جزوه ی حسابان ۱

تهیه کننده :

محمّد کرمی دبیر ریاضی شهر ورزقان

پاییز ۹۹

فـــــــصل اول

- یافتن مجموع جملات دنباله ی حسابی و هندسی
- معادله ی درجه دوم
- معادلات گویا و گنگ
- قدر مطلق و ویژگی های آن
- آشنایی با هندسه تحلیلی

مجموع جملات دنباله ی حسابی

در سال گذشته با دنباله ی حسابی و برخی از ویژگی های آن آشنا شدیم ، بد نیست در ابتدا آنها را یک مرور مختصری باهم داشته باشیم.

$\boxed{\text{تعریف}}$ دنباله ای که تفاضل جملات متوالی آن مقداری ثابت باشد را دنباله ی حسابی می گوییم و جملات آن را بصورت زیر نمایش می دهیم : $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$

چون جملات با یک مقدار ثابت اضافه می شوند این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله می نامیم و آن را با d نشان می دهیم

بنابراین جملات دنباله را به اینصورت نیز می توانیم بنویسیم : $a_1 , a_1+d , a_1+2d , \ldots , a_1+(n-1)d$

برای دنباله ی حسابی ویژگی های زیر را آموختیم :

- اگر a_n و a_m دو جمله ی غیر متوالی از دنباله ی حسابی باشند : $d=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}$
- اگر بخواهیم بین اعداد A و B به تعداد k تا عدد درج کنیم تا دنباله ی حسابی تشکیل شود : $d=\dfrac{B-A}{k+1}$
- اگر a_n دنباله ای حسابی باشد و r,s,p,q اعدادی طبیعی باشند :

$$r+s=p+q \quad \Rightarrow \quad a_r+a_s=a_p+a_q$$

- اگر سه عدد a,b,c جملات متوالی یک دنباله ی حسابی باشند در اینصورت : $b=\dfrac{a+c}{2}$
- بهتر است برای راحتی سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی را بصورت $x-d , x , x+d$ بنویسیم .
- بهتر است چهار جمله ی متوالی را بصورت $x-3d , x-d , x+d , x+3d$ بنویسیم .
- بهتر است پنج جمله ی متوالی را بصورت $x-2d , x-d , x , x+d , x+2d$ بنویسیم.

امسال می خواهیم ببینیم که چگونه می توانیم مجموع جملات یک دنباله ی حسابی را با شروع از جمله ی اول و ختم به جمله ی n ام را بدست آوریم . فرض کنیم می خواهیم جملات $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ را با هم جمع کنیم :

مجموع جملات یک دنباله را که از جمله ی اول شروع شود و به جمله ی nام ختم شود را با S_n نشان می دهیم ، پس ما به دنباله S_n دنباله ی حسابی هستیم.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

مقدار S_n را دوباره از آخر به اول می نویسیم :

$$+\quad S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1$$

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-3})+\ldots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

می توان ثابت کرد که همه ی پرانتز ها برابر a_1+a_n می باشد مثلا برای پرانتز دوم و سوم داریم :

$$a_2+a_{n-1}=\underbrace{a_1+d}_{a_2}+\underbrace{a_1+(n-2)d}_{a_{n-1}}=a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}=a_1+a_n$$

$$a_3+a_{n-2}=\underbrace{a_1+2d}_{a_3}+\underbrace{a_1+(n-3)d}_{a_{n-2}}=a_1+a_1+(n-1)d=a_1+a_n$$

حال رابطه ی بدست آمده در بالا را با تبدیل همه ی پرانتز ها به (a_1+a_n) بصورت زیربنویسیم :

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\dots+(a_1+a_n)}_{n} \Rightarrow 2S_n=n(a_1+a_n)$$

در نتیجه به فرمول مجموع جملات یک دنباله ی حسابی می رسیم :

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

در فرمول S_n اگر جمله ی a_n را نیز باز کنیم خواهیم داشت :

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left(a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}\right)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]}$$

صورت دیگر S_n حسابی

نکته : می توانیم فرمول مجموع جملات دنباله حسابی را بصورت زیر نیز داشته باشیم »»

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] \Rightarrow S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$$

یعنی این فرمول یک عبارت درجه دوم ناقص است (جمله ی مستقل از n وجود ندارد) همچنین ضریب n^2 همان نصف قدر نسبت است .

مثال : مجموع n جمله ی اول یک دنباله حسابی از رابطه ی $S_n=(3a-2)n^2+an+a-2$ به دست می آید قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید .

حل »» چون باید جمله ی ثابت وجود نداشته باشد پس مقدار $a-2$ برابر صفر است پس $a=2$ لذا رابطه بصورت $S_n=4n^2+2n$ می باشد که در آن ضریب n^2 نصف قدر نسبت است پس : $d=8$

حل کاردر کلاس صفحه ۴

۱) نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر $a_۱$ و a_n جملات اول وآخر باشند آنگاه : $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$

حل »»» در ابتدای همین جزوه به طور مفصل توضیح داده شده است.

۲) مجموع همه عدد های طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را بدست آورید:

حل »»» می دانیم که مضارب دو رقمی عدد ۴ از عدد ۱۲ شروع می شوند و به عدد ۹۶ ختم می شوند پس :

۱۲ , ۱۶ , ۲۰ , . . . , ۹۶ حال باید بدانیم ۹۶ چندمین عدد است برای اینکار ۹۶ را برابر جمله ی عمومی قرار می دهیم تا شماره جمله بدست آید :

$$\begin{cases} a_۱=۱۲ \\ d=۴ \end{cases} \Rightarrow a_n=۱۲+(n-۱)۴ \quad \Rightarrow \quad a_n=۴n+۸$$

$$۴n+۸=۹۶ \quad \Rightarrow \quad ۴n=۸۸ \quad \Rightarrow \quad n=۲۲$$

یعنی این دنباله ۲۲ جمله دارد حال مجموع آنها را حساب می کنیم :

$$S_n=\frac{۲۲}{۲}\left[۱۲+۹۶\right]=۱۱\times۱۰۸=۱۱۸۸$$

مجموع جملات دنباله ی هندسی

تعریف : هر دنباله ای که در آن به غیر از جمله ی اول سایر جملات از ضرب شدن جمله ی قبل از خودش در یک عدد ثابت تولید شوند را دنباله ای هندسی می گوییم به عبارت دیگر در یک دنباله ی هندسی خارج قسمت جملات متوالی آن همواره عددی ثابت است.

نکته : عدد ثابتب که جملات دنباله در آن ضرب می شوند را قدر نسبت دنباله هندسی می گوییم و آن را با حرف q یا r نشان می دهیم.

چون جملات این دنباله ی در یک عدد ثابت ضرب می شوند این دنباله را بصورت زیر نمایش می دهیم :

$$a_۱ , a_۲ , a_۳ , . . . , a_n , . . .$$

$$a_۱ , a_۱q , a_۱q^۲ , a_۱q^۳ , . . . , a_۱q^{n-۱} , . . .$$

نکته : جمله ی n ام این دنباله را جمله ی عمومی دنباله می گوییم پس : $a_n=a_۱q^{n-۱}$

برخی از ویژگی های دنباله ی هندسی

❖ اگر a_n , a_m دو جمله ی غیر متوالی دنباله هندسی باشند در اینصورت : $q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a}}$

❖ اگر بخواهیم دو عدد B , A به تعداد k تا عدد درج کنیم تا دنباله هندسی تشکیل شود : $q = \sqrt[k+1]{\frac{B}{A}}$

❖ اگر a_n دنباله ای هندسی باشد و r,s,p,q اعدادی طبیعی باشند :

$$r+s=p+q \quad \Rightarrow \quad a_r \times a_s = a_p \times a_q$$

❖ اگر سه عدد a,b,c جملات متوالی یک دنباله ی حسابی باشند در اینصورت : $b^2 = ac$

❖ برای راحتی محاسبات سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی را بصورت $\frac{x}{q}$, x , xq می نویسیم.

حال می خواهیم مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی هندسی را بدست آوریم برای اینکار فرض می کنیم :

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ جمله ی اول یک دنباله هندسی باشد در اینصورت خواهیم داشت ..

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

هر دو طرف معادله را در q ضرب میکنیم «« $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$

حال معادله ی پایین را از معادله ی بالا کم می کنیم در اینصورت به غیر از جمله ی معادله ی بالا و جمله ی آخر معادله ی پایین بقیه جملات چون قرینه هستند حذف خواهند شد و ما در نهایت خواهیم داشت :

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۵ کتاب درسی

مجموع ۱۰ جمله ی اول دنباله ی هندسی مقابل را بدست آورید : $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

حل» در این دنباله $a_1=\frac{1}{8}\ ,\ q=2\ ,\ n=10$:

$$S_{10}=\frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(1-2^{10}\right)}{1-2}=-\frac{-1023}{8}=\frac{1023}{8}$$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۶ کتاب درسی

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه ی اول یک دانه گندم و در خانه ی دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جایزه چند گرم می شود ؟

ب) نشان دهید جایزه ی او بیش از ۱۰۰۰ میایرد تن خواهد شد.

حل »» می توانیم تعداد خانه های شطرنج را بصورت توان هایی از عدد ۲ بنویسیم به این صورت ...

$2^0\ ,\ 2^1\ ,\ 2^2\ ,\ 2^3\ ,\ \ldots\ ,\ 2^{63}$ مجموع این خانه ها همان مقدار جایزه ی مورد نظر است که یک دنباله ی هندسی با $a_1=1$ و قدر نسبت $q=2$ و $n=64$ خواهد بود : $S_{64}=\frac{1(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$ گرم

حال برای قسمت ب این سوال می خواهیم نشان دهیم این مقدار گندم بیشتر از ۱۰۰۰ میلیارد تن است ....

$$\left[2^{64}-1\right]>\left[2^{60}=\left(2^{10}\right)^6=(1024)^6\right]>\left[1000^6=10^{18}gr=10^{15}kg=10^{12}T\right]$$

عدد 10^{12} همان هزار میلیارد می باشد و رابطه ی بالا نشان می دهد که $2^{64}-1$ از عدد 10^{12} بزرگتر است.

حل تمرینات صفحه ۶ کتاب درسی

تمرین ۱) در دنباله ی حسابی $5\ ,\ 8\ ,\ 11,\ldots$ حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود ؟

حل »»

$$s_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]\quad\Rightarrow\quad s_n=\frac{n}{2}\left[10+(n-1)(3)\right]$$

$$\Rightarrow\quad s_n=\frac{n}{2}\left[3n+7\right]$$

مقدار S_n باید از عدد ۴۹۳ بیشتر باشد لذا قرار می دهیم : $S_n > ۴۹۳$ از حل این نامساوی محدوده ی n را مشخص می کنیم .

$$\frac{n}{۲}[۳n+۷] > ۴۹۳ \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲}n^۲ + \frac{۷}{۲}n > ۴۹۳ \quad \Rightarrow \quad n > ۱۷$$

تمرین ۲)

الف)) به کمک شکل روبرو حاصل عبارت مقابل را بدست آورید. $۱+۳+۵+۷+...+(۲n-۱)=$

حل »» با توجه به شکل مقابل طول مربعی که از دایره ها تشکیل یافته است برابر با تعداد n تا عدد فرد پس یک مربع $n \times n$ داریم که می شود : $n \times n = n^۲$

ب)) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود را در قسمت الف بررسی کنید.

حل »» عبارت داده شده یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول ۱ و جمله ی n اُم $(۲n-۱)$ می باشد پس :

$$s_n = \frac{n}{۲}[a_۱ + a_n] \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{n}{۲}[۱+۲n-۱] = n^۲$$

تمرین ۳) مجموع همه ی اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر هستند؟

حل »» اعداد سه رقمی مضرب شش از عدد ۱۰۲ شروع می شوند و به عدد ۹۹۶ ختم می شوند و یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت شش می باشد ابتدا باید تعداد جملات این دنباله را مشخص کنیم ...

$$n = \frac{۹۹۶-۱۰۲}{۶} + ۱ = \frac{۸۹۴}{۲} + ۱ = ۴۴۸ \Rightarrow \quad S_{۴۴۸} = \frac{۴۴۸}{۲}[۱۰۲+۹۹۶] = ۲۴۵۹۵۲$$

تمرین ۴)) در ۲۰ جمله ی اول یک دنباله ی حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ است جمله ی اول وقدر نسبت دنباله را مشخص کنید .

حل »»

مجموع کل جملات دنباله $a_۱ + a_۲ + a_۳ + ... + a_{۲۰} = ۱۳۵ + ۱۵۰$

مجموع کل جملات دنباله $\frac{۲۰}{۲}(۲a+۱۹d) = ۲۸۵ \rightarrow ۱۰(۲a+۱۹d) = ۲۸۵$

$$\xrightarrow{\div ۵} ۲(۲a+۱۹d) = ۵۷ \rightarrow ۴a + ۳۸d = ۵۷ \qquad (۱)$$

مجموع جملات شماره های فرد[1] $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{19} = 135$

$$\to \frac{10}{2}(2a + (10-1)(2d)) = 135 \to 5(2a + 18d) = 135 \xrightarrow{\div 5} 2a + 18d = 27 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 4a + 38d = 57 \\ 2a + 18d = 27 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ (-2)\times \end{matrix} \begin{cases} 4a + 38d = 57 \\ 2a + 18d = 27 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 4a + 38d = 57 \\ -4a - 36d = -54 \end{cases} \to d = \frac{3}{2}$$

$$2a + 18d = 27 \xrightarrow{d=\frac{3}{2}} 2a + 18(\frac{3}{2}) = 27 \to 2a + 27 = 27 \to a = 0$$

[1] . توجه : در یک دنباله‌ی حسابی که جمله‌ی اوّل آن a و قدر نسبت آن d باشد، اگر جملات با شماره‌ی فرد را جدا کنیم، دنباله‌ی حسابی جدیدی بدست می آید که جمله‌ی اوّل a و قدرنسبت آن $2d$ می باشد. همچنین اگر جملات با شماره‌ی زوج را جدا کنیم، دنباله‌ی حسابی جدیدی بدست می آید که جمله‌ی اوّل $a + d$ و قدرنسبت آن $2d$ می باشد.

