به نام خدا

# جزوهٔ دست نویس ـــ هندسه ۲

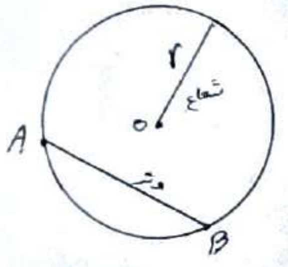
## سال تحصیلی ۱۴۰۰ _ ۱۳۹۹

## فصل ۱ (دایره)

پرکاربردترین شکل در طبیعت، معماری، صنعت و ... می‌باشد. به عنوان یک مسئله ریاضی می‌توان ثابت کرد، در بین تمام شکلهای هندسی با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است.

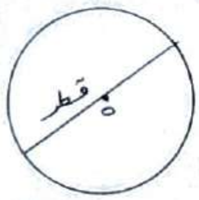

**تعریف دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت (مرکز O) به فاصله ثابت (شعاع r) باشند.

**توجه:** معمولاً دایره C به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.




**شعاع دایره:** پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

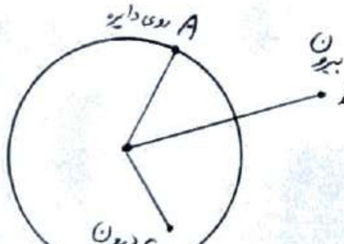
**وتر دایره:** پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد (مانند وتر AB در شکل مقابل)




**قطر دایره:** بزرگترین وتر دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

**وضعیت نقطه و دایره:**

هر نقطه نسبت به دایره سه وضعیت «داخل، روی و بیرون دایره» را دارد. تشخیص این موضوع به فاصله نقطه از مرکز دایره وابسته است.




$OA = r$

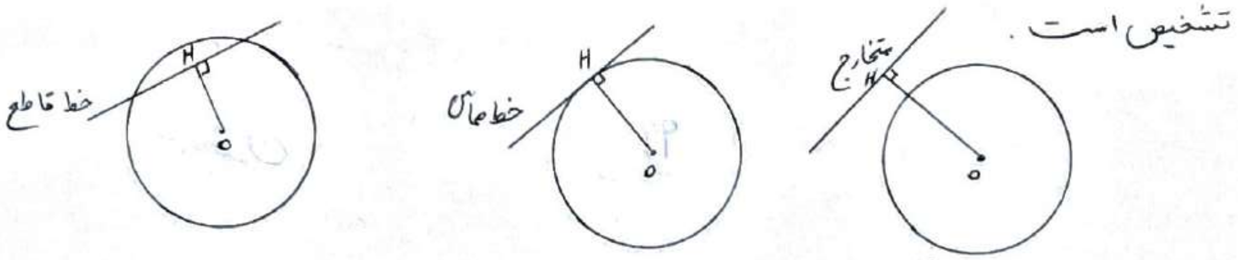
$OB > r$

$OC < r$

طول عمودی که از مرکز دایره بر خط رسم می‌شود

## وضعیت نسبی خط و دایره :

یک خط با یک دایره سه وضعیت متخارج ، مماس و متقاطع را دارد، که از روی فاصله مرکز دایره تا خط قابل تشخیص است.




$OH>r$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

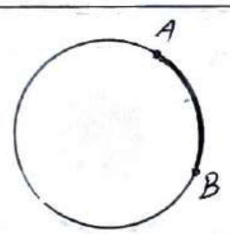
$OH=r$ خط و دایره یک نقطه اشتراک دارند

$OH<r$ خط و دایره دو نقطه اشتراک دارند

---

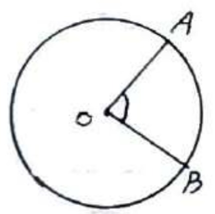
**نکته :** یک خط بر دایره مماس است اگر و تنها اگر خط در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود باشد.

---




**کمان :** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است.
(هر کمان قسمتی از محیط دایره است)
در شکل مقابل دو نقطه A و B روی محیط دایره و کمان $\overset{\frown}{AB}$ مشخص شده است

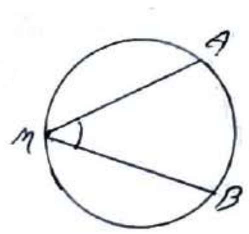
---




**زاویه مرکزی :** زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و ضلعهای آن شعاع دایره باشند

**نکته :** اندازه زاویه مرکزی برابر اندازه کمان مقابلش است: $\hat{O}_{\text{مرکزی}} = \overset{\frown}{AB}$

---



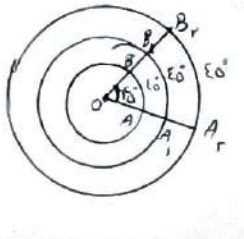

**زاویه محاطی :** زاویه‌ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلعهایش وترهای دایره باشند.

**نکته :** اندازه زاویه محاطی نصف کمان مقابلش است. $\hat{M}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

---

**اندازه کمان :** همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان می‌باشد و واحد آن درجه است.

در دایره‌های هم مرکز کمانهایی با طول متفاوت، دارای اندازه برابری باشند




**مثال:** در شکل مقابل سه کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{A_1B_1}$ و $\overset{\frown}{A_2B_2}$ طول متفاوت دارند ولی اندازه برابر دارند.

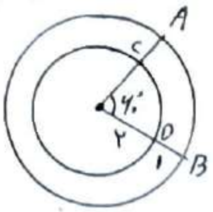
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2} = 45^\circ$$

**نکته:** رابطه بین طول کمان $\widehat{AB}$ و اندازه کمان $\widehat{AB}$ به صورت مقابل است

$$\boxed{\frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\underbrace{\text{محیط دایره}}_{2\pi r}} = \frac{\text{اندازه } \widehat{AB}}{360^\circ}}$$

توجه: دایره یک کمان است که طول آن $2\pi r$ و اندازه آن $360^\circ$ می باشد.

**مثال:** در شکل مقابل طول و اندازه کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ را بدست آورید.




پاسخ:

اندازه $\widehat{AB} = 60^\circ$

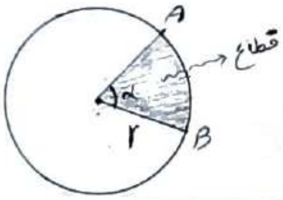
$$\frac{\text{اندازه } \widehat{AB}}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi r} \Rightarrow \frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi(3)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \text{طول } \widehat{AB} = \frac{1}{6}\times 6\pi = \boxed{\pi}$$

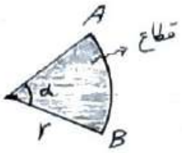
اندازه $\widehat{CD} = 60^\circ$

$$\frac{\text{اندازه } \widehat{CD}}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{CD}}{2\pi r} \longrightarrow \frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{CD}}{2\pi(2)} \longrightarrow \text{طول } \widehat{CD} = \frac{1}{6}\times 4\pi = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

---

**قطاع:** ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند.




---

**طول کمان نظیر قطاع:** اگر طول کمان $\widehat{AB}$ نظیر قطاع را L درنظر بگیریم از رابطه مقابل حاصل می‌شود:

$$\boxed{L = \frac{2\pi r}{360}\alpha}$$

اثبات:

$$\frac{\text{اندازه } \widehat{AB}}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi r} \Longrightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi r} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \boxed{\underbrace{L}_{\text{طول کمان نظیر قطاع}} = \frac{2\pi r}{360}\alpha} \quad \text{یا} \quad L = \frac{\pi r}{180}\alpha$$

---

**مساحت قطاع:** اگر مساحت قطاع که زاویه مرکزی آن $\alpha$ می باشد را S درنظر بگیریم:

$$\boxed{S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi r^2}{360}\alpha}$$

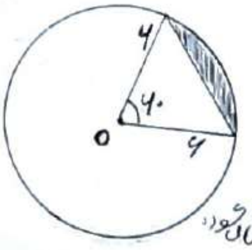
اثبات: می‌دانیم یک درجه، $\frac{1}{360}$ دایره است پس مساحت قطاعی که زاویه مرکزی آن 1 درجه است $\frac{1}{360}$ مساحت دایره است

درنتیجه مساحت قطاعی که " " $\alpha$ درجه است $\frac{\alpha}{360}$ مساحت دایره است

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\alpha}{360}\times \text{مساحت دایره} \rightsquigarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360}\times \pi r^2 \rightsquigarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi r^2}{360}\alpha$$

---

**تمرین:** طول کمان و مساحت قطاع درون دایره‌ای به شعاع 6 سانتی‌متر، روبه‌رو به زاویه 30 درجه را حساب کنید.




**مثال:** مطابق شکل، دایره به شعاع ۶ را در نظر بگیرید مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید.

پاسخ ← از تفاضل مساحت مثلث از مساحت قطاع نظیر آن مساحت ناحیه سایه زده حاصل می‌شود.

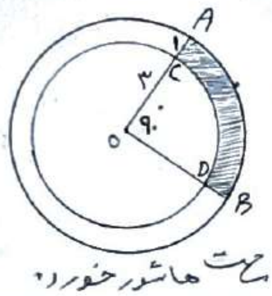
$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\pi r^2}{360}\alpha = \frac{\pi(6)^2}{\cancel{360}_{6}}\times \cancel{60}^{1} = 6\pi$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 60 = \frac{1}{2}\times 36\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت قطعه سایه زده} = \text{مساحت قطاع} - \text{مساحت مثلث} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

---

**تمرین:** طول کمان‌های $AB$ و $CD$ و مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید.



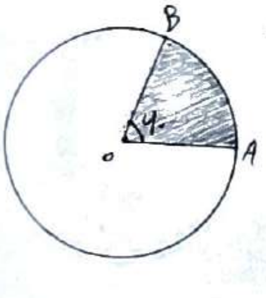

$$\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r}{360}\alpha = \frac{2\pi(4)}{\cancel{360}_{4}}\times\cancel{90}^{1} = 2\pi$$

$$\text{طول کمان } \overset{\frown}{CD} = \frac{2\pi r}{360}\alpha = \frac{2\pi(3)}{\cancel{360}_{4}}\times\cancel{90} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{مساحت هاشور خورده} = S_{A\hat{O}B} - S_{C\hat{O}D} = \frac{\pi\times 4^2}{\cancel{360}_{4}}\times 90 - \frac{\pi\times 3^2}{\cancel{360}_{4}}\times 90 = \frac{16\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = \boxed{\frac{7\pi}{4}}$$

---

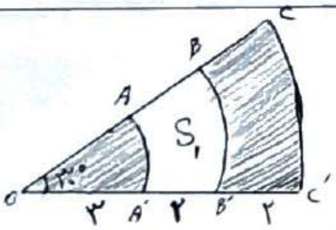
**تمرین:** در شکل مقابل اگر O مرکز دایره و مساحت ناحیه هاشور خورده برابر ۱۸ باشد، طول کمان $AB$ را بدست آورید؟ $(\pi = 3)$




$$S_{A\hat{O}B} = 18 \Rightarrow \frac{\pi r^2}{\cancel{360}_{6}}\times\cancel{60}^{1} = 18 \Rightarrow \frac{\cancel{3}r^2}{\cancel{6}_{2}} = 18 \Rightarrow r^2 = 36 \rightarrow \boxed{r = 6} \text{ شعاع}$$

$$\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r}{360}\alpha = \frac{2\pi(\cancel{6})}{\cancel{360}_{\cancel{6}_{1}}}\times\cancel{60} = \boxed{2\pi} = 2\times 3 = \boxed{6}$$

---



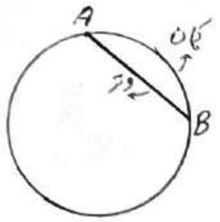

**مثال:** در شکل مقابل قطاع‌هایی با زاویه 30° از سه دایره هم مرکز نشان داده شده است. با توجه به اندازه‌های داده شده مجموع مساحت قسمت‌های هاشور خورده را بیابید.

پاسخ ← $\text{مساحت قطاع } S = \frac{\pi r^2}{360}\alpha$

$$S_1 = \underbrace{S_{B\hat{O}B'}}_{\text{مساحت قطاع}} - S_{A\hat{O}A'} = \frac{\pi(5)^2}{360}\times 30 - \frac{\pi(3)^2}{360}\times 30 \underset{\text{ساده شود}}{=} \frac{4\pi}{3}$$

$$S_{\text{هاشور خورده}} = S_{C\hat{O}C'} - S_1 = \frac{\pi(7)^2}{\cancel{360}_{12}}\times\cancel{30}^{1} - \frac{4\pi}{3} = \frac{49\pi}{12} - \frac{4\pi}{3} \underset{\text{مخرج مشترک و ساده کردن}}{=} \frac{33\pi}{12} = \frac{11\pi}{4}$$

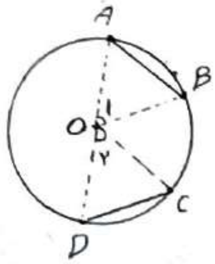
**وتر و کمان نظیر آن :**




در شکل مقابل کمان $\widehat{AB}$ نظیر وتر $\overline{AB}$ می‌باشد.

---

**مثال :** ثابت کنید در هر دایره کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند (و برعکس)




پاسخ :

فرض : $\underset{\text{وتر}}{\overline{AB}} = \underset{\text{وتر}}{\overline{CD}}$ ؛ حکم : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$\left.\begin{array}{ll} AB=CD & \text{طبق فرض} \\ OA=OD & \text{شعاع دایره} \\ OB=OC & \text{شعاع دایره} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} O\hat{A}B \cong O\hat{D}C \longrightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی هستند}} \widehat{AB}=\widehat{DC}$$

خوا برابر کمان‌های مقابلشان هستند

---

ب) عکس مطلب بالا :

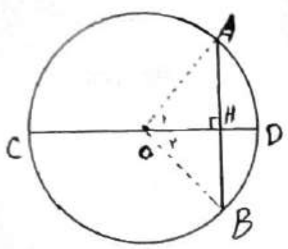
فرض : $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ ؛ حکم : $\underset{\text{وتر}}{AB} = \underset{\text{وتر}}{CD}$

پاسخ ← (به عهده دانش‌آموز)

$$\widehat{AB}=\widehat{CD} \xrightarrow{\text{مرکزی}} \hat{O}_1=\hat{O}_2,\quad \left.\begin{array}{l} OA=OD \\ OB=OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\overset{\triangle}{AB} \cong O\overset{\triangle}{CD} \Rightarrow AB=CD$$

---

**قضیه :** در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.




اثبات :

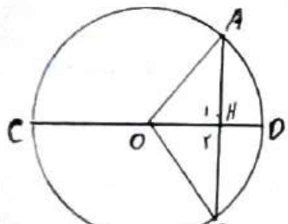
فرض : $\underset{\text{قطر}}{CD} \perp \underset{\text{وتر}}{AB}$ ؛ حکم : $AH=BH$ ، $\widehat{AD}=\widehat{BD}$

$$\left.\begin{array}{ll} OA=OB & \text{شعاع} \\ OH=OH & \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{به حالت وتر و ضلع}} O\hat{A}H \cong OBH \longrightarrow AH=BH$$

$$\hat{O}_1=\hat{O}_2 \xrightarrow{\text{مرکزی}} \widehat{AD}=\widehat{BD}$$

---

**عکس قضیه :** اگر قطری از دایره، وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف کند آنگاه قطر بر وتر عمود است.




اثبات :

فرض : $AH=BH$ و $\widehat{AD}=\widehat{BD}$

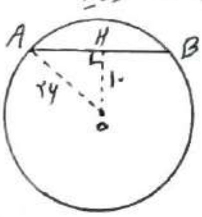
حکم : $\underset{\text{قطر}}{CD} \perp \underset{\text{وتر}}{AB}$

$$\left.\begin{array}{ll} AH=BH & \text{طبق فرض} \\ OH=OH & \text{مشترک} \\ OA=OB & \text{شعاع} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} O\hat{A}H \cong OBH \longrightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2 \longrightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \longrightarrow CD \perp AB$$

از طرفی $\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ$

---

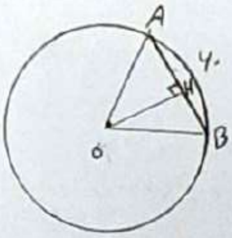
**مثال :** دایرهٔ $C(O, 26)$ و وتر $AB$ به فاصلهٔ $10$ از مرکز دایره مفروضند. طول وتر $AB$ را بدست آورید.




پاسخ ← رابطهٔ فیثاغورس : $OA^2 = AH^2 + OH^2 \longrightarrow 26^2 = AH^2 + 10^2 \longrightarrow AH^2 = 26^2 - 10^2$

$$\longrightarrow AH^2 = 576 \xrightarrow{\text{جذر}} \boxed{AH = 24}$$

می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند پس $AH=BH=24$ و در نتیجه : $AB = 2 \times 24 = 48$




$\hat{O}$ مرکزی $= \widehat{AB} = 60^\circ \longrightarrow \overset{\triangle}{OAB}$ متساوی‌الاضلاع $\Longrightarrow OA = OB = AB = 10$

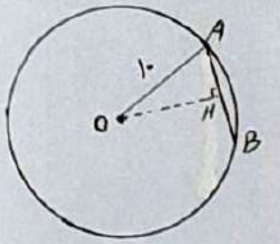
رابطه فیثاغورس: $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \xrightarrow{\text{جذر}} OH = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3}}$

**تمرین:** در دایره $C(O,r)$ اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10^{cm}$ فاصله مرکز (یعنی O) از وتر AB را بدست آورید.

طبق قطر عمود بر وتر $AH = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$

---

**مثال:** دایره $C(O,10)$ داده شده است. اگر طول وتر AB از این دایره برابر 8 باشد، فاصله وتر AB از مرکز دایره را بدست آورید.




پاسخ ← یک شکل می‌کشیم و معروضات را در آن می‌نویسیم

می‌دانیم در یک دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند پس با توجه به شکل:

(فاصله AB تا مرکز همان طول عمود OH می‌باشد. OH منطبق از قطر است که بر وتر AB عمود است)

$AB = 8 \longrightarrow AH = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$

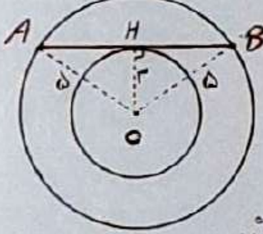
رابطه فیثاغورس: $OA^2 = OH^2 + AH^2$

$10^2 = OH^2 + 4^2$

$OH^2 = 100 - 16 = 84 \longrightarrow OH = \sqrt{84}$

---

**مثال:** شعاع‌های دو دایره هم مرکز 5 و 3 سانتی‌متر هستند. اندازه وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است را پیدا کنید.



