



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

جزوه آموزش

فصل سوم و چهارم

هفتم

کارک از استاد بابالویان

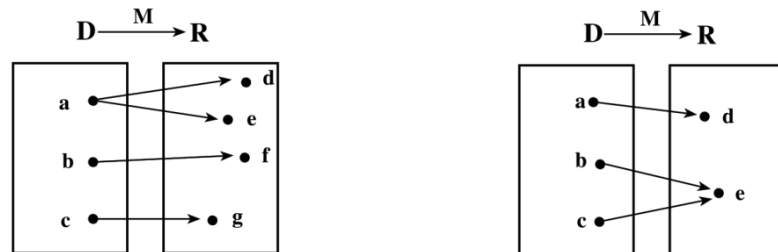
ریاضی ۱۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تبدیل ها

نگاشت: یک نگاشت از مجموعه D به مجموعه R یک عمل نظیر سازی است. که به هر عضو مجموعه اول یک و تنها یک عضو از مجموعه دوم را نظیر می کند. خ ۹۴

مثال: کدام مورد یک نگاشت است؟



تبدیل: نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. خ ۹۴

توجه: در تبدیل هیچ دو نقطه ای دارای یک تصویر نیست و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

مثال: اگر $T(x, y) = (x+1, 3y)$ یک تبدیل باشد. ش ۸۳

الف) تصویر نقطه $A(3, -2)$ را بیابید.

ب) $B'(4, 9)$ تصویر چه نقطه ای است؟

ج) آیا نگاشت $M(x, y) = (x, 0)$ تبدیل است؟

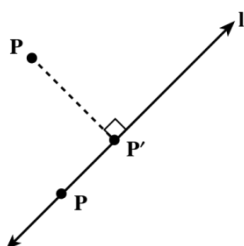
مثال: تحت تبدیل $T(x, y) = (x+a, by)$ نقطه $A(2, 3)$ به نقطه $A'(-1, 0)$ تبدیل شده است. مقدار a, b را بیابید.

ایزومتري: تبدیلی که فاصله بین نقطه ها (طول پاره خط ها) را حفظ کند را ایزومتري می نامند.

توجه: اگر شکلی توسط یک ایزومتري نگاشته شود، تصویر آن با خود شکل همنهشت است.

مثال: نگاشت M را به صورت زیر در نظر بگیرید.

« اگر P روی خط L باشد، $M(P) = P$ و اگر خارج خط L باشد، $M(P) = P'$ که P' محل تقاطع عمودی است که از P بر خط L رسم می شود »

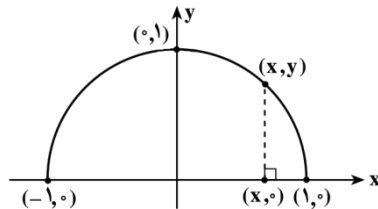


الف) آیا نگاشت M یک به یک است؟

ب) آیا نگاشت M ایزومتري است؟

مثال : اگر $T(x, y) = (x + 2, ay - 1)$ ایزومتري باشد ، مقدار a را بيابيد . (به كمك دو نقطه و تصوير آن)

مثال : در تصوير نيم دايره زير روي محور طول ها : ش ۸۸ و د ۹۴



الف) آيا اين تناظر نگاهشت است ؟

ب) تصوير $(-1, 0), (0, 1)$ را بيابيد .

ج) نقطه $(-\frac{1}{2}, 0)$ تصوير چه نقطه اى است ؟

توجه : معادله دايره به مركز مبدا به شعاع r به صورت $x^2 + y^2 = r^2$ است .

تمرين :

۱. تبديل $T(x, y) = (2x + 1, 2y)$ را در نظر بگيريد . خ ۸۷

الف) تصوير نقطه هاى $A(1, 2), B(0, 0)$ را بيابيد .

ب) طول و شيب پاره خط هاى $AB, A'B'$ را حساب كنيد .

ج) آيا تبديل ايزومتري است ؟ آيا اين تبديل شيب را حفظ مى كند ؟

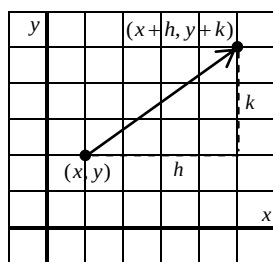
۲. نقاط $Q(-3, 1), P(-2, 2), N(1, -1), M(3, 3)$ رئوس يك دوزنقه هستند : خ ۸۵ و ش ۹۳

الف) مختصات تصوير دوزنقه تحت تبديل $T(x, y) = (x + 2, -y)$ را بدست آوريد .

ب) اى تبديل را توصيف كنيد . (بررسى حفظ شيب و طول پاره خط ها)

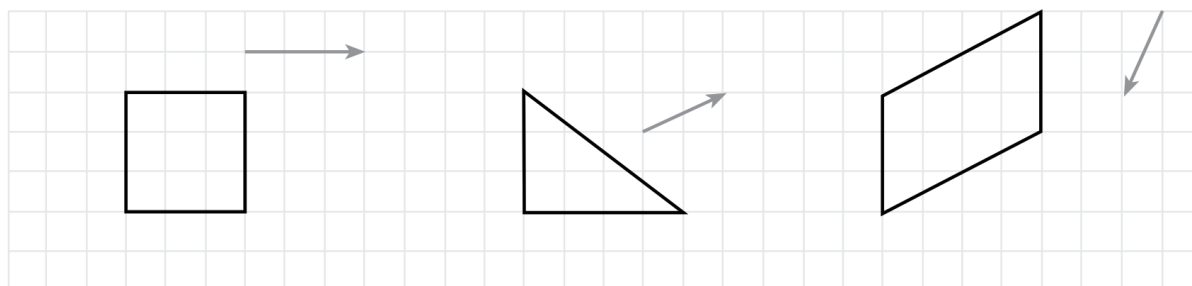


۳. اگر $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$ ضابطه یک نگاشت باشد و تبدیل یافته نقطه $A(\alpha, \beta)$ نقطه $A'(-3, 3)$ باشد. مختصات A را بیابید. ش ۸۶ و د ۸۳



انتقال: تبدیل $T(x, y) = (x + h, y + k)$ که تحت بردار (h, k) تصویر نقطه (x, y) را به صورت $(x + h, y + k)$ می دهد را انتقال می گویند.

مثال: تصویر انتقال یافته هر یک از شکل های زیر را تحت بردار انتقال داده شده رسم کنید.



مثال: نقاط $A(-3, 5)$, $B(1, 3)$ داده شده اند. ضابطه انتقالی را بنویسید که نقطه A را به B تصویر کند. ش ۹۳ و خ ۹۵

مثال: خط $x + 2y - 6 = 0$ مفروض است. معادله خط تصویر را تحت انتقال $T(x, y) = (x - 3, y + 1)$ بدست آورید. ش ۹۲ و د ۹۰ و ۸۶

مثال: نقاط $A(2, -1)$, $B(1, 2)$ دو سر یک پاره خط هستند. ش ۸۶ و خ ۸۴

الف) تصویر AB تحت تبدیل $T(x, y) = (-y + 3, x - 3)$ را یافته و $A''B''$ بنامید و رسم کنید.

ب) تصویر AB تحت تبدیل $T(x, y) = (-y, x)$ یافته و آن را $A'B'$ بنامید و رسم کنید.

ج) ضابطه انتقالی را بیابید که $A'B'$ را به $A''B''$ تصویر کند.

تمرین :

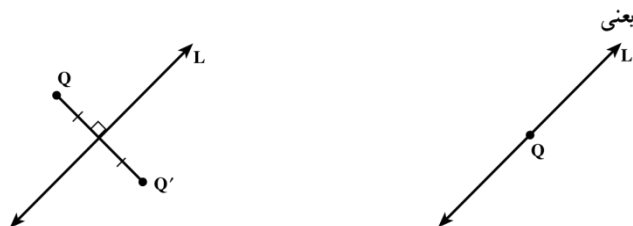
۱. مختصات نقاط $A(1,1), B(4,2), C(3,5), D(0,4)$ رئوس یک مربع هستند. خ ۸۳ و ش ۸۹ و د ۸۲ و د ۸۳
 الف (مختصات رئوس را تحت انتقالی که A را به B تصویر کند یافته و مربع و تصویرش را رسم کنید.
 ب) قاعده نگاشت را بنویسید.

۲. مختصات نقاط $A(4,1), B(8,3), C(6,5), D(4,3)$ رئوس یک مربع هستند. خ ۹۲ و خ ۹۱ و ش ۹۳ و د ۹۱ و د ۸۸ و د ۸۷
 الف (مربع و تصویرش را تحت انتقال $T(x, y) = (x-5, y-2)$ رسم کنید.
 ب) طول و شیب پاره خط AB و تصویرش را بدست آورید و مقایسه کنید.
 ج) آیا تبدیل ایزومتري است ؟

۳. تبدیل $T(x, y) = (x-3, y+1)$ و نقاط $D(1,3), C(4,1)$ مفروضند. خ ۸۲ و د ۸۶
 الف (معادله خط $C'D'$ را بیاید.
 ب) آیا چهار ضلعی $CDC'D'$ متوازی الاضلاع است ؟ چرا ؟



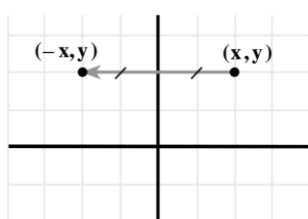
بازتاب نسبت به خط: بازتاب نسبت به خط L تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند Q که روی L نباشد نقطه‌ای مانند Q' است به طوری که L عمود منصف QQ' شود. و تصویر هر نقطه روی خط L خود آن نقطه شود. (L را محور بازتاب می‌نامند)



چند بازتاب محوری مهم:

