سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

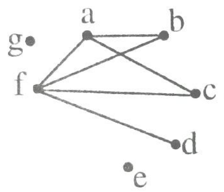
https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

فصل ۱: گراف‌ها و کاربرد آن

گراف ساده: زوج مرتبی مثل $G(V,E)$ است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی V است.

مجموعه‌ی رئوس را با V و مجموعه‌ی یال‌ها را با E نشان می‌دهیم.

مثال ۱: مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف زیر را بنویسید.



مرتبه‌ی گراف (p): تعداد راس‌های گراف G را مرتبه‌ی گراف G می‌گوییم.

اندازه‌ی گراف (q): تعداد یال‌های گراف G را اندازه‌ی گراف G می‌گوییم. $0 \le q \le \binom{p}{2}$

درجه‌ی یک راس: به تعداد یال‌های گذرنده از یک راس، درجه‌ی آن راس می‌گوییم.

راس ایزوله (منفرد – منزوی): راسی است که درجه‌ی آن صفر باشد. (هیچ یالی از آن نگذرد)

دو راس مجاور: دو راس a و b را مجاور گوییم هرگاه آن دو راس توسط یک یال به هم متصل شده باشند.

گراف کامل: گراف G را کامل گوییم هرگاه هر دو راس دلخواه آن مجاور باشند؛ به عبارت دیگر همه‌ی یال‌های ممکن در آن رسم شده باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی p را به صورت k_p نشان می‌دهیم.

نکته: درجه‌ی هریک از رئوس گراف k_p برابر است با $p-1$.

نکته: تعداد کل یال‌های گراف کامل k_p برابر است با $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$.

مثال ۲: تعداد یال‌های گراف k_8 را به دست آورید.

مثال ۳: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند راس دارد؟

گراف تهی: گراف G را تهی گوییم هرگاه هیچ یالی در آن یافت نشود. به عبارت دیگر درجه‌ی هر یک از رئوس آن صفر باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی p را به صورت $\overline{k}_p$ نشان می‌دهیم.

نکته: تعداد گراف‌های ساده که با p راس مشخص (نامگذاری شده) می‌توان تعریف کرد برابر است با $2^{\binom{p}{2}}$.

مثال ۴: با چهار راس d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

مثال ۵: با پنج راس e,d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن‌ها شامل سه یال باشند؟

مثال ۶: با ۷ راس g,f,e,d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن گراف‌ها هر دو یال ac و ef را شامل بوده و هیچ یک از آن گراف‌ها یال ag را نداشته باشند.

گراف‌های هم‌نوع (یکریخت): دو گراف را یکریخت گوییم هرگاه بتوان با اعمالی مثل تغییر محل رئوس و اندازه‌ی یال‌ها و یا چرخش گراف‌ها، آن را بر روی هم منطبق کرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷: کدام‌یک از گراف‌های زیر با گراف مقابل هم‌نوع است؟

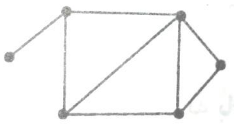
مثال ۸: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد که هر یک از آن‌ها فقط شامل ۳ یال باشند؟

مثال ۹: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ می‌توان ساخت به طوری که هر یک از آن‌ها فقط دارای سه یال باشند؟

ماکزیمم درجه‌ی یک گراف $\Delta(G)$: در هر گراف، بزرگترین درجه‌ی رئوس گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

مینیمم درجه‌ی یک گراف $\delta(G)$: در هر گراف، کوچکترین درجه‌ی رئوس گراف را مینیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

مثال ۱۰: در گراف زیر، Δ و δ را بنویسید.



قضیه: در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، مجموع درجات رئوس، دو برابر تعداد یال‌های آن گراف می‌باشد.

به عبارتی $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$.

مثال ۱۱: فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به طوری که درجه‌ی هر راس آن ۲ یا ۳ می باشد. تعیین کنید این گراف چند راس از درجه‌ی ۲ و چند راس از درجه‌ی ۳ دارد؟

نکته: در هر گراف، تعداد راس‌های فرد، عددی زوج است.

نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی مقابل برقرار است. $\delta \le \deg v_i \le \Delta$

نکته: با گرفتن زیگما از طرفین نامساوی بالا، رابطه‌ی مقابل نتیجه می‌شود. $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$ یا $p\delta \le 2q \le p\Delta$

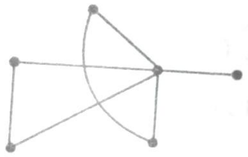
مثال ۱۲: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\Delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

مثال ۱۳: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداقل تعداد یال‌های آن کدام است؟

مثال ۱۴: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده: اگر درجات رئوس یک گراف را به صورت یک دنباله‌ی نزولی بنویسیم، آن را دنباله‌ی درجات رئوس گراف می‌نامیم.

مثال ۱۵: دنباله‌ی درجات رئوس گراف زیر را بنویسید.



مثال ۱۶: تعداد یال‌های گراف G با دنباله‌ی درجات رئوس ۳,۱,۱,۱ چقدر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: از روی دنباله‌ی درجات رئوس می‌توان p و q و δ و Δ را به دست آورد.

ویژگی‌های دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی p:

۱. تعداد اعضای فرد دنباله، زوج است.

۲. در یک دنباله‌ی p راسی حداکثر درجه‌ی هر راس مساوی $p-۱$ است. $\Delta \le p-۱$ (اگر دنباله شامل صفر بود، ابتدا صفرها را کنار می‌گذلریم)

۳. حداقل دو عدد در دنباله برابرند. (با استفاده از اصل لانه کبوتری ثابت می‌شود)

۴. در هر دنباله با p راس، اگر k راس از درجه‌ی $p-۱$ داشته باشیم باید $k \le \delta$ باشد.

۵. اگر در دنباله‌ی درجه رئوس یک گراف ساده‌ی غیر تهی از مرتبه‌ی p، عضو $p-۱$ موجود باشد، عضو صفر موجود نخواهد بود و اگر عضو صفر موجود باشد، عضو $p-۱$ موجود نخواهد بود.

۶. اگر دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده تشکیل تصاعد حسابی یا هندسی بدهند، آن‌گاه تمام اعضای آن دنباله باهم برابر خواهند بود. (به عبارتی دیگر گراف مربوطه، منتظم خواهد بود)

مثال ۱۷: گرافیکال بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

۱. $۶,۶,۵,۵,۵,۴,۲$ ۲. $۶,۵,۵,۴,۳,۳$ ۳. $۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰$

۴. $۶,۶,۶,۵,۴,۳,۲$ ۵. $۵,۴,۳,۳,۲,۱$

الگوریتم هاول – حکیمی برای تشخیص گرافیکال بودن یک دنباله:

۱. دنباله را به صورت نزولی مرتب کرده و اولین (بزرگترین) عضو آن را k می‌نامیم.

۲. k را از دنباله حذف کرده و از هر یک از k عضو بعدی یک واحد کم می کنیم و مرحله‌ی قبل را تکرار می‌کنیم.

۳. اگر در نهایت به دنباله‌ای شامل فقط تعدادی صفر برسیم، دنباله‌ی اصلی گرافیکال خواهد بود.

گراف منتظم: اگر $r \ge ۰$ باشد، آنگاه گراف G را r- منتظم گوییم هرگاه درجه‌ی هر راس G برابر r باشد.

نکته: مجموع درجات رئوس هر گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p برابر است با rp. به عبارت دیگر $q = \frac{pr}{۲}$.

مثال ۱۸: چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

نکته: گراف فرد منتظم از درجه‌ی فرد وجود ندارد.

مثال ۱۹: چند نوع گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۱ وجود دارد؟

نکته: در گراف r- منتظم، $\delta = \Delta = r$.

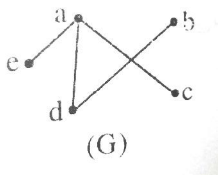
مثال ۲۰: اگر به گراف ۴- منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازه‌ی گراف را مشخص کنید.

مثال ۲۱: در گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم $۲q - ۳p = ۱۶$. گراف را مشخص کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مکمل یک گراف: گراف G' را مکمل گراف G گوییم هرگاه رئوس آن همان رئوس G بوده و مجموعه‌ی مجموعه‌ی یال‌های آن‌ها مکمل یک‌دیگر باشند، به عبارتی اگر یالی در گراف G موجود نباشد، ان یال در گراف G' موجود باشد.

مثال ۲۲: مکمل گراف زیر رارسم کنید.



نکته: $q(G)+q(G')=q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$.

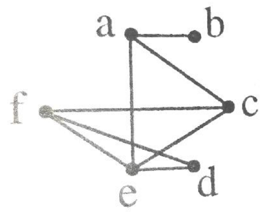
نکته: اگر a راس دلخواهی از گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p باشد، آن‌گاه: $\deg(a_G)+\deg(a_{G'})=p-۱$.

نکته: تعداد گراف‌های G از مرتبه‌ی p با تعداد گراف‌های G' از مرتبه‌ی P برابرند.

مثال ۲۳: چند نوع گراف ۶- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

مسیر: در گراف ساده‌ی G، یک مسیر به طول m از راس u به راس v، عبارت است از دنباله‌ای شامل $(m+۱)$ راس دو به دو متمایز که با u شروع و به v ختم می‌شود. (در مسیر راس تکراری وجود ندارد)

مثال ۲۴: تمام مسیرهای موجود از راس a به راس e را در گراف زیر بنویسید.



نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p، طول یک مسیر حداکثر می‌تواند برابر با $p-۱$ باشد.

نکته: در هر گراف، دنباله‌ای متشکل از فقط یک راس مثل u، مسیری به طول صفر از u به u تعریف می‌شود.

نکته: در گراف k_p، تعداد مسیرهای به طول i از راس دلخواه u به راس v برابر است با $\binom{p-۲}{i-۱}(i-۱)!$.

مثال ۲۵: u و v، دو راس متمایز از گراف $k_۶$ می‌باشند، تعداد مسیرهای به طول ۴ از u به v چقدر است؟

مثال ۲۶: u و v، دو راس متمایز از گراف $k_۶$ می‌باشند، تعداد کل مسیرها از u به v چقدر است؟

نکته: در گراف k_p، تعداد مسیرهای به طول i برابر است با $\binom{p}{۲}\binom{p-۲}{i-۱}(i-۱)!$.