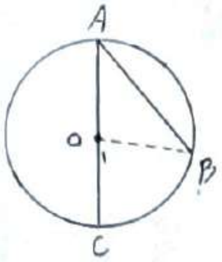

پاسخ ← یک شکل می‌کشیم تا راه حل مناسب پیدا شود

می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است و از طرفی قطر عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند. پس:

رابطه فیثاغورس $OA^2 = OH^2 + AH^2 \longrightarrow 5^2 = 3^2 + AH^2 \longrightarrow AH^2 = 25 - 9 = 16$

$\xrightarrow{\text{جذر}} AH = 4$

$AB = 2AH = 2(4) = \boxed{8}$




**قضیه** : اندازهٔ هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه .

$\hat{A}$ زاویه محاطی ؛ فرض

حکم : $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

اثبات : با وصل کردن B به O داریم :

$\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B}$ زاویه خارجی $O\overset{\Delta}{A}B$

$O\overset{\Delta}{A}B$ متساوی الساقین (چرا؟) ؛ $\hat{A} = \hat{B}$

$\longrightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \longrightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2} \longrightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

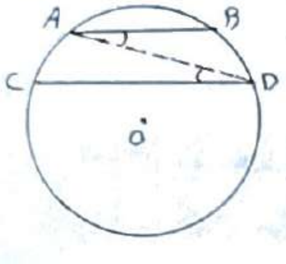
از طرفی ؛ $\hat{O}_1 = \widehat{BC}$

زاویه مرکزی

---

**توجه**: در قضیه بالا یکی از اضلاع زاویه محاطی قطر دایره بود . اما می‌توان حالتهای دیگری را برای قضیه بالا در نظر گرفت مثلاً دو ضلع زاویه محاطی دو طرف مرکز دایره باشند . یا دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز باشند (اثبات ضروری نمی‌باشد)

---




**مثال**: ثابت کنید کمانهای محدود به دو وتر موازی در یک دایره باهم مساویند.

پاسخ ←

فرض ؛ $AB \parallel CD$

حکم ؛ $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

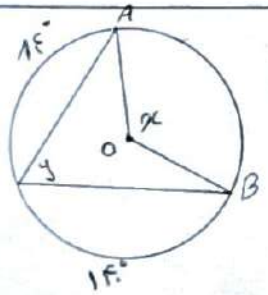
از A به D وصل می‌کنیم ؛

$AB \parallel CD$ و AD مورب $\longrightarrow \hat{A} = \hat{D} \longrightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \longrightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$

محاطی $\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

محاطی $\hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$

---




**مثال** : در شکل مقابل اندازه زاویه‌های x و y را بدست آورید .

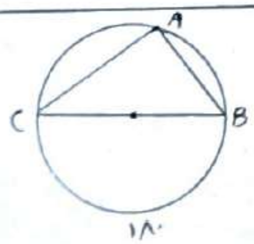
پاسخ ←

$\widehat{AB} + 140^\circ + 84^\circ = 360 \longrightarrow \widehat{AB} = \boxed{136^\circ}$

زاویه مرکزی $\hat{x} = \widehat{AB} = 136^\circ$

زاویه محاطی $\hat{y} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{136}{2} = 68$

---




**نکته** : زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره ، $90^\circ$ (قائمه) است .

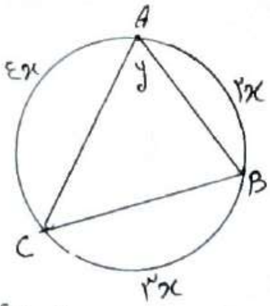
محاطی مقابل قطر $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180}{2} = \boxed{90}$

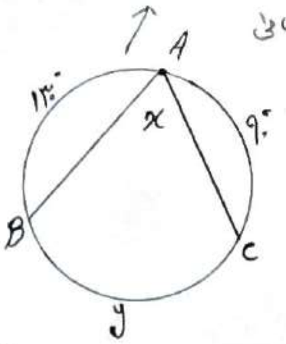
قطر دایره را به دو کمان ۱۸۰ تبدیل می‌کند

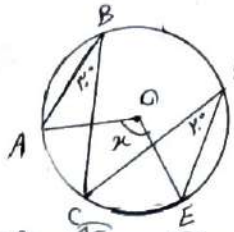
$y = 360 - (\overset{220}{130+90}) = 140$

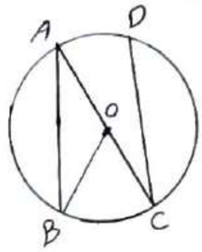
محاطی $x = \frac{y}{2} = \frac{140}{2} = 70$

**تمرین:** در شکلهای مقابل مقدار $x$ و $y$ را بدست آورید.




$4x + 2x + 3x = 360$

$\Rightarrow 9x = 360 \longrightarrow x = \frac{360}{9} = 40$

محاطی $\hat{A} = \frac{BC}{2} \longrightarrow y = \frac{3\times40}{2} = \frac{120}{2} = 60$

محاطی $B = \frac{\widehat{AC}}{2} \rightarrow \widehat{AC} = 2\times30 = 60$

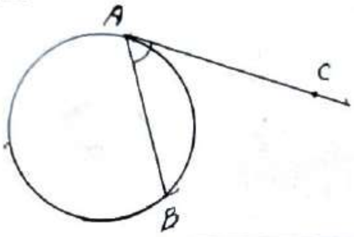
محاطی $D = \frac{\widehat{CE}}{2} \Rightarrow \widehat{CE} = 2\times20 = 40$

$\widehat{AE} = 60 + 40 = 100$

مرکزی $x = \widehat{AE} = 100$

---

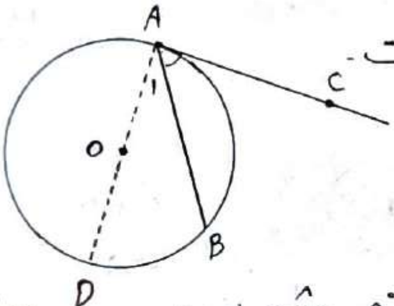
**تعریف زاویه ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتر دایره می‌باشد. (قاطع دایره)




در شکل مقابل زاویه $B\hat{A}C$ ظلی است.

---

**قضیه:** اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان روبروی آن است.




اثبات:

فرض: $\hat{A}$ ظلی

حکم: $\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

قطر گذرنده از A را رسم میکنیم تا دایره را در D قطع کند.

$D\hat{A}C = 90$ (زیرا شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است) $\longrightarrow D\hat{A}C = \frac{\widehat{AD}}{2}$ (180 نصف دایره)

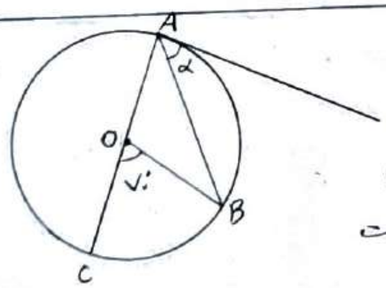
از طرفی: محاطی $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$\xrightarrow{\text{تفریق طرفین}} D\hat{A}C - \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BD}}{2}$

$\longrightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

---

**مثال:** با توجه به شکل مقابل اندازه زاویه ظلی $\alpha$ را بدست آورید.




پاسخ:

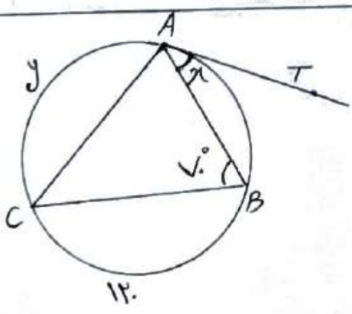
مرکزی $C\hat{O}B = 70 \longrightarrow \widehat{BC} = 70$

AC قطر است ← دایره را به دو کمان 180 درجه تقسیم کرده ← $\widehat{AB} = 180 - \underset{\widehat{BC}}{70} = 110$

ظلی $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{110}{2} = 55$

---

**تمرین:** در شکل مقابل AT بر دایره در نقطه A مماس است، با توجه به شکل مقابل مقدار $x$ و $y$ را بدست آورید.

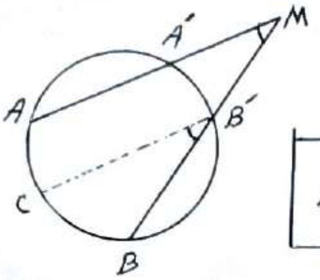



محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \rightarrow \widehat{AC} = 2\times70 = \boxed{140} \rightarrow y$

$\widehat{AB} = 360 - (\overset{260}{120 + 140}) = 100$

ظلی $x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100}{2} = 50$

## زاویه بین وترهای متقاطع :




**الف )** اگر دو وتر در خارج دایره متقاطع باشند زاویه بین آنها برابر است با نصف تفاضل دو کمان مقابل به آن زاویه:

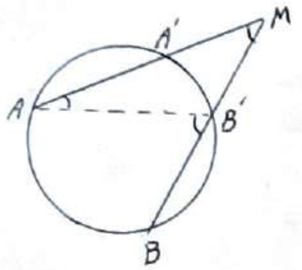
$$\boxed{\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}}$$

اثبات: (روش اول) از $B'$ خطی موازی $AA'$ رسم می کنیم تا دایره را در $C$ قطع کند.

$AA' \parallel CB'$ و $MB'$ مورب

$$\longrightarrow \hat{M} = \underset{\text{محاطی}}{\hat{B'}} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

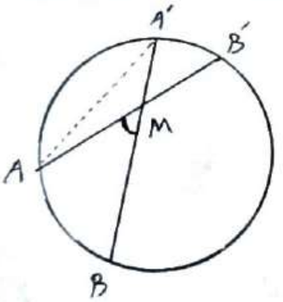
قبلاً ثابت شد کمانهای بین وترهای موازی با هم برابرند لذا $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{A'B'}$




(روش دوم): از $B'$ به $A$ وصل می کنیم. زاویه $B'$ زاویه خارجی مثلث $A\hat{M}B$ است

$$\hat{B'} = \hat{A} + \hat{M} \longrightarrow \hat{M} = \underset{\text{محاطی}}{\hat{B'}} - \underset{\text{محاطی}}{\hat{A}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

---



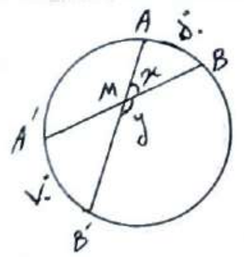

**ب)** اگر دو وتر در داخل دایره متقاطع باشند، زاویه بین آنها برابر است با نصف مجموع دو کمان مقابل به آن زاویه.

$$\boxed{M = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}}$$

اثبات: از $A$ به $A'$ وصل می کنیم زاویه مشخص شده $M$ زاویه خارجی برای مثلث $A\hat{A'}M$ می باشد

$$\text{خارجی } \hat{M} = \underset{\text{محاطی}}{\hat{A}} + \underset{\text{محاطی}}{\hat{A'}} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \longrightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

---



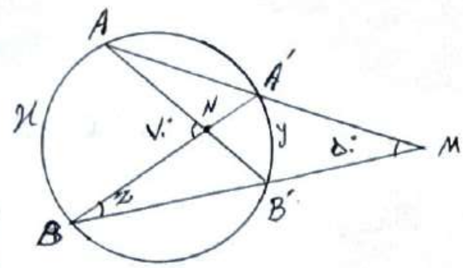

**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدارهای $x$ و $y$ را تعیین کنید.

پاسخ ⟵

$$\hat{x} = \frac{50 + 70}{2} = \frac{120}{2} = 60°$$

$$\hat{y} = 180 - x = 180 - 60 = 120°$$

مثال: با استفاده از شکل مقابل مقدارهای $x$ و $y$ و $z$ را تعیین کنید.




پاسخ ←

$$\hat{N} = \frac{x+y}{2} \rightsquigarrow 70 = \frac{x+y}{2} \rightsquigarrow x+y = 140$$

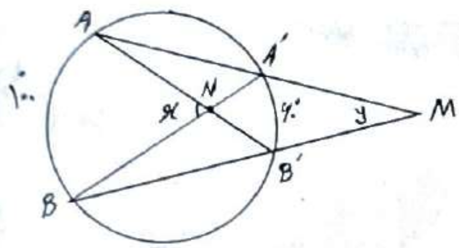
$$\hat{M} = \frac{x-y}{2} \rightsquigarrow 50 = \frac{x-y}{2} \rightsquigarrow x-y = 100$$

جمع: $2x = 240 \rightarrow x = 120^\circ,\ y = 20^\circ$

محاطی $\hat{z} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{20}{2} = 10^\circ$

---

تمرین: با توجه به شکل مقابل مقادیر $x$ و $y$ را تعیین کنید.

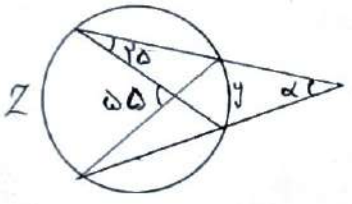



$$y = \frac{100-60}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$x = \frac{100+60}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

---

تمرین: در شکل مقابل اندازه زاویه $\alpha$ برابر است با:




محاطی $25 = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2\times 25 = 50$

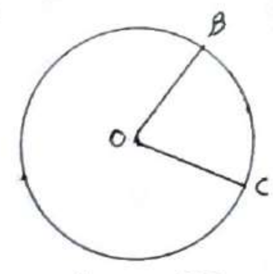
$$55 = \frac{z+y}{2} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 110 = z + 50 \Rightarrow z = 60$$

$$\alpha = \frac{z-y}{2} = \frac{60-50}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

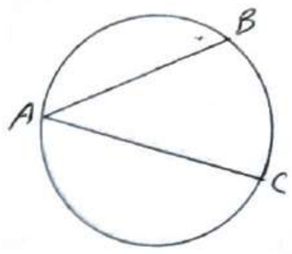
---

توجه: تمرینات کتاب درسی صفحه ۱۶ بعد از مطالعه جزوه و تسلط کافی بر مطالب آن حل و بررسی شود.

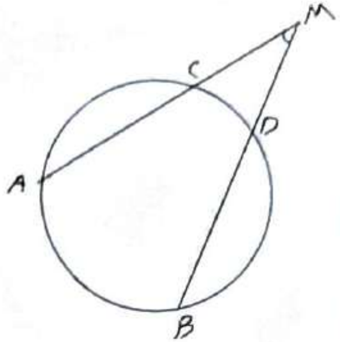
خلاصه مطالب مهم فصل ۱
درس ۱



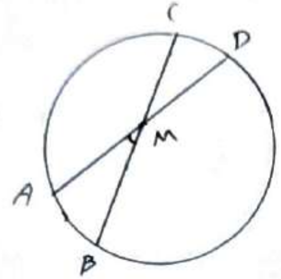
$\hat{O}$ مرکزی $= \widehat{BC}$



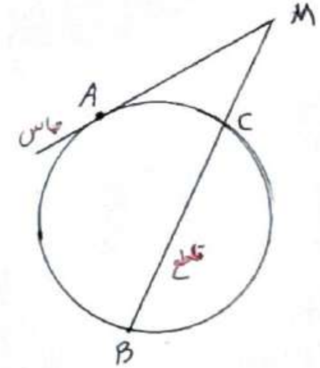
$\hat{A}$ محاطی $= \frac{\widehat{BC}}{2}$



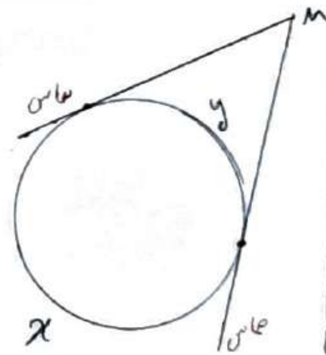
$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$



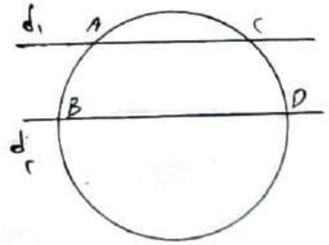
$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$



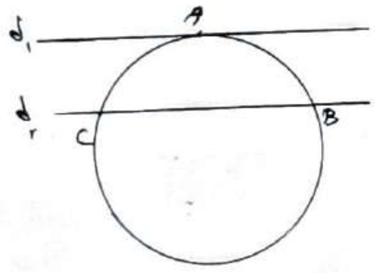

$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$




$\hat{M} = \frac{x - y}{2}$



قاطع قاطع
$d_1 \parallel d_2 \longrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$



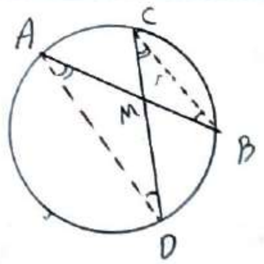
مماس قاطع
$d_1 \parallel d_2 \rightsquigarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$

## درس دوم

## رابطه‌های طولی در دایره :

اگر وترهای یک دایره یکدیگر را درون دایره قطع کنند یا امتداد وترها یکدیگر را در خارج دایره قطع کنند بین اندازهٔ پاره‌خط‌های ایجاد شده روابطی برقرار است که در قضیه‌های زیر به آنها می‌پردازیم.

---



**قضیه ۱ :** هرگاه دو وتر دلخواه $AB$ و $CD$ یکدیگر را درون دایره در نقطه $M$ قطع کنند، آنگاه :

$$\boxed{MA \cdot MB = MC \cdot MD}$$

اثبات : از $A$ به $D$ و از $B$ به $C$ وصل می‌کنیم در دو مثلث ایجاد شده داریم

$\hat{A} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ محاطی

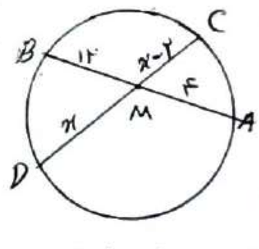
$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ محاطی

$\xrightarrow{\text{به حالت تساوی دو زاویه}} \triangle AMD \underset{\text{متشابه}}{\sim} \triangle BMC \xrightarrow{\text{اضلاع نظیر متناسبند}} \frac{AM}{MC} = \frac{MD}{MB}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} AM \cdot MB = MC \cdot MD$

---

**مثال :** در شکل‌های زیر مقدار $x$ را بدست آورید.



طبق روابط طولی : $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

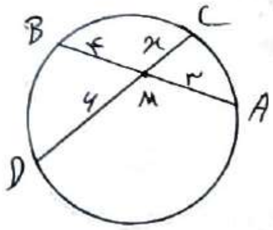
$\xrightarrow{\text{جایگزینی}} 4 \times 12 = (x-2)x$

$\longrightarrow 48 = x^2 - 2x$

$\longrightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$

$\longrightarrow (x-8)(x+6) = 0 \rightarrow \boxed{x=8}$ قبول ، $\boxed{x=-6}$ غیر قابل قبول

زیرا طول پاره خط نمی‌تواند منفی باشد

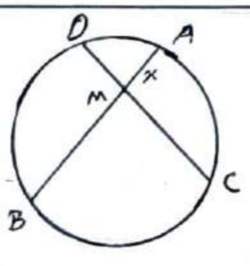


طبق روابط طولی : $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

$\xrightarrow{\text{جایگزینی مقدار}} 3 \times 4 = x \times 6$

$\longrightarrow x = \frac{12}{6} = 2$

---



**مثال :** در دایره زیر وتر $AB$ وتر $CD$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=11$ ، $CD=9$ سانتی‌متر باشند : آنگاه وتر $CD$ وتر $AB$ را به چه نسبت قطع می‌کنند؟

پاسخ ⟵

طبق فرض : $\frac{MD}{MC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} MC = 2MD$

$\underbrace{MC + MD}_{CD=9} = 9 \longrightarrow \overbrace{2MD + MD}^{3MD} = 9 \longrightarrow \boxed{MD = 3}$

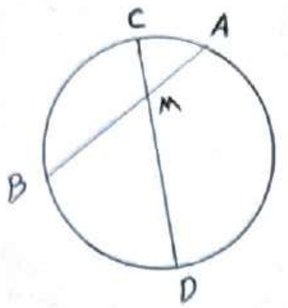
$\boxed{MC = 2 \times 3 = 6}$

طبق روابط طولی : $\overset{x}{AM} \cdot \overset{(11-x)}{MB} = \overset{6}{MC} \times \overset{3}{MD} \longrightarrow x(11-x) = 18 \longrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$

توضیح : $AB = 11 \rightarrow \overset{x}{AM} + MB = 11 \rightarrow MB = 11 - x$

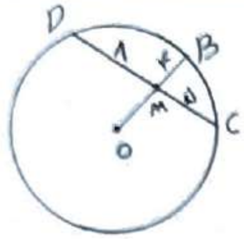
$\longrightarrow (x-9)(x-2) = 0 \rightarrow x = 9$ با توجه به شکل غیر قابل قبول ، $\boxed{x=2}$ ✓ $\longrightarrow AM$

$\longrightarrow \boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}}$




**تمرین:** در دایره مقابل وتر AB وتر CD را به نسبت ۱ به ۶ تقسیم کرده است. اگر AB=۱۰ و CD=۱۴ آنگاه وتر CD به چه نسبتی وتر AB را قطع می‌کند؟

---

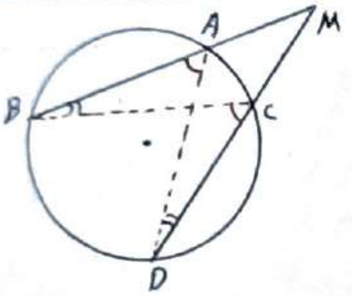



**تمرین:** در شکل مقابل O مرکز دایره است، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۷ ✓ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۸/۵

(BO را امتداد دهید تا دایره را در A قطع کند با فرض OM=x پس نکته OA=OB=x+۴ شعاع حال از قضیه ۱ روابط طولی را بنویسید)

---




**قضیه ۲:** هرگاه امتدادهای دو وتر AB و CD یکدیگر را خارج دایره در نقطه M قطع کنند آنگاه:

$$\boxed{MA \cdot MB = MC \cdot MD}$$

جزء × کل = جزء × کل

**اثبات:** از A به D و از C به B وصل می‌کنیم در دو مثلث ایجاد شده داریم:

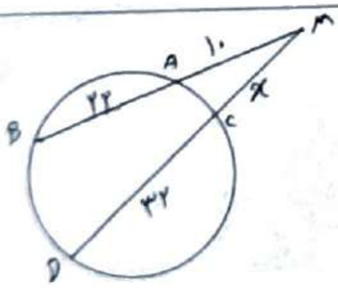
$\hat{B}=\hat{D}=\frac{\widehat{AC}}{2}$ محاطی

$\hat{M}=\hat{M}$ مشترک

$\xrightarrow{\text{به حالت تشابه دو زاویه}} A\hat{M}D \sim C\hat{M}B$ (متشابه) $\xrightarrow{\text{اضلاع نظیر متناسبند}} \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB} \longrightarrow \boxed{MA\cdot MB=MC\cdot MD}$

---

**مثال:** در شکلهای زیر مقدار x را بدست آورید

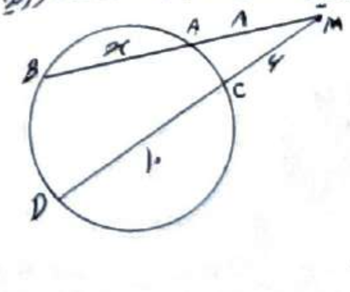



طبق روابط طولی: $\underset{\text{جزء}}{MA}\times\underset{\text{کل}}{MB}=\underset{\text{جزء}}{MC}\times\underset{\text{کل}}{MD}$

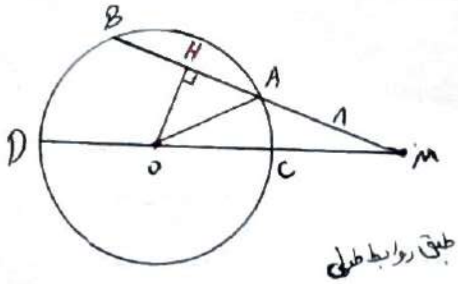
$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ ۱۰ × ۳۲ = x × (x+۳۲)

⟶ x² + ۳۲x − ۳۲۰ = ۰

⟶ (x + ۴۰)(x − ۸) = ۰ ⟶ x = −۴۰ غیرقابل قبول ، x = $\boxed{۸}$




به عهده دانش آموز




**مثال:** با توجه به شکل مقابل اگر $MD=14$ و $MC=4$ فاصله مرکز دایره از وتر $AB$ کدام است؟

پاسخ ←

طبق روابط طولی : $MA \times MB = MC \times MD$

$8 \times (x+8) = 4 \times 14$ ← تقسیم بر ۸ ← $x+8=12 \longrightarrow x=\boxed{4}$ ($AB$)

$DC=14-4=10$ قطر

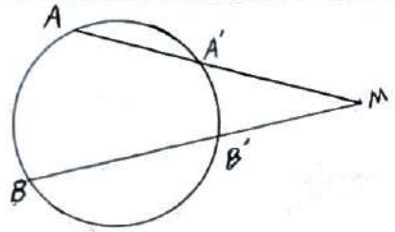
از O به A وصل می‌کنیم و همچنین از O عمود OH را بر AB رسم می‌کنیم واضح است که $OA=r=5$ ←

همچنین طبق قطر عمود بر وتر $AH=\frac{AB}{2}=2$

رابطه فیثاغورس : $OA^2=OH^2+AH^2$

$5^2=OH^2+2^2 \longrightarrow OH^2=25-4=21 \longrightarrow OH=\sqrt{21}$

---

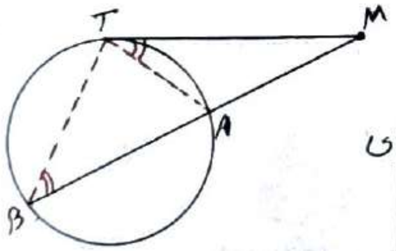



**تمرین:** با توجه به شکل مقابل به سؤالهای زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $MA'=5$ و $MA=8$ و $MB'=2$ باشند طول $BB'$ را بیابید.