الف) بازتاب نسبت به محور x : $R(x, y) = (x, -y)$

ب) بازتاب نسبت به محور y : $R(x, y) = (-x, y)$



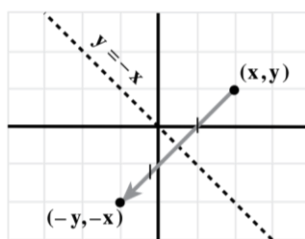
(ب)



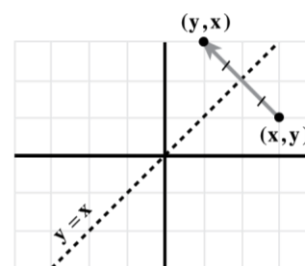
(الف)

پ) بازتاب نسبت به محور $y = x$: $R(x, y) = (y, x)$

ت) بازتاب نسبت به محور $y = -x$: $R(x, y) = (-y, -x)$

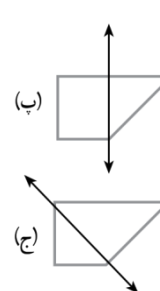
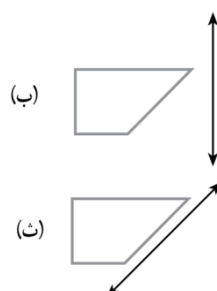
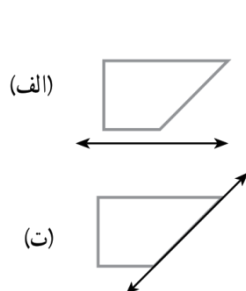


(ت)



(پ)

مثال: بازتاب شکل‌های زیر را نسبت به خط داده شده رسم کنید. ش ۸۳ و د ۸۶



مثال : تحت یک بازتاب نقطه $A(-3, -1)$ روی نقطه $A'(3, 5)$ تصویر شده است . خ ۸۶ و خ ۹۴

الف) محور تقارن را رسم کنید . ب) معادله محور تقارن را بنویسید .

مثال : معادله خط $y = \frac{1}{4}x - 1$ را تحت بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بیابید و آن را رسم کنید . ش ۸۴ و د ۸۸

مثال : معادله خط $2x - 6y - 12 = 0$ را تحت بازتاب نسبت به محور x را بیابید و آن را رسم کنید . خ ۹۰ و خ ۸۲ و خ ۸۴

مثال : تحت یک بازتاب خط $L: x + y - 3 = 0$ به خط $L': x + y + 3 = 0$ تصویر شده است . معادله محور تقارن را تعیین کنید . (دو نقطه دلخواه از این دو خط مانند $A(0, 0)$ و $B(0, -3)$ را یافته و معادله خطی که از وسط آنها موازی L, L' می گذرد می نویسیم .)
خ ۸۹ و د ۹۱

تمرین :

۱. مختصات نقاط $D(1, 2), C(5, 4), B(6, 2), A(2, 0)$ رئوس یک مستطیل هستند . ش ۹۲ و ش ۹۰

الف) مستطیل و تصویرش را تحت بازتاب $T(x, y) = (x, -y)$ رسم کنید .

ب) طول و شیب پاره خط AB را بدست آورده و مقایسه کنید .

ج) آیا تبدیل ایزمتری است ؟ چرا ؟



۲. مختصات نقاط $A(۰, ۲), B(-۵, ۰), C(-۳, -۵), D(۲, -۳)$ رئوس یک مربع هستند. ش ۸۸
 الف) مربع و تصویرش را تحت بازتاب $T(x, y) = (y, x)$ رسم کنید.
 ب) مساحت مربع و تصویرش را محاسبه و مقایسه کنید.

۳. مختصات نقاط $A(۱, ۴), B(۳, -۲), C(۵, ۱)$ رئوس یک مثلث هستند. (تمرین کتاب)
 الف) تصویر مثلث ABC را تحت بازتاب نسبت به خط $x + ۲ = ۰$ را رسم و $A'B'C'$ بنامید.
 ب) تصویر مثلث $A'B'C'$ را تحت بازتاب نسبت به خط $y + ۳ = ۰$ را رسم و $A''B''C''$ بنامید.

۴. تحت یک بازتاب خط $L: ۳ - ۷y + ۹ = ۰$ به خط $L': ۳ - y - ۹ = ۰$ تصویر شده است. معادله محور تقارن را تعیین کنید. خ
 ۸۴ و خ ۸۳ و خ ۹۵

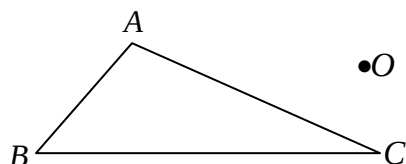
۵. معادله خط $y = x - ۴$ را تحت بازتاب نسبت به محور y را بیابید و آن را رسم کنید. ش ۹۳

۶. معادله خط $۳x - ۲y = ۶$ را تحت بازتاب نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم بیابید و آن را رسم کنید. ش ۸۷ و د ۹۲ و د ۸۹ و
 د ۸۷ و ش ۹۴ و ش ۹۵

بازتاب نسبت به نقطه: بازتاب نسبت به نقطه P نگاشتی است که تحت آن، هر نقطه مانند Q به نقطه ای مانند Q' تصویر می شود که Q', Q, P روی یک خط راست بوده و P وسط پاره خط $Q'Q$ است. (P را مرکز تقارن می نامند)

نکته: بازتاب مرکزی، بازتاب نسبت به مبدا مختصات است که: $T(x, y) = (-x, -y)$

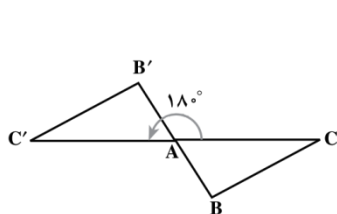
مثال: بازتاب مثلث ABC را نسبت تحت نقطه O رسم کنید.



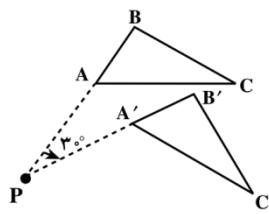
دوران: دوران به مرکز O و زاویه α ، تبدیلی است که هر نقطه A در صفحه را به A' در آن صفحه نظیر می کند که:

الف) مرکز دوران ثابت می ماند. (ب) $OA = OA'$ ، $\angle AOA' = \alpha$

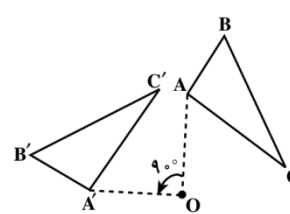
به طور مثال:



پ) مرکز دوران A
زاویه دوران 18°

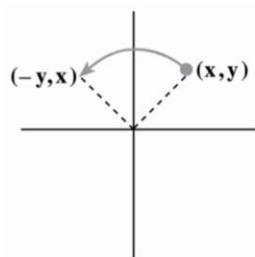


ب) مرکز دوران P
زاویه دوران -3°

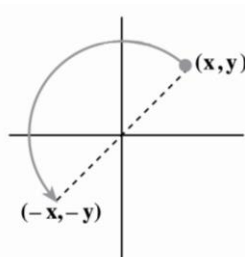


الف) مرکز دوران O
زاویه دوران 9°

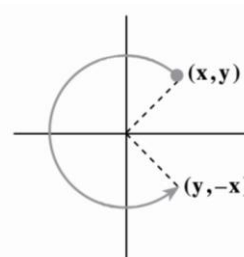
چند دوران مرکزی مهم:



$R(x, y) = (-y, x)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 90°



$R(x, y) = (-x, -y)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 180°

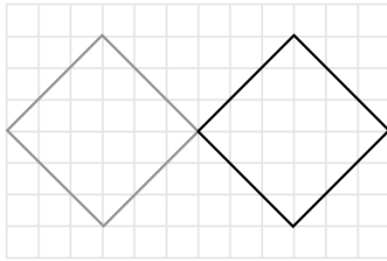


$R(x, y) = (y, -x)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 270°

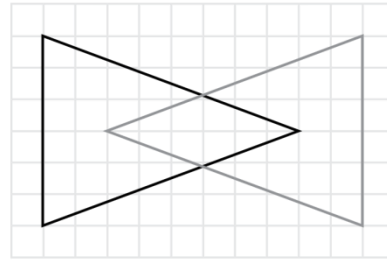
نکته: دوران مرکزی به زاویه 180 درجه، بازتاب مرکزی نامیده می شود. (قبلاً در بازتاب با آن آشنا شدیم)

نکته: مرکز دوران روی عمود منصف پاره خط هایی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می کند.

مثال : مرکز دوران را در هر مورد مشخص کنید .



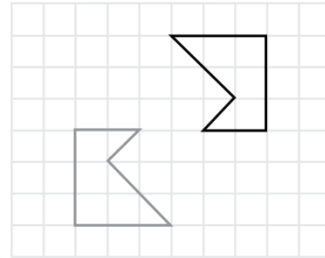
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

مثال : معادله تصویر خط $3x - y - 2 = 0$ را تحت دوران حول مبدأ به اندازه زاویه 270° را بیابید . خ ۹۳ و ش ۸۶ و د ۹۳ و ش ۸۲ و ش ۹۰

مثال : معادله تصویر خط $3x - y + 6 = 0$ را تحت دوران حول مبدأ به اندازه زاویه 180° را بیابید. ش ۹۱

تمرین :

۱. معادله تصویر خط $3x - y + 6 = 0$ را تحت دوران حول مبدأ به اندازه زاویه 90° را بیابید . خ ۹۲ و ش ۸۹ و ش ۸۸ و ش ۸۳ و ش ۹۴

۲. نقطه $A(-1, 2)$ را تحت دوران 90° درجه حول مبدأ ، یافته و A' بنامید . خ ۸۵
سپس A' را حول مبدأ به اندازه 180° درجه دوران داده و آن را A'' بنامید .
تحت چه دورانی نقطه A مستقیماً به A'' تصویر می شود ؟

۳. نقاط $C(5, -1), B(3, -1), A(5, 3)$ رئوس یک مثلث هستند. خ ۸۹ و د ۹۲ و ۹۰ د و ش ۹۵

الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $T(x, y) = (-y, x)$ رسم کنید.

