درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس: هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل **تعدادی سطر و ستون** را ماتریس می‌گویند.

نمایش ماتریس: ماتریس‌ها را معمولاً با حروف A و B و C و ... نشان می‌دهند و با نماد [ ] بیان می‌کنند.

مرتبه ماتریس: اگر ماتریس A دارای m **سطر** و n **ستون** باشد، مرتبه‌ی ماتریس را $m\times n$ (اِم در اِن) می‌گویند و به صورت $A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$ یا A_{mn} نشان می‌دهند.

درایه‌ی ماتریس: به هر یک از **اعداد حقیقی** که **داخل ماتریس** قرار می‌گیرند را درایه‌ی ماتریس می‌گویند.

ماتریس A که در زیر تعریف شده است دارای $۶=۳\times۲$ درایه و ۳ ستون و ۲ سطر می‌باشد همچنین عدد **۲** روی **سطر اول و ستون دوم** می‌باشد و می‌نویسند: $a_{۱۲}=۲$

سطر اول

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$ مرتبه ماتریس

درایه

ستون دوم

نمایش عمومی ماتریس: اگر ماتریس A از مرتبه‌ی $m\times n$ باشد، درایه‌های عمومی ماتریس A را به صورت a_{ij} نشان داده به طوری که: $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ و به طور خلاصه می‌نویسند:

$$A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$$

تذکر: اگر $m=n=۱$ باشد، آنگاه: $A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{۱\times۱}=a_{ij}$

مثلاً: $[۲]_{۱\times۱}=۲$ و $\left[\sin\frac{\pi}{۳}\right]_{۱\times۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $[-۱۲]_{۱\times۱}=-۱۲$

مثال: اگر ماتریس $A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{۲\times۲}$ ماتریسی ۲×۲ بوده و برای $i=j$ داشته باشیم: $a_{ij}=۷$ و برای هر $i>j$ داشته باشیم: $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم: $a_{ij}=-۲$ در این صورت A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

مثال: اگر $A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{۳\times۴}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ i-j & i\le j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

مثال: اگر $B=\left[b_{ij}\right]_{۲\times۳}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ ماتریس B را مشخص کنید.

مثال: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به صورت زیر تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i=j \\ i^{۲}-j & i<j \\ i-j^{۲} & i>j \end{cases}$$

مثال: ماتریس $A=\left[i^{۲}-۲j\right]_{۲\times۲}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

معرفی چند ماتریس خاص:

۱) ماتریس مربعی: اگر **تعداد سطرها** با **تعداد ستون‌های** ماتریس برابر با n باشد، ماتریس را مربعی از مرتبه‌ی n $(n\times n)$ می‌گویند.

هر ماتریس مربعی دلخواه از مرتبه‌ی n را به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ نشان می‌دهند.

قطر اصلی: در ماتریس مربعی A از مرتبه‌ی $(n\times n)$ به درایه‌های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}$ درایه‌های روی قطر اصلی می‌گویند.

به عبارتی درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ به صورت a_{ii} می‌باشد، به طوری که $۱\le i\le n$.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی		قطر اصلی

$a_{۱۱}=$		$a_{۲۱}=$		$b_{۲۲}=$		$b_{۳۲}=$

۲) ماتریس سطری: اگر ماتریس A **فقط دارای یک سطر** (یک سطر با چند ستون) باشد، ماتریس A را ماتریس سطری می‌گویند.

$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\end{bmatrix}_{۱\times۲} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۵\end{bmatrix}_{۱\times۳} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۵$

۳) ماتریس ستونی: اگر ماتریس **A فقط دارای یک ستون** (چند سطر و یک ستون) باشد، ماتریس A را ماتریس ستونی می‌گویند.

$$A=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}_{۲\times۱} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۳\\ -۳\\ ۵\end{bmatrix}_{۳\times۱} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}۱۲\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۱۲$$

۴) ماتریس قطری: ماتریس مربعی است که **تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی** (خارج قطر اصلی) **برابر صفر** باشد را ماتریس قطری می‌گویند.

در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۷\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۵) ماتریس اسکالر: ماتریس قطری است که **همه درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.**

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

نکته: هر ماتریس اسکالر، حتماً ماتریس قطری است، اما **هر ماتریس قطری، ماتریس اسکالر نیست.**

۶) ماتریس واحد (همانی): ماتریس اسکالری است که **همه درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک هستند.** ماتریس همانی مرتبه‌ی n را با I_n نشان می‌دهند.

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \quad , \quad I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی است که **تمام درایه‌های آن برابر صفر** باشد، ماتریس صفر را معمولاً به صورت‌های $\overline{O}$ یا O نشان می‌دهند.

$$\overline{O}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \quad , \quad \overline{O}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس صفر هم ماتریس **اسکالر** است و هم ماتریس **قطری**.

دو ماتریس مساوی: دو ماتریس A و B مساویند، هر گاه:

الف) این دو ماتریس هم مرتبه باشند. (**تعداد سطرهای مساوی هم و تعداد ستونهای مساوی هم داشته باشند.**)

ب) درایه‌های نظیر به نظیرشان مساوی باشند.

تعریف ریاضی دو ماتریس مساوی: اگر $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}_{m\times n}$ و $B=\begin{bmatrix}b_{ij}\end{bmatrix}_{p\times q}$ باشند، آنگاه:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} m = p \\ n = q \\ \forall i, j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

تذکر: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times۳}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$ با هم مساوی نیستند.

مثال: مقادیر مجهول را طوری بیابید که دو ماتریس داده شده با هم برابر باشند.

الف) $A = \begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & x-۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ Z & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} x-۱ & ۵ \\ x-۳y & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & x+۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

جمع و تفاضل ماتریس‌ها: برای جمع و تفاضل دو ماتریس **هم مرتبه** کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر بـه نظیـر باهم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل ماتریسی مثل c (از **همان مرتبه A یا B**) است. یعنی:

$$\begin{matrix} A = [a_{ij}]_{m\times n} \\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \end{matrix} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

به عبارتی: A+B = C که $c = [c_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$.

مثال: ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

پ) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$

ت) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix}$

ث) $A=[۵]$, $B=[-۷]$

ج) $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۴ \\ ۵ & -۲ & ۶ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & ۴ \\ -۵ & ۲ & -۶ \\ -۱ & -۴ & -۳ \end{bmatrix}$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس (ضرب اسکالر):

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم. به عبارتی:

$$\begin{matrix} A=[a_{ij}]_{m\times n} \\ r\in \mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۰ \\ ۹ & ۱۲ & -۳ \\ ۱۸ & ۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $۲A$, $\frac{۱}{۳}A$, $۲A-\frac{۱}{۳}A$ را بیابید.

مثال: در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را بدست آورید.

الف) $-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=$

ب) $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=$

پ) $۷\times\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=$

ت) $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=$

نکته: اگر A ماتریس اسکالر باشد که درایه‌های روی قطر اصلی برابر K باشد، آنگاه $A = KI_n$.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow A=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۳I_۳$$

مثال: هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۹ \\ ۰ & -۳ & -۶ \\ -۹ & ۰ & -۱۲ \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۳}\times\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

مثال: با توجه به تساوی زیر ماتریس A را بیابید

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}+۲A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ & ۱ \\ ۹ & ۸ & -۲ \\ ۱۳ & ۱۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

قرینه ماتریس (ماتریس قرینه): اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس دلخواه باشد، آنگاه قرینه‌ی ماتریس داده شده را به صورت $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ تعریف می‌کنند. یعنی کافی است قرینه‌ی تمام درایه‌های ماتریس A را بیابیم. **(عدد (۱-) را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب کنیم.)**

نتیجه: برای هر ماتریس دلخواه A داریم:

الف) $-A=-۱\times A$		ب) $A+(-A)=-A+A=\overline{O}$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۵ & -۳ \end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$A+(-A)=-A+A=\overline{O}$$

نکته: اگر A و B و C ماتریس‌هایی هم مرتبه از مرتبه‌ی $m\times n$ و r و s اعداد حقیقی دلخواه $(r,s\in \mathrm{R})$ باشند، آنگاه:

خاصیت جابجایی		۱) $A+B=B+A$

خاصیت شرکت پذیری		۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت عضو خنثی برای ماتریس صفر		۳) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$

خاصیت عضو قرینه		۴) $A+(-A)=-A+A=\overline{O}$

خاصیت بخشی ضرب اسکالر		۵) $r(A+B)=rA+rB$

۶) $(r \pm s)A = rA \pm sA$

۷) $(rs)A = r(sA)$

۸) $۱A = A$

۹) $rA = rB \quad , \; r \neq ۰ \Rightarrow A = B$

۱۰) $A = B \Rightarrow rA = rB$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، نشان دهید:

$-۲(A+B) = (-۲)A + (-۲)B$

ضرب دو ماتریس: برای انجام ضرب ماتریس‌ها همیشه باید تعداد ستون ماتریس سمت چپ با تعداد سطر ماتریس سمت راست برابر باشد.

نکته: اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times q}$ باشند، آنگاه:

$A_{m\times n} \times B_{n\times q} = C_{m\times q} \qquad , \qquad c = [c_{ij}]_{m\times q}$

به عبارتی c_{ij} ها از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B حاصل می‌شود.

مثال: اگر A ماتریس ۵×۳ باشد در کدام حالت $A\times B$ یا $B\times A$ قابل تعریف است در صورت تعریف شدن مرتبه ضرب ماتریس را بیابید.

الف) $B = [b_{ij}]_{۳\times ۲}$

ب) $B = [b_{ij}]_{۳\times ۵}$

پ) $B = [b_{ij}]_{۵\times ۳}$

ت) $B = [b_{ij}]_{۵\times ۴}$

ث) $B = [b_{ij}]_{۵\times ۵}$

حالت‌های ضرب ماتریس‌ها:

الف) ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

برای ضرب کافی است **هر درایه ماتریس A را در درایه‌ی نظیرش از ماتریس B ضرب کنیم** و حاصلضرب‌های بدست آمده را با هم جمع کرده و به صورت یک عدد (ماتریس ۱×۱) بنویسیم.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$، حاصل AB را بیابید.

مثال: یک ماتریس سطری ۳×۱ مثل A و یک ماتریس ۱×۳ مثل B طوری تعریف کنید که: $A\times B=-۷$.

ب) ضرب ماتریس در ماتریس: در این **حالت سطرهای ماتریس سمت چپ** را جدا کرده و هر سطر را در **ستونهای ماتریس سمت راست** جداگانه ضرب می‌کنیم و حاصل را در درایه‌های نظیر می‌نویسیم.

مثال: حاصلضرب ماتریس های زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\times \begin{cases} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \qquad = ۱۷ \\ \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \qquad = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\times \begin{cases} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \qquad = ۱۷ \\ \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \qquad = ۸ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

مثال: برای هر حالت $A\times B$ یا $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

$A\times B=$ و $B\times A=$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$

$A\times B=$ و $B\times A=$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، حاصل AB و BA را بیابید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل AB و BA را بیابید.

نکته: ماتریس همانی I در عمل ضرب عضو خنثی است. یعنی: $AI = IA = A$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$, I ماتریس همانی (واحد) باشد، حاصل IA و AI را بیابید.

IA= و AI =

مثال: اگر $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{۳\times۲}$ و $B=\lfloor b_{ij} \rfloor_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس و $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

نکته: قاعده‌ی حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نیست یعنی از تساوی AB=AC نمی‌توان به طور قطع گفت که B=C.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل AB و AC را بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

مثال: دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها: $A\neq\overline{O}$

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه جایی ندارد. یعنی همیشه حاصلضرب دو ماتریس AB و BA با هم برابر نیستند.

۲) اگر $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$, $B=\lfloor b_{ij} \rfloor_{n\times p}$, $C=\lfloor c_{ij} \rfloor_{p\times q}$ آنگاه ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

یعنی:

$$A(BC)=(AB)C$$

۳) اگر $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$, $B=\lfloor b_{ij} \rfloor_{n\times p}$, $C=\lfloor c_{ij} \rfloor_{n\times p}$ باشند، ضرب ماتریس‌ها خاصیت پخشی دارد. یعنی:

$A(B+C)=AB+AC$

۴) اگر I_n ماتریس همانی $n\times n$ باشد، آنگاه:

$$A_{n\times n}\times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

(خاصیت عضو خنثی برای ماتریس همانی)

توان در ماتریس: توان برای **ماتریس‌های مربعی** فقط تعریف می‌شود و توان ماتریس را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$A^{۲}=A\times A$$
$$A^{۳}=A^{۲}\times A$$
$$\vdots$$
$$A^{n}=A^{n-۱}\times A$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، آنگاه ماتریس $A^{۳}$ را بیابید.

۵ـ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^{۲}=AA$ و $A^{۳}=AA^{۲}$ و ... و $A^{n}=AA^{n-۱}$ $(n\in \mathbb{N}\ \ n>۱)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۲}$ و $A^{۳}$ و $A^{۷}$ را بیابید.

مثال: اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان های A را به صورت $A^{۲}=AA$ و $A^{۳}=AA^{۲}$ و ... و $A^{n}=AA^{n-۱}$ $(n\in \mathbb{N}\ \ n>۱)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۲}$ و $A^{۳}$ و $A^{۷}$ را بیابید.

تذکر: ماتریسی مثل $A \neq \overline{O}$ است که برای $n \in \mathrm{N}$ داشته باشیم. $A^n = \overline{O}$

ماتریس های تعویض پذیر: دو ماتریس A و B را تعویض پذیر گویند هرگاه: $A \times B = B \times A$

مثال: اگر A و B ماتریس های ۳×۳ و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

ب) $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

دترمینان: اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n باشد. $(۱ \leq n \leq ۳)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم.

چند نکته:

۱) $A = [k]_{۱\times۱} \Rightarrow |A| = k$

۲) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$

مثال: دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید.

الف) $A = [-۳] \Rightarrow |A| =$

ب) $B = [\sqrt{۳}] \Rightarrow |B| =$

پ) $C = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۶ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |C| =$

ت) $D = \begin{bmatrix} ۷ & -۸ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |D| =$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|$ را بیابید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5&6\\1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4&3\\-2&2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&7\\3&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&-4\\1&6\end{vmatrix}\end{bmatrix}$ ، حاصل $|A|$ را بیابید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}4|A| & 3\\ 1 & |A|\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل دترمینان A را بیابید.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}5|A|^2 & |A|\\ 5 & |A|\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل دترمینان $(|A|^3-2)$ را بیابید.

مثال: ماتریسی 2×2 مثل A بیابید که در معادله‌ی $3|A|^2-7|A|-6=0$ صدق کند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $|A|$ را بیابید.

دترمینان ماتریس ۳×۳: برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه دترمینان A را می‌توان بر حسب هر سطر یا ستون به دست آورد که **همواره حاصل دترمینان، عدد حقیقی و منحصر بفرد (یکتا) می‌باشد**.

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل دترمینان A برحسب سطر اول به صورت زیر است.

$$|A| = a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال: دترمینان ماتریس‌های زیر را بر حسب سطر یا ستون خواسته شده بیابید.

(برحسب سطر سوم)　　الف) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(برحسب ستون اول)　　ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

تذکر: برای بدست آوردن دترمینان **از سطر یا ستونی که تعداد صفرهای بیشتری دارند شروع می‌کنیم**.

(برحسب سطر اول)　　پ) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(برحسب سطر دوم)　　ت)

(برحسب ستون اول)		ث)

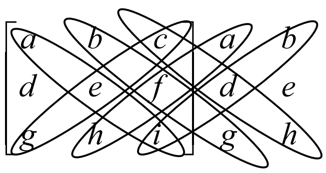
مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس BA و $|BA|$ را به دست آورید.

مثال: دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ را بیابید.

نکته: اگر ماتریسی دارای **دو سطر** یا **دو ستون** برابر باشد، **دترمینان آن ماتریس همواره برابر صفر است.**

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ :

در این روش (**که مخصوص ماتریس ۳×۳ است.**) دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است، با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل-ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر است.



$$|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال: با دستور ساروس دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

پ) $c=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

ت) $c=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه باشند، داریم:

۱) $|AB|=|A||B|$ ۲) $|AB|=|BA|$

۳) $|A^n|=|A|^n$ ۴) $|A^m B^n|=|A|^m |B|^n$

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

مثال: نشان دهید: $|A^۳|=|A|^۳$.

مثال: اگر A و B دو ماتریس دلخواه باشند، ثابت کنید: $|AB|=|BA|$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ را بیابید.

نکته: دترمینان ماتریس قطری برابر است: **حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی**.

مثال: اگر A ماتریس ۳×۳ و اسکالر باشد بطوریکه $a_{۲۲}=۴$، حاصل $|A|$ را بیابید.

نکته: **اگر همه درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس A** را در عدد حقیقی مثل k ضرب کنیم. دترمینان ماتریس حاصل k **برابر دترمینان ماتریس A** می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

نکته: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $k\in\mathbb{R}$ آنگاه: $|KA|=K^n|A|$

(**اگر عدد k در ماتریس A ضرب شود**، دترمینان ماتریس حاصل K^n برابر دترمینان ماتریس A می‌شود).

نکته: اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد، $|KA|=K^۳|A|$

مثال: اگر A ماتریسی از مرتبه‌ی ۳ و دارای دترمینانی برابر ۵ باشد، حاصل $|-۲A^۲|$ را بیابید.