تمرین ۵)) جمله ی عمومی یک دنباله بصورت $a_n = 2^{n-1}$ است چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

حل »» برای نوشتن فرمول مجموع جملات دنباله ی هندسی به مقدار جمله ی اول و قدر نسبت دنباله نیاز داریم پس ...

$$\begin{cases} n = 1 \ \Rightarrow a_1 = 2^{1-1} = 1 \\ n = 2 \ \Rightarrow a_2 = 2^{2-1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad q = \frac{a_2}{a_1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

حال مقدار S_n را برابر با ۲۵۵ قرار میدهیم:

$$2^n - 1 = 255 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 256 = 2^8 \quad \Rightarrow \quad n = 8$$

یعنی مجموع هشت جمله ی دنباله برابر با ۲۵۵ می شود.

تمرین ۶)) طول ضلع مربعی یک متر است ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم سپس نیمی از مساحت باقی مانده را وبه همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است ؟؟

حل »» مساحت های رنگ شده در هر مرحله از مربع تشکیل یک دنباله هندسی به صورت زیر می دهند..

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots$$

می خواهیم مجموع جملات این دنباله بزرگتر یا مساوی ۹۹ درصد از مساحت مربع باشد پس ...

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}\Rightarrow S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$S_n\geq\frac{99}{100}\quad\Rightarrow\quad 1-\frac{1}{2^n}\geq\frac{99}{100}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{100}\geq\frac{1}{2^n}\quad\Rightarrow\quad 2^n\geq 100\quad\Rightarrow\quad n\geq 7$$

تمرین ۷)) برای عدد حقیقی a $(a\neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید . $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}$

حل »» عبارت مقابل مجموع جملات یک دنباله ی هندسی با جمله ی اول ۱ و قدر نسبت a می باشد که تعداد جملات آن نیز n تا جمله است پس ..

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-a^n)}{1-a}=\frac{1-a^n}{1-a}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید : $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\dots+a^2+a+1)$

حل »»

$$\begin{cases}S_n=1+a+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}\\ S_n=\frac{1-a^n}{1-a}=\frac{a^n-1}{a-1}\end{cases}\Rightarrow\frac{a^n-1}{a-1}=1+a+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}$$

با طرفین وسطین کردن تساوی بالا بدست می آید : $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\dots+a^2+a+1)$

معادلات درجه دوم

در سال گذشته با معادله ی درجه دوم و روش های حل آن آشنا شدیم . جهت یادآوری دوباره آن را با هم تعریف می کنیم.

تعریف فرض کنیم که $a , b , c \in \mathbb{R}$ و $a \neq ۰$ باشد در اینصورت هر معادله به فرم زیر را یک معادله ی درجه دوم می گوییم .

$$ax^{۲} + bx + c = ۰$$

در سال دهم یاد گرفتیم که تعداد جواب های یک معادله ی درجه دوم به علامت دلتا $\left(\Delta = b^{۲} - ۴ac\right)$ بستگی دارد

❖ **اگر $\Delta > ۰$ $\Leftarrow$ معادله دو جواب متمایز دارد.** $\leftarrow$ $x_{۲} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$ $\quad x_{۱} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$

❖ **اگر $\Delta = ۰$ $\Leftarrow$ معادله یک جواب مضاعف دارد.** $\leftarrow$ $x_{۱} = x_{۲} = \dfrac{-b}{۲a}$

❖ **اگر $\Delta < ۰$ $\Leftarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد**

جهت یاد آوری روش حل معادله ی درجه ی دوم کاردرکلاس صفحه ۷ را با هم حل می کنیم ....

۱)) معادله ی $۳x^{۲} = ۵x - ۲$ را حل کنید .

حل »»

$$۳x^{۲} - ۵x + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-۵)^{۲} - ۴(۳)(۲) = ۲۵ - ۲۴ = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \dfrac{۵+۱}{۶} = ۱ \\ x_{۲} = \dfrac{۵-۱}{۶} = \dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

روش دوم : در سال گذشته آموختیم که اگر مجموع ضرایب در معادله ی درجه دوم برابر صفر شود یکی از ریشه یک و دیگری نیز برابر $\dfrac{c}{a}$ است لذا :

$$x_{۱} = ۱ \quad x_{۲} = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$$

۲)) اگر $x = -۱$ یک ریشه معادله ی $۴x^{۲} - mx - ۷ = ۰$ باشد ریشه ی دیگر کدام است ؟

حل »» می دانیم که ریشه های یک معادله در خود معادله صدق می کنند لذا قرار میدهیم : $x = -۱$

$$x=-1 \Rightarrow \quad ۴(-۱)^{۲}-m(-۱)-۷=۰ \quad \Rightarrow \quad ۴+m-۷=۰ \quad \Rightarrow \quad m=۳$$

$$۴x^{۲}-۳x-۷=۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta=۱۲۱ \quad \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\dfrac{۳+۱۱}{۸}=\dfrac{۷}{۴} \\ x_{۲}=\dfrac{۳-۱۱}{۸}=-۱ \end{cases}$$

روش دوم »» در سال گذشته آموختیم که اگر $(b=a+c)$ در اینصورت یکی از ریشه ها منفی یک و دیگری $\dfrac{-c}{a}$ خواهد بود لذا :

$$x_{۱}=-۱ \qquad x_{۲}=\frac{-c}{a}=\frac{۷}{۴}$$

روابط بین ریشه های معادله ی درجه دوم

در یک معادله ی درجه ی دوم بدون تعیین ریشه ها می توانیم مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله را بدست بیاوریم حال اگر β , α ریشه های یک معادله ی درجه دوم باشند مجموع این دو ریشه را $S=\alpha+\beta$ و حاصل ضرب این دو ریشه را $P=\alpha\beta$ می نامیم .

چون β , α ریشه های چند جمله ای $ax^{۲}+bx+c$ هستند پس می توانیم عبارت درجه دوم را بصورت $a(x-\alpha)(x-\beta)$ بنویسیم که در این صورت خواهیم داشت :

$$ax^{۲}-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta \quad \Rightarrow \begin{cases} b=-a(\alpha+\beta) \Rightarrow \boxed{S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}} \\ c=a\,\alpha\beta \Rightarrow \boxed{P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}} \end{cases}$$

البته می توانستیم با فرمول Δ نیز به این نتایج برسیم ....

$$S=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)+\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\frac{-۲b}{۲a}=\frac{b}{a}$$

$$P=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\frac{b^{۲}-\Delta}{۴a^{۲}}=\frac{b^{۲}-b^{۲}+۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{c}{a}$$

نتیجه ی کار را بصورت نکته ی زیر همواره به خاطر می سپاریم ...

به طور کلی در هر معادله ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد روابط زیر همواره برقرارند. $P=\dfrac{c}{a}$ $\quad$ $S=\dfrac{-b}{a}$

نکته : برای تشکیل معادله ی درجه دوم که ریشه ها ی آن داده شود به این صورت عمل می کنیم .

فرض کنیم α , β ریشه های معادله باشند گفتیم که در این صورت معادله ی درجه دوم بصورت زیر خواهد بود...

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=۰ \quad \Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$$

$$\boxed{x^۲-Sx+P=۰}$$

حال با دانستن مطلب سراغ حل سوال کاردرکلاس صفحه ی ۹ می رویم

سوال) معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

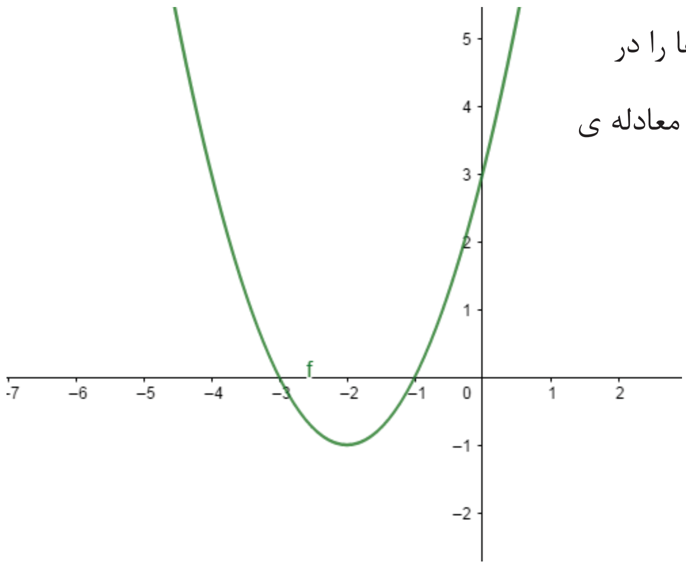
حل »»

$$\begin{cases} S=\left(۲+\sqrt{۳}\right)+\left(۲-\sqrt{۳}\right)=۴ \\ P=\left(۲+\sqrt{۳}\right)\left(۲-\sqrt{۳}\right)=۴-۳=۱ \end{cases} \Rightarrow \quad x^۲-Sx+P=۰ \qquad \Rightarrow \quad x^۲-۴x+۱=۰$$

توجه : در استفاده از فرمول $x^۲-Sx+P=۰$ به علامت منفی پشت S دقت داشته باشید.

صفرهای تابع

فرض کنیم $f(x)=x^۲+۴x+۳$ باشد نمودار این تابع را با هم رسم می کنیم .



با توجه به شکل می بینیم که نمودار $f(x)$ محور طول ها را در دو نقطه ی $x=-۱$, $x=-۳$ قطع می کند حال اگر معادله ی $f(x)=۰$ را با هم حل کنیم خواهیم داشت :

$$x^۲+۴x+۳=۰$$

$$b=a+c \Rightarrow$$

$$x_۱=-۱ \quad , \quad x_۲=-\frac{c}{a}=-۳$$

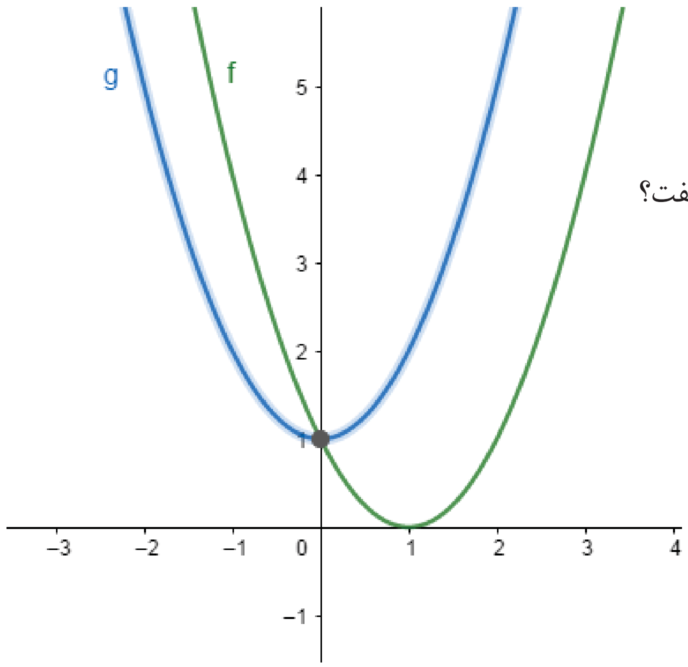
می بینیم که ریشه های معادله $f(x)=۰$ همان محل های برخورد نمودار با محور طول ها است .

نکته ی مهم

برای هر تابع f جواب های معادله ی $f(x)=۰$ را در صورت وجود صفر ها تابع f می نامیم به عبارت دیگر صفر ها تابع f همان مقادیر از $x\in D_f$ هستند که به ازای آن ها $f(x)$ برابر صفر می شود و اگر ما بتوانیم نمودار f را رسم کنیم صفرهای تابع همان نقاط برخورد با محور طول ها خواهند بود .

حل کاردر کلاس صفحه ی ۱۰ کتاب درسی

۱) نمودار سهمی های $f(x)=x^۲-۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ را رسم کنید .



۲) با توجه به نمودارهای رسم شده در مورد جواب های معادله های $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ چه می توان گفت؟

جواب »» می دانیم که تعداد برخوردها با محور طول ها نشان دهنده ی تعداد ریشه های معادله است چون نمودار تابع f فقط در یک نقطه بر محور طول ها مماس است لذا معادله ی $f(x)=۰$ یک ریشه ی مضاعف برابر یک دارد و چون نمودار تابع g با محور طول ها برخوردی ندارد لذا معادله ی $g(x)=۰$ نیز ریشه نخواهد داشت.

یافتن معادله ی سهمی با داشتن چند نقطه از آن

در واقع از سه نقطه که بر یک خط واقع نباشند دقیقا یک سهمی می گذرد و اگر سه نقطه از یک سهمی را داشته باشیم می توانیم معادله ی آن را بدست بیاوریم وقتی سه نقطه نقاط خاص و مهمی از سهمی نباشند محاسبات به سه معادله ی سه مجهولی می انجامد اما اگر نقاط خاصی از سهمی داده شود مثل صفر کننده ها یا راس سهمی در اینصورت محاسبات راحت تر و ساده تر می شود به طور کلی باید بدانیم که :

❖ اگر $x=h$ محور تقارن سهمی باشد می توان معادله ی سهمی را به شکل $y=a(x-h)^۲+b$ نوشت که برای یافتن a, b از سایر اطلاعات مسئله کمک می گیریم.

❖ اگر $(h\ ,k)$ راس سهمی باشد می توان معادله ی سهمی را به شکل $y=a(x-h)^{۲}+k$ نوشت که برای یافتن a از سایر اطلاعات مسئله کمک می گیریم.

❖ اگر α صفر کننده ی یک سهمی باشد می توان معادله ی سهمی را به شکل $y=(ax+b)(x-\alpha)$ نوشت و برای یافتن مقدار a, b از سایر اطلاعات مسئله کمک می گیریم.