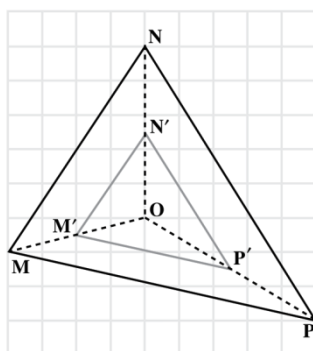
ب) نوع تبدیل را مشخص کنید. آیا ایزومتري است؟ چرا؟

ج) شیب $AB, A'B'$ را مقایسه کنید.

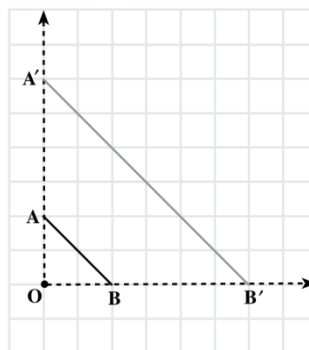
تجانس: تجانس به مرکز O و نسبت K تبدیلی است که هر نقطه مانند A را به نقطه ای مانند A' نظیر کند که:

الف) مرکز تجانس ثابت باشد. (ب) A' روی نیم خط OA طوری باشد که $OA' = K.OA$

به طور مثال:

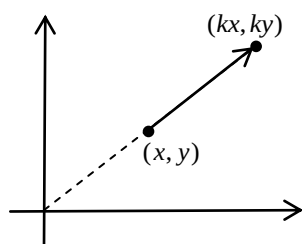


(ب)
مرکز تجانس O
مقیاس $\frac{1}{3}$

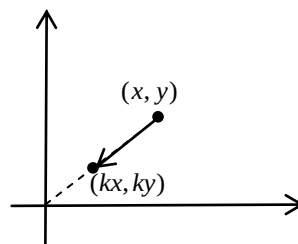


(الف)
مرکز تجانس O
مقیاس ۳

ضابطه تجانس به مرکز مبدا: تبدیل $D(x, y) = (kx, ky)$ تجانس به نسبت k به مرکز $(0, 0)$ است.



تجانس انبساطی
 $K > 1$



تجانس انقباضی
 $0 < K < 1$

نکته: در تجانس، شکل و تصویرش متشابه هستند و نسبت محیط آنها نسبت تناسب و نسبت مساحت آنها مجذور نسبت تناسب است.

مثال: تصویر مجانس اسکال زیر را به مرکز O و نسبت $K = \frac{1}{3}, K = 3$ رسم کنید. ش ۸۶



مثال: خط $3x - 2y - 12 = 0$ را تحت تجانس به مرکز مبدأ و نسبت $K = \frac{1}{4}$ یافته و رسم کنید. خ ۹۱

مثال: نقاط $C(4, 2), B(2, 2), A(-2, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. خ ۹۳ و خ ۹۰ و خ ۸۵ و ش ۹۱ و د ۹۳ و د ۸۹ و د ۸۶ و د ۸۳

الف) مثلث و تصویرش تحت تجانس $D(x, y) = (\frac{3}{4}x, \frac{3}{4}y)$ رسم کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را بدست آورده و به کمک ویژگی های تجانس، مساحت تصویرش را بیابید.

ج) نوع تجانس را مشخص کنید.

تمرین:

۱. خط $3x + 2y - 6 = 0$ را تحت تجانس به مرکز مبدأ و نسبت $K = 2$ یافته و رسم کنید.

۲. نقاط $A(-2, 2)$, $B(2, 2)$, $C(4, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. خ ۸۸ و خ ۸۴ و خ ۸۳ و خ ۸۲ و ش ۸۴ و د ۹۱ و د ۸۵ و د ۸۲ و د ۹۴

الف) مثلث و تصویرش تحت تجانس به مرکز $(0, 0)$ نسبت $\frac{1}{2}$ رسم کنید.

ب) نوع تجانس را مشخص کنید.

ج) نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت تصویرش را مشخص کنید.

د) نسبت های $\frac{OA'}{OA}$ و $\frac{A'B'}{AB}$ را بیابید.

۳. برای هر قسمت یک تبدیل با ویژگی های خواسته شده بنویسید. ش ۸۶ و ش ۸۲

الف) ایزومتري نباشد.

ب) شیب را حفظ نکند.

ج) جهت شکل را حفظ نکند.

د) $T(x, y) = (x - 2, y + 5)$ ضابطه نگاشت آن باشد.

ه) $R(x, y) = (y, x)$ ضابطه نگاشت آن باشد.

و) $R(x, y) = (-x, -y)$ ضابطه نگاشت آن باشد.

۴. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند. خ ۹۱ و خ ۸۲ و د ۸۵

ب) طول پار خط ها در تجانس بزرگ تر می شوند. خ ۹۰

ج) تجانس طول و مساحت را با ضریب K تغییر می دهد. خ ۹۲

د) دوران ایزومتري است. خ ۸۲

ه) در تجانس خطوطی که نقاط نظیر را به هم وصل می کند در مرکز تجانس همرسند. ش ۹۰

و) انتقال الزاماً شیب را حفظ نمی کند. ش ۸۷

ز) دوران الزاماً شیب را حفظ می کند. د ۸۵

ح) تجانس شیب خط را حفظ نمی کند. د ۸۵



اثبات به کمک ویژگی های تبدیل :

دوران : با دوران حول نقطه ای روی خط با زاویه 180° درجه می توان خط را بر روی خودش نگاشت .

دو خط متقاطع را با دوران حول نقطه برخورد و به اندازه زاویه بین خطوط ، می توان بر روی هم نگاشت .

مثال : مثلث ABC و ECD متساوی الاضلاع هستند . ثابت کنید

$$A \quad \widehat{AFB} = 60^\circ, AD = BE$$

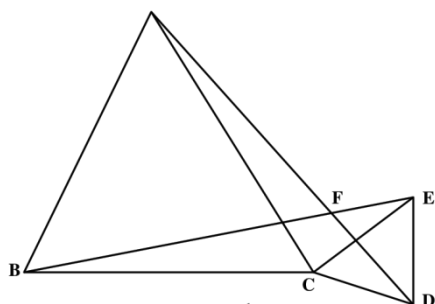
(خ ۹۱ و خ ۸۶ و خ ۸۴ و خ ۸۲ و ش ۹۲ و ش ۸۷ و ش ۹۴)

حل : تحت دوران 60° حول C مثلث ACD روی مثلث BCE تصویر

می شود . بنابر این $AD \rightarrow BE$ و AD ضلع BE را با زاویه 60° درجه قطع

می کند یعنی $\widehat{AFB} = 60^\circ$ و چون طول پاره خط تحت دوران حفظ می شود

پس $AD = BE$



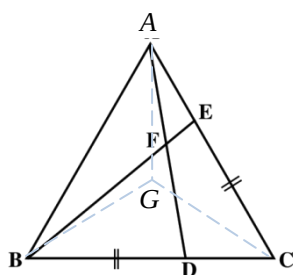
مثال : مثلث ABC متساوی الاضلاع است و $BD = CE$ ، ثابت کنید $\widehat{BFD} = 60^\circ, AD = BE$

(خ ۸۷ و ش ۹۴)

حل : محل تلاقی میانه های مثلث را G می نامیم . زاویه های حول G ، 120° درجه هستند و

$AG = BG = CG$ ، تحت دوران به مرکز G به زاویه -120° ، $E \rightarrow D, A \rightarrow C, B \rightarrow A$ و

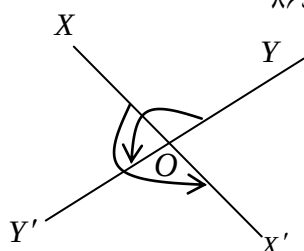
بنابر این $BE \rightarrow AD$ و چون دوران ایزومتري است $BE = AD$ ، همچنین $\widehat{BFD} = 60^\circ$



مثال : هرگاه دو خط یکدیگر را قطع کنند ، زاویه های مقابل مساوی یکدیگرند . ش ۸۲ و ۸۵ د و ۸۸ د و ۸۶ د

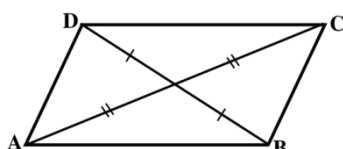
حل : تحت دوران به مرکز برخورد دو خط و زاویه 180° درجه ، $OY \rightarrow OY', OX \rightarrow OX'$ ،

بنابر این $Y\hat{O}X \rightarrow Y'\hat{O}X'$ و چون دوران اندازه زاویه را حفظ می کند پس $Y\hat{O}X = Y'\hat{O}X'$



تمرین :

۱. در چهار ضلعی مقابل قطرها همدیگر را نصف کرده اند ، ثابت کنید متوازی الاضلاع است . خ ۹۰ و خ ۸۳ و ۸۷ د



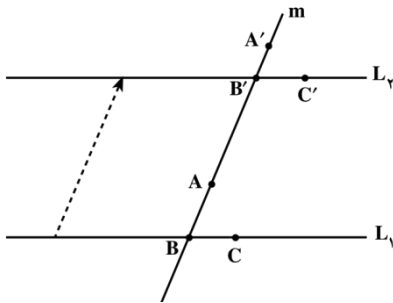
انتقال : دو خط موازی تحت انتقال می توانند روی هم نگاشته شوند .

مثال : اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند ، زاویه های نظیر برابر خواهند بود . ش ۸۸ و ش ۸۴ و ۸۹د و ۹۴د

حل : تحت انتقالی به موازات خط مورب m خط L_1 بر خط L_2 نگاشته می شود .

