (2, 0), (1, 1)\}$ ، برد تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \frac{x-1}{2x-4}$ و $h(x) = \sqrt{3x+4}$ دامنه توابع $(f+g)(x)$ و $(f \cdot h)(x)$ و $(h/g)(x)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$ ، ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

(راهنمایی: هر دو تابع را بازه های $x \leq 1$, $1 < x < 2$, $x \geq 2$ باز نویسی کنید)



تمرین: نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار توابع $f+g$, $f-g$ را در همین دستگاه مختصات رسم کنید.

ترکیب توابع :

به طریق دیگری به جز اعمال روی توابع نیز می توان توابع جدید ایجاد کرد. به مثال زیر توجه کنید :

رابطه $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به سانتی گراد تبدیل می کند .

رابطه $g(x) = x + 273$ درجه سانتی گراد را به درجه کلوین تبدیل می کند.

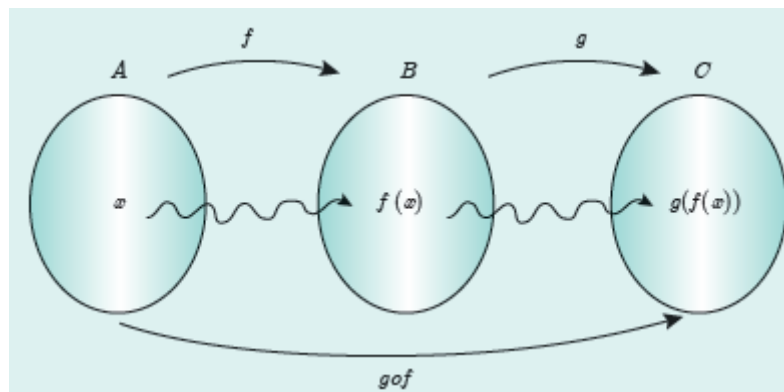
(الف) ۱۴ درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل کنید .

ب) اگر x را یک عدد دلخواه به فارنهایت در نظر بگیریم با همان روند قبلی تابعی بنویسید که مستقیم آن را کلوین تبدیل کند .

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g باشد داریم : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

و به طور مشابه می توان $f \circ g$ را تعریف کرد : $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



تمرین : اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (-1, 1), (0, 2)\}$ و $g = \{(1, 1), (2, 0), (3, -1)\}$ باشد . تابع های $f \circ g, g \circ f$ را بنویسید .

تمرین : اگر $f = \{(2, 1), (3, 5), (7, 2), (5, 9), (4, 3)\}$ برد تابع $f \circ f$ را بنویسید .

تمرین: اگر $f = \{(-3, 1), (-1, 0), (0, 2), (-2, 3), (1, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{4-x}$ ، تابع gof را مشخص کنید.
(به عنوان تمرین بیشتر تابع fog را نیز مشخص کنید. راهنمایی: تابع g را با دامنه f برابر قرار دهید و)

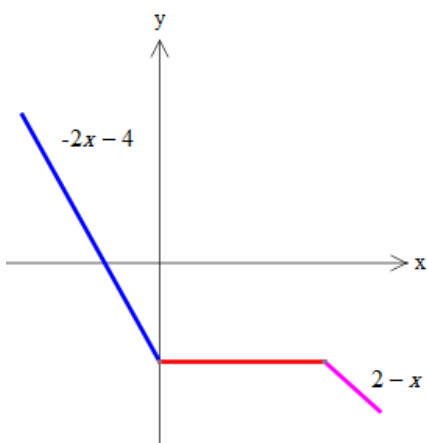
تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x-9}$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ باشد. دامنه و ضابطه توابع fog, gof را مشخص کنید.

تمرین: اگر $f(x) = \frac{x}{1-x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ باشد. دامنه و ضابطه توابع fog, gof را مشخص کنید.

تمرین: اگر $(fog)(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

تمرین: اگر $(fog)(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x - 1$ ، تابع $f(x)$ را مشخص کنید.

تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است. مقدار $(fofof)(7)$ را بیابید.