❖ اگر $\alpha\ ,\beta$ صفرکننده سهمی باشند می توان معادله ی سهمی را به شکل $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ نوشت و برای یافتن مقدار a از سایر اطلاعات مسئله کمک می گیریم.

مشخص کردن علامت پارامترها ، در نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$:

✓ اگر دهانه ی سهمی رو به بالا باشد $a>۰$ و اگر رو به پایین باشد $a<۰$ خواهد بود.

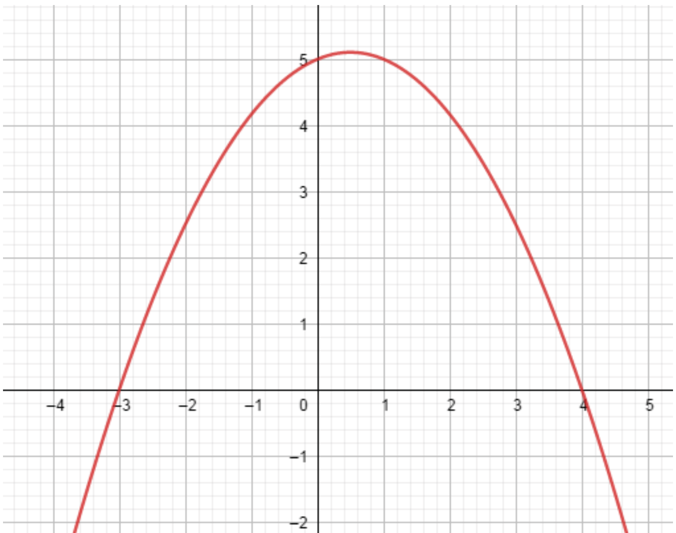
✓ می دانیم که محل برخورد سهمی با محور عرض ها همان مقدار c است پس اگر سهمی محور عرض ها را در بالا قطع کند علامت $c>۰$ و اگر در پایین قطع کند علامت $c<۰$ خواهد بود .

✓ علامت شیب خط مماس بر نمودار سهمی در نقطه ی $(۰\ ,c)$ همان علامت b خواهد بود.

✓ اگر نمودار سهمی در دو نقطه محور طول ها را قطع کند در اینصورت $\Delta>۰$ اگر در یک نقطه بر محور طول ها مماس باشد $\Delta=۰$ و اگر با محور طول ها برخوردی نداشته باشد در اینصورت $\Delta<۰$ خواهد بود.

✓ زمانی که $\Delta>۰$ است اگر محل هر دو برخورد با محور طول ها سمت راست مبدا باشد در اینصورت $s>۰$ و $p>۰$ خواهد بود و اگر هر دو محل برخورد در سمت چپ مبدا باشد در اینصورت $p>۰\ ,\ s<۰$ خواهد بود و زمانی که یکی از برخوردها در سمت چپ و دیگری در سمت راست باشد علامت $p<۰$ و برای علامت S اگر راس سهمی در راست باشد $S>۰$ و اگر راس سهمی در سمت چپ باشد $S<۰$ خواهد بود.

مثال ۱) معادله ی سهمی مقابل را بیابید.



با توجه به شکل ما دو صفر کننده ی سهمی و نقطه ی برخورد با محور عرض ها را داریم پس:

$$\begin{cases}\alpha=-۳\\ \beta=۴\\ (۰\ ,۵)\end{cases}\Rightarrow y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow y=a(x+۳)(x-۴)$$

$$\xRightarrow{(۰,۵)}\quad ۵=a(۰+۳)(۰-۴)\Rightarrow a=-\frac{۵}{۱۲}\quad\Rightarrow\ \boxed{y=-\frac{۵}{۱۲}x^{۲}+\frac{۵}{۱۲}x+۵}$$

مثال ۲) معادله ی سهمی را پیدا کنید که از نقاط $(۲ , ۰)$, $(۳ , ۱)$, $(۴ , ۵)$ می گذرد .

حل»»گفتیم که اگر α صفر کننده ی یک سهمی باشد می توان معادله ی سهمی را به شکل $y=(ax+b)(x-\alpha)$ نوشت نقطه ی $(۲ , ۰)$ نشان می دهد که یکی از صفر کننده ها ۲ است پس : $y=(ax+b)(x-۲)$

برای بدست آوردن a , b از دو نقطه ی دیگر کمک می گیریم :

$$\begin{cases} ۱=(۳a+b)(۳-۲) \\ ۵=(۴a+b)(۴-۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+b=۱ \\ ۴a+b=\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۳}{۲} \\ b=\frac{-۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x^{۲}-\frac{۱۳}{۲}x+۷$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

معادله ی $x^{۴}-۵x^{۲}+۶=۰$ را در نظر بگیرید

می توانیم معادله ی فوق را بصورت $(x^{۲})^{۲}-۵(x^{۲})+۶=۰$ بنویسیم حال اگر t را برابر $x^{۲}$ اختیار کنیم (اینکار را می گن تغییر متغیر) در اینصورت خواهیم داشت $t^{۲}-۵t+۶=۰$ در واقع با یک تغییر متغییر ما یک معادله ی درجه ی چهار را به معادله ی درجه دو تبدیل کردیم که حل آن را از قبل می دانیم با یکی از روش ها این معادله را حل میکنیم :

$$x^{۴}-۵x^{۲}+۶=۰ \xrightarrow{t=x^{۲}} t^{۲}-۵t+۶=۰$$

$$t^{۲}-۵t+۶=۰ \Rightarrow (t-۳)(t-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \\ t=۲ \end{cases}$$

حال از روی مقادیر بدست آمده برای t می توانیم مقادیر ممکن برای x را مشخص کنیم …

$$\begin{cases} t=۲ \Rightarrow x^{۲}=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=۳ \Rightarrow x^{۲}=۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

مثال ۲) جواب های معادله ی زیر را در صورت وجود بیابید.

$$x^{\frac{۲}{۳}}+x^{\frac{۱}{۳}}=۱$$

حل »» می توانیم این معادله را با یک تغییر متغیر به یک معادله ی درجه دو تبدیل کنیم کافی است که t را برابر $x^{\frac{1}{3}}$ اختیار کنیم که معادله به صورت زیر تبدیل خواهد شد ...

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)-1=0 \quad \overset{t=x^{\frac{1}{3}}}{\Longrightarrow} \quad t^{2}+t-1=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}=-2+\sqrt{5} \\ x^{\frac{1}{3}}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}=-2-\sqrt{5} \end{cases}$$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۳

همه ی صفر های تابع $f(x)=x^{4}-10x^{2}+16$ را بیابید .

حل »» آموختیم که برای مشخص کردن صفر های تابع f کافیست معادله ی $f(x)=0$ را حل کنیم که ریشه های این معادله همان صفرهای تابع خواهند بود پس »»

$$f(x)=x^{4}-10x^{2}+16=\left(x^{2}\right)^{2}-10\left(x^{2}\right)+16=0 \quad \overset{t=x^{2}}{\Longrightarrow} t^{2}-10t+16=0$$

$$(t-8)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=8 \rightarrow x^{2}=8 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2} \\ t_2=2 \rightarrow x^{2}=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

روش هندسی حل معادلات

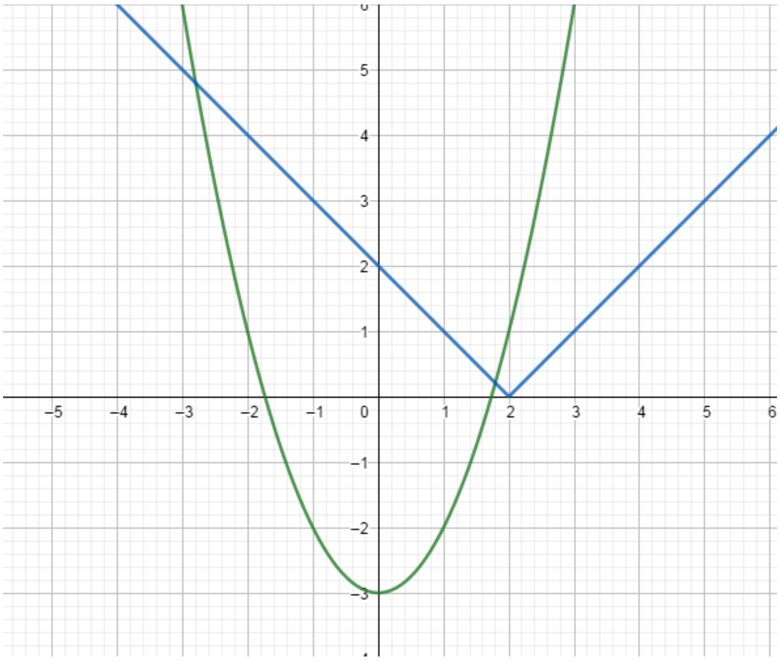
بعضی وقت ها می توان با کمک رسم نمودار وجود جواب ها برای بعضی معادله ها را پیش بینی کرد بعضی وقت ها هم می توان جواب معادله را با دقت خوبی بدست آورد نکته اینجاست که وقتی نقطه ای مانند $(x_0\,,\,y_0)$ نقطه ی تلاقی دو نمودار است یعنی اینکه هر دو نمودار برای ورودی x_0 خروجی یکسانی به اندازه y_0 دارند پس از اینکته می توان استفاده کرد .

فرض کنیم می خواهیم معادله ی $f(x)=g(x)$ را حل کنیم با رسم نمودار های دو تابع می بینیم این دو تابع در نقطه ی $(x_\circ , y_\circ)$ متقاطع اند یعنی : $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ و این یعنی اینکه $x_\circ$ ریشه ی این معادله است .

نکته : طول نقطه ی تقاطع دو نمودار $y=f(x)$ و $y=g(x)$ همان جواب معادله ی $f(x)=g(x)$ خواهد بود .

مثال : تعداد جواب های معادله ی $x^۲-۳=|x-۲|$ را به روش هندسی مشخص کنید.

حل »» فرض کنیم $f(x)=x^۲-۳$ و $g(x)=|x-۲|$ باشد.



نمودار دو تابع را رسم می کنیم تا در مورد تعداد نقاط برخورد قضاوت کنیم . می بینیم که این دو نمودار در دو نقطه همدیگر را قطع می کنند لذا معادله دو ریشه خواهد داشت همچنین یکی از ریشه در سمت راست و نزدیک عدد ۲ و دیگری در سمت چپ و نزدیک عدد ۳- قرار دارند .این ریشه ها را به روش جبری حل کنیم مقدار دقیق ریشه ها برابر هستند با ...

$$x=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}\approx -2.7912878474779$$

$$x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}\approx 1.7912878474779$$

حل تمرینات صفحه ی ۱۵ کتاب درسی

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

حل »» الف))

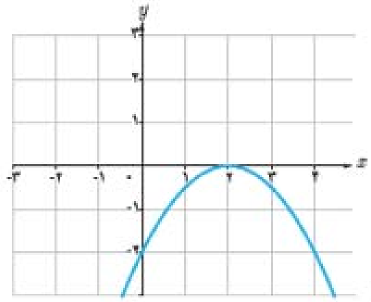
$$\alpha=\frac{1}{3}\ ,\ \beta=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \begin{cases} S=\alpha+\beta=1 \\ P=\alpha\beta=\frac{2}{9} \end{cases}\ \Rightarrow\ \boxed{x^2-x+\frac{2}{9}=0}$$

ب)) فرض کنیم یکی از ریشه ها برابر α و دیگری 2α باشد در اینصورت معادله بصورت زیر خواهد بود :

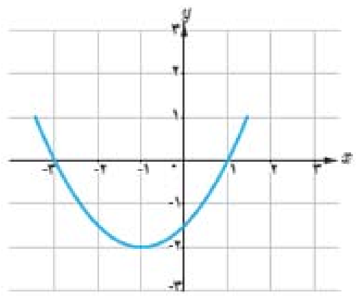
$$S=3\alpha\ \ ,\ \ P=2\alpha^2\ \ \Rightarrow\ \ x^2-(3\alpha)x+(2\alpha^2)=0$$

که با تغییر مقدار α معادله نیز تغییر خواهد کرد پس بی شمار معادله می توان با توصیف بالا نوشت.

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



(الف)



(ب)

برای حالت الف ما راس سهمی و محل برخورد با محور عرض ها (c) را داریم پس : $c=-2$ و $s(2,0)$

لذا معادله بصورت زیر خواهد بود ...

$$y=a(x-x_s)^2+y_s\ \Rightarrow\ y=a(x-2)^2\ \xRightarrow{(0,-2)}\ -2=a(0-2)^2\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2\ \Rightarrow\ \boxed{y=-\frac{1}{2}x^2+2x-2}$$

برای حالت ب صفرکننده ها و راس را داریم $\beta=-3$, $\alpha=1$, $s(-1,-2)$ پس معادله را می توانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ \Rightarrow\ y=a(x-1)(x+3)\ \Rightarrow\ y=a(x^2+2x-3)$$ **حال با قرار دادن**

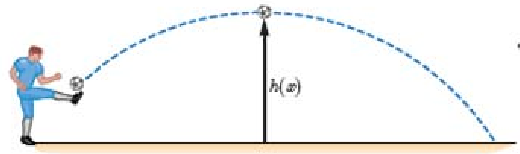
مختصات راس مقدار a را نیز بدست می آوریم : $a=\frac{1}{2}$ پس :

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}}$$

۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-0/03x(x-36)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x برحسب متر است)

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.



$h(x)=-0/03x(x-36)=-0/03x^{2}+1/08x$ محل های برخورد با زمین همان صفر های تابع هستند پس می تواند جواب های معادله ی $-0/03x^{2}+1/08x=0$ را بدست بیاوریم و فاصله ی آنها را مشخص کنیم :

$-0/03x^{2}+1/08x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \& \quad x_2=36$ یعنی توپ با طی ۳۶ متر دوباره به زمین برخورد خواهد کرد .