پس $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ و لذا $\widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$ و چون اندازه زاویه

تحت انتقال حفظ می شود بنا براین $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

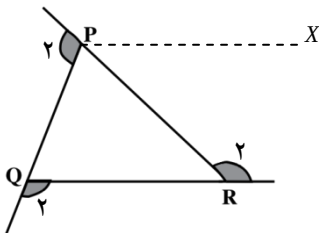


مثال : در مثلث PQR ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی 360° درجه است . ش ۹۰

حل : نیم خط PX را موازی QR رسم می کنیم . تحت انتقال به موازات خط QP, RP

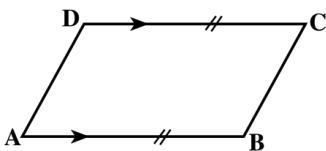
$\widehat{Q} \rightarrow \widehat{QPX}$ و $\widehat{R} \rightarrow \widehat{RPX}$ نگاشته می شود و چون انتقال اندازه زاویه را حفظ می کند :

$$p_r + \widehat{QPX} + \widehat{RPX} = 360^\circ \Rightarrow P_r + Q_r + R_r = 360^\circ$$

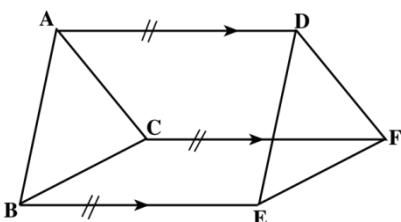


تمرین :

۱. در چهار ضلعی مقابل ثابت کنید ، AD, BC موازی و مساویند . خ ۸۹ و ش ۹۳ و ش ۹۱ و ش ۹۵

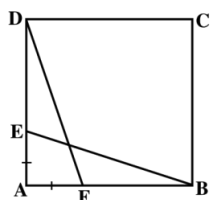


۲. در شکل مقابل ثابت کنید $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ۹۳د و ۹۲د



بازتاب: بازتاب حول عمود منصف پاره خط AB می تواند A را به B تصویر کند.

مثال: چهار ضلعی مقابل مربع است و $AE = AF$. ثابت کنید $BE = DF$ خ ۸۵

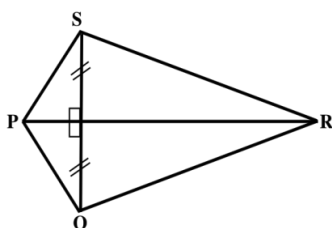


حل: مثلث های AEF, ADB متساوی الساقین هستند و قطر AC نیمساز A و عمود منصف

اضلاع EF, BD خواهد بود لذا طبق بازتاب حول محور AC , $E \rightarrow F, D \rightarrow B$, بنابراین این

$DF \rightarrow EB$ و چون بازتاب ایزومتری است $BE = DF$.

مثال: در شکل مقابل ثابت کنید $\widehat{SPR} = \widehat{QPR}$ خ ۹۳ و ش ۸۸ و د ۹۰ و د ۸۲

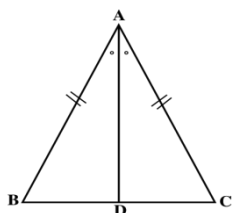


حل: تحت بازتاب حول PR , $S \rightarrow Q, P \rightarrow P$ لذا $\widehat{SPR} \rightarrow \widehat{QPR}$ و چون

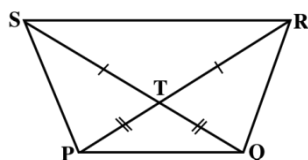
بازتاب اندازه زاویه را حفظ می کند $\widehat{SPR} = \widehat{QPR}$

تمرین:

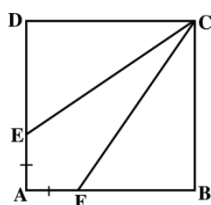
۱. زاویه های مقابل به ضلع های مساوی در مثلث متساوی الساقین با یکدیگر برابرند. د ۸۳ و ش ۸۹ و خ ۹۴



۲. در شکل مقابل ثابت کنید $\triangle PQS \cong \triangle QPR$ خ ۹۲ و ش ۸۶



۳. چهار ضلعی مقابل مربع است و $AE = AF$. ثابت کنید $CE = CF$



هندسه فضایی

اصول هندسه فضایی :

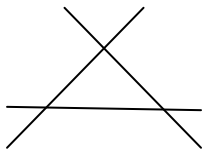
۱. از هر دو نقطه متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می گذرد.
۲. از هر سه نقطه متمایز در فضا که بر یک خط راست نیستند، یک و تنها یک صفحه می گذرد.
۳. در هر صفحه حداقل سه نقطه متمایز وجود دارد که بر یک خط راست نباشند.
۴. حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.
۵. اگر دو نقطه متمایز از خطی در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه است.
۶. اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند، آنگاه در یک خط مشترک هستند.
۷. اصل توازی اقلیدس : از هر نقطه خارج یک خط در فضا، یک و تنها یک خط موازی آن می گذرد.

مثال : ثابت کنید خارج از هر صفحه حداقل یک نقطه وجود دارد . (تمرین کتاب)

حل : صفحه P را تصور کنید و طبق یکی از اصول هندسه فضایی ، سه نقطه نقطه متمایز در صفحه وجود دارد که بر یک خط راست نیستند و طبق اصل دیگری ، حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه نیستند . پس نقطه ای خارج از صفحه P وجود دارد .

مثال : اگر سه خط L_1, L_2, L_3 دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند یا همسرند .

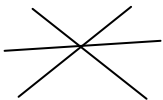
(خ ۹۱ و ش ۸۹ و ش ۸۶ و د ۹۴)



حل : اگر نقاط برخورد هر دو خط ، متمایز باشند ، چون سه نقطه برخورد غیر واقع بر یک خط راست هستند ،

طبق یکی از اصول هندسه فضایی از این سه نقطه یک صفحه می گذرد و چون هر خط ، دو نقطه متمایز آن

در این صفحه است طبق اصل دیگری این خطوط به تمامی در این صفحه قرار دارند .

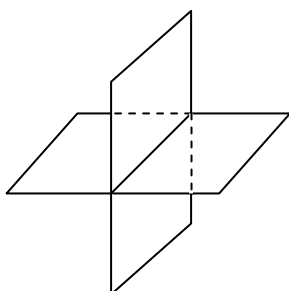


اگر نقاط برخورد خطوط متمایز نباشند . یعنی همگی در یک نقطه با هم برخورد کرده باشند ، طبق تعریف

همرسی ، همسر هستند .

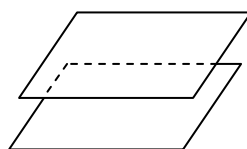
وضعیت نسبی دو صفحه در فضا :

متقاطع

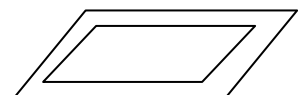


هر دو حالت موازی محسوب می شود

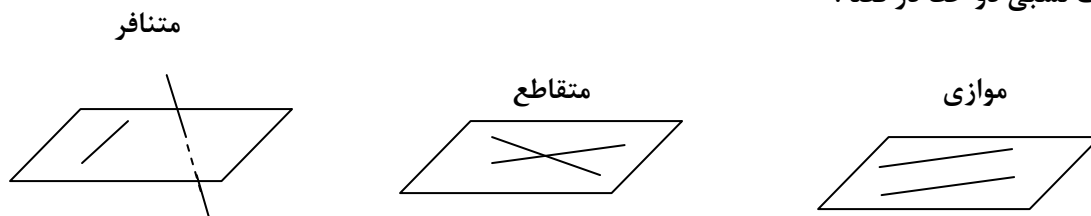
موازی



منطبق

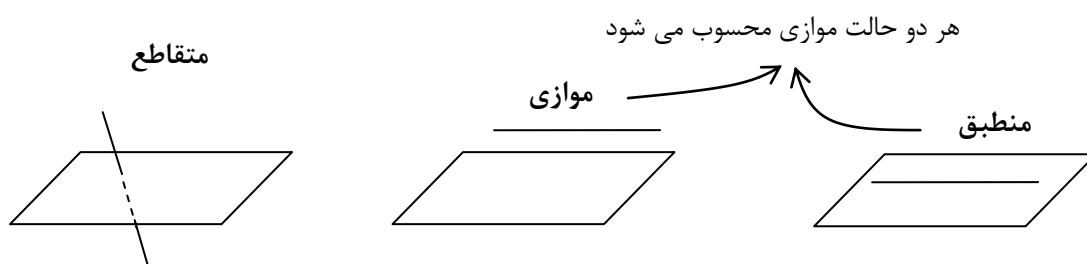


وضعیت نسبی دو خط در فضا :

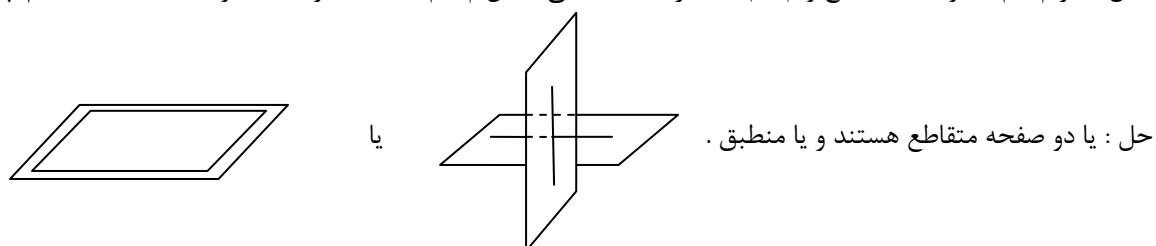


دو خط متنافر : دو خط در فضا که در یک صفحه نباشند و همدیگر را قطع نکنند ، متنافر نامیده می شوند . ش ۹۴

وضعیت نسبی خط و صفحه در فضا :

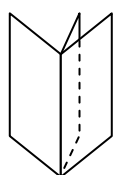


مثال : اگر L_1, L_2 دو خط متقاطع و P_1, P_2 به ترتیب صفحاتی شامل L_1, L_2 باشند . وضعیت دو صفحه نسبت به هم چگونه است ؟

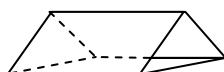


مثال : اگر P_1, P_2, P_3 سه صفحه دو به دو متقاطع باشند ، ثابت کنید فصل مشترک این سه صفحه یا سه خط موازیند و یا هر سه از یک نقطه می گذرند .

