فصل سوم: بردارها

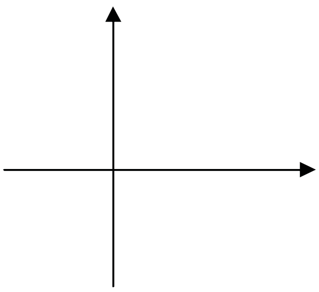
فضای $R^{۲}$:

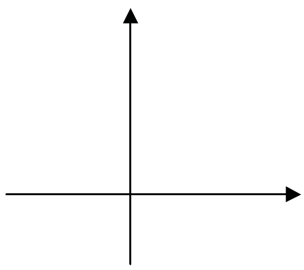
هر نقطه از صفحه مختصات را به صورت زوج مرتب (x , y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x , y)| x, y \in R\}$ شامل همه نقاط صفحه مختصات می‌باشد و آن را با $R^{۲}$ نمایش می‌دهند ، یعنی $R^{۲} = \{(x, y) | x, y \in R\}$.

چند مثال در فضای $R^{۲}$

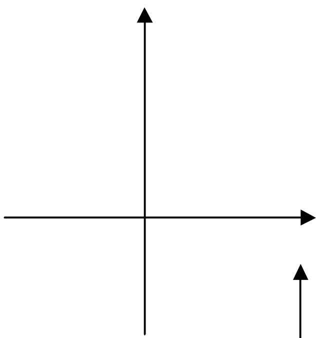
مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

الف. $x = ۰$ **ب.** $y = ۰$ **ج.** $x = ۱ , \ -۱ \le y < ۳$

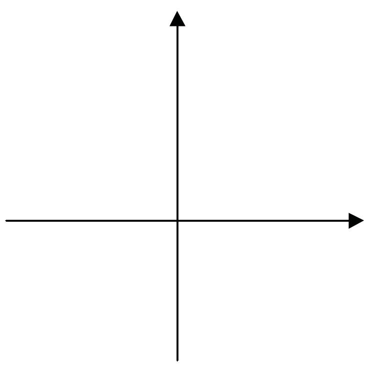


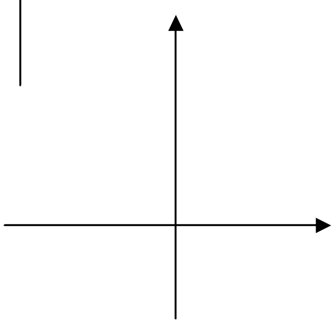


د. $y = x^{۲} \ , -۱ < x \le ۲$ **ه.** $-۱ \le x \le ۱ \ , ۱ \le y \le ۲$



و. $x^{۲} < y \le ۲$ **ز.** $y \ge x^{۲}$

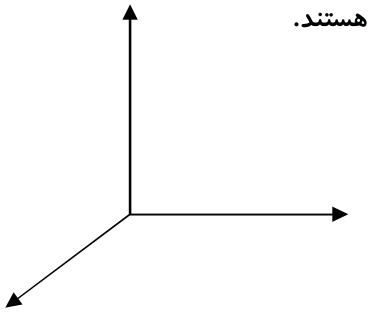




دستگاه مختصات سه بعدی:

در دستگاه مختصات سه بعدی، سه مولفه طول، عرض و ارتفاع داریم؛ یعنی دستگاه مختصات سه بعدی شامل ox، oy و oz است و هر نقطه آن به شکل (x, y, z) نمایش داده می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی محورهای ox، oy و oz دو بدو بر هم عمودند وبردارهای i، j و k بردارهای یکه (؟) محورها می‌باشد. دستگاه مختصات سه بعدی، یک دستگاه راست گرد(جهت مثلثاتی) است که می‌توان جای x، y و z را با رعایت ترتیب آن‌ها (اول x، بعد y و سپس z، در جهت مثلثاتی) عوض کرد.

از برخورد هر دو محور یک صفحه تشکیل شده است. صفحات مورد نظر xoy، xoz ، yoz هستند.



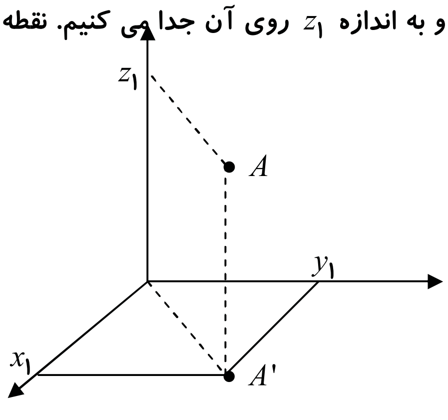
محورها فضا را به به هشت ناحیه تقسیم می‌شود که چهارتای آن بالای صفحه xoy و چهار تای آن پایین صفحه xoy قرار می‌گیرد و مانند دستگاه مختصات دو بعدی شماره‌گذاری می‌شود.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+

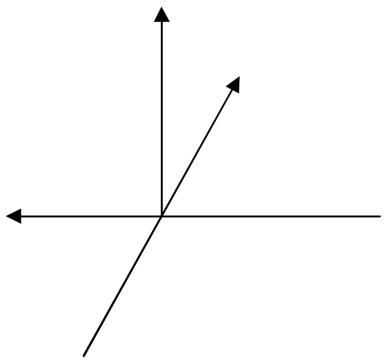
شماره ناحیه	علامت محورها		
	z	y	z
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

نمایش هندسی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات

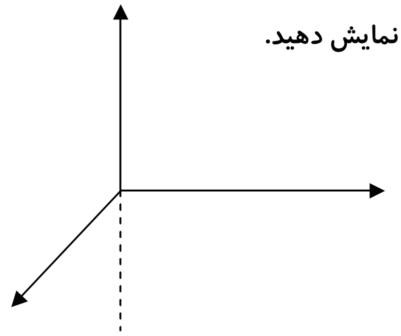
برای مشخص کردن نقطه A در دستگاه مختصات، به اندازه x_1 و y_1 روی محورهای مختصات جدا کرده تا نقطه A' روی صفحه xoy مانند حالت دو بعدی مشخص شود. از نقطه A' خطی موازی محور zها رسم می کنیم و به اندازه z_1 روی آن جدا می کنیم. نقطه حاصل، نقطه A خواهد بود.



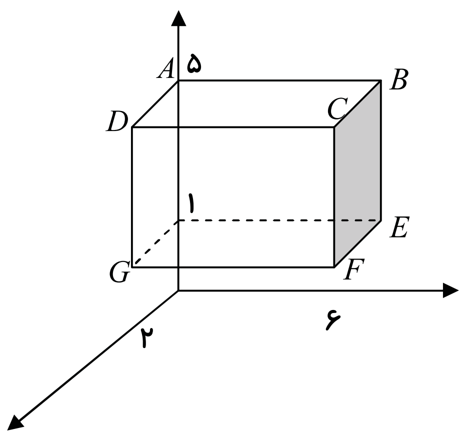
توجه: برای نمایش بهتر نقاطی که مولفه‌های x و y آن‌ها منفی می‌باشد، می‌توان محورها را دوران داد.



مثال: نقاط $A(۱, ۲, -۱)$ و $B(-۲, -۱, ۲)$ را نمایش دهید.



مثال: در مکعب شکل مقابل:



الف. مختصات رئوس مکعب را بنویسید.

ب. معادله وجه $ABCD$ را بنویسید.

ج. معادله یال AD را بنویسید.

د. نقطه‌ای روی وجه $CBEF$ مشخص کنید.

ه. نقطه ای روی یال CF مشخص کنید.

و. معادله مکعب را مشخص کنید.

تصویر وقرینه‌ی یک نقطه نسبت به صفحات و محورهای مختصات:

الف. در تصویر روی محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها صفر می‌شوند.