بیشترین ارتفاعی که توپ خواهد داشت همان مقدار ماکزیمم تابع است پس قسمت ب مقدار y_s را می خواهد :

$$x_s=\frac{-b}{2a}=\frac{-1/08}{2(-0/03)}=18 \Rightarrow \quad y_s=-0/03(18)^{2}+1/08(18)=9/72$$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^{3}-4x$

ب) $g(x)=2x^{3}+x^{2}+3x$

پ) $h(x)=x^{4}+3x^{2}+5$

الف) $f(x)=0 \Rightarrow x^{3}-4x=0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{cases}$

ب) $g(x)=0 \Rightarrow 2x^{3}+x^{2}+3x=0 \Rightarrow x\left(2x^{2}+x+3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$

پ) $\underbrace{t^{2}+3t+5}_{\Delta<0}=0 \xRightarrow{x^{2}=t} x^{4}+3x^{2}+5=0 \Rightarrow h(x)=0$ صفرکننده ای ندارد .

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۴-۳x^۲-۴=۰$

ب) $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲-۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶=۰$

پ) $(۴-x^۲)^۲-(۴-x^۲)=۱۲$

الف)

$$t=x^۲ \Rightarrow t^۲-۳t-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=-۱ \Rightarrow \otimes \\ t_۲=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲ \\ x_۲=-۲ \end{cases} \end{cases}$$

ب)

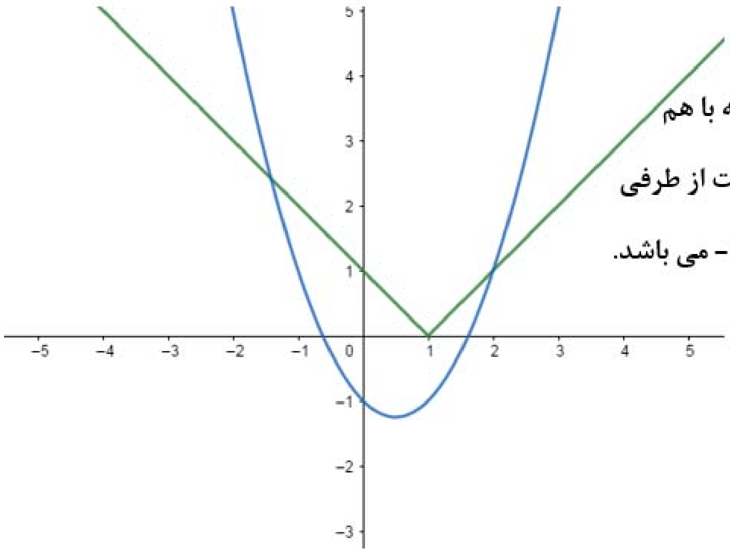
$$k=\frac{x^۲}{۳}-۲ \Rightarrow k^۲-۷k+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} k_۱=۱ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۳ \\ x_۲=-۳ \end{cases} \\ k_۲=۶ \Rightarrow \begin{cases} x_۳=\sqrt{۲۴} \\ x_۴=-\sqrt{۲۴} \end{cases} \end{cases}$$

پ))

$$p=۴-x^۲ \Rightarrow p^۲-p۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} p_۱=۴ \Rightarrow x_۱=۰ \\ p_۲=-۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۲=\sqrt{۷} \\ x_۳=-\sqrt{۷} \end{cases} \end{cases}$$

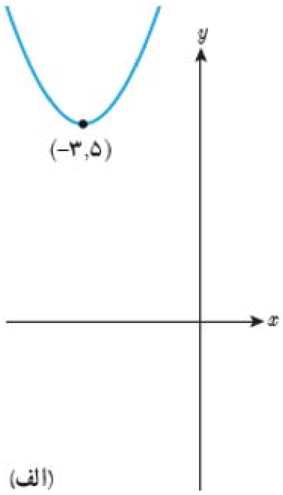
۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-۱|=x^۲-x-۱$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

فرض می کنیم $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=x^۲-x-۱$ است نمودار آنها را رسم می کنیم تا در مورد ریشه های معادله $f(x)=g(x)$ بحث کنیم .



با توجه به نمودار دو تابع مشخص است که نمودارها در دو نقطه با هم برخورد دارند لذا معادله ی مورد نظر نیز دو ریشه خواهد داشت از طرفی یک از ریشه ها برابر ۲ است و ریشه ی دیگر عددی بین ۱- و ۲- می باشد.

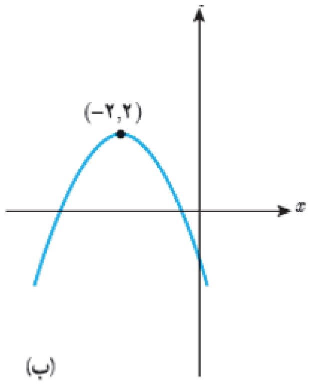
۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است که در آن $|a|=1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



چون این نمودار با محور طول ها برخوردی ندارد لذا تابع فاقد صفر کننده می باشد

و با توجه به راس آن می توانیم ضابطه ی تابع را بصورت زیر بنویسیم :

$$y=a(x-x_s)^2+y_s \quad \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x_s=-3 \\ y_s=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2+5}$$



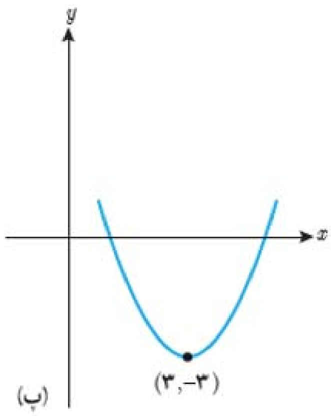
چون این نمودار محور طول ها را در دو نقطه قطع می کند پس دو صفرکننده خواهد داشت ابتدا

ضابطه را می نویسیم و از روی آن صفر کننده ها را مشخص می کنیم :

$$\begin{cases} a=-1 \\ x_s=-2 \\ y_s=2 \end{cases} \Rightarrow \quad y=a(x-x_s)^2+y_s \quad \Rightarrow \quad y=-(x+2)^2+2$$

حال معادله را برابر صفر قرار می دهیم تا صفرکننده ها بدست آیند...

$$-(x+2)^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2=2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=\sqrt{2}-2 \\ x_2=-\sqrt{2}-2 \end{cases}$$



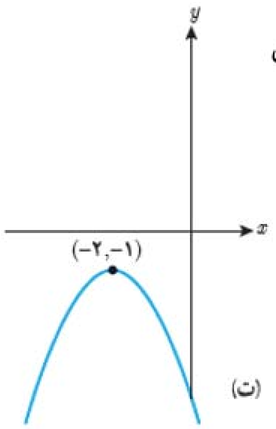
این نمودار نیز محور طول ها را در دو نقطه قطع می کند لذا دوتا صفر کننده دارد....

ضابطه را بدست می آوریم سپس از روی آن صفرکننده ها را مشخص می کنیم .

$$\begin{cases} a=1 \\ x_s=3 \\ y_s=-3 \end{cases} \Rightarrow \quad y=a(x-x_s)^2+y_s \quad \Rightarrow \quad y=(x-3)^2-3$$

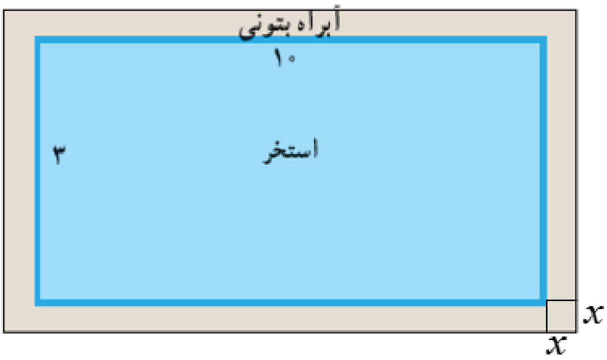
حال صفر کننده ها را مشخص می کنیم ....

$$(x-3)^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{3}+3 \\ x_2=-\sqrt{3}+3 \end{cases}$$



این نمودار چون محور طول ها را قطع نمی کند پس فاقد صفرکننده می باشد فقط ضابطه ی آن را مشخص می کنیم ...

$$\begin{cases} a=-۱ \\ x_s=-۲ \\ y_s=-۱ \end{cases} \Rightarrow \quad y=a(x-x_s)^{۲}+y_s \qquad \boxed{y=-(x+۲)^{۲}-۱}$$



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$$۴x^{۲}+۲۰x+۶x=۱۴$$

$$۴x^{۲}+۲۶x\ ۱۴=۰$$

$$۲x^{۲}+۱۳x-۷=۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta=۲۲۵ \quad \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۱}{۲} & \text{ق ق} \\ x_۲=-۷ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

** برای حل این سوال از ماشین حساب استفاده کنید .

ابتدا مساحت دیوار را به سانتی متر مربع تبدیل می کنیم که می شود ۵۲۸۰۰۰ سانتی متر مربع سپس ابعاد کاشی ها را برابر x برای عرض کاشی و $۴x+۱$ برای طول کاشی در نظر می گیریم که مساحت هر کاشی می شود ..

$S=۴x^{۲}+x$ چون ما به تعداد ۲۰۰۰ تا کاشی مصرف شده داریم پس مساحت کل آنها می شود .....

$S_T=۲۰۰۰(۴x^{۲}+x)=۸۰۰۰x^{۲}+۲۰۰۰x$ این مساحت با مساحت دیوار برابر است پس ما معادله ای بصورت زیر می توانیم تشکیل دهیم ...

$۸۰۰۰x^{۲}+۲۰۰۰x=۵۲۸۰۰۰$ حل این معادله مقدار x را برای ما خواهد داد پس آن را حل می کنیم ....

$$۸۰۰۰x^{۲}+۲۰۰۰x-۵۲۸۰۰۰=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=-۸/۲۵ \\ x_{۲}=۸ \end{cases}$$

مقدار مثبت x قابل قبول است پس ابعاد کاشی ۸×۳۳ می باشد.

روش حل معادلات گویا

معادله ای را که در آن یک عبارت گویا با یک عبارت گویای دیگری برابر است و مجهول حداقل در مخرج یکی از کسرها وجود دارد معادله ی گویا می گویند .

برای مثال معادله های $\frac{x}{۳x-۲}=\frac{۲}{x+۴}$ یا $\frac{۲}{x^{۲}-۴}=\frac{x-۱}{x+۳}+\frac{۲x}{x+۱}$ معادله هایی گویا هستند .

برای حل کردن یک معادله ی گویا ابتدا ک .م .م مخرج ها را بدست می آوریم و طرفین معادله را در ک م م مخرج ها ضرب می کنیم با این کار یک معادله ی گویا به یک معادله ی چند جمله ای خطی یا درجه دو یا .... تبدیل خواهد شد که حل آن ها را از قبل آموخته ایم . پس از حل این معادله ها جواب هایی را قبول می کنیم که مخرج هیچ یک از کسرهای معادله ی اولیه را صفر نکند/

مثال ۱) همه ی جواب های معادله ی $\frac{۲x+۴}{x^{۲}-۹}=\frac{x}{x+۳}+\frac{۲}{x-۳}$ را بدست آورید.

حل »» $\frac{۲}{x-۳}+\frac{x}{x+۳}=\frac{۲x+۴}{x^{۲}-۹} \Rightarrow \begin{cases} x-۳ \\ x+۳ \\ x^{۲}-۹ \end{cases} \Rightarrow x^{۲}-۹=$ ک.م.م

$$\left(x^{۲}-۹\right)\times\left(\frac{۲}{x-۳}+\frac{x}{x+۳}=\frac{۲x+۴}{x^{۲}-۹}\right) \Rightarrow ۲(x+۳)+x(x-۳)=۲x+۴$$

$$۲x+۶+x^{۲}-۳x=۲x+۴ \Rightarrow x^{۲}-۳x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۱ \text{ ق ق} \\ x_{۲}=۲ \text{ ق ق} \end{cases}$$

چون جواب های بدست آمده مخرج هیچ کسری از معادله ی اولیه را صفر نمی کنند پس هر دو قابل قبول هستند.

مثال ۲)) نسبت آهن در یک آلیاژ ۲۰ ٪ است . اگر قطعه ای ۵ کیلو گرمی از این آلیاژ را ذوب کنیم چقدر آهن به آن اضافه کنیم تا آلیاژ ۳۵ ٪ آهن بدست آوریم ؟

حل »» ابتدا مقدار آهن موجود در ۵ کیلوگرم آلیاژ در دست را مشخص می کنیم که برابر است با $\frac{۲۰}{۱۰۰}\times۵=۱kg$

حال فرض کنیم مقدار آهن اضافه شده برابر x کیلو گرم باشد پس می توانیم یک تناسب به شکل زیر داشته باشیم ...

$$\frac{۱+x}{۵+x}=\frac{۳۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۰۰(۱+x)=۳۵(۵+x) \Rightarrow ۱۰۰+۱۰۰x=۱۷۵+۳۵x$$

$$\Rightarrow ۶۵x=۷۵ \Rightarrow x=\frac{۷۵}{۶۵}=۱/۱۵kg$$

مثال ۳)) نسبت آهن در آلیاژ A برابر ۳۰ ٪ است اگر قطعه ای ۱۲ کیلوگرمی از آلیاژ A را ذوب کنیم چقدر آلیاژ B که شامل ۸ ٪ آهن است را به آن اضافه کنیم تا آلیاژ حاصل دارای ۱۵ ٪ آهن باشد .

حل »» ابتدا مقدار آهن موجود در ۱۲ کیلو گرم آلیاژ نوع A را مشخص می کنیم که برابر است با : $\frac{۳۰}{۱۰۰}\times۱۲=۳/۶$

حال فرض کنیم به مقدار x کیلوگرم از آلیاژ B را به آن اضافه می کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{۳/۶+۰/۰۸x}{۱۲+x}=\frac{۱۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۰۰(۳/۶+۰/۰۸x)=۱۵(۱۲+x)$$

$$\Rightarrow ۳۶۰+۸x=۱۸۰+۱۵x \Rightarrow ۷x=۱۸۰ \Rightarrow x=\frac{۱۸۰}{۷}=۲۵/۷kg$$

حل کاردر کلاس صفحه ۱۹

۱) معادله ی $\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}=۳$ را حل کنید .