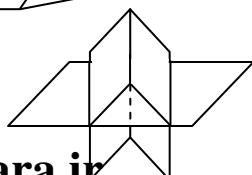
حل : فصل مشترک دو صفحه P_1, P_2 را L می نامیم . حال خط L با صفحه P_3 سه حالت ممکن است داشته باشد .



(الف) واقع بر P_3 باشد که در این صورت فصل مشترک هر سه صفحه خواهد بود .



(ب) موازی P_3 باشد که در این صورت فصل مشترک ها موازیند .



(ج) متقاطع با P_3 باشد که در این صورت فصل مشترک ها هم‌رسند .

مثال: اگر D, C, B, A چهار نقطه متمایز در فضا باشند، ثابت کنید این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر دو خط

CD, AB متقاطع یا موازی باشند. خ ۸۶

حل: اگر چهار نقطه در صفحه باشند طبق وضعیت دو خط در صفحه، دو خط CD, AB یا موازیند و یا متقاطع.

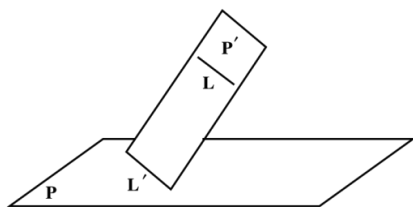
اگر دو خط CD, AB موازی یا متقاطع باشند، می دانیم از دو خط متقاطع یا موازی، یک صفحه می گذرد پس چهار نقطه

D, C, B, A در یک صفحه قرار دارند.

خط و صفحه موازی:

قضیه: اگر خط L با صفحه P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با صفحه P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی با L قطع می کند. (خ ۹۴ و خ ۹۲ و خ ۹۱ و خ ۸۷ و خ ۸۲ و ش ۸۸ و ش ۸۶ و ش ۸۴ و ش ۸۲ و ۹۳ و ۸۹ و ۸۴ و ش ۹۵)

اثبات:



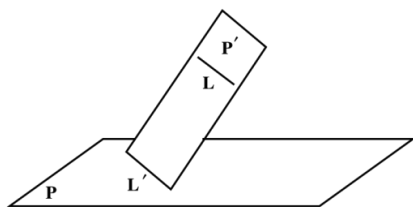
الف) اگر L در صفحه P باشد. هر صفحه P' متمایز با P که از L بگذرد، صفحه P را در همان خط L قطع می کند و درستی قضیه روشن است.

ب) اگر L در صفحه P نباشد. و P' صفحه گذرنده از L باشد که صفحه P را در خط L' قطع کند. L, L' هر دو در صفحه P' هستند و همدیگر را قطع نمی کنند زیرا از متقاطع بودن آنها نتیجه می شود که خط L صفحه P را قطع می کند که این خلاف فرض است.

قضیه: اگر خط L با یکی از خط های صفحه P موازی باشد، آنگاه خط L با صفحه P موازی است.

(خ ۹۳ و خ ۸۸ و خ ۸۴ و ش ۸۷ و ۹۱ و ۸۸ و ۸۶ و ۸۳ و ش ۹۴)

اثبات:



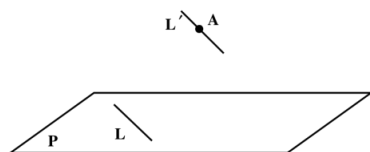
الف) اگر خط L در صفحه P باشد، حکم برقرار است.

ب) اگر خط L در صفحه P نباشد و L' خطی از صفحه P موازی L باشد، از L, L' صفحه ای مانند P' می گذرد که فصل مشترک آن با صفحه P همان خط L' است. اگر خط L صفحه P را قطع کند محل تقاطع روی فصل مشترک دو صفحه قرار دارد و دو خط L, L' متقاطع خواهند شد که خلاف فرض است. پس خط L صفحه P را قطع نمی کند و با آن موازی است.

نتیجه: شرط توازی خط و صفحه آن است که خط با یکی از خطوط صفحه موازی باشد.

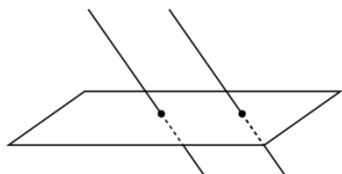


مثال: از نقطه A خارج از صفحه P ، خطی موازی P رسم کنید. خ ۹۴ و ش ۹۰ و د ۹۲ و د ۸۶

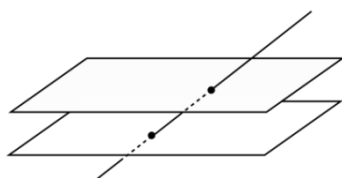


حل: خط دلخواهی مانند L در صفحه P در نظر می‌گیریم و از نقطه A خط L' را موازی آن رسم می‌کنیم. چون این خط با یکی از خطوط صفحه موازی شده است، پس با کل صفحه موازی خواهد بود.

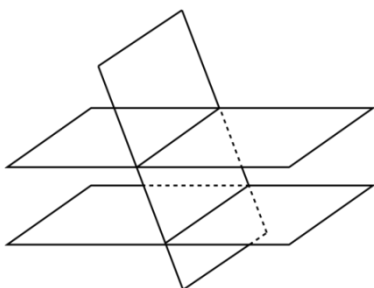
قضیه: اگر خط L با صفحه P موازی و A نقطه‌ای از صفحه P باشد، آنگاه خطی که از A به موازات L رسم می‌شود، به تمامی در صفحه P قرار دارد. (بدون اثبات می‌پذیریم)



نتیجه ۱: اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.



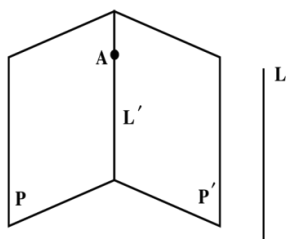
نتیجه ۲: اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.



نتیجه ۳: اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترک‌ها با هم موازیند.

مثال: اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آنها موازی است.

(ش ۹۳ و ش ۹۲ و ش ۹۱ و ش ۸۷ و ش ۸۳ و د ۹۰ و د ۸۲ و خ ۹۵)



حل: فرض کنید خط L موازی دو صفحه متقاطع P, P' باشد. از یک نقطه فصل مشترک مانند A خط L' را موازی L رسم می‌کنیم. چون خط L با صفحه P موازی است، خط L' به تمامی در صفحه P قرار دارد و به همین ترتیب خط L' به تمامی در صفحه P' قرار دارد. پس L' همان فصل مشترک دو صفحه P, P' است که با خط L نیز موازی است.

دو صفحه موازی :

قضیه : اگر دو صفحه موازی باشند ، هر خط از یکی از این دو صفحه ، با صفحه دیگر موازی است . خ ۹۲ و خ ۹۱ و ۸۹

اثبات : اگر P_1, P_2 دو صفحه موازی باشند و L_1 خطی در صفحه P_1 باشد در این صورت این خط صفحه P_2 را قطع نمی کند زیرا نقطه تقاطع آنها در هر دو صفحه خواهد بود و این یعنی دو صفحه متقاطع هستند ، که این خلاف فرض است .

مثال : اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی ، موازی باشد ، با دیگری نیز موازی است . ش ۹۳ و ش ۸۷ و خ ۸۶

حل : فرض کنید P_1, P_2 دو صفحه موازی باشند و L خطی موازی P_1 باشد آنگاه L صفحه P_2 را قطع نمی کند زیرا در این صورت صفحه موازی با آن یعنی P_1 را نیز قطع خواهد کرد که خلاف فرض است . پس L موازی P_2 است .

مثال : اگر صفحه ای با یکی از دو خط موازی ، موازی باشد ، با دیگری نیز موازی است . خ ۸۸ و د ۹۱

حل : فرض کنید L_1, L_2 دو خط موازی باشند و P صفحه ای موازی L_1 باشد آنگاه P خط L_2 را قطع نمی کند زیرا در این صورت خط موازی با آن یعنی L_1 را نیز قطع خواهد کرد که خلاف فرض است . پس P موازی L_2 است .

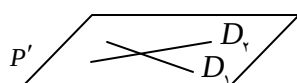
مثال : اگر دو صفحه با صفحه سوم موازی باشد ، خود آن دو با هم موازیند . (جلوتر به کمک تعامد خط و صفحه نیز ثابت می شود)

حل : فرض کنید P_1, P_2 دو صفحه موازی با P_3 باشند . آنگاه P_1, P_2 همدیگر را قطع نمی کنند زیرا اگر صفحه P_1 صفحه P_2 را قطع کند صورت صفحه موازی با آن یعنی P_3 را نیز قطع خواهد کرد که خلاف فرض است . پس P_1, P_2 موازی هستند .

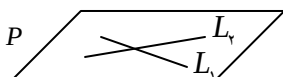
قضیه : اگر دو خط متقاطع از صفحه ای با دو خط متقاطع از صفحه ای دیگر دو به دو موازی باشند ، آن دو صفحه موازیند . (بدون اثبات می پذیریم)

مثال : از نقطه A خارج از صفحه P ، صفحه ای موازی صفحه P رسم کنید و ثابت کنید این صفحه یکتاست . ش ۹۳ و ش ۸۹ و ش ۸۴

حل : خطوط متقاطع L_1, L_2 را در صفحه P در نظر می گیریم و از نقطه A خطوط D_1, D_2



را به ترتیب موازی L_1, L_2 رسم می کنیم . از D_1, D_2 صفحه ای مانند P' می گذرد و چون دو خط متقاطع از این صفحه با دو خط متقاطع از صفحه P موازی است . این دو صفحه موازی هستند .