مثال: تصویر نقطه $A(\alpha , \beta , \gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. روی محور x ها	۲. روی محور y ها
۳. روی محور z ها	۴. روی صفحه xoy
۵. روی صفحه yoz	۶. روی صفحه xoz

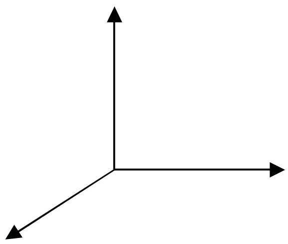
ب. در قرینه نسبت به محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها قرینه می‌شوند.

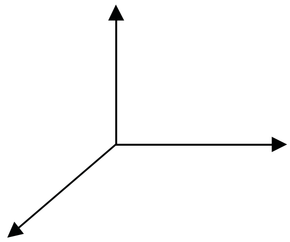
مثال: قرینه نقطه $A(\alpha , \beta , \gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱.نسبت به محور x ها   ۲. نسبت به محور y ها

۳. نسبت به محور z ها   ۴. نسبت به صفحه xoy

۵. نسبت به صفحه yoz ۶. نسبت به صفحه xoz





چند قرینه دیگر: قرینه نقطه $A(\alpha , \beta , \gamma)$ نسبت به صفحه $x=y$، $A'(\beta , \alpha , \gamma)$ و نسبت به صفحه $x=-y$، $A'=(-\beta , -\alpha , \gamma)$ است. و نسبت به صفحه $x=k$، $A'(2k-\alpha , \beta , \gamma)$ می‌باشد.

مثال: نقطه $A(-1,-3,2)$ مفروض است، اگر قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoz، A' و تصویر نقطه A' روی محور y ها، A'' باشد؛ حاصل جمع عرض های دو نقطه A' و A'' کدام است؟

۱. ۳-   ۲. صفر   ۳. ۳   ۴. ۶

فاصله نقطه از صفحات و محورهای مختصات:

برای محاسبه فاصله نقطه $A(x_1 , y_1 , z_1)$ تا محورهای مختصات یا صفحات مختصات، باید مولفه ذکر شده را در رابطه $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ صفر قرار دهیم.

مثال: فاصله نقطه $A(x_1 , y_1 , z_1)$ را تا محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. محور x ها   ۲. محور y ها

۳. محور z ها   ۴. صفحه xoy

۵. صفحه xoz ۶. صفحه yoz

اگر $A(x_1 , y_1 , z_1)$ و $B(x_2 , y_2 , z_2)$ دو نقطه در فضا باشند؛

۱. فاصله این دو نقطه برابر است با $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

۲. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB به صورت $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ می‌باشد.

توجه: با توجه به رابطه بالا فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ از مبدا مختصات برابر است با $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

مثال: اگر فاصله نقطه A از محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر با $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ باشد، فاصله نقطه A از مبدا مختصات چقدر است؟

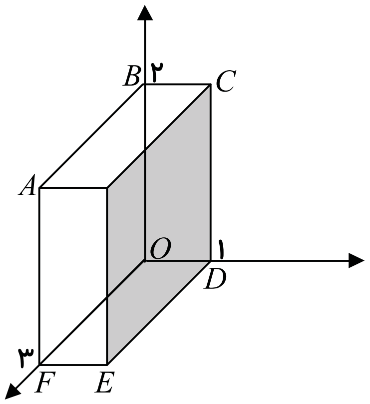
۱. $\sqrt{3}$ ۲. ۲ ۳. $\sqrt{6}$ ۴. $2\sqrt{2}$

مثال: اگر شکل مقابل نمایش یک اتاق باشد، مطلوبست:

الف. طول قطر کف اتاق

ب. طول قطر اتاق

ج. مختصات مرکز اتاق



نکته: مرکز ثقل(نقطه گرانیگاه) مثلث ABC را با نماد G نشان داده و محل برخورد میانه می‌باشد. مختصات G از رابطه $G = \frac{A+B+C}{3}$ بدست می‌آید.

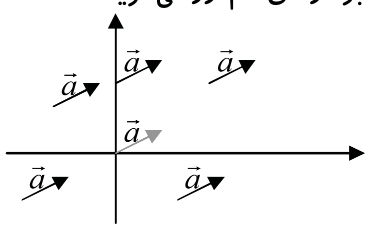
نکته: می دانیم در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$، رابطه $A + C = B + D$ برقرار است.

مثال: اگر $A(-1,0,2)$، $B(2,1,1)$ و $D(4,-1,3)$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات راس C را بیابید.

بردارها:

هر پاره خط جهت دار مانند AB، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ واندازه آن را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب برای سهولت بردار را با یک حرف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ نشان می‌دهند.

دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آن‌ها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. پس بی‌شمار بردار مساوی هم وجود دارد. اصطلاحاً این بردارهای برابر را بردارهای هم ارز می‌گویند.



طول بردار: اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ابتدا و انتهای بردار $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ باشند، آن‌گاه بردار به صورت $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ معرفی می‌شود. و طول آن از رابطه $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بدست می‌آید. و طول بردار $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ از رابطه $\left|\overrightarrow{OA}\right| == \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ بدست می‌آید.

ضرب عدد در بردار:

برای ضرب عدد حقیقی k در بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$، کافی است عدد k را در تک تک مولفه‌های بردار ضرب کنیم. $k\vec{a} = (k\,a_1, k\,a_2, k\,a_3)$

اگر $k > 0$ آن‌گاه $\vec{a}$ و $k\,\vec{a}$ هم جهت و اگر $k < 0$ باشد، غیر هم جهت هستند. پس می توان گفت دو بردار زمانی موازی هم هستند که مضرب هم باشند.

نکته: در صورتی دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ موازی یکدیگرند که مضرب هم باشند یعنی: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

مثال: اگر بردارهای $\vec{a}(m-1, 1, n+m)$ و $\vec{b}(0, -2, -4)$ موازی باشند، $n - m$ کدام است؟

۱. ۲- ۲. صفر ۳. ۱ ۴. ۲

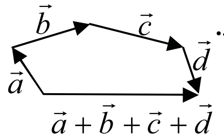
جمع دو بردار:

جمع دو بردار را از دو رویکرد تحلیلی و هندسی بررسی می‌کنیم.

الف. تحلیلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشند، آن‌گاه: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ یعنی برای جمع دو بردار، طول‌ها با هم و عرض‌ها باهم و ارتفاع‌ها با هم جمع می‌شوند.

ب. هندسی: جمع دو بردار به روش هندسی به دو روش زیر انجام می‌شود:

۱. روش مثلثی: زمانی از این روش استفاده می‌شود که دو (یا چند) بردار، پشت سر هم باشند. یعنی انتهای بردار قبلی، ابتدای بردار بعدی باشد. در این روش، مجموع بردارها از وصل کردن ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر به دست می‌آید.



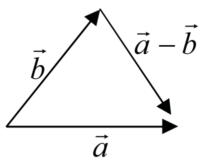
مثال: به کمک جمع دو بردار نشان دهید: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A$

۲. روش متوازی الاضلاع: وقتی دو بردار، هم مبدا (هم راس) باشند، برای جمع از روش متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم. در این روش از انتهای هر بردار، موازی و هم ارز بردار دیگر رسم می‌کنیم، قطر متوازی الاضلاع که ابتدای آن راس مشترک دو بردار است، جمع دو بردار را نشان می‌دهد.

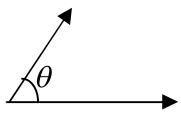
تفاضل (تفریق) دو بردار

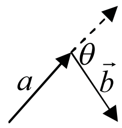
الف. تحلیلی: : اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشند، آن‌گاه: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$ یعنی برای تفریق دو بردار، طول‌ها ازهم و عرض‌ها از هم و ارتفاع‌ها از هم کم می‌شوند.