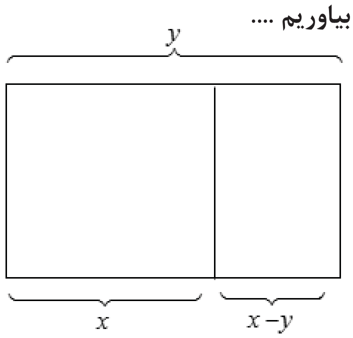
ک م م مخرج ها $(x-۲)^۲ \Rightarrow \begin{cases}(x-۲)^۲=(x-۲)(x-۲)\\ x-۲\end{cases}$

$$(x-۲)^۲\times\left(\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}=۳\right) \Rightarrow ۱+۲(x-۲)=۳(x-۲)^۲ \Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_۱=\frac{۱۴+۲}{۶}=\frac{۸}{۳} & \text{ق ق}\\ x_۲=\frac{۱۴-۲}{۶}=۲ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

مستطیل طلایی

یک مستطیل را طلایی گویند هرگاه دارای این ویژگی باشد که اگر آن را با یک خط به یک مستطیل و یک مربع تقسیم کنیم مستطیل جدید با مستطیل اولیه متشابه باشد در شکل زیر می خواهیم نسبت طول به عرض یک مستطیل طلایی را بدست بیاوریم ....



اگر طول مستطیل اولیه را با y و عرض آن را با x نشان دهیم در این صورت عرض مستطیل کوچک تر $y-x$ و طول آن برابر x خواهد بود . برای اینکه این دو مستطیل با هم متشابه باشند باید اضلاع متناظر متناسب باشند یعنی $\frac{x}{y}=\frac{y-x}{x}$ از این تناسب به دست آمده می توانیم داشته باشیم ....

$$\frac{y-x}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow y^۲-xy-x^۲=۰ \Rightarrow \Delta=(-x)^۲-۴(۱)(-x^۲)=۵x^۲$$

$$\begin{cases}y_۱=\frac{x+x\sqrt{۵}}{۲}=\frac{x(۱+\sqrt{۵})}{۲} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} & \text{ق ق}\\ y_۲=\frac{x-x\sqrt{۵}}{۲}=\frac{x\left(۱-\sqrt{۵}\right)}{۲} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲) اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد طول و عرض زمین چقدر است؟؟

نکته : عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را عدد طلایی می گویند.

حل »» فرض کنیم طول زمین y و عرض زمین x باشد داریم :

$$\begin{cases} x+y=۷۲ \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{۷۲-y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \quad \Rightarrow ۲y=-(۱+\sqrt{۵})y+۷۲(۱+\sqrt{۵})$$

$$(۳+\sqrt{۵})y=۷۲(۱+\sqrt{۵}) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{۷۲(۱+\sqrt{۵})}{۳+\sqrt{۵}}\simeq ۴۴/۵ \qquad \Rightarrow \quad x=۷۲-\frac{۷۲(۱+\sqrt{۵})}{۳+\sqrt{۵}}\simeq ۲۷/۵$$

دو مثال دیگر از معادلات گویا را در زیر با هم می بینیم:

۱) مدیر مهد کودک چند اسباب بازی مشابه برای هدیه دادن، خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰ هزار تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به او تخفیف می داد، او با همان پول چهار اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

حل : فرض کنید که قیمت هر اسباب بازی x و تعداد کل اسباب بازی ها n باشد. در این صورت :

$$nx=۱۲۰۰۰۰ \rightarrow n=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}$$

$$(n+۴)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰ \rightarrow (\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}+۴)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\times x}(۱۲۰۰۰۰+۴x)(x-۱۰۰۰)=۱۲۰۰۰۰x$$

$$\rightarrow ۴x^۲-۴۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰x-۱۲۰۰۰۰۰۰۰=۱۲۰۰۰۰x \rightarrow ۴x^۲-۴۰۰۰x-۱۲۰۰۰۰۰۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} x^۲-۱۰۰۰x-۳۰۰۰۰۰۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=(-۱۰۰۰)^۲-۴(۱)(-۳۰۰۰۰۰۰۰)=۱۲۱۰۰۰۰۰۰} \begin{cases} x_۱=\dfrac{۱۰۰۰+۱۱۰۰۰}{۲}=۶۰۰۰ \\ x_۲=\dfrac{۱۰۰۰-۱۱۰۰۰}{۲}=-۵۰۰۰ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-۵۰۰۰$ قابل قبول نیست.

۲) در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. امّا اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اوّل ۱۵ روز زودتر از کارگر دوّم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند.

حل : اگر کارگر اوّل در x روز کار را تمام می کند، پس کارگر دوّم همین کـار را در $x+۱۵$ روز تمـام مـی کند. لذا

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۸x(x+۱۵)=} ۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵) \rightarrow ۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^{۲}+۱۵x$$

$$\rightarrow x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۲۱)^{۲}-۴(۱)(۲۷۰)=۴۴۱+۱۰۸۰=۱۵۲۱} \begin{cases} x_{۱}=\dfrac{۲۱+۳۹}{۲}=۳۰ \\ x_{۲}=\dfrac{۲۱-۳۹}{۲}=-۹ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-۹$ قابل قبول نیست.

معادلات گنگ

هر معادله ای که درآن حداقل یک عبارت رادیکالی با مقدار مجهول وجود داشته باشد را معادله ا ی گنگ می گوییم .

مانند : $\sqrt{x+۲}=۲x-۱$ یا $۲\sqrt{۳x+۵}=-۳\sqrt{x-۱}$ و . . .

برای حل یک معادله ی رادیکالی عبرات های رادیکالی را طوری در معادله جابجا می کنیم که با به توان رساندن طرفین معادله عبارت رادیکالی حذف شود و یک عبارت بدون رادیکال داشته باشیم و با حل آن مقادیر ممکن برای متغیر معادله را بدست بیاوریم چون ممکن است عمل توان رسانی ریشه های اضافه برای معادله ایجاد کند لذا ریشه های بدست آمده را در معادله ی اولیه جاگذاری می کنیم تا ببینیم معادله به ازای آنها برقرار است یا نه ، اگر برقرار شد ریشه را قبول می کنیم و اگر معادله برقرار نشد ریشه را قبول نمی کنیم .

مثال) معادله ی $\sqrt{x+۲}=x-۴$ را حل کنید .

ق ق

$$\left(\sqrt{x+۲}\right)^{۲}=(x-۴)^{۲} \Rightarrow x+۲=x^{۲}-۸x+۱۶ \Rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰$$

$$(x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{غ ق ق} \\ x=۷ & \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال) جواب های معادله ی $\sqrt{۳x-۲}+x-۴=۰$ را در صورت وجود بدست آورید

حل »» ابتدا جملات معادله را طوری جابجایی می کنیم تا عبارت رادیکالی در یک طرف معادله تنها باشد سپس طرفین را به توان دو می رسانیم …

$$\sqrt{۳x-۲}=۴-x \quad \Rightarrow \quad ۳x-۲=۱۶-۸x+x^{۲} \quad \Rightarrow x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰$$

$$(x-۹)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۲ & \text{ق ق} \\ x_{۲}=۹ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته مهم : در حل معادلات گنگ می توان با تعیین دامنه تعریف معادله ، جواب های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد مثلا برای مثال بالا می دانیم که جواب و زیر رادیکال با فرجه ی زوج باید نامنفی باشد لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۳x-۲\geq ۰ \\ ۴-x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq \frac{۲}{۳} \\ ۴\geq x \end{cases} \xrightarrow{\cap} \frac{۲}{۳}\leq x\leq ۴$$

می بینیم که فقط عدد ۲ در این بازه است .

حل کاردرکلاس صفحه ی ۲۱

حل ۱ »» فرض کنیم عدد مورد نظر x باشد پس معدله ای بصورت $x+\sqrt{x}=۶$ تشکیل می دهیم و حل می کنیم

$$x+\sqrt{x}=۶ \quad \Rightarrow \sqrt{x}=۶-x \quad \Rightarrow \quad x=(۶-x)^{۲} \quad \Rightarrow \quad x=۳۶-۱۲x+x^{۲}$$

$$x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰ \quad \Rightarrow \quad (x-۴)(x-۹)=۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=۴ \\ x=۹ \end{cases}$$

که فقط عدد ۴ در معادله صدق می کند وقابل قبول است.

حل ۲ »»

$$\sqrt{x^{۲}-۴}=-۲\sqrt{x-۲} \quad \Rightarrow \quad x^{۲}-۴=۴(x-۲) \quad \Rightarrow \quad x^{۲}-۴x+۴=۰$$

$$\Rightarrow \quad (x-۲)^{۲}=۰ \quad \Rightarrow \quad x=۲$$

بدون حل معادله نیز می توانستیم بگوییم که مقدار رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است لذا تنها زمانی این امکان وجود دارد که هر دو رادیکال همزمان برابر صفر شوند که این امکان فقط برای $x=۲$ ممکن خواهد بود لذا $x=۲$ تنها جواب این معادله است.

حل تمرینات صفحه ۲۲ کتاب درسی

معادلات زیر را حل کنید .

$$۱)\ \frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱} \quad\Rightarrow\quad \big(x(x+۱)\big)\times\left(\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}\right)\quad\Rightarrow$$

$$۶(x+۱)=۲(x)(x+۱)+x(x-۳) \quad\Rightarrow ۳x^{۲}-۷x-۶=۰ \quad\Rightarrow\begin{cases} x_{۱}=۳ & \text{ق ق}\\ x_{۲}=-\frac{۲}{۳} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$۲)\ \frac{p}{۲-p}+\frac{۲}{p}=\frac{-۳}{۲} \quad\Rightarrow \big(۲p(۲-p)\big)\times\left(\frac{p}{۲-p}+\frac{۲}{p}=\frac{-۳}{۲}\right)\Rightarrow$$

$$p(۲p)+۲(۲)(۲-p)=-۳(p(۲-p)) \quad\Rightarrow ۲p^{۲}+۸-۴p=-۶p+۳p^{۲}$$

$$\Rightarrow p^{۲}-۲p-۸=۰ \Rightarrow\begin{cases} p_{۱}=۴ & \text{ق ق}\\ p_{۲}=-۲ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$۳)\ \frac{۳y+۵}{y^{۲}+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y} \quad\Rightarrow\quad (y^{۲}+۵y)\times\left(\frac{۳y+۵}{y^{۲}+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}\right)$$

$$\Rightarrow ۳y+۵+(y+۴)(y)=(y+۱)(y+۵) \Rightarrow ۳y+۵+y^{۲}+۴y=y^{۲}+۶y+۵$$

$$\Rightarrow ۴y=۰ \Rightarrow y=۰ \ \text{غ ق ق}$$

$$۴)\ ۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴} \quad\Rightarrow \left(۲\sqrt{x}\right)^{۲}=\left(\sqrt{۳x+۴}\right)^{۲} \Rightarrow ۴x=۳x+۴ \Rightarrow x=۴ \ \text{ق ق}$$

$$۵)\ \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x \quad\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\left(۱-\sqrt{x}\right)\left(۱+\sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow\left(۱-\sqrt{x}\right)\left[\left(۱+\sqrt{x}\right)^{۲}-۱\right]=۰ \Rightarrow\begin{cases} x=۱ & \text{ق ق}\\ x=۰ & \text{ق ق}\end{cases}$$

۶) $\dfrac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\dfrac{۱}{\sqrt{x}-۲} \Rightarrow \dfrac{۵\left(\sqrt{x}-۲\right)+\sqrt{x}+۲}{x-۴}=۲ \Rightarrow \dfrac{۶\sqrt{x}-۸}{x-۴}=۲$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{x}-۸=۲x-۸ \Rightarrow x=۳\sqrt{x} \Rightarrow x^۲=۹x \Rightarrow x^۲-۹x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۹ \end{cases}$$

---

۷) $\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۱}=۴ \Rightarrow \sqrt{x+۳}=۴-\sqrt{x+۱}$

$$x+۳=۱۶-۸\sqrt{x+۱}+x+۱ \Rightarrow ۸\sqrt{x+۱}=۱۴$$

$$\sqrt{x+۱}=\frac{۷}{۴} \Rightarrow x+۱=\frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow x=\frac{۳۳}{۱۶}$$

جواب تمرین ۹) فرض کنیم ماشین B در t ساعت کار را انجام دهد پس برای ماشین A که ۱۵ ساعت کمتر از ماشین B کار را انجام می دهد این کار $t-۱۵$ ساعت طول خواهد کشید . هر دو ماشین باهم در مدت ۱۸ ساعت کار را انجام می دهند لذا می توانیم معادله ای بصورت زیر بین آنها تشکیل دهیم ...

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t-۱۵}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow \left(۱۸t(t-۱۵)\right)\left(\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t-۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\right) \Rightarrow$$

$$۱۸(t-۱۵)+۱۸t=t(t-۱۵) \Rightarrow t^۲-۵۱t+۲۷۰=۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۶ \text{ غ ق ق} \\ t_۲=۴۵ \text{ ق ق} \end{cases}$$

پس ماشین B در ۴۵ ساعت آن کار را انجم می دهد و ماشین A هم در ۳۰ ساعت . و هر دو با هم در ۱۸ ساعت .

جواب تمرین ۱۰)

حل : فرض می کنیم که سرعت حرکت کشتی در جهت آب برابر v باشد. در این صورت سرعت حرکت کشتی در برگشت $v-۸$ می شود. همچنین چون $t_۱=\frac{۱۴۴}{v_۱}=\frac{۱۴۴}{v}$ و $t_۲=\frac{۱۴۴}{v_۲}=\frac{۱۴۴}{v-۸}$ و

$$t_۱+t_۲=۱۷-۲=۱۵$$

لذا

$$\frac{۱۴۴}{v}+\frac{۱۴۴}{v-۸}=۱۵ \xrightarrow{\times v(v-۸)} ۱۴۴(v-۸)+۱۴۴v=۱۵v(v-۸)$$

$$\rightarrow ۱۴۴v-۱۱۵۲+۱۴۴v=۱۵v^۲-۱۲۰v \rightarrow ۱۵v^۲-۴۰۸v+۱۱۵۲=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۳} ۵v^۲-۱۳۶v+۳۸۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۰۸۱۶} \begin{cases} v=\dfrac{۱۳۶+۱۰۴}{۱۰}=۲۴ \\ v=\dfrac{۱۳۶-۱۰۴}{۱۰}=۳/۲ \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=۳/۲$ قابل قبول نیست.

قدر مطلق و ویژگی های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی های آن آشنا شدیم همانطور که آموختیم قدر مطلق یک عدد حقیقی مانند x را به صورت زیر می توان تعریف کرد:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

حل کاردرکلاس صفحه ۲۳

$$|-5-(-3)| = |-5+3| = |-2| = -(-2) = 2$$

$$\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| = -\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\left|1/5 - 1\frac{1}{2}\right| = |1/5 - 1/5| = |0| = 0$$

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = \sqrt{\left(a^2+1\right)^2} = \left|a^2+1\right| = a^2+1$

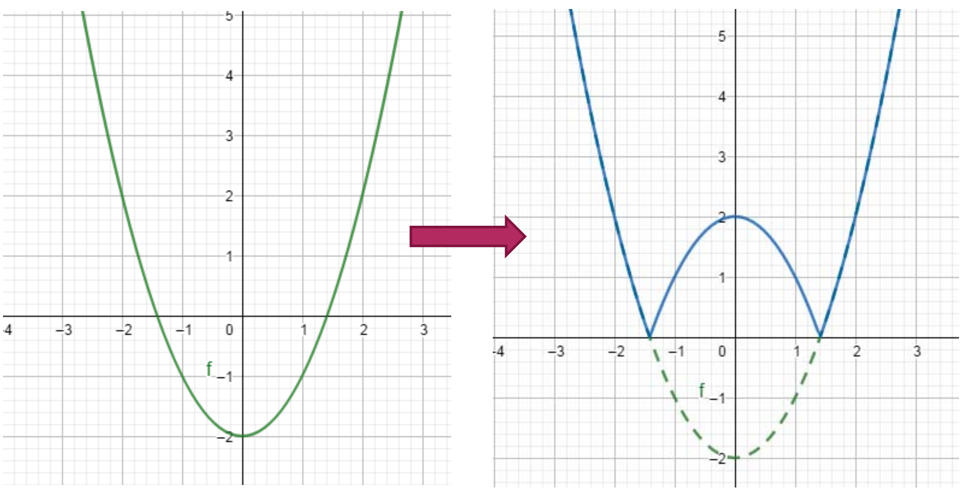
ب) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}$

رسم نمودار توابع قدر مطلقی

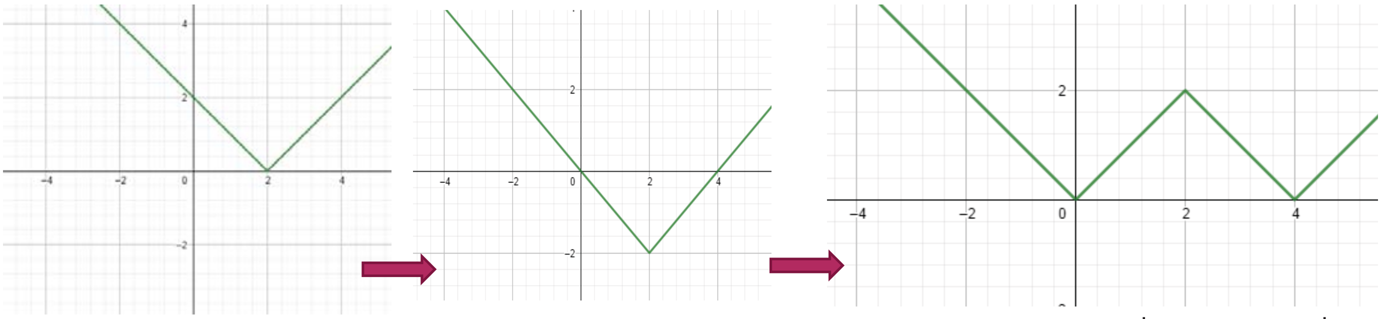
به طور کلی برای رسم نمودار توابع به فرم $y = |f(x)|$ ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت قدر مطلق نمودار $y = f(x)$ را رسم می کنیم سپس با توجه به اینکه مقادیر عرضه ا نباید منفی باشند قسمت هایی از نمودار را که زیر محور طول ها قرار می گیرد را به سمت بالا قرینه می کنیم .

مثال ۱) نمودار تابع $y = \left|x^2-2\right|$ را رسم کنید.

حل »» ابتدا نمودار $y = x^2-2$ را رسم می کنیم سپس قسمت پایین طول ها را به سمت بالا قرینه می کنیم..



مثال ۲) نمودار تابع $y=\big||x-۲|-۲\big|$ را رسم کنید .



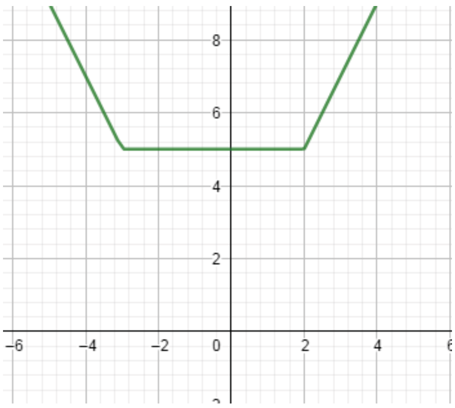
$y=|x-۲|$ $y=|x-۲|-۲$ $y=\big||x-۲|-۲\big|$

نمودار تابع گلدانی

نمودار تابع با ضابطه ی $y=|x-a|+|x-b|$ که در آن $a\in\mathbb{R}\ ,\ b$ بصورت  است به همین خاطر آن را تابع گلدانی می گوییم در زیر مثالی از این تابع را بررسی می کنیم .

مثال : تابع $y=|x-۲|+|x+۳|$ را بصورت یک تابع چند ضابطه ای نوشته و نمودار آن را رسم کنید سپسدامنه و برد آن را نیز بدست آورید.

حل «« $$y=|x-۲|+|x+۳|=\begin{cases}-۲x-۱ & x<-۳\\ ۵ & -۳\le x\le ۲\\ ۲x+۱ & ۲<x\end{cases}$$



با توجه به شکل می بینیم که دامنه ی تابع کل اعداد حقیقی و برد تابع

بازه ی $[۵\ ,\ +\infty)$ است .

ویژگی های قدر مطلق

با توجه به تعریف قدر مطلق ویژگی های زیر تا حدودی برای قدر مطلق واضح هستند.

۱) $|x| \geq 0$　　　۲) $|-x| = |x|$

۳) $\sqrt{x^2} = |x|$　　　۴) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

۵) $|x|^2 = x^2$　　　۶) $||x|| = |x|$

۷) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$　　　۸) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

نامساوی مشهور به نامساوی مثلث

اگر x , y دو عدد حقیقی باشند آنگاه ثابت کنید که : $|x+y| \leq |x| + |y|$

با توجه به اینکه $x = |x|$ یا $x = -|x|$ می توانیم بنویسیم $-|x| \leq x \leq |x|$ و به طور مشابه داریم $-|y| \leq y \leq |y|$ حال با جمع طرف های این دو به رابطه ی زیر می رسیم :

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$ و با استفاده از رابطه ی شماره ۸ بالا می توانیم بنویسیم ..

$|x+y| \leq |x| + |y|$ این رابطه ی به نامساوی مثلث مشهور است .

نکته : در رابطه ی نامساوی مثلث حالت تساوی زمانی اتفاق می افتد که x , y هم علامت باشند پس :

$$\boxed{if \quad xy > 0 \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|}$$

معادلات قدر مطلقی

هر معادله ای که در عبارتی قدر مطلقی وجود داشته باشد را یک معادله ی قدر مطلقی می نامیم . برای حل یک معادله ی قدر مطلقی از ویژگی های قدر مطلق استفاده می کنیم.

همچنین می توانیم برای حل معادلاتی که به فرم $|f(x)| = |g(x)|$ هستند طرفین را به توان دو برسیم و از قدر مطلق خلاص شویم یا دو معادله ی $f(x) = g(x)$ یا $f(x) = -g(x)$ را حل کنیم و از جواب ها اجتماع بگیریم.

در زیر چند مثال برای معادلات قدر مطلقی با هم حل می کنیم ..

مثال ۱) معادله ی $|۳+۴x|=۵$ را حل کنید.

حل »»

$$|۳+۴x|=۵ \Rightarrow \begin{cases} ۳+۴x=۵ \Rightarrow ۴x=۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۳+۴x=-۵ \Rightarrow ۴x=-۸ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

مثال ۲) معادله ی $|۴x-۳|=|۸x+۹|$ را حل کنید.

حل »»

$$|۴x-۳|=|۸x+۹| \Rightarrow \begin{cases} ۴x-۳=۸x+۹ \Rightarrow -۴x=۱۲ \Rightarrow x=-۳ \\ ۴x-۳=-۸x-۹ \Rightarrow ۱۲x=-۶ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مثال ۳) معادله ی $|۲x-۳|^۲+|۲x-۳|-۶=۰$ را حل کنید .

حل »»

$$|۲x-۳|=t \Rightarrow t^۲+t-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=-۳ \\ t_۲=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |۲x-۳|=-۳ \quad \text{غ ق ق} \\ |۲x-۳|=۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۳=۲ \Rightarrow ۲x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \\ ۲x-۳=-۲ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

مثال ۴) معادله ی $|x^۲-۴x|=۳$ را حل کنید .

حل »»

$$|x^۲-۴x|=۳ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۴x=۳ \Rightarrow x^۲-۴x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲+\sqrt{۷} \\ x_۲=۲-\sqrt{۷} \end{cases} \\ x^۲-۴x=-۳ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۳=۱ \\ x_۴=۳ \end{cases} \end{cases}$$

پس این معادله چهار جواب دارد .

حل تمرینات صفحه ی ۲۸ کتاب درسی

۱) با استفاده از تعیین علامت ضابطه ی هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

ب) $$g(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \ \text{یا}\ 1<x \\ x^2-1 & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

پ) $$h(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases} -2x & x<-1 \\ 2 & -1\leq x\leq 1 \\ 2x & 1<x \end{cases}$$

۲) بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ است.

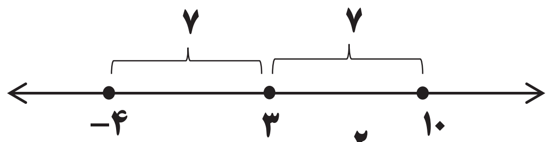
حل »» فرض کنیم طول نقاط مورد نظر برابر m باشد پس ما خواهیم داشت : $|m-(-1)|+|m-3|=6$

معادله را حل می کنیم و نقاط مورد نظر را مشخص می کنیم ...

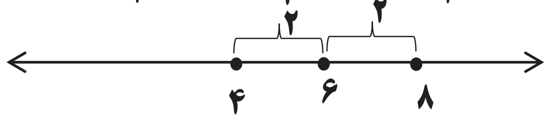
$$\begin{cases} \text{if}\ \ m<-1 & \Rightarrow (-m-1)+(-m+3)=6 & \Rightarrow & m=-2 \ \text{قابل قبول} \\ \text{if}\ \ -1\leq m\leq 1 & \Rightarrow (m+1)+(-m+3)=6 & \Rightarrow & 4=6 \ \otimes \\ \text{if}\ \ 3<m & \Rightarrow (m+1)+(m-3)=6 & \Rightarrow & m=4 \ \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۳) هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نا معادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

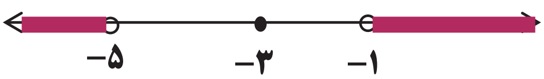
الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. $\Leftarrow$ $|x-3|=7$



ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است . $\Leftarrow$ $2|x-6|=4$



پ) فاصله ی بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است.



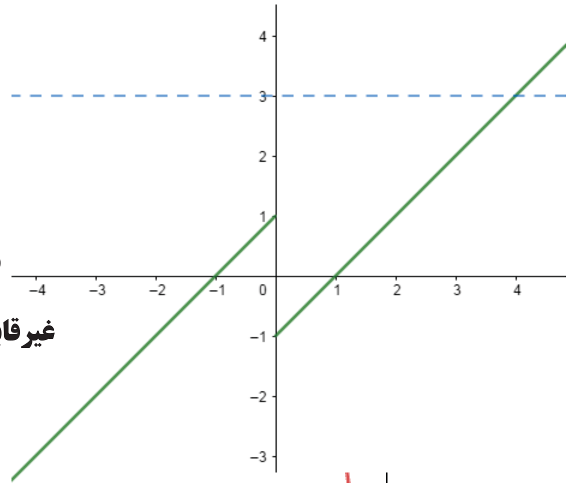
۴) دو معادله ی زیر را حل کنید .

الف) $\frac{۲-x}{|x-۳|}=۱ \Rightarrow |x-۳|=۲-x \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۲-x \quad ۲x=۵ \Rightarrow x=۲/۵ & \text{غ ق ق} \\ x-۳=-۲+x \quad \otimes & \text{غیر ممکن} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}=۲x+۱ \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^{۲}}=۲x+۱ \Rightarrow |x-۱|=۲x+۱$

$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x+۱ \Rightarrow x=-۲ & \text{غیرقابل قبول} \\ x-۱=-۲x-۱ \Rightarrow x=۰ & \text{قابل قبول} \end{cases}$

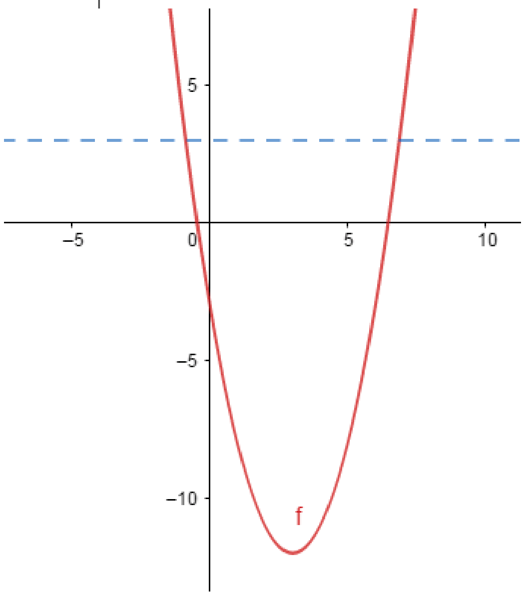
۵) نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید سپس به ازای $y=۳$ معادله های بدست آمده را به روش جبری و هندسی حل کنید.



$y=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-۱ & x>۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$

$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow x-۱=۳ \Rightarrow x=۴ & \text{قابل قبول} \\ x<۰ \Rightarrow x+۱=۳ \Rightarrow x=۲ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$

با توجه به نمودار رسم شده نیز می بینیم که معادله فقط یک جواب دارد .

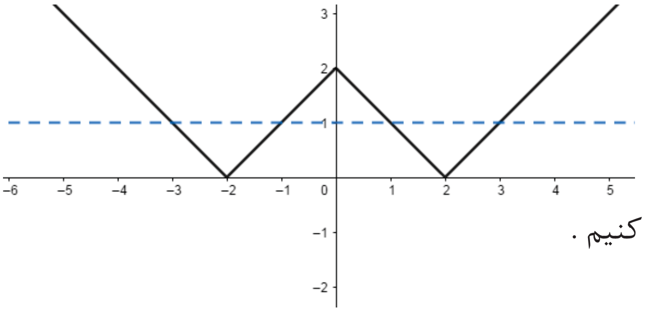


$y=x^{۲}-۶x \quad \Rightarrow \quad x^{۲}-۶x=۳$

$x^{۲}-۶x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۳+۲\sqrt{۳}\simeq ۶/۴۵ \\ x_{۲}=۳-۲\sqrt{۳}\simeq -۰/۴۵ \end{cases}$

با توجه به نمودار می بینیم که معادله دارای دو جواب است یک جوا ب مثبت بزرگتر از ۶ و جواب دیگر بین صفر و ۱- است

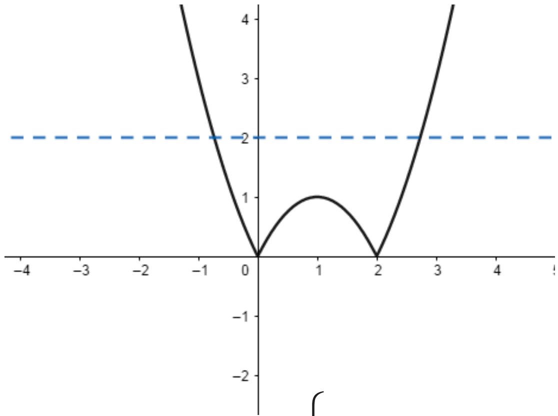
۶) نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید سپس معادله ی $f(x)=۱$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل نمایید .



حل »» با توجه به نمودارهای رسم شده می بینیم که معادله ی $\big||x|-2\big|=1$ دارای چهار نقطه ی برخورد (چهار جواب) می باشد حال به روش جبری این چهار جواب را با هم مشخص می کنیم .

$$\big||x|-2\big|=1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2=1 \quad \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ |x|-2=-1 \quad \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

۷) نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید و سپس به دو روش هندسی و جبری معادله ی $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید .



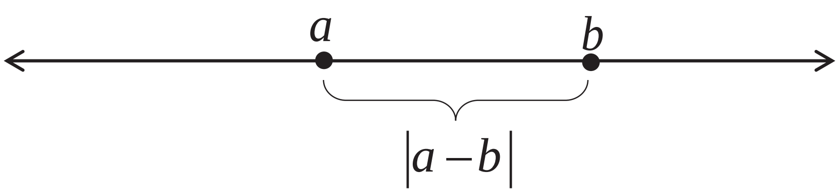
حل »» با توجه به نمودار رسم شده می بینیم که معادله دارای دو جواب می باشد یکی از جواب ها بین ۲ و ۳ و دیگری بین صفر و ۱- است .

حال به روش جبری معادله را حل می کنیم تا مقدار دقیق این جواب ها را مشخص کنیم .

$$|x^2-2x|=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1+\sqrt{3}\simeq 2/73 \\ x_2=1-\sqrt{3}\simeq -0/73 \end{cases} \\ x^2-2x=-2 \Rightarrow x^2-2x+2=0 \quad (\Delta<0) \end{cases}$$

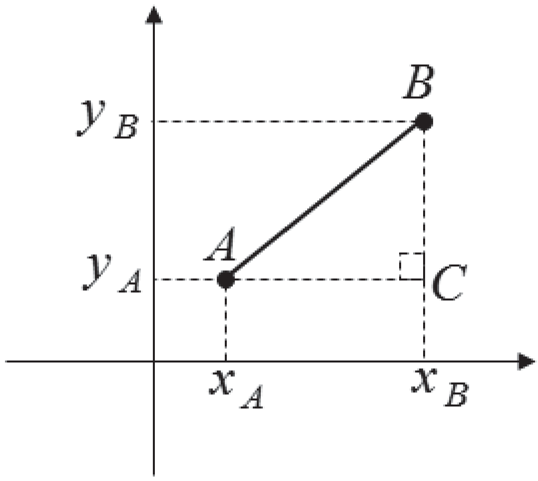
آشنایی با هندسه ی تحلیلی

در سال های گذشته با فاصله ی دو نقطه روی محور اعداد (خط راست) آشنا شدیم و آموختیم که این فاصله برابر با قدر مطلق تفاضل طول دو نقطه می باشد پس فاصله ی دو نقطه ی a , b برابر $|a-b|=|b-a|$ خواهد بود.



حال می خواهیم فاصله ی بین دو نقطه را روی دستگاه دکارتی (روی صفحه) مشخص کنیم .....

می خواهیم فاصله ی بین دو نقطه ی A , B را مشخص کنیم



طبق رابطه ی فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ خواهیم داشت :

$AB^{۲} = AC^{۲} + BC^{۲}$ و چون BC , AC روی خطوط

عمودی و افقی می باشند طبق فاصله ی دو نقطه روی محور اعداد داریم :

$$AC = |x_B - x_A| \quad , \quad BC = |y_B - y_A|$$

با جا گذاری در رابط هی فیثاغورس خواهیم داشت ...

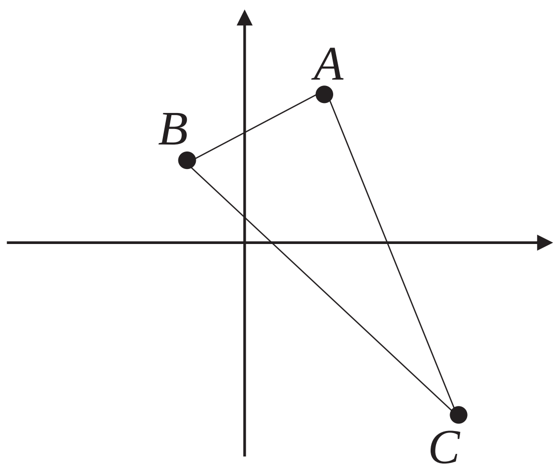
$$AB^{۲} = |x_B - x_A|^{۲} + |y_B - y_A|^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = (x_B - x_A)^{۲} + (y_B - y_A)^{۲}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^{۲} + (y_B - y_A)^{۲}}$$

نتیجه : فاصله ی دو نقطه ی $A(x_A , y_A)$, $B(x_B , y_B)$ روی دستگاه دکارتی از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^{۲} + (y_B - y_A)^{۲}}$$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۳۰



سه نقطه $A(۱, ۳)$, $B(-۱, ۲)$, $C(۵, -۵)$ سه راس

مثلث ABC در صفحه مختصات است .

الف) مثلث را رسم کنید .

ب) طول اضلاع مثلث را بدست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را بدست آورید.

چه رابطه ای بین دو شیب مشاهده می کنید؟

$$AB = \sqrt{(-۱-۱)^{۲} + (۲-۳)^{۲}} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

$$AC = \sqrt{(۵-۱)^{۲} + (-۵-۳)^{۲}} = \sqrt{۱۶+۶۴} = \sqrt{۸۰}$$

$$BC = \sqrt{(۵-(-۱))^{۲} + (-۵-۲)^{۲}} = \sqrt{۳۶+۴۹} = \sqrt{۸۵}$$

چون $BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲} \Rightarrow \left(\sqrt{۸۵}\right)^{۲}=\left(\sqrt{۸۰}\right)^{۲}+\left(\sqrt{۵}\right)^{۲}$ پس رابطه ی فیثاغورس در این مثلث برقرار می باشد لذا این مثلث قام الزاویه می باشد .

$m_{AB}=\frac{۳-۲}{۱-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$ و $m_{AC}=\frac{۳-(-۵)}{۱-۵}=\frac{۸}{-۴}=-۲$ می بینیم که دو شیب قرینه معکوس یکدیگرند .

نکته : اگر شیب دو خط قرینه معکوس یکدیگر باشند $\left(m \times m'=-۱\right)$ این دو خط بر هم عمود خواهند بود .

حل کاردرکلاس صفحه ی ۳۱

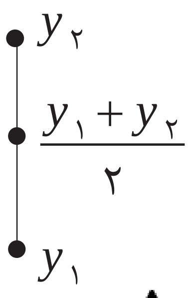
نشان دهید نقطه ی $p\left(-۱۲\,,۱۱\right)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه ی $A(۰\,,-۳)\ ,\ B(۶\,,۱۵)$ قرار دارد.

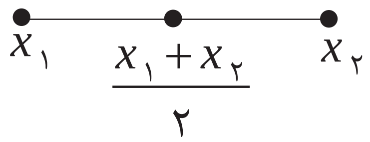
حل) می دانیم نقطه ای که از دو سر پاره به یک فاصله قرار داشته باشد حتما روی عمود منصف آن پاره خط قرار می گیرد.

$$AP=\sqrt{\left(۰-(-۱۲)\right)^{۲}+\left(-۳-۱۱\right)^{۲}}=\sqrt{۱۴۴+۱۹۶}=\sqrt{۳۴۰}$$
$$BP=\sqrt{\left(۶-(-۱۲)\right)^{۲}+\left(۱۵-۱۱\right)^{۲}}=\sqrt{۳۲۴}+\sqrt{۱۶}=\sqrt{۳۴۰}$$
$$\Rightarrow AP=BP$$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

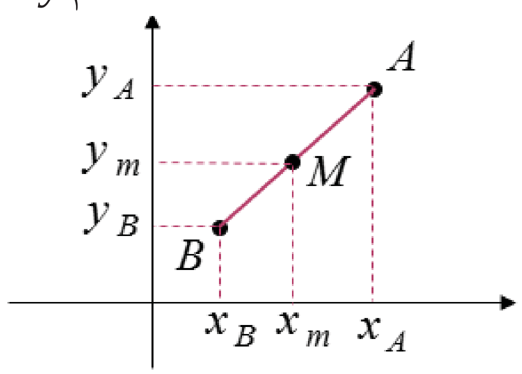
میدانیم که طول نقطه وسط یک پاره خط که به طور افقی رسم شود برابر با میانگین اندازه ی طول ها ی دو نقطه ی ابتدا و انتهای پاره خط می باشد همچنین عرض نقطه وسط پاره خطی که به طور عمودی رسم شده است برابر با میانگین عرض های دو نقطه ی ابتدا و انتهای پاره خط می باشد . به عبارت دیگر :





حال می خواهیم مختصات یک نقطه روی دستگاه دکارتی را با استفاده از مطلب بالا مشخص کنیم می بینیم که مختصات نقطه وسط پاره خط AB بصورت زیر خواهد بود :

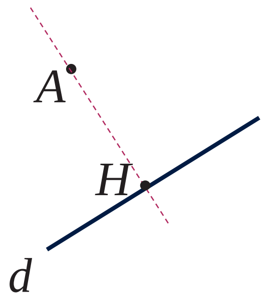
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{۲}\ ,\ \frac{y_A+y_B}{۲}\right)$$



فاصله ی یک نقطه از یک خط

تعریف : طول پاره خطی را که از نقطه ی A بر خط d عمود می شود را فاصله ی نقطه ی A از خط d می نامیم .

با این حساب برای یافتن فاصله ی نقطه ی A از خط d می توانیم مراحل زیر را طی کنیم :



۱. معادله ی خطی را که از نقطه ی A می گذرد و برخط d عمود است را می یابیم

۲. نقطه ی تقاطع دو خط را بدست می آوریم و آن را H می نامیم .

۳. فاصله ی نقطه ی A از نقطه ی H همان فاصله ی نقطه ی A از خط d خواهد بود.

با انجام مراحل بالا می بینیم که فاصله ی نقطه ای مانند $A(x_۰, y_۰)$ از خطی به معادله ی $ax+by+c=۰$ را می توان از رابطه ی زیر بدست آورد :

$$\boxed{d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

مثال ۱) فاصله ی نقطه ی $(۲,-۳)$ را از خط $y=۴x-۱$ بدست آورید.