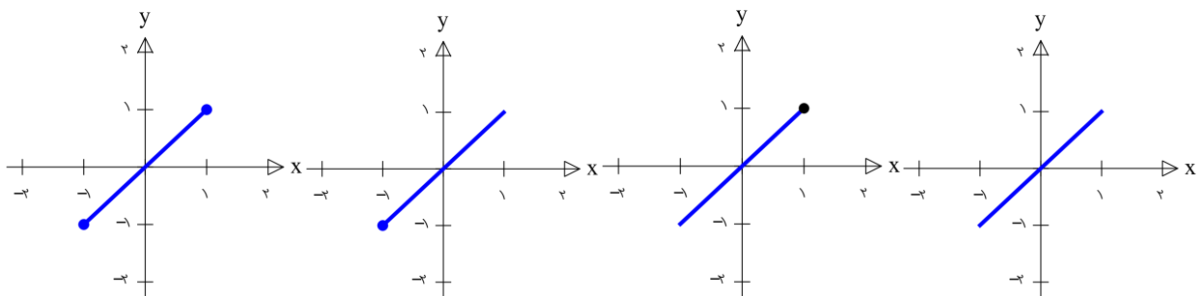
تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ و $g(x) = \frac{x}{3}$ باشد حاصل $(g \circ f)(\sqrt{2} - 1)$ را بیابید.

📌: اگر f تابعی وارون پذیر باشد، ترکیب آن با وارون خودش تابع ثابت است البته با دامنه خاص:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad : \text{الف) به ازای هر } x \text{ از دامنه } f \text{ داریم}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad : \text{ب) به ازای هر } x \text{ از دامنه } f^{-1} \text{ داریم}$$

تمرین: اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



📌: اگر تابع f و g وارون پذیر باشند، آنگاه: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = 2x^2 + 3$ ؛ $x > 0$ ضابطه تابع $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ را مشخص کنید.

تمرین: تمرین های صفحه ۶۹ و ۷۰ را حل کنید.

فصل سوم :تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

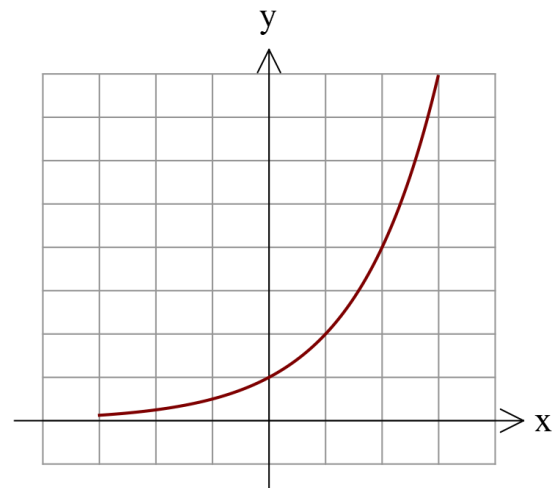
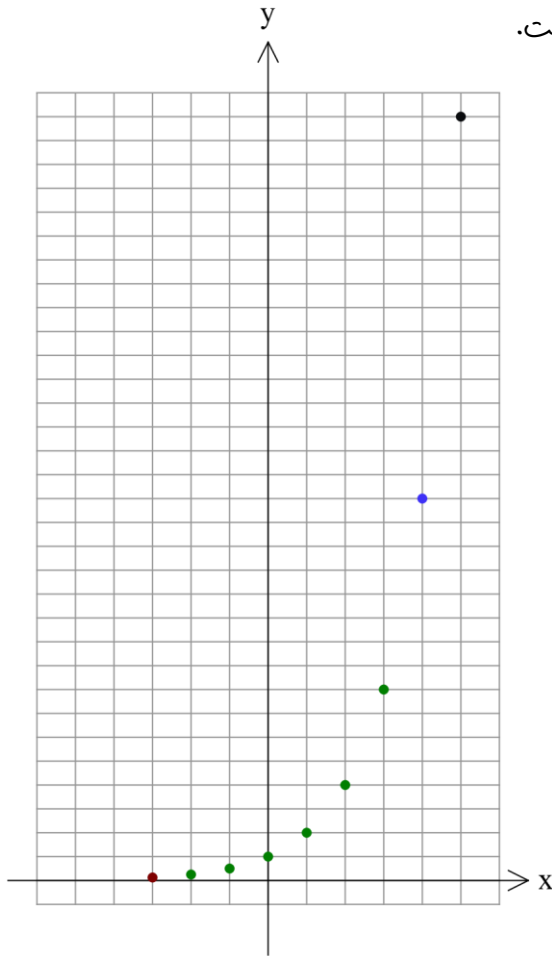
اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار زیر را خواهیم داشت.

حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

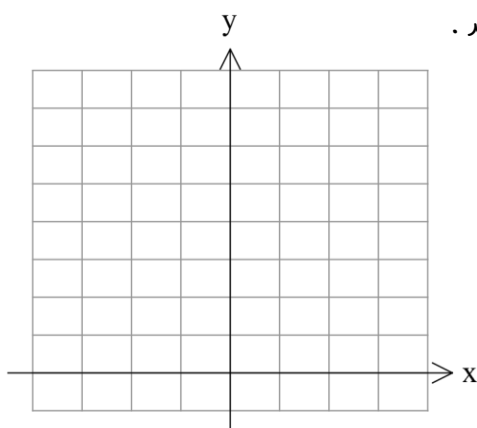
به عنوان مثال :

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1/46 \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \approx 1/4 \quad 2^{\frac{1}{6}} \approx 2/66$$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



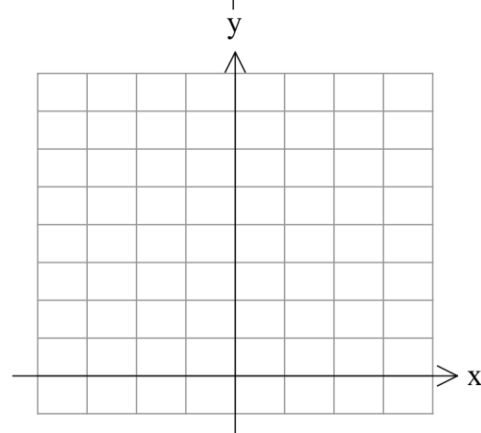
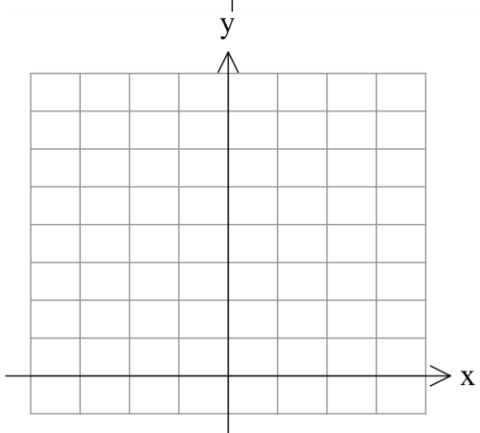
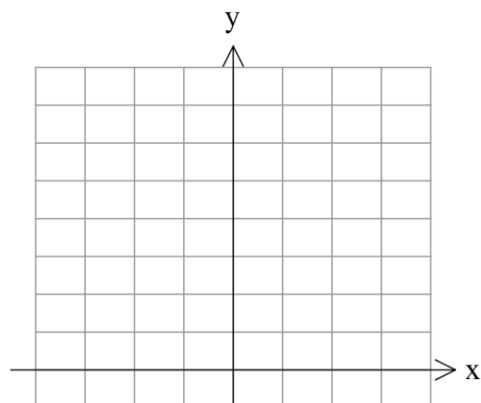
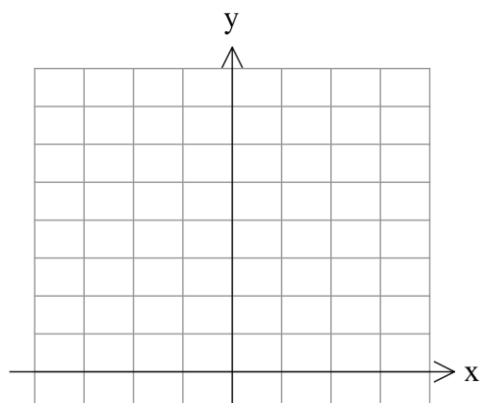
حالا به کمک ماشین حساب و نقطه یابی نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید .



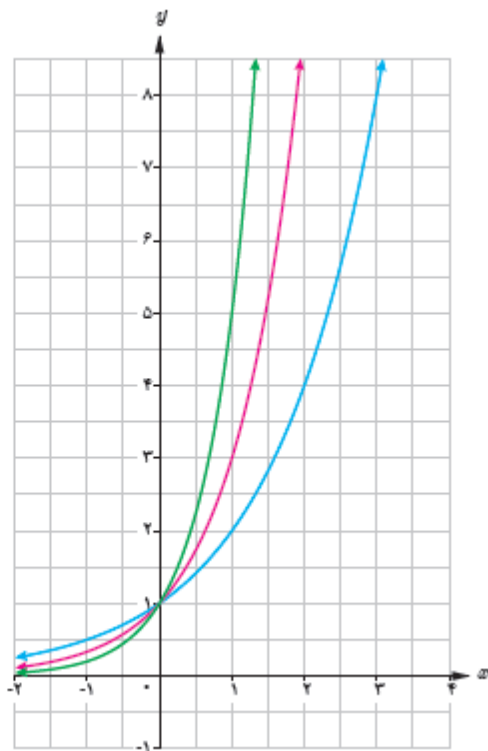
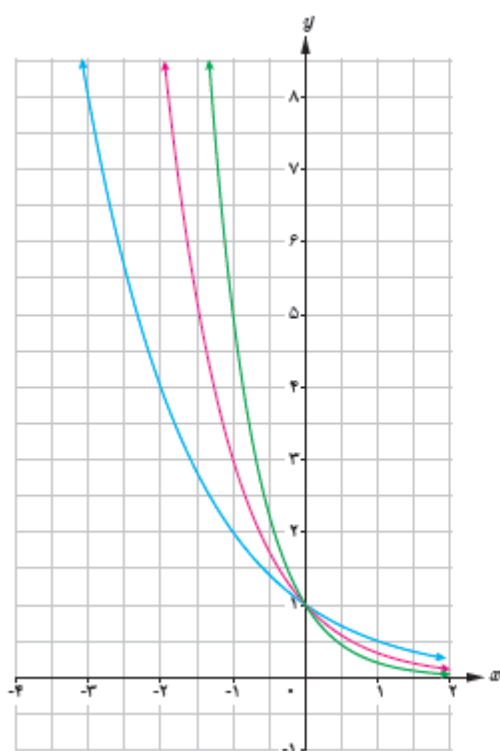
تابع نمایی : هر تابع به صورت $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) را تابع نمایی می گویند .

توجه : هر تابع به صورت $y = ka^x$ ($a > 0, a \neq 1, k \neq 0$) رفتار نمایی دارد .

تمرین: نمودار توابع $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$, $y = 3^{x-1}$, $y = -3^x - 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.



تمرین: نمودار توابع 3^x , 3^x , 5^x و همچنین توابع $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ رسم شده است. ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید.



تمرین: مقدار نوعی باکتری خاص در هر ساعت ۴ برابر می شود اگر مقدار اولیه آن ۲۰ میلی گرم بوده باشد، جرم توده بعد از t ساعت را به صورت نمایی نوشته و مقدار آن را بعد از یک شبانه روز تخمین بزنید.

تمرین: اگر a, b, c دنباله حسابی باشند. کدام مورد درست است؟ (راهنمایی: در دنباله حسابی $a + c = 2b$)

الف) $2^a, 2^b, 2^c$ دنباله حسابی است. ب) $2^a, 2^b, 2^c$ دنباله هندسی است.

ج) $2^a, 2^{b+1}, 2^c$ دنباله حسابی است. د) $2^a, 2^{2b}, 2^c$ دنباله هندسی است.

معادله و نامعادله نمایی:

الف) اگر $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$

ب) اگر $a > 1$ در این صورت اگر $a^x > a^y$ آنگاه $x > y$.

ج) اگر $0 < a < 1$ در این صورت اگر $a^x > a^y$ آنگاه $x < y$.

تمرین: معادله و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \quad \text{الف)}$$

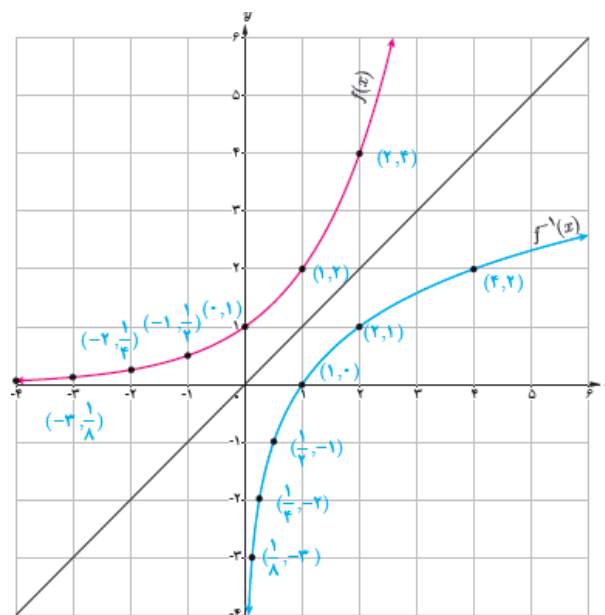
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} > \left(\frac{1}{37}\right)^x \quad \text{ب)}$$

$$9^{2x-2} > \frac{1}{243} \quad \text{ج)}$$

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت $f(t) = 2^t$ است. و در به راحتی می توان گفت در زمان $t = 2/5$ مقدار این باکتری حدود $f(2/5) = 2^{2/5} \approx 5/66$ است. حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریباً ۶۰ می شود، چه باید کرد؟

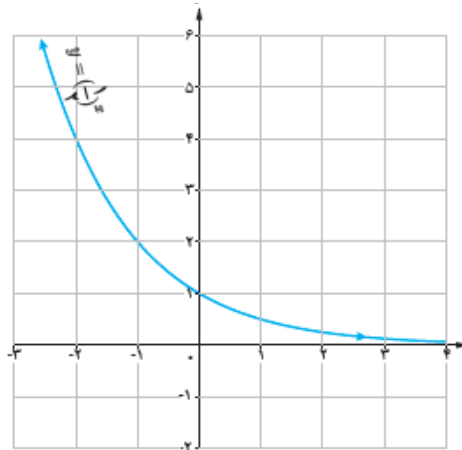
همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y = x$ رسم کرد پس:



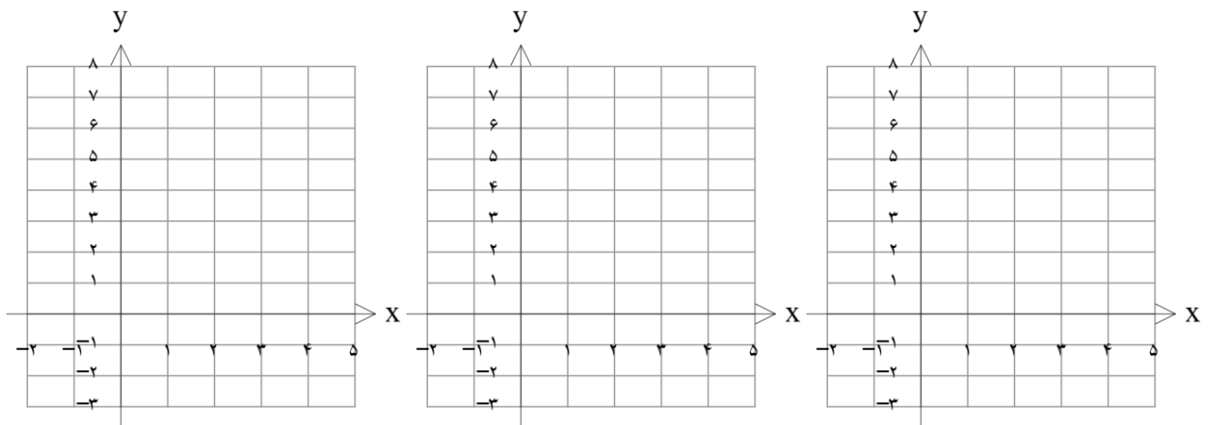
تابع لگاریتم: وارون تابع نمایی $y = a^x$ را تابع لگاریتم بر مبنای a می نامند و با نماد $y = \log_a^x$ نمایش می دهند. که در آن $a > 0, a \neq 1, x > 0$ است.

تمرین: دامنه تابع $y = \log_x^{x-x}$ را مشخص کنید.

تمرین: به کمک نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید.

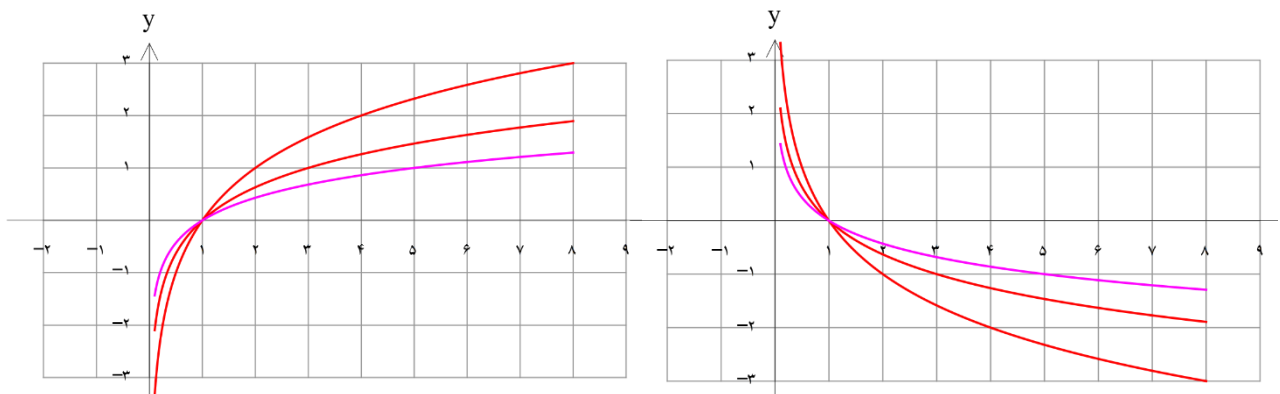


تمرین: نمودار توابع $y = \log_2^{x+1} - 1$, $y = 1 - \log_2 x$, $y = 1 + \log_2 x$ را به کمک انتقال رسم کنید.



تمرین: نمودار توابع $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_5 x$ و همچنین توابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ رسم شده

است. ضابطه هر کدام را در کنار نمودار مربوطه بنویسید.



تمرین : با توجه به نمودار لگاریتم در ابتدای این درس ، توان های صحیح عدد ۲ را بدست آورید :

$$\log_2^{2^{-3}} = \quad \log_2^{2^{-2}} = \quad \log_2^{2^{-1}} = \quad \log_2^{2^0} = \quad \log_2^{2^1} = \quad \log_2^{2^2} = \quad \log_2^{2^3} =$$

تعریف لگاریتم : به طور کلی تعریف لگاریتم به صورت زیر است :

$$x = a^y \Leftrightarrow \log_a^x = y$$

تمرین : مقادیر زیر را حساب کنید .

$$\log_2^8 = \quad \log_2^{\frac{1}{256}} = \quad \log_{10}^{1000} =$$

$$\log_{\frac{1}{8}}^{\sqrt{128}} = \quad \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{25}{5}} = \quad \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

تمرین : تساوی توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید .

$$\log_{\frac{1}{256}}^{\frac{1}{64}} = -4 \Rightarrow \quad \log_2^1 = 0 \Rightarrow$$

$$3^4 = 81 \Rightarrow \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024} \Rightarrow$$

تمرین : اگر $f(x) = \log_2^{(2x-1)}$ مقدار $f^{-1}(3)$ چقدر است ؟ (راهنمایی : در واقع مقدار y داده شده و x را می خواهیم)

تمرین : اگر $f(x) = 3^{5x-1}$ ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را بیابید .

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم :

$$\log_a^1 = 0 \quad (1)$$

اثبات : چون همواره $a^0 = 1$

$$\log_a^a = 1 \quad (2)$$

اثبات : چون همواره $a^1 = a$

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y \quad (3)$$

اثبات : فرض کنید $\log_a^x = p$ و $\log_a^y = q$ در این صورت $x = a^p, y = a^q$ پس داریم $xy = a^{p+q}$ و طبق تعریف لگاریتم $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$ در نتیجه $\log_a^{xy} = p + q$

مثال : اگر $\log_7^3 = 1/58$ و $\log_7^5 = 2/32$ باشد . مقدار $\log_7^{15}$ را بیابید .

$$\log_7^{15} = \log_7^3 + \log_7^5 = 1/58 + 2/32 = 3/9 \quad \text{حل :}$$

$$\log_a^{x/y} = \log_a^x - \log_a^y \quad (4)$$

اثبات :

مثال : اگر $\log_7^a = a$ مقدار $\log_7^{1/a}$ را بیابید . (وقتی مبنای لگاریتم ۱۰ باشد معمولا آن را نمی نویسند)

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a \quad \text{حل :}$$

$$\log_a^{x^n} = n \log_a^x \quad (5)$$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\frac{1}{3} \log 16 + 2 \log 5$ را بیابید .

$$\frac{1}{3} \log 16 + \log 5^2 = 2 \times \frac{1}{3} \log 8 + \log 25 = \log 8 + \log 25 = \log 200 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

حل :

$$\log_a^{x^n} = \frac{1}{n} \log_a^x \quad (6)$$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{2}}^{128}$ چقدر است ؟

$$\log_{\sqrt{2}}^{128} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2^{128} = 2 \log_2^{128} = 2 \log_2^{2^7} = 2 \times 7 \log_2^2 = 14$$

حل :

$$\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a} \quad (7) \quad (\text{قاعده تغییر مبنا})$$

اثبات : اگر $\log_b^x = p, \log_b^a = q$ آنگاه $x = b^p, a = b^q$ و می توان نوشت :

$$x = b^p = (b^q)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow x = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \log_a^x = \frac{p}{q} \Rightarrow \log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

$$\log_a^x = \frac{1}{\log_x^a} \quad \text{نتیجه ۸}$$

نتیجه ۹ : $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$ (می توان به تعداد بیشتر نیز تعمیم داد)

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ مقدار $\log_6 15$ را بیابید.

$$\log_6 15 = \frac{\log 15}{\log 6} = \frac{\log 3 \times 5}{\log 2 \times 3} = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{b + (1-a)}{a+b} = \frac{b-a+1}{b+a}$$

حل:

$$b^{\log_a x} = x^{\log_a b} \quad (8)$$

اثبات:

مثال: حاصل $2^{(1+\log_2 5)}$ چقدر است؟

$$2^{(1+\log_2 5)} = 2^1 \times 2^{\log_2 5} = 2 \times 2^{\log_2 5} = 2 \times 5^{\log_2 2} = 2 \times 5 = 10$$

حل:

.....

تمرین: مقدار $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[9]{3}$ را بیابید.

تمرین: مقدار $\frac{1}{\log_6 5} + \frac{1}{\log_5 6}$ را حساب کنید.

تمرین: مقدار $3^{\log_3 5}$ را بدست آورید.

تمرین: حاصل عبارت $\log \frac{1}{3} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100}$ چیست؟

تمرین : اگر $\log^2 = a$ باشد حاصل $\log \sqrt[25]{\log}$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عبارت $\log_{\sqrt[5]{\log}}^5 + 2 \log_{\log}^{\log}$ را بیابید .

تمرین : حاصل عبارت $\log_3^3 \times \log_5^5 \times \log_6^6 \times \dots \times \log_{\log}^{\log}$ را بیابید .

معادله و نامعادله لگاریتمی :

الف) اگر $\log_a^x = \log_a^y$ آنگاه $x = y$.

ب) اگر $\log_a^x = b$ می توان از تعریف لگاریتم برای حل معادله بهره برد .

ج) اگر $a > 1$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x > y$.

د) اگر $0 < a < 1$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x < y$.

توجه توجه !!! : در حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی باید به دامنه تابع لگاریتمی نیز توجه داشت و جواب هایی قابل قبول خواهند بود که در دامنه لگاریتم باشند .

تمرین : معادله $x^{\log_2^2} - x^{\log_2^3} = 0$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{x-2} + \log_x^{2x-2} = 2$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log(x-10) + 2\log x = 1 + \log(x+1)$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{(x^2-2x)} = 2$ چند جواب دارد ؟

تمرین : معادله $\log_{\frac{x}{2}}^{(x-1)} + \log_{\frac{x}{2}}^{(\frac{x}{2}+1)} = 2$ را حل کنید .

تمرین : مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{x}{2}}^{(2x-1)} < 1 + \log_{\frac{x}{2}}^x$ را بیابید . (به دامنه دو لگاریتم نیز دقت کنید)

کاربرد های لگاریتم :

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند از تابع نمایی $f(t) = a(1+r)^t$ تبعیت می کنند که در آن a مقدار اولیه آن چیز و r درصد افزایش یا کاهش (در صورت کاهش r عدد منفی می شود) در هر دوره است.

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد $f(35) = 30(1/02)^{35} \approx 30 \times 2 = 60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید $100 = 30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3} = (1/02)^t \Rightarrow t = \log_{1/02} \frac{10}{3} \approx 60/8$

تمرین : فرض کنید قیمت یک نوع خودرو خاص سالانه ۳۰ درصد افت قیمت دارد و قیمت فعلی آن ۸۰ میلیون تومان است . بعد از چند سال قیمت آن حدود ۶۵ میلیون تومان خواهد بود ؟

تمرین : با نرخ سود ۱۶ درصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

نکته : در بانک ها برای دقت بیشتر از نرخ رشد روزشمار استفاده می شود که فرمول آن $f(t) = a(1 + \frac{r}{365})^{365t}$

۲) شدت زلزله: اگر انرژی آزاد شده از زلزله بر حسب ارگ (Erg) را E و شدت زلزله بر حسب ریشتر را M در نظر

بگیریم داریم: (ارگ برابر 10^{-7} ژول است) $\log E = 11/8 + 1/5 M$

تمرین: انرژی آزاد شده از زلزله ای ۶ ریشتری چقدر است؟

۳) قدمت و نیمه عمر: اگر یک ماده در مدت ثابتی نصف شود آن دوره را نیمه عمر آن ماده می گویند اگر نیمه عمر را با a

نمایش دهیم، در این صورت در مدت زمان t به تعداد $\frac{t}{a}$ بار جرم ماده نصف شده است و کسر باقی مانده از ماده را می

توان از رابطه زیر بدست آورد: $(\frac{1}{2})^{\frac{t}{a}} = b$ (کسر باقی مانده در واقع نسبت مقدار ثانویه به مقدار اولیه است)

نمونه: نوعی ایزوتوپ کربن به نام کربن ۱۴ در موجودات وجود دارد که پس از مرگشان شروع به از بین رفتن می کند و

نیمه عمر آن حدود ۵۷۳۰ سال است که از آن برای تخمین قدمت یک فسیل استفاده می شود.

تمرین: فسیلی یافت شده که مقدار کربن ۱۴ باقی مانده از آن فقط ۲۰ درصد مقدار اولیه است. قدمت این فسیل را

تخمین بنویسید.

تمرین: نیمه عمر نوعی ماده هسته ای ۱۵ سال است. اگر جرم اولیه این ماده ۱۵۰ گرم بوده باشد. پس از ۷۰ سال جرم

باقی مانده آن چقدر است؟

تمرین: تمرین های صفحه ۹۰ را حل کنید.