حال می خواهیم نشان دهیم این صفحه منحصر به فرد است ، فرض کنید دیگری مانند P'' نیز باشد که از نقطه A گذشته و موازی P باشد ، چون صفحه P'' صفحه P' را قطع کرده است

پس صفحه موازی با آن یعنی P را نیز قطع می کند و این خلاف فرض است پس P' یکتاست .



مثال: اگر O نقطه ای خارج از صفحه P باشد، ثابت کنید کلیه خطوط گذرنده از O موازی با صفحه P در یک صفحه موازی با P قرار دارند. خ ۹۰ و خ ۸۵ و ش ۸۸ و ش ۹۵

حل: خطوط متقاطع L_1, L_2 را در صفحه P در نظر می گیریم و از نقطه O خطوط D_1, D_2 را به ترتیب موازی L_1, L_2 رسم می کنیم. از D_1, D_2 صفحه ای مانند P' می گذرد که با صفحه P موازی است و هر خطی که از O موازی صفحه P بگذرد به تمامی در صفحه P' قرار دارد زیرا در غیر این صورت P' را قطع می کند و صفحه موازی با آن یعنی P را نیز قطع خواهد کرد که خلاف فرض است.

مثال: ثابت کنید در یک هرم، وسط یالهای آن در صفحه ای موازی قاعده قرار دارند. خ ۸۷ و ش ۹۲ و ش ۸۹ و د ۹۳ و د ۸۹

حل: نقاط A', B', C' را در وسط یالهای هرم در نظر می گیریم و با استفاده از عکس قضیه تالس

در صفحه SAB و در صفحه SCB داریم:

$$\frac{SA'}{AA'} = \frac{SB'}{BB'} \Rightarrow A'B' \parallel AB$$

$$\frac{SC'}{CC'} = \frac{SB'}{BB'} \Rightarrow C'B' \parallel CB$$

و چون دو خط متقاطع از صفحه $A'B'C'$ با دو خط متقاطع از صفحه ABC دو به دو موازی هستند، پس این دو صفحه موازیند.

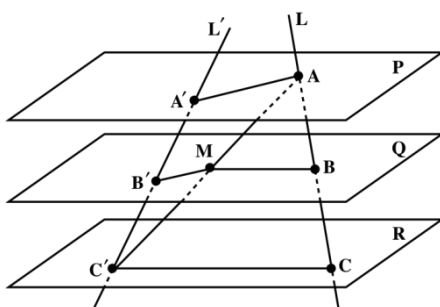
مثال: در هرم زیر صفحه $A'B'C'$ با صفحه ABC موازی است. اگر $SA = 5SA'$ باشد. نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

حل: طبق قضیه تالس در هر یک از صفحات SAC, SBC, SAB داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{5} \\ \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{5} \\ \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A'B'C' \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

قضیه تالس در فضا: صفحه های موازی روی دو خط که آنها را قطع می کنند، پاره خط های متناظر متناسب ایجاد می کنند.

(خ ۸۹ و خ ۸۵ و ش ۹۰ و د ۹۲ و د ۸۷)



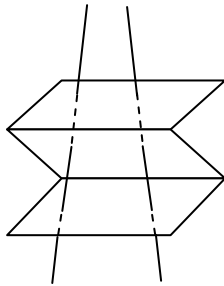
$$\text{حکم: } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

اثبات: خط AC' را رسم می کنیم که صفحه وسطی را در نقطه ای مانند

M قطع کند و با توجه به اینکه $AA' \parallel MB', MB \parallel CC'$ به کمک قضیه

تالس در صفحات $AA'C'$, ACC' داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC'} \\ \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AM}{MC'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



مثال : آیا عکس قضیه تالس در فضا درست است ؟ با رسم شکل توضیح دهید . خ ۹۳

حل : خیر . مثلاً در شکل مقابل روی دو خط پاره خط های متناظر متناسب ایجاد شده است

ولی صفحات با هم موازی نیستند ..

زاویه بین دو خط متناظر : اگر L, L' دو خط متناظر باشند و روی یکی از آنها خطی موازی دیگری رسم شود ، زاویه بین این دو خط متقاطع ، زاویه بین دو خط متناظر خواهد بود .

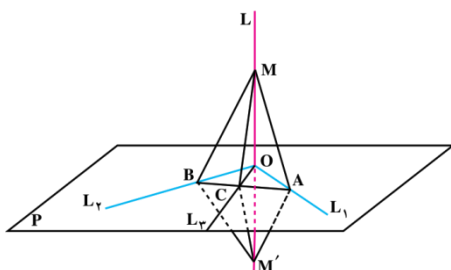
نتیجه : اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است .

مثال : اگر L, L' دو خط متناظر باشند ، صفحه یکتایی شامل L وجود دارد که با خط L' موازی است .

حل : از نقطه دلخواهی روی خط L خطی موازی L' رسم می کنیم . از این دو خط متقاطع صفحه ای مانند P می گذرد که با L' موازی است . اگر از هر نقطه دیگری روی خط L هر خط دیگری موازی L' رسم شود به تمامی در صفحه P قرار می گیرد .

تعامد خط و صفحه : خط L بر صفحه P عمود است ، هرگاه صفحه P را قطع کرده و بر هر خط آن که از نقطه تقاطع می گذرد ، عمود باشد .

قضیه اساسی تعامد : خط L بر صفحه P عمود است اگر و تنها اگر صفحه P را قطع کند و بر دو خط غیر موازی آن که از نقطه تقاطع می گذرد ، عمود باشد . خ ۸۶



اثبات : اگر خط L در نقطه O بر صفحه P عمود باشد ، بر هر خط از این صفحه که از این نقطه می گذرد نیز عمود است ، پس بر آن دو خط غیر موازی گذرنده از نقطه تقاطع نیز عمود خواهد بود .

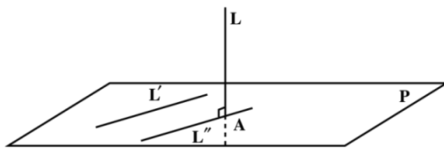
برعکس . فرض کنید که خط L صفحه P را در نقطه O قطع کند و بر دو خط غیر موازی L_1, L_2 از این صفحه که از نقطه تقاطع می گذرد ، عمود باشد .



باید ثابت کنیم که L بر هر خطی از این صفحه مانند L_p که از نقطه O می گذرد نیز عمود است :

- نقاط B, A را به ترتیب روی خطوط L_p, L_1 چنان انتخاب می کنیم که پاره خط AB خط L_p را در نقطه C قطع کند .
- نقاط M', M را روی خط L در دو طرف O و به فاصله یکسان از آن انتخاب می کنیم .
- در صفحه MAM' خط OA عمود منصف پاره خط MM' است ، پس $MA = M'A$ و به همین ترتیب $MB = M'B$
- پس بنا به حالت (ض ض ض) دو مثلث $M'AB, MAB$ همنهشت هستند در نتیجه $M'AC = MAC$
- پس بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث $M'AC, MAC$ با هم همنهشت هستند در نتیجه $M'C, MC$
- بنابراین مثلث MCM' متساوی الساقین و میانه CO عمود بر MM' است و این یعنی L بر L_p عمود است .

مثال : اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد ، بر هر خط از آن صفحه عمود است . خ ۹۱



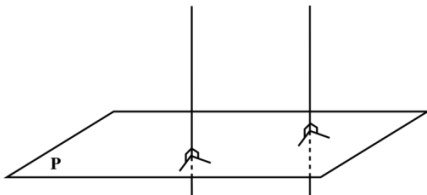
اثبات : فرض کنید خط L در نقطه A بر صفحه P عمود باشد و خط L'

خطی دلخواه از این صفحه باشد . از نقطه A خط L'' را به موازات L' رسم

می کنیم طبق تعریف تعامد ، خط L بر L'' عمود است بنابر این بر خط موازی

با آن یعنی L' نیز عمود خواهد بود .

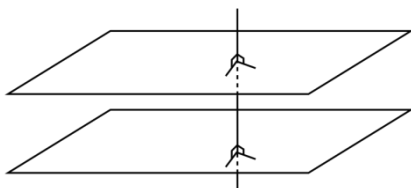
تعمیم قضیه اساسی تعامد : خط L بر صفحه P عمود است اگر و تنها اگر بر دو خط غیر موازی از P عمود باشد .



نتیجه ۱ : دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند .

(اگر صفحه ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است)

اثبات : فرض کنید L, L' دو خط موازی و صفحه P بر خط L عمود باشد . در این خط بر دو خط متقاطع از این صفحه مانند L_1, L_2 نیز عمود است . چون L_1, L_2 بر L عمود است بر خط موازی با آن یعنی L' نیز عمود است و طبق قضیه اساسی تعامد خط L' بر صفحه P عمود است .



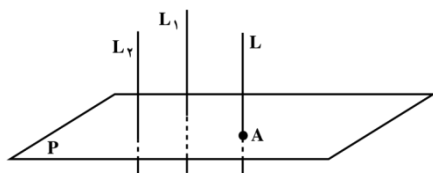
نتیجه ۲ : دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازیند .

(اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است) خ ۸۸ و ش ۹۱

اثبات : فرض کنید P, P' دو صفحه موازی و خط L بر صفحه P عمود باشد . در این صورت بر دو خط متقاطع از این صفحه مانند L_1, L_2 نیز عمود است . حال دو خط D_1, D_2 را در صفحه P' به ترتیب موازی L_1, L_2 رسم می کنیم . چون L بر L_1, L_2 عمود است بر خطوط موازی با آنها یعنی D_1, D_2 نیز عمود است و طبق قضیه اساسی تعامد بر صفحه P' عمود است .



مثال : دو خط موازی با خط دیگر با هم موازیند .