حل »» ابتدا معادله ی خط را در حالت $ax+by+c=۰$ می نویسیم سپس از فرمول فاصله ی نقطه تا خط استفاده می کنیم وفاصله ی نقطه را از خط داده شده مشخص می کنیم .

$$-۴x+y+۱=۰ \Rightarrow d=\frac{|-۴(۲)+(-۳)+۱|}{\sqrt{(-۴)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۷}}$$

مثال ۲) مثلث ABC را با رئوس $A(۴,۵)$, $B(-۱,۲)$, $C(۷,۱۰)$ درنظر بگیرید.

الف) اندازه ی ارتفاع وارده از راس A بر ضلع BC رابیابید.

ب) مساحت مثلث ABC را مشخص کنید.

حل »» ابتدا معادله ی خط گذرنده از دو نقطه ی C , B را می نویسیم : $y=x+۳$ سپس فاصله این خط را از نقطه ی A مشخص می کنیم که همان برابر ارتفاع خواهد بود. $d=\frac{|-(۴)+۵-۳|}{\sqrt{(-۱)^۲+(+۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$

فاصله دو نقطه ی C , B از هم همان قاعده ی مثلث خواهد بود پس : $BC=\sqrt{(۷+۱)^۲+(۱۰-۲)^۲}=۸\sqrt{۲}$

حال برای مساحت خواهیم داشت : $S=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times۸\sqrt{۲}=۸$

فاصله ی دو خط موازی

اگر l و l' دو خط موازی باشند فاصله ی یک نقطه از یکی از این خط ها تا خط دیگر را فاصله ی این دو خط می نامیم .

فرض کنید بخواهیم فاصله ی دو خط $l: ax+by+c=0$ و $l': ax+by+c'=0$ را بدست آوریم نقطه (x_0 , y_0) را روی خط l' در نظر می گیریم فاصله ی این نقطه تا خط l با توجه به فرمول فاصله ی نقطه از خط برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

از آن جا که نقطه ی (x_0 , y_0) روی خط l' قرار دارد لذا : $ax_0+by_0=-c'$ با جاگذاری فرمول فاصله بالا بصورت زیر خواهد بود :

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال : فاصله دو خط $2x+3y+1=0 \quad , \quad 2x+3y-4=0$ چقدر است ؟

حل «»

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1-(-4)|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}$$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۳۴

۱) اگر نقطه ی $(2 , 3)$ راس یک مربع و معادله ی یک ضلع مربع $3x-4y=9$ باشد مساحت مربع چقدر است ؟

حل «» چون نقطه ی داده شده در معادله ی داده شده صدق نمی کند پس نقطه حتما روی ضلع مقابل قرار دارد پس فاصله ی آن تا خط برابر با طول ضلع مربع خواهد بود :

$$d=\frac{|3(2)-4(3)-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-15|}{5}=3 \quad \Rightarrow \quad s=3^2=9$$

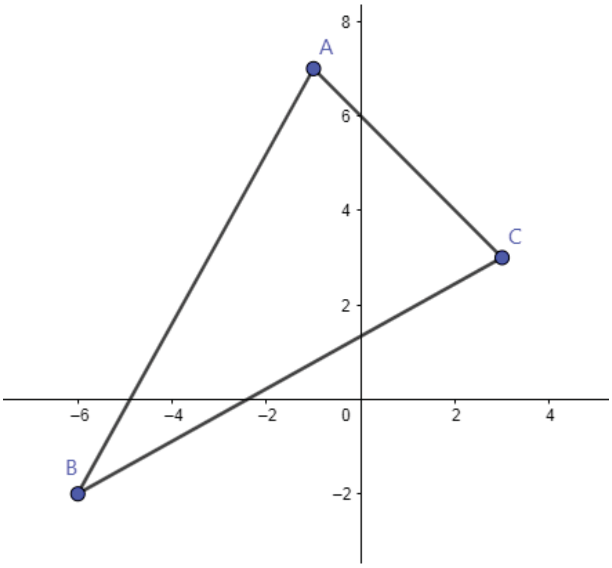
۲) دو خط $3x-3y=1$ و $2x-3y=2$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2 , 5)$ یک راس مستطیل است مساحت مستطیل چقدر است ؟

حل «» چون دو خط داده شیب قرینه معکوس دارند لذا یک طول و دیگری عرض مستطیل است از طرفی چون نقطه ی داده شده در هیچ کدام از دو خط داده شده صدق نمی کند لذا متعلق به هیچ دو ضلع نمی باشد پس فاصله ی این نقطه تا این خطوط همان طول و عرض مستطیل خواهد بود .

$$d=\frac{|3(2)+2(5)-1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{15}{\sqrt{13}} \qquad d'=\frac{|2(2)-3(5)-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \qquad s=\frac{15}{\sqrt{13}}\times\sqrt{13}=15$$

حل تمرینات صفحه ۳۵

۱) مثلث ABC به راس های $A(-۱\,,\,۷)$, $B(-۶\,,\,-۲)$, $C(۳,۳)$ را در نظر بگیرید.



الف) مثلث را رسم کنید .

ب) نشان دهید مثلث متساوی الساقین است .

حل »»

$$AB=\sqrt{(-۱-(-۶))^۲+(۷-(-۲))^۲}=\sqrt{۱۰۶}$$

$$AC=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۳۲}$$

$$BC=\sqrt{(-۶-۳)^۲+(-۲-۳)^۲}=\sqrt{۱۰۶}$$

چون $AB=BC$ لذا مثلث متساوی الساقین می باشد.

پ) معادله ی عمود منصف ضلع BC را بدست آورید.

حل »» معادله ی خواسته شده مربوط به خطی است که بر BC عمود است و از وسط آن می گذرد.. وسط BC را M فرض کنیم خواهیم داشت ..

$$M=\left(\frac{۳+(-۶)}{۲}\,,\,\frac{۳+(-۲)}{۲}\right)=\left(-\frac{۳}{۲}\,,\,\frac{۱}{۲}\right)$$

$$m_{bc}=\frac{۳-(-۲)}{۳-(-۶)}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow m'=-\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow y-\left(-\frac{۳}{۲}\right)=\left(-\frac{۹}{۵}\right)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow ۵y+۹x+۳=۰$$

ت) طول ارتفاع AH چقدر است ؟

حل »» فاصله ی نقطه ی A تا ضلع BC همان طول ارتفاع AH است ابتدا معادله ی BC را بدست می آوریم:

$$m_{BC}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow y-۳=\frac{۵}{۹}(x-۳)\Rightarrow -۵x+۹y-۱۲=۰$$

$$d=\frac{\left|-۵(-۱)+۹(۷)-۱۲\right|}{\sqrt{(-۵)^۲+(۹)^۲}}=\frac{۵۶}{\sqrt{۱۰۶}}$$

۲) $B(8,-8)$, $A(0,6)$ نقاط دو سر قطر یک دایره اند مختصات مرکز و طول شعاع دایره را بدست آورید.

حل »» مرکز دایره همان نقطه وسط قطر دایره می باشد پس : $O=\left(\frac{8+0}{2},\frac{-8+6}{2}\right)=(4,-1)$

طول شعاع دایره همان فاصله ی OA یا OB می باشد پس : $r=\sqrt{(4-0)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{65}$

۳) شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله ی $y=x^2-8x-20$ مطابق شکل مدل سازی می شود

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی B, A را بدست آورید.

حل »» همان صفر کننده های تابع هستند : $x^2-8x-20=(x-10)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=10\\x=-2\end{cases}$

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را بدست آورید.

حل »» $AB=|10-(-2)|=12$

پ) اگر عدسی کاملا متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است ؟

$$|y_s|=\left|(4)^2-8(4)-20\right|=|-36|=36mm$$

۵) خط $4x+3y=5$ بر دایره ی C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است طول شعاع دایره چقدر است ؟

حل »» $r=\frac{|4(-1)+3(2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}=0/6$

۶) نقطه ی $S(x,8)$ روی نیم دایره ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه رو قرار دارد .

الف) مقدار x را بدست آورید.

حل »» معادله ی دایره ای به شعاع ۱۰ و به مرکز مبدا مختصات به صورت $x^2+y^2=10^2$ می باشد. و نقطه ی S وقتی روی این دایره خواهد بود که در معادله ی آن صدق کند لذا >>

$$x^2+8^2=100\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\pm6\Rightarrow x=6$$

ب) شیب خط های SQ , PS را بدست آورید.

حل »» $\begin{cases}S(6,8)\\Q(10,0)\end{cases}\Rightarrow m_{SQ}=\frac{8-0}{6-10}=-2$ $\quad$ $\begin{cases}S(6,8)\\P(-10,0)\end{cases}\Rightarrow m_{PS}=\frac{8-0}{6-(-10)}=\frac{1}{2}$

پ) نشان دهید PSQ قائمه است ؟

حل »» چون حاصل ضرب شیب ها برابر منفی یک است لذا دو ضلع برهم عمود می باشند و زاویه قائمه می سازند.

۷) اگر فاصله ی نقطه ی $A(۱\,,\,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد مقدار a چقدر است ؟

حل »»

$$d=\frac{|a(۱)+۴(۲)-۱|}{\sqrt{a^۲+۴^۲}}=۲\Rightarrow\frac{|a+۷|}{\sqrt{a^۲+۱۶}}=۲\Rightarrow|a+۷|=۲\sqrt{a^۲+۱۶}$$

$$\left(|a+۷|\right)^۲=\left(۲\sqrt{a^۲+۱۶}\right)^۲\Rightarrow a^۲+۱۴a+۴۹=۴(a^۲+۱۶)\Rightarrow ۳a^۲-۱۴a+۱۵=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۳\\ a_۲=\dfrac{۵}{۳}\end{cases}$$

۸) سه راس مثلث ABC دارای مختصات $A(-۱۱\,,-۱۳)$ ، $B(-۳\,,\,۳)$ ، $C(۳,\,۱)$ می باشند.

الف) طول عمودی را که از راس B بر میانه ی نظیر راس C وارد می شود را بدست آورید .

حل »» معادله ی میانه را می نویسیم و از نقطه ی B فاصله ی آن را حساب می کنیم ...

$$\begin{cases}M(-۷\,,-۵)\\ C(۳,\,۱)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۱-(-۵)}{۳-(-۷)}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۳)$$

$$\begin{cases}-۳x+۵y-۴=۰\\ B(-۳\,,\,۳)\end{cases}\Rightarrow d=\frac{|-۳(-۳)+۵(۳)-۴|}{\sqrt{(-۳)^۲+(۵)^۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۳۴}}$$

ب) مختصات راس D را چنان تعیین کنید که چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد .

حل »»

$$\begin{cases}x_A+x_D=x_B+x_C\\ y_A+y_D=y_B+y_C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱۱+x_D=-۳+۳\Rightarrow x_D=۱۱\\ -۱۳+y_D=۳+۱\Rightarrow y_D=-۱۷\end{cases}$$

۹) نقطه ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله های آن تا مبدا و نقطه ی $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.

حل »»

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}(x,2x)\\(0,0)\end{cases}\Rightarrow d=\sqrt{x^2+4x^2}=\sqrt{5x^2}\\ \begin{cases}(x,2x)\\(2,4)\end{cases}\Rightarrow d'=\sqrt{(2-x)^2+(4-2x)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow d+d'=5$$

$$\sqrt{5x^2}+\sqrt{5(x-2)^2}=5 \Rightarrow \sqrt{5}(|x|+|x-2|)=5 \Rightarrow |x|+|x-2|=\sqrt{5}$$

$$\begin{cases}\text{if } \ x<0 \Rightarrow -x-x+2=\sqrt{5} \Rightarrow -2x+2=\sqrt{5} \Rightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}\\ \text{if } \ 0<x<2 \Rightarrow x-x+2=\sqrt{5} \Rightarrow 2=\sqrt{5} \ \otimes\\ \text{if } \ 2<x \Rightarrow x+x-2=\sqrt{5} \Rightarrow 2x=2+\sqrt{5} \Rightarrow x=1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

۱۰) نقاط $A(4,2)$, $B(1,-1)$, $C(8,-2)$ سه راس مثلث هستند اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه ی AM باشند طول MH را بدست آورید.

حل »»

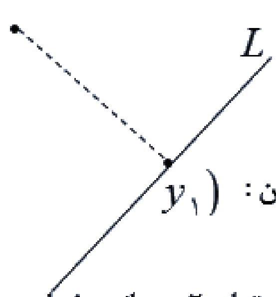
$$H(4,-1) \ \ , \ \ M(\frac{7}{2},-1) \Rightarrow MH=\left|4-\frac{7}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

ضمیمه : اثبات فرمول فاصله ی نقطه از خط

قضیه : خط $ax+by+c=0$ و نقطه ی $M\ (x_0\ ,\ y_0)$ خارج از آن مفروض است فاصله ی نقطه ی M از خط برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اثبات : اگر H پای عمود رسم شده از نقطه ی M بر خط L باشد فاصله ینقطه از خط یعنی همان طول MH خواهد بود.



شیب خط L برابر $-\frac{a}{b}$ می باشد و شیب خط MH برابر $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

این دو شیب باید عکس وقرینه هم باشند پس : $\frac{b}{a}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ بنابراین :

$a(y_0-y_1)-b(x_0-x_1)=0$ حال اگر طرفین این تساوی را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت :

$$a^2(y_0-y_1)+b^2(x_0-x_1)=2ab(y_0-y_1)(x_0-x_1)\quad *$$

$$MH=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\left((x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\right)}{(a^2+b^2)}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2(x_0-x_1)^2+b^2(y_0-y_1)^2+\left(b^2(x_0-x)+a^2(y_0-y_1)\right)}{a^2+b^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{a^2(x_0-x_1)^2+b^2(y_0-y_1)^2+2ab(y_0-y_1)(x_0-x_1)}{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{\left(a(x_0-x)+b(y_0-y_1)\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0-(ax_1+by_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

چون H روی خط قرار دارد پس در معادله ی آن صدق می کند یعنی :

$$ax_1+by_1+c=0 \quad\Rightarrow\quad ax_1+by_1=-c$$

حال در رابطه ی بالا جا گذاری می کنیم :

$$MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$