ب. هندسی: برای تفاضل دو برداری که هم مبدا هستند. از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول وصل می‌کنیم.



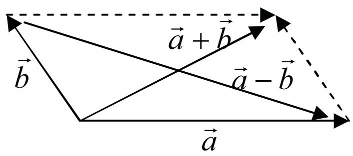
زاویه بین دو بردار: اگر دو بردار هم ابتدا (هم انتها) باشند، آن‌گاه زاویه تشکیل شده، $(0 \le \theta \le \pi)$ زاویه بین دو بردار نامیده می‌شود.



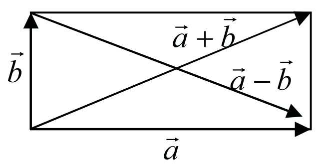


نکته: دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی الاضلاعی هستند که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود. پس:

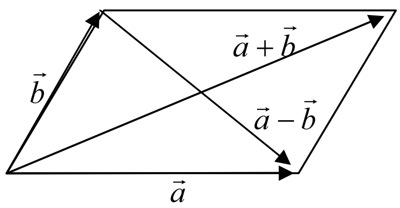
۱. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بیشتر از 90° باشد آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$



۲. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، 90° باشد آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}+\vec{b}|$



۳. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم‌تر از 90° باشد آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{a}+\vec{b}|$



برداریکه: بردار به طول یک بردار یکه نامیده می‌شود. اگر $\vec{a}$ برداری دلخواه باشد، آن‌گاه $e_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ برداری به طول یک و در جهت بردار $\vec{a}$ می‌باشد. بردار های یکه محورهای مختصات به ترتیب $i(1,0,0)$، $j(0,1,0)$ و $k(0,0,1)$ می باشند.

نکته: می‌دانیم که در لوزی قطرها بر هم عمودند، یکدیگر را نصف می‌کنیم و نیمساز زاویه‌ها می‌باشند، پس $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ اگر و تنها اگر $(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$. در این صورت $\vec{a}+\vec{b}$ نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد.

نکته: اگر بخواهیم نیم‌ساز زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابیم، ابتدا باید دو بردار یکه یا هم طول در راستاهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بسازیم؛ سپس جمع این دوبردار نقش نیم‌ساز را خواهند داشت. پس نمیساز زاویه داخلی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $e_{\vec{a}}+e_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ یا هر مضربی از آن از جمله $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ می‌باشد.

نمایش یک بردار بر حسب بردارهای یکه محورها: فرض کنید $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد در این صورت بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ بر حسب بردارهای یکه محورها نوشته‌ایم.

مثال: اگر $\vec{a} = i + 2j - k$ و $\vec{b} = (2, -1, -3)$ آن‌گاه اندازه بردار $2\vec{a} - 3\vec{b}$ را بدست آورید.

مثال: نقاط $A(-1, 2, 1)$ و $B(2, -1, -2)$ مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MA}$ باشد، مجموع طول و ارتفاع نقطه M کدام است؟

۱. صفر	۲. $\frac{2}{5}$	۳. $\frac{3}{5}$	۴. ۱

مثال: بر روی دو بردار $\vec{a} = -i + 2j + 3k$ و $\vec{b} = 2i - j + k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. طول قطر کوچک کدام است؟

۱. $\sqrt{18}$	۲. $\sqrt{20}$	۳. $\sqrt{22}$	۴. $\sqrt{24}$

مثال: چهار بردار OA و OB و OC و OD در تساوی $k > 1$ ، $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OD}$ صدق می‌کنند؛ چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱. مستطیل	۲. ذوزنقه	۳. لوزی	۴. متوازی الاضلاع

مثال: سه بردار با اندازه برابر در رابطه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ صدق می‌کند، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱. صفر	۲. ۶۰	۳. ۱۲۰	۴. ۹۰

مثال: اگر $\vec{a} = mi + j - 2k$ و $\vec{b} = 3j - k$ باشد و $\vec{a} + \vec{b}$ بر $\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد، آن‌گاه بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

۱. $\sqrt{30}$	۲. $\sqrt{29}$	۳. $\sqrt{31}$	۴. $\sqrt{26}$

مثال: زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 53° می‌باشد، زاویه بین بردارهای $e_{\vec{a}} + e_{\vec{b}}$ و $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ چند درجه است؟

۱. ۵۰	۲. ۲۵	۳. ۹۰	۴. ۲۷۰

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار هم طول که زاویه آن‌ها با جهت مثبت محور x ها به ترتیب ۲۴ و ۵۶ درجه باشد، زاویه برآیند هندسی این دو بردار با جهت مثبت محور x ها کدام است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۰ ۳. ۲۰ ۴. ۷۰

چند تست فضای $R^۳$ و بردار

۱. اگر نقطه $A(m-۱, m^۲-۴, m^۲-۲m)$ روی محور OX و نقطه $B(m^۲+۲m, m+۱, n-m+۳)$ روی صفحه xy باشند، نقطه $C(m+۲n, m-n, m+n)$ روی .... قرار دارد.

۱. محور z ها ۲. صفحه XOZ ۳. محور y ها ۴. صفحه YOZ — ۴

۲. اندازه تصویر بردار $\vec{v}(۳,۱,۲)$ بر صفحه yz کدام است؟

۱. $\sqrt{۵}$ ۲. $\sqrt{۱۰}$ ۳. $\sqrt{۱۳}$ ۴. $\sqrt{۱۴}$ — ۱

۳. اندازه تصاویر بردار a روی صفحات برابر $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۷}$ است. طول بردار a کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۴ ۳. ۳ ۴. ۵ — ۱

۴. نقاط $A(۱,۲,-۳)$ و $B(-۱,۲,۴)$ مفروض اند. فاصله نقطه A'، قرینه نقطه A نسبت به محور x ها از نقطه B'، تصویر B روی صفحه xy کدام است؟

۱. $\sqrt{۱۰}$ ۲. $\sqrt{۱۷}$ ۳. $\sqrt{۲۴}$ ۴. $\sqrt{۲۹}$ — ۴

۵. اگر نقاط $M(۱,-۲,۲)$، $N(۰,-۳,۳)$ و $P(۴,a,b)$ روی یک خط راست باشند، $a+b$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۱ ۳. صفر ۴. ۱- — ۳

۶. نقاط A، B، C و D در رابطه $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$ صدق می کنند، اگر $m>۱$ باشد چهار ضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟

۱. ذوزنقه ۲. لوزی ۳. متوازی الاضلاع ۴. مستطیل — ۱

۷. طول تصویر پاره خط AB که در آن $A(۱,۲,۳)$ و $B(۵,۵,۱)$ است بر صفحه xy کدام است؟

۱. ۵ ۲. $\sqrt{۲۹}$ ۳. ۷ ۴. ۹ — ۱

۸. در مستطیل $ABCD$ حاصل $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$ کدام است؟

۱. $۲\overrightarrow{BC}$ ۲. $\vec{O}$ ۳. $۲\overrightarrow{DA}$ ۴. $۲\overrightarrow{AB}$ — ۳

۹. حاصل $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}$ کدام است؟

۱. $\vec{O}$ ۲. $۲\overrightarrow{BA}$ ۳. $\overrightarrow{BA}$ ۴. $۲\overrightarrow{AB}$ — ۴

۱۰. دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به طول های مساوی با محور OX به ترتیب ۴۳° و ۷۵° می سازند. زاویه بردار $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ با محور OX چند درجه است؟