وارون ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مثل A ، وارون A ماتریسی است چون B به طوری که $AB = BA = I$ (I ماتریس واحد است). در این صورت **B را وارون A** گویند و با A^{-1} نشان می‌دهند و می‌نویسند. $B = A^{-1}$

قرارداد: وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نشان می‌دهند و همواره داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

مثال: نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

مثال: آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

ماتریس وابسته (الحاقی): فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس دلخواه ۲×۲ باشد، ماتریس وابسته (الحاقی) A را با A^* نشان می‌دهند.

طریقه‌ی بدست آوردن ماتریس الحاقی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

۱- درایه‌های روی قطر اصلی را جابه جا می‌کنیم. $\leftarrow \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

۲- درایه‌های قطر فرعی را قرینه می‌کنیم. $\leftarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

۳) ماتریس بدست آمده ماتریس الحاقی است. $\leftarrow A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

مثال: ماتریس وابسته ماتریسهای زیر را بیابید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

ب) $B = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

وارون ماتریس A : اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} برابر است با: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ یعنی:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: اگر $|A| = 0$ آنگاه ماتریس A^{-1} وجود ندارد. (**ماتریس A وارون پذیر نیست.**)

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه A وارون‌پذیر باشد. (A^{-1} **وجود داشته باشد.**) آن است که $|A| \neq 0$

مثال: وارون ماتریس‌های زیر را بیابید.

۱) $A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$، وارون A را بیابید و حاصل را آزمایش کنید.

تذکر: توجه داشته باشید که $A^{-۱} \neq \frac{۱}{A}$ (در مثال قبل: $A^{-۱} \neq \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$).

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱} - ۳B^{-۱}$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{-۱}$ را یافته سپس حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید و با $|A|$ مقایسه کنید.

نکته: اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، آنگاه: $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

مثال: نشان دهید که: $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

مثال: اگر A ماتریس ۲×۲ و وارون‌پذیر باشد و $|A| = 3$ ، حاصل عبارت $\left|A^{3}\right| - 3\left|A^{-1}\right| + 5$ را بیابید.

مثال: نشان دهید وارون هر ماتریس منحصر به فرد است.

مثال: اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $A^{-1} = 2A^{2}$ باشد، حاصل $|A|$ را بیابید.

نکته: برای دو ماتریس وارون پذیر ۲×۲ داریم:

الف) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ب) $(KA)^{-1} = \frac{1}{K}A^{-1}; \quad (K \in \mathbb{R})$

پ) $(A^{-1})^{-1} = A$

ت) $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(AB)^{-1}$ را بیابید.

روش اول:

روش دوم:

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ حاصل $\left|(A^{-1})^2\right|$ را بیابید.

روش اول:

روش دوم:

حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون:

هدف از حل دستگاه در معادله و در مجهول پیدا کردن x و y است که در هر دو معادله دستگاه (هر کدام یک خط می‌باشند) صدق می‌کند. در واقع تعبیر هندسی آن این است که **محل تقاطع دو خط** را بیابیم. (مختصات محل برخورد دو خط)

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ **به ماتریس** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **ماتریس ضرایب و به** $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **ماتریس مجهولات و به** $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ **ماتریس مقادیر معلوم می‌گویند.**

در این صورت دستگاه داده شده به صورت $AX=B$ نوشته می‌شود.

حل دستگاه معادلات به صورت $AX=B$:

ابتدا ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را تشکیل داده و $|A|$ را حساب می‌کنیم.

اگر $|A|\neq 0$ **باشد دستگاه معادلات جواب منحصر بفردی دارد** که جواب مطلوب از رابطه‌ی $X=A^{-1}B$ بدست می‌آید.

مثال: دستگاه معادلات زیر را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۱) $\begin{cases} ۲x + y = ۴ \\ ۷x + ۴y = ۱۵ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$

مثال: دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد، سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = e_۱ \\ cx + dy = e_r \end{cases}$ وقتی جواب منحصربفرد دارد که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq ۰$ یا $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$

مثال: به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربفرد دارد؟

مثال: آیا دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \\ -۴x + ۶y = ۱ \end{cases}$ جواب دارد؟ چرا؟

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = e_۱ \\ cx + dy = e_۲ \end{cases}$ وقتی جواب ندارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ۰$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e_۱}{e_۲}$

مثال: روی وجود یا عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه‌های زیر بحث کنید.

در صورت وجود جواب، جواب را با A^{-1} بیابید.

۱) $\begin{cases} x-3y=2 \\ -3x+9y=-6 \end{cases}$

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی بی‌شمار جواب دارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e_1}{e_2}$

۲) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$