ب) اگر نقطه $A'$ وسط پاره‌خط $MA$ فرض شود و $BB'=7MB'=35$ ، آنگاه $MA$ چقدر است؟

---




**قضیه ۳:** هرگاه از نقطه M خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم ، آنگاه مربع اندازه مماس برابر است با حاصلضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع . معنی

$$\boxed{MT^2=MA \times MB}$$

مماس

(به عبارت دیگر طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است)

**اثبات:** از T به A و B وصل می‌کنیم در دو مثلث $M\hat{A}T$ و $M\hat{B}T$ داریم:

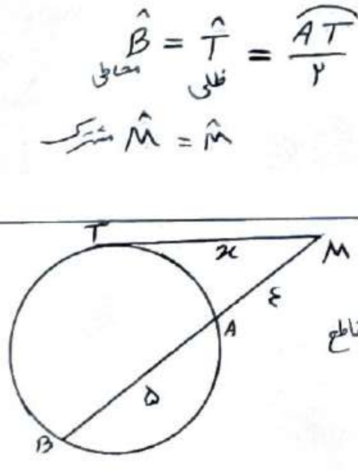
$\underset{\text{محاطی}}{\hat{B}} = \underset{\text{ظلی}}{\hat{T}} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2}$

$\hat{M}=\hat{M}$ مشترک

$\xrightarrow[\text{دو زاویه}]{\text{به حالت تساوی}}$ $M\overset{\triangle}{A}T \overset{\text{مشابه}}{\sim} M\overset{\triangle}{B}T$ $\xrightarrow{\text{اضلاع متناظر متناسبند}}$ $\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} MT^2=MA \times MB$

---



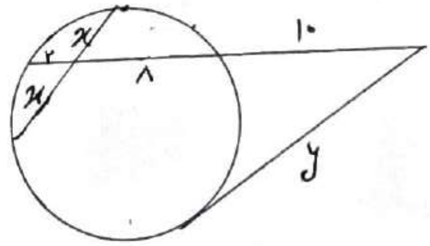

**مثال:** با توجه به شکل مقابل $x$ را بدست آورید.

طبق روابط طولی مماس و قاطع : $MT^2 = MA \times MB$ (کل) (جزء)

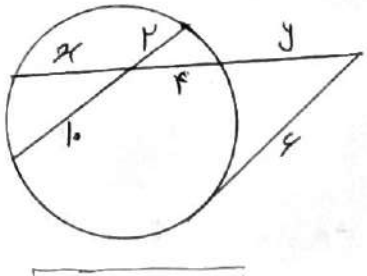
$x^2=4 \times 9$

$x^2=36 \longrightarrow x=\boxed{6}$

**مثال:** در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بدست آورید




به عهده دانش‌آموز




روابط طولی : $\boxed{4 \times x = 2 \times 10} \rightsquigarrow x = \frac{20}{4} = \boxed{5}$

روابط طولی مماس و قاطع : $\boxed{6^2 = y \times (y+9)} \rightarrow 36 = y^2 + 9y$

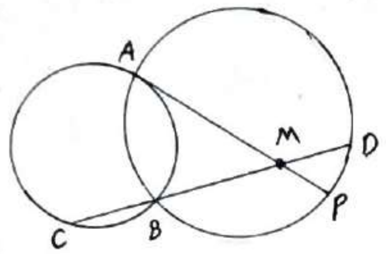
$\rightsquigarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \rightarrow (y+12)(y-3) = 0$

غیرقابل قبول $y = -12$

$\boxed{y = 3}$

---

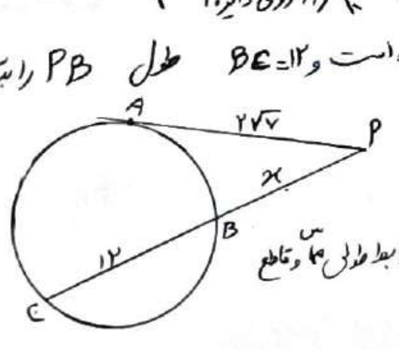
**تمرین:** در شکل مقابل $MA$ بر دایره کوچک مماس است و $BC = MB = MD = x$ و $MP = 1$ اندازهٔ $x$ را بدست آورید




---

**مثال:** از نقطه $P$ در خارج دایره، مماس $PA$ به طول $2\sqrt{7}$ را بر آن رسم کرده‌ایم ($A$ روی دایره است) همچنین خط راستی از $P$ گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه $B$ و $C$ قطع کرده است و $BC = 12$ طول $PB$ را بدست آورید

پاسخ ⟵ طبق فرض‌ها یک شکل رسم می‌کنیم:




طبق روابط طولی مماس و قاطع : $\underbrace{PA^2}_{\text{مماس}} = PB \times PC \rightsquigarrow (2\sqrt{7})^2 = x(x+12)$

$\rightsquigarrow x^2 + 12x - 28 = 0$

$\rightsquigarrow (x+14)(x-2) = 0$

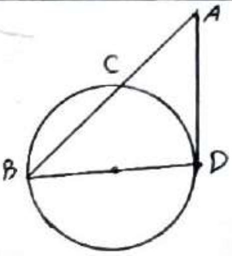
قابل قبول $x = \boxed{2}$

غیرقابل قبول $x = \boxed{-14}$

(زیرا طول نمی‌تواند منفی باشد)

---

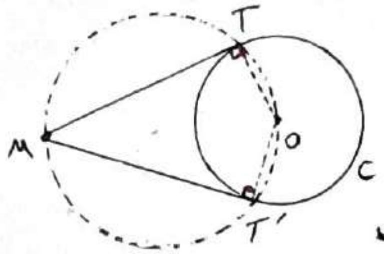
**تمرین:** در شکل مقابل $BD$ قطر دایره و $AD$ بر دایره مماس است. اگر شعاع دایره برابر ۳ و طول وتر $BC$ برابر ۴ باشد، اندازهٔ $AB$ کدام است؟




۱) ۹ ✓ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۲

(راهنمایی: از روابط طولی مماس و قاطع یک رابطه بنویسید از فیثاغورس نیز یک رابطه بنویسید)

## روش رسم مماس بر دایره از نقطه‌ی M خارج دایره:




نقطه دلخواه M خارج دایره $C(O,R)$ را در نظر می‌گیریم حال دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم

به طوری‌که دایره $C(O,R)$ را در نقاط T و T' قطع کند در این صورت خط‌ها MT و MT' بر دایره $C(O,R)$ مماسند.

زیرا اگر از T و T' به O وصل کنیم زاویه‌های T و T' محاطی روبه‌رو به قطر می‌باشند پس ۹۰° می‌باشند لذا چون MT و MT' بر شعاع در نقطه T و T' عمودند پس MT و MT' مماس بر دایره می‌باشند)

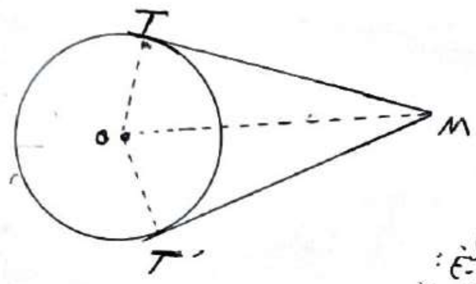
---

## مثال (کار در کلاس صفحه ۳۰)

هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند ثابت کنید:

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند یعنی: $MT=MT'$

ب) نیم‌خط MO نیم‌ساز زاویه $TMT'$ است.




پاسخ ←

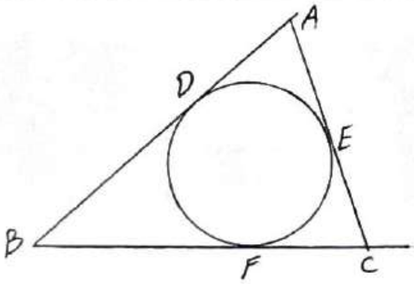
(الف و ب) کافیست همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OMT}$ و $\overset{\triangle}{OMT'}$ را بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} OT=OT' \ (\text{شعاع}) \\ OM=OM \ (\text{مشترک}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{به حالت وتر و یک ضلع}} O\hat{M}T \cong O\hat{M}T' \longrightarrow \boxed{MT=MT'}$$

$\hat{M}_1=\hat{M}_2 \longrightarrow$ OM نیم‌ساز

---

## مثال: در شکل مقابل $BC=10$ ، $AC=8$ و $AB=12$ طول $x=BF$ چند واحد است؟



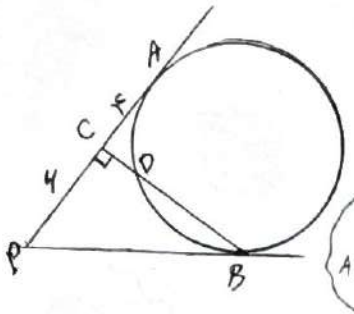

پاسخ ← می‌دانیم طول ۲ مماس رسم شده بر دایره از نقطه خارج دایره باهم برابر است.

$$\left.\begin{array}{l} AD=AE \\ BD=BF \\ CF=CE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{AD+BD}+\overset{BC-BF}{CF} = \overbrace{AE+BF+CE}$$

$$\longrightarrow AB+BC-BF = AC+BF$$

$$\longrightarrow 12+10-x = 8+x$$

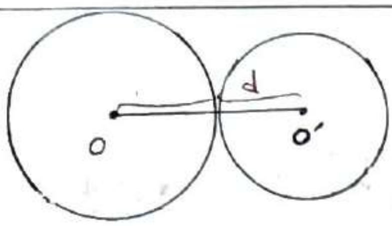
$$\longrightarrow 14 = 2x \longrightarrow \boxed{x=7}$$




**تمرین:** در شکل مقابل $PA$ و $PB$ بر دایره مماس هستند و $BC$ بر $PA$ عمود است.
اگر $PC=6$ و $CA=4$ باشند، طول $CD$ کدام است؟

راهنمایی: (از رابطه طول دو مماس برابرند $PA=PB$ پس از فیثاغورس در $P\hat{B}C$ طول $BC$ حاصل است. سپس از روابط طولی مماس و قاطع بر دایره $AC^2 = CD \times CB$ استفاده شود و $CD$ بدست می‌آید)

---




**حالتهای دو دایره نسبت به هم:**

پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند را خط المرکزین گویند و با $d$ نشان می‌دهند.

$$\boxed{OO' = d}$$

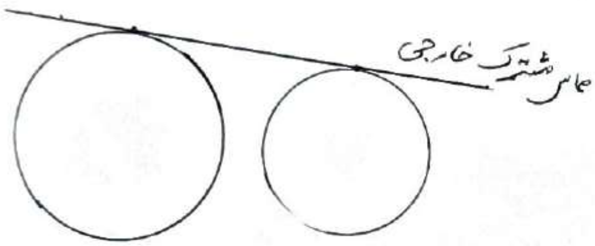
---

**توجه:** برای مشاهده حالتهای مختلف دو دایره به صفحه ۲۰ کتاب مراجعه شود و به دقت مطالعه گردد.

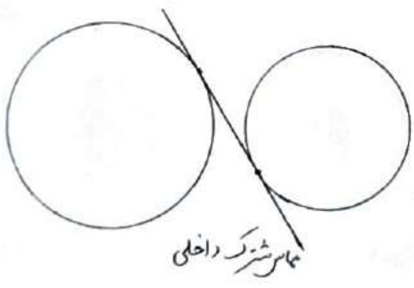
---

**تعریف مماس مشترک دو دایره:** خطی است که بر هر دو دایره مماس است.

**مماس مشترک خارجی:** اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط را مماس مشترک خارجی گویند.

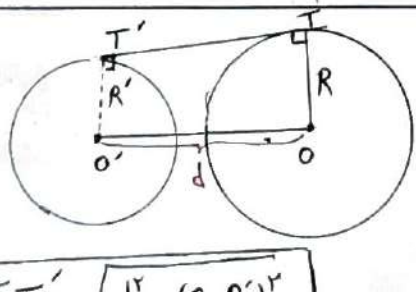



**مماس مشترک داخلی:** اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط را مماس مشترک داخلی گویند.



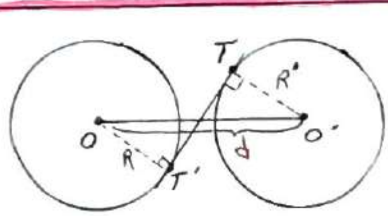

---

* **طول مماس مشترکها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:**




طول مماس مشترک خارجی

$$\boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}}$$




طول مماس مشترک داخلی:

$$\boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}}$$

**مثال:** طول مماس مشترکهای داخلی و خارجی دو دایره $C(O,7)$ و $C'(O',1)$ را با فرض $OO'=10$ بدست آورید.

$d=OO'=10$

پاسخ ⟵ $TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2} = \sqrt{10^2-(7-1)^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ طول مماس مشترک خارجی

$TT' = \sqrt{d^2-(R+R')^2} = \sqrt{10^2-(7+1)^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$ طول مماس مشترک داخلی

---

**مثال:** طول شعاعهای دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ ، طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

پاسخ ⟵ $3\sqrt{7} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 63 = 8^2-(R-R')^2 \longrightarrow (R-R')^2=1 \longrightarrow R-R'=1$

(مثبت را در نظر گرفتیم چون همیشه در فرض ها $R>R'$)

$\sqrt{15} = \sqrt{d^2-(R+R')^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 15 = 8^2-(R+R')^2$

$\longrightarrow (R+R')^2 = 64-15 = 49 \longrightarrow R+R'=7$

$\xrightarrow{\text{دستگاه}} \begin{cases} R-R'=1 \\ R+R'=7 \end{cases}$

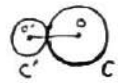
$\xrightarrow{\text{جمع}} 2R=8 \longrightarrow R=4 \,,\, R'=3$

---

**تمرین:** در دو دایره به شعاعهای ۳ و ۸ و طول خط المرکزین $d=13$ اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $5a-3$ باشد، $a$ را بدست آورید.

---

**مثال:** دو دایره $C(O,9)$ و $C'(O',4)$ مماس بیرونی هستند، اندازه پاره خط مماس مشترک خارجی آنها را بدست آورید.

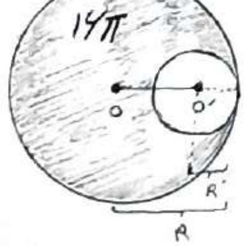



پاسخ ⟵ چون مماس برون هستند پس $d=OO'=R+R'=4+9=13$ خط المرکزین

(طول مماس مشترک خارجی) $TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2} =$

---

**مثال:** طول خط المرکزین دو دایره مماس درون ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها $16\pi$ سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید.




پاسخ ⟵ $OO'=2 \longrightarrow R-R'=2$

$S-S' = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \xrightarrow{\div\pi} R^2-R'^2=16 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cancel{R-R'})(R+R')=16$

$\longrightarrow (R+R')=8$

دستگاه $\longrightarrow \begin{cases} R-R'=2 \\ R+R'=8 \end{cases}$

$2R=10 \longrightarrow R=5 \ , \ R'=3$

---

**تمرین:** دو دایره به شعاع ۱ و ۴ سانتی متر مماس برون هستند، مقدار $x$ را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آنها برابر $3x+1$ باشد.

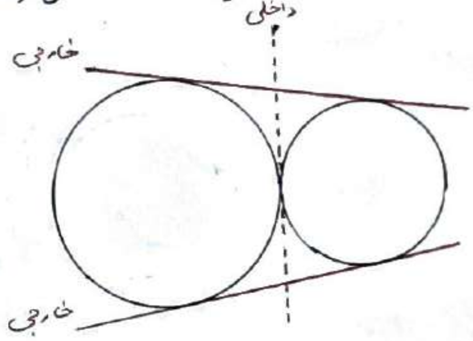
**تمرین:** دو دایره $C(o, 2x+2)$ و $C'(o', x)$ مماس خارج هستند اگر طول خط المرکزین آنها $d=4x+1$ باشد طول مماس مشترک خارجی دو دایره را بدست آورید.

(چون مماس برون هستند $d=OO'=R+R'$ که از این تساوی مقدار $x$ بدست می آید و در نتیجه با جایگذاری $R$ و $R'$ بدست می آید و در نهایت $TT'$ را از فرمول بدست آورید)

---

**مثال:** با توجه به شکلهای زیر تعداد مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره را مشخص کنید.

مماس برون:

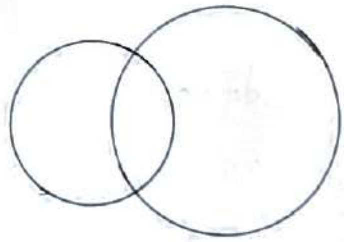



۲ مماس مشترک خارجی
۱ مماس مشترک داخلی

مماس درون:

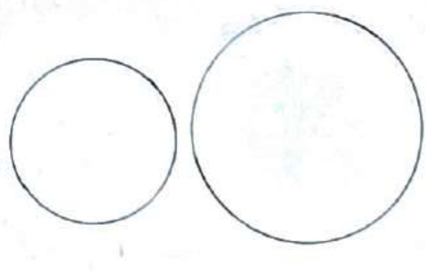
۱ مماس مشترک خارجی
۰ مماس مشترک داخلی

متقاطع:



۲ مماس مشترک خارجی
۰ مماس مشترک داخلی

متخارج:



۲ مماس مشترک خارجی
۲ " " داخلی

---

توجه: تمرینات صفحه ۲۳ کتاب درسی با توجه به مطالب تدریس شده حتماً حل و بررسی شود.

فصل ۱

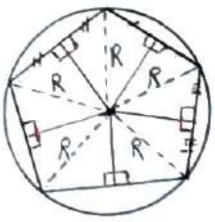
# درس سوم : چندضلعی های محاطی و محیطی


**تعریف چندضلعی محاطی :** یک چندضلعی را محاطی (محاط در دایره) می گوئیم هرگاه تمام رأسهای آن روی محیط یک دایره باشند. (در این صورت دایره را ، دایره محیطی آن چندضلعی می نامیم)

محیط بر چندضلعی

---

**مسئله :** ثابت کنید مرکز دایره محیطی یک چندضلعی ، نقطه همرسی عمودمنصف های همه اضلاع آن می باشد.




اثبات : واضح است که اگر نقطه O مرکز دایره محیطی چندضلعی باشد، فاصله آن از تمام رأسها همواره برابر با شعاع دایره محیطی $R$ است. بنابراین، این نقطه از دو سر هر ضلع چندضلعی به یک فاصله است و لذا روی عمودمنصف هرکدام از اضلاع قرار دارد.

---

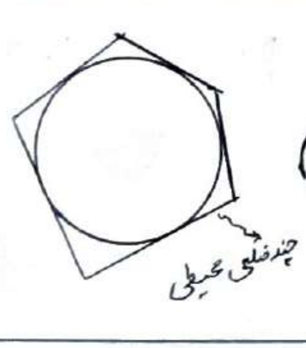
**توجه :** عکس مطلب بالا نیز به طور مشابه اثبات می شود (یعنی اگر به مرکز نقطه همرسی عمودمنصف های اضلاع یک چندضلعی دایره ای رسم کنیم این دایره از تمام رأسهای چندضلعی می گذرد)

---

**نتیجه :** یک چندضلعی ، محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه اضلاع آن در یک نقطه ، همرس باشند.

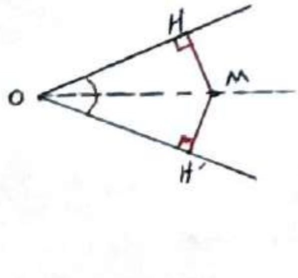
---

**چندضلعی محیطی :** یک چندضلعی را محیطی (محیط بر دایره) می گوئیم هرگاه تمام ضلعهای آن بر یک دایره مماس باشند. (در اینصورت دایره را ، دایره محاطی آن چندضلعی می نامیم)



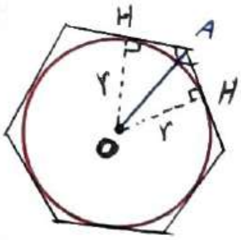

---

**یادآوری :** هر نقطه روی نیمساز هر زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس اگر نقطه ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه است.




M روی نیمساز زاویه $\hat{O}$ $\longleftrightarrow$ $MH = MH'$

**مسئله:** ثابت کنید مرکز دایره محاطی یک چندضلعی، نقطه همرسی نیمسازهای داخلی همه زاویه‌های آن می‌باشد.




اثبات: واضح است که اگر نقطه O مرکز دایره محاطی چندضلعی باشد، فاصله آن از تمام ضلع‌ها برابر با شعاع دایره محاطی ← r است. (توجه کنید که اگر از نقطه O به هر نقطه تماس وصل کنیم، شعاع در نقطه تماس بر خط مماس یعنی بر ضلع چندضلعی، عمود است و لذا فاصله O از آن ضلع را نشان می‌دهد) بنابراین این نقطه از دو ضلع هر زاویه داخلی چندضلعی به یک فاصله است و در نتیجه روی نیمساز داخلی هر زاویه داخلی چندضلعی قرار دارد.

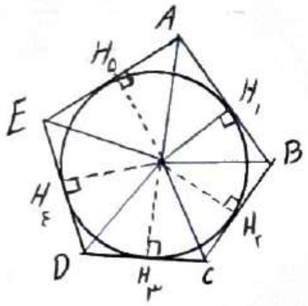
---

**نتیجه:** یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن در یک نقطه همرس باشند، این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است.

---

**مثال** (کار در کلاس صفحه ۲۵): اگر S و $2P$ به ترتیب مساحت و محیط یک چندضلعی محیطی و r شعاع دایره محاطی آن باشد آن‌گاه:

$$\boxed{S=rP}$$




اثبات: با توجه به شکل

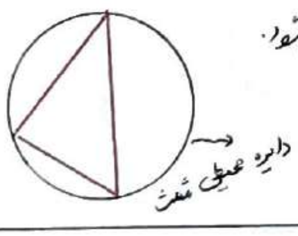
$S_{\text{چندضلعی}} =$ مجموع مساحت‌های مثلث‌های داخلی آن

$$\Rightarrow S_{\text{چندضلعی}} = S_{A\hat{O}B} + S_{B\hat{O}C} + S_{C\hat{O}D} + S_{DOE} + S_{EOA}$$

$$S = \left(\tfrac{1}{2}\, OH_1 \times AB\right) + \left(\tfrac{1}{2}\, OH_2 \times BC\right) + \left(\tfrac{1}{2}\, OH_3 \times DC\right) + \left(\tfrac{1}{2}\, OH_4 \times DE\right) + \left(\tfrac{1}{2}\, OH_5 \times AE\right)$$

$$\xrightarrow{OH_1 = OH_2 = \dots = r} S = r\left(\frac{\overbrace{AB+BC+DC+DE+AE}^{\text{محیط}}}{2}\right) = rP$$

---

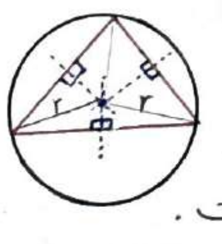



**دایره محیطی مثلث:** دایره‌ای که از سه رأس یک مثلث می‌گذرد، دایره محیطی مثلث نامیده می‌شود.

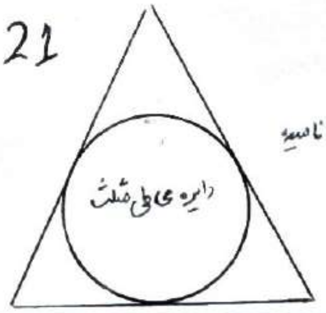
(مرکز دایره محیطی مثلث نقطه همرسی عمودمنصف‌ها است)

---

**مثال:** ثابت کنید مثلث همواره محاطی است.

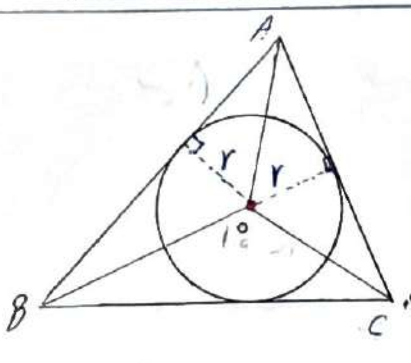



اثبات ← می‌دانیم سه عمودمنصف ضلع‌های هر مثلث همرس می‌باشند و این نقطه همرسی تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمودمنصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد (دایره محیطی مثلث) در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



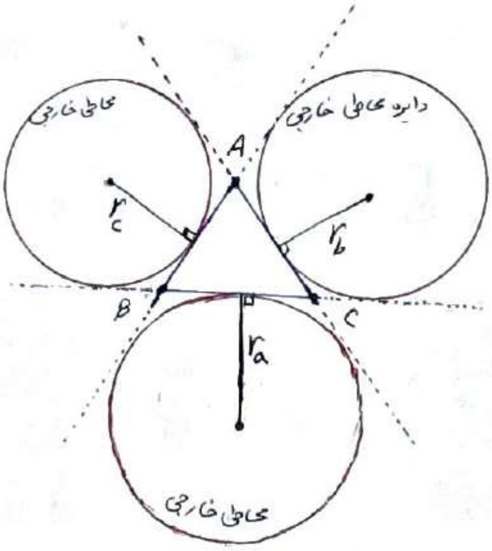

**دایره محاطی مثلث:** دایره‌ای که بر هر سه ضلع مثلث مماس می‌باشد، دایرهٔ محاطی داخلی مثلث نامیده می‌شود.

(مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است)




**مثال:** ثابت کنید مثلث همواره محیطی است.

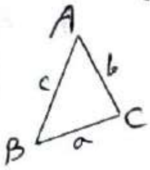
پاسخ ← می‌دانیم سه نیم‌ساز داخلی هر مثلث همواره در یک نقطه همرسند، پس اگر به مرکز این نقطه همرسی و به شعاع فاصله این نقطه تا یک ضلع مثلث دایره‌ای رسم کنیم بر هر سه ضلع مثلث مماس خواهد شد. بنابراین مثلث همواره محیطی است.



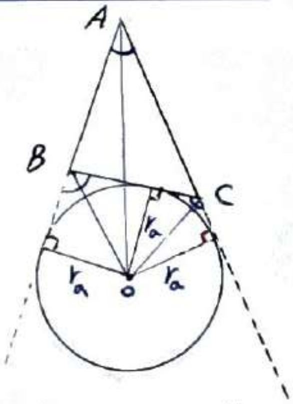

**تعریف:** دایره‌ای که بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس باشد دایره محاطی خارجی مثلث نامیده می‌شود.

هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد.

**توجه:** مرکز دایره محاطی خارجی مثلث، نقطه همرسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی راس سوم است.




**توجه:** ضلع مقابل هر رأس را با نام کوچک آن مشخص می‌کنیم




**مثال:** با توجه به مفهوم دایره محاطی خارجی، مثلث $ABC$ ثابت کنید:

الف) $S_{ABC}=r_a(P-a) \longrightarrow r_a=\frac{S}{P-a}$

ب) $S=r_b(P-b) \longrightarrow r_b=\frac{S}{P-b}$

ج) $S=r_c(P-c) \longrightarrow r_c=\frac{S}{P-c}$

پاسخ ← حالت الف را اثبات می‌کنیم، ب و ج به همین صورت انجام می‌شود

$$S_{ABC} \overset{\text{به طور خلاصه}}{=} S = S_{OAB}+S_{OAC}-S_{OBC} = \left(\frac{1}{2}\overset{\text{ارتفاع}}{r_a}\times \overset{\text{قاعده}}{AB}\right)+\left(\frac{1}{2}\overset{\text{ارتفاع}}{r_a}\times \overset{\text{قاعده}}{AC}\right)-\left(\frac{1}{2}r_a\times BC\right)$$

$$S=r_a\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right)=r_a\left(\frac{AB+AC+BC-BC-BC}{2}\right)=r_a\left(\frac{2P-2a}{2}\right) \quad (BC=a)$$

$$S=r_a(P-a)$$

$$\longrightarrow r_a=\frac{S}{P-a}$$

مثال: الف) اگر $r_a$ ، $r_b$ و $r_c$ شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث $\hat{ABC}$ و $r$ شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$$

ب) اگر $h_a$ ، $h_b$ و $h_c$ ارتفاع‌های نظیر سه ضلع مثلث باشند نشان دهید:

$$\boxed{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}}$$

پاسخ: الف) قبلاً ثابت کردیم $r_a=\frac{S}{p-a}$ و $r_b=\frac{S}{p-b}$ ، $r_c=\frac{S}{p-c}$ بنابراین:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

زیرا در هر چند ضلعی محیطی ثابت کردیم $S=rp$ لذا $\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

---

ب) می‌دانیم مساحت مثلث $ABC$ با توجه به ارتفاع‌ها سه ضلع آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{\hat{ABC}} \leftarrow S=\frac{1}{2}h_a\cdot a=\frac{1}{2}h_b\cdot b=\frac{1}{2}h_c\cdot c$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2S=h_a\cdot a=h_b\cdot b=h_c\cdot c \longrightarrow h_a=\frac{2S}{a},\quad h_b=\frac{2S}{b},\quad h_c=\frac{2S}{c}$$

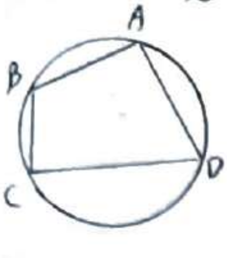
$$\longrightarrow \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\frac{2S}{a}}+\frac{1}{\frac{2S}{b}}+\frac{1}{\frac{2S}{c}}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{1}{r}$$

## چهارضلعی های محاطی و محیطی :

برخلاف مثلث، همه چندضلعی های دیگر، لزوماً محاطی و محیطی نیستند. در اینجا به شرایط محاطی یا محیطی بودن چهارضلعی می پردازیم.

---

**قضیه :** یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.




اثبات : $\Leftarrow$ :

فرض : $ABCD$ محاطی

حکم : $\begin{cases} \hat{A}+\hat{C}=180 \\ B+D=180 \end{cases}$

$\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$ محاطی

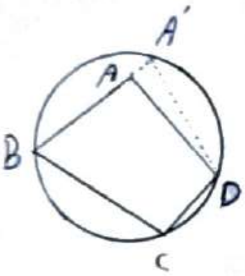
$\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ محاطی

$\xrightarrow{\text{جمع}} \hat{A}+\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\dfrac{360}{2}=\boxed{180}$

به طور مشابه ثابت می شود : $B+D=180$

---

$\Rightarrow$ : حکم : $ABCD$ چهارضلعی محاطی     فرض : $\begin{cases} A+C=180 \\ B+D=180 \end{cases}$




اثبات به روش برهان خلف : می دانیم از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست یک دایره می گذرد، حال نشان می دهیم که دایره ای که از نقاط $D$ و $B$ و $C$ می گذرد، از نقطه $A$ نیز می گذرد، اگر این دایره از رأس $A$ نگذرد و امتداد $BA$ را در $A'$ قطع کند از $A'$ به $D$ وصل می کنیم در چهارضلعی محاطی $A'BCD$ داریم :

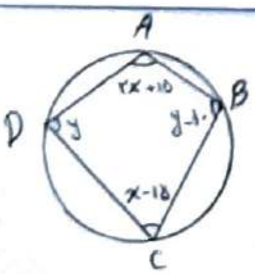
$A'+C=180$

از طرفی طبق فرض $A+C=180$ $\rightsquigarrow \hat{A}=\hat{A'}$ تناقض

(زیرا $A$ زاویه خارجی مثلث $ADA'$ است و $A>A'$)

بنابراین فرض خلف باطل است لذا دایره از رأس $A$ نیز می گذرد در نتیجه $ABCD$ چهارضلعی محاطی است.

---



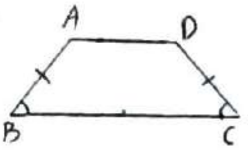

**مثال :** با توجه به شکل مقابل اندازه $x$ و $y$ را پیدا کنید.

پاسخ : چون چهارضلعی $ABCD$ محاطی است زاویه های روبرو مکمل یکدیگرند :

$\hat{A}+\hat{C}=180 \rightsquigarrow (2x+15)+(x-15)=180 \rightsquigarrow 3x=180 \rightsquigarrow x=60$

$\hat{B}+\hat{D}=180 \rightsquigarrow$ ادامه دهید

**مثال:** ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.




پاسخ ← فرض کنیم ذوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین باشد ( $AD \parallel BC$ ، $\overset{\text{ساق}}{AB} = \overset{\text{ساق}}{CD}$ )
نشان می‌دهیم محاطی است ( یعنی زاویه‌های مقابل مکملند $A+C = B+D = 180$ )

$ABCD$ متساوی الساقین $\rightsquigarrow \hat{B} = \hat{C} \longrightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180 = \underbrace{\hat{B} + \hat{D}}_{\text{به طور مشابه}}$

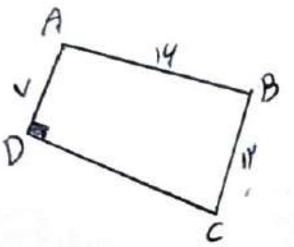
$AD \parallel BC$ ، $AB$ مورب $\rightsquigarrow A + B = 180$

**برعکس:** فرض: $\hat{B} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{C} = 180$ ( $ABCD$ چهارضلعی محاطی )
حکم: $AB = DC$ ( ذوزنقه متساوی الساقین )

$A + B = 180$ طبق موازی و مورب
$A + C = 180$ طبق فرض
$\rightsquigarrow \hat{B} = \hat{C} \rightsquigarrow AB = DC$

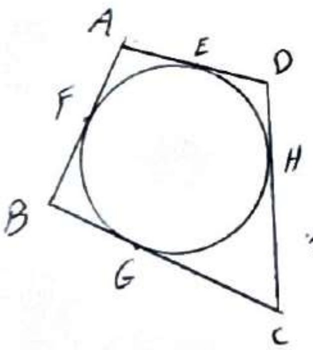
---

**تمرین:** در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، $\hat{D} = 90°$ است اندازهٔ ضلع $DC$ را بدست آورید.




---

**قضیه:** در یک چهارضلعی محیطی مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است. ( عکس قضیه نیز برقرار است )




$\boxed{\text{حکم}: AB + CD = AD + BC}$

**اثبات:** قبلاً دیدیم از هر نقطهٔ بیرون دایره، دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازه‌های این دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{aligned} AF &= AE \\ BF &= BG \\ CH &= CG \\ DH &= ED \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{AF+BF}+\underbrace{CH+DH} = \underbrace{AE+ED}+\underbrace{BG+CG} \longrightarrow AB + CD = AD + BC$$

---

**مثال:** اندازهٔ سه ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی به ترتیب ۷، ۱۱ و ۱۴ سانتی‌متر است اندازه ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

پاسخ ← فرض کنیم اندازهٔ ضلع چهارم برابر $x$ باشد پس اندازه‌های اضلاع چهارضلعی به ترتیب ۷، ۱۱، ۱۴ و $x$ می‌باشند

$$\xRightarrow{\text{طبق قضیه}} x + 11 = 14 + 7 \rightsquigarrow x = 23 - 11 = \boxed{12}$$

---

**مثال:** دو چهارضلعی نام ببرید که همواره محیطی باشند.

پاسخ ← طبق قضیه چون مجموع اندازه‌های دو ضلع (در چهارضلعی محیطی) برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است لذا این دو چهارضلعی می‌توانند مربع و لوزی باشند.

**چندضلعی منتظم :** یک چندضلعی محدب را منتظم گوئیم هرگاه تمام ضلعهای آن هم اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم اندازه باشند.

**مثلاً :** مثلث متساوی الاضلاع ⟵ سه‌ضلعی منتظم

مربع ⟵ چهارضلعی منتظم

**نکته :** هر چندضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی.

**تمرین :** جدول زیر را کامل کنید.

| نوع چندضلعی / نام | مستطیل | لوزی | مثلث | مربع | ذوزنقه | ذوزنقه متساوی الساقین | کایت | پنج‌ضلعی منتظم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| محاطی | | | | | | | | |
| محیطی | | | | | | | | |

**توجه :** تمرینات صفحه ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی به طور کامل حل و بررسی شوند.

# فصل ۲ تبدیلهای هندسی و کاربردها

## درس اول : تبدیلهای هندسی

یکی از مفاهیم مهم در هندسه، تبدیلهای هندسی است. وضعیتهای مختلفی که هر شکل در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند در نتیجه یک تبدیل است.

تبدیلهای مهم که در این فصل بررسی می‌کنیم عبارتند از: بازتاب - انتقال - دوران - تجانس

این تبدیلها موقعیت یا اندازه شکل را تغییر می‌دهند.

**تعریف تبدیل:** تبدیل $T$ در صفحه تابعی است که به هر نقطه $A$ از صفحه دقیقاً یک نقطه مانند $A'$ از همان صفحه را نظیر کند.

$$\begin{cases} T: \overset{\text{صفحه}}{P} \longrightarrow \overset{\text{صفحه}}{P} \\ T(A) = A' \end{cases}$$

**توجه:** عبارت $T(A)=A'$ یعنی $A'$ تصویر نقطه $A$ تحت تبدیل $T$ است.

همچنین شکلی که از تبدیل شکل اولیه حاصل می‌شود را تصویر آن می‌نامند.

**تبدیل طولپا (تبدیل ایزومتری):** هر تبدیلی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند تبدیل طولپا یا ایزومتری نامیده می‌شود.

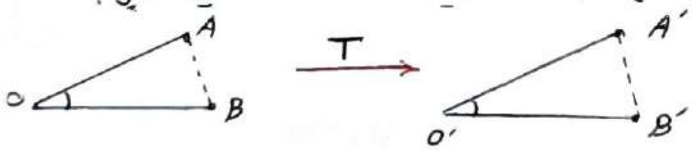
به عبارت دیگر اگر $A'$ تصویر $A$ تحت تبدیل $T$ باشد $T(A)=A'$

و $B'$ 〃 〃 〃 〃 $B$ 〃 $T(B)=B'$

$$AB = A'B' \xleftarrow{T \text{ ایزومتری باشد}}$$

**قضیه:** هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند (یعنی اندازه تصویر زاویه و خود زاویه مساوی است)

**اثبات:** فرض کنیم $T$ تبدیل طولپا باشد و زاویه $A'\hat{O'}B'$ تصویر $A\hat{O}B$ تحت این تبدیل باشد.



$$\begin{matrix} T(A) = A' \\ T(O) = O' \\ T(B) = B' \end{matrix} \xrightarrow[\text{طول پاره خط ثابت می‌ماند}]{T \text{ طولپا است}} \left.\begin{matrix} AO = A'O' \\ BO = B'O' \\ AB = A'B' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{A'O'B'} \Rightarrow \hat{O} = \hat{O'}$$

مثال: نقاط $A(3,3)$ و $B(1,-1)$ و $C(-2,2)$ رأس‌های یک مثلث هستند

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+2,-y)$ رسم کنید.

ب) آیا این تبدیل طولپا است؟ چرا؟

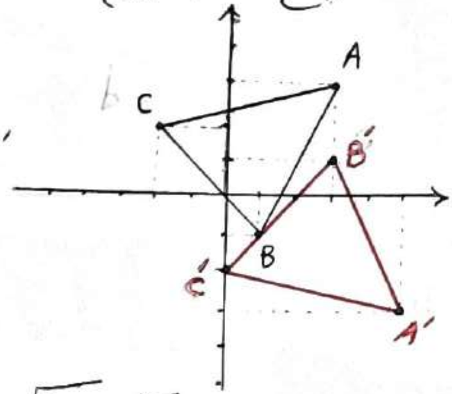
پاسخ ← الف)

$$T(x,y)=(x+2,-y)$$

$$T(A)=A' \rightsquigarrow T(3,3)=(3+2,-3)=(5,-3)\ A'$$

$$T(B)=B' \rightsquigarrow T(1,-1)=(1+2,-(-1))=(3,1)\ B'$$

$$T(C)=C' \longrightarrow T(-2,2)=(-2+2,-2)=(0,-2)\ C'$$




$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

ب)

$$A'B'=\sqrt{(3-5)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20} \longrightarrow AB=A'B'$$

به طور مشابه $AC=A'C'$ و $BC=B'C'$ یعنی تبدیل $T$ طول پاره خط را حفظ می‌کند لذا طولپا است.

---

توجه: تبدیل یافته هر خط راست یک خط راست است. لذا برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط کافیست تبدیل یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا کرد و تصویر خط را رسم کرد و حتی معادله تصویر را بدست آورد.

---

مثال: تصویر خط $x+y=2$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y+2)$ رسم کنید و معادله تصویر را بدست آورید.

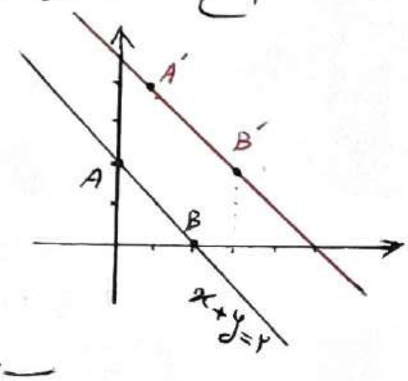
پاسخ ← دو نقطه دلخواه از خط را بدست می‌آوریم.

$$x+y=2 \longrightarrow x=0 \rightsquigarrow y=2 \longrightarrow A(0,2)$$

$$y=0 \rightsquigarrow x=2 \longrightarrow B(2,0)$$

$$T(A)=A' \longrightarrow T(0,2)=(0+1,2+2)=(1,4)\ A'$$

$$T(B)=B' \longrightarrow T(2,0)=(2+1,0+2)=(3,2)\ B'$$




ب) برای نوشتن معادله تصویر کافیست شیب آن را بدست آوریم.

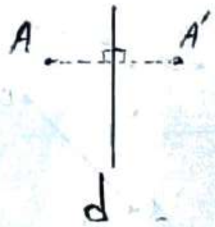
$$m_{A'B'}=\frac{2-4}{3-1}=\frac{-2}{2}=-1$$

معادله تصویر خط

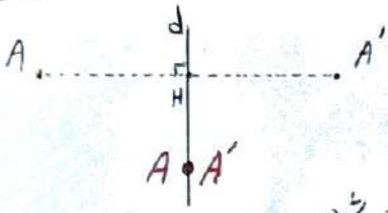
$$y-y_{A'}=m_{A'B'}(x-x_{A'}) \Rightarrow y-4=-1(x-1) \longrightarrow \boxed{y=-x+5}$$

**نقطه ثابت تبدیل:** نقطه‌ای که تصویر آن بر خودش منطبق باشد نقطه ثابت تبدیل می‌نامیم.

**بازتاب:** بازتاب نسبت به خط d تبدیلی است که در آن تصویر نقطه‌ای مانند $A$ نقطه $A'$ است به طوری که d عمود منصف پاره خط $AA'$ خواهد بود.
(d را محور تقارن بازتاب می‌گویند)




برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل $A$ نسبت به خط d کافی است از نقطه $A$ به خط داده شده عمود کنیم سپس از پای عمود به اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا $A'$ بدست آید.

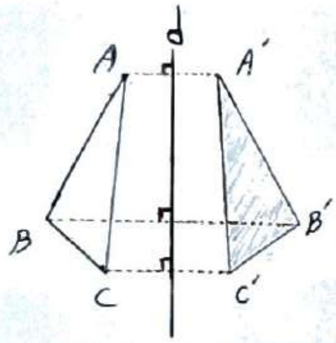



**توجه:** اگر نقطه‌ای روی محور تقارن بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود.

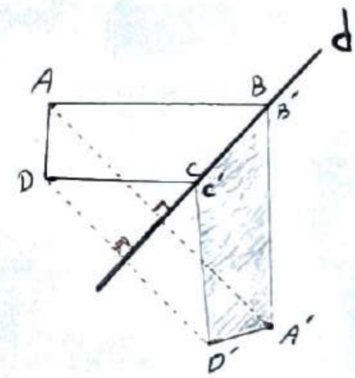
**نتیجه:** بازتاب نسبت به خط بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد. که همگی روی محور بازتاب قرار دارند.

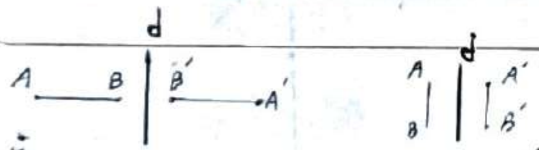
**مثال:** بازتاب شکلهای زیر را نسبت به خط داده شده رسم کنید.

الف)




ب)




**ویژگیهای بازتاب:**

۱) بازتاب شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند. (مگر اینکه خط موازی محور بازتاب یا عمود بر محور بازتاب باشد)

۲) بازتاب نسبت به خط ایزومتری (طولپا) است یعنی اندازه پاره خطها را تغییر نمی‌دهد و شکل و تصویرش همنهشت اند.

۳) بازتاب نسبت به خط، اندازه زاویه را تغییر نمی‌دهد، اما جهت زاویه و جهت شکل را تغییر می‌دهد.

۴) بازتاب نسبت به خط دارای بیشمار نقطه ثابت تبدیل است که همگی روی محور بازتاب قرار دارند.

۵) بازتاب محیط و مساحت شکل را حفظ می‌کند

تمرین: جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A'$ بازتاب نقطهٔ $A$ نسبت به خط $d$ باشد آنگاه $d$ عمود منصف پاره خط $AA'$ است.

خط $d$ محور تقارن بازتاب نامیده می‌شود.

اگر بازتاب نقطهٔ $B$ بر خودش منطبق باشد آنگاه نقطهٔ $B$ روی محور تقارن قرار دارد و $B$ به نقطهٔ ثابت تبدیل می‌گویند.

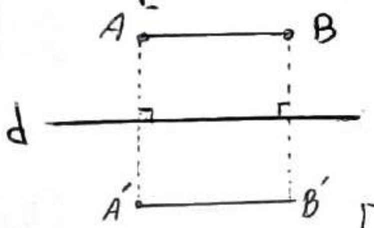
---

قضیه: ثابت کنید بازتاب یک تبدیل طولپا است. (یعنی اندازه هر پاره خط و تصویرش در تبدیل بازتاب برابرند)

حکم: $AB = A'B'$

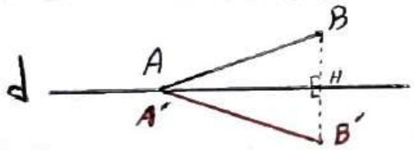
اثبات: حالتهای مختلف یک پاره خط نسبت به محور بازتاب را در نظر می‌گیریم.

الف) $\underset{\text{خط}}{AB} \parallel \underset{\text{محور تقارن}}{d}$



در این حالت چون دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند، لذا چهارضلعی $ABB'A'$ مستطیل می‌باشد و از آنجا واضح است که $\boxed{AB = A'B'}$

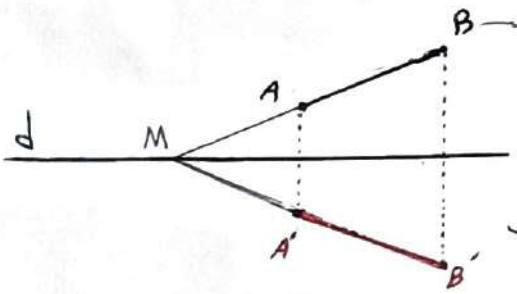
ب) $AB$ و $d$ متقاطع به صورت مقابل باشد



$$\left.\begin{array}{l} BH = B'H \\ \hat{H} = \hat{H'} = 90 \\ AH = A'H \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{B}H \cong A'\overset{\triangle}{B'}H \rightsquigarrow \boxed{AB = A'B'}$$

روش دوم: چون $d$ محور تقارن بازتاب است پس عمود منصف پاره خط $BB'$ است لذا هر نقطه مانند $A=A'$ روی $d$ باشد از دو سر پاره خط به یک فاصله است لذا $AB = AB'$

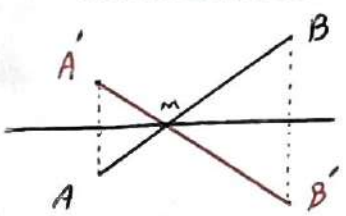
ج) $AB$ و $d$ نه موازی و نه متقاطع باشند:



$AB$ را امتداد می‌دهیم تا خط $d$ را در $M$ قطع کند

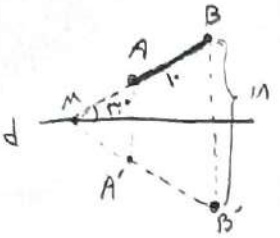
$$\left.\begin{array}{l} MB = MB' \ \text{طبق ب} \\ MA = MA' \end{array}\right. \xrightarrow{\text{تفریق طرفین}} \underbrace{MB - MA}_{AB} = \underbrace{MB' - MA'}_{A'B'} \rightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

د) $AB$ و $d$ متقاطع به صورت مقابل باشند:



$$\left.\begin{array}{l} AM = A'M \ \text{طبق ب} \\ BM = B'M \end{array}\right. \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{AM + BM}_{AB} = \underbrace{A'M + B'M}_{A'B'} \rightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

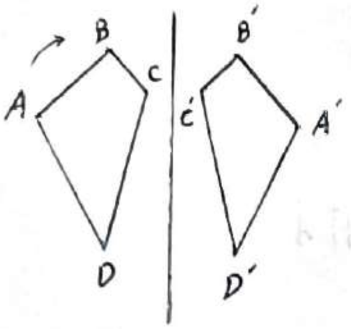
تست: فرض کنید پاره‌خط $AB$ به طول ۱۰ با محور تقارن بازتاب (d) نه موازی و نه متقاطع باشد و امتداد پاره خط $AB$ (از طرف $A$) خط d را در نقطه M با زاویه ۳۰ درجه قطع کند اگر $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $BB'=18$ باشد نسبت $\frac{MA}{MB'}$ کدام است.




۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{1}{2}$

---

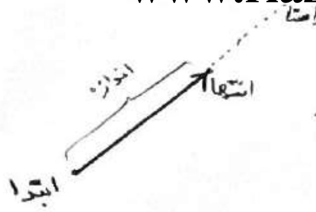
مثال: در شکل مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم جهت حرکت موافق حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط (تصویر شکل) چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب جهت شکل را حفظ می‌کند؟




پاسخ) الف) جهت حرکت در تصویر شکل تحت بازتاب خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.
ب) خیر نتیجه می‌گیریم بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

---

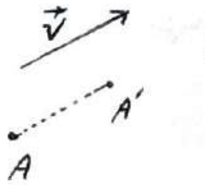
کار در کلاس صفحه ۴۶ در کتاب کامل شود.




**یادآوری:** یک بردار دارای ابتدا، انتها، اندازه و راستا می‌باشد

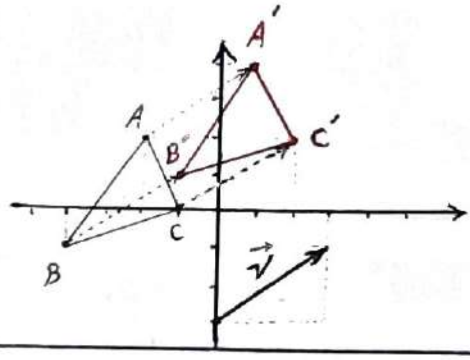
**دو بردار مساوی:** دو بردار که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند دو بردار مساوی می‌باشند

* برای انتقال دادن یک شکل کافیست تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم
مثلاً نقطه $A$ را به اندازه مختصات بردار انتقال جابجا کنیم تصویر آن یعنی $A'$ بدست می‌آید.
در واقع اگر $A'$ تصویر $A$ به کمک بردار انتقال $\vec{v}$ باشد آنگاه: $\underbrace{\overrightarrow{AA'}}_{\text{بردار}} = \underbrace{\vec{v}}_{\text{بردار}}$




**تعریف انتقال:** انتقال تحت بردار $\vec{v}$ تبدیلی است که در آن اگر $A'$ تصویر $A$ بوسیله آن تبدیل باشد.
آنگاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ (همچنین $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{v}$)

(به عبارت دیگر پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش در انتقال وصل می‌کند با بردار انتقال مساوی و موازی است)




**مثال:** مثلث $ABC$ به مختصات رئوس $A(-2,2)$ ، $B(-4,-1)$ ، $C(-1,0)$
را به وسیله بردار انتقال $\vec{v}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ انتقال دهید و تصویر
آنرا در صفحه مختصات رسم کنید.

$$\overrightarrow{AA'} \overset{\parallel}{=} \overrightarrow{BB'} \overset{\parallel}{=} \overrightarrow{CC'} \overset{\parallel}{=} \vec{v}$$

**ویژگیهای انتقال:**

۱- انتقال ایزومتری (طولپا) است و انتقال یافته هر شکل با خودش همنهشت است.

۲- انتقال شیب خط را حفظ می‌کند، و جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳- انتقال اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۴- در انتقال بردارهائی که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند با بردار انتقال موازی و مساوی اند.

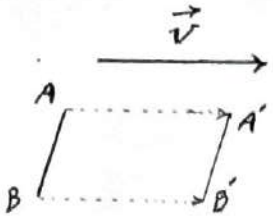
**نکته:** ضابطه انتقال به صورت $T(x,y) = (x+h, y+k)$ است که در آن $\vec{v} = \begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$

**مثال:** انتقال یافته نقطه $A(1,2)$ نقطه $A'(5,-1)$ است. بردار انتقال کدام است؟

$T(A) = A'$

$T(1,2) = (5,-1) \longrightarrow (1+h, 2+k) = (5,-1) \begin{cases} 1+h=5 \longrightarrow h=4 \\ 2+k=-1 \longrightarrow k=-3 \end{cases} \longrightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$

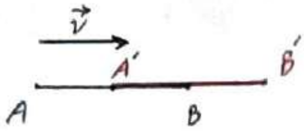
**قضیه** : ثابت کنید انتقال یک تبدیل طولپا است.



حکم : $AB = A'B'$

اثبات : حالتهای مختلف برای پاره‌خط $AB$ و بردار انتقال $\vec{v}$ در نظر می‌گیریم.

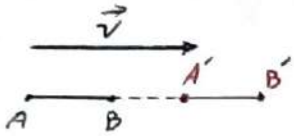
الف) اگر $AB \nparallel \vec{v}$ در این صورت در چهارضلعی $AA'B'B$ داریم: $AA'$ و $BB'$ با $\vec{v}$ مساوی و موازیند بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه $\boxed{AB = A'B'}$



ب) اگر $AB \parallel \vec{v}$ و $AB > \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + \boxed{A'B} \\ A'B' = \boxed{A'B} + BB' \end{array}\right\} \longrightarrow AB = A'B'$$

طبق انتقال $AA' = BB' = \vec{v}$



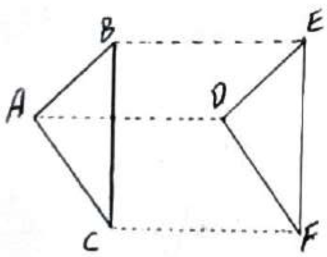
پ) اگر $\vec{AB} \parallel \vec{v}$ ، $\vec{AB} < \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' - \boxed{BA'} \\ A'B' = BB' - \boxed{BA'} \\ AA' = BB' = \vec{v} \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = A'B'$$

طبق انتقال

---

**مثال**: در شکل مقابل، پاره‌خط‌های $AD$ و $BE$ و $CF$ مساوی و موازیند، ثابت کنید $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$



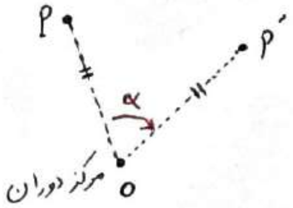
پاسخ: چون سه بردار $AD$ ، $BE$ و $CF$ موازی و مساویند لذا تحت یک بردار انتقال مانند بردار $\vec{AD}$ داریم:

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{\text{انتقال}} D \\ B \rightsquigarrow E \\ C \rightsquigarrow F \end{array} \xrightarrow[\text{است}]{\text{انتقال ایزومتری}} \begin{array}{l} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{array} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$

---

**نکته** : در انتقال تحت بردار $\vec{v}$ هیچ نقطه ثابت تبدیل وجود ندارد.

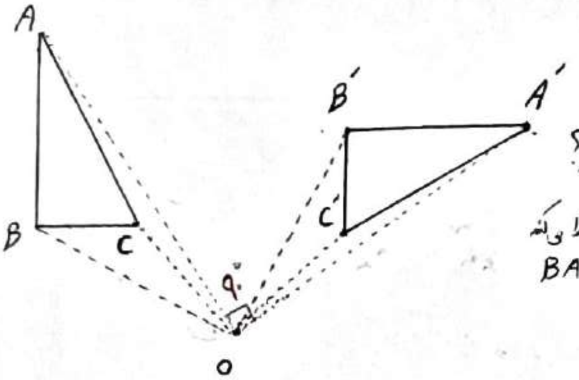
## دوران:




در سالهای گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α، کافیست هر نقطه از شکل مثل نقطه P را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم سپس در جهت خواسته شده به کمک OP زاویه‌ای برابر α رسم و روی ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازه OP جدا می‌کنیم، تا نقطه P' بدست آید.

---

مثال: مثلث ABC مقابل را حول مرکز O و به اندازه ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده و تصویر آنرا رسم کنید.




الف) آیا این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟ جهت شکل را چطور؟

خیر - بله اندازه را حفظ می‌کند

به جهت شکل را حفظ می‌کند

$BAC \xrightarrow{?} B'A'C'$

ب) آیا این تبدیل شیب پاره خط‌ها را حفظ می‌کند؟

خیر

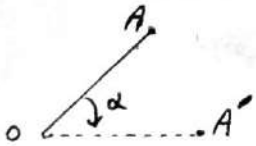
پ) آیا می‌توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

دوران‌های ۰° و ۱۸۰° و ۳۶۰°

---

تعریف دوران: دوران R، به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی از صفحه است که در آن A' تصویر نقطه A (در دوران به مرکز O و زاویه α) است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند

۱) $OA = OA'$ ۲) $A\hat{O}A' = \alpha$




---

نکته: مرکز دوران نقطه ثابت دوران است. (یعنی مرکز دوران تنها نقطه‌ای است که تصویرش تحت یک دوران خودش است)

---

ویژگیهای دوران:

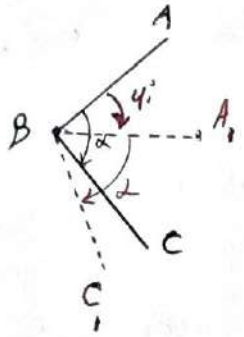
۱- دوران شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند.

۲- دوران ایزومتری (طولپا) است و دوران یافته شکل با خودش همنهشت است.

۳- دوران جهت شکل را تغییر نمی‌دهد شکل و تصویر یا شکل و تصویر

۴- دوران اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

**مثال:** زاویه $A\hat{B}C=\alpha$ تحت دوران $60^\circ$ درجهت A به C حول B به زاویه $A_1\hat{B}C_1$ تبدیل می‌شود. زاویه $A\hat{B}C_1$ برحسب $\alpha$ کدام است؟




پاسخ ← چون $A\hat{B}C=\alpha$ ، تحت دوران $60^\circ$ کل این زاویه حول نقطه B دوران یافته و زاویه $A_1\hat{B}C_1=\alpha$

$$A\hat{B}C_1 = A\hat{B}A_1 + A_1\hat{B}C_1 = 60+\alpha$$

---

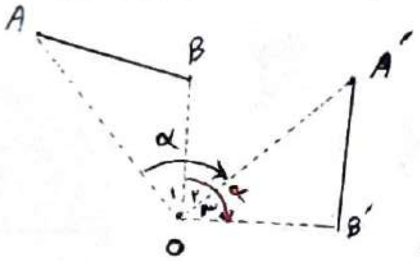
کار در کلاس صفحه ۴۳ حل و بررسی شود.

---

**قضیه:** ثابت کنید دوران طولپا است. (به عبارت دیگر اگر $A'B'$ تصویر $AB$ تحت دوران به مرکز O و زاویه $\alpha$ باشد آنگاه $AB=A'B'$)

حکم: $AB=A'B'$

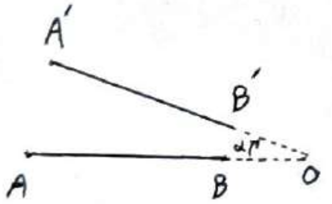
اثبات: الف) حالتی را درنظر گیریم که مرکز دوران بر پاره خط $AB$ و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.




با توجه به شکل $\alpha = \hat{O}_1+\hat{O}_2 = \hat{O}_2+\hat{O}_3 \rightsquigarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1=\hat{O}_3 \\ \text{تعریف دوران}: OA=OA' \\ OB=OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \rightsquigarrow \boxed{AB=A'B'}$$

ب) حالتی را درنظر گیریم که O روی امتداد $AB$ باشد.



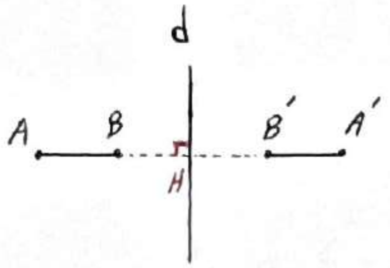

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ \text{طبق دوران}\ OA=OA' \\ OB=OB' \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{AB=A'B'}$$

---

تمرینات صفحه ۴۴ کتاب درسی حل شوند.

# پاسخ تمرینات صفحه ۴۴ کتاب درسی

۱-




$AH = A'H$ تعریف بازتاب

$BH = B'H$

$\xrightarrow{\text{تفریق طرفین}} AH - BH = A'H - B'H$

$\Longrightarrow AB = A'B'$

---

۲- در جزوه به عنوان مثال حل شده.

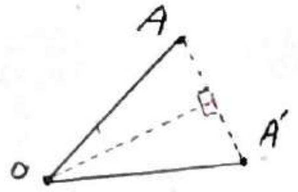
---

۳- الف) چون $A'$ دوران یافته $A$ به مرکز $O$ است پس $OA = OA'$

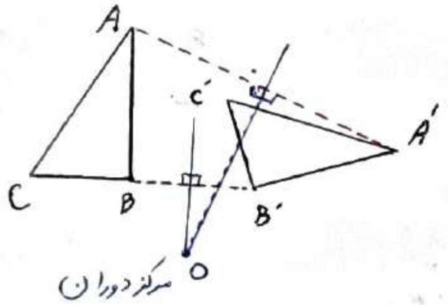
لذا مثلث $O\hat{A}A'$ متساوی‌الساقین به قاعده $AA'$ است.

و می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین عمود منصف قاعده از رأس مثلث می‌گذرد.

بنابراین عمود منصف $AA'$ از نقطه $O$ می‌گذرد.

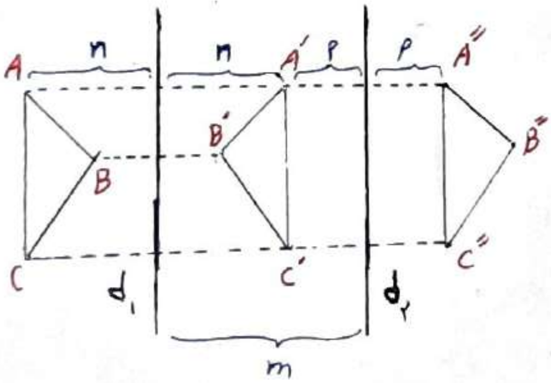



ب) چون $A'B'C'$ دوران یافته $ABC$ است طبق قسمت الف محل تقاطع عمود منصف‌ها $AA'$ و $BB'$ مرکز دوران است.




---

۴




الف) ⟵

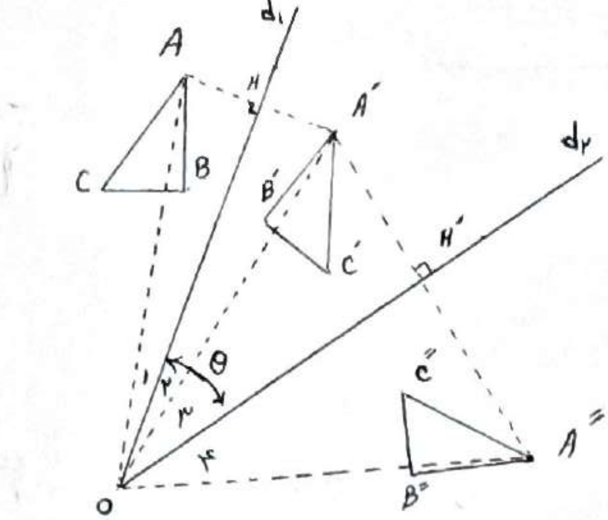
$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' = n + n + P + P = 2(n+P) = 2m$$

ب) به طور مشابه $BB'' = CC'' = 2m$

پ) با انتقال توسط برداری به طول $2m$ و در راستای عمود بر $d_1$ و $d_2$ و در جهت از $d_1$ به $d_2$

نتیجه می‌گیریم: ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است (به طوری که بردار انتقال دو برابر فاصله بین دو خط است)

۵-



الف) می‌دانیم بازتاب اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند

پس $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ و $\hat{O}_3=\hat{O}_4$

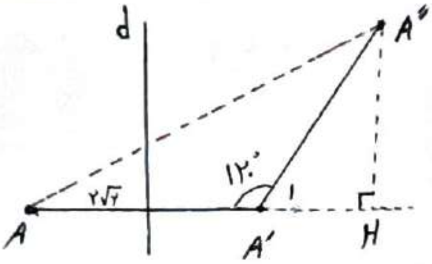
$$A\hat{O}A''=O_1+O_2+O_3+O_4=2(O_2+O_3)=2\theta$$

ب) به طور مشابه $B\hat{O}B''=C\hat{O}C''=2\theta$

پ) با دورانی به مرکز O (محل برخورد دو محور بازتاب $d_1$ و $d_2$) و زاویه‌ای به اندازهٔ دو برابر زاویه بین دو خط (یعنی $2\theta$) می‌توان مثلث $\hat{A''B''C''}$ را تصویر $\hat{ABC}$ دانست.

نتیجه می‌گیریم: ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع داشته باشند یک دوران است. (که مرکز این دوران محل برخورد محورهای بازتاب و زاویه دوران ۲ برابر زاویه بین دو محور تقارن است)

۶-



$AA'=4\sqrt{6}$ چون $AH=2\sqrt{6}$ فرض

طبق دوران: $A'A''=AA'=4\sqrt{6}$

در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A'A''H}$ $\rightsquigarrow$ $A'_1=180-120=60°$

$\rightsquigarrow A''=30°$

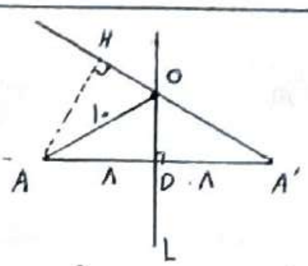
زیرا ضلع مقابل به ۳۰ نصف وتر است: $A'H=\frac{1}{2}A'A''=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$

از طرفی $\sin 60=\frac{A''H}{A'A''}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{A''H}{4\sqrt{6}}\rightsquigarrow A''H=2\sqrt{18}$

رابطه فیثاغورس در $\hat{AA''H}$: $AA''^2=AH^2+A''H^2=(6\sqrt{6})^2+(2\sqrt{18})^2$

$$AA''^2=216+72=288 \xrightarrow{\text{جذر}} AA''=\underset{144\times 2}{\sqrt{288}}=12\sqrt{2}$$

۷-



چون بازتاب طولپاست $OA'=OA=10$

رابطه فیثاغورس در $\hat{OAD}$: $OA^2=AD^2+OD^2\rightsquigarrow 10^2=8^2+OD^2\rightsquigarrow OD^2=100-64=36$ $\rightarrow\boxed{OD=6}$

(محاسبه مساحت $\hat{OAA'}$ به دو طریق):

$$S_{O\hat{A}A'}=\frac{1}{2}OD\times AA'=\frac{1}{2}(6\times 16)=48$$

$$S_{O\hat{A}A'}=\frac{1}{2}AH\times OA'=\frac{1}{2}AH\times 10=5AH$$

$$\Rightarrow 5AH=48\rightsquigarrow\boxed{AH=\frac{48}{5}}$$

**تجانس :** یک تبدیل هندسی در صفحه است که تحت آن شکلهای متشابه ایجاد می‌شود.

در تجانس ابعاد شکل به یک نسبت ثابت بزرگ یا کوچک می‌شوند، این نسبت ثابت را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامند و با نماد $K$ نشان می‌دهند.

---

**تعریف دقیق تجانس :** تجانس به مرکز $O$ و نسبت $K$ تبدیلی است که در آن $M'$ مجانس $M$ است هرگاه:

۱) نقاط $O$ ، $M$ و $M'$ روی یک امتداد باشند

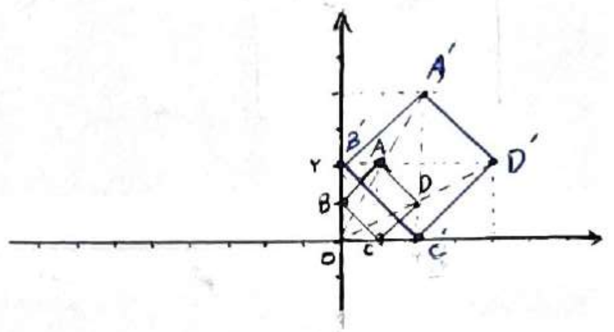
۲) $OM' = |K| \cdot OM$

---

**ضابطه تبدیل تجانس :** تجانس به مرکز $O(0,0)$ و نسبت $K$ به صورت $D(x,y) = (Kx, Ky)$ می‌باشد.

---

**مثال :** نقاط $A(1,2)$ ، $B(0,1)$ ، $C(1,0)$ و $D(2,1)$ رأسهای یک مربع هستند مربع $ABCD$ و تصویر تجانس آن را با در نظر گرفتن $O(0,0)$ به عنوان مرکز تجانس و $K=2$ نسبت تجانس رسم کنید.



$A(1,2) \xrightarrow{K=2} A'(2,4)$

$B(0,1) \xrightarrow{K=2} B'(0,2)$

$C(1,0) \xrightarrow{\quad} C'(2,0)$

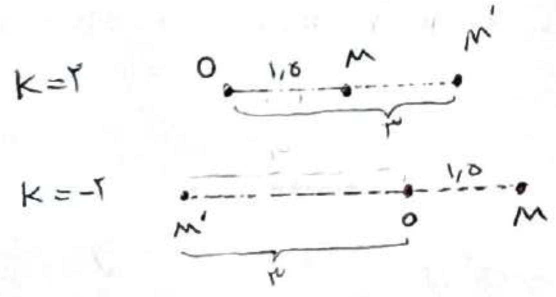
$D(2,1) \xrightarrow{\quad} D'(4,2)$

**توجه :** در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت $K$ اگر $M'(x',y')$ تصویر $M(x,y)$ باشد آنگاه :

$x' = kx$
$y' = ky$ $\rightsquigarrow M'(x',y') = (kx, ky)$

---

**نکته :** هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز $O$ و نسبت $K$ ، تصویر نقطه‌ای مثل $M$ را پیدا کنیم، ابتدا از $M$ به $O$ وصل کرده سپس با توجه به رابطه $OM' = K \cdot OM$ و علامت $K$ ، نقطه $M'$ در جهت $OM$ یا خلاف جهت آن مشخص می‌شود.



$OM' = 2OM = 2 \times 1{,}5 = 3$

$OM' = |-2| OM = +2 \times 1{,}5 = +3$

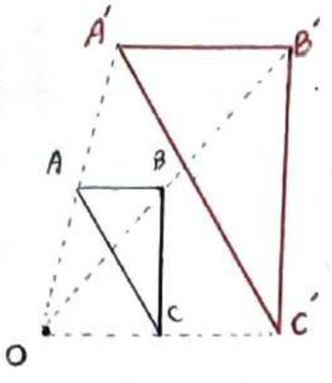
**نکته :** اگر $K$ مثبت باشد $M$ و $M'$ در یک طرف $O$ قرار می‌گیرند.
اگر $K$ منفی باشد $M$ و $M'$ در دو طرف $O$ قرار می‌گیرند.

نکته: اگر $M'$ مجانس $M$ در تجانس به مرکز $o$ و نسبت $k$ باشد آنگاه $M$ نیز مجانس $M'$ در تجانس به مرکز $o$ و نسبت $\frac{1}{k}$ است، زیرا

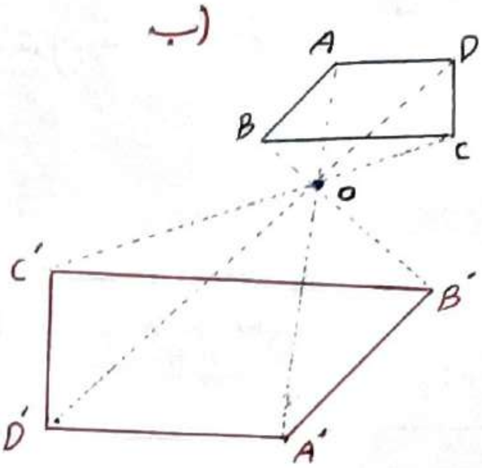
$$OM' = k.OM \rightsquigarrow OM = \frac{1}{k}.OM'$$

مثال: مجانس شکل‌های زیر را تحت تجانس به مرکز $o$ و نسبت $k$ رسم کنید.

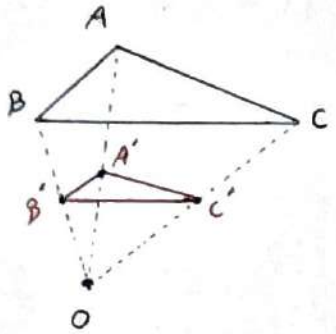
الف) $K=2$



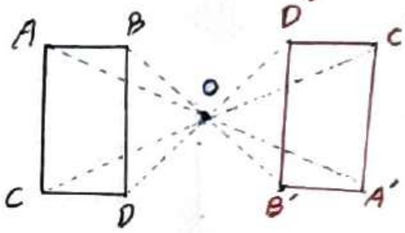

ب) $K=-2$




ج) $K=\frac{1}{2}$




د) $K=-1$




نکته: (یعنی عدد مثبت باشد)

۱- اگر در تجانس $k>0$ باشد آنرا تجانس مستقیم می‌نامند. (الف و ج مثال قبل)

۲- اگر در تجانس $k<0$ باشد آنرا تجانس معکوس می‌نامند. (ب و د مثال قبل)

۳- اگر $|k|<1$ باشد تصویر شکل کوچکتر می‌شود و آنرا انقباض می‌نامیم. (ج در مثال قبل)

۴- اگر $|k|>1$ باشد تصویر شکل بزرگتر می‌شود و آنرا انبساط می‌نامیم. (الف و ب مثال قبل)

۵- اگر $|k|=1$ باشد تجانس طولپا است. (د مثال قبل)

($k=1$ یا $-1$)

۶- خطوطی که هر نقطه را به تصویر مجانسش وصل می‌کند در مرکز تجانس همرس می‌باشند.

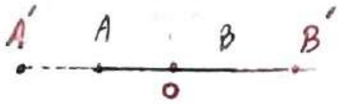
۷- تجانس جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۸- تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۹- تجانس تبدیل طولپا نمی‌باشد.

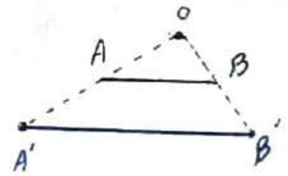
۱۰- تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

**قضیه:** ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند ($k>0$ در نظر بگیرید)




**اثبات:** تجانس $D$ به مرکز $O$ و نسبت $k>0$ و خط $AB$ را در دو حالت در نظر می‌گیریم.

نقطه $O$ روی $AB$ باشد. در اینصورت اگر $A'$ و $B'$ مجانس‌های $A$ و $B$ باشند روی خط $AB$ قرار می‌گیرند لذا $A'B'$ روی $AB$ واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.



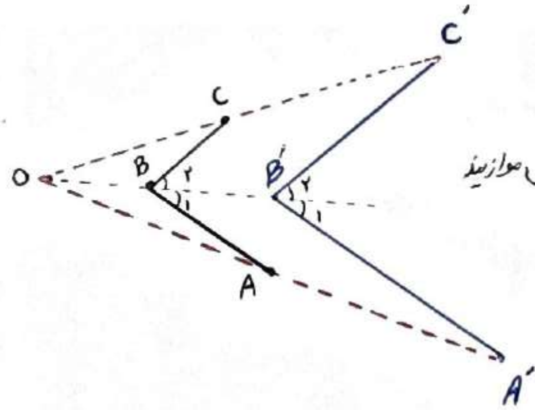

نقطه $O$ روی $AB$ نباشد.

در این صورت اگر $A'$، $B'$ مجانس‌های $A$ و $B$ باشند طبق تعریف تجانس داریم:

$$\begin{matrix} OA' = k \cdot OA \\ OB' = k \cdot OB \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \rightsquigarrow$$

شیب تغییر نمی‌کند

---




**قضیه:** ثابت کنید تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

**اثبات:** می‌دانیم تجانس شیب خط را حفظ می‌کند لذا خط و تصویر مجانسش موازیند

$$AB \parallel A'B' ,\ \overset{\text{مورب}}{OB'} \rightsquigarrow \hat{B}_1 = \hat{B}'_1$$
$$BC \parallel B'C' ,\ \overset{\text{مورب}}{OB'} \rightsquigarrow \hat{B}_2 = \hat{B}'_2$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2 \rightsquigarrow \hat{B} = \hat{B'}$$

یا

$$A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$$

یعنی تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

---

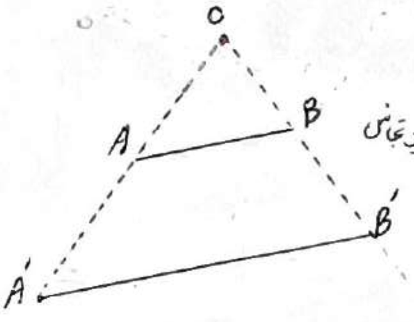
## کار در کلاس صفحه ۴۹

۱- الف) فرض کنیم پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط $AB$ در تجانس به مرکز $O$ و نسبت $k$ باشد، نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = k$

(به عبارت دیگر $A'B' = k.AB$ یعنی در تجانس طول تصویر پاره‌خط $k$ برابر طول پاره‌خط می‌شود)

(برای اثبات حالتی را در نظر می‌گیریم که $O$ خارج خط $AB$ باشد)

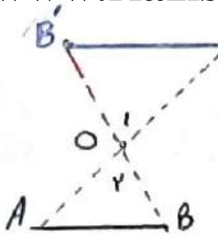
پاسخ ← اگر $k>0$ یعنی تجانس مستقیم باشد




طبق تعریف تجانس

$$\left.\begin{matrix} OA' = kOA \\ OB' = k \cdot OB \end{matrix}\right\} \longrightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B'$$

$$\xrightarrow{\text{خود قضیه تالس}} \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \longrightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$




اگر $K<0$ باشد یعنی تجانس معکوس باشد ←

$OA' = K.OA$ , $OB' = K.OB$ طبق تعریف تجانس $\rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل به راس

به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین $\rightarrow \triangle OAB \underset{\text{شبیه}}{\sim} \triangle OA'B' \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K$

$\frac{A'B'}{AB} = K$

نتیجه: در تجانس به مرکز O و نسبت K طول پاره خط، K برابر می‌شود یعنی $A'B' = K.AB$

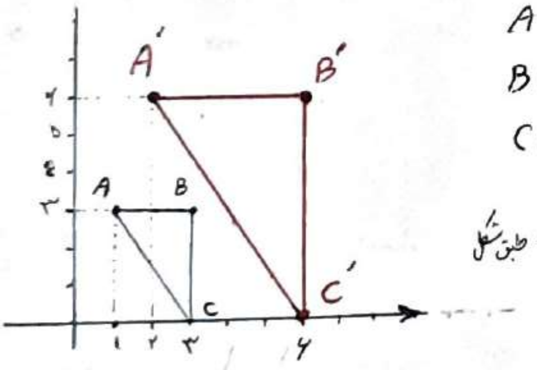
بنابراین محیط با ضریب K تغییر می‌کند. $P' = K.P$

مساحت با ضریب $K^2$ تغییر می‌کند. $S' = K^2.S$

در واقع برقراری خواص بالا به این دلیل است که تصویر هر شکل در یک تجانس با خود شکل متشابه است.

مثال: اگر $A(1,3)$ و $B(3,3)$ و $C(3,0)$ رئوس یک مثلث باشند، مثلث و تصویر مجانس آنرا تحت تجانس مرکز $O(0,0)$ و نسبت $k=2$ رسم کنید. طول پاره خط‌ها و محیط‌ها و مساحت‌ها را باهم مقایسه کنید.

پاسخ ←




$A(1,3) \xrightarrow{k=2} A'(2,6)$

$B(3,3) \rightarrow B'(6,6)$

$C(3,0) \rightarrow C'(6,0)$

طبق شکل $AB=2$ , $BC=3$ $\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}$ $AC=\sqrt{13}$

$A'B'=4$ , $B'C'=6$ $\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}$ $A'C'=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

بنابراین: $\begin{cases} A'B' = 2AB \\ A'C' = 2AC \\ B'C' = 2BC \end{cases}$

$\triangle ABC$ محیط: $P = 2+3+\sqrt{13} = 5+\sqrt{13}$

$\triangle A'B'C'$ محیط $P' = 4+6+2\sqrt{13} = 10+2\sqrt{13} = 2(5+\sqrt{13})$ $\rightarrow P' = 2P$

$\triangle ABC$ مساحت $S = \frac{1}{2}(3\times 2) = 3$ $\rightarrow S' = 2^2 \times S$

$\triangle A'B'C'$ مساحت $S' = \frac{1}{2}(6\times 4) = 12 = 2^2\times 3$

تست: مجانس شکل (1) با مساحت S به مرکز O و نسبت تجانس $k=5$ شکل (2) با مساحت $S'$ است و مجانس شکل (2) نیز به مرکز O و نسبت $k=\frac{2}{7}$ شکل (3) با مساحت $S''$ است. $S''$ چند برابر S است؟

$(\frac{35}{2})^2$ $\quad$ $\frac{35}{2}$ $\quad$ $\frac{100}{49}$ $\quad$ $\frac{10}{7}$

کار در کلاس ص ۴۹

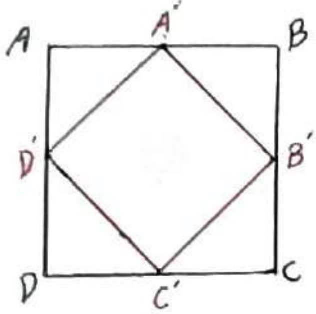
۱- ب) اگر n ضلعی $A'_1A'_2\cdots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ به مرکز O و نسبت k باشد نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه اند.

پاسخ ـــــ

$$\left.\begin{array}{l} OA'_1=k.OA_1 \\ OA'_2=k.OA_2 \\ \vdots \\ OA'_n=k.OA_n \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{OA'_1}{OA_1}=\frac{OA'_2}{OA_2}=\cdots=\frac{OA'_n}{OA_n}=k$$

بنابراین همه اضلاع نظیر متناسبند و لذا طبق تعریف تشابه این دو شکل متشابه اند.

۲- با توجه به ویژگی های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



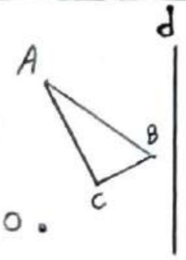

پاسخ ـــــ کافی است دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل کنیم و امتداد دهیم این خطوط همرس نشوند.
بنابراین مرکز تجانس وجود ندارد و دو شکل متجانس نمی باشند.

نتیجه: دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند، مگر اینکه اضلاع آنها، نظیر به نظیر موازی باشند

تست: نقاط (۵،۳) (۱،۷) (۱-،۱-) سه رأس از مثلث قائم الزاویه اند. مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k=\frac{1}{2}$ کدام است. (کنکور سراسری)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

مثال: در شکل مقابل ابتدا بازتاب مثلث ABC را نسبت به خط d پیدا کرده، سپس مجانس شکل حاصل را نسبت به نقطه O با ضریب تجانس $k=2$ می یابیم، ضریب تجانس شکل نهایی در صورت متجانس بودن نسبت به مثلث ABC با مرکز تجانس نقطه O کدام است؟




۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۴- ۴) متجانس نیستند.

پاسخ ـــــ گزینه ۴

زیرا بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d، مثلثی در خلاف جهت مثلث اولیه است، پس مجانس این مثلث جدید هم در خلاف جهت مثلث ABC می باشد. درحالیکه در تجانس جهت شکل تغییر نمی کند.

تبدیل همانی: تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر کند تبدیل همانی نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر تبدیل T را همانی گوییم هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A)=A$

توجه: معمولاً تبدیلهای همانی را با $I$ نشان می‌دهند؛ پس $I(A)=A$ .

---

نکته: تبدیل همانی طولپا است؛ زیرا تصویر هر پاره خط بر خودش منطبق است به عبارتی

$$\begin{aligned} A' &= I(A)=A \\ B' &= I(B)=B \end{aligned} \Rightarrow A'B'=AB$$

---

سؤال: آیا بازتاب می‌تواند همانی باشد؟

پاسخ ← بازتاب هیچگاه تبدیل همانی نیست

زیرا فقط تصویر نقاطی که روی محور بازتاب قرار روی خود آن نقاط قرار دارد

و تصویر نقاط دیگر مثل A که روی محور قرار ندارند نقاط $A'$ می‌باشد که در طرف دیگر محور بازتاب قرار دارد

---

سؤال ۲: در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

پاسخ ← اگر طول بردار انتقال صفر باشد انتقال همانی است زیرا تصویر هر نقطه برخودش منطبق است.

اگر زاویه دوران برابر ۰ یا ۳۶۰ باشد دوران همانی است زیرا تصویر هر نقطه برخودش منطبق است.

اگر نسبت تجانس $K=1$ باشد تجانس همانی است. 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

---

سؤال ۳: در هر یک از تبدیلهای، انتقال غیرهمانی، دوران غیرهمانی و تجانس غیرهمانی نقاط ثابت تبدیل را در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ ← انتقال غیرهمانی نقطه ثابت تبدیل ندارد (هر نقطه باید تحت یک بردار غیرصفر در صفحه بلغزد و نمی‌تواند بر روی خودش بلغزد)

در دوران غیرهمانی فقط مرکز دوران نقطه ثابت تبدیل است.

در تجانس غیرهمانی فقط مرکز تجانس نقطه ثابت تبدیل است.

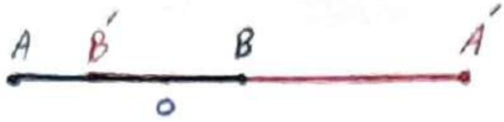
---

توجه: کار در کلاس و تمرین صفحه ۵۰ و ۵۱ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

« تمرینات صفحه ۵۱ کتاب درسی »

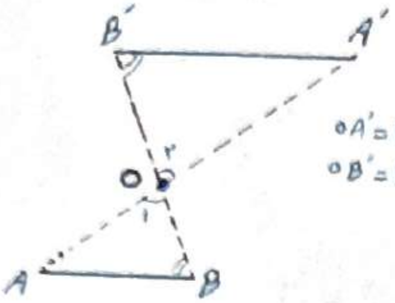
## پاسخ ۱- الف) دو حالت در نظر می‌گیریم

$K<0$




O روی پاره خط AB قرار دارد: لذا نقاط $B'$ , $A'$ مجانس‌های A و B نیز روی پاره خط AB (یا روی امتداد آن) واقع می‌شوند بنابراین $A'B'$ و AB روی هم واقع می‌شوند و شیب تغییر نمی‌کند.
(یا در امتداد هم)

$K<0$




O روی پاره خط AB قرار ندارد:

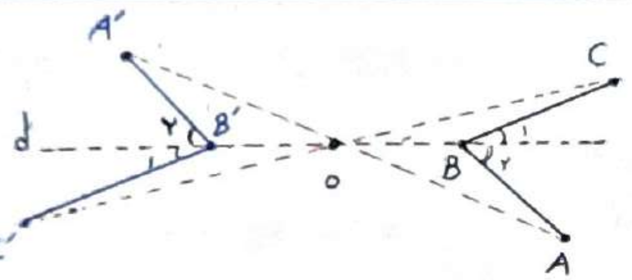
$$\left.\begin{array}{l} OA' = K \cdot OA \\ OB' = K \cdot OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K, \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آنها}} A\hat{O}B \sim A'\hat{O}B' \longrightarrow \hat{B'} = \hat{B}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی و مورب}} AB \parallel A'B' \longrightarrow \text{شیب تغییر نمی‌کند}$$

یعنی تجانس معکوس نیز شیب خط را حفظ می‌کند.

## ب)

$K<0$




(هر خط و مجانسش موازیند)

$$AB \parallel A'B' \ , \ \text{مورب } d \longrightarrow \hat{B}_2 = \hat{B'}_2 \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{B}_2} = \underbrace{\hat{B'}_1 + \hat{B'}_2}$$

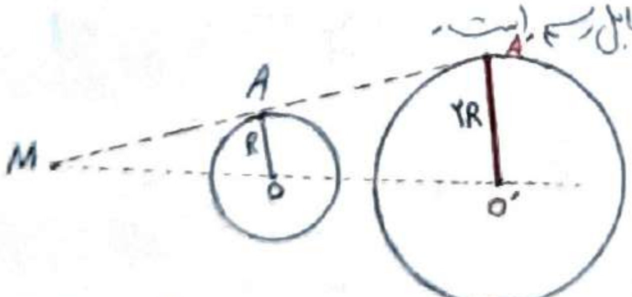
$$BC \parallel B'C' \ , \ \text{مورب } d \longrightarrow \hat{B}_1 = \hat{B'}_1$$

$$\longrightarrow \hat{B} = \hat{B'}$$

بنابراین تجانس معکوس نیز اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

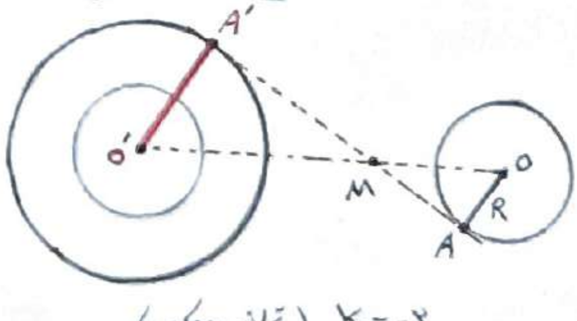
## پاسخ ۲-

کافیست تصویر مرکز دایره و یک نقطه دلخواه را تحت تجانس به مرکز M و نسبت داده شده K پیدا کنید بنابراین ترتیب مرکز و شعاع تصویر مجانس دایره مشخص شده و قابل رسم است.



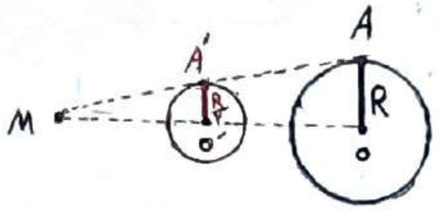

(تجانس مستقیم) $K=2$

انبساط




$K=-2$ (تجانس معکوس)

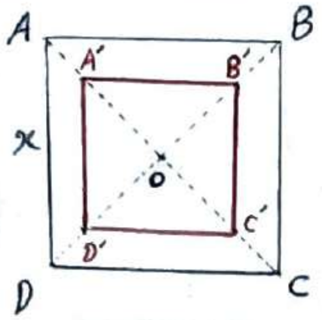
انبساط




انقباضی است

$k = \frac{1}{2}$ (تجانس مستقیم)

پاسخ ۳ ــ می‌دانیم در تجانس با ثابت k: $\boxed{S' = k^2 S}$




$S - S' = 5$ : طبق فرض

$\xrightarrow{k=\frac{2}{3}} S - \frac{4}{9}S = 5$

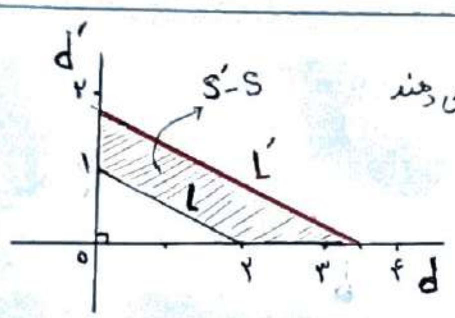
$\rightsquigarrow \frac{5}{9}S = 5 \rightsquigarrow 5S = 45 \rightarrow S = 9$

$\rightsquigarrow x^2 = 9 \rightsquigarrow \boxed{x = 3}$

ضلع مربع اولیه

$P$ (محیط ABCD) $= 4x = 4 \times 3 = 12$

پاسخ ۴: ــ تقاطع خط L و دو خط d و d' تشکیل مثلث قائم الزاویه می‌دهند




مساحت مثلث اولیه $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

مساحت تصویر مثلث (مجانس مثلث) $S' = k^2 S \rightsquigarrow S' = (\frac{7}{4})^2 \times 1 = \frac{49}{16}$

مساحت بین L و L' و خطوط d و d': $S' - S = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}$

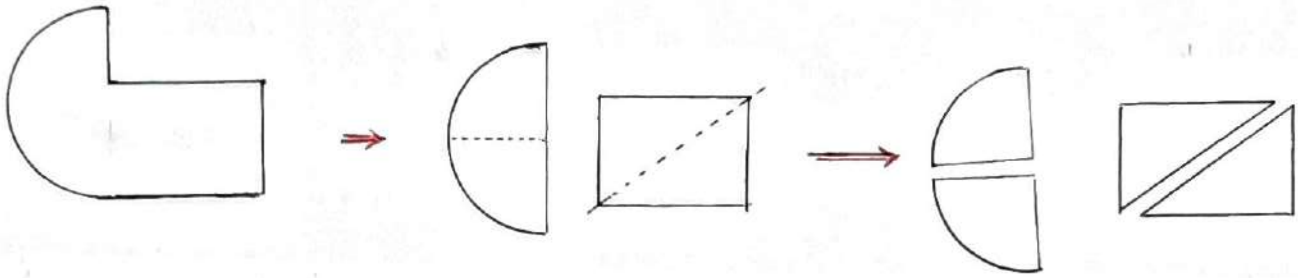
فصل ۲

# درس ۲ : کاربرد تبدیلها

**کاربردهایی از بازتاب (قرینه یابی)** : بازتاب علاوه بر شاخه های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و ... کاربرد دارد. مثلاً در فیزیک ویژگیهای بازتاب همان ویژگیهای آینه تخت است.

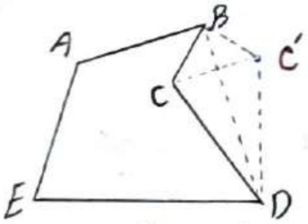
هرگاه بخواهیم شکلی را به تکه‌های برابر تقسیم کنیم می‌توانیم از بازتاب استفاده کنیم زیرا بازتاب همان قرینه یابی است.

**مثال:** شکل زیر را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید (روش کار را توضیح دهید)



**مسائل هم پیرامونی (هم محیطی)** : در این گونه مسائل هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

**مثال** : (مسئله هم محیطی) : زمینی به شکل چندضلعی ABCD داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم، حال می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع بدون اینکه اندازه حصارکشی تغییر کند مساحت زمین را افزایش دهیم. با استفاده از چه تبدیلی و چگونه این کار انجام می‌شود؟



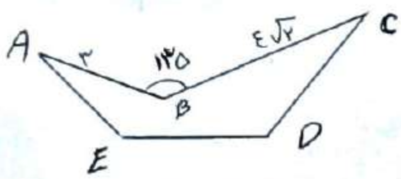

**پاسخ** ← از B به D وصل می‌کنیم حال BD را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم و تصویر نقاط B و D و C را نسبت به این محور بدست می‌آوریم
(B و D روی محور بازتاب هستند پس تصویرشان بر خودشان منطبق است تصویر C نسبت به این محور نقطه C' است)
در این صورت چندضلعی ABC'DE جواب مسئله است

محیط $P_{ABC'DE} = AB+BC'+C'D+DE+EA \underset{\downarrow}{=} AB+BC+CD+DE+EA = P_{ABCDE}$

بازتاب طولپاست
$BC'=BC$
$DC'=DC$

مثلاً اگر $S_{ABCDE}=20$ و $S_{B\hat{C}D}=4$ آنگاه $S_{ABC'DE}=20+2\times4=\boxed{28}$

**مثال:** زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط زمین تغییر کند مساحت را افزایش دهیم، میزان افزایش مساحت چقدر است؟




پاسخ: AC را به عنوان محور بازتاب در نظر گرفته و B′ تصویر B را نسبت به آن بدست می‌آوریم. در این صورت

محیط $P_{(AB'CDE)} = P_{(ABCDE)}$

$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times \sin 135^\circ = \frac{1}{2}\times 3\times 4\sqrt{2}\times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\times \sqrt{2}^2}{4} = 3\times 2 = 6 \\ S_{AB'C} = 6 \end{cases}$$

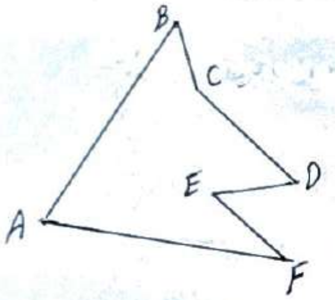
افزایش مساحت: $S_{AB'CDE} - S_{ABCDE} = 12$

---

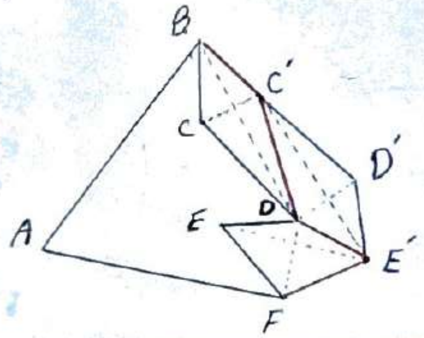
**نکته:** مراحل حل مسائل هم پیرامونی برای چندضلعی‌های مقعر وقتی که افزایش مساحت مورد نظر باشد را تا آنجایی ادامه می‌دهیم که چندضلعی محدب بدست آید.

---

**مثال:** دور زمینی مقابل حصار کشیده شده چطوری می‌توانیم بدون کم و زیاد کردن حصارها (یعنی محیط ثابت بماند) مساحت زمین را افزایش دهیم؟




پاسخ ← از بازتاب استفاده می‌کنیم و طبق نکته بالا عمل می‌کنیم.

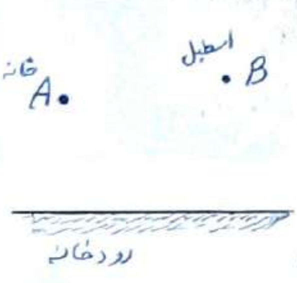



$$P_{ABC'D'E'F} = P_{ABCDEF}$$

$$S_{ABC'D'E'F} > S_{ABCDEF}$$

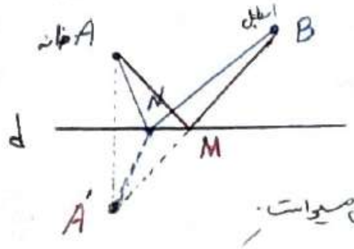
---

**مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر:** نخستین بار توسط ریاضیدانی به نام هرون ۱۵۰ تا ۲۵۰ سال قبل از میلاد مسیح دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در شرایط خاص ارائه شد.




**مثال:** (مسئله هرون): مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اصطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند کمترین حالت ممکن باشد.

پاسخ ۲ ← هدف این مسئله پیدا کردن نقطه‌ای مانند M روی خط d (ساحل) است به طوری که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد

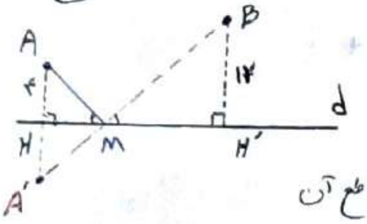



بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن‌را $A'$ می‌نامیم
از $A'$ به B وصل می‌کنیم محل تلاقی این پاره‌خط با خط d را M در نظر می‌گیریم. نقطه M جواب مسئله است. نشان می‌دهیم $AM+MB$ کوتاه‌ترین مسیر است.

طبق نامساوی مثلث در $A'NB$ ← $A'B < A'N+NB$ ، N (هر نقطه دلخواه) دلخواه روی خط d باشد

$$A'M+MB < A'N+NB \xrightarrow[\text{طولپا } A'N=AN]{\text{بازتاب طولپا } A'M=AM} AM+MB < AN+NB$$

**مثال:** فرض کنید دو نقطه A و B به ترتیب به فاصله ۴ و ۱۲ سانتی‌متر از خط d باشند و نقطه M روی خط d واقع است و مجموع فواصل A و B از M کمترین مقدار ممکن و برابر ۲۰ سانتی‌متر باشد آنگاه فاصله نقطه A از M را بدست آورید.



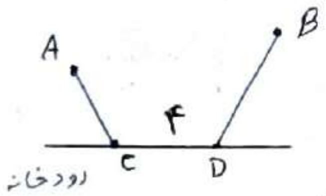

پاسخ ← ابتدا بازتاب A نسبت به خط d را بدست آورده $A'$ می‌نامیم از $A'$ به B وصل محل تقاطع آن با خط d را M می‌نامیم طبق مسئله هرون $AM+MB$ کمترین مقدار را دارد لذا

$AM+MB=20$ طبق فرض

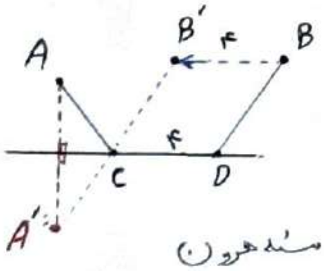
$$A\hat{H}M \sim B\hat{H'}M \longrightarrow \frac{MB}{AM}=\frac{BH'}{AH}=\frac{12}{4}=3 \longrightarrow MB=3AM \Bigg\} \longrightarrow AM+3AM=20 \longrightarrow 4AM=20 \longrightarrow AM=5$$

به حالت تشابه دو زاویه

**مثال:** دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند، می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه (CD) ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.



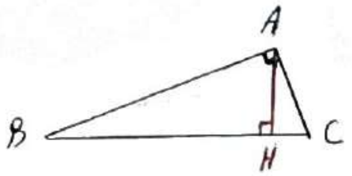

پاسخ ← ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه $B'$ انتقال می‌دهیم، حالا مسئله شبیه مسئله هرون می‌شود بازتاب نقطه A را نسبت به خط رودخانه به دست می‌آوریم یعنی نقطه $A'$ سپس از $A'$ به $B'$ وصل می‌کنیم نقطه C بدست می‌آید لذا طبق مسئله هرون از $ACB'$ کوتاه‌ترین مسیر برای رفتن از A تا ساحل و سپس تا $B'$ خواهد بود.




بنابراین برای پاسخ مسئله از نقطه C چهار کیلومتر در کنار رودخانه جاده می‌کشیم تا نقطه D بدست آید حال از D خطی موازی $CB'$ رسم می‌کنیم این خط از B می‌گذرد (زیرا چهارضلعی $BB'CD$ متوازی‌الاضلاع است) مسیر ACDB جواب مسئله است.

توجه: کار در کلاس صفحه ۵۵ و تمرین صفحه ۵۶ حل و بررسی شوند.

# فصل ۳ : (روابط طولی در مثلث)




**یادآوری :** (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه)

۱- $AB^2 = BC \cdot BH$

۲- $AC^2 = BC \cdot CH$

در هر مثلث قائم الزاویه، هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

۳- $AH^2 = BH \cdot CH$ ← ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی قطعه‌های ایجاد شده روی وتر است.

۴- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ← رابطه فیثاغورس

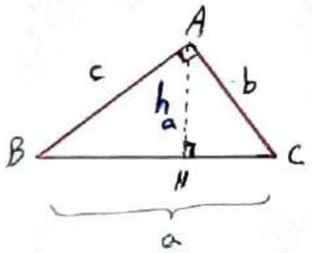
۵- $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ ← حاصلضرب اضلاع قائمه برابر است با حاصلضرب وتر و ارتفاع وارد بر وتر

**تمرین:** طول اضلاع قائم در مثلث قائم الزاویه‌ای ۹ و ۱۲ واحد است. تصویر ضلع کوچکتر بر روی وتر را بدست آورید.

---

**مثال :** (تمرین کتاب) ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه $ABC$ (که $A=90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم :

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$




پاسخ ←

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \overset{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{c^2 + b^2}{b^2c^2} \overset{\text{فیثاغورس}}{=} \frac{a^2}{b^2c^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \left(\frac{a}{a h_a}\right)^2 = \frac{1}{h_a^2}$$

$bc = ah_a$

زیرا:

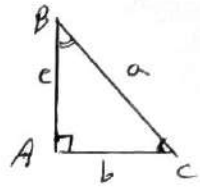
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} cb$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \longrightarrow bc = ah_a$$

---

**تمرین :** در یک مثلث قائم الزاویه، مجموع معکوس مربعات اندازه‌ی دو ضلع زاویه قائمه برابر $\frac{1}{25}$ است. اندازه ارتفاع وارد بر وتر را تعیین کنید.

---

مثال : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر طول وتر است.



پاسخ ←

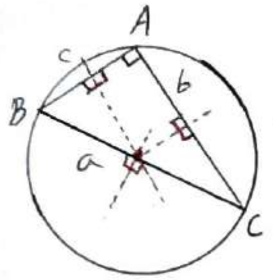
$$\sin C = \frac{AB}{BC} \rightarrow \sin C = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{\frac{c}{\sin C} = a}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \rightarrow \sin B = \frac{b}{a} \rightarrow \boxed{\frac{b}{\sin B} = a}$$

$$\sin \underset{90}{A} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A} = a}$$

---

مثال: در هر مثلث قائم الزاویه ، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث . (ثابت کنید)



پاسخ ← در مثلث قائم الزاویه مقابل کافیست نشان دهیم: $\overset{\text{وتر}}{BC} = 2R$

می دانیم نقطه همرسی عمود منصف های سه ضلع مثلث مرکز دایره محیطی آن می باشد.

از طرفی نقطه همرسی عمود منصف ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است

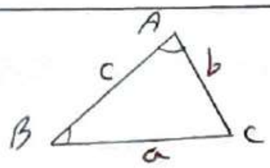
پس مرکز دایره محیطی وسط وتر می باشد. از طرفی

$\underset{=\frac{\widehat{BC}}{2}}{B\hat{A}C = 90}$ محاطی $\longrightarrow \widehat{BC} = 180 \xrightarrow{\text{دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند}} BC \longrightarrow \underset{\text{قطر}}{BC = 2R}$

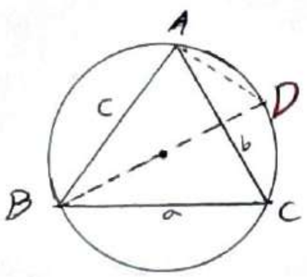
$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \overset{\text{وتر}}{BC} = 2R$$

---

قضیه سینوسها : در مثلث دلخواه $ABC$ داریم :



$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \underset{\text{قطر دایره محیطی}}{2R}}$$



اثبات :

حالت اول : $A<90$

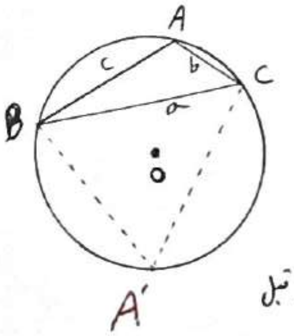
قطر $BD$ را رسم می کنیم و $D$ را به $A$ وصل می کنیم . دو زاویه $D$ و $C$ محاطی و روبه روبه کمان $\widehat{AB}$ هستند لذا با هم مساویند $\hat{D} = \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ محاطی

$B\hat{A}D = 90$ محاطی روبه رو به قطر $\xrightarrow{\text{ثبت}}$ مثلث $B\hat{A}D$ قائم الزاویه است $\longrightarrow \sin D = \frac{c}{BD} \longrightarrow \sin C = \frac{c}{BD} \longrightarrow \frac{c}{\sin C} = BD = 2R$

به طور مشابه $\frac{a}{\sin A} = 2R$ و $\frac{b}{\sin B} = 2R$

بنابراین : $\longleftarrow$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$




**حالت دوم:** $A > 90$

نقطه دلخواه $A'$ روی کمان $BC$ را به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم

$A$ و $A'$ مکمل یکدیگرند یعنی $A + A' = 180$ (زیرا $ABA'C$ چهارضلعی محاطی است پس طبق قضیه از قبل زاویه‌های مقابل مکملند)

$$A + A' = 180 \xrightarrow{A > 90} A' < 90$$

لذا طبق قسمت قبل در مثلث $A'BC$ داریم: $\dfrac{a}{\sin A'} = 2R$

$$\sin A = \sin(180 - A') = \sin A' \longrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

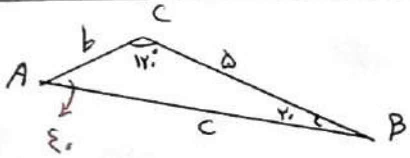
به طور مشابه چون زاویه‌های دیگر مثلث $ABC$ حاده هستند پس طبق قسمت الف داریم:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \quad , \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

---

**مثال:** با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی مقادیر $b$ و $c$ را بدست آورید.

$(\sin 20 = /34 \quad , \quad \sin 40 = /64)$




پاسخ ⟵ طبق قضیه سینوسها

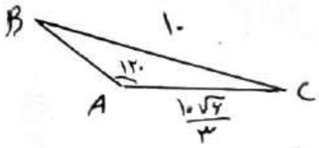
$$\frac{c}{\sin 120} = \frac{b}{\sin 20} = \frac{5}{\sin 40} \longrightarrow \frac{b}{\sin 20} = \frac{5}{\sin 40} \longrightarrow \frac{b}{/34} = \frac{5}{/64} \longrightarrow b =$$

$$\frac{c}{\sin 120} = \frac{5}{\sin 40} \longrightarrow \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{/64} \longrightarrow c =$$

---

**مثال:** در مثلث $\hat{A}BC$ ، $BC = 10$ ، $A = 120$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه‌های $B$ و $C$ را بدست آورید.

پاسخ ⟵




$$\frac{a}{\sin A} = 2R \longrightarrow \frac{10}{\underbrace{\sin 120}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2R \longrightarrow \frac{20}{\sqrt{3}} = 2R \longrightarrow R = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \longrightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} = 2\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) \longrightarrow \sin B = \frac{10 \times 3\sqrt{2}}{3 \times 20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \boxed{B = 45}$$

$B = 135$ X

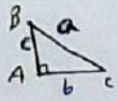
$$\hat{C} = 180 - (B + A) = 180 - 165 = \boxed{15}$$

---

**توجه:** تمرین ۲ صفحه ۴۵ کتاب حل شود.

## فصل ۳ درس دوم : قضیه کسینوس‌ها

از قبل می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه



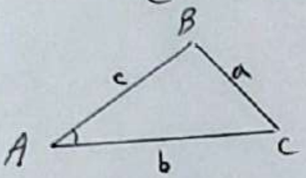

با داشتن دو ضلع قائمه از رابطه فیثاغورس می‌توان ضلع سوم را بدست آورید

رابطه فیثاغورس : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

قضیه زیر بیان می‌کند در هر مثلث دلخواه با معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین آنها می‌توان ضلع سوم را بدست آورد.

---

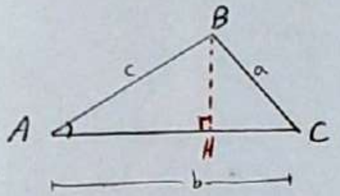
**قضیه کسینوس‌ها :** در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصلضرب آنها در کسینوس زاویه بین آنها.




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

**اثبات :** رابطه اول را ثابت می‌کنیم دو رابطه دیگر به طور مشابه اثبات می‌شوند.

- حالت اول در مثلث $ABC$ زاویه $A<90$



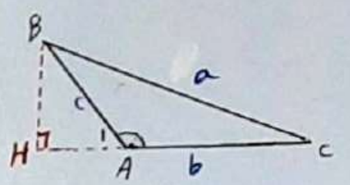

در $A\hat{B}H$ قائم‌الزاویه : $\cos A = \frac{AH}{c} \rightsquigarrow \boxed{AH = c.\cos A} \rightsquigarrow CH = b - AH = \boxed{b - c\cos A}$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \rightsquigarrow \boxed{BH = c.\sin A}$$

رابطه فیثاغورس در $B\hat{H}C$ قائم‌الزاویه : $a^2 = BH^2 + CH^2 \rightsquigarrow a^2 = (c.\sin A)^2 + (b - c.\cos A)^2$

$$\rightarrow a^2 = c^2\sin^2 A + b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A$$
$$a^2 \overset{\text{فاکتورگیری}}{=} c^2(\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}) + b^2 - 2bc\cos A$$
$$\rightsquigarrow \boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$$

- حالت دوم در مثلث $ABC$ زاویه $A>90$ باشد.




$$A_1 = 180 - A \begin{cases} \sin A_1 = \sin(180 - A) = \sin A \\ \cos A_1 = \cos(180 - A) = -\cos A \end{cases}$$

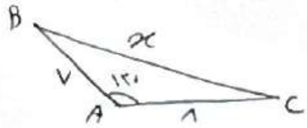
در مثلث $A\hat{B}H$ قائم‌الزاویه : $\cos A_1 = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \times \cos A_1 = \boxed{-c.\cos A}$ , $CH = b + AH = \boxed{b - c.\cos A}$

$$\sin A_1 = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c \times \sin A_1 = \boxed{c\sin A}$$

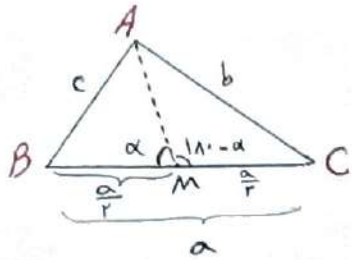
در مثلث $B\hat{H}C$ قائم‌الزاویه : $BC^2 = BH^2 + CH^2 \rightsquigarrow a^2 = (c\sin A)^2 + (b - c\cos A)^2$

$$a^2 = c^2\sin^2 A + b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A$$
$$a^2 = c^2(\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}) + b^2 - 2bc\cos A = \boxed{c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$$

مثال: در مثلث مقابل اندازه $x$ را بیابید.



مثال: (قضیه میانه‌ها) در مثلث $ABC$ میانه $AM$ را رسم کرده‌ایم $(MB = MC = \frac{a}{2})$



ثابت کنید
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

پاسخ ← با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $A\hat{B}M$ و $A\hat{C}M$ داریم:

$$\text{در } A\hat{B}M: \quad AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos\alpha \rightsquigarrow c^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2AM \cdot \left(\frac{a}{2}\right)\cos\alpha$$

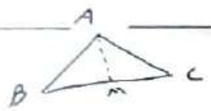
$$\text{در } A\hat{C}M: \quad AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \overbrace{\cos(180-\alpha)}^{-\cos\alpha} \rightsquigarrow b^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2AM \cdot \left(\frac{a}{2}\right)\cos\alpha$$

جمع

$$c^2 + b^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

توجه: رابطه بالا برای میانه‌های دیگر مثلث نیز برقرار است $a^2 + c^2 = 2BM^2 + \frac{b^2}{2}$

مثال: در مثلث $ABC$ اگر $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$ باشد طول میانه $AM$ را بدست آورید.



پاسخ ← با توجه به قضیه میانه‌ها داریم:

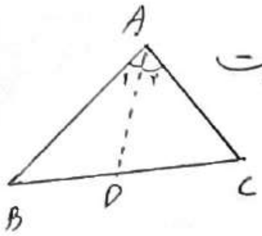
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\rightsquigarrow 6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2} \rightsquigarrow AM^2 = 10 \rightsquigarrow AM = \sqrt{10}$$

توجه: کار در کلاس و تمرینات صفحه ۴۷، ۴۸ و ۴۹ را در کتاب پاسخ دهید.

## درس سوم

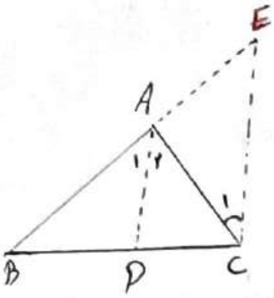
## «قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها»




**قضیه ۵:** درهر مثلث نیم ساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کند. (ضلع‌های آن زاویه)

فرض: $A_1 = A_2$ (AD نیمساز)

حکم: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$



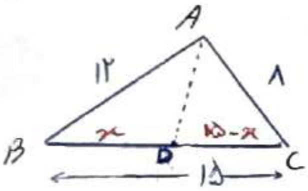

**اثبات:** از نقطه C خطی موازی با نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند.

$$\begin{cases} AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC} A_2 = C_1 \xrightarrow{\text{فرض } A_1=A_2} \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow \overset{\triangle}{AEC} \\ AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AE} A_1 = E \end{cases}$$

متساوی الساقین → $AE = AC$

در مثلث $\overset{\triangle}{BEC}$: $AD \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE} \xrightarrow{AE=AC} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

**مثال:** ۱ اندازهٔ سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر می‌باشند اندازهٔ پاره خط‌هایی که نیمساز درونی زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.



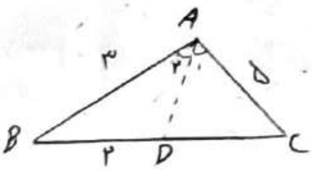

پاسخ:

AD نیمساز $\xrightarrow{\text{طبق قضیه}}$ $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

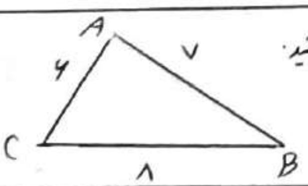
$\frac{x}{15-x}=\frac{3}{2} \longrightarrow 2x = 45-3x \to 5x=45 \to \boxed{x=9}$

$\longrightarrow BD=9 \;,\; CD=6$

**تمرین:** در شکل مقابل نیمساز زاویه A رسم شده است طول ضلع BC را بدست آورید.

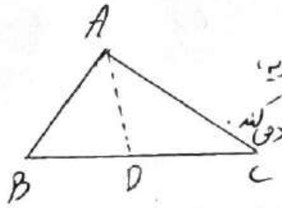



**تمرین:** در شکل مقابل طول پاره خط‌هایی که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع AB جدا می‌کند را حساب کنید.



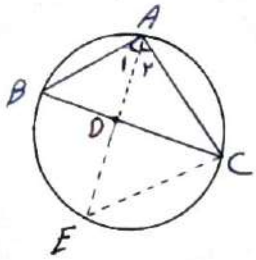

**تمرین:** در مثلث ABC داریم $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است، طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه A روی ضلع مقابل آن ایجاد می‌کند را بدست آورید.

**توجه:** کار در کلاس صفحه ۷۱ در کتاب حل و بررسی شود.




**قضیه :** در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصلضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصلضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

حکم : $AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$




**اثبات :** ابتدا دایره محیطی مثلث $ABC$ را رسم می‌کنیم و نیمساز $AD$ را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی را در نقطه $E$ قطع کند.

نیمساز $AD \rightsquigarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$

محاطی $\hat{B}=\hat{E}=\frac{\widehat{AC}}{2}$

$\xrightarrow{\text{به حالت تشابه (دو زاویه)}} \triangle ABD \sim \triangle AEC \xrightarrow{\text{اضلاع نظیر متناسبند}} \frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB}=\frac{CE}{BD}$

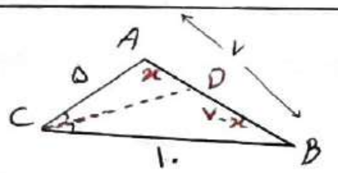
$\rightsquigarrow \frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} AB\cdot AC = AD\cdot AE \xrightarrow{AE=AD+DE} AB\cdot AC = AD(AD+DE)$

$\rightsquigarrow AB\cdot AC = AD^2 + AD\cdot DE$

$\xrightarrow[\text{(طبق قضیه وترهای متقاطع درون دایره)}]{AD\cdot DE=BD\cdot DC} AB\cdot AC = AD^2 + BD\cdot DC$

$\rightsquigarrow AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$

---




**مثال :** در مثلث $ABC$ ، $AB=۷$ ، $AC=۵$ ، $BC=۱۰$ است طول نیمساز زاویه داخلی $C$ را بدست آورید.

اثبات :

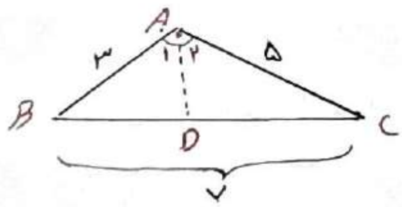
نیمساز $CD \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \frac{CA}{CB}=\frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰}=\frac{AD}{DB} \longrightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{۷-x} \longrightarrow ۲x=۷-x \longrightarrow ۳x=۷ \longrightarrow \boxed{x=\frac{۷}{۳}}$

$AD=\frac{۷}{۳}$

$BD = ۷-\frac{۷}{۳}=\boxed{\frac{۱۴}{۳}}$

طبق قضیه ، $CD^2 = CA\cdot CB - AD\cdot BD = (۵\times۱۰)-(\frac{۷}{۳}\times\frac{۱۴}{۳}) = ۵۰-\frac{۹۸}{۹}=\frac{۳۵۲}{۹} \xrightarrow{\text{جذر}} CD=\frac{\sqrt{۳۵۲}}{۳}$

---

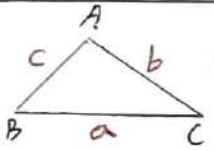



**تمرین :** با توجه به شکل مقابل طول نیمساز زاویه $A$ را بدست آورید.

---

**توجه :** تمرینات صفحه ۷۲ در کتاب حل شوند.

# درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث)




**قضیه هرون:** مساحت مثلث $ABC$ با طول اضلاع $a$ و $b$ و $c$ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

که $p$ نصف محیط مثلث است (یعنی $p=\frac{a+b+c}{2}$)

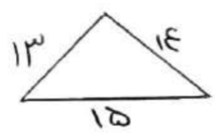
**مثال:** مساحت مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و ۷ را با استفاده از دستور هرون محاسبه کنید.

پاسخ ←

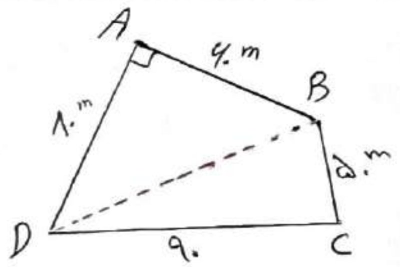
نصف محیط: $p=\frac{7+5+4}{2}=\frac{16}{2}=8$

مساحت مثلث: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=\sqrt{8\times4\times3\times1}=4\sqrt{6}$

**تمرین:** مساحت مثلث مقابل را با استفاده از دستور هرون محاسبه کنید.




**مثال:** (کار در کلاس ص ۷۴) چهارضلعی $ABCD$ که در آن $\hat{A}=90^\circ$ است یک زمین کشاورزی را نشان می‌دهد مساحت این زمین را بدست آورید.




پاسخ ← $BD^2=80^2+60^2 \longrightarrow BD=\sqrt{10000}=100$

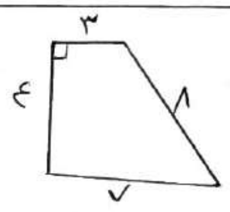
نصف محیط مثلث $B\hat{C}D$: $p=\frac{50+90+100}{2}=120$

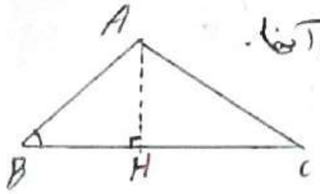
$S_{A\hat{B}D}=\frac{1}{2}\times60\times80=2400$

به دستور هرون: $S_{B\hat{C}D}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{120(120-50)(120-90)(120-100)}=\sqrt{120\times20\times30\times70}=600\sqrt{14}$

مساحت زمین: $S=2400+600\sqrt{14}\simeq\boxed{4650}\ m^2$

**تمرین:** مساحت شکل مقابل را بدست آورید.






قضیه: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب اندازهٔ دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها.

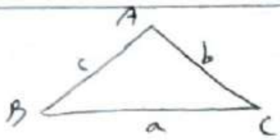
حکم: $S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2} AB.BC.\sin B$

اثبات:

$\sin B = \frac{AH}{AB} \longrightarrow AH = \boxed{AB \sin \hat{B}}$

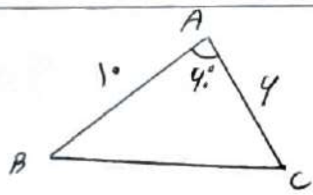
مساحت مثلث $S_{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\text{ارتفاع}}{AH} \times \overset{\text{قاعده}}{BC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC \times \sin B$




توجه: به طور مشابه ثابت می‌شود: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ و $S = \frac{1}{2} bc \sin A$

مثال: مساحت مثلث مقابل را بدست آورید.




پاسخ ←

$S_{AB} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times 10 \times \sin 60$

$\longrightarrow S = 3 \times \overset{5}{\cancel{10}} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 15\sqrt{3}$

توجه: کار در کلاس صفحهٔ ۷۵ و تمرینات صفحهٔ ۷۵، ۷۶ در کتاب پاسخ داده شود.