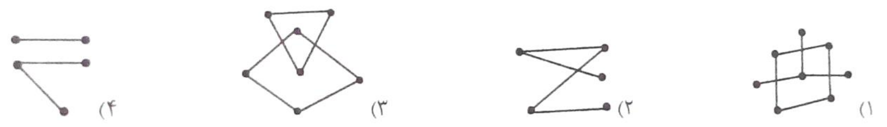
مثال ۲۷: در گراف $k_۷$ تعداد کل مسیرهای به طول ۵ چقدر است؟

مثال ۲۸: در گراف $k_۴$ تعداد کل مسیرها چقدر است؟

گراف همبند: گراف ساده‌ی G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو راس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورات گراف را ناهمبند می‌گوییم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲۹: کدام‌یک از گراف‌های زیر همبند است؟



نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p، حد اکثر مقدار q برای آن‌که گراف بتواند ناهمبند باشد برابر است با $\binom{p-۱}{۲}$

مثال ۳۰: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی q مفروض است. حداکثر مقدار q باید چقدر باشد تا گراف G بتواند ناهمبند باشد؟

نکته: اگر $q \geq \binom{p-۱}{۲}+۱$ باشد، آنگاه گراف همبند است. (یک راس را ایزوله در نظر گرفته و بقیه را گراف کامل می‌کنیم و سپس راس ایزوله را با یک یال به گراف کامل وصل می‌کنیم)

(البته ممکن است در یک گراف، $q < \binom{p-۱}{۲}+۱$ باشد و گراف همبند باشد)

مثال ۳۱: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی q مفروض است. حداقل مقدار q باید چقدر باشد تا مطمئن شویم گراف G همبند است؟

نکته: گراف $k_۱$ که فقط از یک راس ایزوله تشکیل شده است، همبند است.

نکته: اگر $q \leq p-۲$ باشد، آن‌گاه گراف همبند نیست.

(توجه شود نکته فوق بیان نمی‌کند که اگر در یک گراف $q > p-۲$ بود آن گراف حتما همبند است)

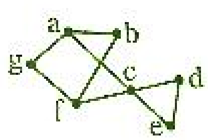
فاصله‌ی بین دو راس: در گراف همبند G فاصله‌ی دو راس u و v که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود برابر است با کوتاه‌ترین مسیر از u به v.

دور: یک دور به طول m روی راسی چون a، دنباله‌ای است شامل m راس دو به دو متمایز که با a شروع و به a ختم می‌شود. (دنباله شامل $m+۱$ عضو است)

نکته: دنباله‌ی متناظر با هر دور باید حداقل ۴ عضو داشته باشد. (دور به طول صفر نداریم)

نکته: اگر جهت چرخش را در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک دور یا نقطه‌ی شروع دور را عوض کنیم، دور جدیدی ایجاد نمی‌شود.

مثال ۳۲: تمام دورهای موجود در گراف زیر را بنویسید.



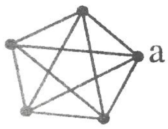
دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: تعدا دورهای به طول i در گراف k_p برابر است با $\binom{p}{i}\times\frac{(i-۱)!}{۲}$.

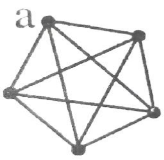
مثال ۳۳: در گراف $k_۶$ چه تعداد دور به طول ۴ موجود است؟

مثال ۳۴: در گراف $k_۵$ چه تعداد دور وجود دارد؟

مثال ۳۵: چه تعداد از دورهای گراف زیر شامل راس a نمی‌باشند؟



مثال ۳۶: چه تعداد از دورهای به طول ۴ از گراف مقابل شامل راس a می‌باشند؟



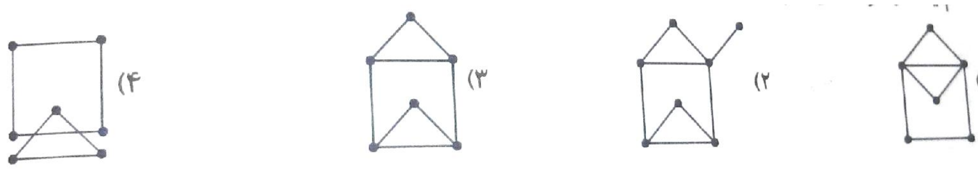
گراف همیلتنی: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p\geq ۳$ را همیلتنی گوییم هرگاه دوری از مرتبه‌ی p داشته باشد.

نکته: در نوشتن دور همیلتنی مربوط به گراف، تمام رئوس آن به کار می‌روند.

نکته: گرافی که دارای راسی از درجه‌ی صفر یا یک باشد، نمی‌تواند همیلتنی باشد.

نکته: یک گراف ناهمبند نمی‌تواند همیلتنی باشد.

مثال ۳۷: کدام‌یک از گراف‌های زیر همیلتنی است؟



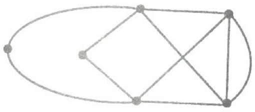
گراف اویلری: گراف G (نه لزوما ساده) را یک گراف اویلری گوییم هرگاه بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با شروع از یک راس چنان رسم کنیم که:

اولا: از هر یال، یک و فقط یک بار عبور کنیم.

ثانیا: از تمام رئوس بگذریم.

ثالثا: نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد.

مثال ۳۸: گراف زیر، اویلری است.



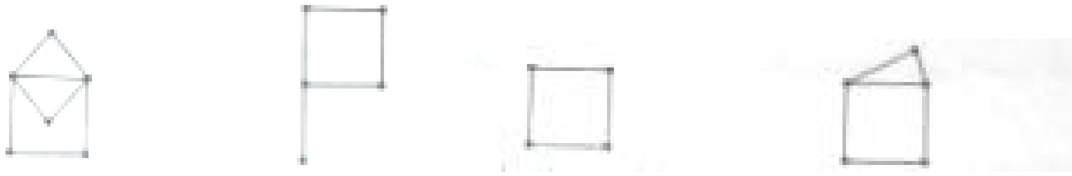
نکته: گراف همبند G اویلری است اگر و تنها اگر درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشد.

مثال ۳۹: کدام‌یک از گراف‌های زیر اویلری است؟

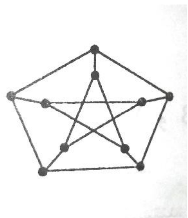
۱) $k_{۱۰}$　　۲) $k_{۱۳}$　　۳) $k_{۱۶}$　　۴) $k_{۱۸}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۴۰: گراف‌های زیر را از نظر همیلتنی و اویلری بودن بررسی کنید.



گراف پترسن: گراف زیر به گراف پترسن معروف است.



نکته: گراف پترسن، ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است.

نکته: گراف پترسن اویلری و همیلتنی نیست.

گراف بازه‌ای: اگر به ازای بازه‌های $(a_۱,b_۱)$ و $(a_۲,b_۲)$... و (a_p,b_p)، راس‌های $v_۱$ و $v_۲$ و ... و v_p را متناظر کرده و دو راس v_i و v_j را مجاور تعریف کنیم هرگاه بازه‌های متناظر آن‌ها اشتراک داشته باشند، در این صورت گراف به دست آمده، گراف بازه‌ای خواهد بود.

مثال ۴۱: گراف بازه‌ای زیر را رسم کنید. (۲,۹) , (۶,۸) , (۸,۹) , (۴,۷) , (۲,۳)

نکته: هر گراف که در آن n ضلعی $(n \geq ۴)$ بدون قطر یافت شود، گراف بازه‌ای نیست.

نکته: گراف k_p به ازای تمام مقادیر طبیعی p بازه‌ای است.

نکته: گراف پترسن بازه‌ای نیست.

درخت: گراف همبندی است که دور نداشته باشد.

مثال ۴۲: تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶,۵,۴,۳,۲,۱ را رسم کنید.

قضیه: در هر درخت با p راس و q یال، رابطه‌ی زیر برقرار است. $p = q + ۱$

مثال ۴۳: اگر از یک گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی p، ۴ یال کم کنیم یک درخت پدید می‌آید، مقدار p چقدر است؟

مثال ۴۴: دنباله‌ی نزولی S : ۳,۳,۳,۳,۳,۲,۱,...,۱، دنباله‌ی درجه‌های راس‌های یک درخت است.

الف) تعداد راس‌های درجه‌ی یک این درخت را حساب کنید.

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

مثال ۴۵: درخت T، فقط شامل رئوسی از درجه‌ی ۳ و ۱ می‌باشد، اگر تعداد رئوس درجه‌ی ۳ برابر ۲۷ باشد، تعداد رئوس از درجه‌ی ۱ چقدر است؟

قضیه: بین هر دو راس هر درخت مفروض، دقیقا یک مسیر وجود دارد.

قضیه: هر درختی که بیش از یک راس داشته باشد، حداقل دو راس از درجه یک دارد.

نکته: در هر درخت، مجموع مرتبه و اندازه، همواره عددی فرد است.

نکته: تعداد مسیرهای با طول یک و بیشتر، بین رئوس متمایز درخت برابر است با $\binom{p}{۲}$.

نکته: تعداد کل مسیرها در یک درخت، برابر است با $\binom{p+۱}{۲}=\binom{p}{۲}+p$. (p مسیر به طـول صـفر از هـر راس بـه خودش)

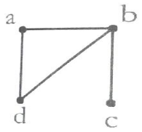
مثال ۴۶: تعداد کل مسیرهای به طول ۱ یا بیشتر در درخت از مرتبه‌ی ۱۴ را بیابید.

مثال ۴۷: در درخت از مرتبه‌ی ۱۰، چند مسیر با طول ۲ یا بیشتر وجود دارد؟

مثال ۴۸: در درخت از مرتبه‌ی ۱۳ در کل چند مسیر وجود دارد؟

ماتریس مجاورت گراف‌ها: اگر G یک گراف ساده از مرتبه‌ی p باشد، می‌توان یک مـاتریس مربعـی مثـل M از مرتبه‌ی p به آن نسبت داد به طوری که اگر دو راس در گراف مجاور باشند، درایه‌ی متناظر با آن‌ها برابـر بـا ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر است.

مثال ۴۹: ماتریس مجاورت گراف زیر را بنویسید.



ویژگی‌های ماتریس مجاورت یک گراف ساده (M):

۱. M ماتریسی متقارن است.
۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر با صفر است.
۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی راس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.
۴. تعداد کل یک‌های موجود در M برابر است با مجموع درجات رئوس گراف و برابر است با $۲q$.
۵. اگر گراف G یک راس ایزوله داشته باشد، تمام درایه‌های واقع بر سطر و ستون متناظر آن صفر خواهد بود.
۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل ناتهی k_p باشد، تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی M یک خواهد بود.
۷. تعداد یک‌های واقع بر M برابر با $۲q$ و تعداد صفرهای آن برابر با $(p^۲-۲q)$ است.
۸. اگر G یک درخت باشد، در این صورت تعداد صفرها برابر با $q^۲+۱$ می‌باشد.

مثال ۵۰: ماتریس مجاورت درخت از مرتبه‌ی ۶ چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال ۵۱: اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۰ درایه‌ی صفر باشد، در این صورت مقدار Δ چقدر است؟

ویژگی‌های مربع ماتریس مجاورت گراف ساده $(M^۲)$:

۱. $M^۲$ ماتریسی متقارن است.
۲. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی $M^۲$ با درجه‌ی راس متناظر با سطر (یا ستون) متناظر با آن درایه برابر است.
۳. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ همان مجموع درجات رئوس گراف G بوده و برابر است با $۲q$.
۴. اگر G گراف کامل k_p باشد، در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی $M^۲$ برابر با $(p-۱)$ و هر درایـه‌ی واقـع بر غیر قطر اصلی $M^۲$ برابر با $(p-۲)$ خواهد بود.

۵. اگر G گراف کامل k_p باشد، در این صورت مجموع درایه‌های یک سطر یا ستون $M^۲$ مساوی $(p-۱)^۲$ و مجموع کل درایه‌های ماتریس $M^۲$ برابر است با $p(p-۱)^۲$.

۶. درایه‌ی a_{ij} $(i \neq j)$ از مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G، با تعداد مسیرهای به طول ۲ از i به j در ان گراف برابر است.

۷. مجموع درایه‌های واقع در مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G با مجموع مربعات درجات رئوس آن گراف برابر است.

مثال ۵۲: اگر M ماتریس مجاورت درخت T بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ برابر ۱۸ باشد، ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال ۵۳: اگر M ماتریس مجاورت متناظر گراف $k_۴$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $M^۲$ چقدر است؟

مثال ۵۴: اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد، $M^۲$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمونه سوال امتحانی گراف‌ها و کاربرد آن

۱. اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

الف) گراف ساده　ب) گراف جهت‌دار　پ) مرتبه‌ی یک گراف　ت) اندازه‌ی یک گراف

ج) درجه‌ی یک راس　چ) گراف منتظم　ح) گراف کامل　خ) مسیر گراف

د) گراف همبند　ذ) دور　ر) گراف همیلتنی　ز) گراف اویلری

س) درخت

۲. ثابت کنید تعداد راس‌های فرد هر گراف، زوج است.

۳. گراف با مجموعه‌ی رئوس $V=\{V_{۱},V_{۲},V_{۳},V_{۴},V_{۵}\}$

و مجموعه‌یال‌های $E=\{V_{۱}V_{۲},V_{۱}V_{۴},V_{۱}V_{۵},V_{۲}V_{۵},V_{۲}V_{۳},V_{۳}V_{۴},V_{۴}V_{۵}\}$ مفروض است:

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب) ۴ مسیر از $V_{۱}$ به $V_{۳}$ بنویسید.

۴. ثابت کنید در هر گراف کامل k_p تعداد یال‌های گراف برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است.

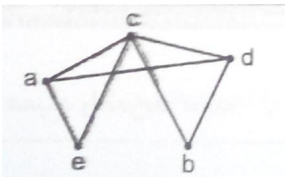
۵. گراف ساده‌ی $G=(V,E)$ گرافی ۳- منتظم است. با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کاملی به دست می‌آید.

الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید. (مرتبه و اندازه)

ب) این گراف را رسم کنید.

۶. الف) مسیر در گراف را تعریف کنید.

ب) در گراف زیر تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b را بنویسید.



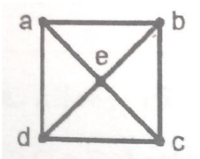
۷. فرض کنید G گراف ساده‌ی از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی $q=۱۲$ باشد، اگر G یک گراف $r-$ منتظم باشد و داشته باشیم: $۲r-p=۲$، مقادیر r و p را به دست آورید.

۸. گراف ساده‌ی G، چهار منتظم از مرتبه p و اندازه‌ی q می باشد به طوری که $p+q=۲۱$ است.

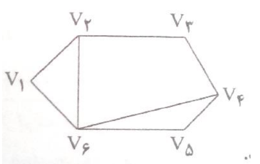
الف) p و q را محاسبه کنید.

ب) نمودار گراف را رسم کنید.

۹. در گراف زیر، چهار دور متفاوت به طول ۵ و ماتریس مجاورت آن را بنویسید.



۱۰. نمودار زیر مربوط به گراف $G(V,E)$ می‌باشد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

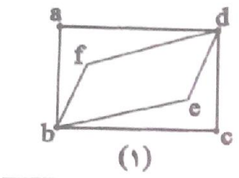
الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های گراف را مشخص کنید.

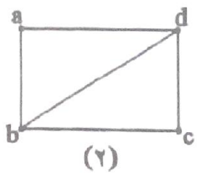
ب) دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

ج) دنبله‌ی درجه‌های راس‌های این گراف را به صورت یک دنباله‌ی نزولی بنویسید.

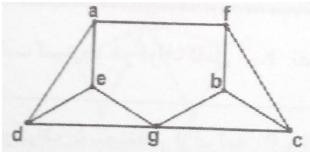
۱۱. در یک گراف کامل، تعداد راس‌ها، $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

۱۲. گراف اویلری و همیلتنی را تعریف کنید. کدام گراف زیر، اویلری و کدام یک همیلتنی است؟





۱۳. گراف G به صورت زیر رسم شده است.



الف) دو مسیر از a به b بنویسید.

ب) آیا این گراف همیلتنی است؟

۱۴. ثابت کنید در هر درخت با p راس و q یال داریم: $p = q + 1$

۱۵. الف) گراف کامل را تعریف کنید.

ب) تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی p از تعداد یال‌های درخت مرتبه‌ی p، ۱۰ واحد بیشتر است، p را پیدا کنید.

۱۶. اگر به تعداد یال‌های یک درخت از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، تعداد ۱۵ یال اضافه می کنیم گراف k_p حاصل می‌شود. درخت را مشخص کنید و یکی از انواع آن را که بیشترین درجه‌ی رئوسش ۶ باشد، رسم کنید.

۱۷. تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶ را رسم کنید.

۱۸. دنباله‌ی نزولی S: ۴,۴,۴,۳,۳,۲,۱,...,۱، دنباله‌ی درجه‌های راس‌های یک درخت است.

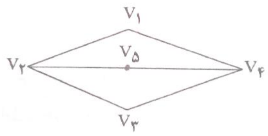
الف) تعداد راس‌های درجه‌ی یک این درخت را حساب کنید.

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

۱۹. الف) درخت را تعریف کنید.

ب) ثابت کنید بین هر دو راس هر درخت مفروض، دقیقا یک مسیر وجود دارد.

۲۰. شکل زیر نمودار گراف G می‌باشد:



الف) آیا G گراف بازه است؟

ب) طولانی‌ترین مسیر از V_1 به V_3 را بنویسید.

ج) کلیه‌ی دورهای به طول ۴ در این گراف را بنویسید.

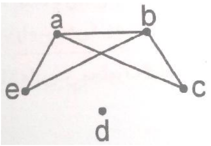
۲۱. الف) سه ویژگی از ماتریس مجاورت یک گراف را بنویسید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد و داشته باشیم: $G^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

مرتبه، اندازه، Δ و δ را نوشته و گراف را رسم کنید.

۲۲. ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی زیر را بنویسید.



۲۳. الف) درخت را تعریف کنید.

ب) در ماتریس مجاورت یک درخت از مرتبه‌ی ۸، چند درایه با مقدار صفر وجود دارد؟

فصل ۲: نظریه‌ی اعداد

بخش‌پذیری و تقسیم

عضو ابتدای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو ابتدای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\min A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A کوچک‌تر یا مساوی باشد.

عضو انتهای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو انتهای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\max A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

نکته: ممکن است یک مجموعه عضو ابتدا و یا انتها نداشته باشد.

مثال ۱: وجود عضو ابتدا و انتها را در مجموعه‌های زیر بررسی کنید.

$۱) A = \{x \in R \mid -۲ < x \le ۹\}$ $۲) B = \{x \in R \mid -۲ \le x < ۹\}$ $۳) = \{x \in z \mid -۲ < x \le ۹\}$

اصل خوش‌ترتیبی: هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای عضو ابتدا (کوچک‌ترین عضو) است.

اصل استقرای ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن عدد طبیعی مانند t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی $t+۱$ نیز در آن زیرمجموعه باشد.

اصل استقرای قوی ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی t نیز در آن زیرمجموعه باشد.

بخش‌پذیری: عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیر صفر b بخش پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $a = b \times q$. بخش‌پذیری a بر b را به صورت $b \mid a$ نشان می‌دهیم و بخش‌پذیر نبودن a بر b را به صورت $b \nmid a$ نشان می‌دهیم. $b \mid a \Leftrightarrow a = bq \quad (q \in z)$

قرار داد: چون بی شمار عدد صحیح مانند q یافت می‌شود که در تساوی $۰ = ۰ \times q$ صدق می‌کند، قرارداد می‌کنیم که صفر بر خودش بخش‌پذیر است یعنی $۰ \mid ۰$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری:

(در تمام فرمول‌های زیر، پایه‌ها، اعداد صحیح و توان‌ها، اعداد طبیعی‌اند.)

$$۱)\ \pm ۱ \mid a$$

$$۲)\ a \mid ۱ \Rightarrow a = ۱ \quad \text{or} \quad a = -۱$$

$$۳)\ \pm a \mid a$$

$$۴)\ a \mid ۰$$

$$۵)\ a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$$

$$۶)\ a \mid b \xrightarrow{b \neq ۰} |a| \le |b|$$

$$۷)\ a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

$$۸)\ a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$$

$$۹)\ a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$$

$$۱۰)\ a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

$$۱۱)\ a \mid b \xrightarrow{m<n} a^m \mid b^n$$

$$۱۲)\ a^m \mid b^n \xrightarrow{m>n} a \mid b$$

$$۱۳)\ a \mid b\ ,\ a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid b \pm c \\ a \mid b \times c \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$$

$$۱۴)\ a \mid b\ ,\ c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

$$۱۵)\ a \mid b\ ,\ b \mid a \Rightarrow a = \pm b$$

$$۱۶)\ a \mid b \Rightarrow a \mid ma \pm nb$$

$$۱۷)\ ab \mid c \Rightarrow a \mid c\ ,\ b \mid c$$

$$۱۸)\ (a-b) \mid (a^n - b^n)$$

$$۱۹)\ \frac{n}{m} \in N \Rightarrow (a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$$

$$۲۰)\ \frac{n}{m} = ۲k+۱ \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n + b^n) \Rightarrow \quad n = ۲k+۱ \Rightarrow (a+b) \mid (a^n + b^n)$$

$$۲۱)\ \frac{n}{m} = ۲k \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n - b^n) \quad \Rightarrow \quad n = ۲k \Rightarrow (a+b) \mid (a^n - b^n)$$

۲۲) حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

مثال ۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۴^{۱۳۹۴} - ۸^{۱۳۹۴}$ را بر ۶ بیابید.

مثال ۳: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a = ۳^{۳۶} - ۲^{۳۶}$ را بر ۳۵ بیابید.

مثال ۴: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

$$۱)\ a \mid b \Rightarrow a^۲ \mid b^۳$$

$$۲)\ a^۲ \mid b^۳ \Rightarrow a \mid b$$

مثال ۵: تمام مقادیر صحیح n را چنان بیابید که حاصل $\frac{۴n-۲}{n+۱}$ یک عدد صحیح باشد.

مثال ۶: اگر $\frac{n^2+4}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد آن‌گاه برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

مثال ۷: چند عدد صحیح مانند a می‌توان یافت به طوری که در هر دو رابطه‌ی $a|240$ و $12|a$ صدق کنند.

مثال ۸: چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد که $d|450$ و $15|d$.

قضیه‌ی تقسیم: اگر a عدد صحیح و b یک عدد طبیعی دلخواه باشند، آن‌گاه دو عدد صحیح منحصر به فردی مانند r و q چنان یافت می‌شوند که $a=bq+r$ و $0\le r<b$. در این حالت q را خارج قسمت، r را باقی‌مانده، a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه می‌گوییم.

مثال ۹: عدد -487 را بر ۲۳ تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را تعیین کنید.

نکته: هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت $2k$ و $2k+1$ و یا به یکی از سه صورت $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ و ... نمایش داد.

نکته: مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ می‌باشد.

نکته: باقیمانده‌ی یک عدد در تقسیم بر ۴، باقیمانده‌ی عدد حاصل ازدو رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر ۴ می‌باشد.

نکته: باقیمانده‌ی یک عدد در تقسیم بر ۸، باقیمانده‌ی عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر ۸ می‌باشد.

نکته: مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقیمانده‌ی یک می‌آورد. به عبارت دیگر $a=2k+1 \Rightarrow a^2=8q+1$.

مثال۱۰: کدام‌یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

۱) ۷۴۵۱۹ ۲) ۷۴۵۲۹ ۳) ۷۴۵۳۹ ۴) ۷۴۵۴۹

مثال ۱۱: از بین اعداد ۱ و ۱۱ و ۱۱۱ و ۱۱۱۱ و ... چه تعدادی مربع کامل هستند؟

نکته: هیچ مربع کاملی نمی‌تواند به یکی از ارقام ۲و۳و۷و۸ ختم شود.

نکته: اگر مربع کاملی به ۵ ختم شود، لازم است رقم دهگان آن مربع کامل برابر ۲ باشد.

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $1,2,3,\dots,n$ برابر $\left[\frac{n}{b}\right]$ می‌باشد.

مثال ۱۲: چند عدد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد؟

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $k+1,k+2,\dots k+n$ برابر $\left[\frac{k+n}{b}\right]-\left[\frac{k}{b}\right]$ می‌باشد.

مثال ۱۳: تعداد اعداد سه رقمی که بر ۳۴ بخش‌پذیر باشند چقدر است؟

مثال ۱۴: معادله‌ی $x^2+y^2=1383$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

مثال ۱۵: در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر ۲۹ و خارج قسمت برابر ۷ می‌باشد.حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد بدون این‌که مقسوم و خارج قسمت تغییر نماید؟

مثال ۱۶: در یک تقسیم، اگر ۲۰۰ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقی‌مانده ۲۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۷: در یک تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت ۱۲ می‌باشد. تعیین کنید مقسوم علیه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

مثال ۱۸: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۵ و ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

عدد اول:

یک عدد طبیعی را اول گوییم هرگاه در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، دو و فقط دو مقسوم علیه مثبت داشته باشد که یکی از آن دو مقسوم‌علیه عدد ۱ و دیگری خود آن عدد است. عددی که اول نباشد، مرکب خوانده می‌شود.

نکته: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو شکل $6k+1$ و $6k-1$ (یا $6q+5$) می‌باشد. (به عبارتی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۶، عددی بجز ۱ و ۵ باشد، آن عدد اول نیست). در عین حال، ممکن است عددی به شکل $6k+1$ و $6k-1$ باشد ولی اول نباشد؛ مثل $25=6\times4+1$.

نکته: تنها عدد اولی که زوج است عدد ۲ می‌باشد. (اعداد اول: ۲و۳و۵و۷و...)

مثال ۱۹: مجموع دو عدد اول برابر ۹۱ شده است. مجموع ارقام حاصل ضرب آن دو عدد را بیابید.

مثال ۲۰: دو عدد طبیعی a و b چنانند که $a^2=b^2+41$، مجموع ارقام عدد $a+2b$ را بیابید.

قضیه: بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. (مجموعه‌ی اعداد اول مجموعه‌ای نامتناهی است)

قضیه: عدد n اول است هرگاه به هیچ یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ بخش‌پذیر نباشد.

تجزیه‌ی یک عدد به حاصل‌ضرب عوامل اول:

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

نکته: اگر پس از تجزیه‌ی یک عدد، توان تمام عامل‌های اول عددی زوج باشند، آن عدد، مربع کامل است و اگر مضرب سه باشند، مکعب کامل است.

مثال ۲۱: با توجه به تجزیه‌ی عدد ۱۳۸۰، مربع کامل بودن آن را بررسی کنید.

نکته: اگر عدد n به صورت $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه شده باشد، آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ خواهد بود.

مثال ۲۲: تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۵۰ را بیابید.

مثال ۲۳: کدام‌یک ازاعداد زیر دارای ۲۷ مقسوم‌علیه مثبت می‌باشد؟

۱) ۱۹۶۳ ۲) ۱۷۶۴ ۳) ۱۸۶۲ ۴) ۲۱۷۸

نکته: تعداد عوامل اول p موجود در $n!$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲۴: در تجزیه‌ی عدد $۵۰!$، توان عدد ۳ چند است؟

مثال ۲۵: تعداد صفرهای واقع در انتهای عدد $n!$ با تعداد عوامل ۵ موجود در $n!$ یعنی مقدار زیر برابر است.

$$\left[\frac{n}{۵}\right]+\left[\frac{n}{۵^{۲}}\right]+\left[\frac{n}{۵^{۳}}\right]+\dots$$

مثال ۲۶: تعداد صفرهای موجود در انتهای $۷۹!$ چقدر است؟

مثال ۲۷: بیش‌ترین مقدار k برای آن‌که $۱۹۴!$ بر ۲۱^{k} بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

برای به دست آوردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را بـه حاصـل‌ضـرب عامـل‌هـای اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان کم‌تر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

ب.م.م دو عدد a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۸: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴۵۰ و ۱۰۰۸ را بیابید.

نکته: $(a,b)=d \Rightarrow d\,|\,a\ ,\ d\,|\,b$.

مثال ۲۹: اگر $(۳a+۵,۵a+۴)=d$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

مثال ۳۰: اگر $(a-۵,a^{۲}-۶a+۳)=d$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b با مجموعه‌ی مقـسوم‌علیـه‌هـای ب.م.م آن دو عـدد برابـر است؛ یعنی اگر $x\,|\,a$ و $x\,|\,b$ آن‌گاه $x\,|\,(a,b)$.

مثال ۳۱: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابـر بـا ۷۲ مـی‌باشـد. آن دو عـدد چنـد مقـسوم علیـه مشترک دارند؟

ترکیب خطی دوعدد: به ازای هر $m,n\in Z$ ، $ma+nb$ را یک ترکیب خطی a و b می‌گوییم.

نکته: $(a,b)=d \Leftrightarrow \exists m,n\in Z\ ,\ ma+nb=d$.

دو عدد متباین (نسبت به هم اول): دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a,b)=۱$.

نکته: اگر برای اعداد صحیح a و b، اعـداد صـحیحیماننـد r و s چنـان یافـت شـوند کـه $ra+sb=۱$، آن‌گـاه $(a,b)=۱$.

نکته: اگر a در تقسیم بر b باقیمانده‌ی r داشته باشد، آن‌گاه $(a,b)=(b,r)$.

مثال ۳۲: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه $(a,۵a+d)$ چقدر است؟

نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع (تفاضل) آن دو عدد نیز نـسبت بـه هـم اولند، یعنی: $(a,b)=۱ \Rightarrow (a\pm b,ab)=۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند و نیز هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

نکته: $\left.\begin{matrix}(a,b)=1\\(a,c)=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,bc)=1$

(لم اقلیدس): اگر $a\,|\,bc$ و $(a,b)=1$، آن‌گاه $a\,|\,c$.

نکته: اگر p عددی اول باشد و $p\,|\,ab$ آن‌گاه $p\,|\,a$ و $p\,|\,b$.

مثال ۳۳: اگر $(b,d)=1$ و $(a-2b,3a-b)=d$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه روابط زیر برقرارند.

$1)\ (ka,kb)=|k|d \qquad k\in Z-\{0\}$

$2)\ (\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{d}{|k|} \qquad k\,|\,d$

$3)\ (a^n,b^n)=d^n \qquad n\in N$

قضیه‌ی بزو: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، برابر است با کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $S=\{ma+nb>0\,|\,m,\in Z\}$.

مثال ۳۴: عضو ابتدای مجموعه‌ی $A=\{42r+12s>0\,|\,r,s\in Z\}$ را بیابید.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

برای به دست آوردن کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان بیشتر و همچنیم عامل‌های غیر مشترک را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

مثال ۳۵: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴۵۰ و ۱۰۰۸ را بیابید.

نکته: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه می‌توان نوشت: $\begin{cases}a=a'd\ ,\ b=b'd\ ,\ (a',b')=1\\ [a,b]=a'b'd\end{cases}$

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند، آن‌گاه $(a,b).[a,b]=|ab|$.

مثال ۳۶: کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی ۱۳ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد می‌باشد، اگر مجموع این دو عدد برابر ۱۲۶ باشد، آن‌گاه ب.م.م ان دو عدد را بیابید.

مثال ۳۷: مجموع دو عدد طبیعی، برابر ۵۰۴ و ب.م.م آن دو عدد برابر ۳۶ است. کم‌ترین مقدار طبیعی برای تفاضل آن دو عدد را بیابید.

همنهشتی

اگر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی $m\ (m\geq 2)$ باقی‌مانده‌ی یکسانی مانند r داشته باشند، آن‌گاه دو عدد a و b را همنهشت با یکدیگر به پیمانه‌ی m میگوییم و آن را به صورت $a\overset{m}{\equiv}b$ یا $a\equiv b$ (پیمانه m) نشان می‌دهیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه عدد صحیحی مثل q وجود دارد به طوری که: $a-b=mq$.

خواص همنهشتی:

در تمام روابط زیر d,c,b,a اعداد صحیح و m عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد.

۱) $a\overset{m}{\equiv}a$

۲) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

۳) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c) \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

۴) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d) \Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm d$

۵) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d) \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$

۶) $(a\overset{m}{\equiv}b) \Rightarrow (a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c\ ,\ ac\overset{m}{\equiv}bc)$

۷) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$

۸) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ a\overset{n}{\equiv}b) \Leftrightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

۹) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ n\,|\,m) \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$

۱۰) $(ac\overset{m}{\equiv}bc\ ,\ d=(m,c)) \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

مثال ۳۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳۵^{۴۰}$ بر ۹ را بیابید.

مثال ۳۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^{۱۶}+۵$ بر عدد ۷ را بیابید.

مثال ۴۰: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۴۲\times۱۸^n+۲۳\times۵^n$ بر ۱۳ را بیابید.

مثال ۴۱: عدد $۲^{۱۳۸۴}$ در تقسیم بر ۱۳ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۴۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۲^{۶۰}$ بر ۱۷ را بیابید.

مثال ۴۳: کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن، $۲^{۶۴}+a$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

مثال ۴۴: اگر $a\overset{۶}{\equiv}۲$ و $a\overset{۸}{\equiv}۴$، آنگاه a در تقسیم بر ۲۴ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۴۵: کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که با ازای آن رابطه‌ی $۴x\overset{۱۵}{\equiv}۳$ برقرار باشد.

کلاس هم‌ارزی (دسته‌ی هم‌ارزی): کلاس هم‌ارزی a مجموعه‌ای از اعداد صحیح است که هر یک از آن‌ها به پیمانه‌ی m با a همنهشت باشند. $[a]_m=\left\{x\,|\,x\in Z\ ,\ x\overset{m}{\equiv}a\right\}$

مثال ۴۶: عدد ۲۰۷− به کدام دسته‌ی هم‌ارزی به پیمانه‌ی ۸ قرار دارد؟

۱) [۱] ۲) [۳] ۳) [۵] ۴) [۷]

مثال ۴۷: کدام دو عدد زیر متعلق به یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۷ هستند؟

۱) ۲۷و۹۶ ۲) ۲۸و۹۶ ۳) ۲۶و۹۶ ۴) ۲۵و۹۶

مثال ۴۸: اگر $۲a-۱$ عضوی از دسته‌ی هم‌نهشتی $۳a-۳$ به پیمانه‌ی ۶ باشد، آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۳۸۱ ۲) ۱۳۸۲ ۳) ۱۳۸۳ ۴) ۱۳۸۴

دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه‌ی فرما: اگر p عددی اول بوده و عدد صحیح a چنان باشد که $(a,p)=۱$، آن‌گاه: $a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$.

نکته: برای محاسبه‌ی رقم یکان اعداد توان‌دار، به جای پایه، رقم یکان و به جای توان، اگر توان مضرب ۴ باشد، به جای توان عدد ۴ و در غیر این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴۹: رقم یکان عدد $۱۳۹۲^{۱۳۹۳}$ را بیابید.

مثال ۵۰: رقم یکان عدد ۲×۱۳۸۳^{۱۳۸۴} را بیابید.

مثال ۵۱: رقم یکان عدد $۴۳^{۱۷}+۲۷^{۲۳}$ را بیابید.

مثال ۵۲: رقم یکان عدد $(۸۲+۷۳!+۴۹!)^{۴۲!}$ را بیابید.

نمایش اعداد در مبناهای مختلف

می‌دانیم عدد ۴۹۲ که در مبنای ۱۰ نوشته شده است، به صورت $۴\times۱۰^۲+۹\times۱۰^۱+۲\times۱۰^۰$ نیز قابل نمایش است و نیز عدد $(۵۷۲۶)_۸$ که در مبنای هشت نوشته شده است، به صورت $۵\times۸^۳+۷\times۸^۲+۲\times۸^۱+۶\times۸^۰$ نیز قابل نمایش است. بنابر این هر عددی در یک مبنای خاص، قابل تبدیل به مبنای دیگر می‌باشد.

نکته: برای تبدیل هر عددی از مبنای ۱۰ به مبنایی غیر از ۱۰، از تقسیم‌های متوالی و برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ از ضب‌های متوالی استفاده می‌کنیم.

نکته: برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ می‌توان ابتدا آن را به مبنای ۱۰ برد و سپس به مبنای غیر ۱۰ خواسته شده تبدیل کرد.

نکته: اگر یک عدد در مبنای n نوشته شود، حتما هر یک از ارقام آن کمتر از n خواهند بود.

مثال ۵۳: عدد $(۲۱۰۳)_۴$ را به مبنای ۱۰ ببرید.

مثال ۵۴: عدد ۳۵۷ را که در مبنای ۱۰ نوشته شده است به مبنای ۲ ببرید.

مثال ۵۵: عدد $(۱۱۰۲)_۳$ را به عددی در مبنای ۴ ببرید.

مثال ۵۶: عدد $۴+۲\times۸^۳+۳\times۸^۴$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۷: عدد $۱۱+۶۹\times۸^۳+۱۳\times۸^۲$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۸: عدد $(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲$ را به مبنای ۸ ببرید. (چون $۲^۳=۸$ لذا اعداد را از سمت راست، ۳ تا ۳ تا جدا کرده و هر کدام از این اعداد سه تایی را به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم و برای تبدیل از مبنای ۸ به ۲ برعکس عمل می‌کنیم، یعنی هر عدد از مبنای ۸، ۳ رقم از آن عدد را در مبنای ۲ تشکیل می‌دهد)

مثال ۵۹: حاصل عدد $(۳۷۵۴)_۸$ را در مبنای ۲ بنویسید.

مثال ۶۰: اگر $(۱۳۴)_{x+۱}=(۲۱۳)_x$، در این صورت $(۱۱۱)_x$ را بیابید.

مثال ۶۱: اگر عدد دو رقمی $(\overline{ab})_۷$ با عدد $(\overline{ba})_۹$ برابر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

مثال ۶۲: عدد $۶۵!$ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

قوانین یافتن بخش‌پذیری اعداد طبیعی بر اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ...:

۱) بخش‌پذیری بر ۲^k (۲ و ۴ و ۸ و ...): عددی بر ۲^k بخش‌پذیر است که مجموع k رقم سمت راست آن بر ۲^k بخش‌پذیر باشد.

۲) بخش‌پذیری بر ۳ و ۹: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع تمام ارقامش بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

۳) بخش‌پذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

۴) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ارقام آن را به ترتیب از راست به چپ با علامت مثبت و منفی جمع جبری کنیم حاصل آن بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

معادله‌ی سیاله

هر معادله به صورت $ax+by=c$ که در آن $a,b,c\in Z$ و برای هر x و y، به دنبال مقادیری در Z باشیم، یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی دو مجهولی نامیده می‌شود.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\mid c$.

مثال ۶۳: اگر معادله‌ی $۸۴x+۶۶y=۵n+۱۱$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن‌گاه n چه مقادیری را می‌تواند اختیار کند؟

نکته: اگر $(a,b)=۱$، آن‌گاه معادله‌ی $ax+by=c$ همواره جواب دارد.

نکته: اگر $x_۰$ و $y_۰$ جواب‌هایی از معادله‌ی $ax+by=c$ باشند، و $(a,b)=d$، آن‌گاه جواب‌های کلی آن معادله به شکل زیر است.

$$\begin{cases} x=x_۰+\dfrac{b}{d}k \\ y=y_۰-\dfrac{a}{d}k \end{cases}$$

مثال ۶۴: جواب‌های عمومی معادله‌ی $۹x+۵y=-۴$ را بیابید.

مثال ۶۵: اگر x و y جواب‌هایی از معادله‌ی $۵۴x+۲۱y=۱۵$ باشند، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد x بر ۷ را بیابید.

مثال ۶۶: معادله‌ی سیاله‌ی $۲۶x+۳۸y=۲۰۴$ را در Z حل کنید.

مثال ۶۷: پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۲۱۰ ریالی و ۱۴۰ ریالی برای فروش دارد. بسته‌ای نیاز به ۱۴۷۰ ریال تمبر دارد. چند تمبر ۲۱۰ ریالی و چند تمبر ۱۴۰ ریالی باید بخرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمونه سوال امتحانی نظریه‌ی اعداد

۱. اگر $a|b$ و $b \neq 0$، ثابت کنید $|a| \leq |b|$.

۲. درستی یا نادرستی احکام زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $ab^2 | c \Rightarrow b | a$ ب) $a|b \Rightarrow ac|b$

ج) $a^2 | b^3 \Rightarrow a^3 | b^5$ د) $a^2-b^2 | a \Rightarrow a^2-b^2 | b^2$

۳. اگر $a|b$ و $a|c$، ثابت کنید: $a | 3b+2c$.

۴. ثابت کنید اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

۵. اگر a و b دو عدد طبیعی فرد باشند، ثابت کنید $2|a^2+b^2$ و $4 \nmid a^2+b^2$.

۶. الف) ثابت کنید اگر $a|b$، آن‌گاه $a|bc$.

ب) برای مقادیر صحیح c,b,a، مثالی بیاورید که $a|bc$ برقرار باشد ولی دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.

۷. اگر عدد سه رقمی $\overline{3ab}$ مضرب ۱۵ باشد و $b \neq 0$، این عدد را مشخص کنید. مساله چند جواب دارد؟

۸. عدد $(10211)_3$ را به مبنای ۵ ببرید.

۹. با استفاده از نمایش یک عدد در مبنای ۱۰، قاعده‌ی پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ را به دست آورید.

۱۰. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

۱۱. a و b دو عدد صحیح‌اند که حداقل یکی از این دو مخالف صفر است. اگر برای هر m و n صحیح، $ma+nb=1$ باشد، ثابت کنید: $(a,b)=1$.

۱۲. ثابت کنید اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $d=(m,c)$، آن‌گاه $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

۱۳. اگر $a|b$ و $c|b$ و $(a,c)=1$ باشد، ثابت کنید: $ac|b$.

۱۴. ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ و $(a,c)=1$، آن‌گاه $(a,bc)=1$.

۱۵. ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ و $a|bc$، آن‌گاه $a|c$.

۱۶. ثابت کنید اگر $b|c$ آن‌گاه $(a,b)=(a+c,b)$.

۱۷. نشان دهید اگر a عددی زوج باشد و $(a,b)=1$، آن‌گاه $(a-b,a+b)=1$.

۱۸. اگر $d=(a-5,a^2-6a+3)$ و $a \in Z$، آن‌گاه d را محاسبه کنید.

۱۹. ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲۰. الف) ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب) ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی بر ۸ بخش‌پذیر است.

۲۱. الف) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.

ب) نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $6a+5$ به صورت $6a+1$ است.

۲۲. اگر عدد صحیح a مضرب ۳ و باقیمانده‌ی آن بر ۱۹ برابر ۵ باشد، باقیمانده‌ی $\frac{a}{3}$ بر ۱۹ کدام است؟

۲۳. اگر در یک تقسیم ۹۰ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت ثابت مانده و از باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را به دست آورید.

۲۴. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد، ۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۲۲۲ است. آن دو عدد را به بیابید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵. اگر مجموع دو عدد، ۱۰۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۴۳۲ باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

۲۶. هرگاه $۳a \overset{۵}{\equiv} ۲$ و $۲a \overset{۳}{\equiv} ۱$ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۱۵ کدام است؟

۲۷. رقم یکان $۷^{۳۲۷}$ را محاسبه کنید.

۲۸. رقم یکان $۷^{۷۳} + ۳^{۲۵}$ را محاسبه کنید.

۲۹. آخرین رقم سمت راست عدد $۲۷^{۱۳۸۶}$ را به دست آورید.

۳۰. باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۱۲۱}$ را بر عدد ۳۱ به دست آورید.

۳۱. ثابت کنید $۲^{۲۳} - ۸$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۳۲. اگر باقیمانده‌ی تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقیمانده‌ی $A - B$ بر ۳۹ را محاسبه کنید.

۳۳. به ازای چه مقادییری از m، معادله‌ی $۲۰x + ۱۴y = m$ جواب صحیح دارد؟

۳۴. معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۲y = ۷$ را در Z حل کنید.

۳۵. معادله‌ی سیاله‌ی $۱۳x + ۱۷y = ۱۰۰$ را در Z حل کنید.

۳۶. جواب‌های کلی معادله‌ی $۷x + ۱۱y = ۶۹$ را بنویسید.

۳۷. معادله‌ی سیاله‌ی $۳۸x + ۳۴y = ۱۲۰$ را در Z حل کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ۳: مباحثی دیگر از ترکیبیات

رابطه‌ها و گراف‌ها

رابطه: هر زیرمجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از A به روی B می‌گوییم. اگر رابطه‌ای زیرمجموعه‌ای از $A\times A$ باشد، آنگاه می‌گوییم آن رابطه بر روی مجموعه‌ی A تعریف شده است.

مثال‌هایی از رابطه، به صورت‌های زیر است:

۱) aRb یا $(a,b)\in R$، هرگاه $a\le b$.

طبق تعریف بالا $(۲,۵)\in R$ ولی $(۴,۱)\notin R$.

۲) برای هر دو عضو $x,y\in Z$ تعریف می‌کنیم: $(x,y)\in R$ یا xRy هرگاه $x-y$ مضربی از ۷ باشد.

طبق تعریف بالا ۹R۲ ولی ۱۲$\not R$۶.

مثال ۱: رابطه‌ی R در مجموعه‌ی اعداد حقیقی به صورت $xRy \Leftrightarrow x^۲+y^۲\le ۲xy$ تعریف شده است. عدد ۱۳۹۳ با چه عددی رابطه دارد؟

ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه

اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، آن‌گاه آن رابطه:

۱) دارای خاصیت بازتابی (انعکاسی) است اگر و تنها اگر به ازای هر عضوی مانند x متعلق به A، زوج مرتب (x,x) در R باشد.

۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y متعلق به A در صورت موجود بودن زوج مرتب (x,y) در R، زوج مرتب (y,x) نیز در R موجود باشد.

۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y متمایز متعلق به A از دو زوج مرتب (x,y) و (y,x) حداکثر یکی از آن دو در R باشد. (به عبارتی اگر $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ آنگاه $x=y$)

۴) دارای خاصیت تعدی (تراگذری یا ترایایی) است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y و z متعلق به A، در صورت موجود بودن هر دو زوج مرتب (y,z) و (x,y) در R، زوج مرتب (x,z) نیز در R موجود باشد.

هم‌ارزی: رابطه‌ای که هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطه‌ی هم‌ارزی است.

نکته: رابطه‌ی تهی، هر سه ویژگی تقارنی، پادتقارنی و تعدی را دارد.

نکته: رابطه‌ای که فقط دارای یک زوج مرتب باشد، هر دو ویژگی پادتقارنی و تعدی را داراست. اگر مولفه‌های اول و دوم آن زوج مرتب یکسان باشد، آن رابطه ویژگی تقارنی را نیز خواهد داشت.

نکته: تنها رابطه‌ای که می‌توان بر روی $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ تعریف کرد تا هر چهار ویژگی بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد رابطه‌ی $\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),...,(a_n,a_n)\}$ می‌باشد.

مثال ۲: مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ داده شده است. رابطه‌ای روی A تعریف کنید که:

۱) بازتابی باشد.

۲) متقارن باشد.

۳) تعدی باشد

۴) پادتقارن باشد

۵) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد.

۶) فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد.

۷) نه متقارن باشد و نه پادمتقارن.

۸) هم متقارن باشد و هم پادمتقارن.

۹) متقارن و بازتابی باشد ولی تراگذر نباشد.

مثال ۳: کدام‌یک از روابط زیر، خاصیت هم‌ارزی دارند؟

۱) رابطه‌ی تساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

۲) رابطه‌ی توازی در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.

۳) رابطه‌ی عمود بودن در مجموعه‌ی خطوط یک صفحه.

۴) رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

۵) رابطه‌ی R با ضابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \le ۲xy$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی.

گراف جهت‌دار متناظر به یک رابطه

اگر R یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد، می‌توان به آن رابطه یک گراف جهت دار نسبت داد به طوری که مجموعه‌ی رئوس این گراف همان مجموعه‌ی A باشد و یال جهت دار $\overrightarrow{ab}$ در گراف موجو باشد اگر و تنها اگر زوج مرتب (a,b) در R باشد.

مثال ۴: گراف جهت‌دار متناظر با رابطه‌ی زیر را رسم کنید. $R = \{(a,b),(b,b),(b,d),(c,e),(e,c),(e,d)\}$.

بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی گراف متناظر با آن

اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، آنگاه رابطه‌ی R:

۱) یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر راس، دارای یک طوقه باشد.

۲) یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j متعلق به A، در صورت موجود بودن یال جهت دار $\overrightarrow{ij}$، یال جهت دار $\overrightarrow{ji}$ نیز موجود باشد.

۳) یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j متعلق به A، اگر یال $\overrightarrow{ij}$ موجود بود آن‌گاه یال $\overrightarrow{ji}$ موجود نباشد.

۴) یک رابطه تعدی است اگر و تنها اگر، به ازای هر i و j و k متعلق به A، اگر یال‌های $\overrightarrow{ij}$ و $\overrightarrow{jk}$ موجود بودند، آن‌گاه یال $\overrightarrow{ik}$ نیز موجود باشد.

مثال ۵: رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{۳,۶,۷,۱۱\}$، به صورت $R = \{(x,y) \mid x \mid y\}$ تعریف شده است.

الف) رابطه‌ی R را مشخص کنید.

ب) گراف جهت‌دار متناظر با R را رسم کنید.

ج) آیا R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟ چرا؟

مثال ۶: رابطه‌ی متناظر به گراف جهت دار زیر چه تعداد از ویژگی‌های چهارگانه را داراست؟

نکته: اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، در این صورت می‌توان $۲^{n^۲}$ رابطه روی A تعریف کرد.

نکته: هر رابطه یک و فقط یک گراف جهت‌دار دارد.

نکته: با p راس مشخص، $۲^{p^۲}$ گراف جهت دار می‌توان ساخت.

مثال ۷: با ۵ راس e, d, c, b, a چند گراف جهت دار می‌توان ساخت؟

ماتریس متناظر به یک رابطه

اگر R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی n عضوی A باشد، می‌توان به آن رابطه یک ماتریس مربعی مثل M از مرتبه‌ی n نسبت داد به طوری که اگر iRj آن‌گاه درایه‌ی m_{ij} ماتریس، برابر با ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر خواهد بود.

مثال ۸: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد، ماتریس متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید. $R=\{(c,d),(a,b),(b,b),(b,c),(d,a)\}$

اعمال بولی

اعمال جمع و ضرب بولی روی مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$۰\oplus۰=۰ \qquad ۰\oplus۱=۱ \qquad ۱\oplus۰=۱ \qquad ۱\oplus۱=۱$

$۰\odot۰=۰ \qquad ۰\odot۱=۰ \qquad ۱\odot۰=۰ \qquad ۱\odot۱=۱$

توان دوم یک ماتریس

اگر $M(R)$ ماتریس متناظر یک رابطه باشد، در این صورت ماتریس $[M(R)]^۲$ از ضرب بولی ماتریس M در خودش به دست خواهد آمد با این تفاوت که هنگام ضرب هر درایه که مقدار آن غیر صفر باشد، ۱ منظور خواهد شد و در غیر این صورت مقدار آن درایه صفر خواهد بود.

مثال ۹: اگر $M=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $M^۲$ را بیابید.

ترکیب یک رابطه با خودش

اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد، آن‌گاه ترکیب رابطه‌ی R با خودش که آن را به صورت ROR نمایش می‌دهیم عبارت است از رابطه‌ای که آن رابطه شامل زوج مرتب (i,j) باشد اگر و تنها اگر عضوی مانند k در A یافت شد که (i,k) و (k,j) هر دو در R باشند.

مثال ۱۰: رابطه‌ی R روی $\{۱,۲,۳,۴\}$ به صورت زیر تعریف شده است. رابطه‌ی ROR را به دست آورید.

$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳)\}$

نکته: اگر $M(R)$ ماتریس متناظر به رابطه‌ی R باشد، آن‌گاه $M^۲(R)=M(ROR)$.

مثال ۱۱: رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{-۱,۰,۲,۳\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow |b|\le a$

الف) گراف جهت‌دار R را رسم کنید و تحقیق کنید که پادمتقارن است یا خیر؟

ب) ماتریس $M(R)$ را نوشته و ربطه‌ی RoR را با عضوهایش نشان دهید.

مقایسه‌ی دو ماتریس

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی E و F هر دو دارای درایه‌های صفر و یک باشند، آن‌گاه ماتریس E را کوچک‌تر یا مساوی F گوییم هرگاه به ازای هر i و j، درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس E از درایه‌ی متناظرش در F کوچک‌تر یا مساوی باشد و آن را به صورت $E \ll F$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۲: اگر $E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه چند ماتریس مانند F وجود دارد به طوری که $E \ll F$؟

مثال ۱۳: تعداد ماتریس‌های صفر و یک مانند F با شرط $E \ll F$ و $E \neq F$ را برای ماتریس زیر بنویسید.

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مولفه به مولفه تشکیل می‌شود.

بررسی ویژگی‌های چهارگانه‌ی یک رابطه از روی ماتریس متناظر به آن گراف

اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی n عضوی A تعریف شده باشد، آن‌گاه آن رابطه:

۱) دارای خاصیت بازتابی است اگر و تنها اگر تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ باشد. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^{n^۲-n}$ رابطه‌ی بازتابی می‌توان تعریف کرد)

۲) دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر ماتریس M متقارن باشد. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^{\frac{n^۲+n}{۲}}=۲^n \times ۲^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ رابطه‌ی تقارنی می‌توان تعریف کرد)

۳) دارای خاصیت پادتقارنی است اگر و تنها اگر به ازای هر i و j متمایز، از دو درایه‌ی m_{ij} و m_{ji} حداکثر یکی از آن دو برابر با ۱ باشد؛ به عبارتی $M \wedge M^T \ll I_n$. (پس روی یک مجموعه‌ی n عضوی به تعداد $۲^n \times ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ رابطه‌ی پادتقارنی می‌توان تعریف کرد)

۴) دارای خاصیت تعدی است اگر و تنها $M^۲ \ll M$.

اصل شمول و عدم شمول

در جبر مجموعه‌ها به رابطه‌ی زیر، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم.

الف) اصل شمول:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

ب) اصل عدم شمول:

$$|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

نکته: $(|\overline{A\cup B}|=|\overline{A}\cap\overline{B}|)$

مثال ۱۴: چند عضو مجموعه‌ی $A=\{x\in N \mid ۱\le x\le ۸۰۰\}$ نه بر ۷ بخش‌پذیر هستند و نه بر ۱۱.

مثال ۱۵: چند عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که بر ۷ و ۵ تقسیم پذیر نیستند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$.

نکته: تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

مثال ۱۶: معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

مثال ۱۷: معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

مثال ۱۸: به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع بستنی متفاوت، ۸ نوع بستنی انتخاب کرد به شرط آن‌که از هر نوع بستنی حداقل یک عدد انتخاب شود؟

مثال ۱۹: تعداد جمله‌های بسط $(x+y+z)^{10}$ را بیابید.

مثال ۲۰: معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ با شرط $x_4\geq 1$, $x_2\geq 2$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

مثال ۲۱: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=14$ را با شرایط $x_1>1$, $x_2>2$, $x_3>3$ تعیین کنید.

مثال ۲۲: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=14$ را با شرط $x_i>2$ برای $i=1,2,3$ بیابید.

نکته: تعداد جواب‌های صحیح مثبت (طبیعی) نامعادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k<n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}=n$. یعنی برابر است با $\binom{n-1}{k}$.

مثال ۲۳: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x+y+z<7$ را بیابید.

نکته: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k<n$ با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}=n$ با شرط $x_{k+1}\geq 1$ یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}=n-1$ برابر است. یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k}$.

مثال۲۴: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4<6$ را بیابید.

نکته: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n را که نسبت به آن اول باشند، با $\varphi(n)$ نمایش می‌دهیم و در حالتی که آن عدد به صورت $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزی شده باشد، $\varphi(n)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. $\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_k})$.

مثال ۲۵: تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۵۰۰ را که نسبت به ۵۰۰ اولند محاسبه کنید.

نمونه سوال امتحانی ترکیبیات

۱. رابطه‌ی $R=\{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$ روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ تعرف شده است:

الف) گراف جهت‌دار متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

ب) ماتریس $M(R)$ را مشخص کرده و به کمک آن رابطه‌ی مرکب RoR را مشخص کنید.

۲. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{-۱,۰,۲,۳\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow |b|\leq a$

الف) گراف جهت‌دار R را رسم کنید و تحقیق کنید که پادمتقارن است یا خیر؟

ب) ماتریس $M(R)$ را نوشته و از آن‌جا رابطه‌ی RoR را با عضوهایش نشان دهید.

۳. مجموعه‌ی $A=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ و رابطه‌ی R روی A به صورت $R=\{(x,y):|x|=|y|\}$ تعریف شده است.

الف) گراف جهت‌دار متناظر با R را بنویسید.

ب) با استفاده از گراف جهت‌دار متناظر با R تحقیق کنید R پادمتقارن است یا خیر؟

۴. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$R=\{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۱),(۴,۲),(۴,۴)\}$$

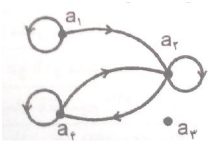
الف) گراف جهت‌دار رابطه را رسم کنید   ب) از روی گراف رابطه مشخص کنید رابطه‌ی R بازتابی است؟

ج) ماتریس نظیر رابطه‌ی R را بنویسید.   د) از روی ماتریس، خاصیت ترایایی R را بررسی کنید.

۵. تعداد ماتریس‌های صفر و یک مانند F با شرط $E \ll F$ و $E \neq F$ را برای ماتریس زیر بنویسید.

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۶. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ تعریف شده است. اگر گراف جهت‌دار متناظر R به صورت زیر باشد:

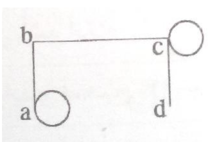


الف) رابطه‌ی R را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) ماتریس متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

ج) با استفاده از ماتریس متناظر با R، تحقیق کنید R متقارن است یا خیر؟

۷. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ تعریف شده است. اگر گراف جهت‌دار متناظر با R به صورت زیر باشد:



الف) رابطه‌ی R را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) با استفاده از گراف جهت‌دار متناظر با R تحقیق کنید R ترایایی است یا خیر؟

ج) ماتریس متناظر با رابطه‌ی R را بنویسید.

۸. چند عضو از مجموعه‌ی $A=\{n\in N \mid ۱\leq n\leq ۱۲۶۲\}$ نه بر ۵ و نه بر ۳ بخش‌پذیر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹. چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آن هر یک از ارقام ۲ و ۳ حداقل یک بار به کار رفته باشد؟

۱۰. تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را به دست آورید.

۱۱. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی مقابل را تعیین کنید. $x_1 + x_2 + 10x_3 = 23$

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ۴: احتمال

پدیده‌ی تصادفی

آزمایش یا پدیده‌ای است که قبل از وقوع، نتیجه‌ی آن به طور قطع معلوم نباشد.

فضای نمونه‌ای (s):

در یک پدیده‌ی تصادفی، به مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن، فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

مثال ۱: یک سکه را ۴ بار پرتاب می‌کنیم؛ فضای نمونه‌ای حاصل چند عضو دارد؟

مثال ۲: یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای حاصل چند عضو دارد؟

مثال ۳: یک ظرف شامل ۳ مهره‌ی متمایز آبی و ۴ مهره‌ی متمایز سفید است. از این ظرف ۲ مهره به طور تصادفی خارج می‌کنیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

پیشامدهای تصادفی:

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی می‌گوییم.

نکته: در یک مجموعه‌ی n عضوی، تعداد پیشامدهای k عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ و تعداد کل پیشامدها 2^n است.

مثال ۴: تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ را بیابید.

مثال ۵: در پرتاب دو تاس با یکدیگر، پیشامد آن را که مجموع دو عدد به دست آمده برابر ۸ باشد، بنویسید.

مثال ۶: از میان ۷ نفر که x و y نیز دو نفر از آن‌ها هستند، چهار نفر به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. تعداد اعضای پیشامدی از آن فضا که x در آن‌ها باشد ولی y نباشد، چند عضو دارد؟

متمم یک پیشامد:

متمم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم. A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

مثال ۷: چهار سکه را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که حداقل یکی از سکه‌ها رو باشد، چند عضو دارد؟

مثال ۸: از بین افراد g,f,e,d,c,b,a، چهار نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A آن باشد که در بین افراد منتخب از بین افراد، a و b، حداقل یکی موجود باشد، آن‌گاه A چند عضو دارد؟

پیشامدهای ناسازگار:

دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم، هرگاه اگر یکی رخ داد، دیگری رخ ندهد. به عبارتی: $A\cap B=\phi$.

فضای نمونه‌ای گسسته: اگر اعضای فضای نمونه‌ای قابل شمارش باشند، به آن فضای نمونه‌ای، گسسته می‌گوییم.

احتمال در فضای گسسته: احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$.

مثال ۹: در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که اعداد ظاهر شده باهم برابر باشند چقدر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه وقوع هر یک از آن‌ها تاثیری بر وقوع دیگری نداشته باشد.

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو پیشامد A و B مستقل باشند آن است که: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند:

۱) A' و B' نیز مستقل‌اند.

۲) A' و B نیز مستقل‌اند.

قوانین احتمال:

۱) اگر S فضای نمونه‌ای باشد، آن‌گاه $P(S)=۱$

۲) اگر A یک پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه $۰\le P(A)\le ۱$

۳) اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند:

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

ج) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

د) $P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)$

۴) اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آن‌گاه $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۵) $P(A')=۱-P(A)$

۶) اگر $A_۱, A_۲, ..., A_n$ دو به دو مستقل باشند، آن‌گاه:

$$P(A_۱\cup A_۲\cup ...\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+...+P(A_n)$$

مثال ۱۰: احتمال قبولی شخصی در امتحان شیمی $\frac{۲}{۳}$ و در درس ریاضی $\frac{۱}{۴}$ و در هر دو درس $\frac{۱}{۶}$ می‌باشد. احتمال آن را حساب کنید که:

الف) حداقل در یکی از دو درس قبول شود

ب) فقط در درس ریاضی قبول شود.

ج) فقط در یکی از این دو درس قبول شود.

د) در هیچ یک از این دو درس قبول نشود.

مثال ۱۱: در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، تعیین کنید:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟

مثال ۱۲: اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۴۴$، آنگاه $P(B)$ را به دست آورید.

مثال ۱۳: احتمال این که شخص A در کنکور قبول شود برابر با $\frac{۳}{۵}$ و احتمال این‌که شخص B در این کنکور قبول شود برابر با $\frac{۲}{۳}$ است.

الف) احتمال این‌که هر دو در این آزمون قبول شوند چقدر است؟

ب) احتمال این‌که فقط B در این آنمون قبول شود چقدر است؟

ج) احتمال این‌که فقط یکی از این دو نفر در آزمون قبول شوند چقدر است؟

د) احتمال این که هیچ یک از آن‌ها در آزمون قبول نشوند چقدر است؟

مثال ۱۴: یک عدد سه رقمی را انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده دارای رقم ۲ باشد چقدر است؟

احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B) \neq ۰$، احتمال وقوع پیشامد A به شرط این‌که پیشامد B رخ داده باشد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

به عبارت دیگر $P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$.

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه $P(A|B) = P(A)$.

مثال ۱۵: فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی به صورت $S = \{a,b,c,d\}$ است. اگر $p(\{a,b,c\}) = \frac{۱}{۲}$ و $p(\{a\}) = \frac{۱}{۴}$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $p(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})$.

مثال ۱۶: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = \frac{۱}{۲}$ و $P(B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B) = \frac{۱}{۴}$:

الف) مقدار $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را حساب کنید.

ب) مقدار $P(A\cup B)$ و $P(A'|B')$ را حساب کنید.

مثال ۱۷: در پرتاب یک تاس، اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آن را بیابید که عدد ۲ ظاهر شده باشد.

مثال ۱۸: در پرتاب یک تاس می‌دانیم عدد رو شده اول است؛ احتمال زوج بودن آن کدام است؟

مثال ۱۹: ظرفی شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی قرمز می‌باشد، مهره‌های آن را یکی پس از دیگری بیرون می‌کشیم. احتمال آن‌که اولی سفید و دو تای دیگر قرمز باشند.

مثال ۲۰: یک کیسه حاوی ۵ مهره‌ی سیاه و ۷ مهره‌ی سفید است. دو مهره به تصادف و متوالیا و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم. با فرض این‌که بدانیم اولین مهره سیاه است، احتمال آن را بیابید که دومین مهره نیز سیاه باشد.

مثال ۲۱: در کیسه‌ی A، ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه و در کیسه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن بیرون می‌کشیم؛ احتمال آنکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

مثال ۲۲: ظرف A دارای ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ظرف B دارای ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف A بیرون آورده و بدون مشاهده‌ی رنگ آن، مهره را در ظرف B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از ظرف B بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که این مهره سفید باشد چقدر است؟

قاعده‌ی بیز:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) \neq ۰$ و $P(B) \neq ۰$، آن‌گاه $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.

مثال ۲۳: ظرف A شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز و ظرف B شامل ۱ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز است.