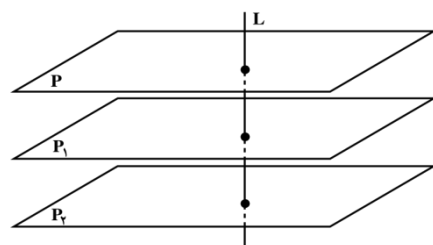


حل : فرض کنید دو خط L_1, L_2 با خط L موازی باشد . صفحه P را بر خط L عمود

می کنیم ، این صفحه بر L_1, L_2 نیز عمود می شود و چون این دو خط بر یک صفحه

عمودند پس با هم موازیند .

مثال : دو صفحه موازی با صفحه دیگر با هم موازیند . خ ۸۹ و ۹۴

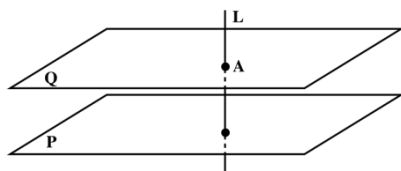


حل : فرض کنید دو صفحه P_1, P_2 با صفحه P موازی باشند . خط L را بر صفحه P

عمود می کنیم . این خط بر صفحه P_1, P_2 نیز عمود می شود و چون این دو صفحه بر یک

خط عمودند ، پس با هم موازیند .

مثال : از نقطه A خارج از صفحه P یک صفحه موازی آن می گذرد .

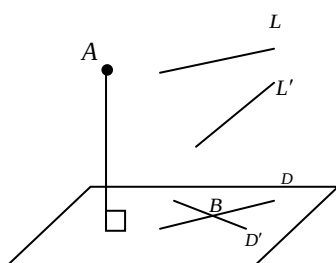


حل : از نقطه A خط L را عمود بر صفحه P رسم می کنیم ، سپس از همین نقطه صفحه

Q را عمود بر خط L رسم می کنیم . چون دو صفحه بر یک خط عمود هستند پس با هم

موازیند .

مثال : اگر L, L' دو خط متناظر باشند ، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می گذرد که بر L, L' عمود است . خ ۹۰ و ۹۱ و ۹۴



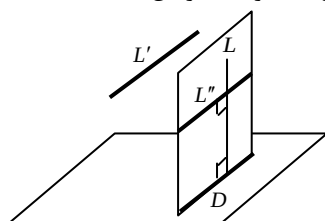
حل : از نقطه دلخواهی مانند B دو خط D, D' را به ترتیب موازی L, L' رسم می کنیم . از این

دو خط متقاطع صفحه‌های مانند P می گذرد . از نقطه A خط L را بر صفحه عمود می کنیم

این خط بر D, D' عمود است پس بر خطوط موازی با آنها یعنی L, L' نیز عمود خواهد بود . و

چون از نقطه خارج صفحه فقط یک خط می توان بر آن عمود کرد ، این خط یکتاست .

مثال : اگر خط L بر صفحه P عمود باشد ، هر خطی که بر L عمود باشد با صفحه P موازی است . خ ۸۹ و ۹۲ و ۹۰ و ۹۵



حل : فرض کنید خطی عمود بر L باشد . از نقطه دلخواهی روی L خط L'' را موازی L' رسم

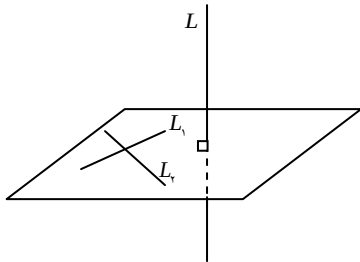
می کنیم . از دو خط متقاطع L و L'' صفحه ای مانند Q می گذرد که فصل مشترک آن را با صفحه P

D می نامیم . چون D, L'' هر دو بر L عمودند پس با هم موازیند بنابر این L'' با P موازی است .



لذا L' با صفحه P موازی است.

مثال: تمام خطوط گذرنده از یک نقطه مانند O عمود بر یک خط مانند L ، در یک صفحه قرار دارند که بر L عمود است.



حل: فرض کنید L_1, L_2 خطوطی عمود بر L باشند که از نقطه O رسم شده اند. از این

دو خط یک صفحه مانند P می گذرد که طبق قضیه اساسی تعامد بر L عمود است.

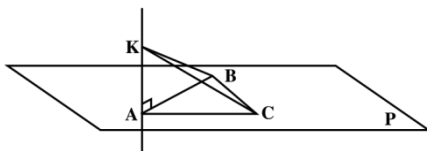
حال فرض کنید خط دیگری مانند L_3 از نقطه O عمود بر L رسم شود در این صورت

این خط با صفحه P موازی خواهد بود و چون نقطه مشترک با صفحه دارد پس به تمامی

درون صفحه قرار دارد.

مثال: فرض کنید A, B, C سه نقطه از صفحه P باشد که بر یک خط راست نیستند و $AB = AC$. اگر K نقطه ای خارج از

صفحه باشد که $KB = KC$ و KA بر AB عمود باشد. ثابت KA بر صفحه P عمود است.



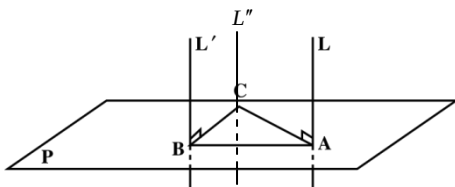
حل: بنا به حالت (ض ض ض) دو مثلث KAC, KAB همنهشت هستند پس

$\widehat{KAC} = \widehat{KAB} = 90^\circ$ پس KA بر AC نیز عمود است. و چون KA بر دو خط

مقاطع از صفحه عمود است پس بر این صفحه عمود است.

مثال: فرض کنید L, L' دو خط موازی باشند که صفحه P را به ترتیب در نقاط A, B قطع کنند. اگر C نقطه ای در صفحه P

باشد که روی خط AB نباشد و خط L بر AC و خط L' بر BC عمود باشد، ثابت کنید L, L' بر P عمودند.



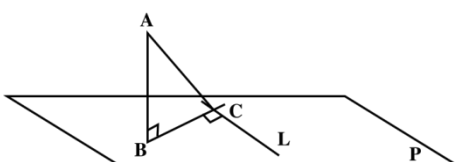
حل: از نقطه C خط L'' را موازی L رسم می کنیم که با L' نیز موازی خواهد بود

بنابر این L'' نیز بر AC و BC عمود می باشد و طبق قضیه تعامد بر صفحه P

عمود است در نتیجه خطوط موازی آن یعنی L, L' نیز بر صفحه P عمودند.

مثال: فرض کنید L خطی در صفحه P و C, B دو نقطه متمایز از این صفحه باشد که پاره خط BC در C بر L عمود باشد.

اگر A نقطه ای خارج از صفحه باشد که خط AB بر صفحه عمود باشد، ثابت کنید خط AC بر L عمود است.



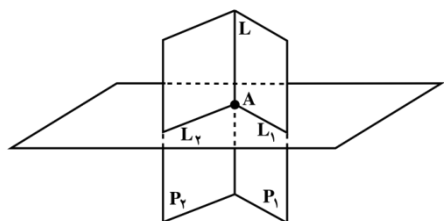
حل: AB بر صفحه P عمود است پس بر خط L نیز عمود است یا به عبارت دیگر

خط L بر خط AB عمود است و چون خط L بر BC و AB عمود است پس بر

صفحه مثلث ABC عمود است پس در بر تمام خطوط این صفحه از جمله AC

عمود است.

مثال: از نقطه A روی خط L ، صفحه ای بر خط L عمود کنید. ش ۸۸ و ۹۰ د و ۸۹ د و ۸۷ د و ش ۹۴ و خ ۹۵



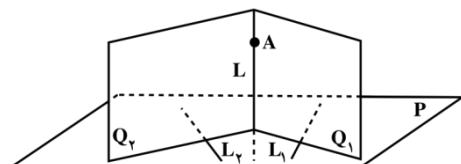
حل: می توانیم از خط L بیشمار صفحه بگذرانیم. دو صفحه متمایز از این صفحه ها را P_1, P_2 می نامیم. از نقطه A در صفحه P_1 خط L_1 را عمود بر L رسم می کنیم و به طور مشابه از نقطه A در صفحه P_2 خط L_2 را عمود بر L رسم می کنیم. چون خط L بر دو خط متقاطع از صفحه P عمود است بر صفحه P عمود خواهد بود.

مثال: از نقطه A خارج از خط L ، صفحه ای عمود بر L رسم کنید و ثابت کنید این صفحه یکتاست. ش ۸۹ و خ ۹۳ و ش ۸۹

حل: از نقطه A خط L' را موازی L رسم می کنیم. سپس صفحه P را از این نقطه عمود بر L' رسم می کنیم که این صفحه بر خط L نیز عمود خواهد بود.

اگر P' صفحه دیگری باشد که از A گذشته و بر L عمود باشد، چون دو صفحه عمود بر یک خط موازیند پس صفحه P' موازی صفحه P است، و چون دو صفحه دارای نقطه مشترک هستند باید بر هم منطبق باشند.

مثال: از نقطه A خارج از صفحه P خطی عمود بر P رسم کنید و ثابت کنید این خط یکتاست. خ ۹۲ و خ ۹۴ و د ۹۰



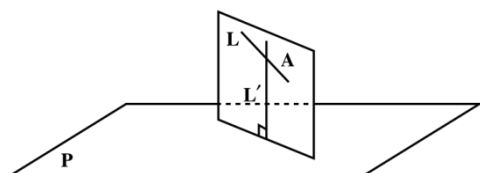
حل: دو خط غیر موازی L_1, L_2 را در صفحه P رسم می کنیم. از نقطه A صفحه Q_1 را عمود بر L_1 و صفحه Q_2 را عمود بر L_2 رسم می کنیم. اگر فصل مشترک این دو صفحه را L بنامیم طبق قضیه اساسی تعامد این خط بر صفحه P عمود است.

فرض کنید خط دیگری مانند L' باشد که از A گذشته و بر P عمود باشد، چون دو خط L, L' عمود بر یک صفحه هستند پس با هم موازیند و چون در یک نقطه مشترکند پس بر هم منطبق هستند.