۱. ۶۰° ۲. ۵۹° ۳. ۵۸° ۴. ۵۷° ۲

۱۱. بر روی بردارهای $-۶\vec{i}$ و $-۲\vec{j}$ و $۲\sqrt{۲}\vec{k}$ یک مکعب مستطیل ساخته شده است. فاصله مرکز مکعب مستطیل تا مبدا مختصات چه قدر است؟

۱. ۳ ۲. $۲\sqrt{۳}$ ۳. ۴ ۴. $۴\sqrt{۳}$ ۲

۱۲. اگر نقاط $A(۱,۲,۳)$، $B(۲,۳,-۱)$ و $C(-۱,۰,۱)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مجموع طول و ارتفاع نقطه D کدام است؟

۱. ۴- ۲. ۳- ۳. ۳ ۴. ۴ ۳

۱۳. اگر $v_۱=۲i+۳j+k$ و $v_۲=i-j+k$، حاصل $\dfrac{|v_۱-۲v_۲|}{|v_۱+۲v_۲|}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\sqrt{۶}$ ۳. $\dfrac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴. $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۱

۱۴. نقاط $A(۵,-۴,۱)$، $B(-۱,۲,۴)$ و $O(۰,۰,۰)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM}=\dfrac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}$ می باشد. مقدار $|\overrightarrow{OM}|$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۱۰}$ ۲. $\sqrt{۱۱}$ ۳. $\sqrt{۱۳}$ ۴. $\sqrt{۱۴}$ ۱

۱۵. اگر دو بردار $\vec{a}=۲i-j+۳k$ و $\vec{b}=i+۲j+۴k$ دو ضلع مجاور یک مثلث با راس مشترک باشند، طول ضلع سوم مثلث برابر است با:

۱. $\sqrt{۱۰}$ ۲. $\sqrt{۱۱}$ ۳. $\sqrt{۱۲}$ ۴. $\sqrt{۱۳}$ ۲

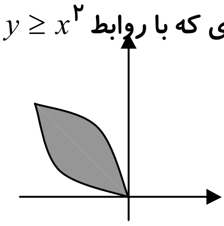
۱۶. اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\dfrac{\pi}{۴}$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{b}$ و $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ کدام است؟

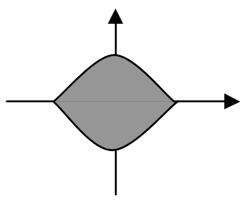
۱. $\dfrac{\pi}{۴}$ ۲. $\dfrac{\pi}{۳}$ ۳. $\dfrac{\pi}{۸}$ ۴. $\dfrac{۳\pi}{۸}$ ۳

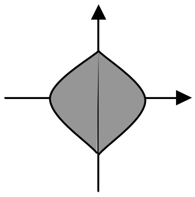
۱۷. مساحت ناحیه‌ای که با روابط $|x-۱|\le ۱$ و $|y+۳|\le ۲$ مشخص می شود، کدام است؟

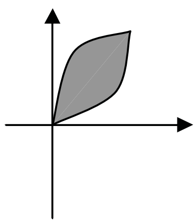
۱. ۱۰ ۲. ۶ ۳. ۹ ۴. ۸ ۴

۱۸. نمودراری که با روابط $y\ge x^۲$ ، $x\ge y^۲$ مشخص می شود، کدام است؟ ۴

۱.


۲.


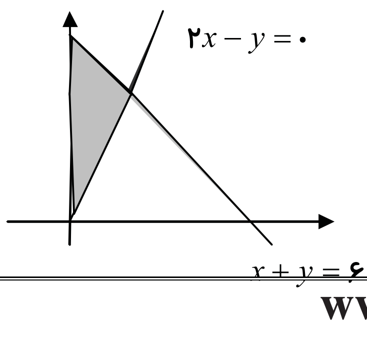
۳.


۴.


۱۹. نمودار کدام یک از روابط زیر به صورت مقابل است؟ ۱

۱. $\begin{cases} ۲x-y\le ۰ \\ x+y\le ۶ \\ x\ge ۰ \end{cases}$

۲. $\begin{cases} ۲x-y\le ۰ \\ x+y\le ۶ \\ y\ge ۰ \end{cases}$



۳. $\begin{cases} 2x-y\le 0 \\ x+y\ge 6 \\ y\ge 0 \end{cases}$ ۴. $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x+y\ge 6 \\ x\ge 0 \end{cases}$

۲۰. به ازای کدام مقدار n، نقطه $A(2n,1-n)$ بالای نیمساز ربع دوم و چهارم و پایین محور x ها قرار دارد؟ ۴

۱. $n>-1$ ۲. $0<n<1$ ۳. $-1<n<1$ ۴. $n>1$

۲۱. نموداری که با روابط $\begin{cases} |x-y|=1 & xy<0 \\ |y+x|=1 & xy>0 \end{cases}$ مشخص می شود، کدام است؟ ۲

۱. دو خط مستقیم ۲. یک مربع ۳. یک مستطیل ۴. دو پاره خط

۲۲. اگر فاصله نقطه A از صفحات مختصات ۴، ۵ و $2\sqrt{10}$ باشد، فاصله A از مبدا مختصات کدام است؟ ۳

۱. ۱۰ ۲. ۸ ۳. ۹ ۴. $4\sqrt{5}$

۲۳. اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، با شرط $A=(1,-2,5)$ و $B=(1,2,m)$، کم ترین طول پاره خط OM کدام است؟ ۱

۱. ۱ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۲

۲۴. نقطه $A=(16,5,12)$ مفروض است. تفاضل فواصل آن از محور x ها و y ها کدام است؟ ۲

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۸ ۴. ۹

۲۵. مجموع فواصل نقطه $A=(2,-2,-1)$ از صفحات مختصات چند برابر فاصله آن تا مبدا مختصات است؟ ۱

۱. $\frac{5}{3}$ ۲. $\frac{5}{2}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. $\frac{2}{3}$

۲۶. نقطه A به مختصات $(-1,2,3)$ مفروض است. چند نقطه روی صفحه XOZ موجود است که فاصله‌اش از نقطه A برابر ۳ باشد؟ ۴

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. صفر ۴. بی شمار

۲۷. قرینه نقطه $A=(2-a,a,-a)$ نسبت به نقطه $B=(1,-1,2)$ روی صفحه XOZ قرار دارد. طول پاره خط AB کدام است؟ ۳

۱. $\sqrt{5}$ ۲. $2\sqrt{2}$ ۳. $\sqrt{10}$ ۴. ۳

۲۸. قرینه نقطه $A=(b+1,2a,1)$ نسبت به صفحه XOZ روی خط $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$ قرار دارد. زوج مرتب (a,b) کدام است؟ ۱

۱. $(2,2)$ ۲. $(-2,-2)$ ۳. $(2,-2)$ ۴. $(-2,2)$

۲۹. قرینه نقطه $A=(-3,4,5)$ نسبت به خط $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ کدام است؟ ۲

۱. $(3,-8,5)$ ۲. $(-3,-8,5)$ ۳. $(-3,8,5)$ ۴. $(3,8,5)$

۳۰. در چهار ضلعی $ABCD$ اگر M وسط CD باشد، حاصل $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$ کدام است؟ ۱

۱. $2\overrightarrow{AM}$ ۲. $\overrightarrow{AM}$ ۳. $2\overrightarrow{MA}$ ۴. $\overrightarrow{MA}$

۳۱. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیر موازیند. اگر دوبردار $\vec{u}=(x-2)\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{v}=(2x+1)\vec{a}-\vec{b}$ موازی باشند، مقدار x کدام است؟ ۲

۱. ۱- ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. ۱ ۴. $-\frac{1}{3}$

۳۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابربا 60° و $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$. زاویه بین دو بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}$ چند درجه است؟ ۱

۱. ۳۰ ۲. ۶۰ ۳. ۴۵ ۴. ۱۲۰

۳۳. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند به طوری که $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ عمود باشد، آن گاه کدام گزاره درست است؟

۱. $\vec{a}\perp\vec{b}$ ۲. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ۳. $\vec{a}\perp\vec{b}$ و $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ۴. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ — ۲

۳۴. زاویه بین دو بردار $\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱. 45° ۲. 90° ۳. 180° ۴. 0° — ۲

۳۵. زاویه بین دو بردار $\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v}=|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ کدام است؟

۱. 0° ۲. 45° ۳. 90° ۴. 180° — ۱

۳۶. اگر $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ باشد، کدام بردار نیم ساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است؟

۱. $\vec{j}+\vec{k}$ ۲. $\vec{j}-\vec{k}$ ۳. $-\vec{j}+\vec{k}$ ۴. $-\vec{j}-\vec{k}$ — ۲

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، ضرب داخلی آن‌ها با نماد $a.b$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می‌شود (محاسبه می‌شود)

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

مثال: ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = i - j$ و $\vec{b} = 2i + 3k$ را حساب کنید.

مثال: اگر $\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}| = 0$ باشد، زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چقدر است؟

۱. صفر　　۲. $\frac{\pi}{4}$　　۳. $\frac{\pi}{2}$　　۴. π

مثال: ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار:

۱. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

۲. خاصیت پخشی نسبت به جمع و تفریق بردارها:

$(\vec{b} \pm \vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.\vec{a} \pm \vec{a}.\vec{c}$　　$\vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$

در واقع فاکتورگیری نیز برقرار است.

۳. اگر $r \in R$ آن‌گاه $r(\vec{a}.\vec{b}) = (r\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(r\vec{b})$

۴. $\boxed{\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2}$

۵. طرفین یک رابطه را می‌توان در یک بردار، ضرب داخلی کرد ولی عکس آن درست نیست.

$$\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$$
$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

مثال: اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 3$ و $\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b}) = 7$، آن‌گاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$　　۲. $\frac{\pi}{3}$　　۳. $\frac{\pi}{2}$　　۴. $\frac{2\pi}{3}$

کاربرد ضرب داخلی:

۱. شرط عمود بودن دو بردار: شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار این است که ضرب داخلی آن‌ها صفر شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، 120° می‌باشد و بردار $2\vec{a}+\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است. در این صورت $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{1}{4}$

۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطه $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ بدست می‌آید.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، 120° می‌باشد و $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$، زاویه بین بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و بردار کوچکتر چند درجه است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۵ ۳. ۹۰ ۴. ۱۲۰

مثال: اگر $A(1,2,5)$ و $B(3,1,7)$ و $C(4,-1,5)$ سه راس مثلث باشد، زاویه A کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{6}$ ۳. $\frac{\pi}{3}$ ۴. $\frac{\pi}{2}$

۳. استفاده از اتحادها در بردارها

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

نتیجه: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right)$

مثال: در هر حالت مقدار خواسته شده را بدست آورید.

۱. $\vec{a}+\vec{b}=i+۲j+k \quad ,|\vec{a}|=|\vec{b}|=۱ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=?$

۲. $|\vec{a}|=۱,|\vec{b}|=۲,|\vec{c}|=۱ \,,\, \vec{a}+\vec{b}+۳\vec{c}=\vec{۰} \,, \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=?$

مثال: اگر $|\vec{a}|=۲$، $|\vec{b}|=۳$ و $\theta=۶۰^\circ$ باشند. طول بردارهای $۴\vec{a}-۳\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

مثال: اگر $|\vec{a}|=۳$، $|\vec{b}|=۸$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=۷$ آن‌گاه طول بردار $\vec{a}-\vec{b}$ چقدر است؟

۱. ۶　　۲. ۸　　۳. $\sqrt{۹۳}$　　۴. $\sqrt{۹۷}$

۴. نامساوی کشی شوارتز:

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند آن گاه $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}|$

مثال: نامساوی بالا را ثابت کنید.

مثال: اگر $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $۶x-۳y+۲z$ کدام است؟

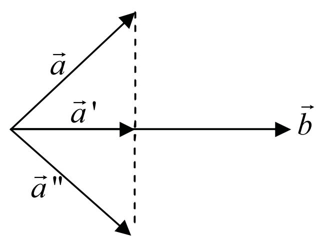
۱. ۷　　۲. ۲۱　　۳. ۹　　۴. ۳

مثال: اگر $3x+4y+2z=6$، کمترین مقدار $9x^2+4y^2+z^2$ کدام است؟

۱. ۲   ۲. ۴   ۳. ۶   ۴. ۳۶

۵. کاربرد مهم: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد (راستای ؟) بردار $\vec{b}$:

تصویر $\vec{a}$ را با نماد $\vec{a}\,'$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.



$$\vec{a}\,'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

و قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\,''$ نشان داده و $\vec{a}\,''=2\vec{a}\,'-\vec{a}$

نکته: $|\vec{a}\,''|=|\vec{a}|$ و $|\vec{a}\,'|=|\vec{a}|\cos\theta$ و $|\vec{a}\,'|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

مثال: تصویر بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,0)$ بیابید.

چند تست ضرب داخلی:

۱. با فرض $a=(3,m,5)$ و $b=(3-m,7,0)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود برهم هستند. زاویه بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

۱. ۳۰   ۲. ۴۵   ۳. ۶۰   ۴. ۹۰   ۳

۲. دو بردار a و b با معلومات $|a|=5$ و $|b|=7$ و $a-b=2i+j-3k$ مفروض اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟

۱. ۰/۷   ۲. ۰/۸   ۳. ۱/۲   ۴. ۱/۴   ۳

۳. سه بردار $v_1=(1,-1,a)$ و $v_2=(2,b,1)$ و $v_3=(c,3,2)$ دو به دو برهم عمودند. $a+b+c$ کدام است؟

۱. ۵   ۲. ۶   ۳. ۷   ۴. ۸   ۱

۴. نقطه‌ی O مبدا مختصات و $\overrightarrow{OA}=3i+j$ و $\overrightarrow{OB}=-i+5j+4k$ مفروض هستند. اگر $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ باشد. کسینوس زاویه‌ی بردار $\overrightarrow{OM}$ با محور y ها کدام است؟

۱. $-\frac{2}{5}$ ۲. $-\frac{2}{7}$ ۳. $\frac{2}{5}$ ۴. $\frac{3}{7}$ ۲

۵. سه نقطه $A(2,1,0)$ و $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$ سه راس مثلثی هستند. $CosA$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۱

۶. بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی الاضلاع ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع، کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{2}{3}$ ۳

۷. اگر بردار $a=(1,-1,m)$ با محور z ها زاویه ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳

۸. دو بردار $a=3i-6j+3k$ و $b=-7i+4j+k$ نسبت به بردار c قرینه یکدیگرند. اگر زاویه بین دو بردار a و c در بازه $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ باشد، آن گاه بردار جهت c کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}(-2i+2j+k)$ ۲. $\frac{1}{3}(-2i-j+2k)$ ۳. $\frac{1}{3}(2i-2j+k)$ ۴. $\frac{1}{3}(2i+j-2k)$ ۴

۹. قرینه بردار $a=(-2,0,1)$ نسبت به امتداد بردار $b=(1,2,-1)$ کدام بردار است؟

۱. $(1,-2,0)$ ۲. $(-1,2,0)$ ۳. $(0,2,-1)$ ۴. $(0,-2,1)$ ۱

۱۰. سه بردار a و b و c با اندازه ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه $a+b+c=0$ صدق می کنند، مقدار $a.b+b.c+c.a$ کدام است؟

۱. ۳۷- ۲. ۱۹- ۳. ۱۹ ۴. ۳۷ ۱

۱۱. تصویر قائم بردار $(0,-3,6)$ روی امتداد بردار $(2,-1,-2)$ کدام بردار است؟

۱. $(2,-1,-2)$ ۲. $(-2,1,2)$ ۳. $(4,-2,-4)$ ۴. $(2,3,-1)$ ۲

۱۲. بردارهای $a(3,2,4)$ وبردار $b=(2,1,m)$ برهم عمودند و بردارهای b و $c(n,-2-2,p)$ با هم موازی هستند. حاصل $n+p+m$ کدام است؟

۱. ۲- ۲. ۱- ۳. صفر ۴. ۱ ۱

۱۳. m چقدر باشد تا نقاط $A(2,1,4)$، $B(m-1,5,2m+1)$ و $C(3,3,1)$ رئوس یک مثلث قائم الزاویه در راس A باشند؟

۱. $\frac{14}{5}$ ۲. $\frac{5}{14}$ ۳. $\frac{-14}{5}$ ۴. $-\frac{5}{14}$ ۱

۱۴. اگر $|a|=2$ و $|b|=3$ و $a.b=4$ باشد، حاصل $(3a+b).(a+2b)$ چه قدر است؟

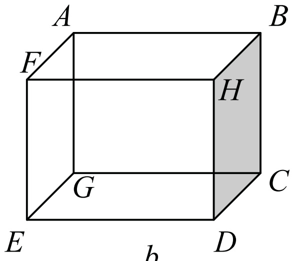
۱. ۲۸ ۲. ۳۰ ۳. ۵۰ ۴. ۵۸ ۴

۱۵. در مربع $ABCD$ به قطر ۲، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ برابر است با:

۱. ۸ ۲. ۶ ۳. $4\sqrt{2}$ ۴. $8\sqrt{2}$ ۱

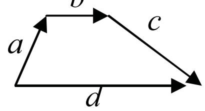
۱۶. حاصل $i.(2j+k)+3i.(j-k)+2i.(i+2k)$ کدام است؟

۱. -۲　۲. -۱　۳. ۱　۴. ۲　　۴



۱۷. در مکعب مقابل به ضلع واحد، حاصل $(\overrightarrow{AD}-۳\overrightarrow{FC}).(۲\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{EC})$ کدام است؟

۱. ۶　۲. ۴　۳. -۴　۴. -۶　　۴



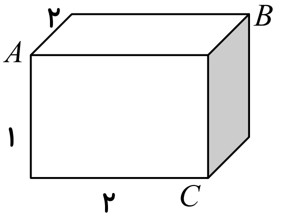
۱۸. در شکل مقابل اگر $|a|=۱$، $|b|=۱$، $|c|=۳$ و $|d|=۵$ باشد حاصل $a.b+a.c+b.c$ کدام است؟

۱. ۵　۲. ۴/۵　　۳

۳. ۷　۴. ۵/۵

۱۹. اگر اندازه دو بردار $v_۱=۲i+(a+۱)j+۴k$ و $v_۲=ai+۴j+۳k$ برابر باشند، کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟

۱. $\frac{۱۶}{۲۹}$　۲. $\frac{۲۴}{۲۹}$　۳. $\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$　۴. $\frac{۲۸}{۲۹}$　　۴



۲۰. در مکعب مستطیل مقابل با ابعاد ۱ و ۲ و ۲، کسینوس زاویه C در مثلث ABC کدام است؟

۱. صفر　۲. $\frac{۱}{۵}$　　۲

۳. $\frac{۱}{۳}$　۴. $\frac{۲}{۳}$

۲۱. اگر $a=۳i-۴k$ و اندازه تصویر بردار b در امتداد بردار a برابر ۲ باشد، $a.b$ کدام است؟

۱. -۱۰　۲. -۲　۳. ۲　۴. ۱۰　　۴

۲۲. اگر $a.j=-۲a.k=a.(-۲i+۳j+۲k)=۲$، اندازه تصویر بردار $u(-۳,-۳,۳)$ روی بردار a کدام است؟

۱. $۲\sqrt{۶}$　۲. $\sqrt{۶}$　۳. $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$　۴. $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲۳. اگر $۶x+\sqrt{۲}y+۲z=۴\sqrt{۲}$ باشد، مینیمم مقدار $۹x^۲+y^۲+۲z^۲$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۲}$　۲. ۴　۳. ۲　۴. $۲\sqrt{۲}$　　۲

۲۴. اگر $۴x^۲+۹y^۲+z^۲=۹$، ماکزیمم عبارت $۴x+۶y+z$ کدام است؟

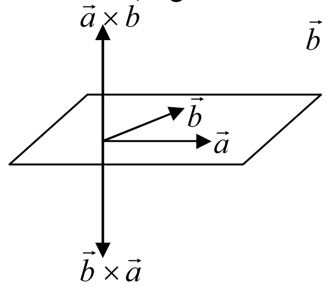
۱. $۳\sqrt{۳}$　۲. ۹　۳. $۹\sqrt{۲}$　۴. $۹\sqrt{۳}$　　۲

۲۵. اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۱,۱)$ دو نقطه باشند، مکان هندسی نقاطی مانند M که در رابطه $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=۰$ صدق کنند، کدام است؟

۱. $x^۲+y^۲=۳y+۱$　۲. $x^۲+y^۲=۱-۳y$　۳. $x^۲+y^۲=۳y-۱$　۴. $x^۲+y^۲=-۳y-۱$　　۳

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری- ضرب بیرونی):

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد. حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود. $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است عمود بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (قانون دست راست)



فرض کنیم $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار درفضای R^3 باشند ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نکته: اندازه $\vec{a}\times\vec{b}$: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$

مثال: اگر $\vec{v}_1(-1,1,2)$ و $\vec{v}_2(1,-2,3)$ باشد، زاویه $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ با کدام محور بزرگ‌تر است؟

۱. محور x ها　　۲. محور y ها　　۳. محور z ها　　۴. با هر سه یکسان است

مثال: اگر $\left|\vec{a}\right|=2$ و $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ و $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=3$ آن‌گاه زاویه بین این دو بردار کدام است؟

۱. ۳۰　　۲. ۴۵　　۳. ۶۰　　۴. ۹۰

مثال: بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}\,(0,2,-1)$ و $\vec{b}\,(2,3,1)$ کدام است؟

۱. $5i-2j+4k$　　۲. $5i+2j-4k$　　۳. $-5i+2j+4k$　　۴. $5i+2j+4k$

نکته: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ (یا $\vec{b}\times\vec{a}$) بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و همه ترکیبات خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $m\vec{a}+n\vec{b}$ عمود است.

مثال: دو بردار با مولفه‌های $\vec{a}(1,2,-1)$ و $\vec{b}(2,4,m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m اندازه بردار $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است.

۱. $m=-2$ ۲. $m=\pm 2$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر مقدار m

مثال: بردار $\vec{v}$ به طول ۲۶، عمود بر دو بردار $\vec{a}(4,-2,-3)$ و $b(0,1,3)$ می‌باشد. مختصات بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱. $(6,24,-8)$ ۲. $(-6,24,-8)$ ۳. $(3,12,-4)$ ۴. $(-3,12,-4)$

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱. ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۲. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

۳. خاصیت شرکتپذیری ندارد. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

۴. $(r\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(r\vec{b})=r(\vec{a}\times\vec{b}) \quad , \quad r\in R$

۵. خاصیت توزیع پذیری $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$ $\qquad (\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$

۶. خاصیت حذف برقرار نیست. $\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی عکس آن برقرار نیست.

۷. ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است. یعنی $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

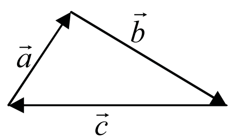
۸. دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر وفقط اگر ضرب خارجی آن‌ها صفر برداری شود. $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

۹. اتحادها برقرار نیستند.

مثال: اگر $|\vec{a}|=4$، $|\vec{b}|=5$ و $|(a+b)\times(a-b)|=20$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{6}$

نکته: (حرکت دوری) اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ آن‌گاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$



مثال: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند به طوری که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ و $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{u}$ باشد، آن‌گاه $a\times c$ برابر کدام است؟

۱. $\vec{u}$ ۲. $-\vec{u}$ ۳. $-\frac{1}{2}\vec{u}$ ۴. $\frac{1}{2}\vec{u}$

کاربرد ضرب خارجی در مساحت متوازی الاضلاع و مثلث:

مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن باشد، از رابطه $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ بدست می‌آید و مساحت مثلثی(شکلی) که با این دو بردار پدید می‌آید به صورت $S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ محاسبه می‌شود.

نکته: مساحت متوازی الاضلاعی که دو قطر آن d و d' باشد به صورت $S=\frac{1}{2}\left|d\times d'\right|$ محاسبه می‌شود.

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{d}$ به ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی الاضلاع باشند مساحت متوازی از رابطه $S=\left|\vec{a}\times\vec{d}\right|$ نیز محاسبه می‌شود.

مثال: درستی نکات بالا را بررسی کنید.

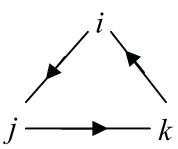
مثال: مساحت متوازی الاضلاعی که سه راس آن نقاط $(1,2,1)$ و $(0,1,1)$ و $(1,-1,2)$ باشد، چقدر است؟

۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{15}$

مثال: در یک متوازی الاضلاع، قاعده و ارتفاع به ترتیب ۵ و ۳ می‌باشد. حاصل عبارت $\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right|+\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|+\left|\vec{AC}\times\vec{BD}\right|$ کدام است؟

۱. ۵۰ ۲. ۲۵ ۳. ۶۰ ۴. ۷۵

ضرب داخلی و خارجی بردار های یکه محورها:



ضرب داخلی: $i.i=j.j=k.k=1$ و $i.j=j.k=k.i=0$

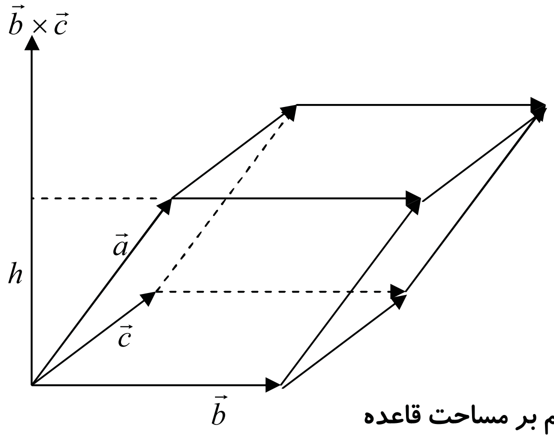
ضرب خارجی: مانند حرکت دوری: $i\times j=k$ و $j\times k=i$ و $k\times i=j$ **و خلاف جهت مثلاً** $i\times k=-j$

مثال: حاصل $2i.(j\times k)+3j.(i\times k)+4k.(i\times j)$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. صفر

مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۵ و ۸ مفروضند. مساحت تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل این دو بردار کدام است؟

۱. ۵ ‌ ‌ ۲. ۶ ‌ ‌ ۳. ۶/۵ ‌ ‌ ۴. ۷/۵



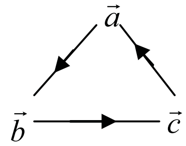
حجم متوازی السطوح:

می دانیم مساحت قاعده متوازی السطوح برابر است با $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ و طول ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه ، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}\times\vec{c}$

یعنی $h=\dfrac{\left|\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}$ و از طرفی ارتفاع برابر است با حجم متوازی السطوح تقسیم بر مساحت قاعده

لذا حجم متوازی السطوح از رابطه $V=\left|\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$ بدست می‌آید.

به ضرب $\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$، ضرب مختلط نیز می‌گویند.



نکته: ضرب مختلط دارای حرکت دوری می باشد. یعنی

$$\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\,.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\,.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

مثال: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱. $\vec{a}\,.\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$ ‌ ‌ ۲. $\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ ‌ ‌ ۳. $\vec{b}\,.\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$ ‌ ‌ ۴. $\left(\vec{a}\times\vec{c}\right).\vec{b}$

چند کاربرد ضرب مختلط:

۱. اگر $\vec{a}=\left(a_۱,a_۲,a_۳\right)$، $\vec{b}=\left(b_۱,b_۲,b_۳\right)$ و $\vec{c}=\left(c_۱,c_۲,c_۳\right)$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، حجم متوازی السطوح تولید شده توسط این سه بردار از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$V=\left|\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=\left|\begin{vmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{vmatrix}\right|$$

نکته: حجم منشور مثلث القاعده با سه بردار بالا نصف حجم متوازی السطوح می‌باشد.

نکته: حجم چهاروجهی(هرم) $\frac{۱}{۳}$ حجم منشور و در نتیجه $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی السطوح می‌باشد.

مثال: حجم متوازی السطوح که یال‌های آن بردارهای $\vec{a} = i + ۲j + ۳k$ و $\vec{b} = j + ۲k$ و $\vec{c} = i + ۳k$ باشد، چقدر است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۸ ۴. ۱۲

مثال: بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به طوری که $|\vec{a}| = |\vec{b}| = ۲$ و $|\vec{c}| = ۳$ و $\vec{b} . \vec{c} = ۰$ و زاویه بردار $\vec{a}$ با صفحه شامل $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر ۶۰° می‌باشد. حجم متوازی السطوحی که بر این سه بردار بنا می‌شود، چقدر است؟

۱. صفر ۲. ۶ ۳. $۶\sqrt{۳}$ ۴. $۴\sqrt{۳}$

۲. (کاربرد مهم دوم) هم صفحه بودن سه بردار

$\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰ \Leftrightarrow$ سه بردار در یک صفحه واقع باشند.

در واقع متوازی السطوحی تشکیل نشود.

مثال: سه بردار $(۱, -۱, ۱)$ و $(۰, ۲, ۱)$ و $(m, ۰, ۲)$ هم صفحه‌اند. m کدام است؟

۱. $\frac{۳}{۴}$ ۲. $\frac{۴}{۳}$ ۳. $\frac{-۳}{۴}$ ۴. $\frac{-۴}{۳}$

مثال: به ازای کدام مقدار m، بردار $\vec{a} = (۱, ۲, m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(۲, -۱, ۰)$ و $(-۱, ۳, ۲)$ نوشت؟

۱. $\frac{۲}{۳}$ ۲. $-\frac{۲}{۳}$ ۳. $\frac{۳}{۲}$ ۴. $-\frac{۳}{۲}$

چند تمرین کتاب صفحه ۸۴:

۱. برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است، تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف. $\vec{a}(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=i$ **ب.** $\vec{a}(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}(۳,۲,۱)$

۲. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۳. اگر $\vec{a}(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ باشند، آن‌گاه تصویر قائم $\vec{b}+\vec{c}$ بر امتداد $\vec{a}$ را بدست آورید.

۴. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}(-۲,۱,-۵)$ را پیدا کنید.

۵. سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ بحث کنید.

۶. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}|=۳$، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۷. مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A(3,5,7)$، $B(5,5,0)$ و $(-4,0,4)$ داده شده است را بیابید.

۸. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را حساب کنید.

چند تست ضرب خارجی:

۱. اگر $a\times b=\vec{0}$ و بردارهای a و b غیر صفر باشند. آن گاه الزاماً کدام درست است؟

۱. $a=-b$ ۲. $a=b$ ۳. $a\perp b$ ۴. $a \parallel b$ ۴

۲. اگر i، j و k بردارهای واحد مختصات باشند، حاصل $k\times(i\times(i\times j))$ کدام است؟

۱. $\vec{0}$ ۲. $-i$ ۳. j ۴. $-k$ ۲

۳. اگر $a=i-2j$، $b=3j+2k$ و $c=4i+j-2k$ باشد، تصویر بردار $(a\times b)\times c$ روی محور x ها کدام است؟

۱. i ۲. $3i$ ۳. $2i$ ۴. $4i$ ۱

۴. دو بردار با تصاویر $a=(1,2,-1)$ و $b=(2,4,m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m، اندازه بردار $(a+b).(a\times b)$ برابر صفر است؟

۱. فقط $m=-2$ ۲. فقط $m=\pm 2$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر عدد حقیقی m ۴

۵. اگر بردار $a=(x,y,z)$ بر بردارهای $b=(1,-1,2)$ و $c=(2,0,1)$ عمود باشد و $|a|=2$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱. $\frac{10}{\sqrt{14}}$ ۲. $\frac{12}{\sqrt{14}}$ ۳. $\frac{6}{\sqrt{14}}$ ۴. $\frac{8}{\sqrt{14}}$ ۴

۶. اگر $a.i=2$ و $a.j=-4$ باشد، $a\times k$ کدام است؟

۱. $-4i+2j$ ۲. $4i-2j$ ۳. $-4i+2j$ ۴. $-4i-2j$ ۴

۷. تصویر بردار $a\times b$ بر روی $2a-b$ کدام است؟

۱. $\vec{0}$ ۲. $2a+b$ ۳. $b-2a$ ۴. $b\times a$ ۱

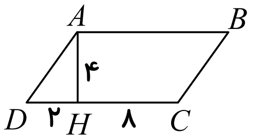
۸. اگر $|v_1\times v_2|=4$ باشد، اندازه بردار $(v_1+v_2)\times(3v_1-v_2)$ چه قدر است؟

۱. ۱۶   ۲. ۸   ۳. ۴   ۴. صفر   ۱

۹. حاصل $(2a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$ کدام است؟

۱. $a\times c$ ۲. $c\times a$ ۳. $\vec{0}$ ۴. $b\times c$ ۱

۱۰. در متوازی الاضلاع مقابل حاصل $|AB\times AC|+|AC\times BD|+|AB\times AD|$ کدام است؟



۱. ۸۰   ۲. ۱۲۰   ۳. ۱۶۰   ۴. ۲۰۰   ۳

۱۱. اگر بردار های a، b و c در رابطه $a+b+c=\vec{0}$ صدق کنند و $|a|=|b|=|c|=\sqrt{۲}$ باشد، $|a\times c|$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲. ۱   ۳. $\sqrt{۲}$ ۴. $\sqrt{۳}$ ۴

۱۲. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر باشند و $a+b+c=\vec{0}$ و $a\times b=۳k$ باشد، حاصل $۴c\times a-c\times b$ کدام است؟

۱. $۹k$ ۲. $۱۴k$ ۳. $۱۵k$ ۴. $۱۸k$ ۳

۱۳. اگر اندازه ضرب خارجی دو بردار a و $b\times c$ با ضرب داخلی آن‌ها برابر باشد، زاویه بین a و $b\times c$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{۶}$ ۲. $\frac{\pi}{۴}$ ۳. $\frac{\pi}{۲}$ ۴. $\frac{\pi}{۳}$ ۲

۱۴. زاویه بین دو بردار a و b کم‌تر از ۹۰ است، $|a|=۶$، $|b|=۵$ و $|a\times(a+b)|=۱۸$، حاصل $a.(a+b)$ کدام است؟

۱. ۵۴   ۲. ۵۶   ۳. ۶۰   ۴. ۶۴   ۳

۱۵. مساحت مثلث ABC با سه راس $A(۱,-۲,۳)$، $B(۲,۰,۱)$ و $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۳۵}$ ۲. $\sqrt{۴۲}$ ۳. $\sqrt{۵۴}$ ۴. $\sqrt{۶۵}$ ۴

۱۶. اگر $a(۱,-۲,۳)$ و $b(۲,۰,۱)$، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a+۳b$ و $۲a+۵b$ کدام است؟

۱. $۲\sqrt{۳}$ ۲. $\sqrt{۲}$ ۳. $۳\sqrt{۵}$ ۴. $۵\sqrt{۳}$ ۳

۱۷. اگر $a=۲i-j+k$ و $b=j-k$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی بردار $a\times b$ و $a+۲b$ ساخته می شود، کدام است؟

۱. $\sqrt{۵}$ ۲. $۲\sqrt{۲}$ ۳. ۳   ۴. $۲\sqrt{۳}$ ۴

۱۸. چهار بردار a، b، c و d در دو رابطه $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می کنند. الزاماً دو بردار غیرصفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱. مساوی   ۲. قرینه   ۳. عمود   ۴. موازی   ۴

۱۹. دو بردارثابت $a(-۱,۲,۳)$ و $b(-۱,۰,۳)$ و بردار متغیر c مفروض‌اند. اگر $a\times c=b\times c$ باشد، مکان بردار c کدام است؟ ۲

۱. موازی با محور x ها   ۲. موازی محور y ها   ۳. موازی محور z ها   ۴. همه بردارهای گذرنده از مبدا مختصات

۲۰. m چه قدر باشد تا چهار نقطه $A(m-۲,m,۱)$، $B(۰,۲,۱)$، $C(۲,-۳,۲)$ و $D(۱,۲,۴)$ در یک صفحه باشند؟

۱. ۱   ۲. ۲   ۳. ۳   ۴. ۶   ۲

۲۱. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱. $a.(c\times b)$ ۲. $a.(b\times c)$ ۳. $b.(a\times c)$ ۴. $(a\times c).b$ ۲

۲۲. اگر $a\times c=a\times b$ و $b\neq c$، آن گاه کدام نتیجه گیری نادرست است؟ ۱

۱. a عمود بر $b-c$ ۲. a موازی $b-c$ ۳. $a.(b\times c)=۰$ ۴. a، b و c موازی یک صفحه اند

۲۳. اگر $a=(۲,-۳,۱)$. $b=(۱,۲,-۴)$ باشند، حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار a، b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱. ۲۲۵   ۲. ۲۳۰   ۳. ۲۴۵   ۴. ۲۵۰   ۲

۲۴. بر روی سه بردار $a=۲i-j$، $b=j+۳k$ و $c=۴i-k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. ۲ ۴

۲۵. به ازای کدام مقدار m، بردار $a(-۳,۱۰,m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(۳,۱,۲)$ و $(۲,-۴,۱)$ است؟

۱. ۱۰- ۲. ۸- ۳. ۹ ۴. ۱۱ ۱

۲۶. بین سه بردار a، b و c رابطه $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=\vec{0}$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟

۱. موازی هم ۲. منطبق برهم ۳. واقع در یک صفحه ۴. دو به دو عمود بر هم ۳

۲۷. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر باشند، خلاصه شده $(۲a-b).((b+c)\times(c-a))$ کدام است؟

۱. $a.(b\times c)$ ۲. $۲a.(b\times c)$ ۳. $۳a.(b\times c)$ ۴. صفر ۳