الف) مهره‌ای به تصادف از ظرف A خارج می‌کنیم، احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

ب) ظرفی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که آن ظرف، ظرف A باشد چقدر است؟

ج) ظرفی به تصادف انتخاب و مهره‌ای به تصادف از درون آن بیرون می‌کشیم، احتمال آن‌که آن مهره سفید باشد چقدر است؟

د) اگر بدانیم آن مهره سفید می‌باشد، احتمال آن را بیابید که ظرف مورد نظر A باشد.

متغیر تصادفی:

یک متغیر تصادفی مثل X، تابعی از یک فضای نمونه‌ای به اعداد حقیقی است.

مثال ۲۴: یک سکه‌ی سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم، اگر متغیر تصادفی X را تعداد (رو)های ظاهر شده در نظر بگیریم، آن‌گاه X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟

مثال ۲۵: یک خانواده دارای سه فرزند است، اگر متغیر تصادفی X را تعداد پسرها در نظر بگیریم، آن‌گاه X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟

تابع جرم احتمال:

اگر به هر یک از مقادیر یک متغیر تصادفی گسسته‌ی X، احتمال مربوطه‌اش را متناظر کنیم، آن‌گاه تابع به دست آمده تابع جرم احتمال می‌گوییم.

به عبارت دیگر، احتمال به صورت زیر بین مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ توزیع می‌شود که به این جدول، جدول توزیع احتمال می‌گوییم.

x_n	...	x_2	x_1	x_i
$P(X = x_n)$	...	$P(X = x_2)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_i)$

نکته: هر کدام از احتمال‌های سطر دوم بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

نکته: مجموع احتمال‌های سطر دوم جدول همواره برابر با ۱ است.

مثال ۲۶: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

۳	۲	۱	۰	برد X
$\frac{1}{12}$	a	$\frac{3a}{4}$	a	$p(X = x)$

الف) a چقدر است؟

ب) $p(X \leq 2)$ چقدر است؟

مثال ۲۷: یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد (رو)های ظاهر شده در این سه پرتاب تعریف می‌کنیم.

الف) X چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

ب) جدول توزیع احتمال X را رسم کنید.

ج) $P(X > 1)$ را محاسبه کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲۸: نشان دهید تابع $x=-۱,۰,۱,۳ \quad , \quad f(x)=\frac{|x-۲|}{۷}$، تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی X است.

مثال ۲۹: به ازای چه مقادیر a، جدول زیر، جدول توزیع احتمال یک متغیر تصادفی X است؟

x_i	-۷	۰	۱	۳
p_i	$\frac{۲a-۳}{۱۰}$	$\frac{a+۱}{۱۰}$	$\frac{a-۱}{۱۰}$	$\frac{a-۲}{۱۰}$

مثال ۳۰: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است، مقدار a را به دست آورید.

$$\begin{cases} P(x=i)=\frac{i}{i^۲+۱} \quad , \quad i=۱,۲,۳ \\ P(x=j)=a \quad , \quad j=۴,۵,۶,۷,۸,۹ \\ P(x=k)=۰ \quad , \quad k=۱۰,۱۱,۱۲,... \end{cases}$$

مثال ۳۱: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به شکل زیر است، مقدار k کدام است؟

$$P(X=x)=\begin{cases} k^۲x \quad , \quad x=۱,۲,۳,۴ \\ ۰ \quad , \quad x=۵,۶,۷,... \end{cases}$$

مثال ۳۲: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $i=۱,۲,۳,۴,۵ \;,\; P(X=i)=\frac{\binom{۵}{i}}{a}$ است، مقدار $P(X=۴)$ را به دست آورید.

توزیع برنولی:

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار ۰ و ۱ را می‌پذیرد، متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را توزیع برنولی می‌گوییم.

در توزیع برنولی، احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با q نمایش می‌دهیم که همواره $q=۱-p$.

نکته ۳۳: توزیع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر است.

$$P(X=i)=\begin{cases} p^i q^{۱-i} \quad , \quad i=۰,۱ \\ ۰ \quad , \quad i\neq ۰,۱ \end{cases}$$

مثال ۳۴: یک سکه‌ی سالم را آن‌قدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار (رو) بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) احتمال آن را حساب کنید که سکه در پرتاب ششم (رو) بیاید.

مثال۳۵: یک تاس سالم را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم؛ احتمال آن را حساب کنید که در پرتاب سوم برای اولین بار عددی مضرب ۳ ظاهر شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمونه سوال امتحانی مبحث احتمال

۱. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد d,c,b,a می‌باشد به طوری که $P(\{b,c,d\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{b\})=\frac{۱}{۴}$، مطلوب است:

الف) $P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})$

ب) $P(\{a\}|\{a,c,d\})$

۲. سکه‌ی سالمی پرتاب می‌شود. اگر شیر بیاید، به تصادف یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و اگر خط ظاهر شود، عضوی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی عدد انتخاب شده زوج است؟

۳. اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۴۴$، آنگاه $P(B)$ را به دست آورید.

۴. اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $P(B|A)$ را محاسبه کنید.

۵. در یک دانشکده‌ی ۱۲۰۰ نفری، ۸۰۰ دانشجوی دختر وجود دارد و بقیه پسر هستند. اگر ۷۰ درصد دختران و ۴۰ درصد پسران در درس ریاضی قبول شده باشند، با چه احتمالی یک نفر که به تصادف از دانشکده انتخاب می‌شود، در درس ریاضی قبول نشده‌اند؟

۶. دو ظرف داریم به طوری که اولی شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است و دومی شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از ظرف‌ها را انتخاب و از آن مهره‌ای را خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره سفید باشد چقدر است؟

۷. پیشامدهای مستقل و متغیر تصادفی را تعریف کنید.

۸. در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، تعیین کنید:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟

۹. دو تاس مختلف را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که حداقل یکی ۵ بیاید و B پیشامد آن باشد که شماره‌های رو شده برابر باشند، آن‌گاه:

الف) آیا A و B ناسازگارند؟

ب) آیا A و B مستقل اند؟

ج) اگر A اتفاق افتاده باشد، احتمال رخ دادن B کدام است؟

۱۰. در پرتاب دو تاس، اگر پیشامد A، آمدن دو عدد اول و پیشامد B آمدن مجموع دو عدد کمتر از ۵ باشد:

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به دست آورید.

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟

ج) اگر A رخ داده باشد با چه احتمالی B رخ می‌دهد؟

۱۱. در دو جعبه‌ی یکسان، مهره‌هایی به این شرح قرار دارند که در جعبه‌ی اول ۳ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی قرمز و در جعبه‌ی دوم ۱۰ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. مهره‌ای را از جعبه‌ی اول خارج نموده و در جعبه‌ی دوم قرار می‌دهیم. حال مهره‌ای به تصادف از جعبه‌ی دوم انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد چقدر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲. احتمال قبولی شخصی در امتحان شیمی $\frac{۲}{۳}$ و در درس ریاضی $\frac{۱}{۴}$ و در هر دو درس $\frac{۱}{۶}$ می‌باشد. احتمال آن را حساب کنید که:

الف) فقط در درس ریاضی قبول شود.

ب) در هیچ یک از این دو درس قبول نشود.

۱۳. دو کیسه داریم که در کیسه‌ی اول ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه و در کیسه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌کشیم. اگر مهره‌ی انتخاب شده سفید باشد، احتمال این را که مهره متعلق به کیسه‌ی دوم باشد محاسبه کنید.

۱۴. جعبه‌ای محتوی ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. یکی یکی دو مهره به تصادف و بدون جایگزاری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال این را که مهره‌ی دوم همرنگ مهره‌ی اول باشد محاسبه کنید.

۱۵. ظرف A حاوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ظرف B حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف A بیرون آورده و بدون مشاهده در ظرف B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از ظرف B بیرون میاوریم. احتمال این‌که این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱۶. دو ظرف همانند داریم که اولی شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی قرمز و دومی شامل ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز است. از ظرف اول ۳ مهره و از ظرف دوم ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف جدیدی قرار می‌دهیم. اگر از ظرف جدید مهره‌ای به تصادف خارج کنیم:

الف) احتمال این‌که این مهره سفید باشد چقدر است؟ جواب $\frac{۷۱}{۱۴۰}$

ب) اگر مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد، احتمال این‌که از ظرف دوم باشد چقدر است؟ جواب $\frac{۳۵}{۷۱}$

۱۷. سکه‌ی همگنی را سه بار می‌اندازیم:

A: پیشامد رخ دادن پشت در پرتاب سوم B: پیشامد رخ دادن دقیقا دو پشت در سه پرتاب باشد.

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه کنید.

ب) آیا A و B مستقل‌اند؟

ج) اگر در پرتاب سوم پشت ظاهر شود احتمال این‌که پیشامد B اتفاق افتاده باشد چقدر است؟

۱۸. سه ظرف همانند داریم به طوری که در ظرف اول ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سبز موجود است. در ظرف دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه موجود است و در ظرف سوم تعدادی مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم.

الف) احتمال این‌که مهره‌ی خارج شده سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر مهره‌ی خارج شده سفید باشد احتمال این‌که از ظرف اول باشد چقدر است؟

۱۹. نشان دهید تابع رو به رو یک تابع توزیع احتمال است:

$$p(X=x)=\frac{2x+2}{n^2+3n} \qquad (x=1,2,3,\dots,n)$$

۲۰. جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی تعداد دختران یک خانواده با ۳ فرزند را رسم کنید.

۲۱. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را صفر تعریف می‌کنیم. اگر عدد ظاهر شده روی تاس، اول باشد؛ در غیر این‌صورت مقدار X را برابر عدد ظاهر شده تعریف می‌کنیم.

الف) مقادیری را که متغیر تصادفی X می‌تواند اختیار کند تعیین کنید.

ب) جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X را تشکیل دهید.

ج) احتمال پیشامدی را که برای آن $X \leq ۱$ می‌باشد به دست آورید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲. اگر تابع $P(X=x)=\frac{۱}{a^{۲}}\left[۲(a-x)+۱\right]$، یک تابع جرم احتمال باشد: $x=۱,۲,۳,۴$

الف) مقدار a را مشخص کنید.

ب) برای $a=۴$ جدول توزیع احتمال را بنویسید.

۲۳. در پرتاب دو تاس اگر متغیر تصادفی X را قدر مطلق تفاضل دو شماره تعریف کنیم:

الف) جدول تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی را رسم کنید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن $X\leq ۲$ می‌باشد به دست آورید.

۲۴. در ظرفی ۱ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه وجود دارد. اگر از این ظرف ۳ مهره با جای‌گذاری خارج کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد مهره‌های سفید خارج شده تعریف کنیم:

الف) متغیر تصادفی X چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟

ب) تابع احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

پایانی اول	بارم	پایانی دوم	بارم
فصل ۱: گراف و کاربردهای آن	۹	فصل ۱: گراف و کاربردهای آن	۲
فصل ۲: نظریه‌ی اعداد	۱۱	فصل ۲: نظریه‌ی اعداد	۳
		فصل ۳: مباحثی دیگر در ترکیبیات	۷
		فصل ۴: احتمال	۸
جمع	۲۰	جمع	۲۰

دانلود از سایت ریاضی سرا