تعامد دو صفحه: دو صفحه را عمود بر هم می گویند هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر دیگری عمود است.

قضیه: اگر P, Q دو صفحه عمود بر هم باشند، هرکدام شامل خطی است که بر دیگری عمود باشد. (بدون اثبات می پذیریم)

مثال: اگر خط L بر صفحه P عمود نباشد، صفحه ای از خط L بگذرانید که بر صفحه P عمود باشد. خ ۸۸ و د ۸۸ و ش ۹۲

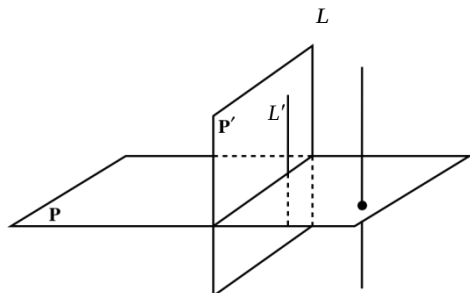


حل: از یک نقطه مانند A روی خط L خط L' را عمود بر صفحه P رسم می کنیم از این دو خط متقاطع صفحه ای می گذرد که بر P عمود است زیرا خطی از



آن بر صفحه P عمود است .

مثال : اگر دو صفحه P, P' بر هم عمود باشند ، ثابت کنید هر خط عمود بر P ، با صفحه P' موازی است . ش ۸۸ و ش ۸۷ و ش ۹۴

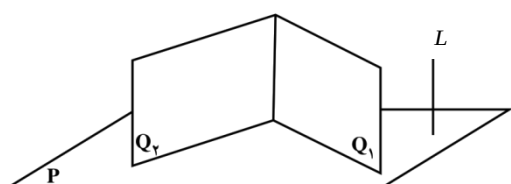


حل : خط L' در صفحه P' وجود دارد که بر صفحه P عمود است و چون

L', L بر صفحه P عمودند با هم موازیند بنابر این خط L با صفحه P' موازی

است .

مثال : اگر Q_1, Q_2 دو صفحه متقاطع و عمود بر P باشند ، ثابت کنید فصل مشترک آنها بر صفحه P عمود است . ش ۹۰



حل : خط L را بر صفحه P عمود می کنیم این خط یا دو صفحه Q_1, Q_2

موازی است بنابر این با فصل مشترک آنها نیز موازی است بنابر این فصل مشترک

این دو صفحه نیز بر صفحه P عمود است .

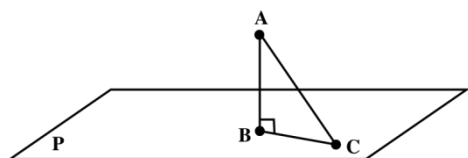
مثال : اگر صفحه ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است و ش ۸۷ و د ۸۶

حل : فرض کنید P_1, P_2 دو صفحه موازی و P صفحه ای عمود بر P_1 باشد ، پس خطی مانند L در P وجود دارد که بر صفحه P_1

عمود است پس این خط بر صفحه P_2 نیز عمود است بنابر این صفحه P بر صفحه P_2 نیز عمود است .

فاصله نقطه از خط : طول پاره خطی که از آن نقطه بر صفحه عمود شده باشد ، فاصله آن نقطه از خط است .

مثال : ثابت کنید که فاصله نقطه از صفحه ، کوتاهترین فاصله بین آن نقطه و نقاط دیگر صفحه است . ش ۸۵ و خ ۹۵



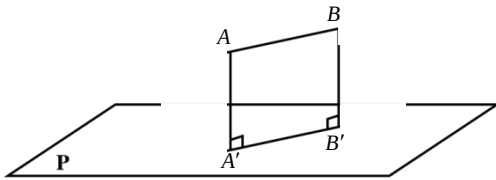
حل : پاره خط AB را عمود بر صفحه P رسم می کنیم و نقطه دلخواه C را

در این صفحه در نظر می گیریم . با وصل کردن نقطه C به نقاط A, B

مثلث قائم الزاویه بوجود می آید که همیشه وتر بزرگ ترین ضلع آن است پس

$$AB < AC$$

مثال : اگر A, B دو نقطه متمایز به فاصله یکسان در یک طرف صفحه P باشد ثابت کنید AB موازی P است . ش ۸۴ و ش ۸۳



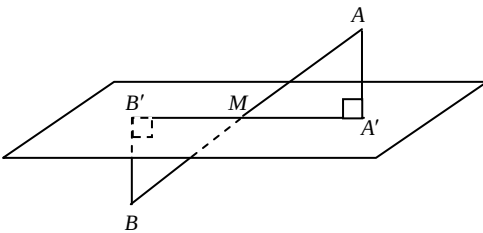
حل : عمود هایی از این دو نقطه بر صفحه رسم می کنیم و پای عمود ها را به ترتیب

A', B' می نامیم در این صورت $AA' \parallel BB'$ خواهد بود و چون $AA' = BB'$

نیز هست پس چهار ضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است و AB موازی $A'B'$

و در نتیجه موازی صفحه P است .

مثال : اگر A, B دو نقطه متمایز به فاصله یکسان در دو طرف صفحه P باشد ثابت کنید صفحه P از وسط پاره خط AB می گذرد .



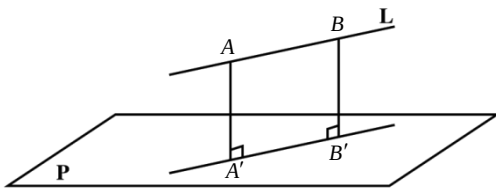
حل : عمود هایی از این دو نقطه بر صفحه رسم می کنیم و پای عمود ها را به ترتیب

A', B' می نامیم در این صورت $AA' \parallel BB'$ خواهد بود و AB یک مورب است

پس $\hat{A} = \hat{B}$ و طبق (ز ض ز) دو مثلث پدید آمده همنهشت هستند در نتیجه

$$AM = BM$$

مثال : اگر خط L موازی صفحه P باشد ، ثابت کنید فاصله هر دو نقطه از خط L تا صفحه P برابر است . (فاصله خط و صفحه) خ ۸۴



حل : دو نقطه A, B را روی خط L در نظر می گیریم و عمود هایی از آنها بر

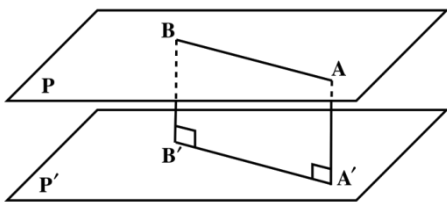
صفحه رسم می کنیم و پای عمود ها را به ترتیب A', B' می نامیم در این صورت

$AA' \parallel BB'$ خواهد بود و صفحه گذرنده از این دو خط با صفحه P در خط $A'B'$

دارای فصل مشترک است که این فصل مشترک با خط L موازی است بنابر این

چهار ضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است و $AA' = BB'$.

مثال : اگر P, P' دوصفحه موازی باشند ، ثابت کنید فاصله هر دو نقطه از صفحه P تا صفحه P' برابر است . (فاصله دو صفحه)



حل : اگر A, B دو نقطه از صفحه P باشند ، پاره خط AB موازی صفحه P' است

حال عمود هایی از این نقاط بر صفحه P' رسم می کنیم و پای عمود ها را به ترتیب

A', B' می نامیم در این صورت $AA' \parallel BB'$ خواهد بود و صفحه گذرنده از این دو

خط با صفحه P' در خط $A'B'$ دارای فصل مشترک است که این فصل مشترک با

خط AB موازی است بنابر این چهار ضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است و $AA' = BB'$.

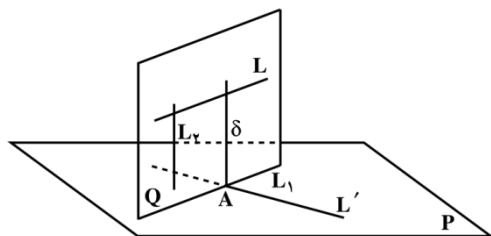
مثال: ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$ ، مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک صفحه مانند P به فاصله a قرار دارد، دو صفحه موازی P و در دو طرف P است که به فاصله a از صفحه P قرار دارند.

حل: اگر P_1, P_2 دو صفحه موازی P به فاصله a در دو طرف آن باشند هر نقطه روی آنها به فاصله a از صفحه P است.

و برعکس اگر نقطه A به فاصله a از صفحه P باشد، از A صفحه P_1 را موازی صفحه P رسم می کنیم و برای هر نقطه B دلخواه در طرف A که از صفحه P به فاصله a باشد، خط AB موازی صفحه P است بنابر این این خط به تمامی در صفحه P_1 قرار دارد. و اگر این دو نقطه در طرف دیگر بود نیز به طور مشابه ثابت می شد.

عمود مشترک دو خط متنافر: خطی که دو خط متنافر را قطع و بر هر دوی آنها عمود باشد را عمود مشترک این دو خط متنافر می گویند.

مثال: اگر L, L' دو خط متنافر باشند، طریقه رسم عمود مشترک آنها را توضیح دهید. ش ۸۶



حل: ابتدا صفحه P شامل خط L' و موازی خط L را رسم می کنیم. سپس

صفحه Q را از L عمود بر صفحه P می گذرانیم. فصل مشترک دو صفحه که

L_1 می نامیم با L موازی است بنابر این L_1, L' موازی نیستند و چون در یک

صفحه قرار دارند متقاطع خواهند بود. از نقطه تقاطع این دو خط در صفحه Q خط

δ را عمود بر L_1, L' رسم می کنیم اگر L_1 خطی در Q باشد که بر P عمود است

پس بر L_1 نیز عمود است لذا L_1 و δ موازی خواهند بود بنابر این خط δ نیز بر صفحه

P عمود است پس δ بر L' نیز عمود است در نتیجه خط δ با دو خط L', L متقاطع

و بر هر دو عمود است.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا