



RIAZISARA

www.riazisara.ir

سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فهرست

صفحه

فصل

۱	اول: معادله درجه دوم.....
۳۹	دوم: تابع.....
۱۰۶	سوم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی.....
۱۲۷	چهارم: آمار.....
۱۹۷	پنجم: شمارش و احتمال.....
۲۵۳	ششم: مدل سازی دنباله. الگوهای خطی و غیر خطی.....

درس اول: معادله مسائل توصیفی

معادله درجه اول: هر معادله که پس از ساده کردن به فرم $(a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}) ax + b = 0$

در بیاید را معادله درجه اول گوئیم و تنها جواب معادله به صورت $x = -\frac{b}{a}$ می باشد.

مثال: جوابهای معادلات زیر را بدست آورید.

الف) $6x - 7 = 0$

ب) $5x - 3 = 2x + 6$

پ) $3x + 9 = x + 1$

ت) $4x - 3 = -3x + 4$

مثال (کتاب درسی): معمای زیر را به زبان ریاضی نوشته و آن را حل کنید.

« ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم. »

نکته: بعضی اوقات عبارتهایی را به ما می دهند که اگر آنها را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم، تبدیل به یک معادله درجه اول می شود.

مثال: عبارتهای زیر را به معادله تبدیل و آن را حل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه ۲ مساوی با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) عددی را بیابید که سه برابر آن به علاوه نه مساوی خود عدد بعلاوه ۱ باشد.

مثال: طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۳ به ۱ می‌باشند. اگر محیط این مستطیل ۵۶ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

مثال: مجموع سه عدد زوج متوالی برابر ۳۶ می‌باشد، عدد کوچکتر کدام است؟

درس دوم: حل معادله درجه دوم و کاربردها

معادله درجه دوم: هر معادله که پس از ساده کردن به فرم $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) ax^2 + bx + c = 0$ در بیاید را معادله درجه دوم گوئیم.

نکته: تفاوت اتحاد و معادله درجه دوم در این است که اتحاد به‌ازای همه مقادیر برقرار است ولی معادله به‌ازای بعضی از مقادیر برقرار است.


مثال: اگر عبارت زیر یک اتحاد باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

$$(2x + 3)^2 = (a - 1)x^2 + 2(b + 3)x + 9$$

نکته: اگر داشته باشیم $A \times B = 0$ آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$

روش‌های حل معادله درجه دوم:

۱ تجزیه: در روش تجزیه با استفاده از اتحادها عبارت درجه دوم را به ضرب در عبارت درجه اول تبدیل کرده و با استفاده از نکته بالا جواب یا ریشه‌های معادله درجه دوم را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

یادآوری از اتحادها: 

$$\Rightarrow \text{اتحاد مربع} \begin{cases} \text{مجموع: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{تفاضل: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اتحاد جمله مشترک} (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

★ **تذکر:** همه‌ی معادلات درجه دوم را نمی‌توان به کمک تجزیه حل نمود.

🗨️ **مثال:** معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 + 2x + 1 = 0$

ب) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

پ) $4x^2 - 16 = 0$

ت) $x^2 = 9$

ث) $x^2 + 6x + 8 = 0$

ج) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

چ) $x^2 + 3x + 5 = 0$

۲ روش مربع کامل کردن: در معادله درجه دوم داده شده نصف مربع ضریب x را به دو

طرف معادله اضافه می‌کنیم که در یک طرف اتحاد مربع بوجود می‌آید و طرف دیگر یک عدد

حقیقی است. به عبارت دیگر معادله درجه دوم ما به $(x \pm a) = k$ تبدیل خواهد شد که برای

جواب آن حالت‌های زیر بوجود می‌آید:

الف) اگر $k > 0$ باشد، از دو طرف معادله جذر گرفته و دو جواب زیر را خواهیم داشت:

$$x \pm a = \pm \sqrt{k} \longrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{k} \pm a \\ x = -\sqrt{k} \pm a \end{cases}$$

ب) اگر $k = 0$ باشد، معادله یک ریشه مضاعف دارد. (یعنی هر دو ریشه برابر هستند.)

$$x \pm a = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

پ) اگر $k < 0$ باشد، معادله درجه دوم ما جواب با ریشه نخواهد داشت.

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل بنویسید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

پ) $x^2 + 6x + 9 = 0$

نکته: اگر در معادله درجه دوم x^2 دارای ضریب غیر از یک باشد، ابتدا دو طرف معادله را بر آن ضریب تقسیم کرده و سپس مانند بالا عمل می‌کنیم.

ت) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

ث) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

روش ۳: اگر به کمک روش مربع کامل معادله درجه $ax^2 + bx + c$ را حل کنیم خواهیم داشت.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

مربع نصف $\frac{b}{a}$

$$\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که عبارت زیر رادیکال برابر Δ است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ و ریشه‌های معادله به صورت زیر می‌باشند:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

مثال: معادلات زیر را به روش Δ حل کنید.

الف) $x^2 + 2x + 1 = 0$

ب) $4x^2 - 16 = 0$

پ) $x^2 + 3x + 5 = 0$

ت) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

نکته: برای فهمیدن اینکه معادله مورد نظر دارای چند ریشه است یا اینکه ریشه ندارد از

روابط زیر استفاده می‌کنیم:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله مورد نظر دو ریشه متفاوت دارد. (a و c مختلف علامت باشند)

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله مورد نظر دو ریشه یکسان دارد یا به عبارت دیگر ریشه مضاعف

دارد. $x_1, x_2 = -\frac{b}{2a}$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله مورد نظر ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 6x + 7 = 0$

ب) $2x^2 - 4x + 6 = 0$

پ) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، مجموع، حاصل ضرب و قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

➤ $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

➤ $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

➤ $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال: مجموع، حاصل ضرب و قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید.

الف) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

ب) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آنگاه به کمک اتحادها

روابط زیر را داریم :

$$۱) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$$

$$۶) \alpha\beta^r + \beta\alpha^r = S.P$$

$$۲) \alpha^r + \beta^r = S^r - rP$$

$$۷) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + r\sqrt{P}} \quad ; \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

$$۳) \frac{1}{\alpha^r} + \frac{1}{\beta^r} = \frac{S^r - rP}{P^r}$$

$$۸) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{S}{\sqrt{P}} \quad ; \quad (\alpha, \beta > 0)$$

$$۴) \alpha^r + \beta^r = S^r - rPS$$

$$۹) \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{P(S + rP)} \quad ; \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

$$۵) \frac{1}{\alpha^r} + \frac{1}{\beta^r} = \frac{S^r - rPS}{P^r}$$

$$۱۰) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^r - rP}{P}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

ب) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$

پ) $\alpha^r + \beta^r =$

ت) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$

ث) $\sqrt{\alpha^r(\beta - 1)} =$

نکته: بعضی اوقات عبارات نامتقارنی را از ما می‌خواهند که نمی‌توانیم به کمک روابط گفته شده آن را بدست آوریم (مثال شماره ۳ بالا) و می‌توانیم با کمک معادله سوال را حل کنیم.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - \gamma x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\sqrt{\alpha^2(\gamma\alpha - 1)}$ کدام است؟

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ کدام است؟

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 21x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

کاربرد بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم :

۱ در معادله درجه دومی مثل $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر مجموع ضرایب برابر صفر باشد، آنگاه

$$a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری } \frac{c}{a} \text{ است.}$$

۲ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر داشته باشیم $a + c = b$ ، آنگاه یکی از ریشه‌ها

$$a + c = b \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{-۱ و دیگری } -\frac{c}{a} \text{ است.}$$

مثال: ریشه معادله‌های زیر را بدست آورید.

الف) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

ب) $x^2 - 3x + 2 = 0$

پ) $-3x^2 + 2x + 5 = 0$

ت) $kx^2 - x - k + 1 = 0$

۳ نوشتن معادله درجه دومی که مجموعه جواب آن در اختیار باشد :

برای نوشتن معادله درجه دومی که مجموعه جواب آن در اختیار باشد از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده می‌کنیم که در آن S مجموع ریشه‌ها و P حاصلضرب ریشه‌ها می‌باشد.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۵+ و ۳- باشد.

۴ تعیین دو عدد که مجموع و حاصل ضرب آنها در اختیار می‌باشد.

مجموع دو عدد را S و حاصل ضرب آنها را P فرض می‌کنیم و سپس در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ جایگذاری کرده و ریشه‌های بدست آمده، اعداد مورد نظر هستند.
مثال: دو عدد را چنان بیابید که مجموع آنها برابر ۶ و حاصل ضرب آنها برابر ۲ باشد.

۵ هرگاه در یک معادله درجه دوم با ضرایب گویا یکی از ریشه‌های معادله $m - \sqrt{n}$ باشد، ریشه دیگر $m + \sqrt{n}$ است.

مثال: معادله درجه دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است؟

مثال: اگر a و b اعدادی گویا و $3 + \sqrt{2}$ یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ باشد، b کدام است؟

کاربرد در معادله در مسائل اقتصادی :

در مسائل اقتصاد اگر x تعداد یا مقدار محصول ما در یک شرکت یا کارخانه باشد، در این صورت سه تابع زیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

۱. تابع هزینه Cost یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

۲. تابع سود Profit یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

۳. تابع درآمد Revenue یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه‌ای که بین سه تابع فوق وجود دارد به صورت زیر است :

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad \rightarrow \quad \text{هزینه} - \text{درآمد} = \text{سود}$$

☆ **تذکر:** برای سود شرکت یا کارخانه سه حالت زیر بوجود می‌آید :

الف) $P(x) > 0 \rightarrow R(x) > C(x)$ شرکت یا کارخانه سود کرده است

ب) $P(x) = 0 \rightarrow R(x) = C(x)$ نقطه سر به سر (نه سود نه ضرر)

ج) $P(x) < 0 \rightarrow R(x) < C(x)$ شرکت یا کارخانه ضرر کرده است

مثال: اگر معادله درآمد و هزینه یک شرکت به ترتیب به صورت $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$

و $C(x) = 3600 + 15x$ باشد که در آن‌ها x تعداد کالای تولیدی است. یکی از نقاط سر به سر

کدام است؟

مثال: تابع سود شرکتی به صورت $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 10$ (میلیون تومان) می‌باشد.

بیشترین سود این کارگاه چند میلیون تومان است؟ (x تعداد کالاهاست)

درس سوم: معادلات شامل عبارتهای گویا

معادلات کسری که در مخرج کسرشان متغیر وجود دارد.

مثال: $\frac{x+3}{5} = \frac{2}{3}$ یک معادله گویا نیست؟ (چرا؟)

مثال: $\frac{x+1}{2} = \frac{3}{x-1}$ یک معادله گویاست.

مثال: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = \frac{1}{x + 2}$

فرم کلی معادلات گویا به صورت $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ می‌باشند که A, B, C, D عبارتهای جبری هستند و حداقل یکی مخرج کسرها یعنی B یا D باید متغیر باشد.

❖ **روش حل:** طرفین وسطین انجام داده یعنی $AD = BC$ و سپس با ساده کردن، ریشه‌های معادله موردنظر را بدست می‌آوریم ولی باید حواسمان باشد که ریشه‌های بدست آمده مخرج را صفر نکنند.

مثال:

الف) $\frac{x+1}{x} = x$

ب) $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x}$

پ) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

$$\text{ت) } \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{x - 3}{x + 1}$$

نکته: بعضی اوقات باید ابتدا یک طرف معادله را ساده کرده و سپس آن را حل کنیم.

$$\text{ث) } \frac{2x + 3}{x - 1} - \frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{10}{x^2 - 1}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 2}$$

نکته: بعضی اوقات یکی از ریشه‌های معادله را داده و از ما مقدار مجهولی مانند a را می‌خواهند.

مثال: اگر $x = 3$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{a + 3}{2x + 3} = \frac{x + 1}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

تست های فصل اول: 

تست ۱: مقدار x از تساوی $۲x(x-1)+۳=(x+۲)^۲+(x+1)^۲$ کدام است؟

۱. $-\frac{1}{4}$

۲. $\frac{1}{2}$

۳. $-\frac{1}{2}$

۴. $\frac{1}{4}$

تست ۲: اگر $x=۲$ جواب معادله $\frac{x}{۲}+1=mx+m-1$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱. $\frac{1}{3}$

۲. -1

۳. 1

۴. $\frac{1}{3}$

تست ۳: به ازای کدام مقدار a ، معادله $a(x-۲)=۵x-1$ غیرممکن است؟

۱. صفر

۲. ۵

۳. -۵

۴. ۴

تست ۴: اگر $a \neq ۲b$ ، جواب معادله $a(x-1)-۲bx+۲b=0$ کدام است؟

سراسری انسانی ۷۷

۱. -1

۲. a

۳. b

۴. 1

✓ **تست ۵:** عرض یک مستطیل، نصف طول آن است. اگر محیط مستطیل ۱۵ واحد باشد، اختلاف طول و عرض آن چند واحد است؟

۵.۱

۵/۵.۲

۲.۳

۲/۵.۴

✓ **تست ۶:** مجموع ثلث و خمس عددی، ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن است، ربع این عدد

کدام است؟

۶۰.۱

۱۲۰.۲

۹۰.۳

۳۰.۴

✓ **تست ۷:** سن پدری ۴ برابر سن فرزندش است، اگر سن پدر ۵۶ سال باشد، چند سال پیش سن پدر ۸ برابر سن فرزندش بوده است؟

۶.۱

۷.۲

۸.۳

۹.۴

✓ **تست ۸:** نقطه $A(2m-1, m+3)$ روی خط $y = -2x + 1$ قرار دارد. نقطه‌ی A در کدام ربع

مختصاتی قرار دارد؟

۱. اول

۲. دوم

۳. سوم

۴. چهارم

✓ **تست ۹:** نصف $\frac{3}{4}$ زمینی برای ساخت ساختمان مسکونی و $\frac{1}{3}$ باقی مانده برای حیاط و پارکینگ و بقیه به عنوان باغچه در نظر گرفته شده است. اگر مساحت باغچه ۴۰۰ مترمربع باشد، مساحت زمین چقدر بوده است؟

- ۱. ۹۶۰
- ۲. ۷۲۰
- ۳. ۶۰۰
- ۴. ۵۴۰

✓ **تست ۱۰:** یک عدد، همان مقدار از ۵ کمتر است که از ۲ بیشتر است. آن عدد کدام است؟

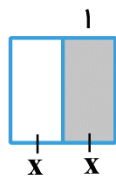
- ۱. ۲
- ۲. $\frac{2}{5}$
- ۳. $\frac{3}{5}$
- ۴. ۳

✓ **تست ۱۱:** تفاضل عددی از ۲۵، ثلث مجموع همان عدد با ۳۵ است. آن عدد کدام است؟

سراسری انسانی ۷۶

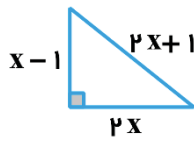
- ۱. ۹
- ۲. ۱۰
- ۳. ۱۱
- ۴. ۱۲

✓ **تست ۱۲:** اگر مساحت ناحیه رنگی برابر با ۲ واحد باشد، مساحت مربع چقدر است؟



- ۱. ۸
- ۲. ۱۶
- ۳. ۶۴
- ۴. ۳۶

تست ۱۳: محیط مثلث مقابل چقدر است؟



۳۰.۱

۲۵.۲

۶۰.۳

۴۵.۴

تست ۱۴: در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی الساقین، از $\frac{2}{3}$ مساحت مربع به اندازه $\frac{8}{3}$ واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث کدام است؟

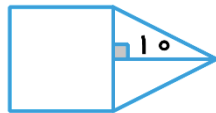
سراسری ۹۹

۳۰.۱

۳۵.۲

۴۰.۳

۴۵.۴



تست ۱۵: در شکل زیر مساحت مربع هاشور خورده از $\frac{3}{4}$ مساحت مستطیل بزرگتر، ۱۸ واحد مربع بیشتر است. محیط مستطیل بزرگتر، کدام است؟

خارج ۹۹

۴۴.۱

۴۸.۲

۵۲.۳

۵۴.۴



تست ۱۶: در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

انسانی ۱۴۰۱

۵.۱

۵/۵.۲

۶/۵.۳

۷.۴



✓ **تست ۱۷:** در شکل زیر، مساحت مربع هاشور خورده از $\frac{۳}{۴}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به

اندازه $\frac{۲۷}{۳۲}$ واحد مربع بیشتر است. اندازه قاعده متوازی الاضلاع، کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۱



۱. $\frac{۹}{۸}$

۲. $\frac{۳}{۲}$

۳. $\frac{۱۷}{۸}$

۴. $\frac{۵}{۲}$

✓ **تست ۱۸:** می‌خواهیم دور تا دور باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن، دو برابر عرض آن است را حصار بکشیم، به طوری که بازدید کنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین محصور شده $۱ + \frac{1}{۱۸}\pi$ برابر بیشتر از مساحت باغچه باشد، طول باغچه چند

دی ۱۴۰۲

متر است؟

۱. ۸

۲. ۶

۳. ۴

۴. ۳

✓ **تست ۱۹:** کدامیک از معادلات زیر درجه دوم است؟

۱. $(۳x - 1)^2 = (x + 1)^2$

۲. $(۲x - 1)^2 = (۲ + ۲x)^2$

۳. $(x - 1)^2 = x^2 - ۵x + ۶$

۴. $۲x^2 + ۵x - ۸ - x^2 = 1 + x^2$

✓ تست ۲۰: حاصلضرب ریشه‌های معادله $(x+1)(x-5)+12(x+1)=0$ کدام است؟

سراسری انسانی ۷۳

۱.۱

-۱.۲

۷.۳

-۷.۴

✓ تست ۲۱: جواب کوچکتر معادله $(x-1)(x+2)=(x-1)$ کدام است؟

۲.۱

۱.۲

-۱.۳

-۲.۴

✓ تست ۲۲: به‌ازای کدام مقدار m یکی از جواب‌های معادله $x^2 - mx - m = 1$ برابر ۴ است؟

۳.۱

۲.۲

-۲.۳

-۳.۴

✓ تست ۲۳: اگر m جواب معادله $3x^2 + x + 5 = 0$ باشد، حاصل $3m^2 - m + 1$ کدام است؟

۵.۱

۶.۲

۷.۳

۸.۴

✓ **تست ۲۴:** برای حل معادله درجه دوم $4x^2 - 5x = c$ به روش مربع کامل کردن، به ازای کدام مقدار c می‌توان گفت معادله حتما دارای جواب است؟

۲.۱ -

۳.۲ -

۱.۳ -

۱.۴

✓ **تست ۲۵:** برای حل معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 8 = 0$ به روش مربع کامل کردن در مرحله استفاده از خاصیت ریشه زوج از کدام عدد جذر می‌گیریم؟

۱. $\frac{19}{2}$ ۲. $\frac{41}{4}$ ۳. $\frac{23}{6}$

۴. ۱۷

✓ **تست ۲۶:** برای حل معادله درجه دوم $2x(x - 2) = 3$ به روش مربع کامل، کدام مقدار را باید به طرفین تساوی اضافه کنیم؟

۱. ۲

۲. ۴

۳. ۱

۴. صفر

✓ تست ۲۷: اگر معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم به معادله $(x + a)^2 = 1 + b$ خواهیم رسید. حاصل $a + b$ را بدست آورید.

۳.۱

۶.۲

۱۵/۴.۳

۱۳/۴.۴

✓ تست ۲۸: ریشه مضاعف معادله $mx^2 + mx + 1 = 0$ کدام است؟

۱/۲.۱

۴.۲

-۴.۳

-۱/۲.۴

✓ تست ۲۹: معادله درجه دوم $x(2x - 5) = a$ ، به ازای یک مقدار a دارای جواب مضاعف است، مقدار این جواب کدام است؟

-۵/۲.۱

-۵/۴.۲

۵/۴.۳

۵/۲.۴



✓ **تست ۳۰:** به ازای چه مقدار n ، معادله درجه دوم $m^3x^2 - 6mx + 2m + n = 0$ دارای ریشه

مضاعف $\frac{3}{4}$ است؟

۴.۱

۳.۲

۲.۳

۱.۴

✓ **تست ۳۱:** به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - a - 1 = 0$ مساویند؟

۱.۵-

۲.۳-

۳.۱

۴.۲

✓ **تست ۳۲:** تفاضل ریشه‌های معادله $ax^2 + 6x + 1 = 0$ برابر صفر است. ریشه بزرگتر معادله

$x^2 - ax + 20 = 0$ کدام است؟

۱.۴-

۲.۴

۳.۵

۴.۵-

✓ **تست ۳۳:** اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه

دیگر کدام است؟

۱. ۴/۰-

۲. ۳/۰-

۳. ۳/۰

۴. ۴/۰

✓ **تست ۳۴:** در معادله درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱ است. ریشه بزرگتر کدام است؟

- ۵. ۱
- ۶. ۲
- ۷. ۳
- ۸. ۴

✓ **تست ۳۵:** در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصلضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه بزرگتر کدام است؟

- ۲/۵. ۱
- ۴/۳. ۲
- ۲/۳. ۳
- ۱. ۴

✓ **تست ۳۶:** اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 6x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - 7\alpha - \beta$ را بدست آورید.

- ۲. ۱
- ۴. ۲
- ۴. ۳
- ۲. ۴

✓ **تست ۳۷:** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 7x - 3 = 0$ و $\alpha > 0$ باشد. حاصل

سراسری ۱۴۰۲

$|\alpha + 2\beta| + |\alpha| - |\beta|$ کدام است؟

- ۲ α + ۳ β . ۱
- ۲ α - ۳ β . ۲
- β . ۳
- β . ۴

✓ **تست ۳۸:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، آنگاه حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام

است؟

۱. $\sqrt{2}$

۲. $\sqrt{3}$

۳. $\sqrt{4}$

۴. $\sqrt{5}$

✓ **تست ۳۹:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\alpha}{3-\beta} + \frac{\beta}{3-\alpha}$

کدام است؟

۱. ۲

۲. ۴

۳. ۶

۴. ۸

✓ **تست ۴۰:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ باشند، مقدار عبارت

$\alpha^6 + \beta^6$ چقدر است؟

۱. ۵

۲. ۶۵

۳. ۲۷

۴. ۹

✓ **تست ۴۱:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام

است؟

۱. ۴

۲. ۵

۳. -۴

۴. -۵

✓ تست ۴۲: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ مقدار عبارت $(\alpha^2 - 4\alpha + 2)(\beta^2 - 4\beta + 4)$ چقدر است؟

۸۱.۱

۳.۲

۴.۳

۶.۴

✓ تست ۴۳: اگر a و b اعداد مخالف صفر و $a + b$ و ab جواب‌های معادله $x^2 - ax - b = 0$ باشند، تفاضل ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱. $\sqrt{5}$ ۲. $2\sqrt{5}$

۳. ۳

۴. $\frac{3}{2}$

✓ تست ۴۴: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد α ، β و a تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

سراسری تجربی ۱۴۰۱

۱. -۲

۲. ۲

۳. -۱

۴. ۱

✓ تست ۴۵: ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 + (k-8)x - 1 = 0$ قرینه یکدیگر هستند.

حاصل ضرب ریشه‌های معادله $-x^2 - kx + 2k = 0$ کدام است؟

۱. ۱۶

۲. -۱۶

۳. ۸

۴. -۸

✓ **تست ۴۶:** در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها، از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱۰. ۱

۱۲. ۲

۱۴. ۳

۱۵. ۴

✓ **تست ۴۷:** به ازای یک مقدار m ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

۱. $-1/5$

۲. $1/5$

۳. ۲

۴. ۳

✓ **تست ۴۸:** در کدام معادله، مجموعه جواب‌ها به صورت $\{3, -\frac{1}{2}\}$ است؟

۱. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

۲. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

۳. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

۴. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

✓ **تست ۴۹:** جوابهای کدام معادله به صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ است؟

۱. $x^2 + 2x - 1 = 0$

۲. $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$

۳. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

۴. $4x^2 - 2x + 1 = 0$

✓ **تست ۵۰:** ضرایب معادله $2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$ صحیح هستند. اگر به ازای مقدار k ، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

سراسری انسانی ۱۴۰۲

۴.۱

۵.۲

۷.۳

۲۸.۴

✓ **تست ۵۱:** مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

انسانی تیر ۱۴۰۲

۱/۷۵.۱

۲/۷۵.۲

-۱/۷۵.۳

-۲/۷۵.۴

✓ **تست ۵۲:** مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $-x^2 + 2x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟

خارج انسانی تیر ۱۴۰۲

۰/۷۵.۱

۰/۸.۲

۱/۲.۳

۱/۲۵.۴

✓ **تست ۵۳:** یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 12000 + 60x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۹۰ تومان می‌فروشد. این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

۳۹۹.۱

۴۰۰.۲

۴۰۱.۳

۶۰۱.۴

✓ **تست ۵۴:** تابع هزینه برای تولید تعداد x کالا از یک محصول به صورت خطی است. به ازای هزینه‌های ۸۵۰ و ۱۰۰۰ تومانی به ترتیب ۲۰ و ۲۵ کالا تولید می‌شود. اگر شرکت هر کالا را ۵۵ تومان بفروشد، این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

سراسری ۱۴۰۲

۹.۱

۱۰.۲

۱۱.۳

۱۲.۴

✓ **تست ۵۵:** یک کارگر نوعی کالا تولید میکند و هر واحد آن را ۲۴۰ ریال می‌فروشد. اگر صاحب کارگاه در هر روز، x واحد کالا تولید کرده و تابع هزینه آن $C(x) = x^2 + 60x + 200$ باشد، بیشترین سود روزانه آن کدام است؟

سراسری ۹۹

۵۶۰۰.۱

۶۱۰۰.۲

۷۹۰۰.۳

۸۱۰۰.۴

✓ **تست ۵۶:** اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{3}x^2 + 28x$ و تابع هزینه $y = 16x + 55$ باشد،

سراسری ۹۸

ماکسیم مقدار سود کدام است؟

۴۵.۱

۴۸.۲

۵۳.۳

۵۷.۴

✓ **تست ۵۷:** یک شرکت روزانه ۷۲۰۰۰۰۰ ریال برای تولید یک نوع کالا هزینه می‌کند. اگر $R(x) = 2200x + 10x^2$ ، تابع درآمد روزانه شرکت حاصل از فروخ واحد از همین کالا باشد،

سراسری ۱۴۰۱

نقطهٔ سر به سر کدام است؟

۹۰۰.۱

۲۰۰.۲

۱۸۰.۳

۸۰.۴

✓ **تست ۵۸:** اگر x تعداد کالای مورد تقاضا باشد، معادلات درآمد و هزینه به ترتیب به صورت

$R(x) = 200x - \frac{2x^2}{3}$ و $C(x) = 500 + 20x$ است. ماکزیم سود به ازای کدام مقدار x حاصل

می‌شود؟

۳۲۰.۱

۳۰۰.۲

۱۳۵.۳

۲۴۰.۴

✓ **تست ۵۹ :** اگر x تعداد واحد کالای مورد تقاضا باشد، معادله درآمد به صورت $R(x) = 100x - 0.1x^2$ و معادله هزینه به صورت $C(x) = 400 + 60x$ است. ماکزیم سود

خارج از کشور ۹۵

کدام است؟

۱. ۲۴۰۰

۲. ۳۲۰۰

۳. ۳۶۰۰

۴. ۳۸۰۰

✓ **تست ۶۰ :** یک شرکت سود حاصل از فروش x کالا را به صورت ماهانه و به کمک رابطه $P(x) = -0.05x^2 + 4x - 25$ محاسبه می‌کند. بیشترین سود ماهانه این شرکت کدام است؟ (x تعداد کالا است)

۱. ۵۰

۲. ۵۵

۳. ۴۵

۴. ۴۰

✓ **تست ۶۱ :** تابع درآمد شرکتی به ازای x واحد از یک کالای مصرفی به صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x$ و تابع هزینه آن به صورت $C(x) = 3x + b$ است. اگر فاصله دو نقطه

سراسری ۱۴۰۰

سربه‌سر تابع سود این شرکت، ۱۲ واحد کالا باشد، مقدار b کدام است؟

۱. ۵

۲. ۶

۳. ۷

۴. ۸

✓ **تست ۶۲:** فرض کنید تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x محصول از یک کالا به صورت $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = ax + 18$ باشد. اگر بیشترین سود این شرکت به ازای تولید ۹ واحد کالا باشد، مقدار a کدام است؟

۲۱.۱

۱۸.۲

-۲۱.۳

-۳۹.۴

✓ **تست ۶۳:** در معادله $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۳.۱

۴.۲

۵.۳

۶.۴

✓ **تست ۶۴:** در معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3$ حاصلضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱.۱
۲۳.۲
۳

۱.۳

۲.۴

✓ تست ۶۵: در معادله $\frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4} = 2x$ تفاضل معکوس جواب از خود جواب کدام است؟

۱. $\frac{5}{4}$

۲. $\frac{3}{4}$

۳. $\frac{7}{4}$

۴. $\frac{5}{2}$

✓ تست ۶۶: معادله $\frac{5x}{2x^2+7x+3} = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+1}$ دارای چند جواب است؟

۱. ۳

۲. صفر

۳. ۴

۴. ۱

✓ تست ۶۷: به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1$ دارای جواب $x = 3$ است؟

سراسری ۹۸

۱. $2, -\frac{1}{3}$

۲. $2, -\frac{1}{3}$

۳. $1, -\frac{2}{3}$

۴. $1, \frac{2}{3}$

✓ **تست ۶۸:** به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{4}{a-2x} + \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=1$ است؟

سراسری ۹۹

۱. ۲، -۴

۲. -۲، ۴

۳. ۴، ۲

۴. ۳، -۲

✓ **تست ۶۹:** مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}$ کدام است؟ سراسری انسانی ۹۹

۱. -۴

۲. ۴

۳. ۶

۴. ۱۲

✓ **تست ۷۰:** قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2x-2} = \frac{2}{3}$ کدام است؟

سراسری انسانی ۹۹ خارج

۱. ۴

۲. ۴/۵

۳. ۵

۴. ۵/۵

✓ **تست ۷۱:** اگر عبارت‌های گویا تعریف شده باشند، مجموع جوابهای معادله

سراسری ۱۴۰۰

کدام است؟ $\frac{4x^2 - (2-x)^2}{x+2} - \frac{7}{x} = 2$

۱. -۱

۲. $\frac{2}{3}$

۳. $\frac{4}{3}$

۴. $\frac{7}{3}$

✓ **تست ۷۲:** معادله $x^2 - x = \frac{ax^3 + 2x}{x+1}$ دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز است. کدام نامساوی

سراسری انسانی ۱۴۰۰

زیر همواره برقرار است؟

۱. $a < -2$

۲. $a \geq -2$

۳. $a \leq 1$

۴. $a < 1$

✓ **تست ۷۳:** اگر عبارت‌های گویا تعریف شده باشند، قدم‌مطلق تفاضل جوابهای معادله

سراسری ۱۴۰۰ خارج

کدام است؟ $\frac{9x^2 - (x+3)^2}{2x-3} - \frac{2}{x} = 1$

۱. صفر

۲. $\frac{1}{2}$

۳. ۱

۴. $\frac{3}{2}$

✓ **تست ۷۴:** اگر معادله $\frac{x^2 - a}{x+3} = 2x - 1$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، محدوده

سراسری ۱۴۰۰ خارج

تغییرات a ، کدام است؟

۱. $a < 9$

۲. $a > 9$

۳. $a < \frac{37}{4}$

۴. $a > \frac{37}{4}$

✓ **تست ۷۵:** حاصلضرب ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$ کدام است؟ سراسری ۱۴۰۱

۱. ۱۸-

۲. ۶/۵-

۳. ۳-

۴. ۱/۵-

✓ **تست ۷۶:** به‌ازای چند مقدار $x = 2, m$ جواب معادله $\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)}$ است؟

سراسری ۱۴۰۱ خارج

۱. ۱

۲. ۲

۳. ۳

۴. هیچ مقداری از m

✓ **تست ۷۷:** دو باغبان باهم درختان باغی را در دو ساعت آبیاری می‌کنند. اگر باغبان اول به تنهایی ۳ ساعت زودتر کار آبیاری را انجام دهد، باغبان دوم در چند ساعت باغ را آبیاری می‌کنند؟

۱. ۱

۲. ۴

۳. ۵

۴. ۶

✓ **تست ۷۸:** در یک دریاچه، یک قایق تفریحی گردشگران را در یک گردش ۶ ساعته، ۸ کیلومتر بر خلاف جریان آب به بالای رودخانه می‌برد و سپس بر می‌گرداند. اگر سرعت آب دریاچه از بالا به پایین، ۱ کیلومتر بر ساعت و سرعت حرکت قایق ثابت فرض شود، سرعت حرکت قایق چند کیلومتر بر ساعت است؟

۳.۱

۴.۲

۵.۳

۶.۴

✓ **تست ۷۹:** یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آنها اضافه شد کیک مشابهی را بین آنها تقسیم کردیم و به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر از دفعه قبل رسید. تعداد افراد در ابتدا چند نفر بوده است؟

تمرین کتاب

۳.۱

۴.۲

۵.۳

۶.۴

✓ **تست ۸۰:** گلدانی نقره‌ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن برابر با ۸ است. گلدان را ذوب نموده ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرده، گلدان جدید می‌سازیم. اگر $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره باشد، وزن گلدان قبل از ذوب شدن چقدر بوده است؟

تمرین کتاب

۷۰۰.۱

۸۰۰.۲

۹۰۰.۳

۱۰۰۰.۴

✓ **تست ۸۱:** مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. مجموع مجذور عدد بزرگتر با جذر عدد کوچکتر کدام است؟

تمرین کتاب

۵۲.۱

۴۰.۲

۳۸.۳

۳۶.۴

✓ **تست ۸۲:** دو شیر A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند. چنانچه دو شیر را باهم باز کنیم، استخر در ۱۲ ساعت پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز شد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

تمرین کتاب

۱۵.۱

۲۰.۲

۲۵.۳

۳۰.۴

✓ **تست ۸۳:** نسبت جرم نقره به مس در قطعه‌ای رسانا برابر ۱۳ است. برای اینکه قطعه را رساناتر کنیم، ۲۰۰ گرم نقره به آن می‌افزایم. اگر ۸۰٪ قطعه جدید نقره باشد، جرم قطعه اولیه چند گرم است؟

۲۰۰.۱

۶۰۰.۲

۸۰۰.۳

۱۰۰۰.۴

☑ **تست ۸۴:** راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد. ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

سراسری ۱۴۰۲

۱. $\frac{3}{2}$

۲. $\frac{4}{3}$

۳. $\frac{5}{4}$

۴. $\frac{6}{5}$

☑ **تست ۸۵:** دو شیر A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A، ۱۵ ساعت دیرتر از شیر B استخر را پر می‌کند. اگر دو شیر باز باشند استخر در ۴ ساعت پر می‌شود. چند شیر از نوع A به استخر اضافه کنیم تا وقتی همه شیرها به طور همزمان باز باشند، استخر در یک ساعت پر می‌شود؟

سراسری ۱۴۰۲ خارج

۱. ۱۲

۲. ۱۴

۳. ۱۶

۴. ۱۸

زوج مرتب : هر دسته متشکل از دو عضو با ترتیب معین را یک زوج مرتب از آن دو عضو گوئیم و با (\dots, \dots) نمایش می‌دهیم.

مولفه دوم (\square, \triangle)
مولفه یا مختص یا شناسه اول

تذکره:

$$\begin{cases} (a, b) \neq (b, a) \xrightarrow{\text{if}} (a, b) = (b, a) \rightarrow a = b \\ \{a, b\} = \{b, a\} \end{cases}$$

تساوی دو زوج مرتب :

$$(a, b) = (a', b') \rightarrow \begin{cases} a = a' \text{ (مولفه‌های اول برابر)} \\ b = b' \text{ (مولفه‌های دوم برابر)} \end{cases}$$

مثال: در هر یک از عبارات زیر، مقدار a را بدست آورید.

الف) $(a, 5) = (2, 5) \rightarrow a = ?$

ب) $(a^2 + 2, 1) = (3a, 1) \rightarrow a = ?$

تست ۱: اگر دو زوج مرتب $(-2a, b+1)$ و $(a-1, 2b-3)$ باهم برابر باشندف زوج مرتب (a, b) کدام است؟

۱. $(\frac{1}{2}, 3)$

۲. $(\frac{1}{3}, -2)$

۳. $(-1, 4)$

۴. $(\frac{1}{3}, 4)$

رابطه : اگر دو مجموعه A و B را داشته باشیم، رابطه از A به B، مجموعه زوج مرتب‌هایی است که مولفه اول از مجموعه A و مولفه دوم از مجموعه B انتخاب می‌شود.

مثال : رابطه از مجموعه $A = \{a, b\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

تعریف تابع به کمک زوج مرتب :

رابطه f از مجموعه A به مجموعه B را تابع گوئیم ($f: A \rightarrow B$) هرگاه مولفه اول یکسان نداشته باشیم.

* **تبصره :** اگر مولفه‌های اول، یکسان بودند، برای اینکه تابع باشد باید مولفه‌های دوم نیز یکسان باشند. (در غیر این صورت تابع نیست)

$$f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 2), (-1, 5)\}$$

مثال :

(الف)

ب) $g = \{(2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 3)\}$

ج) $h = \{(2, 3), (3, 4), (2, \sqrt{9}), (1, 3)\}$

تست ۲ : اگر مجموعه $\{(1, 2), (-1, m-1), (-1, 2m)\}$ یک تابع باشد، مقدار m چقدر است؟

۱. ۱

۲. $\frac{1}{2}$

۳. $-\frac{1}{2}$

۴. -۱

تست ۳ : اگر رابطه $\{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$

سراسری انسانی ۹۸

کدام است؟

۱. ۳

۲. ۴

۳. ۵

۴. ۶

❑ **تست ۴ :** اگر رابطه $f = \{(۲, m + ۲), (۲, -۴), (m, n + ۱), (-۶, ۴)\}$ تابع باشد، $m + n$ کدام است؟

- ۱. ۶-
- ۲. ۶
- ۳. ۳-
- ۴. ۳

❑ **تست ۵ :** اگر $f = \{(۱, x - ۲y), (۲, ۳), (۹, ۵), (۱, -۷), (۹, x + y)\}$ یک تابع است. مقدار

سراسری ۱۴۰۱

$x^2 + y^2$ چند برابر $-x - 4y$ است؟

- ۱. ۱
- ۲. $\frac{1}{۲}$
- ۳. $-\frac{1}{۲}$
- ۴. -۱

❑ **تست ۶ :** رابطه $f = \{(a, x + y), (b, m^2), (a, m^2 - ۱), (b, x - y), (a, ۴)\}$ یک تابع است.

سراسری ۱۴۰۲

مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۱. $\frac{۲}{۵}$
- ۲. $\frac{۲۰}{۵}$
- ۳. ۲۴
- ۴. ۴۲

❑ **تست ۷ :** اگر a و b اعداد طبیعی باشند، کدام گزینه می‌تواند تابع باشد؟

سراسری ۱۴۰۲

- ۱. $A = \{(۴, -۲), (۴, a^2)\}$
- ۲. $B = \{(۳, a + b^2), (۳, -۱۲)\}$
- ۳. $C = \{(b, -۹), (b, a)\}$
- ۴. $D = \{(a, -۱۷), (a, ۲a - b)\}$

✓ تست ۸ : رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{W}, |x| + |y| = 2\}$ شامل چند زوج مرتب است؟

۳.۱

۴.۲

۵.۳

۶.۴

✓ تست ۹ : فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2) : a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a + b) \mid a, b \in \{0, 1, 2\}\}$

سراسری انسانی ۱۴۰۰

توصیف شده باشد. تعداد عنصر f کدام است؟

۸.۱

۹.۲

۱۰.۳

۱۲.۴

✓ تست ۱۰ : رابطه $f = \{(m, n), (2, 1), (n + 1, 3), (-m, n + 1), (2, m^2 - 3)\}$ یک تابع باشد، مقدار

عددی $n - m$ کدام است؟

۱.۱

-۱.۲

۲.۳

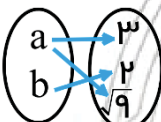
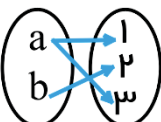
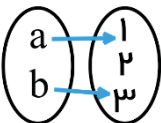
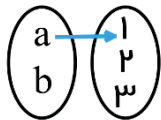
-۲.۴

تعریف تابع به کمک نمودار پیکانی (نمودار ون) :

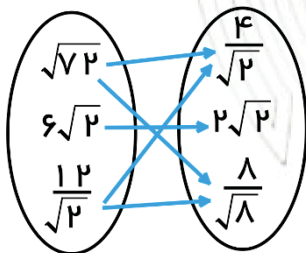
رابطه $f: A \rightarrow B$ را به کمک نمودار ون تابع گوئیم هرگاه از هر عضو مجموعه اول (A) دقیقاً یک پیکان خارج شود.

* **تبصره:** اگر بیش از یک پیکان از هر عضو خارج شد، برای تابع بودن باید مقادیر آنها در مجموعه دوم نیز یکی باشد. (در غیر این صورت تابع نیست)

مثال: 



✓ **تست ۱۱:** حداقل چند پیکان از رابطه روبرو حذف کنیم تا رابطه باقی‌ماند تابع باشد؟



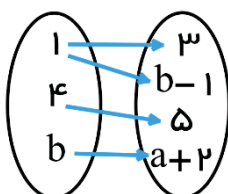
۰. ۱

۱. ۲

۲. ۳

۳. ۴

✓ **تست ۱۲:** اگر نمودار ون مقابل نمایش یک تابع باشد، $a \times b$ کدام است؟



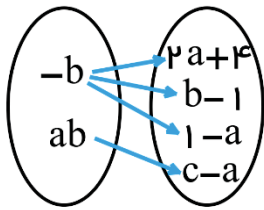
۱۰. ۱

۱۲. ۲

۱۴. ۳

۱۶. ۴

تست ۱۳: اگر رابطه مقابل تابع باشد، مقدار c کدام است؟

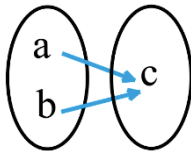


- ۱. ۱
- ۲. -۱
- ۳. -۲
- ۴. ۲

تست ۱۴: نمودار پیکانی $f = \{(x, 4x - 2), (7, 2x + 8)\}$ به صورت روبرو رسم شده است.

قلمچی

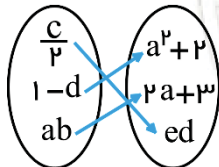
مقدار $a + b + c$ کدام است؟



- ۱. ۱۸
- ۲. ۳۰
- ۳. ۱۷
- ۴. ۳۱

تست ۱۵: اگر نمایش تابع $\{(4, -1), (3, 6), (1, -6)\}$ به صورت پیکانی مطابق با نمودار مقابل

باشد، حاصل $bc + ad - e$ کدام است؟

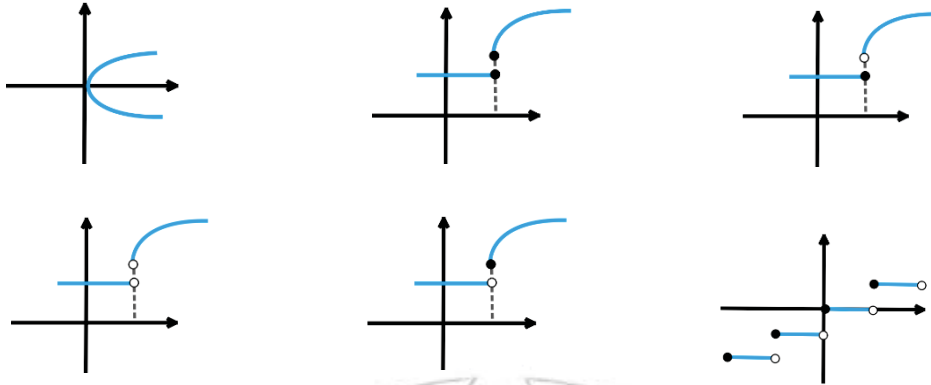


- ۱. -۱
- ۲. -۳
- ۳. -۲
- ۴. ۰

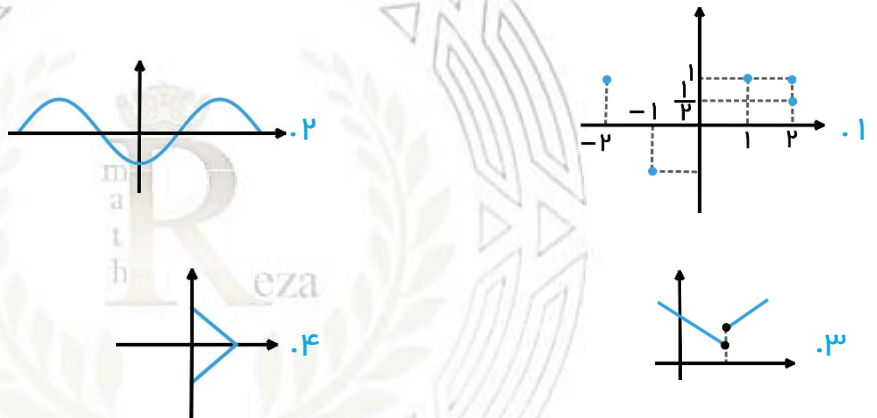
تعریف تابع به کمک نمایش ممتصاتی :

نمودار یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی با محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (اگر در بیش از یک نقطه قطع کند، تابع نیست.)

مثال:

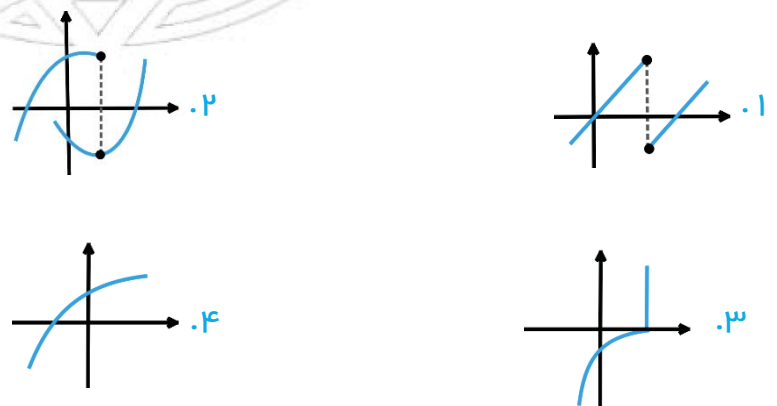


تست ۱۶: نمودار کدام رابطه، یک تابع را مشخص می‌کند؟

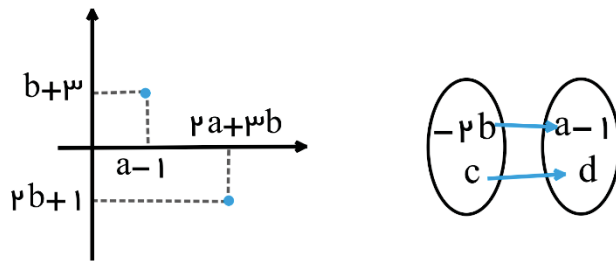


سراسری انسانی ۹۸

تست ۱۷: نمودار کدام رابطه، یک تابع را مشخص می‌کند؟



تست ۱۸: اگر نمایش تابعی به دو صورت نمودار پیکانی و مختصاتی به صورت زیر باشد،

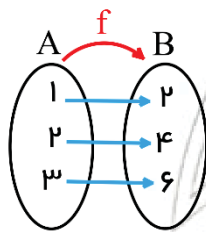


حاصل $\frac{c}{d}$ کدام است؟

- ۱. ۳
- ۲. -۳
- ۳. -۱
- ۴. ۱

تعریف تابع به کمک ضابطه :

رابطه $f: A \rightarrow B$ را یک تابع گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in A$ وجود داشته باشد یک و فقط یک $y \in B$ به طوری که $(x, y) \in f$ باشد، در این صورت y منحصر به فرد را به صورت $y = f(x)$ نمایش می دهند و آن را تصویر x تحت تابع f می گویند. x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته به x گویند.



$$\left. \begin{aligned} (1, 2) \in f \\ (2, 4) \in f \\ (3, 6) \in f \end{aligned} \right\} \rightarrow (x, \frac{2x}{y}) \in f \rightarrow y = f(x) = 2x$$

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(2) =$

ب) $f(\sqrt{2}) =$

پ) $f(-1) =$

ت) $f(f(-1)) =$

ث) $f(2x) =$

ج) $f(x^2) =$

سراسری ۹۵

تست ۱۹: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$ باشد، $f(4) - f(2\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱. ۱
- ۲. $\sqrt{2}$
- ۳. ۲
- ۴. ۳

✓ **تست ۲۰ :** در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، حاصل $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

سراسری انسانی ۹۱

۱. ۱

۲. ۲

۳. ۳

۴. ۴

✓ **تست ۲۱ :** اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ باشد، $f(3 + 2\sqrt{6})$ کدام است؟

خارج از کشور انسانی ۹۳

۴. ۱

۵. ۲

۳. $2 + \sqrt{6}$

۶. ۴

✓ **تست ۲۲ :** در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ ، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

سراسری ۹۲

۶. ۱

۳. ۲

۲. ۳

۱. ۴

✓ **تست ۲۳ :** اگر $f(x) = x + \frac{2}{x}$ باشد، مقدار $f(1 + \sqrt{2}) - f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

سراسری ۹۰

۱. -۲

۲. -۱

۳. ۱

۴. ۲

سراسری ۸۹

✓ تست ۲۴ : اگر $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ ، آنگاه $f(x) + \frac{1}{3}f(0)$ کدام است؟

.۱ $\frac{1}{x^2 + x}$

.۲ $\frac{1}{x^2 - x}$

.۳ $\frac{2}{x^2 - x}$

.۴ $\frac{2}{x^2 + x}$

سراسری ۸۹

✓ تست ۲۵ : اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، آنگاه $f(x+2) - f(x-2)$ کدام است؟

.۱ $4(x-3)$

.۲ $4(x-2)$

.۳ $4(2x-1)$

.۴ $4(2x-3)$

✓ تست ۲۶ : در مورد تابع $f(x) = 3x - 2$ می‌دانیم $f(2a) + f(a) = 5$ ، مقدار a کدام است؟

نشرالگو

.۱ ۱

.۲ ۲

.۳ ۳

.۴ ۴

✓ تست ۲۷ : اگر $f(2x+1) = 4x^2 + 6x$ باشد، $f(7)$ کدام است؟

.۱ ۵۶

.۲ ۵۴

.۳ ۵۲

.۴ ۵۰

✓ تست ۲۸ : اگر $f(x) = 2f(5) + 4x - 1$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

۱. ۳۰

۲. ۳۱

۳. -۳۱

۴. -۳۰

✓ تست ۲۹ : در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ با شرط $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ ، مقدار b

سراسری خارج از کشور ۸۶

کدام است؟

۱. -۳

۲. -۲

۳. -۱

۴. ۱

دایره و برد توابع :

زوج مرتب : همگی مؤلفه‌های اول تابع f را با D_f نمایش می‌دهیم.

$$D_f = \{x | (x, y) \in f\}$$

نمودار پیکانی : همگی عضوهای مجموعه اول

دامنه $\leftarrow D_f$

نمودار مختصاتی : تصویر نمودار بر روی محور x ها

زوج مرتب : همگی مؤلفه‌های دوم تابع f را با R_f نمایش می‌دهیم.

$$R_f = \{y | (x, y) \in f\}$$

نمودار پیکانی : همگی عضوهای مجموعه دوم که به آنها پیکان وارد

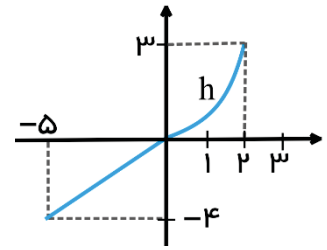
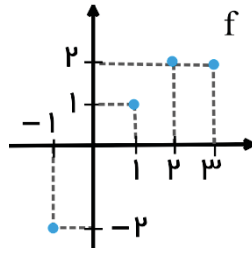
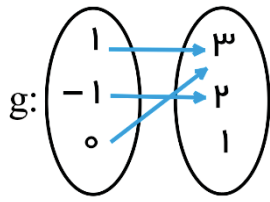
دامنه $\leftarrow R_f$

می‌شود.

نمودار مختصاتی : تصویر نمودار بر روی محور y ها

مثال

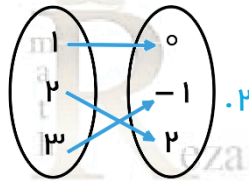
$$f = \{(2, 5), (3, 1), (4, 5), (5, 1)\}$$



تست ۳۰: اگر دامنه و برد تابع $f(x) = 3x - 4$ به ترتیب به صورت $\{a, b, -1\}$ و $\{2, c, -1\}$ باشد، حاصل $f(a + b + c)$ کدام است؟

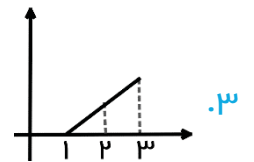
- ۱۶. ۱
- ۱۶. ۲
- ۱۳. ۳
- ۱۳. ۴

تست ۳۱: دامنه کدام یک از توابع زیر با بقیه متفاوت است؟



X	۱	۲	۳
Y	۲	۵	۸

۱.



تست ۳۲: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ به صورت $D_f = \{-2, -4, m\}$ و مجموع اعضای برد آن برابر ۸- باشد، $f(2m-1)$ کدام است؟

- ۱۳. ۱
- ۹. ۲
- ۱۲. ۳
- ۱۱. ۴

✓ تست ۳۳ : اگر برد تابع $f : \{m, 1\} \rightarrow B$ مجموعه $\{-1, n\}$ باشد، مقدار $n - m$ کدام است؟
 $f(x) = x^2 + 2x$

-۴.۱

۴.۲

۲.۳

-۲.۴

✓ تست ۳۴ : تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ را در دامنه $\{-99, -98, \dots, 0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$ در نظر

سراسری ۱۴۰۰

بگیرید. مقدار متوسط عضوهای برد تابع f ، کدام است؟

۳/۵.۱

۳/۷۵.۲

۴.۳

۴/۲۵.۴



تابع خطی (درجه اول): هر تابع که به فرم $y = f(x) = ax + b$ یا $y = mx + h$ را تابع خطی

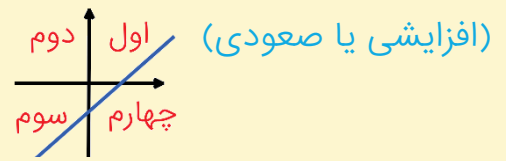
گوئیم که در آن a یا m شیب خط و b یا h عرض از مبدأ تابع می‌باشد. $\left. \begin{matrix} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$

شیب خط (m): زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

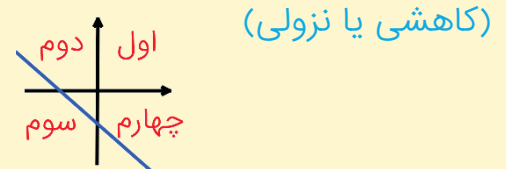
عرض از مبدأ (h): فاصله محل برخورد خط با محور y ها تا مبدأ را عرض از مبدأ گویند.

نکته ۱: با توجه به علامت m داریم:

$f(x) = mx + h \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ابتدا و انتهای خط از ناحیه اول و سوم عبور می‌کند.} \\ m > 0 \rightarrow \end{array} \right.$



$m < 0 \rightarrow$ ابتدا و انتهای خط از ناحیه دوم و چهارم می‌گذرد.



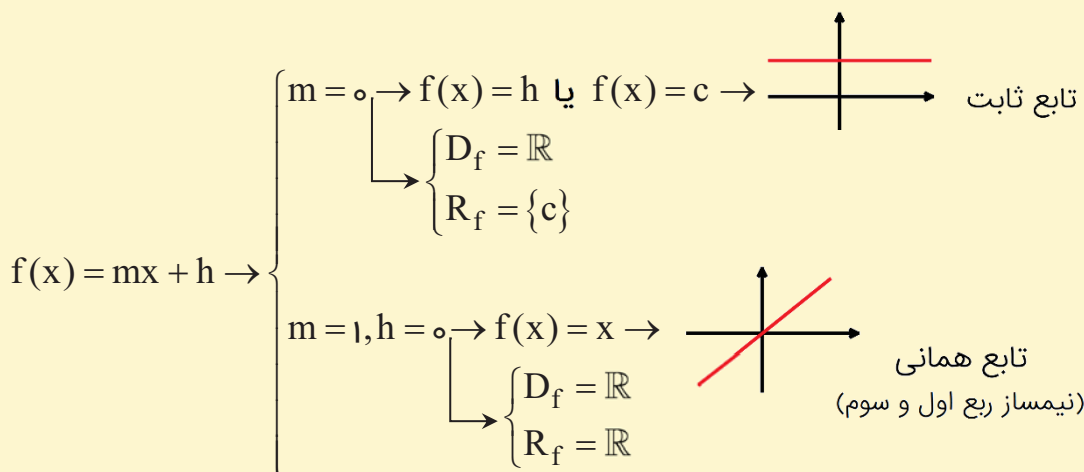
نکته ۲: با توجه به علامت m و h می‌توانیم حالت‌های رسم تابع خطی $f(x) = mx + h$ را به صورت زیر داشته باشیم:

$f(x) = mx + h \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} m > 0, h > 0 \rightarrow \text{Graph of a line with positive slope and positive y-intercept} \\ m > 0, h < 0 \rightarrow \text{Graph of a line with positive slope and negative y-intercept} \\ m > 0, h = 0 \rightarrow \text{Graph of a line with positive slope passing through the origin} \\ m < 0, h > 0 \rightarrow \text{Graph of a line with negative slope and positive y-intercept} \\ m < 0, h < 0 \rightarrow \text{Graph of a line with negative slope and negative y-intercept} \\ m < 0, h = 0 \rightarrow \text{Graph of a line with negative slope passing through the origin} \end{array} \right.$

(خط مبدأ گذر)

(خط مبدأ گذر)

نکته ۳: با توجه به علامت‌های m و h می‌توان توابع خطی به صورت زیر نمایش داد :



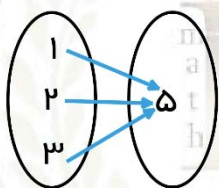
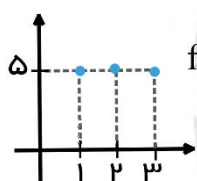
مثال: 

ثابت

همانی

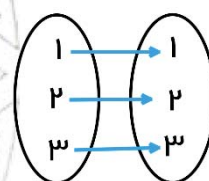
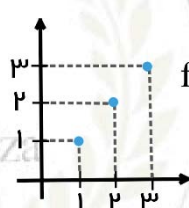
$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$


$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 5 \end{cases}$$




$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B ; A = \{1, 2, 3\} \\ f(x) = x \end{cases}$$



نکته ۴: اگر دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم نمودار آن را بدست آوریم. 

مثال:  خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(x) = 2x + 1$

ب) $y = f(x) = 1 - 3x$

پ) $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$

ت) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$

ث) $f(x) = -x$

روش بدست آوردن ضابطه تابع قطعی به کمک دو نقطه از خط :

اگر دو نقطه A و B را از خط به ما داده باشند، برای بدست آوردن ضابطه، ابتدا شیب خط را به کمک رابطه (*) بدست آورده و سپس با جایگذاری یکی از نقاط A یا B بجای نقطه (x_0, y_0) در رابطه (**) ضابطه تابع مشخص می‌شود. نقاط A و B را به صورت‌های مقابل

$$\left. \begin{aligned} A = (x_1, y_1) \text{ یا } f(x_1) = y_1 \\ A = (x_p, y_p) \text{ یا } f(x_p) = y_p \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{نمایش می‌دهند}$$

$$(*) : m_{AB} = \frac{y_p - y_1}{x_p - x_1} \quad \text{یا} \quad m = \frac{y_1 - y_p}{x_1 - x_p}$$

$$(**) \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

(y همان f(x) است.)

مثال: دو نقطه (۱, ۳) و (۲, ۵) از یک تابع خطی را داریم، ضابطه آن را مشخص کنید.

نکته ۵

دو خط زمانی موازی هستند که شیب یکسان داشته باشند. (برخوردی نداشته باشند) و زمانی برهم عمود هستند که شیب یکی عکس و قرینه شیب دیگری باشد یا حاصلضرب شیب‌هایشان منفی یک شود.

موازی ↙

$$\left\{ \begin{aligned} l_1 \parallel l_2 &\rightarrow m_{l_1} = m_{l_2} \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{c} \parallel \\ l_1 \\ l_2 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{aligned} l_1 \perp l_2 &\rightarrow \begin{cases} m_{l_1} = -\frac{1}{m_{l_2}} & m_{l_2} = -\frac{1}{m_{l_1}} \\ m_{l_1} \times m_{l_2} = -1 \end{cases} \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{c} \perp \\ l_1 \\ l_2 \end{array}$$

عمود ↗

مثال: معادله تابع خطی را بنویسید که با خط $y = 2x + 5$ موازی بوده و از نقطه $(0, -1)$ عبور کند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که عمود بر خط $y = \frac{3}{2}x + 1$ و از نقطه $(3, -3)$ عبور کند.

نکته ۶: فرم گسترده خط به صورت زیر می‌باشد.

$$ax + by + c = 0$$

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $2x + 3y + 6 = 0$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} l_1 : ax + by + c = 0 \\ l_2 : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

وضعیت دو خط نسبت به هم: دو خط l_1 و l_2 را داریم:

یک خط داریم

الف) حل دستگاه \rightarrow دو خط موازی و منطبق برهم $\rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

ب) حل دستگاه \rightarrow دو خط موازی و منطبق برهم $\rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

پ) حل دستگاه \rightarrow دو خط عمود برهم $\rightarrow aa' + bb' = 0$
 دو خط متقاطع غیر عمود $\rightarrow aa' + bb' \neq 0$ $\rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

مثال: وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید.

الف)
$$\begin{cases} l_1: 2x + 3y + 5 = 0 \\ l_2: 4x + 6y = -10 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} l_1: x - 2y = 5 \\ l_2: 2x - 4y = 8 \end{cases}$$

پ)
$$\begin{cases} l_1: \frac{1}{2}x + 2y = 5 \\ l_2: -2x + \frac{1}{2}y - 4 = 0 \end{cases}$$

تست ۳۵: عرض از مبدأ خط گذرنده بر دو نقطه $(1, 2)$ و $(3, -2)$ کدام است؟

انسانی خارج ۹۵

۴.۱

۴/۵.۲

۵.۳

۵/۵.۴

تست ۳۶: خط به معادله $y = mx + (m - 2)$ به ازای هر عدد منفی m از کدام ناحیه

انسانی ۸۷

محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱. اول

۲. دوم

۳. سوم

۴. چهارم

تست ۳۷: به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = mx + m - 3$ از ناحیه دوم محورهای

انسانی ۹۴

مختصات نمی‌گذرد؟

۱. $0 \leq m \leq 3$

۲. $m \geq 3$

۳. $m \leq 0$

۴. هیچ مقدار m

✓ تست ۳۸ : نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-۲, a)$ ، $(-۱, ۳)$ و $(۱, -۴)$ می‌گذرد. مقدار a

انسانی

کدام است؟

۱۴۰۱

۶۰۱

۶/۵۰۲

۷۰۳

۷/۵۰۴

✓ تست ۳۹ : اگر سه نقطه $(۲, m)$ ، $(۱, n)$ و $(۰, ۲)$ روی یک خط راست باشند، $۲n - m$ کدام

است؟

-۱۰۱

۱۰۲

۲۰۳

-۲۰۴

✓ تست ۴۰ : اگر سه نقطه $(۱, ۰)$ ، $(۲, -۲)$ و (x, y) روی یک خط راست باشند، $x + y$ کدام

است؟

-۱۰۱

۱۰۲

-۲۰۳

۲۰۴

✓ تست ۴۱ : مقدار a برابر کدام گزینه باشد تا خط $(a - ۲)x + ۴y = ۱$ بر خط $۴x - ۶y = ۸$

عمود باشد.

۶۰۱

-۶۰۲

۸۰۳

-۸۰۴

✓ تست ۴۲ : به ازای کدام مقدار m ، نقطه $(-1, 2)$ روی خط $mx - (m+1)y = 1$ قرار دارد؟

-۱.۱

۱.۲

۱.۳
۲۱.۴
۳

✓ تست ۴۳ : تابع $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر $f(1) = 4$ و $f(-2) = 1$ باشد، $f(3)$ کدام

است؟

۲.۱

۱.۲

۳. صفر

-۲.۴

✓ تست ۴۴ : اگر $f(x) = mx + 5$ و $3f(-3) - f(1) = -1$ باشد، حاصل $f(m-4)$ کدام است؟

۳.۱

-۲.۲

-۱.۳

۱.۴

✓ تست ۴۵ : اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = bx - 3$ باشد و داشته باشیم $f(2)g(3) = -48$ و

$f(1) + g(2) = 2$ مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

۵.۱

-۵.۲

-۷.۳

۷.۴

تست ۴۶ : در یک تابع خطی با شیب مثبت a ، $f(2) = a$ ، $f(3a+1) = 5$ و $f(1) = -1$ ، حاصل $f(a^2 - 3)$ کدام است؟

۲.۱

-۳.۲

-۷.۳

۹.۴

تست ۴۷ : اگر $xf(-1) + 3f(x) = 8x + 12$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

۲.۱

۴.۲

۶.۳

۸.۴

تست ۴۸ : اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ ، به ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۲

$\frac{3}{2}$.۱

$-\frac{3}{2}$.۲

$\frac{5}{2}$.۳

$-\frac{5}{2}$.۴

تست ۴۹ : اگر ضابطه تابع خطی $f(x) = -\frac{4}{a+2}x + b$ ، $f(1) = 2a - 1$ و $f(-\frac{a}{2}) = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۲

$3/2$.۱

$1/6$.۲

۲.۳

۱.۴

✓ **تست ۵۰ :** اگر تابع خطی $f(x) = \left(\frac{1-m}{2}\right)x - m + \frac{1}{2}$ به ازای همه مقادیر m از نقطه (a, b)

سراسری ۱۴۰۲

بگذرد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$

۲. $-\frac{1}{4}$

۳. ۴

۴. -۴

✓ **تست ۵۱ :** تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد.

سراسری ۱۴۰۲

اگر $f(2) = 2a - 1$ و $f(1-a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

۱. ۵

۲. ۲

۳. ۱۱

۴. ۸

✓ **تست ۵۲ :** اگر برد تابع $f(x) = -3x + 7$ به صورت $1 < y \leq 3$ باشد، دامنه تابع شامل چند

عدد صحیح است؟

۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. ۴

✓ **تست ۵۳ :** اگر دامنه تابع خطی $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ و برد آن $R = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leq y \leq 5\}$

، در این صورت ضابطه آن کدام می‌تواند باشد؟

۱. $f(x) = -3x - 1$

۲. $f(x) = 3x + 4$

۳. $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

۴. $f(x) = -3x + 4$

✓ **تست ۵۴ :** در تابع خطی $f(1) = 5$ و $f(3) = -9$ است. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 5\}$ دامنه

سراسری ۱۴۰۱

تابع f باشد، برد این تابع کدام است؟

۱. $-47 \leq y \leq 7$

۲. $-23 \leq y \leq 7$

۳. $-47 \leq y \leq 12$

۴. $-23 \leq y \leq 12$

✓ **تست ۵۵ :** اگر تابع $f = \{(1, a + b + 1), (2a, 2a - 1), (2, a^2)\}$ یک تابع ثابت باشد، آنگاه $a \times b$

کدام است؟

۱. ۲

۲. ۱

۳. -۱

۴. -۲

✓ **تست ۵۶ :** اگر $f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$ یک تابع ثابت ۳ عضوی

سراسری ۹۸

باشد. $m + n + t$ کدام است؟

۱. ۱۰

۲. ۱۱

۳. ۱۲

۴. ۱۴

✓ **تست ۵۷ :** اگر برد تابع $f = \{(1, 14), (2, a^2 - 2), (3, b^2 + 13b), (4, 14)\}$ دارای یک عضو

باشد، آنگاه حاصل ab چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱. ۴

۲. ۲

۳. ۱

۴. ۵

✓ تست ۵۸ : رابطه $f = \{(m + 3n, 2t^2), (-2, n^2 + 2n), (1 - 3m, 8)\}$ یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی است. اگر m و n عضوی از اعداد طبیعی باشند؛ مجموع دو عضو دامنه چقدر است؟

سراسری خارج ۱۴۰۱

۲۳.۱

۲۱.۲

۵.۳

۳.۴

✓ تست ۵۹ : دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

تجربی ۱۴۰۱

-۶.۱

-۴.۲

۴.۳

۶.۴

✓ تست ۶۰ : اگر $f(x) = (a + 1)x + 2a - 1$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $f(f(1))$ کدام است؟

-۳.۱

-۲.۲

-۱.۳

۱.۴

✓ تست ۶۱ : دو تابع $f(x) = a + 3(b^2 - 1)x^2$ و $g(x) = bx^2 - 2a + x^2$ ثابت هستند. اگر $f \times g = -8$ باشد، حاصل $[ab]$ چقدر است؟

انسانی خارج ۱۴۰۱

۱.۱

۲.۲

۳.۳

۴. صفر

✓ تست ۶۲: اگر تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-3}$ تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟ ($x \neq 3$)

۱. ۶-

۲. ۳-

۳. ۳

۴. ۶

✓ تست ۶۳: اگر تابع $f = \{(3, 2m-1), (n-4, 3)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{7}$ ۲. $\frac{2}{7}$

۳. ۱

۴. ۲-

✓ تست ۶۴: اگر سه زوج مرتب $(n^2-3n, 4)$ ، $(n^2+n, 2)$ و $(1, m+n)$ بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، m کدام است؟

سراسری ۹۹

۱. ۳-

۲. ۲-

۳. ۲

۴. ۶

✓ تست ۶۵: اگر $f(x) = \frac{bx^2+ax-c}{x+2}$ یک تابع همانی باشد، $a+b+c$ کدام است؟ ($x \neq -2$)

۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. ۳

✓ **تست ۶۶ :** اگر f یک تابع ثابت و g یک تابع همانی باشد با دامنه \mathbb{R} و برای این دو تابع داشته باشیم $f(3) = g(-1)$ ، حاصل $f(5) + g(2)$ کدام است؟

۱.۱

۲.۲

۳.۳

۴.۴

✓ **تست ۶۷ :** اگر f تابع همانی و g ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{3f(7) + 2g(3)}{2g(7) + f(1)} = \frac{10}{2}$ مقدار

$g(0)$ کدام است؟

۴.۱

-۴.۲

۲.۳

-۲.۴

✓ **تست ۶۸ :** اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و

سراسری ۱۴۰۱

$(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟

۱.۱

۲.۲

۳.۳

۴.۴

✓ **تست ۶۹ :** تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج

مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند،

سراسری ۱۴۰۲

مقدار $\left[\frac{mn}{5}\right]$ کدام است؟

۴.۱

۳.۲

۲.۳

۱.۴

✓ **تست ۷۰:** اگر f تابع ثابت و برای $m, n, k \in \mathbb{N}$ و $f(kx) = (k^2 - 3)f(x)$ و تابع g به صورت

سراسری ۱۴۰۲

زیر یک تابع همانی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱. -۴

۲. -۳

۳. -۲

۴. صفر

✓ **تست ۷۱:** اگر $f(x) = (ax + 2)(b - x) - vx^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام

سراسری ۱۴۰۱

است؟

۱. $-\frac{2}{7}$

۲. $\frac{2}{7}$

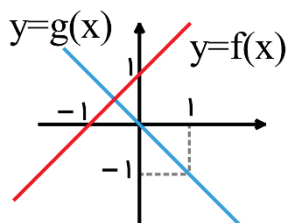
۳. $-\frac{4}{7}$

۴. $\frac{4}{7}$

✓ **تست ۷۲:** فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در صفحه مختصات

مطابق شکل زیر داده شده باشند. قدرمطلق اختلاف جواب‌های معادله $\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2$ کدام است؟

خارج ۱۴۰۰



۱. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲. $\sqrt{3}$

۳. $2\sqrt{3}$

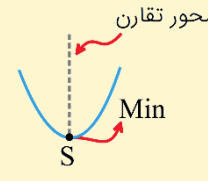
۴. $3\sqrt{3}$

تابع درجه دوم یا سهمی : هر معادله که به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را سهمی یا تابع درجه دوم گوئیم که در آن $a \neq 0$ و هر سه پارامتر a, b و c اعداد حقیقی هستند.

نکته ۷ : با توجه نوشتار سهمی به ۳ صورت زیر بیان و رسم می‌شود :

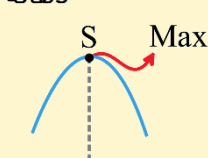
◀ **حالت اول :** فرم استاندارد

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به بالا} \\ x_s = -\frac{b}{2a} \\ y_s = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - ax_s^2 \\ a < 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به پایین} \end{cases}$$



محور تقارن
Min

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \end{cases}$$



Max

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] \end{cases}$$

* محور تقارن سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد و رأس سهمی روی محور تقارن است.

مثال : سهمی‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^2$

ب) $f(x) = -x^2$

پ) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

ت) $f(x) = -2x^2 + 1$

◀ حالت دوم : به کمک رأس سهمی

$y = a(x - x_s)^p + y_s \rightarrow$

$a > 0 \rightarrow$ دهانه سهمی رو به بالا

$a < 0 \rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین

$S(\text{ریشه داخل پراتنز , عدد بیرون پراتنز}) = (x_s, y_s)$

$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = [y_s, +\infty)$

$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = (-\infty, y_s]$

مثال: سهمی‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = (x - ۲)^۲ + ۱$

ب) $y = (۲ - x)^۲ + ۱$

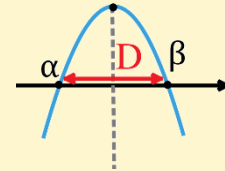
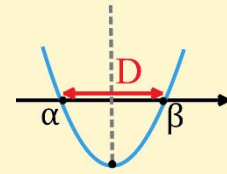
پ) $y = ۲x^۲ - ۱$

ت) $y = (x - ۳)^۲$



حالت سوم : به کمک ریشه‌ها

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) \rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به بالا} \\ x_s = \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta - \alpha = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \\ a < 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به پایین} \end{cases}$$



نکته ۸: اگر دو نقطه هم عرض در سهمی داشته باشیم، برای بدست آوردن طول رأس سهمی کافی است میانگین طول در نقطه را محاسبه کنیم.

$$\left. \begin{matrix} (a, y) \\ (b, y) \end{matrix} \right\} \rightarrow x_s = \frac{a + b}{2}$$

مثال: سهمی‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = (x - 1)(x - 2)$

ب) $y = 2(x - 1)(1 - x)$

پ) $y = -(2x + 1)(2x - 3)$

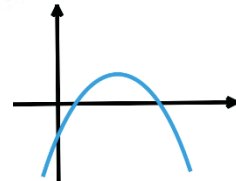
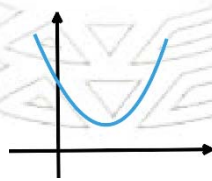
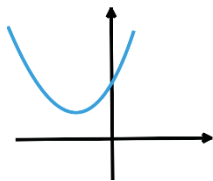
نکته ۹: گاهی رابطه‌ای یا نمودار سهمی را به ما می‌دهند و معادله سهمی را از ما می‌خواهند، که هدف بدست آوردن پارامترهای a ، b و c می‌باشد.

با توجه به حالتی که بررسی کردیم، می‌توانیم ضابطه یک سهمی را بدست آوریم، فقط کافی است بدانیم از کدام حالت یا حالت‌ها می‌توانیم ضابطه سهمی را بدست آوریم.

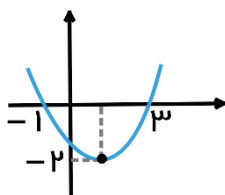
نکته ۱۰: نمودار در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ قبل از اینکه پارامترهای a ، b و c را بدست آوریم. می‌توانیم با کمک نکته پایین علامت آنها را بدست آوریم و در بعضی تست‌ها نیازی به حل سوال نیست.

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} a: \begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به بالا} \\ a < 0 \rightarrow \text{دهانه سهمی رو به پایین} \end{cases} \\ b: \begin{cases} b > 0 \rightarrow \text{شیب خط مماس در نقطه } c \text{ مثبت باشد.} \\ b = 0 \rightarrow \text{شیب خط مماس در نقطه } c \text{ صفر باشد.} \\ b < 0 \rightarrow \text{شیب خط مماس در نقطه } c \text{ منفی باشد.} \end{cases} \\ c: \begin{cases} c > 0 \rightarrow \text{سهمی بالا محور } x \text{ ها و محور } y \text{ ها را قطع کند.} \\ c = 0 \rightarrow \text{سهمی از مبدأ عبور کند.} \\ c < 0 \rightarrow \text{سهمی محور } y \text{ ها را در قسمت منفی قطع کند.} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: علامت a ، b و c را در سهمی‌های زیر مشخص کنید.



مثال: معادله سهمی شکل زیر را بدست آورید.



انتقال سهمی : در انتقال سهمی دو حالت داریم :

$$(k > 0)$$

(الف) برای رسم نمودار $f(x - k)$ از روی نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت مثبت محور x ها (راست) حرکت دهیم، در این صورت نمودار $f(x - k)$ را رسم کرده‌ایم.

$$(k > 0)$$

(ب) برای رسم نمودار $f(x + k)$ از روی نمودار $f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت منفی محور x ها (چپ) حرکت دهیم، در این صورت نمودار $f(x + k)$ را رسم کرده‌ایم.

1 انتقال افقی (روی محور x ها) :
(در انتقال افقی k با x رابطه معکوس دارد) $x \leftarrow$ لجباز

$$(k > 0)$$

(الف) برای رسم نمودار $f(x) + k$ از روی نمودار $f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت مثبت محور y ها (بالا) حرکت دهیم، در این صورت نمودار $f(x) + k$ را رسم کرده‌ایم.

$$(k > 0)$$

(ب) برای رسم نمودار $f(x) - k$ از روی نمودار $f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت منفی محور y ها (پایین) حرکت دهیم، در این صورت نمودار $f(x) - k$ را رسم کرده‌ایم.

2 انتقال عمودی (روی محور y ها) :

مثال : نمودار سهمی‌های زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

(الف) $y = (x - 2)^2$

(ب) $y = x^2 - 2$

پ) $y = (x + 1)^2 + 3$

ت) $y = -(-x + 1)^2 - 1$

مثال : سهمی $y = x^2 - 2$ را داریم. ابتدا سهمی را دو واحد به سمت جلو (مثبت) انتقال داده و سپس سه واحد به سمت بالا حرکت می‌دهیم. ضابطه‌ی انتقال یافته سهمی بالا را نوشته و آن را رسم کنید.

نکته ۱۱ : کاربرد دیگر سهمی در مسائل اقتصادی می‌باشد که در مورد آن بحث شد.

مثال : یک شرکت روزانه ۷۲۰۰۰۰ ریال برای تولید یک نوع کالا هزینه می‌کند. اگر $R(x) = 2200x + 10x^2$ ، تابع درآمد روزانه شرکت حاصل از فروش x واحد از همین کالا باشد، نقطه سر به سر کدام است؟

سراسری ۱۴۰۱

بهینه سازی :



مثال: اگر محیط مستطیلی برابر ۷ باشد، بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

مثال: تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ می باشد، حاصل ضربشان را طوری بدست آورید که کمترین مقدار ممکن گردد.

تلاقی دو نمودار :



مثال : سهمی $y = x^2 - 3x - 2$ و خط $y + x = 3$ در نقطه‌ای با کدام عرض یکدیگر را قطع می‌کنند؟

سوال : اگر نمودار تابع $y = (2a + 5)x^2 - (b + 3)x + 4c + 3$ و $y = -x + 7$ در بی‌شمار نقطه یکدیگر را قطع کنند. حاصل abc کدام است؟

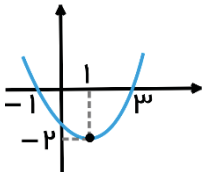
☑ **تست ۷۳ :** معادله سهمی شکل مقابل کدام است؟

$$y = x^2 - x - 3 \quad ۱.$$

$$y = 2x^2 + x - 1 \quad ۲.$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \quad ۳.$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \quad ۴.$$



☑ **تست ۷۴ :** شکل زیر، نمودار تابع $y = 2x^2 + ax + b$ است، b کدام است؟

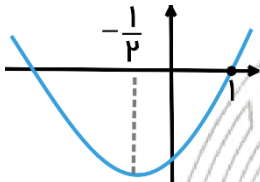
خارج انسانی ۹۶

$$-4 \quad ۱.$$

$$-3/5 \quad ۲.$$

$$-3 \quad ۳.$$

$$-2/5 \quad ۴.$$



گزینه ۲

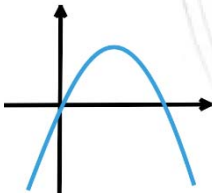
☑ **تست ۷۵ :** کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی تابع زیر باشد؟

$$y = x^2 + 2x \quad ۱.$$

$$y = -x^2 + 2x \quad ۲.$$

$$y = x^2 - 2x \quad ۳.$$

$$y = -x^2 - 2x \quad ۴.$$



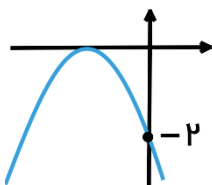
☑ **تست ۷۶ :** شکل زیر، نمودار کدام تابع است؟

$$y = -2x^2 + 4x - 2 \quad ۱.$$

$$y = -2x^2 - 4x - 2 \quad ۲.$$

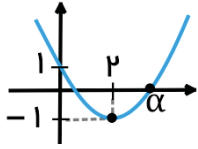
$$y = -x^2 - 2x - 2 \quad ۳.$$

$$y = 2x^2 + 4x - 2 \quad ۴.$$



تست ۷۷ : با توجه به شکل روبرو که نمودار یک تابع درجه ۲ را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟

قلم‌چی



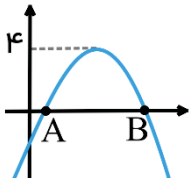
۳.۱

۵.۲
۲

۲ + $\sqrt{2}$.۳

$\frac{۴ + \sqrt{۲}}{۲}$.۴

تست ۷۸ : نمودار $y = -4x^2 + mx + n$ به صورت زیر است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



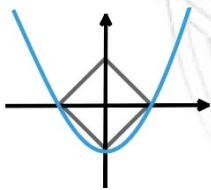
۱.۱

۲.۲

۳.۳

۴.۴

تست ۷۹ : معادله سهمی زیر به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. اگر مساحت مربع برابر ۴ مترمربع باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟



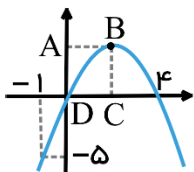
$\sqrt{2}$.۱

$\frac{\sqrt{2}}{۲}$.۲

$-\frac{\sqrt{2}}{۲}$.۳

$-\sqrt{2}$.۴

تست ۸۰ : با توجه به شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



۴.۱

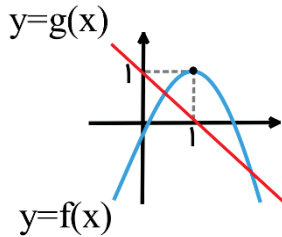
۸.۲

۱۲.۳

۱۶.۴

✓ **تست ۸۱ :** نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^2(x)$ کدام است؟

انسانی ۱۴۰۰



-۲.۱

-۱/۲.۲

۱/۲.۳

۲.۴

✓ **تست ۸۲ :** فرض کنید نقاط $(-۲, ۵)$ ، $(۰, ۵)$ و $(۱, ۱)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند.

تجربی ۹۹

این سهمی از کدام نقاط می‌گذرد؟

۱. $(-۱, ۳)$ ۲. $(-۱, ۴)$ ۳. $(۲, ۹)$ ۴. $(۲, ۱۵)$

✓ **تست ۸۳ :** فرض کنید رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقطه $A(-۱, ۹)$ گذرا از نقطه $(۳, ۱)$ باشد.

تجربی خارج ۹۹

این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱. $(۵, -۷)$ ۲. $(۵, -۹)$ ۳. $(۲, ۵)$ ۴. $(۱, ۵)$

✓ **تست ۸۴ :** رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + ۲$ روی سهمی $y = ۲bx^2 - bx - ۱$ قرار دارد و

تجربی خارج ۱۴۰۱

برعکس، مقدار $b - a$ چه قدر است؟

-۶.۱

۶.۲

-۱۸.۳

۱۸.۴

✓ **تست ۸۵ :** اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط

$x = 2$ متقارن باشد. این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ **تجربی ۸۳**

۲.۱

۳.۲

۴.۳

۶.۴

✓ **تست ۸۶ :** سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$ با خط $y = 13 - x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸

انسانی ۹۹

مقاطع‌اند. مختصات رأس این سهمی، کدام است؟

۱. (۱, ۹)

۲. (۳, ۹)

۳. (۳, ۱۲)

۴. (۴, ۱۳)

✓ **تست ۸۷ :** خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی

انسانی خارج ۱۴۰۱

خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

۱. ۵/۷۵

۲. ۳/۷۵

۳. -۳/۲۵

۴. -۵/۲۵

✓ **تست ۸۸ :** شیب خط $y = ax + b$ ، $1/5$ برابر شیب خط $y = cx + d$ است. اگر دو خط در

روی محور x ها یکدیگر را قطع کنند، محور تقارن $f(x) = (\frac{cx}{2} + d)^2 - (ax + b)^2$ کدام

انسانی ۱۴۰۲

است؟

۱. $x = -2$ ۲. $x = -3$ ۳. $x = -\frac{3}{2}$ ۴. $x = -\frac{7}{6}$

✓ تست ۸۹ : مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصلضرب ریشه‌های معادله

$ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1 - 2a)x - 3$ کدام است؟

انسانی تیر ۱۴۰۲

۱. $-1/5$

۲. -3

۳. $1/5$

۴. 3

✓ تست ۹۰ : مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + (a + \frac{4}{3}x) + 2 = 0$ با حاصلضرب ریشه‌های

معادله $3x^2 - 4x - a = 0$ برابر است. محور تقارن سهمی $y = -ax^2 - (1 + \frac{5}{2})x - 1$ کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۲

۱. $x = \frac{3}{4}$

۲. $x = -\frac{3}{4}$

۳. $x = \frac{11}{8}$

۴. $x = -\frac{11}{8}$

✓ تست ۹۱ : اگر رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + k + 2$ روی نیمساز ربع اول و سوم واقع باشد،

k کدام است؟

۱. 8

۲. 9

۳. -9

۴. -8

✓ تست ۹۲ : اگر رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + k + 2$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم واقع باشد،

k کدام است؟

۱. 4

۲. 8

۳. -8

۴.۴-

✓ **تست ۹۳ :** اگر تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ را داشته باشیم، برد تابع f به ازای دامنه‌ی

$D_f = [-2, 3)$ کدام است؟

۱. $3 \leq y < 2$

۲. $y \geq 3$

۳. $3 \leq y \leq 2$

۴. $y > 3$

✓ **تست ۹۴ :** به ازای کدام مقدار a بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 20x - 120$ برابر ۱۸۰

است؟

۱. $-\frac{1}{2}$

۲. $-\frac{1}{3}$

۳. $\frac{1}{4}$

۴. $\frac{1}{2}$

✓ **تست ۹۵ :** اگر حداکثر مقدار سهمی $y = -x^2 + (n+1)x + 1$ برابر ۵ باشد، n کدام است؟

۱. ۳- یا ۵

۲. ۳ یا ۵-

۳. ۳ یا ۵

۴. ۳- یا ۵-

✓ **تست ۹۶ :** به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1-18m)x^2 + 8(m^2+1)x + 1$ در نقطه‌ای به

انسانی خارج ۱۴۰۱

طول $\frac{1}{2}$ دارای ماکزیمم است؟

۱. ۱

۲. ۲

۳. هیچ مقدار m

۴. تمام مقادیر m

دانلود از سایت ریاضی سرا

✓ **تست ۹۷ :** محیط مستطیل ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل، مساحت آن بیشترین مقدار است؟

سنجش ۹۴

۷۵.۱

۶۰.۲

۵۰.۳

۴۵.۴

✓ **تست ۹۸ :** محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

انسانی ۱۴۰۱

۲۲۵.۱

۲۰۹.۲

۵۶/۲۵.۳

۱۱/۲۵.۴

✓ **تست ۹۹ :** از میان مثلثهایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است. مثلی را اختیار کرده ایم که مساحت آن ماکسیم است. مساحت این مثلث چند سانتی متر مربع است؟

تجربی ۸۴

۳۰.۱

۳۲.۲

۳۴.۳

۳۶.۴

✓ **تست ۱۰۰ :** با سیمی به طول ۶۰۰ متر، می خواهیم قطعه زمینی به شکل مستطیل را که یک طرف آن رودخانه است، محصور کنیم. ماکسیم مساحت این زمین کدام است؟

سراسری ۹۵

۴۲۰۰۰.۱

۴۵۰۰۰.۲

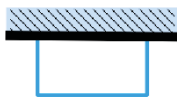
۴۶۰۰۰.۳

۴۸۰۰۰.۴



✓ **تست ۱۰۱:** می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل که یک طرف آن دیوار است، محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده کدام است؟

سراسری انسانی ۹۸



۱. ۳۶۴

۲. ۳۷۸

۳. ۳۹۲

۴. ۴۰۶

✓ **تست ۱۰۲:** رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب بپیماید. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند، مقدار a کدام است؟

تیر ۱۴۰۲

۱. ۱۵

۲. ۱۷

۳. ۲۱

۴. ۲۳

✓ **تست ۱۰۳:** حسن و امیر در شهر A ساکن هستند. حسن برای رفتن به شهر B، ابتدا ۱۵ کیلومتر در جهت جنوب و سپس ۱۵ کیلومتر در جهت شرق می‌پیماید. امیر برای رفتن به شهر B در مسیر اول ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن a کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۷ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند. کدام فرد و چند کیلومتر کمتر مسافت را برای رسیدن به شهر B طی می‌کند؟

خارج تیر ۱۴۰۲

۱. حسن، ۶

۲. امیر، ۶

۳. حسن، ۳

۴. امیر، ۳

✓ **تست ۱۰۴ :** ۳ نفر می‌خواهند زمین مستطیل شکلی را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر باشد. ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

انسانی ۱۴۰۲

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 47/5 \quad ۱.$$

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 95 \quad ۲.$$

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 95 \quad ۳.$$

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 47/5 \quad ۴.$$

✓ **تست ۱۰۵ :** دو نفر می‌خواهند زمینی به شکل مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار بین دو قسمت مشترک باشد. اگر کمترین طول حصارکشی ۲۱۰ متر باشد. ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۲

$$S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x < 70 \quad ۱.$$

$$S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x < 105 \quad ۲.$$

$$S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2, 0 < x < 70 \quad ۳.$$

$$S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2, 0 < x < 105 \quad ۴.$$

✓ **تست ۱۰۶ :** رأس سهمی به معادله $y = 2x^2$ را یک واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. معادله آن به کدام صورت بیان می‌شود؟

$$y = 2x^2 - 4x + 5 \quad ۱.$$

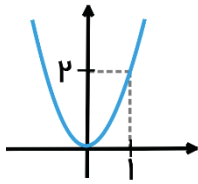
$$y = 2x^2 - 4x - 1 \quad ۲.$$

$$y = 2x^2 + 4x + 5 \quad ۳.$$

$$y = 2x^2 + 4x - 1 \quad ۴.$$

✓ **تست ۱۰۷:** اگر رأس سهمی نمودار زیر را به نقطه $(۱, -۳)$ انتقال دهیم، معادله آن به کدام

خارج از کشور ۸۹



صورت بیان می‌شود؟

۱. $y = -۲x^2 + ۴x - ۵$

۲. $y = -\frac{1}{۲}x^2 - x - ۳$

۳. $y = x^2 - ۲x - ۲$

۴. $y = ۲x^2 - ۴x - ۱$

✓ **تست ۱۰۸:** اگر تابع خطی $y = -x + ۲$ بر سهمی $y = ۴x^2 + (۲m - ۱)x + m + ۱$ مماس باشد،

عرض نقطهٔ تماس کدام است؟

۱. ۲

۲. $-\frac{1}{۲}$

۳. $\frac{۵}{۲}$

۴. $\frac{۴}{۲}$

✓ **تست ۱۰۹:** اگر نمودار تابع $y = (m + ۲)x^2 + mx + (m - ۱)$ دارای Min باشد و بر خط

$y = -۱$ مماس باشد، مقدار m کدام است؟

۱. هر مقدار m

۲. $-\frac{۸}{۳}$

۳. صفر

۴. هیچ مقدار m

✓ **تست ۱۱۰:** اگر دو سهمی $f(x) = x^2 + ۲x + a$ و $g(x) = x^2 - x - ۲a$ به‌ازای مقادیر مثبت

a ، همدیگر را در نقطه‌ای از محور x ها قطع می‌کنند، طول محل برخورد را بدست آورید.

۱. ۲

۲. ۱

۳. ۱

۴. ۲

توابع چندضابطه‌ای : هر تابعی که با توجه به دامنه تعریف ممکن است از چند ضابطه پیروی کند. (عدد یا متغیر)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) ; D_1 \\ f_2(x) ; D_2 \\ f_3(x) ; D_3 \\ \vdots \\ f_n(x) ; D_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \\ R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \dots \cup R_{f_n} \end{cases}$$

شرط آنکه $f(x)$ تابع باشد آن است که اشتراک دامنه‌ها تهی باشد:

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$$

اگر دامنه‌ها در نقطه‌ای مشترک باشند، مقادیر ضابطه‌ها نیز باید برابر باشد تا تابع باشد.

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n = \{a\} \Rightarrow f_1(a) = f_2(a) = \dots = f_n(a)$$

مثال: تابع دو ضابطه‌ای زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ 3 & -5 \leq x < 0 \end{cases}$

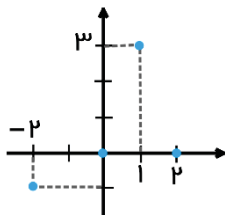
سوال: به‌ازای چه مقداری از a ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ x + a & x \leq 1 \end{cases}$ تابع است؟

توابع پلکانی (step): تابع پلکانی یک تابع چند ضابطه‌ای است که در هر ضابطه، مقدار تابع عددی ثابت است.

مثال: تابع پلکانی زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 < x < 0 \\ 3 & 1 < x < 2 \\ -1 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

سوال: آیا نمودار زیر، نمایش تابع پلکانی است؟



سوال: اگر ضابطه تابع پلکانی به صورت $f(x) = \begin{cases} (a-2)x^2 + 3 & x \geq 0 \\ (2b-1)x - k & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $a + b + k$ را بیابید.

توجه: توابع ثابت، توابع پیکانی می‌باشند. (توابع تک پله)

مثال (کتاب درسی): اگر جدول محاسبه برق برحسب میزان کیلووات ساعت مصرفی به صورت زیر باشد، هزینه مصرف ۲۵۰ کیلووات ساعت برق در یک ماه را محاسبه کنید.

پله‌های مصرف (کیلووات ساعت)	نرخ (تومان)
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۴۵
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۲۵

سوال : جدول بالا را بر حسب نمودار نشان داده و با استفاده از مساحت مستطیل‌ها، هزینه برق را محاسبه کنید.

تابع علامت (sign) : تابع با ضابطه و نمودار زیر را تابع علامت می‌نامند.

$$y = f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Graph of } y = \text{sign}(x) \\ \text{with horizontal lines at } y=1, 0, -1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

مثال : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\text{sign}(4) =$

ب) $\text{sign}(-\pi) =$

پ) $\text{sign}(-5) =$

ت) $\text{sign}(-2x^2 + x - 5) =$

ث) $\text{sign}(\sqrt{2}) =$

ج) $\text{sign}(-|x + a|) =$

چ) $\text{sign}(1 - \sqrt{2}) =$

ح) $\text{sign}(x^2 + a) =$
 $a > 0$

خ) $\text{sign}(\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}) =$

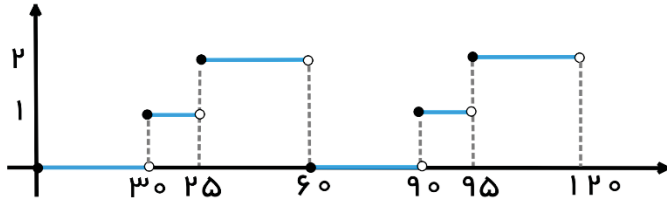
د) $\text{sign}(-\text{sign}(-5)) =$

ذ) $\text{sign}(\sqrt{3}) - \text{sign}(-\frac{1}{2}) =$

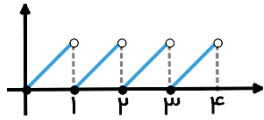
سوال : اگر $\text{sign}(2k - 5) = 1$ باشد، حدود k را مشخص کنید.

سوال : تابع $y = \text{sign}(x^2)$ را رسم کنید.

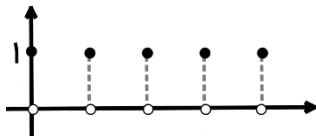
نمودارهای مهم پلکانی:



نمودار چراغ راهنمایی ۳ حالت



ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



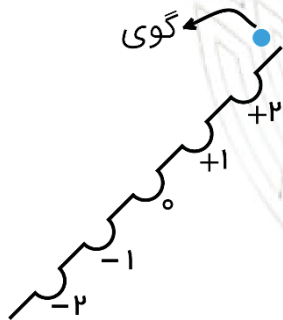
پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.

براکت یا جزء صحیح: هر عدد حقیقی مانند x را می‌توان به فرم $x = n + p$ نوشت که

$n \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq p < 1$ می‌باشد. عدد n را جزء صحیح یا براکت x گوئیم و با نماد $[x] = n$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر:

برای درک بهتر براکت می‌توانیم محور زیر را در نظر بگیریم:



مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $[-1/7] =$

ب) $[\pi] =$

پ) $[\frac{3}{4}] =$

ت) $[\frac{x^p + a^p}{x^p}] =$

ث) $[1/7] =$

ج) $[-\pi] =$

چ) $[-1\frac{3}{4}] =$

ح) $[\frac{x^p}{x^p + a^p}] =$

چ) $[\sqrt{2}] =$

ح) $[3 - \sqrt{5}] =$

خ) $[\sqrt[3]{10}] =$

چند مورد از خواص مورد نیاز برآکت :



۱) $[x] \leq x < [x] + 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$

۲) $0 \leq x - [x] < 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$

۳) $-1 < [x] - x \leq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

۴) $[x \pm k] = [x] \pm k ; \forall k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

۵) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۶) $[x \pm [y]] = [x] \pm [y] ; \forall x, y \in \mathbb{R}$

۷) $[x] = n \rightarrow n \leq x < n + 1 ; n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ (همان نکته ۱ به شکل دیگر)

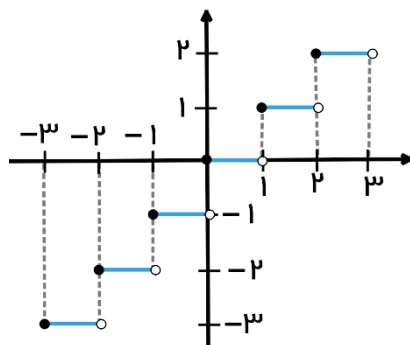
مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x] = 1$

ب) $[x + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$

پ) $[x + \frac{1}{2}] = 3$

تابع برآکت یا جزء صحیح : تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ را یک تابع جزء صحیح گوئیم و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد :



مثال: توابع زیر را در محدوده خواسته شده رسم کنید.

الف) $y = [x + 1] ; x \in [-2, 2)$

ب) $y = [x] + 1 ; -2 \leq x < 2$

پ) $y = [2x] , -2 \leq x < 2$

ت) $y = 2[x] ; -2 \leq x < 2$

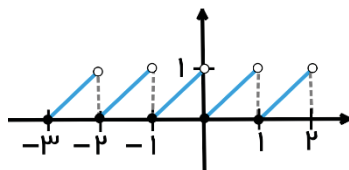
ث) $y = [x] + \text{sign}(x) ; -2 \leq x < 2$



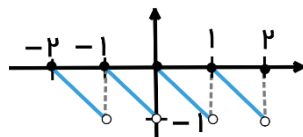
نمودار توابع مهم براکتی :



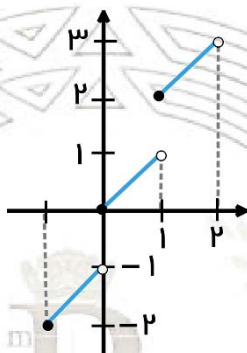
الف) $y = x - [x]$



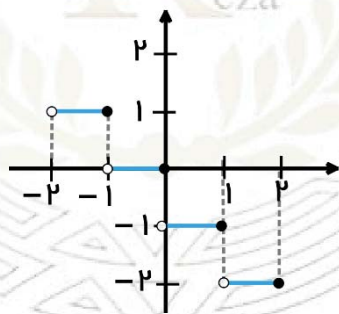
ب) $y = [x] - x$



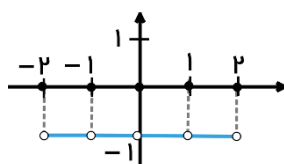
پ) $y = x + [x]$



ت) $y = [-x]$



ث) $y = [x] + [-x]$



قدرمطلق : اگر x یک عدد حقیقی باشد، تعریف می‌کنیم :

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال : حاصل عبارات زیر را بدست آورید. (با فرض کردن قدرمطلق)

الف) $|-2| =$

ب) $|x^2 + a^2| =$

پ) $|1 - \sqrt{2}| =$

ت) $\left| \text{sign}\left(-\frac{3}{4}\right) \right| =$

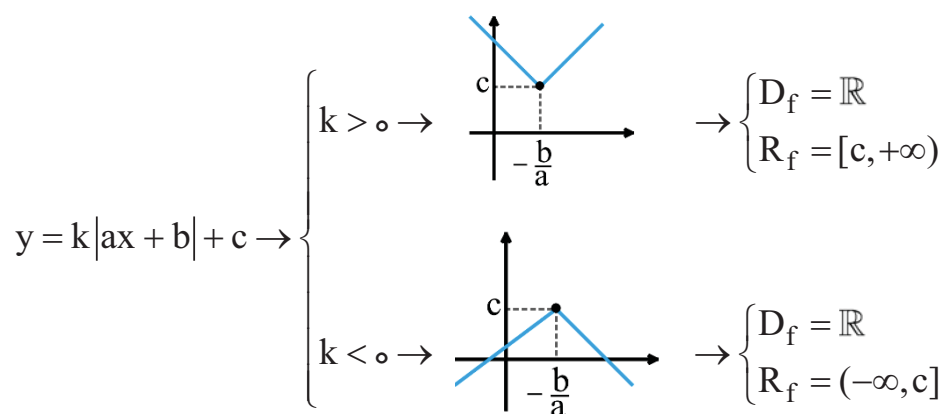
* $\sqrt{\square^2} = |\square|$

ث) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} =$

ج) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} =$

مثال : اگر $-1 < x < 2$ باشد، آنگاه حاصل $|x - 2| + |x + 1|$ را به دست آورید.

<p>خواص قدرمطلق :</p> <p>۱) $x = a \rightarrow x = \pm a \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>۲) $x - y = y - x \quad ; \forall x, y \in \mathbb{R}$</p> <p>۳) $x \cdot y = x \cdot y \quad ; \forall x, y \in \mathbb{R}$</p> <p>۴) $x ^2 = x^2 = x^2 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>۵) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y } \quad ; \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$</p>	<p>$x = 2$</p> <p>$\sqrt{5} - \sqrt{3} =$</p> <p>$-2 \cdot 3 = -2 \times 3$</p> <p>$-2 ^2 = (-2)^2 = (-2)^2$</p> <p>$\left \frac{-8}{2} \right = \frac{ -8 }{ 2 }$</p>
---	--

تابع قدرمطلق: 

مثال: توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x - 1|$

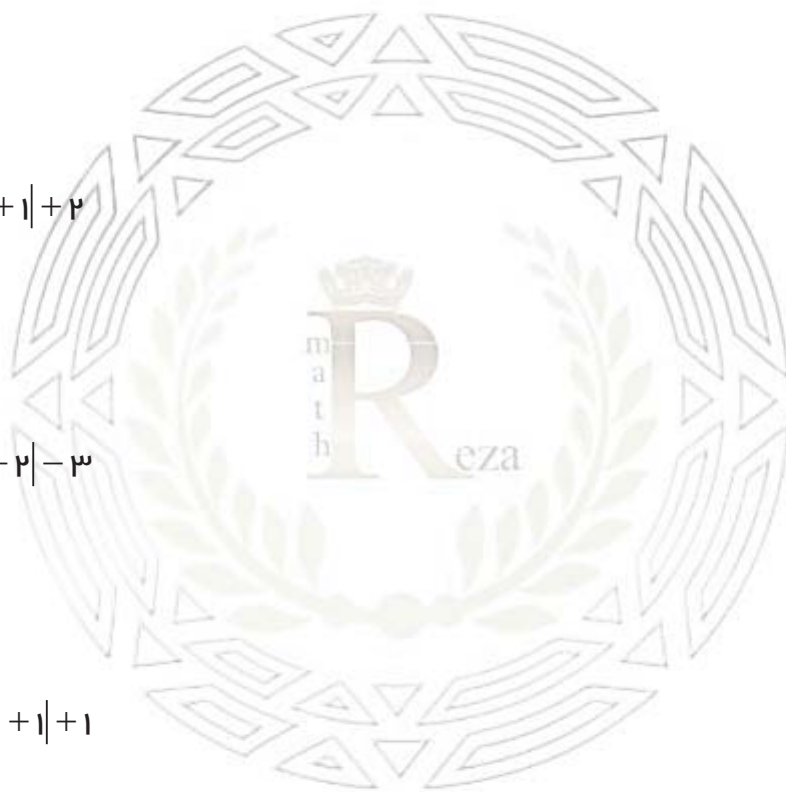
ب) $y = -|x + 1| + 2$

پ) $y = 2|x - 2| - 3$

ت) $y = -|2x + 1| + 1$

ث) $y = |x + 1| + x$

ج) $y = |3 - x| - 1$



اعمال جبری روی توابع :

$$۱) (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$۲) \begin{cases} (f - g)(x) = f(x) - g(x) & ; D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ (g - f)(x) = g(x) - f(x) & ; D_{g-f} = D_g \cap D_f \end{cases}$$

$$۳) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad ; \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$۴) \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & ; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} & ; D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} \end{cases}$$

مثال : اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشد، توابع زیر را

مشخص کنید.

الف) $f + g =$

ب) $f \times g =$

پ) $\frac{g}{f} =$

ت) $\frac{f}{g} =$

ث) $2f - 3g =$

سوال : اگر تابع $f(x) = |2x|$ و $g(x) = |x|$ باشد، آنگاه توابع زیر را مشخص کرده و نمودار

آنها را رسم کنید.

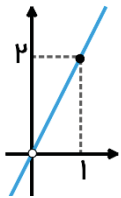
الف) $(f + g)(x) =$

ب) $(f.g)(x) =$

پ) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$

* :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\} \\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots \rightarrow D_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

سوال : اگر $f(x) = x^2$ و تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.



چند ضابطه‌ی و پلکانی :

تست ۱۱۰ : به ازای چه مقداری از m تابع $f(x) = \begin{cases} (m^2 - m - 2)x + 2 & x > 0 \\ 1 - m & x < 0 \end{cases}$ یک تابع

پلکانی غیرثابت است؟

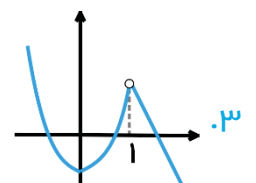
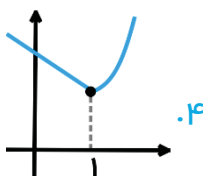
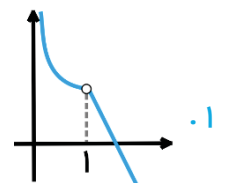
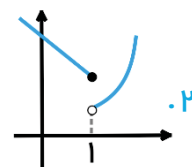
۱. ۱-

۲. ۲

۳. هیچ مقدار m

۴. هر مقدار m

تست ۱۱۱ : نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & ; x > 1 \\ 2 - x & ; x \leq 1 \end{cases}$ کدام گزینه است؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۱۱۲ : در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+3} & ; x > \frac{1}{4} \\ 4x^2 - x - 1 & ; x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ مقدار $f(\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ **مهرداد**

۱.۱

۱/۵.۲

۲.۳

۲/۵.۴

تست ۱۱۳ : اگر f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2a+x & x \geq -1 \\ bx-1 & x \leq -1 \end{cases}$ و $f(1) = 3$ باشد، مقدار $f(2) + f(-3)$ کدام است؟

۲.۱

-۲.۲

-۳.۳

۳.۴

تست ۱۱۴ : جدول مالیاتی زیر به صورت پلکانی تنظیم شده است. براساس جدول، کارمندی

کتاب درسی

با حقوق ۶۰۰۰۰۰۰ تومان چقدر مالیات پرداخت می‌کند؟

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱۳۰۰۰۰۰
۱۰	مزدادیر ۱۳۰۰۰۰۰ تا ۲۵۰۰۰۰۰
۱۵	مزدادیر ۲۵۰۰۰۰۰ تا ۴۵۰۰۰۰۰
۲۵	مزدادیر ۴۵۰۰۰۰۰

۱۵۰۰۰۰۰.۱

۷۹۵۰۰۰۰.۲

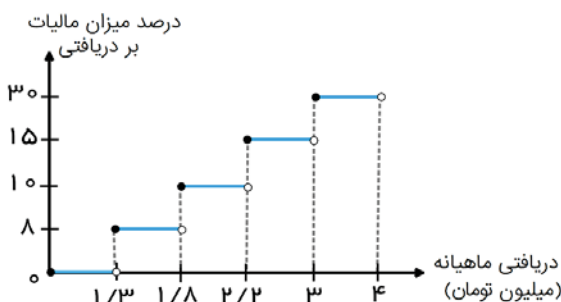
۵۶۰۰۰۰۰.۳

۳۷۵۰۰۰۰.۴

تست ۱۱۵ : مطابق شکل زیر، شخصی که ۲ میلیون تومان دریافتی ماهیانه دارد، چقدر مالیات

قلمچی

باید بپردازد؟



۱. ۶۰۰ هزار تومان

۲. ۶۰ هزار تومان

۳. ۴۰۰ هزار تومان

۴. ۴۰ هزار تومان

براکت :

✓ **تست ۱۱۶ :** اگر $\text{sign}([x]) = 0$ باشد، x کدام می‌تواند باشد؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است)

۱. $0/4$

۲. $2 - \sqrt{5}$

۳. $0/4$

۴. $\sqrt{5}$

✓ **تست ۱۱۷ :** نمودار توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ در کدام محدوده، برهم منطبق‌اند؟

۱. $0 \leq x < 2$

۲. $-1 \leq x \leq 1$

۳. $-2 \leq x < -1, 0 \leq x < 1$

۴. $-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x < 2$

✓ **تست ۱۱۸ :** معادله $[x+2] + [x-1] = 4$ چند ریشه دارد؟

۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. بیشمار

✓ **تست ۱۱۹ :** معادله $[5x] + [3x] = x - 14$ دارای چند جواب می‌باشد؟

۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. بیشمار

✓ **تست ۱۲۰ :** حاصل $[x + [x]]^3 + [x - [x]]^3$ کدام است؟

۱. صفر

۲. $8[x]^3$

۳. $8[x]^3 - 1$

۴. $2[x]$

✓ تست ۱۳۱ : اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد، حاصل $[\sqrt{n^2 + 2n}]$ کدام است؟

۱. $n - 1$

۲. n

۳. $n + 1$

۴. $n + 2$

✓ تست ۱۳۲ : مجموعه جواب معادله $[x + \frac{1}{3}] + [x] - [x - \frac{2}{3}] = 0$ کدام است؟

۱. $[-1, 0)$

۲. $[-2, -1)$

۳. $[0, 1)$

۴. $[1, 2)$

✓ تست ۱۳۳ : اگر مجموعه جواب معادله $[x + [x - 3]] = 3$ بازه $[a, b)$ باشد، مقدار $a + b$ کدام

قلمچی

است؟

۱. ۴

۲. ۷

۳. ۱۲

۴. ۱۱

✓ تست ۱۳۴ : در تابع $f(x) = [x + \frac{3}{2}] - [-x]$ ، مقدار $f(\frac{9}{4}) + f(-\frac{1}{2})$ ، کدام است؟ انسانی ۹۸

۱. ۴

۲. ۵

۳. ۶

۴. ۷

✓ **تست ۱۲۵ :** اگر $f(x) = [2x - 1]$ باشد، مقدار $f(-\frac{3}{4}) + f(\frac{\sqrt{5}}{2})$ ، کدام است؟ **انسانی ۹۹**

۱. صفر

۲. ۱

۳. -۱

۴. -۲

✓ **تست ۱۲۶ :** اگر $f(x) = [1 - \frac{x}{2}]$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{2})$ ، کدام است؟ **انسانی خارج ۹۹**

۱. صفر

۲. ۲

۳. -۱

۴. ۱

✓ **تست ۱۲۷ :** فرض کنید $f(x) = \frac{2x-1}{[x] - \text{sign}(x)}$ ، بر مجموعه $\{-2/5, 2/1, 0/8, 4\}$ تعریف

شده باشد، ماکزیمم عضو مجموعه برد تابع f کدام است؟ **انسانی خارج ۱۴۰۰**

۱. $\frac{7}{3}$

۲. ۳

۳. $\frac{3}{2}$

۴. ۴

✓ **تست ۱۲۸ :** فرض کنید $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = [2x]$ و $h(x) = \text{sign}(-x)$ باشد، ضابطه‌ی

تابع $y = 2f(x) - h(x)g(x)$ در بازه $-\frac{3}{2} < x < -1$ کدام است؟ **انسانی خارج ۱۴۰۰**

۱. $3x - 2$ ۲. $5 - 2x$ ۳. $-2x + 2$ ۴. $-8x - 4$

✓ **تست ۱۲۹ :** اگر $f(x) = [1 - 3x]$ باشد، مقدار $f(-\pi/7) - f(-\pi/7)$ ، کدام است؟

انسانی ۱۴۰۱

- ۱. صفر
- ۲. ۶
- ۳. ۲
- ۴. ۱

✓ **تست ۱۳۰ :** اگر $f(x) = [1 - \frac{x}{3}]$ باشد، مقدار $f(\pi) + 2f(\pi)$ ، کدام است؟

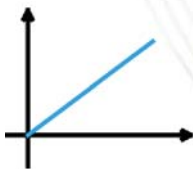
انسانی خارج ۱۴۰۱

([] نماد جز صحیح است.)

- ۱. -۲
- ۲. -۱
- ۳. ۱
- ۴. ۲

✓ **تست ۱۳۱ :** در شکل روبرو، نمودار کدام تابع است؟ 

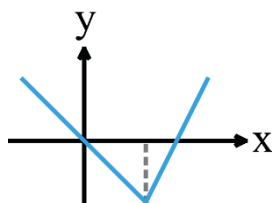
انسانی ۹۸



✓ **تست ۱۳۲ :** در شکل روبرو، نمودار کدام تابع است؟

- ۱. $y = x - |x|$
- ۲. $y = x + |x|$
- ۳. $y = |x - 1| - 1$
- ۴. $y = 1 - |x - 1|$

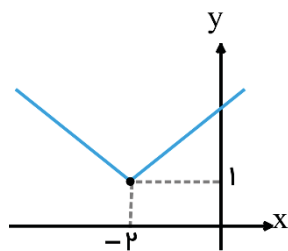
انسانی ۹۹



✓ **تست ۱۳۳ :** در شکل روبرو، نمودار کدام تابع است؟

- ۱. $y = -|x - 2| + 2$
- ۲. $y = x + 2|x|$
- ۳. $y = 2x - |x|$
- ۴. $y = |x - 2| - 2$

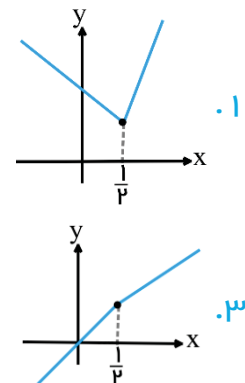
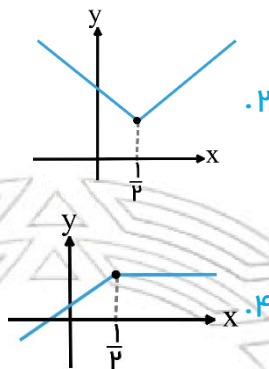
تست ۱۳۳: نمودار تابع $y = |x - a| - b$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b$ کدام است؟



- ۱. ۲-
- ۲. ۲
- ۳. ۳
- ۴. ۳-

خیلی سبز

تست ۱۳۴: نمودار تابع $y = |2x - 1| + x + 2$ کدام است؟



تست ۱۳۵: در تابع $f(x) = 2|x| + [-x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ انسانی ۹۹

- ۱. ۲-
- ۲. ۱-
- ۳. صفر
- ۴. ۲

مهرماه

تست ۱۳۶: معادله $2x + |x - 1| = 3$ چند ریشه دارد؟

- ۱. ریشه ندارد
- ۲. یک
- ۳. دو
- ۴. بیشمار

✓ تست ۱۳۷ : ضابطه تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.)

۱. $-2x$

۲. $x + 1$

۳. $x - 2$

۴. $2x + \frac{8}{3}$

✓ تست ۱۳۸ : در تابع $f(x) = 2[x] + [-x]$ ، مقدار $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

۱. -2

۲. -1

۳. صفر

۴. 1

✓ تست ۱۳۹ : نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا

انسانی ۱۴۰۱

طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ ، نامنفی باشد؟

۱. 2

۲. 3

۳. 4

۴. 5

✓ تست ۱۴۰ : نمودار تابع $y = |1 - x| + 3$ را سه واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین

حرکت می‌دهیم. تابع جدید به ازای مقدار $x = 2$ ، دارای چه مقداری است؟

۱. 3

۲. 5

۳. 9

۴. 7

✓ **تست ۱۴۱ :** برای رسم نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}|2x + 1|$ به کمک نمودار $y = |x|$ کدام مورد برای

کامل کردن جمله زیر مناسب است؟

« ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت جابجا کرده، سپس قرینه آن را

نسبت به محور رسم می‌کنیم. »

انسانی ۱۴۰۲

۱. چپ - x ها

۲. راست - x ها

۳. بالا - y ها

۴. پایین - y ها

اعمال جبری :

✓ **تست ۱۴۲ :** اگر $f = \{(1, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 3)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 3), (6, 1), (1, 8)\}$ باشند، برد

انسانی ۹۸

تابع $g \times f$ کدام است؟

۱. $\{6, 8, 12\}$

۲. $\{3, 6, 12, 16\}$

۳. $\{6, 12, 16\}$

۴. $\{6, 8, 12, 16\}$

✓ **تست ۱۴۳ :** اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$ باشند، برد

انسانی ۹۸

تابع $g - f$ کدام است؟

۱. $\{-4, 1, 3\}$

۲. $\{-4, 2, 3\}$

۳. $\{-4, 1, 2, 3\}$

۴. $\{1, 2, 3, 4\}$



✓ **تست ۱۴۴:** اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام

انسانی ۹۸

است؟

۱. \emptyset

۲. $\{(1, \frac{4}{5}), (3, 1)\}$

۳. $\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{2})\}$

۴. $\{(1, \frac{4}{5}), (2, 1)\}$

✓ **تست ۱۴۵:** فرض کنید $f = \{(x, x^2) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$ و $g = \{(x, x^3) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$

دو تابع در صفحه مختصات باشند، تعداد عناصر برد تابع $y = (\frac{g}{f})(x)$ ، کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۰

۱. ۱۱

۲. ۱۰

۳. ۶

۴. ۵

✓ **تست ۱۴۶:** اگر $f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\}$ و $g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$ باشند، برد

انسانی ۹۹

تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟

۱. $\{\frac{5}{3}, 2, -3\}$

۲. $\{\frac{7}{4}, 3, -3\}$

۳. $\{\frac{5}{3}, 4, -2\}$

۴. $\{\frac{7}{4}, 3, -2\}$

✓ تست ۱۴۷ : اگر $f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\}$ باشد، برد

انسانی خارج ۹۹

تابع $\frac{f+g}{f}$ کدام است؟

۱. $\{1/4, 1/5, 3\}$

۲. $\{1/5, 1/8, 3\}$

۳. $\{1, 1/4, 4\}$

۴. $\{1, 2/5, 4\}$

✓ تست ۱۴۸ : تابع $f(x) = |2x - 2|$ و $g(x) = [x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. اگر مجموعه A برد

انسانی دی ماه ۱۴۰۱

تابع $f \times g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟

۱. ۲

۲. ۳

۳. -۲

۴. -۳

✓ تست ۱۴۹ : تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ ، g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{fg}{f}$

انسانی ۱۴۰۲

در چند نقطه صحیح دامنه برابر ۳ است؟

۱. ۶

۲. ۴

۳. ۲

۴. صفر

✓ تست ۱۵۰ : تابع f همانی و $g(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. به ازای چند مقدار

انسانی خارج ۱۴۰۲

صحیح x اعضای مجموعه برد تابع $\frac{f}{g}$ مقداری صحیح است؟

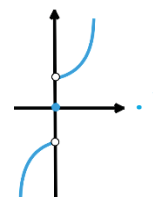
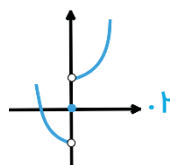
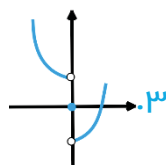
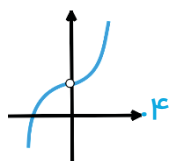
۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. ۳

تست ۱۵: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ ، نمودار تابع $(f + g)(x)$ کدام است ؟



گزاره : هر جمله خبری که دارای دقیقاً یک ارزش درست یا نادرست باشد.

مثال: عدد $\sqrt{5}$ عددی گنگ است \Leftrightarrow یک گزاره درست است.

عدد ۹۹ بر ۳ بخش پذیر نیست \Leftrightarrow یک گزاره نادرست است.

a^2 همواره نامنفی است \Leftrightarrow یک گزاره درست است.

a یک عددی گویاست \Leftrightarrow ? (یک گزاره نادرست).

نکته: 

الف) جملات خبری که ارزش آنها نامشخص یا براساس سلیقه باشد، گزاره محسوب نمی شوند.
ب) جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند.

مثال: مشخص کنید کدام یک از عبارات زیر گزاره هستند و ارزش آنها را در صورت گزاره

بودن مشخص کنید.

الف) چه هوای خوبی!

ب) لطفاً درب را باز کن

پ) آیا از درس ریاضی لذت می برید؟

ت) حضور دانش آموزان در کلاس درس الزامی است.

ث) عدد ۳ بزرگتر از $\sqrt{8}$ است.

ج) حاصل عبارت $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ یک عددی طبیعی است.

چ) ماشین زانتیا از بقیه ماشین ها جذاب تر است.

نکته: الف) برای راحتی کار می توانیم ارزش گذاری گزاره ها را به صورت مختصر به صورت زیر بیان کنیم :

$$\text{درست} \Rightarrow \begin{cases} \text{د} \\ \text{True} = T \end{cases} \qquad \text{نادرست} \Rightarrow \begin{cases} \text{ن} \\ \text{False} = F \end{cases}$$

ب) گزاره‌ها را با حروف انگلیسی مثل p, q, r و ... نمایش می‌دهیم.
پ) اگر دارای n گزاره باشیم، جدول وضعیت ارزشی گزاره‌ها دارای 2^n ردیف یا حالت است.

نقیض یک گزاره : نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش p است.

نکته: 

۱. برای نوشتن نقیض یک گزاره مانند p به صورت « چنین نیست که p » عمل می‌کنیم.
۲. نماد \geq و $<$ نقیض یکدیگرند.
۳. نماد $<$ و \geq نقیض یکدیگرند.
۴. نمادهای \in و \notin نقیض یکدیگرند.
۵. نمادهای $=$ و \neq نقیض یکدیگرند.
۶. نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض یکدیگرند.
۷. گاهی اوقات با توجه به گزاره می‌توانیم نقیض آن را بنویسیم یعنی است را به نیست و یا نیست را به است تبدیل کنیم و یا اینکه با توجه به معنی کلمه و مفهوم آن نقیض آن را بنویسیم.

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. 

- الف) عدد ۵ عددی گویا است.
- ب) ارسطو شاگرد افلاطون است.
- پ) ۳ عددی فرد است.
- ت) عدد ۳ بزرگترین از عدد ۴ است.
- ث) ۱۳ عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.
- ج) مجموعه اعداد گویا زیرمجموعه اعداد طبیعی است. ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$)
- چ) $2^3 \times 5 = 40$

ج) a^2 عددی نامنفی است.

خ) عدد ۱۲ عددی اول است.

گزاره هم‌ارز : دو گزاره p و q را هم‌ارز گوئیم هرگاه هر دو دارای ارزش درست یا نادرست

باشند و به صورت مقابل نشان می‌دهیم : $p \equiv q$

مثال: گزاره «۲ عددی مرکب است.» با « $\sqrt{3}$ بزرگتر از ۵ است.» دو گزاره هم‌ارز با ارزش

نادرست هستند.

نکته: نقیض نقیض یک گزاره با خود گزاره برابر است.

گزاره مرکب : اگر دو یا چند گزاره را به کمک حروف ربط مثل «و»، «یا» و ... ترکیب کنیم

گزاره مرکب ساخته‌ایم.

در اینجا به ترکیب دو گزاره به کمک حروف ربط می‌پردازیم.

انواع گزاره مرکب :

۱ **ترکیب عطفی دو گزاره :** اگر دو گزاره p و q به کمک حرف ربط «و» کنار هم‌دیگر قرار دهیم،

گزاره مرکب عطفی ساخته‌ایم و این گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند

در غیر این صورت در بقیه حالات نادرست است و به صورت $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱. عدد ۲ عددی اول و ۳ بزرگتر از ۵ است.

۲. $(+2 \in \mathbb{N}) \wedge (Q \subseteq \mathbb{W})$

۳. a^2 همواره عددی نامنفی است و $\sqrt{3}$ یک عددی گنگ است.

۴. $(x^2 + 1 = 0) \wedge (\sqrt{3} > 2)$

۲ ترکیب فصلی دو گزاره: اگر دو گزاره p و q به کمک حرف ربط «یا» کنار همدیگر قرار دهیم، گزاره مرکب فصلی ساخته‌ایم و این گزاره زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند در غیر این صورت در بقیه حالات درست است و به صورت $p \vee q$ نمایش می‌دهیم.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱. عدد ۲ عددی اول یا ۳ بزرگتر از ۵ است.

۲. $(+2 \in \mathbb{N}) \vee (Q \subseteq \mathbb{W})$

۳. a^2 همواره عددی نامنفی است یا $\sqrt{3}$ یک عددی گنگ است.

۴. $(x^2 + 1 = 0) \vee (\sqrt{3} > 2)$

روابط گزاره‌های مرکب عطفی و فصلی:

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند و T یک گزاره درست و F یک گزاره نادرست باشد در این صورت داریم:

$$\Rightarrow \text{ترکیب عطفی} \left\{ \begin{array}{l} (p \wedge q) \equiv p \\ (p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \\ (p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p \\ (p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F \\ (p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F \end{array} \right. \Rightarrow \text{ترکیب فصلی} \left\{ \begin{array}{l} (p \vee q) \equiv p \\ (p \vee q) \equiv (q \vee p) \\ (p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T \\ (p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p \\ (p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T \end{array} \right.$$

مثال: درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را مشخص کنید.

۱. $(\sim p \wedge T) \equiv P$

۲. $(\sim p \wedge \sim F) \equiv T$

۳. $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv p$

۴. $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv T$

روابط تکمیلی ترکیب عطفی و فصلی اگر p و q و r گزاره دلخواه باشند، داریم :

$$۱. روابط شرکت پذیری \Rightarrow \begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases}$$

$$۲. روابط پخشی \Rightarrow \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

$$۳. قوانین دمورگان \Rightarrow \begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$$

$$۴. قوانین جذب \Rightarrow \begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

$$۵. قوانین شبه جذب \Rightarrow \begin{cases} p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \end{cases}$$

نکته: درستی روابط را می‌توان به کمک جدول ارزش گزاره مشخص کرد.

مثال: اگر ارزش دو گزاره مرکب $(p \wedge \sim q)$ و $(q \vee \sim r)$ درست باشند، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱. $\sim (p \wedge r)$

۲. $r \wedge (\sim p \vee q)$

۳. $p \vee (r \wedge q)$

۴. $p \vee (r \wedge p)$

۳ ترکیب شرطی دو گزاره : اگر دو گزاره p و q را به صورت « اگر p آنگاه q » به کار ببریم گزاره شرطی ساخته‌ایم و ارزش آن زمانی نادرست است که گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد، در غیراینصورت در بقیه حالات درست است و به صورت « $p \Rightarrow q$ » نمایش می‌دهیم.



نکته:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

1 به گزاره اول (p) مقدم و گزاره دوم (q) تالی می‌گویند.

2 گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های زیر نیز می‌خوانیم :

الف) p نتیجه می‌دهد q را

ب) p شرطی کافی است برای q

پ) q شرط لازم است برای p

مثال: ارزش گزاره‌های شرطی زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $\sqrt{5} > \sqrt{3} + 1$ باشد آنگاه هر هفته هفت روز است.

ب) اگر 4 عددی زوج باشد آنگاه ماه مهر 31 روز است.

پ) فرد بودن 10 نتیجه می‌دهد اول بودن 5 را

ت) $(\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}'$

ث) اگر $2x^2 + 3 = 0$ باشد آنگاه $f = \{(1, 2), (3, 4)\}$ تابع نیست.

نکته: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p و q به هم وابسته بودن، برای راحتی کار ارزش p را درست

فرض کرده و گزاره q را بررسی می‌کنیم تا ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ مشخص شود.



نکته:

1. اگر a زوج باشد آنگاه a^2 هم زوج است.

2. زوج بودن a نتیجه می‌دهد که $a + 1$ نیز زوج است.

3. اگر a فرد باشد آنگاه a^2 نیز فرد است.

نکته: 

الف) عکس نقیض گزاره « $p \Rightarrow q$ » را با « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » نمایش می‌دهیم و هم‌ارز هستند
 « $p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ »

ب) اگر p و q گزاره دلخواه باشند در این صورت $(\sim p \vee q) \equiv p \Rightarrow q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

مثال:  نقیض گزاره « $p \Rightarrow q$ » را بنویسید.

۴ گزاره دو شرطی : اگر از گزاره p ، گزاره q نتیجه شود و از گزاره q ، گزاره p نتیجه شود،
 آنگاه ترکیب شرطی دو گزاره را ننوشته‌ایم و به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نمایش می‌دهیم و تنها
 زمانی درست است که هر دو گزاره p و q یا درست باشند یا هر دو نادرست باشند.

نکته: 

۱ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۲ گزاره دو شرطی را به صورت‌های زیر می‌خوانیم :

۱. p نتیجه می‌دهد q و q نتیجه می‌دهد p را

۲. اگر p آنگاه q و برعکس

۳. p اگر و تنها اگر q

۴. p شرط لازم و کافی برای q

مثال: ارزش گزاره‌های دو شرطی زیر را تعیین کنید.

(الف) ۲ عددی زوج است اگر و تنها اگر ۳ عددی اول باشد.

(ب) اگر $\sqrt{2} > 1$ باشد آنگاه معادله $x^2 - 4 = 0$ دارای جواب است و برعکس

(ج) در معادله درجه دوم، صفر شدن دلتا شرط لازم و کافی برای داشتن فقط یک ریشه

(د) اگر ۱۳ فرد باشد آنگاه ۱۵ مربع کامل است و برعکس

تبدیل عبارت فارسی به ریاضی :

در حل بعضی از سوالات و گزاره‌ها نیاز داریم تا آن را به صورت عبارت ریاضی بنویسیم. برای راحتی کار چند مورد از عباراتی که در گزاره‌ها استفاده می‌شوند را در جدول زیر آورده‌ایم.

عبارت فارسی	نماد ریاضی
۲ برابر عددی	$2x$
نصف عددی	$\frac{1}{2}x$
ثلث عددی	$\frac{1}{3}x$
مربع عددی (مجذور عددی)	x^2
مکعب عددی	x^3
جذر عددی	\sqrt{x}
ریشه nام عددی	$\sqrt[n]{x}$
حاصلضرب دو عدد	$x.y$
معکوس عددی	$\frac{1}{x}$
قدرمطلق عددی	$ x $
قدرمطلق تفاضل دو عددی	$ x - y $ یا $ y - x $
x از a بزرگتر است	$x > a$
x کوچکتر یا مساوی عدد a است	$x \leq a$
x مخالف عدد a است	$x \neq a$
مجموع معکوس دو عدد	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
مجموع مربعات دو عدد	$x^2 + y^2$
مربع مجموع دو عدد	$(x + y)^2$
قرینه یک عدد	$-x$

مثال: گزاره‌های فارسی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱. عددی بعلاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.
۲. حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.
۳. حاصل ضرب عددی در خودش بعلاوه ۳ بزرگتر از خودش است.
۴. دو برابر جذر عددی برابر خودش است.
۵. مکعب یک عدد، بزرگتر از هفت برابر آن عدد، بعلاوه پنج است.
۶. مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.
۷. مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.
۸. مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.
۹. حاصل ضرب عددی صحیح در عدد صحیح بعدی خود برابر است با عدد صحیح قبلی آن
۱۰. مجموع سه عدد زوج متوالی برابر است با سه برابر کوچکتر بعلاوه شش.

انواع استدلال ریاضی:

۱ استدلال استثنایی: بهترین و پرکاربردترین قیاس‌ها، قیاس استثنایی است که عبارت فارسی

و ریاضی آن به صورت زیر است :

$$\begin{array}{l} \text{زبان فارسی} \Leftarrow \left. \begin{array}{l} \text{مقدمه ۱: اگر } p \text{ آنگاه } q \\ \text{مقدمه ۲: } p \end{array} \right\} \\ \hline q \therefore \end{array}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \text{ : مقدمه ۱} \\ p \text{ : مقدمه ۲} \end{array} \right\} \text{ زبان ریاضی}$$

نتیجه‌گیری $\therefore q$

مثال:

۱. مقدمه ۱: اگر هوا ابری باشد آنگاه باران می‌بارد.
مقدمه ۲: هوا ابری است.
∴ امروز باران می‌بارد.

* بعضی اوقات نمی‌توان نتیجه درستی از این استدلال گرفت.

۲. مقدمه ۱: اگر علی به باشگاه بدنسازی برود آنگاه قوی می‌شود.
مقدمه ۲: علی به باشگاه بدنسازی می‌رود.
∴ علی قوی است.

۲ استدلال مغالطه: روش به کار رفته در این استدلال نادرست است و عبارت فارسی و

ریاضی آن به صورت زیر است :

$$\begin{array}{l} \text{زبان فارسی} \Leftarrow \left. \begin{array}{l} \text{مقدمه ۱: اگر } p \text{ آنگاه } q \\ \text{مقدمه ۲: } q \end{array} \right\} \\ \hline p \therefore \end{array}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \text{ : مقدمه ۱} \\ q \text{ : مقدمه ۲} \end{array} \right\} \text{ زبان ریاضی}$$

$\therefore p$

مثال:

۱. مقدمه ۱: اگر موتور اتومبیلی از کار بیفتد، آنگاه اتومبیل حرکت نمی‌کند.
مقدمه ۲: اتومبیل حرکت نمی‌کند.
∴ موتور اتومبیل از کار افتاده است.

۲. مقدمه ۱: اگر باران بیارد آنگاه حیاط خانه حسین خیس می‌شود.
مقدمه ۲: حیاط خانه علی خیس است.
∴ باران باریده است.

۳ استفاده از عکس نقیض گزاره شرطی :

در بعضی اوقات اثبات گزاره « $p \Rightarrow q$ » سخت است، بخاطر همین از عکس نقیض آن « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » استفاده می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است. ($n \in \mathbb{Z}$)



تست‌های فصل سوم :



تست ۱ : کدام گزینه گزاره محسوب نمی‌شود؟

۱. هر عدد طبیعی، عدد صحیح می‌باشد.
۲. a^2 عددی نامنفی است.
۳. ساده‌ترین درس کنکور، دینی است.
۴. قرآن ۱۱۴ سوره دارد.

تست ۲ : در کدام گزینه دو عبارت کنار هم نقیض یکدیگر نیستند؟

۱. $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
۲. $x^2 - 3x = 2$, $x^2 - 3x \neq 2$
۳. a عددی فرد است، a عددی زوج است.
۴. a عددی مرکب است، a عددی اول است.

تست ۳ : اگر گزاره « ۵۷ بر ۳ بخش‌پذیر است » گزاره « ۲ عددی اول نیست » باشد و r

گزاره‌های دلخواه باشد در این صورت ارزش کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱. $\sim (p \vee \sim q) \wedge r$
۲. $(p \vee \sim r) \wedge q$
۳. $(p \wedge \sim r) \vee \sim q$
۴. $(q \wedge r) \vee \sim p$

تست ۴ : اگر p و q دو گزاره باشند که ترکیب عطفی آنها دارای ارزش درست باشد. در این

صورت به ترتیب از راست به چپ ارزش گزاره‌های $p \vee (\sim p \wedge q)$ و $p \wedge (\sim p \vee q)$ کدام است؟

۱. نادرست - درست
۲. درست - نادرست
۳. نادرست - نادرست
۴. درست - درست

تست ۵ : ارزش گزاره $[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee q$ کدام است؟

۱. همواره درست
۲. همواره نادرست
۳. وابسته به بودن به ارزش گزاره p
۴. وابسته بودن به ارزش گزاره q

✓ تست ۶ : حاصل هم‌ارزی $(F \wedge p) \wedge (\sim q \vee T)$ کدام است؟

T .۱

F .۲

p .۳

q .۴

✓ تست ۷ : حاصل هم‌ارزی $\sim (q \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge \sim p)$ کدام است؟

p .۱

q .۲

T .۳

F .۴

✓ تست ۸ : طرف دوم هم‌ارزی $\sim q \vee \sim (p \vee q)$ کدام است؟

p .۱

q .۲

$\sim p$.۳

$\sim q$.۴

✓ تست ۹ : چند مورد از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

- | | | |
|---|---|------|
| (الف) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ | (ب) $\sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ | ۱ .۴ |
| (پ) $[r \vee (p \wedge r)] \equiv p$ | (ت) $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ | ۲ .۳ |
| (ث) $(q \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee q) \equiv F$ | (ج) $\sim [\sim (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim (p \wedge q)$ | ۳ .۲ |
| | | ۴ .۱ |
| | | ۱ .۴ |

✓ تست ۱۰ : اگر $(\sim p \wedge q) = F$ باشد، حاصل هم‌ارزی $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ کدام است؟

p .۱

$\sim p$.۲

۳. همیشه نادرست

۴. بستگی به p و q دارد.

✓ تست ۱۱ : اگر گزاره $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ کدام است؟

T .۱

F .۲

۳. وابسته به r

۴. T یا F

✓ **تست ۱۲ :** گزاره شرطی زمانی دارای ارزش درست است که مقدم و تالی آن باشد.

۱. درست - درست
۲. درست - نادرست
۳. نادرست - درست
۴. نادرست - نادرست

✓ **تست ۱۳ :** نقیض گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim q$ کدام است؟

۱. $q \Rightarrow p$
۲. $p \Rightarrow q$
۳. $p \wedge q$
۴. $\sim p \wedge \sim q$

✓ **تست ۱۴ :** ارزش گزاره $p \vee q \Rightarrow p$ در چه صورتی به انتفای مقدم درست است؟

۱. p و q هر دو درست.
۲. p نادرست و q درست.
۳. p درست و q نادرست.
۴. p و q هر دو نادرست.

✓ **تست ۱۵ :** ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ در چند حالت نادرست است؟

۱. ۳
۲. ۴
۳. ۱
۴. ۲

✓ **تست ۱۶ :** با استفاده از فرمول‌های مربوط به گزاره‌های عطفی، فصلی و شرطی، گزاره‌ی

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

۱. $\sim (p \wedge q) \wedge r$
۲. $(q \Rightarrow p) \Rightarrow r$
۳. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
۴. $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

✓ **تست ۱۷ :** اگر گزاره $(s \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(r \vee s) \Rightarrow q$ کدام است؟

۱. T
۲. F
۳. با q هم‌ارز است.
۴. با q هم‌ارز است.

✓ **تست ۱۸ :** اگر گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و $(\sim p \Rightarrow q)$ درست باشند، ارزش گزاره $q \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ کدام است؟

۱. $\sim p$
۲. $\sim q$
۳. T
۴. F

✓ **تست ۱۹ :** اگر p و q گزاره‌های دلخواه و r گزاره‌ای نادرست باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱. $(p \vee q) \wedge r$
۲. $\sim r \Rightarrow (r \wedge p)$
۳. $(r \Rightarrow p) \vee q$
۴. $p \Rightarrow (q \vee r)$

✓ **تست ۲۰ :** ارزش نقیض گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim q)$ کدام است؟

۱. همواره درست
۲. همواره نادرست
۳. به ارزش $p \wedge q$ وابسته است.
۴. به ارزش p وابسته است.



تست ۲۱ : حاصل هم‌رزی مقابل کدام است؟

$$(q \Leftrightarrow [\sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)]) \equiv ?$$

۱. T

۲. F

۳. p

۴. q

تست ۲۲ : اگر گزاره درست و q گزاره نادرست و r دلخواه باشد، ارزش گزاره

سراسری انسانی ۹۸

$(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow p \wedge q$ برابر کدام گزینه است؟

۱. r

۲. همیشه درست

۳. $\sim r$

۴. همیشه نادرست

تست ۲۳ : کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(p \wedge r) \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$ است؟

۱. q

۲. r

۳. $r \vee p$

۴. $p \vee q$

سراسری انسانی خارج ۹۹

تست ۲۴ : کدامیک از هم‌ارزی‌های زیر، نادرست است؟

۱. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

۲. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

۳. $(\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p)$

۴. $(\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$



✓ **تست ۲۵ :** گزاره $((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim p$ ، در کدام حالت نادرست است؟

سراسری انسانی ۹۸

۱. $p \vee q \sim$ درست

۲. p و q درست

۳. $\sim p$ و $\sim q$ درست

۴. $\sim p$ و q درست

سراسری انسانی خارج ۹۹

✓ **تست ۲۶ :** هم‌ارز گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ ، کدام است؟

۱. $\sim p$

۲. p

۳. q

۴. $\sim q$

✓ **تست ۲۷ :** جدول ارزشی کدام‌یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزشی گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$

سراسری انسانی ۱۴۰۰

یکسان نیست؟

۱. $p \Rightarrow (q \vee r)$

۲. $(p \wedge q) \vee r$

۳. $\sim p \vee q \vee r$

۴. $(p \Rightarrow q) \vee r$

✓ **تست ۲۸ :** اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر همواره

سراسری انسانی ۱۴۰۰

درست است؟

۱. $q \vee p \Rightarrow q$

۲. $q \vee p \Rightarrow p$

۳. $p \wedge \sim q$

۴. $q \vee p \Rightarrow p \wedge q$

✓ **تست ۲۹ :** جدول ارزشی کدام گزاره با جدول ارزشی گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge (p \Rightarrow q))$ یکسان نیست؟

سراسری انسانی خارج ۱۴۰۰

۱. $p \vee q \vee r$

۲. $(p \wedge \sim q) \vee r$

۳. $\sim (p \Rightarrow q) \vee r$

۴. $(p \vee r) \wedge (q \Rightarrow r)$

✓ **تست ۳۰ :** ارزش گزاره $(\sim (p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q$ ، کدام است؟ سراسری انسانی خارج ۱۴۰۰

۱. همواره درست است.

۲. همواره نادرست است.

۳. به ارزش q بستگی دارد.

۴. به ارزش p بستگی دارد.

✓ **تست ۳۱ :** گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow p$ در کدام حالت نادرست است؟

سراسری انسانی ۱۴۰۱

۱. p و q درست

۲. $\sim p$ و $\sim q$ نادرست

۳. p و $\sim q$ درست

۴. p و $\sim q$ نادرست

✓ **تست ۳۲ :** اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

سراسری انسانی خارج ۱۴۰۱

۱. $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$

۲. $\sim (p \wedge \sim q) \wedge r$

۳. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

۴. $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

✓ **تست ۳۳ :** با کدام شرط، استدلال گزاره زیر، درست است؟

« در یک مستطیل با اضلاع a و b ، اگر اندازه a ، $\frac{16}{9}$ برابر شود، اندازه قطر $\frac{4}{3}$ برابر می‌شود. »

۱. $b = a$

۲. $b = \frac{4}{3}a$

۳. $b = \frac{16}{9}a$

۴. برای هر مستطیلی، این گزاره درست است.

✓ **تست ۳۴ :** کدام مورد در خصوص ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ ، درست است؟

سراسری انسانی ۱۴۰۲

۱. هم‌ارز $q \Rightarrow p$ است.

۲. همواره نادرست است.

۳. همواره درست است.

۴. هم‌ارز $p \Rightarrow \sim q$ است.

✓ **تست ۳۵ :** کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره $[((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p] \sim$ است؟

سراسری انسانی ۱۴۰۲

۱. $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$

۲. $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$

۳. $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

۴. $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

✓ **تست ۳۵ :** کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره $[((p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)) \Rightarrow r] \sim$ است؟

سراسری انسانی ۱۴۰۲

۱. $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge r$

۲. $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim r$

۳. $(p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$

۴. $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$

☑ **تست ۳۶ :** با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

- ۱) $a = b$
- ۲) $a^2 = ab$ طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است.
- ۳) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ b^2 را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است.
- ۴) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است.
- ۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$ طرفین تساوی گام ۴ را بر $a - b$ تقسیم کرده است.
- ۶) $b + b = b$ به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است.
- ۷) $\frac{2b}{b} = \frac{b}{b}$ طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است.
- ۸) $2 = 1$

۳.۱

۵.۲

۶.۳

۷.۴

✓ **تست ۳۷ :** قرار است در زمینی به مساحت b مدرسه‌ای ساخته شود که مساحت حیاط آن برابر a باشد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

سراسری انسانی خارج ۱۴۰۲

- ۱) $a < b$
- ۲) $a^2 < ab$ طرفین نامساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است.
- ۳) $a^2 - b^2 < ab - b^2$ b^2 را از طرفین نامساوی گام ۲ کم کرده است.
- ۴) $(a - b)(a + b) < (a - b)b$ طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است.
- ۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} < \frac{(a-b)b}{(a-b)}$ طرفین نامساوی گام ۴ را بر $a - b$ تقسیم کرده است.
- ۶) $a + b - (b) < b - (b)$ b را از طرفین نامساوی گام ۶ کم کرده است.
- ۷) $a < 0$

۳.۱

۵.۲

۶.۳

۷.۴



بخش اول: گردآوری داده‌ها

جامعه آماری: به کل افراد، اشیا یا اجسام یا گروهی که آن‌ها را از نظر موضوع و مبحث خاصی مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم.

واحد آماری: به هر یک از اعضای جامعه آماری یک واحد آماری می‌گوییم.

نمونه: هر زیر مجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخص انتخاب شده باشد را نمونه گوئیم.

نمونه تصادفی: نمونه‌ای که در آن همه‌ی اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند.

اندازه نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه گوئیم.

داده آماری: واقعیت‌هایی درباره یک چیزند که در محاسبه، استنباط یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند که به صورت عددی یا غیر عددی هستند.

مثال: می‌توانیم دانش‌آموزان یک مدرسه را به عنوان یک جامعه آماری در نظر بگیریم. در این صورت هر دانش‌آموز یک واحد آماری است. اگر با استفاده از روش‌های خاص مثل قرعه‌کشی و ... تعدادی دانش‌آموز را انتخاب کنیم، این تعداد دانش‌آموز را نمونه تصادفی گوئیم.

نکته: چون نمونه‌گیری مهمترین بخش آماری است، باید در انتخاب اعضای آن به نکات زیر توجه کنیم:

- ۱) اعضای نمونه باید به صورت تصادفی و شانسی انتخاب شوند و الگوی خاصی برای انتخاب آنها وجود نداشته باشد.
- ۲) اندازه نمونه باید به قدر کافی بزرگ باشد.
- ۳) نمونه مورد نظر باید اطلاعاتی را که ما می‌خواهیم در مورد جامعه آماری بدست بیاوریم را در اختیار ما قرار بدهد.

ضرب‌المثل‌های معروف و مربوط به نمونه: «با یک گل بهار نمی‌شود» - «مشت نمونه خروار است»

سرشماری: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم می‌گوئیم سرشماری کرده‌ایم.

مشکلات سرشماری:

- (۱) هزینه زیاد
- (۲) زمان بر بودن
- (۳) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه
- (۴) بالا رفتن خطا در جمع‌آوری داده‌ها
- (۵) امکان استفاده در بررسی‌های مخرب وجود ندارد. (لامپ و هندوانه و ...)
- (۶) کم و زیاد شدن اعضا در طول مدت سرشماری (مرگ و میر و زاد و ولد و ...)

آمارگیری: گردآوری داده‌ها را آمارگیری گویند و به شخص آمارگیر، آمارگر می‌گویند.

روش‌های جمع‌آوری داده‌ها (یا آمارگیری):

- ۱- مشاهده (آزمایش): جمع‌آوری داده بدون نیاز به فرد پاسخ‌گو (💡 **تذکر:** اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست)
- ۲- مصاحبه (پرسش شفاهی): معمولا بین دو نفر اتفاق می‌افتد که یکی مصاحبه‌گر (آمارگیر) و دیگری مصاحبه شونده (پاسخگو) است.
- (💡 **تذکر:** از این روش زمانی استفاده می‌شود که مصاحبه‌گر از پاسخ‌های احتمال مصاحبه شونده خبر ندارد.)

مثال: برای کاهش ترافیک با صاحب‌نظران مصاحبه کردن

- ۳- دادگان (داده‌های از قبل تهیه شده): اطلاعاتی هستند که ذخیره شده‌اند و در این روش در وقت و هزینه صرفه‌جویی می‌شود.

(💡 **تذکر:** همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.)

مثال: تعداد افراد فوت شده بر اثر کرونا در سال ۱۴۰۰ در شش ماهه اول - نمرات ریاضی مثبت

شده در اداره کل استان‌ها

۴- پرسش‌نامه: مجموعه سوالاتی از پیش تعیین شده که توسط تعداد افرادی تکمیل می‌شود

(مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم)

نکته: مرکز آمار ایران هر ده سال یکبار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات همه‌ی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند که به این فرآیند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوئیم.

نکته: سوالات پرسش‌نامه باید ویژگی‌های زیر را داشته باشند:

- ۱- سوالات ساده و واضح باشند.
- ۲- جواب سوالات کوتاه، یک کلمه‌ای، عددی و یا به صورت تستی (گزینه‌ای) باشد.
- ۳- برخی سوالات به گونه‌ای باشد که اولاً پاسخ دهنده مایل به جواب دادن آن‌ها باشد در ثانی به صورت حدودی باشد مانند: سن و درآمد و ...
- ۴- از سوالات هدایت کننده دوری کنید.
- ۵- دستورالعمل کامل و واضح پاسخ‌گویی به پرسش‌نامه را ضمیمه کنید.

مثال: اگر سوالات پرسش‌نامه در مورد جنس مو افراد باشد، در پرسش‌نامه سوالات هر بخش از موهای افراد (خشک، چرب و ...) دسته‌بندی شود.

تذکر: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

متغیر تصادفی: ویژگی یا موضوعی از افراد یا اشیاء که قرار است مورد مطالعه قرار گیرد را متغیر گوئیم.

انواع متغیرها:

۱- متغیر کمی: متغیرهایی هستند که قابل اندازه‌گیری هستند، یعنی عدد هستند و می‌توانیم عملیات ریاضی (جمع، تفریق و معدل‌گیری و ...) را برای آنها انجام دهیم.

مثال: قد، وزن، سن، شدت زلزله، در آمد، میزان بارندگی، تعداد افراد خانواده و ...

متغیر کیفی: متغیرهایی هستند که برای دسته‌بندی افراد یا اشیاء استفاده می‌شوند و در بعضی از اعداد استفاده می‌شود ولی قابل اندازه‌گیری نیستند.

مثال: رتبه در کنکور، مراحل تحصیلات، نوع شغل، کیفیت کالا، جنسیت و ملیت و ...

انواع مقیاس‌های کیفی:

۱- اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی که شامل نام‌ها، برچسب‌ها و گروه‌ها می‌شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ یا بر عکس مرتب کرد وجود ندارد مانند، گروه خونی انسان‌ها، شماره دانش‌آموزی، رنگ چشم و ...

تذکر: در مقیاس اسمی اعداد صرفاً برای دسته‌بندی به کار می‌روند.

۲- ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیاء ارجحیت نیز قائل می‌شود.

مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف یا معدل بین داده‌ها یا امکان‌پذیر نیست یا بی‌معناست.

مثال: رتبه دانش‌آموزان در کنکور، مراحل رشد انسان، مراحل تحصیلات، کیفیت غذا یا کالا (عالی، خوب، متوسط و بد)

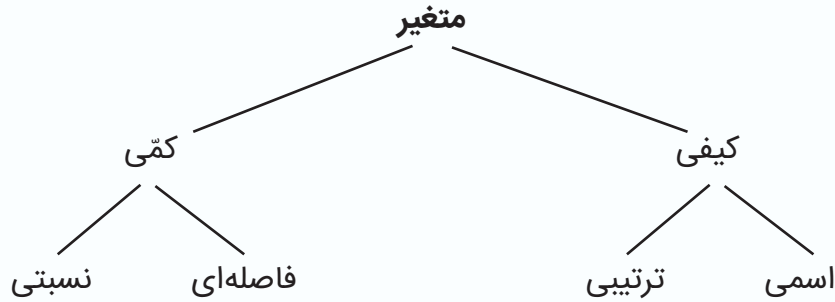
انواع مقیاس‌های کمی:

۱- فاصله‌ای (نسبته): این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن و مقایسه کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست و صفر در این مقیاس قرار دادی (نسبی) است یعنی صفر به معنی نبود ویژگی در فرد یا شیء نیست.

مثال: درجه حرارت شهرها: اگر دمای بوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت (دمای بوشهر دو برابر دمای تهران است ولی می‌توان گفت اختلاف دما ۱۰ درجه سلسیوس است). در اینجا دمای صفر به معنی این نیست که شهر دما ندارد.

۲- نسبتی (پیهسته): این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن و مقایسه کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها و نسبت مقادیر داده‌ها نیز با معناست و صفر به معنای نبود ویژگی در فرد یا شیء است.

یعنی صفر در اینجا مطلق است. مانند: نمره، قد، وزن و متغیرهایی که با واژه تعداد شروع می‌شوند و...



مثال: نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) محسن، محمود، محمد، میثم همگی اسامی مذکر هستند.
- (ب) در یک دبیرستان ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا مرتبه نوزدهم، صادق مرتبه دهم و جواد مرتبه ۴ را کسب کرده است و می‌دانیم که مرتبه یک بهترین است.
- (پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (بر حسب درجه سلسیوس)
- (ت) طول ماهی‌های قزل‌آلا در رودخانه هراز
- (ث) اسامی افراد در یک گروه کوهنوردی
- (ج) میزان رضایت مشتریان از یک فروشگاه (خوب، بد و متوسط)
- (چ) شدت زلزله در یک شهر
- (ح) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان
- (خ) زمان اولین کلاس
- (و) رشته تحصیلی
- (د) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

مفهوم پارامتر و آماره:

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است.

نکته: بررسی نسبت یک ویژگی به کل جامعه معرف یک پارامتر است.

آماره نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه بدست می‌آید.

نکته: نسبت یک ویژگی به داده‌های نمونه‌ای را آماره (مقدار آماره) گویند.

تذکر: آماره از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند ولی پارامترهای جامعه همیشه ثابت هستند.

نکته ۱: تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت گوئیم.

نکته ۲: اگر متغیر مورد بررسی کیفی باشد از نسبت استفاده می‌شود ولی اگر متغیر کمی باشد از میانگین استفاده می‌کنیم.

مثال: مثال هندوانه در کتاب که مزه کیفی و وزن کمی است.

علم آمار: به مطالعه نحوه گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری علم آمار گفته می‌شود.

سراسری تجربی ۸۹

تست ۱: در کدام بررسی، اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است؟

(۱) نمونه‌گیری تصادفی (۲) دسته‌بندی (۳) سرشماری (۴) هیچ‌کدام

سراسری انسانی ۹۲

تست ۲: در کدام مورد لزوماً عمل سرشماری انجام نشده است؟

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد. (۲) نمونه برابر جامعه باشد.
(۳) اندازه نمونه برابر اندازه جامعه باشد. (۴) نمونه، زیر مجموعه جامعه آماری باشد.

تجربی ۹۱

تست ۳: جمع‌آوری داده‌ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

(۱) مصاحبه (۲) مشاهده (۳) دادگان (۴) پرسش هدایت کننده

خارج از کشور ۹۰

تست ۴: کدام طریق برای جمع آوری داده‌ها مناسب نیست.

- (۱) مصاحبه (۲) الگوی خاص (۳) مشاهده (۴) پرسش‌نامه

تست ۵: برای بررسی حداکثر مقاومت لامپ‌های تولیدی یک شرکت در مقابل ولتاژهای مختلف، کدام روش مناسب است.

- (۱) سرشماری مشاهده (۲) سرشماری، دادگان
(۳) نمونه‌گیری، مصاحبه (۴) نمونه‌گیری، مشاهده

تست ۶: برای موضوع «رنگ آبی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.» بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها برای بررسی این قضیه کدام است؟

- (۱) مصاحبه، پرسش‌نامه (۲) مشاهده (۳) آزمایش (۴) دادگان

تست ۷: «میزان بارندگی در شهر کرد در سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰، تقریباً ۳۰٪ کاهش یافته است.» گزارش روش جمع‌آوری داده‌ها کدام است؟

- (۱) پرسش‌نامه کتبی (۲) مشاهده (۳) استفاده از دادگان (۴) انجام آزمایش

تست ۸: روش جمع‌آوری داده در انتخاب ریاست جمهوری کشور چیست؟

- (۱) مصاحبه (۲) مشاهده (۳) پرسش‌نامه (۴) دادگان

تست ۹: پس از آنکه نمونه را به صورت تصادفی انتخاب کردیم، ویژگی یا ویژگی‌هایی را روی آن مطالعه می‌کنیم. این ویژگی یا ویژگی‌ها را چه می‌نامیم.

- (۱) داده (۲) متغیر تصادفی (۳) الگوی آماری (۴) نتایج آماری

تست ۱۰: چند مورد از متغیرهای زیر کیفی هستند.

مقدار مقاومت یک لامپ - تعداد ماشین‌های یک نمایشگاه - رتبه کنکور دانش‌آموزان یک کلاس
جنسیت افراد دیگر گروه اندازه مساحت یک سری از شکل‌های هندسی - مزه غذا (خوب، بد، متوسط)

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

تست ۱۱: کدام گزینه در مورد اطلاعات کمی درست است.

- (۱) به صورت اعداد و ارقام بیان نمی‌شوند.
(۲) اندازه‌گیری، اقدام نهایی در رسیدن به اطلاعات عددی است.
(۳) شنونده برداشت‌های متفاوتی از آن ندارد.
(۴) قابل تفسیر می‌باشد.

تست ۱۲: کدام یک از متغیرهای زیر، کمی است؟

- (۱) مراحل زندگی یک فرد
(۲) گروه خونی
(۳) وضعیت تاهل کارمندان یک شرکت
(۴) خسارت مالی ناشی از تصادفات

تست ۱۳: کدام یک از داده‌های زیر قابل اندازه‌گیری نیست.

- (۱) مقاومت یک ترانزیستور
(۲) مراحل تحصیل یک فرد
(۳) میزان آلودگی هوا
(۴) میزان بارندگی در یک شهر در طول سال

تست ۱۴: گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟

- (۱) کیفی اسمی
(۲) کیفی ترتیبی
(۳) کمی فاصله‌ای
(۴) کمی نسبتی

تجربی ۹۰

تست ۱۵: «میزان تحصیلات افراد یک شهر» کدام نوع متغیر است. سراسری انسانی ۸۸

- (۱) کیفی ترتیبی
(۲) کیفی اسمی
(۳) کمی فاصله‌ای
(۴) کمی نسبتی

تست ۱۶: مراحل تحصیل، متغیر تصادفی است، نوع آن کدام است؟ خارج از کشور ۸۶

- (۱) کمی نسبتی
(۲) کمی فاصله‌ای
(۳) کیفی اسمی
(۴) کیفی ترتیبی

تست ۱۷: نوع آلاینده‌گی هوا چگونه متغیری است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) کمی نسبتی
(۲) کمی فاصله‌ای
(۳) کیفی اسمی
(۴) کیفی ترتیبی

تست ۱۸: نوع متغیرهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

نوع مدرسه دانش‌آموز (دولتی غیر انتفاعی - سمپاد) / حقوق یک کارگر در ماه / مراحل زندگی انسان (کودکی - جوانی - پیری) / وضعیت تاهل

- (۱) اسمی - کمی - ترتیبی - اسمی
(۲) ترتیبی - نسبتی - ترتیبی - ترتیبی
(۳) ترتیبی - ترتیبی - اسمی - ترتیبی
(۴) اسمی - نسبتی - اسمی - ترتیبی

تست ۱۹: تفاوت بین آماره و پارامتر این است که آماره در و پارامتر در کاربرد دارد و همواره ثابت است.

- (۱) جامعه آماری - نمونه - پارامتر
(۲) نمونه - جامعه آماری - آماره
(۳) نمونه - جامعه آماری - پارامتر
(۴) نمونه - جامعه آماری - هیچ‌کدام ثابت نیستند

تست ۲۰: مطالعه نحوه گردآوری، تحلیل و تفسیر جهت استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری می‌گویند.

- (۱) سازمان دهی - داده‌ها - واحد آماری
(۲) طبقه‌بندی - داده‌ها - واحد آماری
(۳) سازمان دهی - داده‌ها - آمار
(۴) طبقه‌بندی - نمونه‌ها - آمار

تست ۲۱: به متن زیر توجه کنید:

«در یک مدرسه با ۷۰۰ دانش‌آموز، ۳ نمونه ۱۰ نفره از دانش‌آموزان به تصادف انتخاب می‌کنیم و قد تک‌تک بچه‌ها را اندازه گرفته و سپس میانگین قد هر ۳ گروه را حساب می‌کنیم و به اعداد ۱۴۴، ۱۴۰ و ۱۵۱ متر می‌رسیم. سپس تخمین می‌زنیم که میانگین قد تمام دانش‌آموزان این مدرسه برابر است

$$\text{با } ۱۴۵ = \frac{۱۴۰ + ۲۴۴ + ۱۵۱}{۳} \text{ سانتی‌متر»}$$

در متن بالا ۱۴۰، ۱۴۴، ۱۵۱، ۱۴۵ به ترتیب از راست به چپ چه نام دارد؟

- (۱) پارامتر، آماره، پارامتر، آماره
 (۲) آماره، آماره، آماره، آماره
 (۳) آماره، پارامتر، آماره، پارامتر
 (۴) آماره، آماره، آماره، پارامتر

تست ۲۲: در یک دانشکده که ۳۰۰ دانشجو دارد، نسبت تعداد دختران به کل دانش‌جویان $\frac{۱۸۰}{۳۰۰}$

است. در کلاس عربی نسبت تعداد دختران به کل افراد کلاس $\frac{۱۷}{۲۰}$ است و در کلاس ریاضی به این نسبت برابر با $\frac{۱۷}{۲۱}$ است. با توجه به متن ذکر شده و همچنین مفهوم پارامتر و آماره کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نسبت $\frac{۱۸۰}{۳۰۰}$ را آماره می‌گویند.

(۲) نسبت‌های $\frac{۱۷}{۲۰}$ ، $\frac{۱۷}{۲۱}$ را آماره می‌گویند.

(۳) نسبت $\frac{۱۷}{۲۰}$ ، را آماره و نسبت $\frac{۱۷}{۲۱}$ را پارامتر می‌گویند.

(۴) نسبت $\frac{۱۲۰}{۳۰۰}$ را آماره‌ای می‌گویند که تعداد پسران دانشکده را نشان می‌دهد.

سراسری داخل ۹۹

تست ۲۳: در مورد ردآوری داده‌ها، کدام بیان درست است؟

- (۱) علم آمار نمودار گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است.
 (۲) یک روش آماری مناسب می‌تواند دقیق‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد.
 (۳) دادگان‌ها همیشه اطلاعات ثبتي را در اختیار آمارگر قرار می‌دهند.
 (۴) عدد آماره همواره کوچکتر از عدد پارامتر است.

سراسری ۹۹ داخل

تست ۲۴: در یک جامعه آماری، کدام مشخصه عددی، درست است؟

- (۱) پارامتر ثابت و آماره ثابت
- (۲) پارامتر ثابت و آمده متغیر
- (۳) پارامتر متغیر و آمده ثابت
- (۴) پارامتر متغیر و آماره متغیر

۹۹ داخل

تست ۲۵: نوع متغیر رتبه‌های شرکت کنندگان، در آزمون سراسری کدام است؟

- (۱) کمی - نسبی
- (۲) کمی - فاصله‌ای
- (۳) کمی - ترتیبی
- (۴) کیفی - ترتیبی

تست ۲۶: برای اندازه‌گیری داده‌هایی که قابل مرتب کردن بوده و اختلاف بین مقادیر داده‌ها با

انسانی داخل ۱۴۰۰

مضاعف، از کدام مقیاس اندازه‌گیری استفاده می‌شود؟

- (۱) کمی - نسبی
- (۲) کمی - فاصله‌ای
- (۳) کمی - ترتیبی
- (۴) کیفی - ترتیبی

تست ۲۷: برای اندازه‌گیری ویژگی افراد یا اشیاء با دقت زیاد از کدام مقیاس اندازه‌گیری، استفاده

انسانی خارج ۱۴۰۰

می‌شود؟

- (۱) اسمی
- (۲) نسبی
- (۳) ترتیبی
- (۴) فاصله‌ای

بخش دوم: معیار گرانش به مرکز

مُد: مقداری از متغیر است که بیشترین فراوانی را دارد و آن را با M نمایش می‌دهند.

مثال: فروشندگان پوشاک و در رای‌گیری‌ها از مد استفاده می‌شود.

مثال: برای داده‌های ۲ و ۴ و ۹ و ۳ و ۷ و ۳ و ۵ و ۱ و ۴ و ۳ و ۱ مُد کدام است؟

پاسخ: عدد ۳، سه بار تکرار شده است پس $M = 3$

نکته: مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

مثال: در مثال بالا اگر داده‌ی ۱ را به داده‌ها اضافه کنیم آنگاه مُد برابر است با $M = 1, 3$

نکته: اگر مُد داده‌های x_1, \dots, x_n برابر M باشد در این صورت:

الف: اگر داده‌ها در عدد غیر صفری مثل a ضرب شوند، مُد داده‌ها هم در همان عدد ضرب

می‌شود. $(ax_1, \dots, ax_n \xrightarrow{\text{مُد}} aM)$

ب: اگر داده‌ها با عدد حقیقی مثل b جمع شوند، مُد داده‌ها هم با عدد b جمع

می‌شود. $(x_1 + b, \dots, x_n + b \xrightarrow{\text{مُد}} M + b)$

مثال: اگر مُد داده‌های x_1, \dots, x_n برابر ۱۲ باشد، مُد داده‌های $3x_1 + 2, 3x_2 + 2, \dots, 3x_n + 2$ را

بدست آورید؟

میانگین: اگر x_1, \dots, x_n داده‌های مورد نظر ما باشند، میانگین را با \bar{x} نمایش داده و

برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

مثال: میانگین اعداد زیر را محاسبه کنید.

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴

نکته: اگر میانگین داده‌های x_1, \dots, x_n برابر با \bar{x} باشد در این صورت:

الف: اگر داده‌ها در عدد غیر صفر a ضرب کنیم، میانگین هم در همان عدد ضرب می‌شود. $(ax_1, ax_2, \dots, ax_n \xrightarrow{\text{میانگین}} a\bar{x})$

ب: اگر داده‌ها را با عدد حقیقی b جمع کنیم، میانگین هم با همان عدد جمع می‌شود. $(x_1 + b, \dots, x_n + b \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x} + b)$

پ: اگر فاصله داده‌ها یکسان باشد، میانگین داده‌ها با میانگین داده‌های اول و آخر برابر است.

$$M \quad x_{i+1} - x_i = \text{Cte} \xrightarrow{\text{ثابت}} \bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

ت: مجموع اختلاف داده‌های از میانگین برابر صفر است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

مثال: \bar{x} میانگین ۸ داده می‌باشد اگر اختلاف ۳ داده از میانگین ۳، اختلاف ۳ داده دیگر -۱ و اختلاف ۲ داده دیگر a باشد مقدار a کدام است؟

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2$ برابر ۸۰ باشد، میانگین داده‌های $\frac{1}{3}x_1 - 3, \frac{1}{3}x_2 - 3, \dots, \frac{1}{3}x_n - 3$ کدام است؟

میانگین وزن دار: اگر همه داده‌ها یا بعضی از آنها دارای تکرار باشند، برای راحتی کار هر داده را در تعداد دفعاتی که تکرار شده ضرب می‌کنیم، پس جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم و در مجموع داده‌ها (فراوانی) تقسیم می‌کنیم. به عبارت دیگر اگر $x_1 + \dots + x_n$ داده‌ها و به ترتیب f_1, \dots, f_n فراوانی آنها باشند، میانگین به صورت زیر است:

داده‌ها	x_1	x_2	...	x_n
فراوانی f_i	f_1	f_2	...	f_n

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال: میانگین داده‌های زیر را بدست آورید.

۱) ۲, ۲, ۲, ۸, ۱۰, ۲۰, ۱۰, ۸, ۱۰, ۸

۲)

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
f_i	۲	۳	۲	۲	۱

میانۀ (Q_p): اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ یا بر عکس مرتب کنیم، داده‌های که در وسط قرار می‌گیرد را میانۀ می‌گوئیم و برای بدست آوردن آن از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

الف: اگر تعداد داده‌ها فرد باشد ($2k+1$) میانۀ برابر است با داده $k+1$ ام.

ب: اگر تعداد داده‌ها زوج باشد ($2k$) میانۀ برابر است با میانگین دو داده وسط یعنی داده‌های k ام و $k+1$ ام

مثال: میانۀ داده‌های مقابل را بدست آورید.

الف) ۳, ۲, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۱۶, ۸, ۱۱, ۲

ب) ۱, ۳, ۱, ۹, ۴, ۵, ۳۷, ۸, ۱, ۱۲, ۱۸, ۲۰, ۲۱, ۲۰, ۳۰, ۳۴, ۶ / ۵۷, ۵۸

نکته: الف) اگر داده‌ها را در عدد حقیقی و غیر صفر a ضرب کنیم، میانۀ داده‌ها هم در a ضرب می‌شود.

ب) اگر داده‌ها را با عدد حقیقی b جمع کنیم، میانۀ داده‌ها هم با عدد b جمع می‌شود.

مثال: اگر میانۀ داده‌های $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_n - 1$ برابر ۹۹ باشد، میانۀ داده‌های $0/2x_1, 0/2x_2, \dots, 0/2x_n$ کدام است؟

تست ۲۸: اگر مُد در داده‌های ۱۱, ۱۶, ۱۰, ۵a - b, ۲a + b, ۱۳, ۱۴, ۹, ۱۱ فقط برابر ۱۴ باشد، a + b کدام

است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۴

(۳) ۹

(۴) ۱۱

تست ۲۹: تعداد داده آماری با کاهش ۱۰ درصدی مواجه شده‌اند، مُد آن‌ها چگونه تغییر کرده

است؟

(۱) ۱/۱ برابر شده است.

(۲) ۰/۹ برابر شده است.

(۳) ۱/۲ برابر شده است.

(۴) تغییر نکرده است.

تست ۳۰: میانگین مضرب‌های طبیعی عدد ۵ کوچکتر از ۱۰۰ کدام است.

(۱) ۴۰

(۲) ۴۵

(۳) ۵۰

(۴) ۵۵

تست ۳۱: اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4 برابر \bar{x} باشد، میانگین

داده‌های $2x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, 2x_3 + x_4, 2x_4 + x_1$ کدام است؟

(۱) \bar{x}

(۲) $2\bar{x}$

(۳) $3\bar{x}$

(۴) $2\bar{x} + 1$

تست ۳۲: جدول زیر، مقادیر انحراف از میانگین داده های آماری دسته بندی شده را مشخص می کند. فراوانی در دسته ۶ ام چقدر است.

خارج از کشور تجربی ۸۵

x_i انحراف از میانگین	-۴	-۲	-۱	۷	۱	۲	۳
فراوانی	۷	۱۱	۹	۴	۸	x	۳

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

تست ۳۳: در جدول زیر، میانگین به صورت $\bar{x} = 12 + 2a$ محاسبه شده است. a کدام است؟

سراسری ریاضی ۸۸

داده ها	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
فراوانی	۲	۵	۵	۹	۳

(۱) ۰/۲۵

(۲) ۰/۳۶

(۳) ۰/۴۵

(۴) ۰/۵۴

تست ۳۴: اگر میانگین داده های جدول زیر بدون در نظر گرفتن وزن آنها برابر $12/25$ و با در نظر گرفتن وزن آنها برابر ۱۲ باشد $a + b$ کدام است؟

داده ها	۱۳	۱۴	a	۹
وزن	b	۳	۱	۲/۵

(۱) ۱۵/۵

(۲) ۱۴/۵

(۳) ۱۶/۵

(۴) ۱۳/۵

تست ۳۵: مجموع هفت عدد فرد متوالی برابر ۱۱۹ است. اگر فراوانی هر عدد، برابر باقی مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ باشد، آنگاه میانگین وزنی داده ها تقریباً برابر کدام گزینه است؟

(۱) ۱۳

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۷/۴

تست ۳۶: میانه داده‌های ۱۷، ۱۴، ۲۳، ۱۱، ۱۵، چقدر از میانه داده‌های ۴۴، ۲۰، ۱۸، ۱۹، ۳۳، ۱۷، کم‌تر

است؟

(۱) ۲/۵

(۲) ۴/۵

(۳) ۱۱

(۴) ۸

تست ۳۷: در جدول مربوط به فراوانی داده‌های زیر، میانه و میانگین داده‌ها با هم برابرند.

مقدار x کدام است؟ ($x > 11$)

داده‌ها	۷	۱۱	x
فراوانی	۳	۴	۵

(۱) ۱۲/۵

(۲) ۱۳/۵

(۳) ۱۳/۴

(۴) ۱۲/۲

تست ۳۸: اگر در داده‌های مثبت ۳، ۸، ۴، ۷، ۵، ۱، $2x+2$ ، مجموع مُد و میانه ۷ باشد، مقدار x کدام

است؟

(۱) ۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۳

تست ۳۹: اگر مُد داده‌های ۱۳، ۱۴، ۶، ۷، ۲، $a-b$ ، ۱۳، ۱۲ برابر ۱۲ باشد. میانه داده‌های ۶، a ، b ، ۷، ۱۰،

کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

بخش سوم: معیارهای پراکندگی

داده دور افتاده: اگر داده‌ای از بقیه داده‌ها خیلی بزرگتر یا خیلی کوچکتر باشد، به آن داده دور افتاده می‌گوئیم.

مثال:

۱) ۱, ۲, ۳, ۷, ۸, ۹, ۲۰۰

۲) ۹۰, ۴۰, ۵۰, ۶۰, ۷۰, ۸۰, ۲

اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانگین شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها نمی‌باشد و از شاخص‌های پراکندگی استفاده می‌کنیم. دامنه تغییرات: اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده در بین داده‌ها را گویند.

$$R = \text{Max} - \text{Min}$$

نکته: الف) اگر داده‌ها در عددی غیر صفر مثل a ضرب شوند، دامنه تغییرات نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

ب) اگر داده‌ها را با عددی دلخواه جمع کنیم، دامنه تغییرات هیچ تغییری نمی‌کند.

پ) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند داریم: $R = 0$

مثال: تعدادی داده با دامنه تغییرات ۵ موجود است، اگر داده‌ها را ۳ برابر کرده و از آن‌ها ۲ واحد کم کنیم، دامنه تغییرات جدید چه مقداری است؟

مثال: اگر دامنه تغییرات داده‌های a ، b و c و ۱۰ صفر باشد، میانگین داده‌های $3a$ و $4b$ و $5b$ چقدر است؟

تذکر: دامنه تغییرات شاخص خوبی برای نشان دادن پراکندگی داده‌ها نیست، چون در محاسبه آن دو داده از کل داده‌ها تاثیر گذارند و از بقیه داده‌ها اطلاعی نداریم.

واریانس (σ^2): میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌هاست. برای محاسبه واریانس داده‌های x_1, \dots, x_2, x_n از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (*)$$

که در آن \bar{x} میانگین داده‌ها و n تعداد کل داده‌هاست.

مثال: واریانس داده‌های زیر را بدست آورید.

۳, ۴, ۵, ۶, ۲

نکته: اگر جدول توزیع فراوانی داشته باشیم که در آن f_1, f_2, \dots, f_n فراوانی داده‌های به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_n هستند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
f_i	f_1	f_2	...	f_n

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال: واریانس داده‌های جدول مقابل را بدست آورید.

x_i	۱	۳	۵	۷
f_i	۲	۴	۱	۳

نکته: با یک ساده‌سازی جبری می‌توان رابطه (*) را به صورت زیر نیز نوشت.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

نکته: الف) هر چه پراکندگی داده‌ها بیشتر باشد مقدار واریانس داده‌ها نیز بیشتر است و بالعکس، به بیان دیگر هر چه مقدار واریانس بیشتر باشد، مقدار داده‌ها از میانگین دور هست یعنی داده‌ها به شکل پراکنده‌تری حول میانگین توزیع شده‌اند و بالعکس
 ب) اگر داده‌ها برابر باشند، واریانس برابر صفر است و بالعکس
 پ) اگر داده‌ها در عددی غیر صفر مثل a ضرب شوند. واریانس آنها در عدد a^2 ضرب می‌شود.
 ت) اگر داده‌های آماری با عدد حقیقی b جمع شوند، واریانس آنها تغییری نمی‌کند.

مثال: واریانس داده‌های $x, x, x, x+4, x+4, x+4$ کدام است؟

مثال: اگر واریانس داده‌های x_1, \dots, x_n برابر ۵ باشد، واریانس $2x_1 + 3, 2x_2 + 3, \dots, 2x_n + 3$ کدام است؟

مثال: در ۱۰ داده آماری، مجموع داده‌ها ۱۵ و مجموع مربعات آنها $62/5$ است، واریانس چقدر است؟

نکته: اگر فاصله داده‌ها از هم یکسان باشد، واریانس را از رابطه زیر بدست می‌آوریم.

N : تعداد داده‌ها

$$d: \text{فاصله داده‌ها از هم} \quad \sigma^2 = d^2 \left(\frac{N^2 - 1}{12} \right)$$

مثال: واریانس داده‌های ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰ را بدست آورید.

انحراف معیار (σ): جذر مثبت واریانس را انحراف معیار گوئیم یعنی اگر n داده x_1, \dots, x_n را داشته باشیم انحراف معیار را با σ نشان داده و داریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

نکته: همه روابطی که با ساده کردن چیزی واریانس و همچنین جدول توزیع فراوانی نیز در اینجا صدق می‌کند یعنی.

$$1) \frac{x_i}{f_i} \mid \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ f_1 \dots f_n \end{array} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}}$$

$$2) \sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

نکته: الف) هر چه انحراف معیار کوچکتر باشد، مقدار داده‌ها به میانگین نزدیکتر هست و هر چه انحراف معیار بزرگتر باشد یعنی داده‌ها به شکل پراکنده‌تری حول میانگین توزیع شده‌اند.
 ب) اگر داده‌ها برابر باشند انحراف معیار صفر است و بالعکس
 پ) اگر داده‌ها در عددی غیر صفر مثل a ضرب شود، انحراف معیار $|a|$ ضرب می‌شود.
 ت) اگر داده‌های آماری با عدد حقیقی b جمع شوند انحراف معیار آنها تغییری نمی‌کند.
 ث) چون انحراف معیار جذر واریانس است، انحراف معیار، پراکندگی داده‌ها را از واریانس نشان می‌دهد.

مثال: انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۱۰, ۲۰, ۵۰, ۲۰, ۱۵, ۵

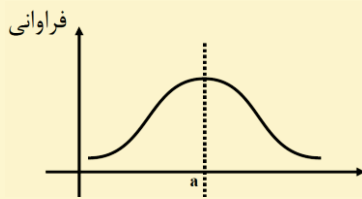
نکته: اگر فاصله داده‌ها از هم یکسان باشد، انحراف معیار از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{d^2 \left(\frac{N^2 - 1}{12} \right)}$$

مثال: واریانس و انحراف معیار داده‌های $\frac{2,4,6,8,10}{1}$ و داده‌های $\frac{3,5,7,9}{2}$ را بدست آورید.

خم بهنجار (منحنی نرمال): اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت نگاشت (هیستوگرام) آن را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم بهنجار یا منحنی نرمال گفته می‌شود که مطابق شکل زیر است.

نکته: عدد a در منحنی نرمال، میانگین، میانه و مُد را نشان می‌دهد، یعنی هر سه بر هم منطبق هستند (برابری).



نکته: نحوه پخش داده‌ها در اطراف میانگین:

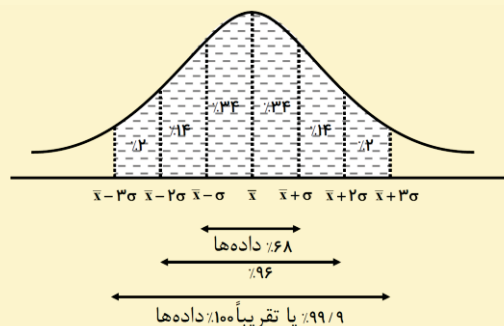
(۱) تقریباً ۶۸٪ داده‌ها در بازه $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ قرار دارند که به این بازه فاصله ۱ برابر انحراف معیار از میانگین گفته می‌شود.

یعنی ۳۴٪ داده‌ها در فاصله $(\bar{x}, \bar{x} + \sigma)$ و ۳۴٪ دیگر داده‌ها در فاصله $(\bar{x} - \sigma, \bar{x})$ هستند.

(۲) تقریباً ۹۶٪ داده‌ها در بازه $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ قرار دارند که به این بازه فاصله ۲ برابر انحراف معیار از میانگین گفته می‌شود.

یعنی ۴۸٪ داده‌ها در بازه $(\bar{x}, \bar{x} + 2\sigma)$ و ۴۸٪ دیگر داده‌ها در فاصله $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x})$ هستند.

(۳) تقریباً ۹۹/۹٪ داده‌ها (تقریباً همه داده‌ها) در بازه $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ قرار دارند که به این بازه فاصله ۳ برابر انحراف معیار از میانگین گویند.



مثال: در یک سری از داده‌های آماری دارای منحنی نرمال، با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۳ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) ۶۸٪ داده‌ها در چه بازه‌ای قرار دارند.

ب) ۹۶٪ داده‌ها در چه بازه‌ای قرار دارند.

پ) ۹۹/۹٪ داده‌ها در چه بازه‌ای قرار دارند.

نکته: در کارخانجات وزن (حجم) کالا معمولاً به صورت $\bar{w} \pm 2\sigma$ نوشته می‌شود که در آن \bar{w} میانگین وزن (حجم) محصولات و σ انحراف معیار است. نوشتن $w + 2\sigma$ بر روی محصولات به این معنی است که ۹۶٪ محصولات این کارخانه وزنی (حجمی) در محدوده $(\bar{w} - 2\sigma, \bar{w} + 2\sigma)$ دارند، که $+2\sigma$ را خطای اندازه‌گیری محصولات کارخانه است.

مثال: اگر ۹۶٪ محصولات یک کارخانه در محدوده وزنی ۹۶۰ گرم تا ۱۰۴۰ گرم باشد، چه عددی روی محصولات به عنوان وزن نوشته می‌شوند.

مثال: در پراکندگی منحنی نرمال با میانگین ۷ و انحراف معیار ۱/۵، چند درصد داده‌ها در بازه (۴, ۱۰) قرار دارند؟

چارک‌ها

چارک دوم (Q_2): در ابتدا در مورد آن بحث شد.

چارک اول (Q_1): میانه داده‌های قبل از میانه (Q_2) را چارک اول گوئیم و با Q_1 نشان می‌دهیم.

چارک سوم (Q_3): میانه داده‌های بعد از میانه (Q_2) را چارک سوم گوئیم و با Q_3 نشان می‌دهیم.

دامنه میان چارکی IQR: تفاضل چارک اول از چارک سوم داده‌ها را دامنه میان چارکی گوئیم و با IQR نشان می‌دهیم.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

مثال: برای داده‌های (۲, ۸, ۱۰, ۲۰, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۷, ۲۰) چارک‌ها، دامنه میان چارک، دامنه میان چارکی را بدست آورید.

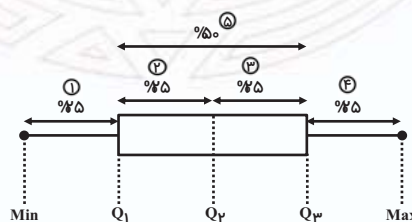
نکته: الف) اگر داده‌ها در a ضرب شوند ($a \neq 0$)، چارک‌ها و دامنه میان چارکی هم در عدد a ضرب می‌شوند.
 ب) اگر داده‌ها را با عدد b جمع کنیم، چارک‌ها هم با عدد b جمع می‌شوند اما دامنه میان چارکی تغییری نمی‌کند.
 پ) اگر داده دور افتاده داشته باشیم، از دامنه میان چارکی به عنوان معیار پراکندگی به جای انحراف و معیار یا واریانس استفاده می‌کنیم.

مثال: در داده‌های زیر، برای بررسی میزان پراکندگی داده‌ها بهتر است از چارک‌ها استفاده کنیم یا میانگین و انحراف معیار؟
 نحوه پخش (توزیع) داده‌ها را به صورت درصد نشان دهید.

۵, ۸, ۱۱, ۹, ۳, ۱, ۱۷, ۶, ۲, ۱۰, ۴۰۰۰, ۸۰۰۰

نحوه پخش داده‌ها توسط چارک‌ها:

نمودار زیر نمودار جعبه‌ای است (که در قسمت بعد بیشتر در مورد آن توضیح خواهیم داد) که نحوه پخش داده‌ها را به صورت درصدی و مقداری نشان می‌دهد. با استفاده از نمودار می‌توانیم نتایج زیر را بدست آوریم:



- ۱- تقریباً ۲۵٪ داده‌ها ($\frac{1}{4}$ داده‌ها) از چارک اول کوچکترند $\leq 75\%$ داده‌ها از چارک اول بزرگترند.
- ۲- تقریباً ۲۵٪ داده‌ها بین چارک اول و چارک دوم قرار دارند.
- ۳- تقریباً ۲۵٪ داده‌ها بین چارک دوم و چارک سوم قرار دارند.
- ۴- تقریباً ۲۵٪ داده‌ها از چارک سوم بزرگترند $\leq 75\%$ داده‌ها از چارک سوم کوچکترند.
- ۵- تقریباً ۵۰٪ داده‌ها بین چارک اول و چارک سوم هستند.

مثال: با توجه به داده‌های مقابل چند مورد از عبارات زیر درست است؟

۲, ۴, ۵, ۳, ۲, ۱, ۷, ۷, ۷, ۸, ۵, ۱۱, ۱۸, ۴, ۳۴, ۲۲, ۴۱, ۱۰

الف) تقریباً ۲۵٪ داده‌ها از ۲۲ بزرگترند.

ب) تقریباً ۵۰٪ داده‌ها بین ۷/۵ و ۲۲ قرار دارند.

پ) تقریباً ۲۵٪ داده‌ها از عدد ۷ کوچکترند.

ت) تقریباً ۷۵٪ داده‌ها از ۴ بزرگترند.

تست ۴۰: اگر انحراف معیار داده‌های {۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۲} برابر a باشد، آنگاه انحراف معیار

داده‌های {۴, ۵, ۷, ۸, ۹} کدام است؟

(۱) $\frac{a}{2}$

(۲) $2a$

(۳) $\frac{a^2}{4}$

(۴) $4a^2$

تست ۴۱: انحراف معیار ۸ دادی آماری برابر ۱/۵ شده است. در این بررسی

مقدار $(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2$ چقدر است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۱۸

(۳) ۱۲

(۴) ۹

تست ۴۲: مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌های ۳۴۰ می‌باشد، انحراف

معیار کدام است؟ خارج از کشور ۸۶

(۱) ۱/۲۵

(۲) ۱/۵

(۳) ۲/۲۵

(۴) ۲/۵

تست ۴۳: انحراف مقادیر تعداد ۷ داده از میانگین آنها به صورت اعداد متوالی بوده، انحراف معیار

داده‌ها چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

تست ۴۴: اگر انحراف معیار داده‌های $b, 2a, a+3, 2c-3b$ صفر باشد، $a+b+c$ کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۱

(۳) ۲۴

(۴) ۱۲

تست ۴۵: جدول زیر مربوط به تعداد لامپ‌هایی است که ۲ کارگر در روز های متوالی کاری خود ساخته‌اند. کدام کارگر با نظم بیشتری کار کرده است.

A	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۰	۱۱	۱۰	۱۲	۸	۹
B	۸	۱۰	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۰	۸	۱۰

(۱) A

(۲) B

(۳) هر دو

(۴) نمی‌توان مشخص کرد.

تست ۴۶: در ۱۰۰ داده آماری با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲، تمام داده‌ها را در $1/5$ ضرب

انسانی ۸۷

می‌کنیم، واریانس داده‌های جدید کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) $6/25$

تست ۴۷: واریانس ۱۱ داده‌ی آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ به آنها اضافه شود،

میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟ ریاضی خارج از کشور ۹۱

(۱) ۷۵%

(۲) $1/25$

(۳) $1/5$

(۴) ۲

تست ۴۸: ۱۵ داده آماری با واریانس ۱۲ و ۱۰ داده‌های آماری دیگر با واریانس $7/6$ را با هم ترکیب

می‌کنیم، اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل کدام است؟

(۱) $3/10$

(۲) $3/50$

(۳) $3/25$

(۴) $3/20$

تست ۴۹: در ۲۵ داده آماری میانگین را انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های

ناجور ۱۰ و ۱۵ و ۴۵ و ۵۰، از بین آنها حذف شود، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(۱) $14/72$

(۲) $14/81$

(۳) $15/33$

(۴) $16/66$

تست ۵۰: از داده‌های آماری ۱۱، ۶، ۵، ۱۳، ۸، ۷، ۱۰، ۷، ۱۳ داده‌های کمتر از میانه را حذف می‌کنیم.

واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ سراسری انسانی ۸۸

(۱) $2/8$

(۲) $3/2$

(۳) $3/6$

(۴) $4/5$

تست ۵۱: در جدول فراوانی مقابل، واریانس داده‌ها کدام است؟

داده	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

(۱) ۱۱/۷۲

(۲) ۱۱/۹۶

(۳) ۱۲/۲۴

(۴) ۱۲/۳۶

تست ۵۲: در داده‌های آماری دسته بندی شده زیر، مقدار واریانس کدام است؟

داده	۱	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۳	۶	۴	۲	۱

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۵/۵

تست ۵۳: در داده‌ها با جدول زیر، اگر واریانس برابر ۶ باشد، فراوانی دسته سوم

خارج از کشور ۸۹

کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

تست ۵۴: هشت داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به

تجربی ۸۴

آن‌ها افزوده شود، واریانس، ۱۰ داده حاصل کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۴/۸

(۴) ۵

تست ۵۵: نمره ادبیات دانش‌آموزی در ۱۰ آزمون به صورت زیر است. با حذف دو نمره کمترین و

سراسری ۹۸

بیشترین آن‌ها، مقدار انحراف معیار تقریباً کدام است؟

۱۴, ۱۲, ۱۵, ۹, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۵, ۲۰, ۱۱

(۱) ۰/۹

(۲) ۱/۲

(۳) ۱/۵

(۴) ۱/۶

تست ۵۶: در داده‌های آماری ۱۸ و ۸ و ۱۵ و ۷ و ۱۴ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۷ انحراف معیار

سراسری ۹۹ انسانی

داده‌های بیشتر از چارک اول و کمتر از چارک سوم، کدام است؟

۱/۶ (۱)

۱/۹ (۲)

۲/۱ (۳)

۲/۴ (۴)

تست ۵۷: در داده‌های آماری ۱۵، ۱۷، ۱۰، ۱۲/۵، ۱۳، ۹، ۱۶، ۱۷/۵، ۱۳ و ۱۴، تفاضل میانه از میانگین

سراسری خارج انسانی ۹۹

کدام است؟

۰/۱ (۱)

۰/۲ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۴ (۴)

تست ۵۸: در داده‌های آماری ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۱۸/۵، ۱۴/۵، ۱۲، ۱۵، ۱۵/۵، ۱۷، با نمودار جعبه‌ای نشان

سراسری انسانی ۹۹

داده شده است. انحراف معیار داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

۱/۵ (۱)

۱/۳ (۲)

۱/۲ (۳)

۱/۱ (۴)

تست ۵۹: در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۶، ۱۷/۵، ۱۴، ۱۷، ۱۳، ۱۰، ۱۲/۵، ۹، ۱۵ و ۱۳، تفاضل داده‌های

سراسری انسانی ۹۹

ابتدا و انتهای جعبه کدام است؟

۳ (۱)

۳/۲۵ (۲)

۳/۵ (۳)

۴ (۴)

تست ۶۰: میانگین و واریانس داده‌های یک جامعه به ترتیب ۱۵۲ و ۳۶ است. تقریباً ۹۶٪ درصد

انسانی ۱۴۰۰

داده‌ها در کدام فاصله قرار می‌گیرند؟

- (۱) (۱۱۶, ۱۸۸)
- (۲) (۱۳۴, ۱۷۰)
- (۳) (۱۴۶, ۱۵۸)
- (۴) (۱۴۰, ۱۶۴)

تست ۶۱: در یک جعبه با میانگین ۴۰ تقریباً ۶۸ درصد داده‌ها بین ۳۵ و ۴۵ قرار می‌گیرند.

انسانی خارج ۱۴۰۰

واریانس داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) ۱۵
- (۳) ۲۵
- (۴) ۴۰

تست ۶۲: جمعیت ده کشور دنیا برحسب میلیون نفر به صورت داده‌های زیر است :

۳۶, ۲۵, ۴۲/۸, ۳۰, ۶۵, ۸۵, ۲۴۰, ۱۰۵۰, ۸۵

انسانی خارج ۱۴۰۰

نسبت دامنه کل به دامنه میان چارکی کدام است؟

- (۱) ۱۲ / ۳۵
- (۲) ۱۷ / ۴۵
- (۳) ۱۹ / ۳۵
- (۴) ۱۹ / ۵۵

تست ۶۳: در داده‌های ۲, ۱۲, ۸, ۴, ۵, ۲, ۱۰ با حذف داده‌های کوچکتر از چارک اول و داده‌های

انسانی ۱۴۰۱

بزرگتر از چارک سوم، دامنه تغییرات چند درصد کاهش می‌یابد؟

- (۱) ۵۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۲۵
- (۴) ۲۰

تست ۶۴: اگر انحراف معیار پنج داده برابر صفر باشد و با ترکیب داده‌های ۸، ۵ و ۱۱ با پنج داده

اولیه، میانگین هشت داده تغییر نکند. انحراف معیار این هشت داده کدام است؟ انسانی خارج ۱۴۰۱

(۱) $1/25$

(۲) $1/5$

(۳) $2/25$

(۴) $2/5$

تست ۶۵: محصول تولیدی یک شرکت، در بطری بسته‌بندی می‌شود. بنا بر آنچه روی بطری ما

درج شده، تقریباً حجم ۹۶٪ بطری‌های بسته‌بندی شده، بین ۲۲۰ و ۲۳۰ میلی‌لیتر است. واریانس حجم

سراسری ۱۴۰۲

بطری‌ها کدام است؟

(۱) $2/56$

(۲) $6/25$

(۳) ۱۶

(۴) ۲۵

تست ۶۶: اگر $17, 25, 2a - 14, 16, 14$ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز $6, 4, a, 13$ باشد،

انسانی ۱۴۰۲

واریانس این داده‌ها کدام است؟

(۱) ۹

(۲) $9/5$

(۳) ۱۱

(۴) $11/5$

تست ۶۷: اگر $4, 1, 2a, 1, 4$ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های $8, 9, 6a, 11$ باشد، مقدار

انسانی ۱۴۰۲

انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

(۱) $\frac{5}{\sqrt{10}}$

(۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

(۳) $1/8$

(۴) $2/5$

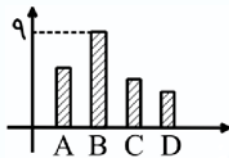
تست ۶۸: اگر توزیع تعداد داده آماری بر طبق منحنی خم بهنجار و میانگین و انحراف معیار داده‌ها به ترتیب ۲,۱۰۰ می‌باشد، ۹۹/۹ درصد داده‌ها در چه محدوده‌هایی هستند؟

- (۱) بین ۱۰۲ تا ۹۸
- (۲) بین ۱۰۴ تا ۹۶
- (۳) بین ۱۰۶ تا ۹۴
- (۴) دقیقاً ۱۰۰

تست ۶۹: نمودار زیر تعداد گل‌های یک فصل ۴ بازیکن A، B، C و D را نشان می‌دهد. میانگین

انسانی ۱۴۰۱

گل زده این چهار بازیکن، کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟



- (۱) ۸
- (۲) ۴
- (۳) ۳
- (۴) ۲

تست ۷۰: در یک نمایندگی خودرو، روزانه حداقل یک دستگاه خودرو به فروش می‌رسد، اطلاعات فروش روزانه این نمایندگی در یک هفته، مطابق جدول زیر کامل می‌شود. اگر معلوم شود بیشترین فروش روزانه در روز یکشنبه بوده، متوسط تعداد فروش روزانه این نمایندگی در این هفته، کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

انسانی خارج ۱۴۰۱

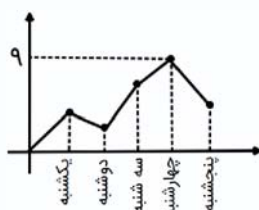
روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه
تعداد فروش		۸				

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۵
- (۴) ۸

تست ۷۱: به یک مرکز درمانی، هر روز تعدادی بیمار مراجعه می‌کنند. نمودار زیر، تعداد مراجعه کنندگان در روزهای کاری یک هفته به این مرکز درمانی را نشان می‌دهد. کدام عدد می‌تواند میانگین

انسانی ۱۴۰۲

تعداد بیماران در این هفته باشد؟

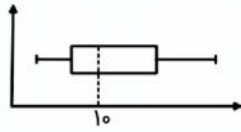


- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) ۷

تست ۷۲: داده‌های نمودار زیر، اعداد زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام

انسانی ۱۴۰۲

می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟



۵ (۱)

۷ / ۵ (۲)

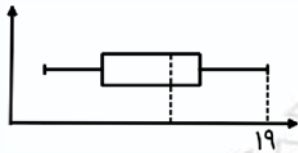
۸ / ۵ (۳)

۹ (۴)

تست ۷۳: داده‌های نمودار زیر، اعداد فرد هستند. اگر ۵ داده کمتر از میانه باشد، کدام می‌تواند

(انسانی ۱۴۰۲)

بیشترین مقدار ممکن برای میانه باشد؟

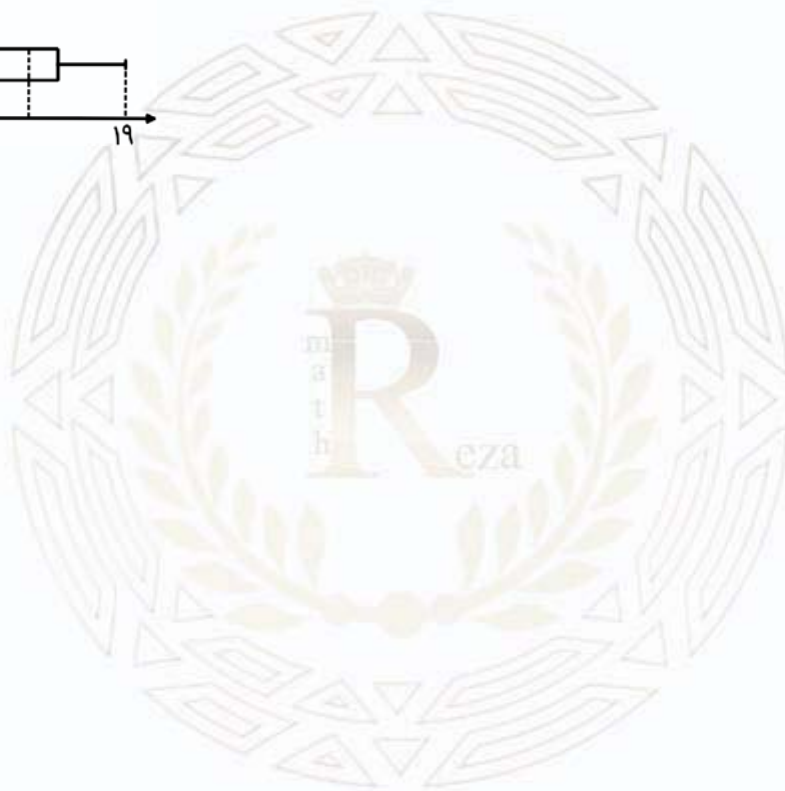


۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۱۴ (۳)

۱۶ (۴)



بخش چهارم: نمودارهای یک متغیره

در این بخش نمودارهایی را بررسی می‌کنیم که فقط یک متغیر را بررسی می‌کنند.

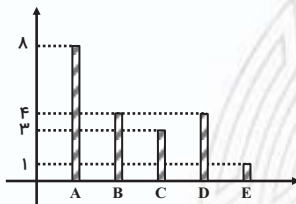
۱- **نمودار میله‌ای عمودی:** در این نمودار محور طول‌ها (x ها) فراوانی هر داده را مشخص می‌کند.

نکته: الف) در این نمودار ترتیب قرار گرفتن داده‌ها مهم نیست و فقط فراوانی هر داده مهم است.
ب) از این نمودار می‌توان برای متغیرهای کیفی و کمی که مقدارشان اعداد حسابی است استفاده کرد.

مثال: نمودار میله‌ای را برای داده‌های زیر رسم کنید.

۱۸, ۱۸, ۱۸, ۱۵, ۱۳, ۱۴, ۱۳, ۱۵, ۱۵, ۱۸, ۲۰, ۲۰, ۲۰, ۲۰

مثال: چند درصد داده‌ها در نمودار میله‌ای مقابل فراوانی‌اشان حداقل ۴ هستند؟



۲- **نمودار میله‌ای افقی:** اگر در نمودار میله‌ای عمودی جای دو محور را با هم عوض کنیم نمودار میله‌ای ساخته می‌شود.

مثال: نمودار میله‌ای افقی مثال قبل را رسم کنید.

۳- **نمودار مستطیلی (هیستوگرام):** در نمودار مستطیلی محور طول‌ها (x ها) حدود دسته‌ها و محور عرض‌ها (y ها) فراوانی هر دسته را مشخص می‌کند. برای اینکه بخواهیم داده‌ها را به m دسته تقسیم کنیم برای بدست آوردن حدود دسته به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- دامنه تغییرات را بدست می‌آوریم (min داده - max داده = R)

۲- برای بدست آوردن حدود دسته (h) دامنه تغییرات را بر تعداد دسته تقسیم می‌کنیم ($h = \frac{R}{m}$)

۳- حال با استفاده از حدود دسته، از داده min شروع می‌کنیم و به اندازه h به آن اضافه می‌کنیم تا m دسته را بسازیم.

۴- بعد از مشخص شدن دسته‌ها، فراوانی آنها را مشخص می‌کنیم.

مثال: نمودار مستطیلی را برای داده‌های زیر رسم کنید. بطوری که به ۴ دسته تقسیم شوند.

۱۲, ۷, ۵, ۱۴, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۰, ۸, ۲۱, ۱۹

نکته: برای بدست آوردن میانگین داده‌ها در جدولی که حدود دسته‌ها داده شده است، مانند میانگین موزون عمل می‌کنیم، با این تفاوت که در اینجا داده‌ها برابر است با مرکز هر دسته. یعنی داریم:

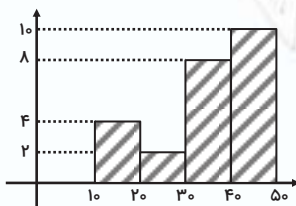
مرکز هر دسته: میانگین ابتدا و انتهای هر دسته را گوئیم.

حدود دسته	فراوانی	
$x_1 \leq x < x_2$	f_1	$\bar{x} = \frac{f_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + f_2 \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right) + \dots + f_n \left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right)}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)}{f_1 + \dots + f_n}$
$x_2 \leq x < x_3$	f_2	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	
$x_{n-1} \leq x < x_n$	f_n	

مثال: میانگین داده‌های جدول زیر را بدست آورید.

حدود دسته	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 7$	$7 \leq x \leq 9$
فراوانی	۴	۲	۱	۸

مثال: در نمودار مستطیلی مقابل، چند درصد داده‌ها بزرگتر یا مساوی ۳۰ هستند.



۴- نمودار دایره‌ای: اگر m داده داشته باشیم که هر کدام به ترتیب دارای f_1, f_2, \dots, f_m فراوانی

باشند بطوریکه $f_1 + f_2 + \dots + f_m = n$ برای رسم نمودار دایره آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha_i = \frac{f_i}{f_1 + f_2 + \dots + f_m} \times 360 = \frac{f_i}{n} \times 360 \quad (1 \leq i \leq m)$$

که در آن d_i زاویه مرکزی مربوط به داده i ام است و برای بهتر متوجه شدن به مثال زیر دقت کنید.

مثال: جدول زیر نظرسنجی دانش‌آموزان یک کلاس در مورد رشته ورزشی مورد علاقه‌شان می‌باشد، نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید.

رشته ورزشی	تعداد
فوتبال	۸
هندبال	۲
تنیس	۴
والیبال	۶

نکته: اگر بخواهیم دایره‌ای را بر اساس درصد نشان دهیم، دقیقاً به روش بالا عمل می‌کنیم با این تفاوت که بجای ۳۶۰ عدد ۱۰۰ را قرار می‌دهیم. که عددهای بدست آمده نسبت به عددهای زاویه مرکزی متفاوت است ولی شکل یا نمودار دایره‌ای به همان صورت رسم خواهد شد.

مثال: مثال قبل را به صورت درصد رسم کنید.

مثال: توزیع زاویه‌های مربوط به گروه‌های خونی در نمودار دایره‌ای تعدادی از افراد به صورت جدول زیر است. چند درصد افراد دارای گروه خونی AB می‌باشند.

گروه خونی	A	B	AB	O
زاویه‌ی مرکزی	۳۶	۵۴	α	۱۲۶

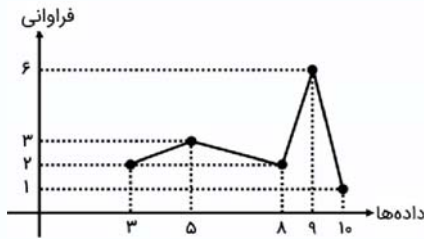
نکته: نمودار دایره را می‌توان به صورت سه بعدی نیز نشان داد، درواقع با این کار نمودار جذاب‌تر به نظر می‌رسد.

۵- نمودار خطی شکسته: این نمودار همانند نمودار میله‌ای محور طول‌ها داده‌ها و محور عرض‌ها فراوانی را نشان می‌دهد. با این تفاوت که پس از بدست آوردن نقاط، این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

مثال: نمودار خط شکسته مثال نظرسنجی دانش‌آموزان در مورد رشته ورزشی مورد علاقه‌شان را رسم کنید.

رشته ورزشی	تعداد
فوتبال	۸
هندبال	۲
تنیس	۴
والیبال	۶

مثال: در نمودار مقابل اختلاف مُد و میانگین کدام است؟

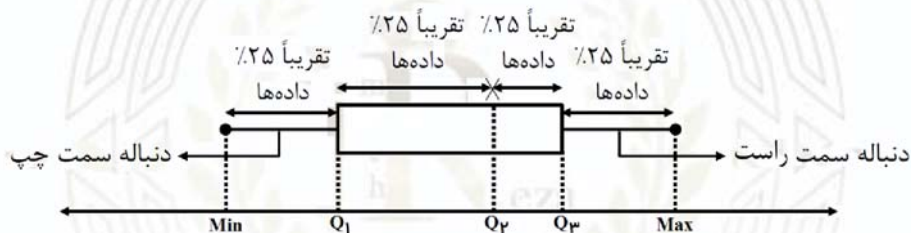


۷- نمودار نقطه‌ای: این نمودار نیز شبیه نمودار میله‌ای است، با این تفاوت که به تعداد فراوانی داده، روی هر داده، قرار می‌دهند.

مثال: اگر نمره ریاضی ۱۰ دانش‌آموز یک کلاس به صورت مقابل باشد نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید.

۱۵, ۱۶, ۱۵, ۱۸, ۱۷, ۱۸, ۱۶, ۱۸, ۲۰, ۱۸

۸- نمودار جعبه‌ای: در فصل قبل کاملاً در مورد نمودار جعبه‌ای صحبت کردیم. این نمودار به نمودار جعبه و سبیل نیز معروف است.



نکته: الف) قرار گرفتن میانه در داخل ۳ حالت را به وجود می‌آورد:

حالت اول: اگر میانه در وسط باشد، تراکم داده‌ها بین Q_1 ، Q_2 با تراکم داده‌ها بین Q_2 و Q_3 برابر است.

حالت دوم: اگر میانه در سمت چپ جعبه باشد نشان می‌دهد که تراکم داده‌ها بین Q_1 ، Q_2 بیشتر از تراکم داده‌ها بین Q_2 و Q_3 است. (بیان دیگر؟)

حالت سوم: اگر میانه در سمت راست جعبه باشد نشان دهید که تراکم داده‌های بین Q_2 و Q_3 بیشتر از تراکم داده‌ها بین Q_1 و Q_2 است. (بیان دیگر؟)

ب) برای دنباله نیز دو حالت وجود دارد:

حالت اول: اگر دنباله سمت راست کشیده‌تر از دنباله سمت چپ باشد، به این معنی است که تراکم داده‌های بزرگتر از چارک سوم، کمتر از تراکم داده‌های کوچکتر از چارک اول است.

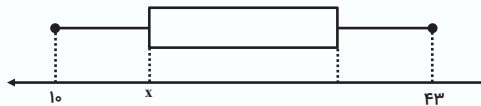
حالت دوم: اگر دنباله سمت راست کشیده‌تر از دنباله سمت راست باشد، به این معنی است که تراکم داده‌های بزرگتر از چارک سوم، بیشتر از تراکم داده‌های کوچکتر از چارک اول است.

مثال: نمودار جعبه‌ای را برای داده‌های زیر رسم کرده و پراکندگی داده‌ها را در ۴ ناحیه مشخص کنید.

۱۲, ۱۰, ۲, ۴, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۸, ۲۰, ۲۵, ۴۰

مثال: نمودار جعبه‌ای مربوط به داده‌های زیر است، مقدار x کدام است؟

۱۰, ۴۳, ۴۱, ۳۴, ۳۲, ۳۱, ۲۷, ۲۵, ۲۳, ۱۹, ۱۸, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۲

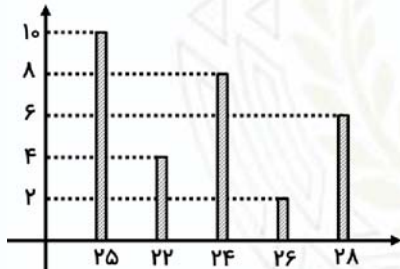


تست ۷۴: در نمودار میله‌ای مقابل، میانگین چقدر است؟



- ۲ / ۸۵ (۱)
- ۳ / ۸۵ (۲)
- ۴ / ۸۵ (۳)
- ۵ / ۸۵ (۴)

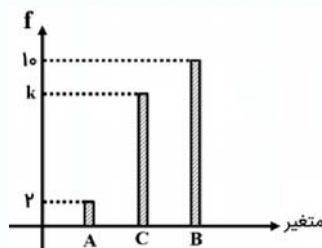
تست ۷۵: برای نمودار میله‌ای روبرو، اختلاف مُد و میانه کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۱ (۴)

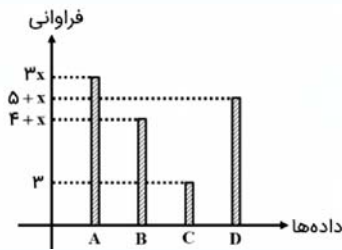
تست ۷۶: اگر برای نمودار میله‌ای روبرو، یک نمودار دایره‌ای سه بُعدی رسم کنیم، درصد مساحت

میله‌ی B برابر ۵۰ خواهد بود، مقدار K کدام است؟



- ۷ (۱)
- ۸ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۰ (۴)

تست ۷۷: نمودار میله‌ای مربوط به ۴ گروه مختلف دانشجویی، به صورت روبرو است. اگر فراوانی



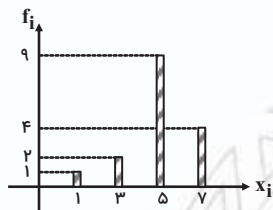
نسبی گروه A برابر $\frac{1}{3}$ باشد، تعداد اعضای گروه D چند نفر است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰



تست ۷۸: بر اساس نمودار میله‌ای مقابل، انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

سراسری خارج از کشور ۸۵



- (۱) $\sqrt{10}$

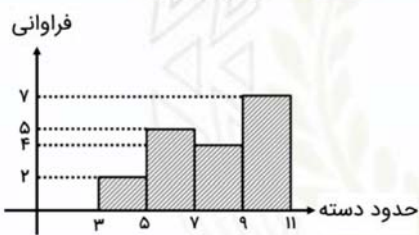
- (۲) $\frac{1}{3}\sqrt{10}$

- (۳) $\frac{1}{2}$

- (۴) ۲



تست ۷۹: در نمودار مستطیل مقابل، مجموع مُد و میانگین کدام است؟



- (۱) $17/78$

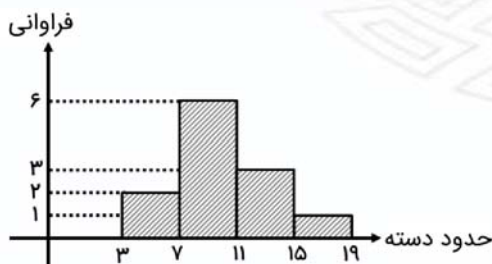
- (۲) $14/78$

- (۳) ۹

- (۴) ۱۰



تست ۸۰: با توجه به نمودار مقابل، مقدار واریانس کدام است؟



- (۱) ۹

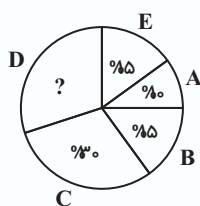
- (۲) ۲۵

- (۳) ۱۸

- (۴) ۱۱



تست ۸۱: با توجه به نمودار دایره‌ای مقابل، زاویه مرکزی مربوط به قسمت D چند درجه است؟



- (۱) ۱۰۰

- (۲) ۱۵۰

- (۳) ۱۰۸

- (۴) ۱۲۸

تست ۸۲: در نمودار دایره‌ای بر اثر کدام یک از موارد زیر، ممکن است تفسیر جدیدی از توزیع

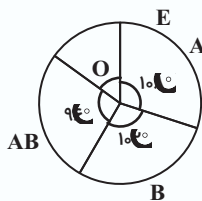
داده‌ها به دست آید؟

- (۱) دو برابر کردن فراوانی همه‌ی داده‌ها
- (۲) تغییر شعاع دایره‌ی نمودار
- (۳) تغییر فراوانی داده‌های همه‌ی نواحی
- (۴) نحوه ترتیب کنار هم قرار گرفتن نواحی نمودار

تست ۸۳: نمودار دایره‌ای اهدای خون افراد، به صورت مقابل است. چند درصد افراد در گروه

سراسری- ۸۵

خونی O قرار دارن؟



- (۱) ۱۵
- (۲) ۱۶
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۰

تست ۸۴: در نمودار دایره‌ای مقابل، اگر فراوانی بزرگترین دسته ۲۰ باشد، فراوانی کوچکترین دسته

کدام است؟

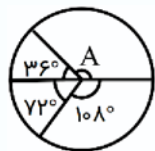


- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

تست ۸۵: نمودار دایره‌ای زیر، نسبت نمرات مسئولیت‌پذیر ۸۰ نفر از کارکنان یک شرکت در ۴ بازه

انسانی خارج ۹۹

مورد قبول را نشان می‌دهد. تعداد کارکنان در گروه A کدام است؟



- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۲
- (۳) ۳۴
- (۴) ۳۶

تست ۸۶: جدول روبه‌رو، درصد فراوانی نسبی گروه خونی افراد یک جامعه است. در نمودار

دایره‌ای، زاویه مرکزی مربوط به گروه خونی O چنددرجه است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد فراوانی نسبی	۲۴	۲۷/۵	۳۶	k

- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۴
- (۳) ۶۳
- (۴) ۷۲

تست ۸۷: شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدرک تحصیلی آنها با ۶ کد مختلف مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی هر گروه با واحد درجه، مطابق جدول روبه‌رو است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

سراسری خارج ۹۰

کد مدرک	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	k	۵۴	۱۸

- (۱) ۵۲
(۲) ۵۴
(۳) ۵۶
(۴) ۵۸

تست ۸۸: جدول روبه‌رو مربوط به کارکنان یک شرکت است، در نمودار دایره‌ای آن، زاویه مرکزی مربوط به کارکنان بیشترین فراوانی چند درجه است؟

خارج- ۹۲

سطح مهارت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۳۰	۲۵	۱۲	۸

- (۱) 100°
(۲) 108°
(۳) 90°
(۴) 85°

تست ۸۹: در یک شرکت دارویی، جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نمایش می‌دهیم. زاویه مرکزی مربوط به کارکنان ارشد، چقدر از زاویه مربوط به کارکنان دیپلم بیشتر است؟

سراسری- ۹۳

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکتر
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

- (۱) 60°
(۲) 72°
(۳) 90°
(۴) 82°

تست ۹۰: در نمودار دایره‌ای جدول روبه‌رو، زاویه مرکزی دسته‌ی به مرکز ۱۲ برابر 60° است. چند درصد حداقل $10/5$ هستند.

دسته‌ها	۴/۵ - ۷/۵	۷/۵ - ۱۰/۵	۱۰/۵ - ۱۳/۵	۱۳/۵ - ۱۶/۵
فراوانی	۵	۷	x	۳

- (۱) ۳۳/۳۳
(۲) ۳۱/۵۵
(۳) ۳۰/۶۶
(۴) ۲۲/۲۲

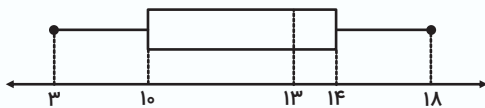
تست ۹۱: نمودار دایره‌ای برای کدام متغیر مناسبتر است و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر قسمت، متناسب با کدام است؟

سراسری - ۹۵

- (۱) کیفی - فراوانی نسبی
- (۲) کیفی - شعاع دایره
- (۳) کمی - فراوانی نسبی
- (۴) کمی - شعاع دایره

تست ۹۲: با توجه به نمودار جعبه‌ای مقابل، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) تقریباً ۷۵٪ داده‌ها بزرگتر از ۱۰ هستند. ($\frac{۳}{۴}$ داده‌ها)
- (۲) در داخل جعبه، تراکم داده‌ها در سمت راست میانه، بیشتر از سمت چپ آن است.
- (۳) دامنه میان‌چارکی برابر ۴ است.
- (۴) دامنه‌ی تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه برابر ۱۵ است.



تست ۹۳: در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری ۱۸, ۲۰, ۲۳, ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۱, ۹, ۱۲, ۵, ۱۰, ۱۹, ۲۱, ۷, ۸، دامنه تغییرات داده‌های داخل ورودی جعبه کدام است؟

سراسری - ۸۶

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

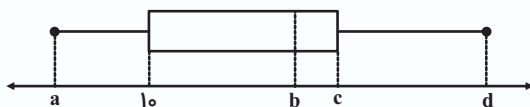
تست ۹۴: اگر داده‌های آماری ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۱۶, ۱۴, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۱۴ را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، انحراف معیار داده‌های داخل جعبه کدام است؟

سراسری - ۸۸

- (۱) $1/1$
- (۲) $1/2$
- (۳) $1/25$
- (۴) $1/3$

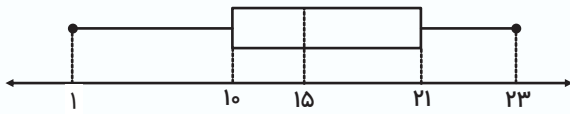
تست ۹۵: در نمودار جعبه‌ای روبرو، طول دنباله سمت چپ برابر ۴ و دامنه‌ی تغییرات داده‌ها برابر ۱۰ می‌باشد. اگر تقریباً ۲۵٪ داده‌ها بزرگتر از ۱۴ باشد و دامنه‌ی تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه را

R' بنامیم حاصل $\frac{acd}{R'}$ کدام است؟



- (۱) ۳۳۶
- (۲) ۳۴۶
- (۳) ۵۴۰
- (۴) ۵۸۰

تست ۹۶: در نمودار جعبه‌ای مقابل، بیشترین پراکندگی، مربوط به کدام قسمت است؟



(۱) بین Q_1 و min

(۲) بین Q_2 و Q_1

(۳) بین Q_3 و Q_2

(۴) بین Q_3 و max

تست ۹۷: در نمودار جعبه‌ای ۳۱ داده آماری، میانگین داده‌های دنباله سمت چپ ۱۲ و دنباله سمت راست ۲۱ است. اگر میانگین داده‌های داخل روی جعبه ۱۵ باشد، میانگین کل این داده‌ها تقریباً

سراسری-۹۲

چقدر است؟

(۱) ۱۵ / ۴۵

(۲) ۱۵ / ۵۴

(۳) ۱۵ / ۶۷

(۴) ۱۵ / ۷۶

تست ۹۸: داده‌های آماری ۱۸، ۷، ۲۰، ۱۶، ۱۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۱۲، ۱۳ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم واریانس داده‌های داخل تقریباً کدام است؟

خارج از کشور ۹۰- ریاضی

(۱) ۴ / ۵۹

(۲) ۴ / ۹۵

(۳) ۵ / ۲۴

(۴) ۵ / ۷۱

تست ۹۹: در نمودار جعبه‌ای ۳۶ داده آماری، میانگین داده‌های سمت چپ و راست جعبه جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد و میانگین کل داده‌ها ۲۷ / ۵ باشد. آنگاه میانگین داده‌های داخل

سراسری ریاضی ۹۰

جعبه کدام است؟

(۱) ۲۸

(۲) ۲۸ / ۵

(۳) ۲۹

(۴) ۲۹ / ۵

تست ۱۰۰: داده‌های آماری $۱۷, ۱۵ / ۵, ۱۵, ۱۲, ۱۴ / ۵, ۱۸ / ۵, ۲۰, ۱۸, ۱۳$ با نمودار جعبه‌ای نشان داده

سراسری- ۹۹

شده است. انحراف معیار داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱/۵ (۱)

۱/۳ (۲)

۱/۲ (۳)

۱/۱ (۴)

تست ۱۰۱: در نمودار جعبه‌ای داده‌های $۱۳, ۱۵, ۹, ۱۲ / ۵, ۱۰, ۱۳, ۱۷, ۱۴, ۱۷ / ۵, ۱۶$ تفاضل داده‌های

سراسری- ۹۹

ابتدا و انتهای جعبه کدام است؟

۳ (۱)

۳/۲۵ (۲)

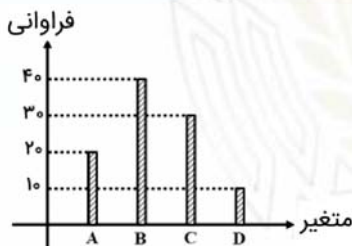
۳/۵ (۳)

۴ (۴)

تست ۱۰۲: نمودار میله‌ای زیر، درصد تعداد عضوهای متغیر کیفی است. در نمودار دایره‌ای آن،

سراسری- ۹۹

زاویه‌ی مربوط به گروه B چند درجه است؟



۱۳۲ (۱)

۱۴۴ (۲)

۱۵۰ (۳)

۱۵۶ (۴)

تست ۱۰۳: دامنه میان چارکی نمودار جعبه‌ای شامل ۱۰ داده، ۲۵ و اختلاف چارک اول با سیل‌ها ۳۸ و ۲۶ است. اگر کوچکترین عضو داده ۳ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای چارک سوم

انسانی ۱۴۰۰

کدام است؟

۱۲۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۶۴ (۳)

۳۶ (۴)

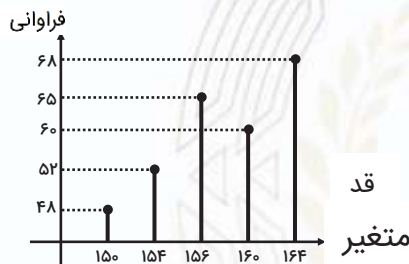
بخش پنجم: نمودارهای چندمتغیره

نمودارهای این بخش دو یا چند متغیر را همزمان بررسی می‌کنند، به همین خاطر نمودار چندمتغیره گفته می‌شوند.

۱- **نمودار پراکنش نگاهشت:** این نمودار مقادیر دو متغیر را به صورت یک نقطه با طول و عرض (V_1, V_2) نشان می‌دهد که V_1 مقدار متغیر را روی محور طول‌ها و V_2 مقدار متغیر را روی محور عرض‌ها نشان می‌دهد.

مثال: فعالیت صفحه ۱۱۰ کتاب که در آن دو متغیر مساحت و جمعیت مساحت و جمعیت را با هم در یک نمودار (نمودار بالای صفحه ۱۱۱) بررسی کرده است.

مثال: نمودار پراکنش نگاهشت روبرو مربوط به قد و وزن ۵ نوجوان است. میانگین قد (سانتی‌متر) و وزن (کیلوگرم) این پنج دانش‌آموز کدام است؟



۲- **نمودار حبابی:** نموداری است که ۳ متغیر مختلف را در کنار هم و به طور همزمان مورد مطالعه قرار می‌دهد، به طوری که هر دایره در نمودار حبابی در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می‌کند که داریم:

V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی (x ها)

V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی (y ها)

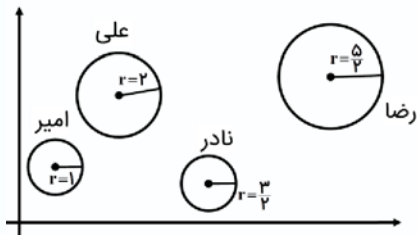
V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره)

نکته: متغیر سوم نمی‌تواند منفی یا صفر باشد.

مثال: در فعالیت صفحه ۱۱۰ کتاب اگر بخواهیم درصد آب‌ها را با متغیر سوم (مساحت دایره‌ها) نشان دهیم، به نمودار دوم صفحه ۱۱۱ خواهیم رسید.

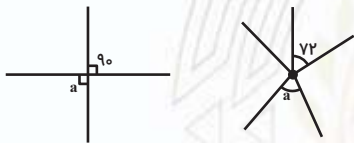
مثال: نمودار حبابی مقابل، مساحت دایره‌ها، وزن افراد را نشان می‌دهد. میانگین وزن این افراد

چقدر است؟



۳- نمودار راداری: روشی برای نمایش داده‌های چند متغیره در قالب نموداری دوطبقی است. که در آن سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه‌ی آنها یکسان است.

شعاع نمودار راداری: نمودار راداری از چند نیم‌خط به شکل پره‌های چرخ دوچرخه تشکیل شده است. که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این نیم‌خطها یک محور را نشان‌دهنده‌ی یک متغیر است که می‌تواند درجه‌بندی شود، به این نیم‌خطها یک محور و نشان‌دهنده‌ی یک متغیر است که می‌تواند درجه‌بندی شود، به این نیم‌خطها شعاع نمودار راداری می‌گویند.

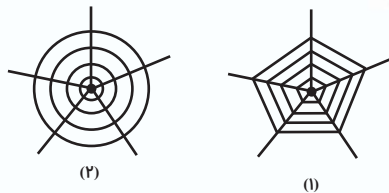


زاویه بین شعاع‌های نمودار راداری:

$$d = \frac{360}{\text{تعداد متغیرها}}$$

زاویه بین شعاع‌ها

توجه ۱: اگر فاصله بین شانیه‌های متوالی بر روی همه‌ی شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد. این خطوط راهنما را می‌توان به صورت خط راست (شکل ۱) و یا دایره (شکل ۲) رسم کرد.



توجه ۲: چون نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است به آن نمودار «تار عنکبوتی» هم می‌گویند و اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار شبیه یک ستاره می‌شوند که به آن «نمودار ستاره‌ای» هم می‌گویند.

مشاهده: مشاهده یا نقطه‌ی داده‌ای در آمار، مجموعه‌ای شامل یک یا چند مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعه‌ی واحد آماری است.

مثال: اگر واحد آماری، دانش‌آموزان کلاس باشند و سن، قد، وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعه‌ی مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش‌آموزان، یک مشاهده است.

نحوه رسم نمودار راداری: ابتدا با توجه به تعداد متغیرها، تعداد شعاع نمودار راداری و زاویه بین آنها را بدست آورده و شکل حدودی را رسم می‌کنیم. سپس مقدار متغیر را بر حسب ماکزیمم همان متغیر شعاع مشخص کرده و سپس نقاط بدست آمده روی شعاع‌ها را به هم وصل می‌کنیم.

نکته: اگر بخواهیم مقدار متغیر را بر حسب درصد نشان دهیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{مقدار متغیر} \times 100 = \frac{\text{مقدار متغیر}}{\text{مقدار ماکزیمم}} \times 100$$

مثال: نمرات علی به صورت مقابل در جدول آمده است:

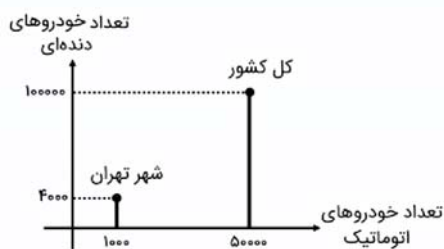
نمره	درس
۱۶	ریاضی
۱۵	فیزیک
۱۲	عربی
۲۰	ادبیات

الف) نمودار راداری آن را بر حسب مقدار رسم کنید.

ب) نمودار راداری آن را بر حسب درصد رسم کنید.

تست ۱۰۴: با توجه به نمودار پراکنش نگاشت روبرو، مقدار آماره‌ی خودروهای اتومات و مقدار پارامتر خودروهای به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (جامعه آماری، تولیدات خودرو کل کشور است.)

تعداد خودروهای اتوماتیک



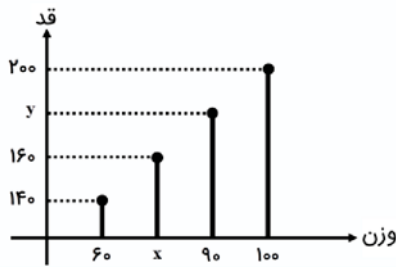
$$(1) \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

$$(2) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

$$(3) \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$$

تست ۱۰۵: در نمودار پراکنش نگاشت روبرو، میانگین وزن‌ها برابر ۸۰ کیلوگرم و میانه‌ی قدها برابر ۱۷۰ سانتی‌متر است. حاصل $x + y$ کدام است؟



(۱) ۲۵۰

(۲) ۳۰۰

(۳) ۳۵۰

(۴) ۴۰۰

تست ۱۰۶: مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟

(۱) شعاع دایره‌ها (۲) قطر دایره‌ها (۳) محیط دایره‌ها (۴) مساحت دایره‌ها

تست ۱۰۷: نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟

(۱) یک متغیر (۲) دو متغیر (۳) سه متغیر (۴) محدودیتی ندارد.

تست ۱۰۸: هر نقطه روی نمودار درواقع یک سه تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) می‌باشد که V_2 موقعیت نقطه در و V_3 است.

(۱) دایره‌ای- صفحه- حجم دایره
(۲) حبابی- محور افقی- مساحت دایره
(۳) حبابی- محور عمودی- شعاع دایره
(۴) حبابی- محور عمودی- اندازه‌ی نقطه

تست ۱۰۹: اگر نمودار حبابی را بر اساس سه تایی مرتب (V_1, V_2, V_3) رسم کنیم، کدام یک از

کمیت‌های زیر برای عضو سوم به نظر می‌آید. V_1 ، V_2 و V_3 به ترتیب نشانگر موقعیت افقی، عمودی و اندازه‌ی نقطه هستند.

(۱) وزن دانش‌آموزان

(۲) سن کودکان مهد کودک

(۳) قطر ستون‌های ساختمان بر حسب سانتی‌متر

(۴) درجه حرارت شهر بر حسب درجه‌ی سلسیوس

تست ۱۱۰: در یک نمودار حبابی، می‌دانیم متغیر سوم، درصد ذخایر طلای کشورها می‌باشد. اگر

درصدهای مربوط به کشورهای ایران و مالزی به ترتیب ۱۰ و ۳۰ باشند، شعاع دایره‌ی مربوطه به مالزی چند برابر شعاع دایره‌ی مربوط به ایران است؟

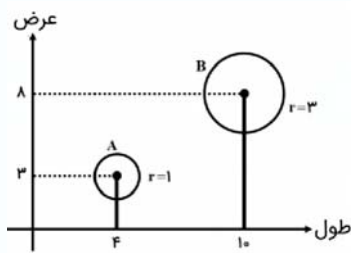
(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۳

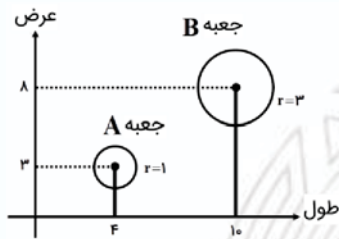
(۴) ۲

تست ۱۱۱: در نمودار حبابی مقابل، متغیر سوم، میزان درآمد دو فرد A و B را نشان می‌دهد. اگر شعاع دایره A، سه برابر شعاع دایره B باشد، درآمد فرد A چند برابر درآمد فرد B است؟



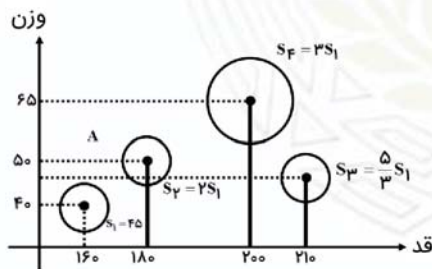
- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۹
- (۳) ۲
- (۴) ۳

تست ۱۱۲: در نمودار حبابی مقابل، محور x ها، محور y ها و مساحت دایره به ترتیب طول، عرض و ارتفاع یک سری از جعبه‌ها به شکل مکعب مستطیل را نشان می‌دهند. حجم جعبه A چقدر از حجم جعبه B کمتر است؟



- (۱) 700π
- (۲) 708π
- (۳) 807π
- (۴) 800π

تست ۱۱۳: در نمودار حبابی روبرو، مساحت دایره‌ها وزن افراد، طول مرکز دایره‌ها اندازه‌ی قد آنها و عرض مرکز دایره‌ها سن آنها را نشان می‌دهد. مجموع میانه‌ی وزن‌ها، میانه‌ی قد‌ها و میانه‌ی سن‌های افراد کدام است؟ (وزن بر حسب کیلوگرم)



- (۱) $340/5$
- (۲) $321/5$
- (۳) ۳۴۰
- (۴) ۳۲۱

تست ۱۱۴: می‌خواهیم یک نمودار حبابی را به یک نمودار راداری تبدیل کنیم. در این صورت زاویه‌ی بین هر دو شعاع متوالی نمودار راداری چقدر خواهد بود؟

- (۱) 30°
- (۲) 45°
- (۳) 60°
- (۴) 120°

تست ۱۱۵: نمودار راداری روشی برای نمایش داده‌های چند متغیره در قالب نموداری است که در آن یا بیشتر بر روی محورهایی نشان داده می‌شوند که نقطه‌ی شروع همه‌ی آنها است.

- (۱) سه بُعدی- چهار متغیر کمی- یکسان
- (۲) سه بُعدی- دو متغیر کمی- متفاوت
- (۳) دو بُعدی- سه متغیر کمی- متفاوت
- (۴) دو بُعدی- سه متغیر کمی- یکسان

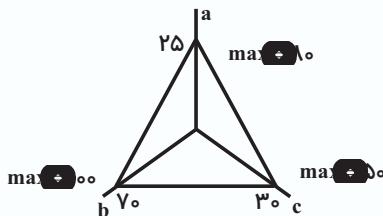
تست ۱۱۶: کدام گزینه غلط است؟

- (۱) نمودارهای حبابی را می‌توان گونه خاصی از پراکنش نگاشت دانست.
- (۲) در نمودار راداری می‌توان گاهی خطوط راهنما را به صورت خط خم و دایره رسم کرد.
- (۳) در نمودار راداری می‌توان هر تعداد متغیر کمی را نمایش داد.
- (۴) در نمودار راداری محل قرارگیری و زاویه‌ی محورهای نسبت به هم، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

تست ۱۱۷: زاویه بین دو شعاع متوالی در نمودار راداری، کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۳۶
- (۲) ۹۰
- (۳) ۲۵
- (۴) ۴۵

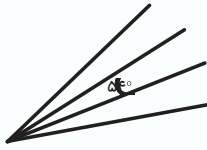
تست ۱۱۸: با توجه به نمودار راداری مقابل، مقدار واریانس چقدر است؟ (مقدار max هر متغیر در کنار شعاعش نوشته شده است).



- (۱) ۴۰۰
- (۲) ۴۲۰
- (۳) $\frac{1850}{3}$
- (۴) $\frac{1950}{3}$

تست ۱۱۹: شکل زیر بیانگر قسمتی از یک نمودار راداری است. در این نمودار راداری چند شعاع

نموداری وجود دارد؟



۲۱ (۱)

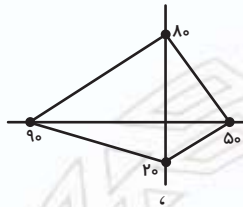
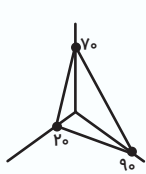
۱۸ (۲)

۱۹ (۳)

۲۰ (۴)

تست ۱۲۰: واریانس مقادیر مشخص شده در نمودار « آ » چند برابر واریانس مقادیر مشخص شده

در نمودار راداری « ب » است؟



$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۲)

$\frac{50}{47}$ (۳)

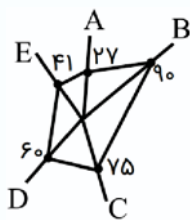
$\frac{52}{45}$ (۴)

تست ۱۲۱: یک شرکت تولیدی برای سهولت مقایسه کیفیت محصول خود توسط خریداران داده‌های

گردآوری شده ۵ متغیر A، B، C، D و E به ترتیب با بیشینه‌های ۷، ۹۵، ۶، ۱ و ۵ را به صورت نمودار

راداری زیر (برحسب درصد) ارائه کرده است. مقدار متغیر E کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۱



۱/۸۹ (۱)

۲/۰۵ (۲)

۱۸/۹ (۳)

۲۰/۵ (۴)

بخش ششم: شاخص‌های آماری

شاخص‌های آماری: شاخص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می‌دهد.

توجه: شاخص‌ها نه تنها مانند جدول فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده‌ها را خلاصه می‌کنند، بلکه واقعیت‌های مفیدی را از جامعه به سادگی به ما نشان می‌دهند و امکان مقایسه را فراهم می‌کند.

مثال: ۵ مورد از شاخص‌هایی که داشبورد اتومبیل به راننده نشان می‌دهد را نام ببرید (صفحه ۵۷ کتاب)

انواع شاخص‌ها:

۱- شاخص خط فقر: حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است که نصف میانگین یا نصف میان درآمد افراد جامعه می‌باشد:

$$\text{خط فقر بر حسب میانگین} = \frac{\text{میانگین درآمد افراد}}{۲}$$

$$\text{خط فقر بر حسب میانه} = \frac{\text{میانگین درآمد افراد جامعه}}{۲}$$

مثال: با توجه به جدول مقابل با استفاده از خط فقر توسط میانه، مشخص کنید چه تعداد از افراد در زیر خط فقر قرار دارند؟

تعداد اعضای خانوار	درآمد ماهیانه (هزار تومان)
۵	۱۲۰۰
۱	۱۸۰۰
۴	۲۰۰۰
۲	۲۲۰۰
۳	۲۴۰۰

مثال: اگر خط فقر در یک شرکت به روش نصف میانگین برابر ۲ میلیون تومان باشد و درآمد افراد این اداره بر حسب میلیون تومان به صورت ۲، a، ۶/۱، ۴/۲، ۳، ۵ مقدار a کدام است؟

خط فقر بین‌المللی: اگر نصف میانگین یا میانه درآمد افراد کل دنیا را محاسبه کنیم، خط فقر بین‌المللی به دست می‌آید.
که در سال جاری بر اساس اعلام بانک جهانی برابر ۱/۲۵ دلار آمریکا در یک روز است.

نکته: اگر به متوسط درآمد هر فرد از جامعه m واحد (تومان یا دلار) اضافه شود، آنگاه خط فقر جامعه $\frac{m}{2}$ واحد (تومان یا دلار) افزایش می‌یابد. اگر متوسط درآمد هر فرد n برابر شود خط فقر جامعه نیز n برابر می‌شود.

مثال: اگر خط فقر در یک جامعه ۲۵۰ هزار تومان باشد و سپس درآمد هر فرد را ۳ برابر کنیم و ۱۰ درصد مالیات آن کم شود، خط فقر کدام است؟

نکته: زمانی از میانه برای محاسبه خط فقر استفاده می‌کنیم که داده دور افتاده داشته باشیم.

مثال: فرض کنید در یک نمونه ۱۰ تایی درآمد ماهانه افراد مختلف یک کشور، داده‌های زیر بر حسب هزار دلار بدست آمده باشد خط فقر را بدست آورید.

$$۰/۸ - ۳ - ۵/۵ - ۵/۸ - ۹/۵ - ۶ - ۴/۵ - ۳/۳ - ۴ - ۳/۶$$

۲- شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی (CPI): برابر متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف‌شدگان به ازای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است.

نکته: ۱- این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

۲- این شاخص نشان می‌دهد که قدرت خرید پولمان چقدر است.

۳- در نمودار شاخص بهای کالا و خدمات محور طول‌ها نشان دهنده زمان و محور عرض‌ها نشان دهنده درصد نسبت به سال پایه (عدد شاخص) است.

۴- شاخص بهای کالا و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

۵- با افزایش شاخص بهای کالا و خدمات باید منتظر گران شدن هزینه اقلام خوراکی و خدمات شویم.

۶- شاخص بهای کالا و خدمات بر اساس ۳۰۰ متغیر محاسبه می‌شود.

روش محاسبه شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی:

برای محاسبه شاخص بهای کالاهای مصرفی A و B و ... که قیمت آنها بر حسب یک واحد در سال پایه به ترتیب a و b و ... تومان و در سال مورد نظر a' و b' و ... تومان باشد و در سال از هر یک به مقدار x و y واحد مصرف شود از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{عدد شاخص بهای کالاهای مصرفی A و B و ...} = \frac{a'x + b'y + \dots}{ax + by + \dots} \times 100$$

مثال: اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض اینکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، عدد شاخص را بدست آورید.

نکته: برای بدست آوردن هزینه هر یک از کالاهای مصرفی در زمان خواسته شده، از رابطه‌های زیر

استفاده می‌کنیم:

$$\text{هزینه کالا و ارسال پایه} \times \text{عدد شاخص کالا در زمان خواسته شده} = \text{هزینه کالا در زمان خواسته شده (۱)}$$

$$\text{عدد شاخص کالا در سال پایه}$$

$$\text{هزینه کالا در سال پایه} = \frac{\text{عدد شاخص کالا در سال پایه}}{\text{عدد شاخص کالا در زمان خواسته شده}} \times \text{هزینه کالا در زمان خواسته شده (۲)}$$

مثال: شاخص مسکن در سال ۹۰ (پایه) برابر ۱۰۰ و هزینه مسکن برابر یک میلیون تومان بوده است. اگر هزینه مسکن در سال ۹۵، ۲ میلیون تومان باشد، شاخص مسکن را در سال ۹۵ بدست آورید.

تورم: تغییر متوسط کالاها و خدمات در طول زمان را تورم گویند، به عبارت دیگر نرخ تورم، همان درصد تغییر سطح قیمت در واحد زمان است.
نحوه به دست آوردن نرخ تورم:

$$\text{نرخ تورم} = \frac{\text{قیمت قبلی} - \text{قیمت فعلی}}{\text{قیمت قبلی}} \times 100 \quad (\text{با استفاده از قیمت})$$

$$\text{نرخ یا درصد تورم} = \frac{\text{شاخص بها کالا و خدمات در سال پایه} - \text{شاخص بهای کالا و خدمات در سال مورد نظر}}{\text{شاخص بها کالا و خدمات در سال پایه}} \times 100$$

(با استفاده از شاخص بها کالا و خدمات)

نکته: ۱- اگر مشتری زیاد در مقابل کالای کم قرار گیرد، تورم تولید، قیمت بالا می‌رود.
۲- هر چه نرخ تورم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کمتر می‌شود.

مثال: اگر شاخص قیمت مسکن در سال ۹۰ (پایه) برابر ۱۰۰ باشد و این شاخص در سال ۹۶ برابر ۱۱۰ باشد نرخ تورم از سال ۹۰ تا ۹۶ چند درصد است؟

۴- شاخص نرخ بیکاری: عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال
جمعیت بیکار: به فردی ۱۶ ساله به بالا که به طور موقت بیکار شده یا در جستجوی شغل یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخص باشد.
جمعیت شاغل: فرد ۱۶ ساله به بالا که در یک هفته مرجع حداقل یک ساعت کار کرده باشد.
هفته مرجع: بازه زمانی هفت روزه‌ای که وضع فعالیت افراد در آن در نظر گرفته شود.
جمعیت فعال: جمعیت بیکار بعلاوه‌ی جمعیت شاغل

$$\text{درصد نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

مثال: اگر در یک کشور، تعداد بیکاران ۲۴ میلیون نفر و تعداد شاغلین آن ۹۶ میلیون نفر باشد، شاخص نرخ بیکاری چند درصد است؟

۵- شاخص توده بدنی یا (نماتوپ): این شاخص را با BMT نشان می‌دهند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$BMT = \frac{\text{وزن (kg)}}{(\text{قد (m)})^2}$$

مثال: شاخص توده بدنی فردی برابر ۲۳/۱ است اگر قد او ۱۸۰ سانتی‌متر باشد، وزن او چقدر است؟

۶- شاخص پایه آموزش: میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش را خوانایی متن گویند.

کلمات دشوار: کلمات دوهجا بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان را کلمات دشوار گویند. **روش محاسبه شاخص آموزش:** این شاخص عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است:

$$[۴ \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

[] علامت جز صحیح است →

مثال: در یک متن، میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۸ کلمه و درصد کلمات دشوار در آن ۲/۵ است. شاخص پایه آموزش کدام است؟

مثال: در یک کتاب انگلیسی هر جمله به طور متوسط ۱۰ کلمه دارد و لغات دشوار آن ۲۰ درصد هستند، شاخص پایه آموزش کدام است؟

۷- شاخص پوسیدگی دندان (OMTF): برای محاسبه OMTF یک جامعه، تعداد دندان‌های پوسیده، پر شده و کشیده شده تک تک افراد آن جامعه را شمرده و میانگین آن را حساب می‌کنیم.

نکته: برای محاسبه تغییرات شاخص OMTF در سال مورد نظر نسبت به سال پایه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شاخص در سال پایه} - \text{شاخص در سال مورد نظر} = \frac{\text{درصد تغییرات شاخص}}{\text{شاخص در سال پایه}} \times 100$$

مثال: اگر شاخص OMTF یک جامعه در سال ۱۳۷۰ برابر ۶ و در سال ۱۳۹۵ برابر ۴ باشد عدد شاخص در سال ۱۳۹۵ نسبت به سال ۱۳۷۰ چند درصد کاهش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۷۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است.

تست ۱: اگر درآمد افراد یک روستای کوچک به صورت ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, x, ۳, ۵ (میلیون تومان) بوده و خط فقر به روش نصف میانگین ۱/۵ میلیون تومان باشد، مقدار x کدام است؟

۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

تست ۲: در داده‌های آماری ۱۳، ۷ و ۱۰ و ۷ و ۸ و ۱۳ و ۵ و ۶ و ۱۱ و ۱۳ و ۴ که درآمدهای جامعه بر حسب میلیون تومان است، تفاضل مُد و خط فقر به کمک نصف میانه کدام است؟

۹ (۴) ۴ (۳) ۷ (۲) ۱۳ (۱)

تست ۳: داده‌های ۱/۷، ۱/۸، ۱/۵، ۱/۶، ۱/۷، ۲/۲، ۱/۹ درآمدهای افراد جامعه بر حسب میلیون تومان هستند. با حذف مد، خط فقر به کمک نصف میانگین کدام است؟

۱/۲ (۱) ۱/۵ (۲) ۹۰۰ هزار تومان (۳) ۲ میلیون (۴)

تست ۴: کدام گزینه جزء شاخص‌های آماری نیست؟

- (۱) میانگین (۲) میانه (۳) انحراف معیار (۴) متغیرها

تست ۵: در یک جامعه خط فقر برابر ۶۰۰ هزار تومان است. اگر به هر فرد ۵۰ هزار تومان یارانه داده شود، خط فقر جدید چند هزار تومان است.

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۶۲۵ (۳) ۶۵۰ (۴) ۷۰۰

تست ۶: در یک جامعه ۲۰ نفری خط فقر برابر ۳۵۰۰۰۰ تومان و در یک جامعه ۳۰ نفری دیگر خط فقر برابر ۴۰۰۰۰۰ تومان است. اگر هر دو جامعه را با هم ادغام کنیم، خط فقر کدام است؟ (خط فقر به کمک میانگین به دست آمده اند.)

- (۱) ۳۵۰۰۰۰ (۲) ۴۵۰۰۰۰ (۳) ۳۸۰۰۰۰ (۴) ۴۸۰۰۰۰

تست ۷: در داده‌های آماری ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ که درآمدهای افراد یک جامعه بر حسب میلیون تومان هستند، خط فقر را با کمک میانه درآمدها پیدا می‌کنیم. سپس داده‌های بیشتر از دو برابر خط فقر را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده است؟

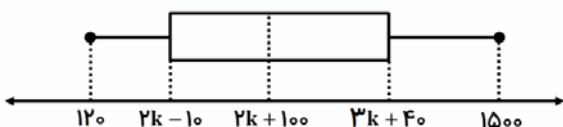
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

تست ۸: با توجه به نمودار جعبه‌ای مقابل مقدار خط فقر با توجه به میانه کدام است؟



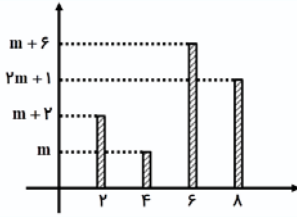
- (۱) ۷/۵ (۲) ۷ (۳) ۸/۵ (۴) ۸/۴

تست ۹: اگر خط فقر جامعه‌ای به کمک میانه درآمدها ۳۰۰ هزار تومان باشد، با توجه به نمودار جعبه‌ای این جامعه، مجموع چارک اول و سوم چقدر است؟



- (۱) ۱۲۵۰ (۲) ۱۳۵۰ (۳) ۱۳۸۰ (۴) ۱۲۸۰

تست ۱۰: اگر خط فقر به کمک میانگین برابر $\frac{11}{4}$ باشد، مقدار m چقدر است؟



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

تست ۱۱: اگر سبد خانواده از گوشت و نان تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۸۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ تومان و در سال مورد نظر برابر ۱۲۰۰۰ و ۲۵۰۰۰ تومان باشد و مقدار مصرف آن دو نیز به ترتیب ۳۰۰ و ۵۰۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای گوشت نان چند درصد است؟

- (۱) ۶۰/۶
(۲) ۶۰/۸
(۳) ۱۶۱/۳
(۴) ۱۶۱/۷

تست ۱۲: اگر در شاخص بها کالا و خدمات، واحد اندازه‌گیری ۲ برابر باشد، آنگاه تغییرات مقدار این شاخص، کدام است؟

سراسری انسانی ۹۹

- (۱) تغییر نمی‌کند
(۲) دو برابر می‌شود
(۳) نصف می‌شود
(۴) قابل پیش‌بینی نیست

تست ۱۳: در سال ۹۰ (پایه) شاخص بهای گوشت و نان برابر ۱۰۰ و هزینه برای یک نفر در ماه به طور میانگین K هزار تومان بوده است اگر در سال ۹۶ هزینه نسبت به سال ۹۰، ۴۰ درصد افزایش داشته باشد، شاخص آن چند برابر شده است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱/۵
(۳) ۱/۴
(۴) ۱/۲

تست ۱۴: قیمت مرغ در سال ۹۰ (پایه) برابر ۴ هزار تومان بوده است. اگر قیمت مرغ در سال ۹۶ برابر ۶ هزار تومان باشد، تورم مرغ از سال ۹۰ تا ۹۶ چند درصد است؟

- (۱) ۵۰
(۲) ۶۵
(۳) ۷۰
(۴) ۷۵

تست ۱۵: در یک نمونه تصادفی از کارکنان یک شرکت، میانه و میانگین در آمد ماهیانه آنان به ترتیب، ۲۵۰ و ۳۰۰ واحد پول است. اگر ۳ نفر آنان در آمد بسیار بالایی داشته باشند، خط فقر کدام است؟

سراسری خارج از کشور ۹۹

- (۱) ۱۲۵
(۲) ۱۵۳
(۳) ۱۸۳
(۴) ۲۵۰

تست ۱۶: قیمت ۳ نوع کالا در سال پایه ۲۰۰۰، ۷۵۰۰ و ۳۵۰۰ واحد پول، در سال مورد نظر به ترتیب ۳۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۵۰۰۰ واحد پول است. تعداد مورد نیاز این ۳ کالا در سال به ترتیب ۶۰، ۱۰۰ و ۸۰ می‌باشد. مقدار تورم آن تقریباً چند درصد است؟

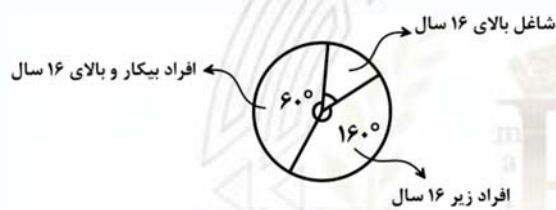
سراسری خارج انسانی ۹۸

- (۱) ۲۵/۸ (۲) ۳۷/۴ (۳) ۳۹/۲ (۴) ۴۰/۱

تست ۱۷: اگر تورم قیمت مسکن بین سال‌های ۹۱ تا ۹۵، برابر ۴۰ درصد بوده باشد و شاخص بهای مسکن در سال ۹۱ برابر ۵۰ باشد، شاخص بهای مسکن در سال ۹۵ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۷۵ (۳) ۴۰ (۴) ۷۰

تست ۱۸: با توجه به نمودار دایره‌ای زیر نرخ بیکاری چند درصد است؟



- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

تست ۱۹: در یک کشور ۹۰ میلیون نفری، ۳۰ میلیون نفر زیر ۱۶ سال هستند و از جمعیت بالای ۱۶ سال ۳۵ میلیون نفر شاغل بوده و بقیه نیز بیکارند. باید چند میلیون شغل ایجاد شود تا شاخص نرخ بیکاری ۱۰ درصد شود.

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

تست ۲۰: در یک استان، جمعیت بیکار ۲۰ درصد جمعیت شاغلین بالای ۱۶ سال است. نرخ بیکاری تقریباً چند درصد است.

- (۱) ۱۵/۶ (۲) ۱۶/۶ (۳) ۱۷/۴ (۴) ۱۸/۲

تست ۲۱: در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر، از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل‌اند. در این منطقه ۱۴۳ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جوهای کار هستند، حداقل چند شغل ایجاد شود تا نرخ بیکاری ۶ درصد باشد؟

سراسری انسانی ۹۸

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

تست ۲۲: شاخص نرخ بیکاری در یک کشور، ۳۶ درصد است. اگر جمعیت فعال این کشور ۲۵ میلیون نفر باشد نسبت تعداد شاغلین به بیکاران چقدر است؟

- (۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۹}{۱۶}$ (۴) $\frac{۱۶}{۹}$

تست ۲۳: کدام گزینه در مورد شاخص سلامت (BMI) درست است.

- (۱) مقدار BMI متغیری کیفی و ترتیبی است.
 (۲) مقدار BMI متغیری کمی فاصله‌ای است.
 (۳) با وزن ثابت هر چه قدر قد افراد بلندتر باشد BMI آنها بیشتر است.
 (۴) با قد ثابت هر چه قدر وزن افراد بیشتر باشد BMI آنها بیشتر است.

تست ۲۴: شاخص توده بدنی (BMI) فردی برابر ۳۴ می‌باشد. اگر قد فرد ۱۵۰ سانتی‌متر باشد، وزنش تقریباً چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۷۶ (۲) ۷۶/۵ (۳) ۷۷ (۴) ۷۷/۵

تست ۲۵: عدد شاخص توده بدنی فردی برابر ۲۳ است. اگر قد او ۱۷۰ سانتی‌متر باشد، وزنش تقریباً چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۶۵/۵ (۲) ۶۵ (۳) ۶۶/۵ (۴) ۶۶

تست ۲۶: شاخص توده بدنی علی و پدرش برابر می‌باشد. در حالی که وزن علی $\frac{۲}{۳}$ وزن پدرش است. مربع نسبت قد علی به قد پدرش چقدر است.

- (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۳

تست ۲۷: در یک کتاب با هر جمله به طور متوسط دارای ۶ کلمه است و ۲۰ درصد کلمات دشوار هستند. شاخص پایه آموزش کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

تست ۲۸: در یک متن ادبی شاخص پایه آموزش برابر ۴ و درصد کلمات دشوار در هر جمله ۳ است. میانگین تعداد کلمات در هر جمله کدام گزینه می‌تواند باشد.

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

تست ۲۹: اگر شاخص پوسیدگی دندان در سال ۵۰ برابر ۴ و در سال ۶۰ برابر ۳ باشد، عدد این شاخص در سال ۵۰ نسبت به سال ۶۰ چند درصد کاهش یافته است.

- (۱) ۱۵ درصد کاهش یافته است. (۲) ۲۰ درصد افزایش داشته است.
(۳) ۲۵ درصد کاهش داشته است. (۴) ۱۵ درصد افزایش یافته است.

تست ۳۰: اگر شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۹۵ برابر ۳ و در سال ۱۴۰۰ برابر ۵ باشد، عدد این شاخص از سال ۱۳۹۵ تا ۱۴۰۰ چقدر درصد کاهش داشته است.

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

تست ۳۱: اگر درآمد افراد یک جامعه ۴ برابر شود، مقادیر خط فقر با استفاده از میانگین (a) و خط فقر با استفاده از میانه (b) چه تغییری می‌کنند؟

انسانی ۱۴۰۱

- (۱) a و b، ۲ برابر می‌شوند.
(۲) a و b، ۴ برابر می‌شوند.
(۳) a، ۲ برابر و b، ۴ برابر می‌شوند.
(۴) a، ۴ برابر و b، ۲ برابر می‌شوند.

تست ۳۲: داده‌های زیر، درآمد افراد یک جامعه برحسب میلیون تومان و خط فقر با استفاده از میانگین در این جامعه $\frac{3}{5}$ میلیون تومان است. اگر برای محاسبه‌ی خط فقر از میان استفاده شود، چند نفر از افراد این جامعه زیر خط فقر هستند؟

انسانی ۱۴۰۲

 $19, 8/2, 1/8, 2/2, 6, 13, 3/4, a, 6/2, 10, 4/8$

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۲

تست ۳۳: قیمت گوشت و برنج در سال پایه به ترتیب ۴۲ و $137/5$ هزار تومان و در سال مورد نظر به ترتیب ۱۲۰ و ۲۴۰ هزار تومان است. اگر شاخص بهای برنج و گوشت در سال مورد نظر ۲۴۰ و مقادیر مصرفی برنج و گوشت به ترتیب a و ۱۶ کیلوگرم باشد، مقدار a چند کیلوگرم است؟

انسانی ۱۴۰۲

(۱) ۴۸

(۲) ۵۰

(۳) ۶۴

(۴) ۷۵

تست ۳۴: در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود، نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟

انسانی ۱۴۰۲

(۱) ۵۰

(۲) ۱۲۵

(۳) ۱۷۵

(۴) ۲۵۰

سری زمانی: مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری شده‌اند.

نمودار سری زمانی: در نمودار سری زمانی محور افقی تغییرات زمان و محور عمودی مقدار متغیر در فواصل زمانی را نشان می‌دهد که در نمودار پراکنش نداشت به کمک پاره‌خط‌ها داده‌ها را در طول زمان به هم وصل می‌کنیم.

فعالیت صفحه ۶۳ و ۶۴ کار در کلاس ۶۴:

تست ۳۵: در یک منطقه ۲۲۵ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر جویای کار هستند. اگر ۴۵ شغل ایجاد شود، ۵ درصد از نرخ بیکاری کمتر می‌شود، چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{1}{3}$ کاهش یابد؟

انسانی خارج ۱۴۰۲

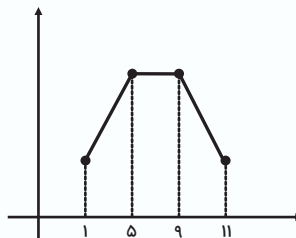
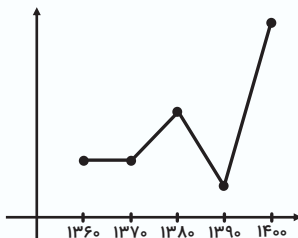
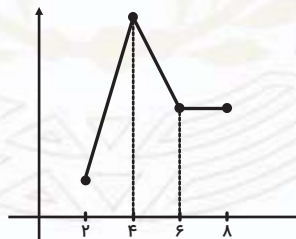
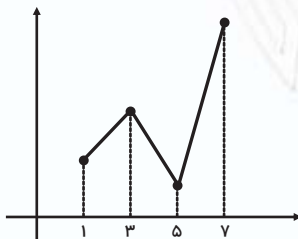
(۱) ۳۰

(۲) ۶۰

(۳) ۷۵

(۴) ۱۵۰

مثال: کدام یک از نمودارهای زیر، یک سری زمانی را بیان نمی‌کند.



نمودار سری زمانی متناوب (تکرار شونده): اگر ویژگی در یک سری زمانی در زمان خاصی

تکرار شود گوئیم نمودار سری زمانی‌ها

مثال: فعالیت صفحه ۶۵ کتاب

۲۰ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

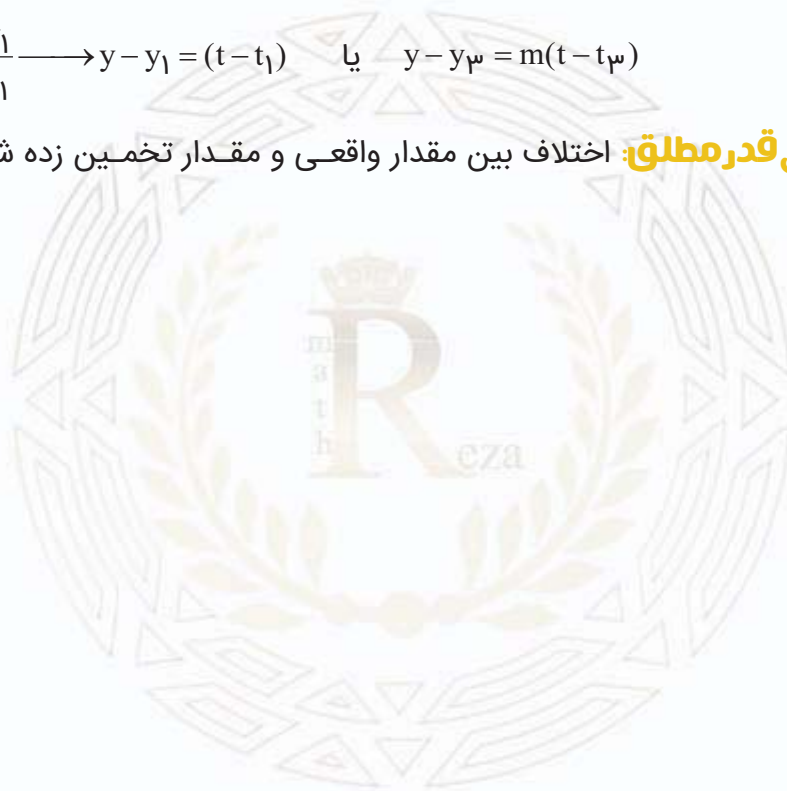
درون یابی: تخمین داده‌های بین داده‌های ثبت شده است.

درون یابی خطی: درون یابی که به واسطه یک پاره‌خط انجام شود، درون یابی خطی است.

روش درون یابی خطی: برای درون یابی خطی مقدار متغیر در زمان t_2 که $t_1 < t_2 < t_3$ است و مقدار متغیر در زمان t_1 و t_3 به ترتیب y_1 و y_3 باشد با استفاده از دو نقطه $A(t_1, y_1)$ ، $B(t_3, y_3)$ معادله خط گذرنده از این دو نقطه را بدست آورده و سپس با جایگذاری $t = t_2$ ، مقدار متغیر در زمان t_2 یعنی y_2 را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB} = \frac{y_3 - y_1}{t_3 - t_1} \rightarrow y - y_1 = (t - t_1) \quad \text{یا} \quad y - y_3 = m(t - t_3)$$

خطای درون یابی قدر مطلق: اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را خطای درون یابی گویند.



نکته: زمانی خطای درونیابی نقطه B بین نقطه C و A صفر است که هر سه نقطه A، B و C روی یک قرار گرفته باشند.



مثال: با توجه به جدول تعداد مشتریها را در ساعت ۹ محاسبه کنید.

ساعت t	۸	۱۰	۱۲	۱۴
تعداد مشتری y	۵	۲۵	۴۹	۳۷

مثال: با توجه به جدول زر، اگر بدانیم در ساعت ۱۱، دقیقا ۵۲ نان فروخته شده باشد، مقدار خطای درونیابی در ساعت ۱۱ چقدر است.

ساعت	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
تعداد نان فروخته شده	۵۰	۶۰	۴۰	۵۶	۷۰

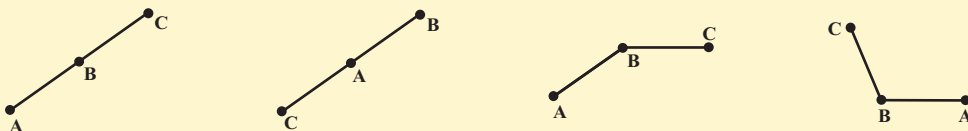
برون یابی: تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده را برون یابی گویند.

برون یابی خطی: اگر تخمین برون یابی به کمک خط انجام شود، آن را برون یابی خطی گویند.

روش به دست آوردن برون یابی خطی: برای برون یابی خطی و تخمین داده‌های بعد (قبل) از داده‌های ثبت شده ابتدا نقطه‌ی میانگین زمان و میانگین داده‌های ثبت شده را بدست می‌آوریم، سپس معادله خط گذرنده از دو نقطه میانگین و نقطه آخر (اول) را بدست می‌آوریم و به کمک خط بدست آمده برون یابی خطی را در زمان مورد نظر انجام می‌دهیم.

خطای برون یابی قدر مطلق: اختلاف بین مقدار تخمین زده شده با مقدار واقعی را خطای برون یابی می‌گویند.

نکته: اگر نقطه C قبل یا بعد از دو نقطه A و B باشد، زمانی خطای برون یابی صفر است که هر سه روی یک نقطه باشند.



مثال: میزان مراجعه کنندگان به یک مرکز درمانی در هفت روز اول ماه مطابق جدول مقابل است. با توجه به جدول تعداد مراجعین در روز نهم کدام است؟

روز ماه x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد مراجعین y	۲۵	۲۹	۳۱	۲۲	۴۰	۴۲	۲۱

تست ۳۶: نمودار سری زمانی (پراکنش نگاهت) درجه حرارت بدن یک بیمار در ۳ شبانه روز شامل ۲۳ پاره خط است. هر چند ساعت یک بار دمای بدن بیمار اندازه‌گیری شده است.

- (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۳۷: در یک مسئله درون‌یابی، اگر دو داده ثبت شده در زمان‌های $t_1 = 5$ و $t_2 = 7$ به ترتیب برابر ۸۱ و ۹۳ باشد، تخمین به کمک درون‌یابی خطی در $t = 6$ کدام است؟

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۸ (۴) ۸۹

تست ۳۸: نرخ تورم هر پنج سال یک بار در جدول زیر آمده است. به کمک درون‌یابی خطی نرخ تورم در سال ۹۳ را تخمین می‌زنیم. اگر نرخ تورم واقعی در سال ۹۳ برابر $15/6$ باشد، خطای درون‌یابی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/6$ (۳) $2/1$ (۴) $1/8$

سال x	۷۰	۷۵	۸۰	۸۵	۹۰	۹۵
نرخ تورم y	$20/7$	$23/2$	$11/4$	$11/9$	$25/5$	۹

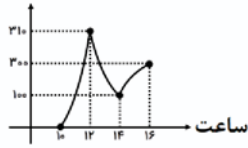
داخل ۹۸

تست ۳۹: در نمودار سری زمانی، خطا برای هر نقطه، برابر کدام است؟

- (۱) قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی از درون‌یابی آن
 (۲) نصف درون‌یابی خطی است.
 (۳) قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی از برون‌یابی آن
 (۴) نصف برون‌یابی خطی است.

تست ۴۰: در نمودار سری زمانی مقابل تعداد مشتریان را در ساعت ۱۱ صبح درون یابی می‌کنیم. اگر تعداد دقیق مشتریان در ساعت ۱۱ برابر ۲۷۰ نفر باشد، خطای درون یابی کدام است؟

تعداد مشتری



(۱) ۱۸۰

(۲) ۱۵۰

(۳) ۱۳۰

(۴) ۹۰

تست ۴۱: در یک مرکز خرید، تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۱۳ در جدول زیر آمده است. درون یابی خطی آن در ساعت ۱۰/۵ کدام است؟

انسانی ۹۹

	۱۷۸ (۴)	۱۷۵ (۳)	۱۷۲ (۲)	۱۷۰ (۱)	
ساعت t	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مشتری y	۱۰۰	۱۵۰	۱۹۰	۲۵۰	۱۲۰

تست ۴۲: نرخ تورم کشوری با فاصله‌های زمانی دو سال، به صورت جدول زیر است. درون یابی آن در سال نهم کدام است؟

انسانی ۹۹

	۲۵ (۴)	۲۴ (۳)	۲۳ (۲)	۲۲ (۱)	
سال (x)	۲	۴	۶	۸	۱۰
تورم (y)	۱۴	۱۸	۱۲	۲۰	۲۶

تست ۴۳: میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی بر حسب میلیارد تومان مطابق جدول زیر است. به کمک برون یابی خطی میزان فروش در سال ششم بر حسب میلیارد تومان کدام است؟

	۱۷ (۴)	۱۶/۵ (۳)	۱۸ (۲)	۱۷/۵ (۱)	
سال (x)	۱	۲	۳	۴	۵
میزان فروش (y)	۴	۵	۹	۱۲	۱۵

تست ۴۴: چند مورد نادرست است.

- (الف) تخمین داده‌های قبل از داده‌های ثبت شده را برون‌یابی گویند.
 (ب) تخمین داده‌های بین داده‌های ثبت شده را درون‌یابی گویند.
 (پ) درون‌یابی که به وسیله یک پاره‌خط انجام می‌شود، درون‌یابی خطی است.
 (ت) مجموعه داده‌هایی که در فواصل زمانی نامنظم گردآوری می‌شوند، سری زمانی است.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۴۵: در چند مورد برون‌یابی انجام نشده است.

- (الف) تخصیص تعداد مشتری‌های یک فروشگاه در هفته آینده
 (ب) تخمین قیمت سکه در سال ۹۰ با توجه به اطلاعات مربوط به سال‌های ۸۵ و ۹۵
 (پ) تخمین نرخ بیکاری در یک شهر در سال ۵۰ با توجه به اطلاعات مربوطه در سال‌های ۶۰ و ۷۰
 (ت) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در ماه مهر با توجه به اطلاعات مربوطه در ماه‌های شهریور و آبان
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۴۶: در یک نمودار سری زمانی نقطه میانگین $(a + 2, 16)$ و نقطه آخر $(10, 20)$ است اگر در $x = 11$ مقدار واقعی $3a$ و مقدار بدست آمده از تخمین به کمک برون‌یابی خطی برابر ۲۴ باشد، خطای برون‌یابی کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

تست ۴۷: تعداد زلزله‌های بالای ۲ ریشتر در یک استان از سال ۱۳۶۰ به بعد در جدول زیر ثبت شده است. به کمک برون‌یابی خطی تعداد زلزله‌های بالای ۲ ریشتر در سال ۱۳۵۰ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

سال (x)	۱۳۶۰	۱۳۶۵	۱۳۷۰	۱۳۷۵	۱۳۸۰
تعداد (y)	۶	۵	۱۰	۶	۸

تست ۴۸: نرخ تورم کشوری در فاصله زمانی ۳ سال، به صورت زیر است. برون‌یابی آن در سال شانزدهم کدام است؟

خارج از کشور انسانی ۹۹

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۱/۲۵ (۳) ۲۱/۷۵ (۴) ۲۲

سال (x)	۳	۶	۹	۱۲	۱۵
تورم (y)	۲۰/۵	۲۴	۲۲	۲۷	۲۱/۵

تست ۴۹: تعداد کالای فروخته شده توسط یک فروشگاه در هفته‌های اول تا هفتم به صورت

جدول زیر است :

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کالاهای فروخته شده	۸	x	۵	y	۱۵	۱۰	۱۲

پیش بینی‌ها نشان می‌دهد که تعداد کالایی که در هفته نهم به فروش می‌رسد ۸ کلاست. مقدار $x + y$

انسانی ۱۴۰۰

کدام است؟

۷۶ (۴)

۵۰ (۳)

۳۶ (۲)

۲۶ (۱)

تست ۵۰: مقدار بارندگی یک شهر در روزهای مختلف هفته اول سال، بر حسب میلی‌لیتر، به

صورت جدول زیر است :

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
مقدار بارندگی (میلی‌لیتر)	۱۲	۱۱	۵	۱۳	۷	۱۵	x

در جدول فوق داده x معلوم است. پیش‌بینی می‌شود مقدار بارندگی این شهر روز سه شنبه هفته جدید

(انسانی خارج ۱۴۰۰)

۱۵ میلی‌لیتر باشد، میانگین مقدار بارندگی در هفته اول سال، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۱/۲ (۳)

۱۰/۸ (۲)

۹ (۱)

درس اول: شمارش

هدف کلی ما از این درس این است که ما بدون شمردن، تعداد حالات یک عمل را شمارش کنیم که در این درس از اصل جمع، اصل ضرب، جایگت، تبدیل و ترکیب استفاده می‌کنیم.

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد. در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

تعمیم: اگر فقط یک عمل را بتوان به m یا n یا k یا ... حالت مختلف انجام داد. آنگاه تعداد کل حالت‌های انجام کار برابر است با:

$$m + n + k + \dots$$

نکته: حرف «یا» نشان‌دهنده‌ی اصل جمع است، عمل در یک مرحله انجام می‌پذیرد.

سوال ۱: علی برای اینکه از خانه به سر کار برود، یکی از ۷ خط اتوبوس (یا) ۵ خط تاکسی (یا) دو خط مترو را می‌تواند استفاده کند، تعداد کل حالت‌هایی که می‌تواند از خانه به سر کار برود برابر است با:

$$7 + 5 + 2 = 14$$

سوال ۲: به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کرد؟

$$5 + 4 + 3 = 12$$

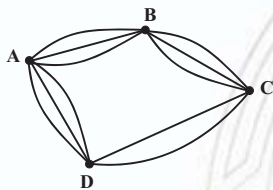
سوال ۳: می‌خواهیم از بین ۷ بازیکن تیم پرسپولیس و ۴ بازیکن تیم استقلال و ۱۰ بازیکن تیم تراکتور یک بازیکن را انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این بازیکن را انتخاب کنیم.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله‌ی اول به m طریق «و» در مرحله دوم هرکدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (قابل تعمیم)

نکته: حرف «و» نشان دهنده‌ی اصل ضرب است و در اصل ضرب، عملی در دو یا چند مرحله و به طور همزمان انجام پذیر است.

مثال: مدیر عامل در صفحه ۴ کتاب

کار در کلاس صفحه ۴: بین ۴ شهر A, B, C, D در شکل زیر راههایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:



الف) از شهر A به شهر C از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

ج) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

فکتوریل: برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگتر یا مساوی یک در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

قرارداد: $0! = 1$, $1! = 1$

سوال ۴: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $5! =$

۲) $\frac{10!}{8!} =$

۳) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} =$

۴) $3! \times 2 =$

۵) $\frac{n! \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot (n-1)!} =$

سوال ۵: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱) $\frac{6!}{3!} = 2$

۲) $5! - 3! = 2!$

۳) $2! \times 2! = 4!$

۴) $\frac{(n+1)! \cdot (n-1)!}{n! \cdot (n-2)!} = n^2 - 1$

جایگشت: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شی می‌نامیم و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$

مثال: با حروف کلمه «پرستو» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

مثال: اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

نکات جایگشت ارقام:

- ۱- در چیدمان اعداد از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.
- ۲- باید برای اینکه عدد n رقمی بسازیم حواسمان باشد که رقم اول از سمت چپ صفر نباشد.
- ۳- برای زوج و فرد بودن اعداد، باید به رقم یکان توجه شود.
- ۴- برای زوج بودن اعداد دو حالت را بررسی می‌کنیم:
 - ۱- رقم یکان صفر باشد
 - ۲- رقم یکان اعداد زوج موجود دیگر باشد.
- ۵- الف) اگر برای ساختن یک عدد n رقمی تکرار ارقام لحاظ شود اگر صفر بین اعداد نباشد که هر خانه برابر n می‌شود و از اصل ضرب استفاده کرده و در هم ضرب می‌کنیم ولی اگر صفر نباشد خانه اول از چپ $n-1$ را قرار می‌دهیم و بقیه n هستند.
- ب) اگر بدون تکرار ارقام در نظر گرفته شود برای خانه اول از سمت چپ دقیقاً مثل حالت قبل عمل می‌کنیم ولی در قسمت بدون تکرار ارقام خانه سمت چپی یک واحد کم شده و خانه بعدی با خانه اول برابر است و از دو خانه اول از سمت چپ به بعد یک واحد از خانه‌ها کم می‌شود.

سوال ۶: با ارقام $۹, ۴, ۵, ۶, ۳, ۲$ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

سوال ۷: با ارقام ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۹ و با تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت؟

سوال ۸: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

کار در کلاس صفحه ۶: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

(الف) چند عدد ۵ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(ب) چند عدد ۵ رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(پ) چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

سوال ۹: با حروف «ق»، «ب»، «ن»، «ح» و «و» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت که حروف نقطه‌دار در آن‌ها همیشه کنار هم باشند؟

جایگشت r شی از n شی متمایز (تبدیل یا ترتیب):

فرض کنید n شی متمایز موجود است و می‌خواهیم r شی از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n, r)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نکته: در تبدیل ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم است و بجای استفاده از اصل ضرب از رابطه بالا استفاده می‌کنیم.

مثال: با ارقام ۱ تا ۷ چه تعداد ارقام ۴ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

مثال: به چند طریق می‌توان سه کتاب از بین ۵ کتاب متمایز انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

سوال ۱۰: با حروف کلمه ولایت و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع به «ل» ختم شوند؟

نکته: در جایگشت افراد یا اشیا بعضی اوقات در سوال مطرح می‌شود که دو شی یا بیشتر در کنار هم قرار بگیرند. برای حل این سوالات ابتدا جایگشت را محاسبه کرده سپس در جایگشت اشیا داخل بسته ضرب می‌کنیم.

مثال: با حروف کلمه «محمدپور» بدون تکرار حروف چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «م» و «پ» در کنار هم باشند؟

سوال ۱۱: به چند طریق می‌توان ۴ خواهر و ۳ برادر را در کنار هم در یک صف قرارداد به طوری که:

الف) ۴ خواهر کنار هم باشند.

ب) ۳ برادر کنار هم باشند.

پ) هیچ دو پسری کنار هم قرار نگیرند.

ت) هیچ دو دختری کنار هم قرار نگیرند. (مهم)

ترکیب: فرض کنید n شی متمایز موجود است و می‌خواهیم r شی را از بین آن‌ها انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشند. در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده، خواهیم داشت:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نکته: 

$$a) \binom{n}{0} = 1 \quad \rightarrow \binom{3}{0} = 1$$

$$b) \binom{n}{1} = n \quad \rightarrow \binom{3}{1} = 3$$

$$c) \binom{n}{n} = 1 \quad \rightarrow \binom{3}{3} = 1$$

$$d) \binom{n}{n-1} = n \quad \rightarrow \binom{3}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$e) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow \binom{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

$$f) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \rightarrow \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$$

$$g) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \quad \text{یا} \quad \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

مثال صفحه ۹: به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب از بین ۷ کتاب، انتخاب کنیم و به دوستانمان هدیه بدهیم؟

کاردز کلاس صفحه ۲: به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

مثال: مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد (مثال کتاب کار در کلاس صفحه ۱۰)

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی فاقد عضو ۳ دارد؟

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی فاقد عضو k عضو برابر است با :

$$\binom{n-k}{r}$$

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی شامل عضو ۷ دارد؟

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی شامل k عضو برابر است با :

$$\binom{n-k}{r-k}$$

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی شامل ۵ و ۷ و فاقد ۳ دارد؟

سوال ۱۲: مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است: (تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب)

الف) چند زیر مجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

ب) چند زیر مجموعه‌ی سه عضوی شامل رقم ۸ دارد؟

سوال ۱۳: یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟ (تمرین ۴ صفحه ۱۱)

نکته: برای حل سوال بالا می‌توان هم از ترکیب استفاده کرد و هم از ترتیب، با این تفاوت که باید در ترکیب مقدار بدست آمده را دو برابر کنیم یعنی ما فقط بازی رفت یا برگشت را حساب کرده‌ایم.

سوال ۱۴: روی محیط دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چند تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

سوال ۱۵: دو پاره‌خط موازی وجود دارد که روی اولی ۴ نقطه و روی دومی ۵ نقطه وجود دارد.

الف) چه تعداد مثلث می‌توان ساخت؟

ب) چه تعداد پاره‌خط بین این دو پاره‌خط می‌توان ساخت؟ (به واسطه این ۹ نقطه)

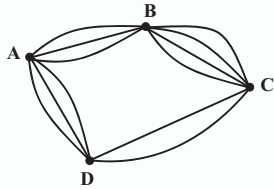
نکات تکمیلی:



سوالت امتحان نهایی گذشته از این درس

- ۱- ارقام ۱ تا ۹ مفروض اند: (بدون تکرار ارقام)
الف) چند عدد ۵ رقمی می‌تون نوشت؟
ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌تون نوشت؟
- ۲- مجموعه ۸ عضوی $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ، چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟
- ۳- الف) حاصل عبارت $\binom{9}{6}$ برابر می‌باشد.
ب) به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟
پ) به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)
- ۴- مجموعه ۵ عضوی $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ، چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟
- ۵- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟
- ۶- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹, ۷ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌تون نوشت؟
- ۷- به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟
- ۸- آیا تساوی $\frac{6!}{3!} = 2$ برقرار است؟

۹- مطابق شکل زیر بین شهرهای A, B, C, D راههایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



(خرداد ۹۹)

۱۰- به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

(خرداد ۹۹)

۱۱- با حروف کلمه خورشید و بدون تکرار حروف (با معنی و بی معنی) الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟
ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

(شهریور ۹۹)

۱۲- می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟

(شهریور ۹۹)

۱۳- مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند:
الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟
ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

(دی ۹۹)

۱۴- با ارقام ۱, ۲, ۴, ۷, ۹ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(دی ۹۹)

درس دوم: احتمال

پدیده یا آزمایش تصادفی: به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه‌ی آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست گوییم.

نکته: در پدیده تصادفی از همه‌ی نتیجه‌ها خبر داریم اما نمی‌دانیم که کدام یک قرار است رخ دهد.

پدیده قطعی: پدیده قطعی به پدیده‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از انجام آزمایش مشخص است.

برآمد: به هر یک از این نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد گوییم.

مثال: کار در کلاس صفحه ۱۳ و تمرین ۱ صفحه ۲۵

کدام یک از پدیده‌های زیر قطعی و کدام یک تصادفی است.

(الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم.

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد.

(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد.

(ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی

(ث) پنجر شدن ماشین در مسیر حرکت به سمت خانه

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همه برآمدهای ممکن در یک پدیده تصادفی را فضای نمونه-

ای می‌گویند و این مجموعه را با S نشان می‌دهند.

نکته: تعداد اعضای فضای نمونه را با $n(s)$ نمایش می‌دهند.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس را بنویسید.

مثال: فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه و تعداد اعضای آن را بنویسید.

تعداد اعضای فضاهاى نمونه‌ای مهم در کتاب درسی:

۱- اگر سکه‌ای را n بار یا n سکه را یک بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با:

$$n(s) = 2^n$$

۲- اگر تاسی را n بار یا n تاس را یک بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با:

$$n(s) = 6^n$$

۳- تعداد اعضای فضای نمونه‌ای جنسیت m فرزند برابر است با:

$$n(s) = 2^m$$

۴- اگر n تاس و m سکه را با هم پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(s) = 2^m \times 6^n$$

۵- اگر بخواهیم r شی را از بین n شی انتخاب کنیم ($0 < r \leq n$) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(s) = \binom{n}{r}$$

۶- تعداد اعضای نمونه‌ای قرار گرفتن n شی یا اجسام یا اعداد کنار هم برابر است با:

$$n(s) = n!$$

مثال: فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای آزمایش‌های زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب ۳ سکه

ب) پرتاب ۲ تاس

پ) پرتاب یک تاس و یک سکه

پیشامد: هر زیر مجموعه از مجموعه فضای نمونه (s) را یک پیشامد گوئیم.

پیشامد غیر ممکن یا نشدنی (\emptyset): از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ در پس \emptyset یک پیشامد روی S است و ان را پیشامد نشدنی می‌گوییم.

پیشامد ممکن یا شدنی یا حتمی (S): هر مجموعه زیر مجموعه خودش است ($S \subseteq S$) پس S یک پیشامد فضای نمونه‌ای S است و به آن پیشامد حتمی می‌گوییم.

نکته: تعداد همه‌ی پیشامدهای یک فضای نمونه n عضوی برابر است با: 2^n

مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. تمام پیشامدهای فضای نمونه‌ای آن را بنویسید.

کار در کلاس ۱۶:

- دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
- (الف) اعداد روشده از دو تاس مانند هم باشد.
- (ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۷ باشد.
- (پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.
- (ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از ۲ تاس کمتر از ۳۷ باشد.

نکته: برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد

تذکر: برآمد به هر یک از عضوهای فضای نمونه‌ای (S) گوئیم. اما پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای (S) است یا بهتر است بگوییم، پیشامد مجموعه‌ای از برآمدهاست.

سوال: تمرین ۵ صفحه ۲۵

هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم.
الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

سوال: تمرین ۶

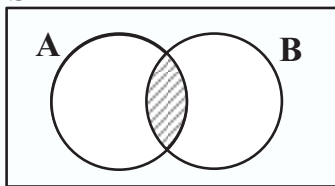
خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.
الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟
ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.
پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.
ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشد.
ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

نکته: زمانی صحبت از حداقل a شی یعنی هم شی a و هم بیشتر از a مدنظر ماست ولی اگر صحبت از حداکثر شی b باشد یعنی b شی و کمتر از b مدنظر ماست. این روند تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر برآمدی با این شرایط موجود نباشد.

اعمال روی پیشامدها!

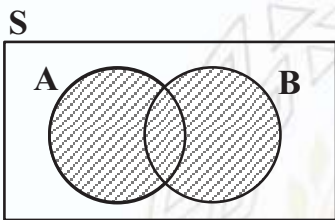
فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آنگاه:

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که، که پیشامدهای A و B همزمان رخ دهند.



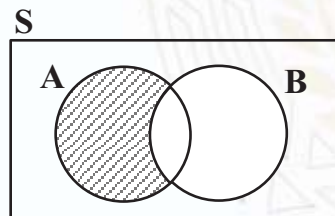
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B رخ دهند یا به عبارت دیگر حداقل یکی از پیشامد A یا B رخ دهد.



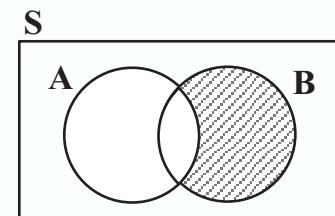
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

پ) پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. یا به عبارت دیگر فقط A رخ دهد.



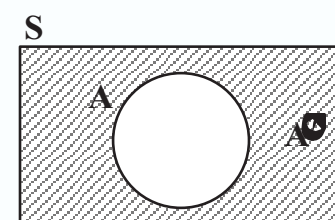
$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ت) پیشامد $B - A$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد ولی پیشامد A رخ ندهد. (فقط B رخ دهد).



$$B - A = \{x \in S \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

ث) پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

مثال: اگر $S = \{1, \dots, 20\}$ داشته باشیم A پیشامد اعداد بخش پذیر ۲ و B پیشامد اعداد

بخش پذیر ۳. آنگاه مطلوب است محاسبه:

الف) پیشامد آنکه عددی بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد.

ب) پیشامد آنکه عددی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

پ) پیشامد آنکه عددی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نیاشد.

ت) پیشامد آنکه عددی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۲ بخش پذیر نیاشد.

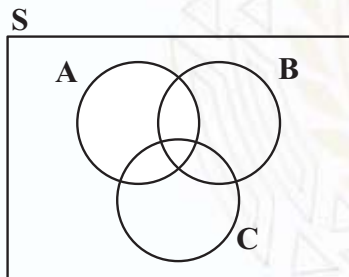
ث) پیشامد عددی که بر ۳ بخش پذیر نیاشد.

و) پیشامد عددی که بر ۲ بخش پذیر نیاشد.

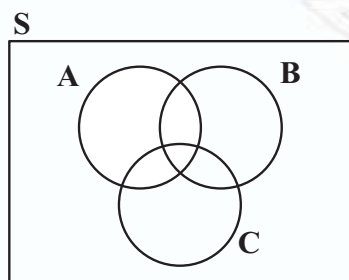
کار در کلاس صفحه ۱۸:

فرض کنید C, B, A سه پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با توجه به نمودار ون داده شده هر یک از عبارتهای زیر را هاشور بزنید سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

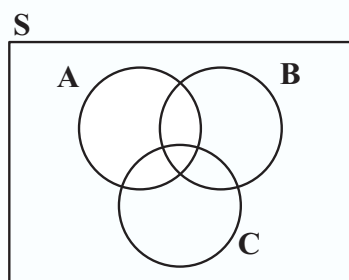
الف) فقط پیشامد A و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



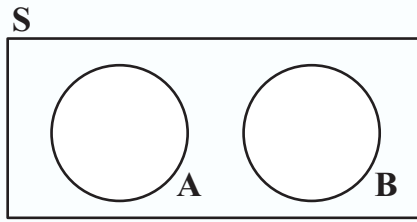
ب) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



پ) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



پیشامد ناسازگار: هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند. به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت دو پیشامد A و B ناسازگارند.



مثال: در پرتاب تاس داریم:

الف) پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن

ب) پیشامد اعداد ظاهر شده بیشتر از ۴ و اعداد ظاهر شده کمتر از ۴

مثال: پیشامد A و متمم آن یعنی A' ناسازگار هستند چون $A \cap A' = \emptyset$

تعداد اعضای اشتراک اجتماع پیشامدها:

$$۱) n(A') = n(S) - n(A)$$

$$۲) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۳) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$۴) n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(S) - n(A \cap B)$$

$$۵) n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(S) - n(A \cup B)$$

نکته: در تمام روابط بالا اگر A و B ناسازگار باشند داریم: $n(A \cap B) = \emptyset$

مثال: خانوادهای دارای ۴ فرزند است. اگر A پیشامد آن باشد که دو فرزند اول خانواده دختر باشد و B پیشامد آنکه فرزند سوم پسر باشد، پیشامد $A' \cup B'$ چند عضو دارد؟

کار در کلاس صفحه ۱۸:

خانوادهای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

(ب) پیشامد B اینکه دو فرزند پسر یک فرزند دختر باشند.

(ج) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند دختر باشد.

(د) آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

(و) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

(هـ) آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

احتمال: اگر $S \neq \emptyset$ باشد و یک فضای نمونه متناهی برای یک پدیده تصادفی باشد. $n(S)$ تعداد برآمدها برای وقوع باشد و A پیشامدی در S باشد که $n(A)$ تعداد اعضای پیشامد A باشد، احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن برابر است با:

احتمال وقوع یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد پیشامد}}{\text{تعداد فضای نمونه‌ای}}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه:

- (الف) عدد رو شده بزرگتر از ۵ باشد.
- (ب) عدد رو شده مضربی از ۳ باشد.
- (پ) عدد رو شده مرکب باشد.
- (ت) عدد رو شده اول باشد.
- (ث) عدد رو شده اول و زوج باشد.
- (هـ) عدد رو شده اول و فرد باشد.
- (و) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد.
- (ی) عدد رو شده کوچکتر از ۷ باشد.
- (د) عدد رو شده اول باشد ولی فرد نباشد.
- (ن) عدد رو شده اول نباشد.

نکته: 

$0 \leq P(A) \leq 1$

↙ ↘

پیشامد غیر ممکن احتمال پیشامد حتمی

نکته: برای هر پیشامد A و B دلخواه داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نکته: اگر A و B پیشامدی ناسازگار باشند. چون $A \cap B = \emptyset$ پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته: اگر A و B در پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

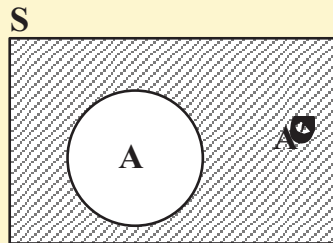
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A)$$

تذکر: $A \cap B = \emptyset$ (A و B ناسازگار باشند) ←

نکته: اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A باشد و در فضای نمونه S باشد، در این صورت احتمال

واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ که این در پیشامد A و A' را متمم هم گوییم.



$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

نکته: بعضی اوقات بجای محاسبه احتمال $P(A)$ ، می‌توانیم $P(A')$ را محاسبه کرده و طبق نکته

بالا $P(A)$ را محاسبه کنیم (چون ممکن است بدست آوردن $P(A)$ زمان‌بر و مشکل باشد)

سوال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد:

(الف) احتمال اینکه ۳ پیراهن از یک رنگ باشند را محاسبه کند.

(ب) احتمال اینکه رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد را محاسبه کنید.

(پ) احتمال اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند را محاسبه کنید.

(ت) احتمال اینکه رنگ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

(ث) احتمال اینکه حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند را محاسبه کنید.

سوال: یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :
 الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.
 ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه متولد شده باشند.
 پ) تولد هیچ دوتای آنها در یک ماه نباشد.

سوال: درون کیسه‌ای ۵ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سبز قرار دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل ۲ مهره هم‌رنگ باشند را بدست آورید.

سوال: با چه احتمالی از ۴ فرزند یک خانواده، فقط یکی از آن‌ها پسر است؟

نکته: تعداد اعضای پیشامد r تعداد از n تعداد فرزند دختر یا پسر برابر است با: $\binom{n}{r}$

سوال امتحانات نهایی

- ۱- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است:
 الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.
 ب) احتمال آن که هر سه فرزند از یک جنس باشند را به دست آورید.
 (دی ۹۷)
-
- ۲- از جعبه‌ای که شامل ۸ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۲ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم.
 الف) هر دو سیب سالم باشند.
 ب) یک سیب سالم و یک سیب لکه‌دار.
 مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
 (خرداد ۹۸)
-
- ۳- تاسی را پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
 الف) پیشامد اینکه عدد رول شده زوج و اول باشد؟
 ب) پیشامد اینکه عدد رول شده اول باشد ولی زوج نباشد؟
 (خرداد ۹۸)
-
- ۴- از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم.
 مطلوب است محاسبه احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.
 (خرداد ۹۸)
-
- ۵- خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است:
 الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده بنویسید.
 ب) احتمال آنکه هر دو فرزند از یک جنس باشد را بدست آورید.
 پ) احتمال اینکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را بدست آورید.
 (خرداد ۹۸)
-
- ۶- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
 الف) پیشامد اینکه مجموع دو عدد رول شده برابر چهار باشد.
 ب) پیشامد اینکه عدد رول شده در هر دو تاس یکسان باشد ولی زوج نباشد.
 (دی ۹۸)

۷- از جعبه‌ای که شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌داریم، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد. (دی ۹۸)

۸- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. (دی ۹۸)
 الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.
 ب) احتمال آنکه سکه پشت و تاس زوج بیاید را بدست آورید.
 پ) احتمال آن که عدد ظاهر شده برای تاس حداکثر ۳ باشد را بدست آورید.

۹- خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (خرداد ۹۹)
 الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.
 ب) مطلوب است احتمال آنکه هر سه فرزند از یک جنسیت نباشد.

۱۰- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه تاس حداکثر ۳ یا سکه رو بیاید. (خرداد ۹۹)

۱۱- روی محیط دایره ۵ نقطه وجود دارد. مشخص کنید با این ۵ نقطه چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد. (خرداد ۹۹)

درس سوم: چرخه آمار و احتمال در حل مسائل

گام های چرخه آمار در مسائل:

گام اول «بیان مسأله»: طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام برای رسیدن به پاسخ است.

لغات کلیدی: فهم مسأله - تعریف دقیق مسأله

گام دوم «طرح و برنامه ریزی»: اندازه گیری یا سنجش اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

در واقع سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.
لغات کلیدی: شیوه اندازه گیری - روش نمونه گیری - روش کار

نکته: در این گام حضور افراد متخصص در تیم هدایت کننده پژوهش مهم است.

نکته: در این گام موارد زیر تصمیم گیری می شوند:

- الف) چگونگی اندازه گیری متغیرهای مورد نظر
- ب) چگونگی نمونه گیری
- پ) شیوه حل داده ها

گام سوم «گردآوری و پاکسازی داده ها»: تصحیح اشتباه های احتمالی در مرحله اندازه گیری،

گردآوری و یا ثبت داده ها (بخصوص در نرم افزارها)
لغات کلیدی: گردآوری - سازماندهی - پاک سازی

گام چهارم «تحلیل داده ها»: گزارش شاخص ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری در این گام صورت می گیرد.

لغات کلیدی: مرتب کردن داده ها - معیارها - نمودارها و جدولها

گام پنجم «بحث و نتیجه گیری»: با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا می کنیم.

لغات کلیدی: نتیجه گیری - نقد و بررسی - ایده های جدید

نکته: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم.

هرچه اندازه جامعه بزرگ‌تری باشد، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم داریم.

نکته: هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

نکته: در برخی از نرم‌افزارها به دلیل اینکه نمی‌توانند داده غیر عددی (مانند جنس، رنگ و ...) را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنند.

شاخص مرکزی:

میانۀ Q_2 : اگر m داده را از کوچک به بزرگ یا برعکس مرتیب کنیم، برای بدست آوردن میانۀ دو حالت بوجود می‌آید:

الف) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد (m فرد باشد) میانۀ برابر است با $\frac{m+1}{2}$.

$$Q_2 = \frac{m+1}{2}$$

ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد (m زوج باشد) میانۀ برابر است با میانگین دو داده وسط یعنی $\frac{m}{2}$ و

$$\frac{m+2}{2}$$

مثال: میانۀ داده‌های مقابل را بدست آورید.

الف) ۳, ۷, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۱۶, ۸, ۱۱, ۲

ب) ۱, ۳, ۱, ۹, ۴, ۵, ۳۷, ۸, ۱, ۱۲, ۱۸, ۲۰, ۲۱, ۲۰, ۳۰, ۳۴, ۶, ۵۷, ۵۸

میانگین: اگر x_1, x_2, \dots, x_n داده‌های موردنظر ما باشند، میانگین را با \bar{x} نمایش داده و برابر است

با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

خواص میانگین:

- ۱) اگر داده‌ها را بر عددی ضرب یا تقسیم کنیم، میانگین هم در همان عدد ضرب یا تقسیم می‌شود.
- ۲) اگر داده‌ها را با عددی جمع یا تفریق کنیم، میانگین هم با همان عدد جمع یا تفریق می‌شود.
- ۳) اگر فاصله داده‌ها یکسان باشد، میانگین داده‌ها با میانگین داده اول و آخر برابر است.

میانگین وزن دار: اگر همه داده‌ها یا بعضی از آن‌ها دارای تکرار باشند، برای راحتی کار هر داده را در تعداد دفعاتی که تکرار شده ضرب می‌کنیم، پس جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم و هر مجموع داده‌ها (فراوانی) تقسیم می‌کنیم.

به عبارت دیگر x_1, x_2, x_n داده‌ها و به ترتیب f_1, f_2, \dots, f_n فراوانی آن‌ها باشند، میانگین به صورت زیر است:

داده‌ها	x_1	x_2	x_n
فراوانی	f_1	f_2	f_n

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال: میانگین داده‌های زیر را بدست آورید.

۱) ۲, ۲, ۲, ۸, ۸, ۸, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۲۰

۲)

داده	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۲	۳	۲	۲	۱

نکته: اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانگین و میانه شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها نمی‌باشد و از شاخص‌های پراکندگی استفاده می‌کنیم.

دامنه تغییرات (R): اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده در بین داده‌ها را گویند.

داده داده
 $E = \max - \min$

چارک‌ها:

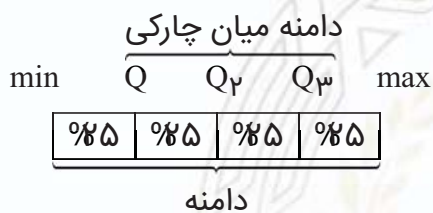
چارک‌ها داده‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. برای بدست آوردن چارک‌ها ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ یا برعکس مرتب می‌کنیم.

چارک دوم (Q_2): همان میانه است.

چارک اول (Q_1): میانه داده‌های کوچکتر از میانه (Q_2) است.

چارک سوم (Q_3): میانه داده‌های بزرگتر از میانه (Q_2) است.

دامنه میان چارکی (IQR): تفاضل چارک اول از سوم را گویند. ($IQR = Q_3 - Q_1$)



واریانس: میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌هاست. برای محاسبه واریانس داده‌های x_1, \dots, x_n از روش زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

انحراف معیار (σ یا SD): ریشه مثبت واریانس است و با σ یا SD نمایش داده می‌شود.


مثال: میانگین، میانه و انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰

نکته: 

- (۱) اگر داده‌ها برابر باشند واریانس و انحراف معیار صفر است.
- (۲) اگر مقداری به داده‌ها اضافه یا کم شود، واریانس و انحراف معیار تغییر نخواهد کرد، زیرا در نحوه پراکندگی داده‌ها تفاوتی ایجاد نشده و داده‌ها به اندازه مشخصی جابجا شده‌اند.
- (۳) اگر داده‌ها در مقدار مشخصی مثل a ضرب شوند، انحراف معیار $|a|$ برابر و واریانس a^2 برابر خواهد شد.
- (۴) هرچه انحراف معیار کوچکتر باشد، یعنی مقدار داده‌ها نزدیک به میانگین هستند.
- (۵) هرچه انحراف معیار بزرگتر باشد، یعنی داده‌ها به شکل پراکنده‌تری حول میانگین توزیع شده‌اند.

مثال:  واریانس داده‌های $x, x, x, x+4, x+4$ کدام است؟


مثال:  اگر واریانس داده‌های $a-1, b+6, c, 12$ برابر صفر باشد، حاصل $c+a+b$ کدام است؟

نکته: 

اگر جدول توزیع فراوانی داشته باشیم واریانس به صورت زیر بدست می‌آید.

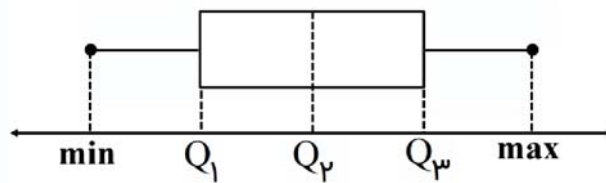
x_i	x_1	x_2	x_n
f_i	f_1	f_2	f_n

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال:  واریانس داده‌های جدول مقابل را بدست آورید.

داده	۱	۳	۵	۷
فراوانی	۲	۴	۱	۳

نمودار جعبه‌ای: نمودار جعبه‌ای مقدار پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهد، یعنی اگر داده دور افتاده‌ای داشته باشیم از نمودار جعبه‌ای استفاده می‌کنیم.



نکته:

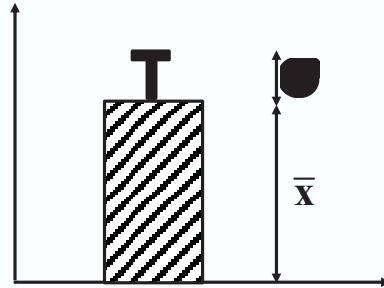
- ۱) میانه (Q_2) همیشه در وسط جعبه قرار ندارد. اگر در سمت راست جعبه و نزدیک Q_3 (سمت چپ جعبه و نزدیک Q_1) باشد داده‌ها بین Q_2 و Q_3 متراکم‌ترند (بین Q_1 و Q_2 متراکم‌ترند) یا پراکندگی داده بین Q_1 و Q_2 و Q_2 و Q_3 بیشتر است.
- ۲) در مورد دنباله سمت راست و چپ هم همین اتفاق موجود است یعنی هرچه دنباله کشیده‌تر باشد، داده‌ها پراکنده‌اند و هرچه دنباله کوتاه‌تر باشد، داده‌ها به هم نزدیک یا متراکم هستند.
- ۳) برای بدست آوردن پراکندگی و تراکم در نمودار جعبه‌ای کافی است اختلاف چارک‌ها از هم و از min و max را بدست آوریم برای اینکه بهتر متوجه بشویم به مثال زیر توجه کنید.

مثال: برای داده‌های زیر، یک نمودار جعبه‌ای رسم کنید، سپس پراکندگی ۴ قسمت این نمودار را با هم مقایسه کنید.

۷, ۲۰, ۲۱, ۸, ۵, ۱۰, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۷, ۱۶, ۱۳, ۲۵, ۱۸, ۲۰

تذکر مهم: برای توصیف داده‌های کمی، باید هم از شاخص‌های مرکزی و هم پراکندگی استفاده کنیم. اگر داده دور افتاده نداشته باشیم، بهتر است از \bar{x} و σ به عنوان شاخص‌های مرکزی و پراکندگی استفاده کنیم ولی اگر داده دور افتاده داشته باشیم باید از میانه و IQR استفاده کنیم.

نمودار کاربردی آمار: از این نمودار زمانی استفاده می‌کنیم که داده دور افتاده نداشته باشیم، به همین خاطر میانگین و انحراف معیار شاخص مناسبی برای توصیف این گونه داده‌ها هستند. نمودار موردنظر از یک قسمت مستطیل شکل و یک میله تشکیل شده است که در آن ارتفاع مستطیل میانگین و ارتفاع میله انحراف معیار می‌باشد.



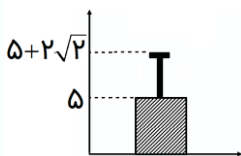
نکته: هرچه قدر میله کوتاه‌تر باشد پراکندگی داده‌ها کمتر است و هرچه قدر میله بلندتر باشد داده‌ها پراکنده‌تر هستند.

مثال: داده‌های زیر موجود هستند ابتدا میانگین و انحراف معیار را بدست آورده و سپس نمودار کاربردی را رسم کنید.

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰

مثال: اگر نمودار کاربردی آمار داده‌های زیر به صورت زیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

۱, a , ۵, ۹, ۷



سوال امتحان نهایی:

۱- راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم گام چرخه آمار است. (دی ۹۷)

۲- الف) اگر در داده‌ها داده دور افتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی مناسب است.
ب) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم. گام در چرخه آمار است. (خرداد ۹۸)

۳- برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش همراه باشد. (شهریور ۹۸)

۴- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) طرح و برنامه‌ریزی، دومین گام برای یافتن داده‌هاست.
ب) هرچه جامعه بزرگ‌تر شود، اندازه نمونه ثابت می‌ماند. (شهریور ۹۸)

۵- در نمونه‌گیری زیر میزان مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (برحسب متر مکعب) به دست آمده است.
میان، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید.

۱۳۰, ۶۵, ۷۵, ۱۲۰, ۵۰, ۳۰, ۷۰, ۱۱۰, ۴۰

(شهریور ۹۸)

۶- الف) اندازه‌گیری یا سنجش گام برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موردنظر است.
ب) تعداد اعضای جامعه را جامعه می‌نامند. (دی ۹۸)

۷- گردآوری و پاکسازی داده‌ها، گام در چرخه آمار است. (خرداد ۹۹)

۸- با توجه به چرخه آماری، نام هرگام را بنویسید. (خرداد ۹۹)
 الف) راهی برای رسیدن به پاسخ مساله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
 ب) نتایج بدست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

۹- الف) داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف داده‌ها از آن بیشتر هستند.
 ب) بیان مساله و فهم آن گام در چرخه آمار است.
 ت) هرچه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع، به اندازه نمونه نیاز داریم. (دی ۹۹)

۱۰- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (دی ۹۹)
 الف) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزترند.
 ب) برای توصیف داده‌ای کیفی گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد.
 پ) دامنه تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز است.
 ت) وقتی داده دور افتاده نداریم، میانه شاخص مناسب‌تری از میانگین برای توصیف داده‌ها می‌باشد.

۱۱- در موارد زیر، نام گام را بنویسید. (دی ۹۹)
 الف) برگزاری آزمون‌های پیشرفت تحصیلی در مدارس و بررسی نمره دانش‌آموزان
 ب) بررسی عامل پایین بودن سرانه مطالعه دانش‌آموزان کشور در مقطع متوسطه دوم.

۱۲- الف) هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم، میانگین و شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند.
 ب) مطمئن‌ترین نمودار برای تغییر نمودار جعبه‌ای است. (شهریور ۹۹)

(شهریور ۹۹)

۱۳- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) طرح و برنامه‌ریزی دومین گام در چرخه آمار است.

ب) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد.

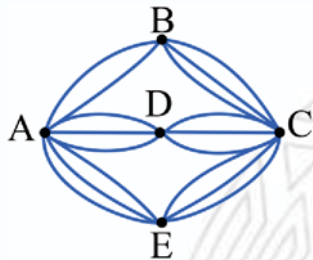


تست‌ها:

۱- یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با دو حجم موتور و ۳ نوع مختلف داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

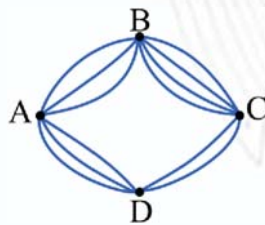
- (۱) ۴۲
- (۲) ۲۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۰

۲- بین شهر A، B، C، D و E مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A و از طریق شهر D به شهر C رفت و از طریق یک شهر دیگر بازگشت؟



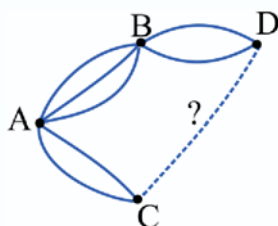
- (۱) ۱۸۰
- (۲) ۱۵۰
- (۳) ۱۲۰
- (۴) ۹۰

۳- در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و سپس به شهر A برگشت، طوری که از هر جاده حداکثر یک بار عبور کنیم؟



- (۱) ۱۵۶
- (۲) ۲۲۸
- (۳) ۳۰۶
- (۴) ۴۲۸

۴- می‌خواهیم از شهر A به شهر D برویم (با عبور از B یا C)، سپس با عبور از یک شهر B یا C به شهر A برگردیم به طوری که کل مسیر رفت با کل مسیر برگشت متمایز باشد. اگر این کار به ۳۲ حالت امکان‌پذیر باشد، بین شهر C و شهر D چند راه وجود دارد؟



- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۵- اگر $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 8$ باشد، حاصل $\frac{n!}{4!}$ کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۳۰ (۳)

۴۰ (۴)

۶- حاصل عبارت $\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!}$ کدام است؟

$2n$ (۱)

$2n-1$ (۲)

$2n+1$ (۳)

$2n+2$ (۴)

۷- مقدار n در عبارت $\frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{2}{3}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۸- اگر $n! = 6! \times 7!$ باشد، حاصل $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$ کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

۹- معادله $(x^2 - 4)! = 1$ چند ریشه دارد؟

۱ صفر (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۰- مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - x) = 1$ کدام است؟

۲ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۴)

۱۱- تعداد ریشه‌های معادله $(2x^2 - x) = 1$ را بدست آورید.

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۲- یک دانش‌آموز در کنکور سراسری انسانی به ۲۸۰ سوال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخ‌گویی به همه سوالات الزامی نیست)

4^{280} (۱)

280^4 (۲)

5^{280} (۳)

280^5 (۴)

۱۳- با حروف کلمه « DANESH » چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر

سراسری ۹۷

رمز باشد؟

۲۴۰ (۱)

۲۵۰ (۲)

۲۶۰ (۳)

۲۷۰ (۴)

۱۴- به چند طریق برای ۵ نفر شامل افراد x و y می‌توان برنامه‌ی سخنرانی نوشت به طوری که فرد x قبل از فرد y سخنرانی کند؟

(۱) ۶۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۵۰

۱۵- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب عربی متمایز را در یک قفسه به طوری که کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند؟

(۱) ۳۵۰

(۲) ۱۴۴

(۳) ۲۸۸

(۴) ۲۵۵

۱۶- به چند طریق ۵ نفر می‌توانند برای سوار شدن به اتوبوس در یک صف قرار گیرند به طوری که دو نفر آنها از اینکه کنار هم باشند، خودداری کنند؟

(۱) ۴۸

(۲) ۷۲

(۳) ۷۵

(۴) ۸۴

۱۷- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آنها، مجاز به رانندگی باشند؟

سراسری ۹۹

(۱) ۶۰

(۲) ۷۲

(۳) ۷۵

(۴) ۸۴

۱۸- در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمه « بیله سوار » حروف کلمه « سوار » کنار هم قرار می‌گیرند؟

(۱) ۵!

(۲) ۴!

(۳) $5! \times 4!$

(۴) $5! \times 6!$

۱۹- تعداد جایگشت‌های کلمه‌ی « SYSTEM » که در آنها بین دو حروف S دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۹۶

(۳) ۴۸

(۴) ۱۹۲

۲۰- حروف کلمه‌ی « موفقیت » را به چند طریق می‌توان جایگشت داد، به طوری که با حرف نقطه‌دار شروع به حرف نقطه‌دار نیز ختم شوند؟

(۱) ۱۹۲

(۲) ۲۱۶

(۳) ۲۴۰

(۴) ۱۶۸

۲۱- به چند طریق می‌توان حروف کلمه‌ی « MOHSEN » را کنار هم قرار داد به طوری که حرف M و N ابتدا و انتها قرار نگیرند؟

(۱) ۴۸۰

(۲) ۷۲۰

(۳) ۱۱۶

(۴) ۶۷۲

۲۲- ۳ نفر به همراه علی و حسن قرار است در یک هتل، هر کدام در یک اتاق اقامت کنند. هتل ۳ اتاق خالی کنار هم در یک طرف راهرو و دو اتاق دیگر در کنار هم در طرف دیگر راهرو دارد. به چند طریق، این افراد در اتاق‌ها می‌توانند اقامت کنند، به طوری که علی و حسن در اتاق‌های کنار هم ساکن شوند؟

دی ۱۴۰۱

۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۶ (۳)

۷۲ (۴)

۲۳- یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می‌شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

تیر ۱۴۰۲

۱۶۸ (۱)

۱۰۸ (۲)

۸۴ (۳)

۵۴ (۴)

۲۴- یک فروشگاه دارای ۵ درب است. وقتی مشتری از یک درب وارد می‌شود، باید از درب دیگری خارج شود. زهرا و نازنین به چند طریق می‌توانند از فروشگاه خرید کنند به طوری که آنها از درب ورودی و خروجی یکسانی استفاده نکرده باشند؟

خارج ۱۴۰۲

۳۲۰ (۱)

۲۶۰ (۲)

۱۶۰ (۳)

۱۳۰ (۴)

۲۵- دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به طوری که ۲ فرد مورد نظر از آنها، همواره کنار یکدیگر باشند؟

خارج ۹۹

۳۶ (۱)

۴۸ (۲)

۹۶ (۳)

۱۲۰ (۴)

۲۶- ۵ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد ۵ نفره قرار بگیرند، به طوری که علی و آرش، کنار هم نباشند؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

سراسری ۸۸

۲۷- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفر است؟

(۱) ۲۵۶

(۲) ۵۱۲

(۳) ۶۲۵

(۴) ۱۰۲۴

۲۸- با ارقام ۱, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸ چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۳۰۰

(۲) ۳۸۰

(۳) ۴۸۰

(۴) ۲۸۰

۲۹- با ارقام ۰, ۱, ۴, ۵, ۸ چند عدد ۳ رقمی مضرب ۱۰ و بزرگتر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۹

(۲) ۱۲

(۳) ۲۴

(۴) ۶

۳۰- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷ می‌توان ساخت به طوری که ارقام ۶ و ۵ در آنها به کار رفته و در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۳۶

(۲) ۱۲

(۳) ۷۲

(۴) ۲۴

۳۱- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۳ رقمی بزرگتر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

(۱) ۶۰

(۲) ۲۴

(۳) ۴۸

(۴) ۳۲

۳۲- با ارقام موجود در مجموعه $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$ چند عدد ۵ رقمی فرد، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۳۰۰

۳۳- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

سراسری ۹۸

(۱) ۷۲

(۲) ۹۶

(۳) ۱۰۸

(۴) ۱۲۰

۳۴- با ارقام ۱, ۳, ۴, ۵, ۸ را چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت که مجموع هر دو رقم متوالی آن زوج باشد؟

(۱) ۴۰

(۲) ۷۸

(۳) ۹۰

(۴) ۹۷

۳۵- تعداد اعداد طبیعی ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام غیرتکراری کدام است؟

ریاضی ۹۹

(۱) ۹۴۸

(۲) ۹۵۲

(۳) ۹۶۷

(۴) ۹۷۲

- ۳۶- با ارقام ۲, ۳, ۴, ۵, ۹ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت طوری که مجموع هر ۳ رقم کنارهم، فرد باشند؟
- (۱) ۳۸۷
- (۲) ۴۳۵
- (۳) ۳۶۳
- (۴) ۴۸۳

- ۳۷- با ارقام ۱, ۹, ۳, ۲, ۸ چند عدد ۴ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مجموع رقم یکان و دهگان بزرگتر از ۱۲ باشد؟
- (۱) ۳۶
- (۲) ۲۴
- (۳) ۶
- (۴) ۱۲

- ۳۸- به چند طریق می‌توان ۶ کارمند جدید را در اتاق‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟
- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۴
- (۳) ۶۰
- (۴) ۷۲

- ۳۹- در یک دوره بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، اگر همه‌ی تیم‌ها باهم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟
- (۱) ۵۶
- (۲) ۲۸
- (۳) ۳۸
- (۴) ۴۶

- ۴۰- می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان، یک گروه سرود ۵ نفره تشکیل دهیم. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم، به شرط آنکه حداقل ۳ نفر از آنها نوجوان باشد؟
- (۱) ۱۰۸
- (۲) ۱۲۰
- (۳) ۷۰۶
- (۴) ۶۰۶

۴۱- به چند طریق می‌توان از بین ۸ سوال یک امتحان به ۵ سوال پاسخ داد، به شرط آنکه پاسخ به ۲ سوال اول اجباری باشد؟

(۱) ۱۸

(۲) ۲۰

(۳) ۴۲

(۴) ۸۰

۴۲- در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه، ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که لااقل ۲ مهره آبی باشد؟

(۱) ۱۰۵

(۲) ۴۲

(۳) ۳۰

(۴) ۲۲

۴۳- با ۷ نقطه داده شده در شکل مقابل، چند مثلث می‌توان ساخت؟



(۱) ۲۸

(۲) ۳۰

(۳) ۳۲

(۴) ۳۴

۴۴- به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد، به طوری که مجموع آنها فرد باشد؟

(۱) ۹۰

(۲) ۱۰۰

(۳) $\binom{20}{2}$

(۴) $\binom{10}{2}$

۴۵- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه « ABADAN » کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۱۲۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۷۲۰

۴۶- از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دو به دو به دو غیر هم مدرسه باشند را انتخاب کرد؟

(۱) ۱۶۰

(۲) ۳۲۰

(۳) ۶۴۰

(۴) ۴۸۰

۴۷- چندتا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ حتماً شامل اعضای ۶ و ۷ هستند؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

۴۸- یک مجموعه n عضوی، ۵۵ زیرمجموعه $(n-2)$ عضوی دارد، n کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۴۹- تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ که شامل عدد ۸ باشد ولی شامل عدد ۴ نباشد کدام است؟

سراسری ۱۴۰۱

(۱) ۱۰

(۲) ۲۰

(۳) ۵۰

(۴) ۴۰

۵۰- در چند زیر مجموعه ۵ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، حداقل ۳ عضو زوج وجود دارد؟

سراسری ۱۴۰۱

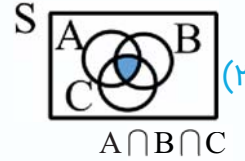
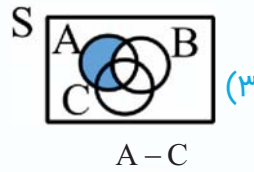
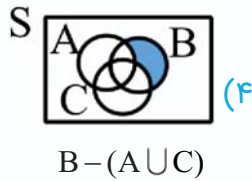
(۱) ۶۰

(۲) ۵۵

(۳) ۴۵

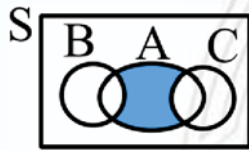
(۴) ۴۰

۵۱- در کدام مورد، نام پیشامد رنگی به درستی نوشته نشده است؟



۵۲- مجموعه A, B, C ، مطابق شکل زیر، مفروضاند. کدام مورد برای قسمت سایه خورده، نادرست است؟

سراسری ۹۹



(۱) $A \cap (B' \cap C')$

(۲) $A \cap (B \cup C)'$

(۳) $(A - C) \cap (A - B)$

(۴) $(A - C) \cup (A - B)$

۵۳- مطابق شکل زیر، فرض کنید A, B, C سه مجموعه باشند. کدام مورد برای قسمت سایه خورده، نادرست است؟

خارج ۹۹



(۱) $(A - B) \cup (A - C)$

(۲) $A \cap (B' \cup C')$

(۳) $A - (B \cap C)$

(۴) $A - (B \cup C)$

۵۴- اگر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟

داخل ۱۴۰۰

(S مجموعه مرجع است)

(۱) $A \subseteq B$

(۲) $A \subseteq B'$

(۳) $A \cup B = S$

(۴) $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$

خارج ۱۴۰۰

۵۵- اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $((A-B) \cup (B-A))'$ کدام است؟

(۱) $A \cap B$

(۲) $A \cup B$

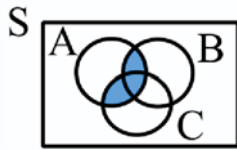
(۳) $A' \cap B'$

(۴) $A' \cup B'$

۵۶- ۳ پیشامد A, B, C مطابق شکل زیر در فضای نمونه‌ای S مفروض‌اند. کدام مورد برای قسمت

سراسری تیر ۱۴۰۲

هاشورخورده نادرست است؟



(۱) $A \cap (B \cup C)$

(۲) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(۳) $(A - (A - B)) \cup (A - (A - C))$

(۴) $(A - (A \cap B)) \cap (A \cap C)$

۵۷- هر یک از اعداد $1, 2, 3, \dots, 20$ بر روی ۲۰ گوی نوشته شده است. اگر یک گوی از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال عدد آن زوج است ولی بر ۳ بخش‌پذیر است؟

خارج ۹۷

(۱) $0/3$

(۲) $0/35$

(۳) $0/4$

(۴) $0/45$

۵۸- اعداد یک رقمی $1, 2, 3, \dots, 9$ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده‌اند. اگر یک کارت از بین آنها بیرون

سراسری ۹۷

آوریم، احتمال آنکه عدد آن بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{5}{9}$

۵۹- در جعبه‌ای ۴ مهره با شماره‌های ۱ تا ۴ موجود است. به تصادف یک مهره از جعبه بیرون می‌کشیم. شماره آن را یادداشت کرده و به جعبه برمی‌گردانیم. مهره‌ی دیگری بیرون کشیده، شماره آن را در کنار عدد قبلی قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد ۲ رقمی حاصل، مضرب ۳ است؟

(۱) $\frac{5}{16}$

(۲) $\frac{7}{16}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{3}$

۶۰- هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ... و ۹ بر روی ۱۰ کارت یکسان نوشته شده‌اند. یک کارت را به تصادف بیرون کشیده و رقم آن را یادداشت می‌کنیم و دوباره داخل کارت‌ها قرار دهیم. سپس کارت دیگری بیرون کشیده، رقم آن را سمت راست رقم قبلی می‌نویسیم. با کدام احتمال عدد حاصل ۲ رقمی و مضرب ۵ است؟

سراسری ۹۲

(۱) $\frac{0}{16}$

(۲) $\frac{0}{18}$

(۳) $\frac{0}{19}$

(۴) $\frac{0}{20}$

۶۱- از کیسه‌ای محتوی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{19}$

(۲) $\frac{7}{36}$

(۳) $\frac{7}{42}$

(۴) $\frac{3}{19}$

۶۲- هر یک از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته و به تصادف ۲ کارت بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه اعداد روی هر دو کارت زوج باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{4}{15}$

۶۳- مجموع عمومی یک شرکت ۱۲ عضو دارد. درباره‌ی یک برنامه‌ی خاص، ۶ نفر موافق، ۴ نفر مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۲ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی رأی هیچ دو نفری از آنها مثل هم نیست؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{1}{10}$

۶۴- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال پیشامد A که در آن تعداد فرزندان دختر، بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد، چقدر است؟

(۱) $\frac{7}{16}$

(۲) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{5}{16}$



۶۵- یک تاس قرمز و یک تاس سبز را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد کدام است؟

سراسری ۹۷

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{5}{18}$

۶۶- یک سکه و یک تاس باهم پرتاب می‌شود. با کدام احتمال سکه « رو » و عدد تاس « مضرب ۳ » ظاهر شود؟

سراسری ۹۸

(۱) $\frac{1}{12}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{3}$

۶۷- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف ۲ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده از یک رنگ هستند؟

سراسری ۹۸

(۱) $\frac{5}{14}$

(۲) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{4}{7}$

(۴) $\frac{9}{14}$

۶۸- دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ می‌باشد؟

خارج ۹۸

- (۱) $\frac{5}{9}$
- (۲) $\frac{7}{12}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{5}{6}$

۶۹- جعبه‌ای شامل ۸ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است. به تصادف ۳ سیب از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو سیب خارج شده سالم است؟

خارج ۹۸

- (۱) $\frac{7}{15}$
- (۲) $\frac{8}{15}$
- (۳) $\frac{24}{55}$
- (۴) $\frac{28}{55}$

۷۰- در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره یکسان قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه خارج می‌شود؟

خارج ۹۹

- (۱) $\frac{5}{14}$
- (۲) $\frac{3}{7}$
- (۳) $\frac{10}{21}$
- (۴) $\frac{11}{21}$

۷۱- در پرتاب یک تاس و ۲ سکه، احتمال اینکه لااقل یکی از سکه‌ها « پشت » و عدد رو شده در تاس « فرد » باشد، کدام است؟

خارج ۹۹

- (۱) $\frac{3}{8}$
- (۲) $\frac{5}{12}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{5}{8}$

۷۲- فردی چهار پیراهن قرمز، ۵ پیراهن آبی و ۳ پیراهن زرد دارد. او به تصادف ۳ پیراهن از بین آنها انتخاب می‌کند. با چه احتمالی ۳ پیراهن به طور همزمان آبی نیستند؟

- (۱) $\frac{۲۱}{۲۲}$
 (۲) $\frac{۱۷}{۲۲}$
 (۳) $\frac{۱۱}{۱۳}$
 (۴) $\frac{۷}{۱۳}$

۷۳- می‌خواهیم با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ اعداد ۳ رقمی بسازیم (بدون تکرار ارقام) با چه احتمالی عدد ۳ رقمی ساخته شده، مضرب ۵ نیست؟

- (۱) $\frac{۰}{۸}$
 (۲) $\frac{۰}{۵}$
 (۳) $\frac{۰}{۶}$
 (۴) $\frac{۰}{۷}$

۷۴- بر روی نیمکت چهار دانش‌آموز نشسته‌اند. با کدام احتمال لااقل ۲ نفر از آنان در یک ماه از سال متولد شده‌اند؟

خارج ۹۶

- (۱) $\frac{۴۱}{۹۶}$
 (۲) $\frac{۲۳}{۴۸}$
 (۳) $\frac{۲۵}{۴۸}$
 (۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۷۵- یک کتابخانه شامل ۵ کتاب ریاضی، ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب داستان است. ۴ کتاب به دلخواه انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این چهار کتاب، حداقل در دو موضوع مختلف هستند؟ سراسری ۱۴۰۰

- (۱) $\frac{۱۹}{۲۱}$
 (۲) $\frac{۱۳}{۱۴}$
 (۳) $\frac{۲۰}{۲۱}$
 (۴) $\frac{۴۱}{۴۲}$

۷۶- در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره‌های ۳, ۴, ۵, ..., ۱۸ را تخصیص می‌دهیم. ۳ تاس را پرتاب می‌کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می‌کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد انتخاب می‌شود. احتمال اینکه شخص شماره ۱۰ انتخاب شود کدام است؟

خارج ۱۴۰۰

(۱) $\frac{1}{10}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{1}{7}$

۷۷- پنج بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ای، به طور تصادفی در یک ردیف کنار یکدیگر می‌ایستند. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، با کدام احتمال بین دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً دو نفر حضور دارند؟

سراسری ۱۴۰۰

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{1}{10}$

(۳) $\frac{1}{15}$

(۴) $\frac{1}{20}$

۷۸- در هیئت مدیره یک شرکت ۹ نفره عضو هستند. در رأی‌گیری برای یک سرمایه‌گذاری، ۴ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. اگر ۳ نفر به طور تصادفی انتخاب شوند. احتمال اینکه نظر هیچ دو نفری مثل هم نباشد، چقدر است؟

خارج ۱۴۰۱

(۱) $\frac{2}{7}$

(۲) $\frac{1}{21}$

(۳) $\frac{1}{9}$

(۴) $\frac{1}{3}$

۷۹- در یک مسابقه دو و میدانی ۷ نفر شرکت کرده‌اند که ۳ دانش‌آموز از مدرسه A و ۴ دانش‌آموز از مدرسه B به خط پایان رسیده‌اند. با کدام احتمال، مقام اول و آخر از مدرسه A است؟

سراسری دی ۱۴۰۱

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{7}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۴) $\frac{3}{14}$

۸۰- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر باهم به مسافرت نروند، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۲

(۱) $\frac{11}{21}$

(۲) $\frac{10}{21}$

(۳) $\frac{3}{7}$

(۴) $\frac{1}{7}$

۸۱- خانواده‌ای ۵ فرزند دارد که دو فرزند آنها دو قلو هستند، قرار است والدین به همراه ۳ تا از فرزندان‌شان به یک مهمانی بروند. احتمال اینکه دو قلوها باهم به مهمانی نروند، کدام است؟

خارج ۱۴۰۲

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{7}{7}$

۸۲- کیسه‌ای دارای ۲ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره آبی است. می‌خواهیم به تصادف ۵ مهره از این کیسه خارج کنیم. احتمال اینکه مهره سفید حتماً از کیسه خارج شده باشد، ۲ مهره آبی باهم از کیسه خارج نشوند کدام است؟

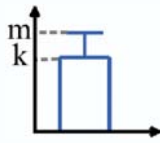
(۱) $\frac{1}{7}$

(۲) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{10}{21}$

(۴) $\frac{11}{21}$

۸۳- نمودار مقابل مربوط به داده‌های ۷, ۱۰, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۹, ۱۲, ۹ می‌باشد، حاصل $(m-k)^2$ کدام است؟



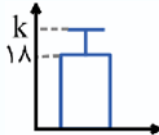
۲/۵ (۱)

۲ (۲)

۳/۵ (۳)

۴ (۴)

۸۴- اگر در نمودار زیر، مقدار واریانس نصف میانگین باشد، مقدار k کدام است؟



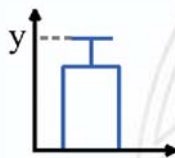
۲۱ (۱)

۲۳ (۲)

۲۵ (۳)

۲۷ (۴)

۸۵- اگر ۹۶٪ داده‌ها در بازه (۹۶۰, ۱۰۴۰) قرار گرفته باشد. مقدار y را در نمودار مقابل بدست آورید؟



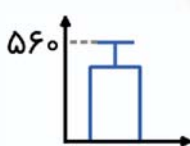
۱۰۲۰ (۱)

۱۰۰۰ (۲)

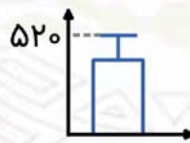
۱۰۴۰ (۳)

۹۶۰ (۴)

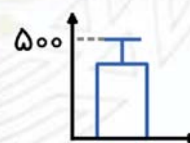
۸۶- اگر ۹۹/۹٪ داده‌ها در بازه (۴۴۰, ۵۶۰) باشد، کدام یک از نمودارهای زیر برای داده‌ها مناسب است؟



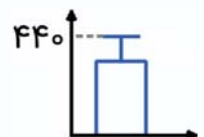
(۴)



(۳)



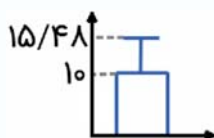
(۲)



(۱)

۸۷- با توجه به جدول مقابل، اگر داده‌ها را ۳ برابر کنیم سپس از هر داده ۳ واحد کم کنیم آنگاه نسبت

میانگین به واریانس داده‌های جدید کدام خواهد بود؟ ($\sqrt{30} \approx 5/48$)



۰/۱ (۱)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{27}{263}$ (۳)

$\frac{3}{(10+\sqrt{30})^2}$ (۴)

مدلسازی و الگو:

قرار گرفتن یک سری شکل، عدد، نماد و ... با نظم خاص در کنار هم را « الگو » گوئیم.

نکته: در واقع مدل‌ها به کمک اعداد الگوهایی را می‌سازند که به آنها « دنباله » می‌گوئیم.

مثال: چراغ راهنمایی و رانندگی در کتاب : (صفحه ۴۶)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$

$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}$$

$$R_f = \{1, 2, 3\}$$

دنباله: تابعی از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ می‌باشد که دارای جملاتی است که جمله عمومی آن را با a_n نمایش

می‌دهند.

a_1 → جمله اول

a_2 → جمله دوم

:

a_n → ضابطه دنباله یا جمله عمومی یا جمله n ام

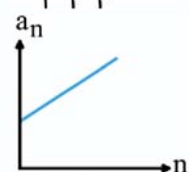
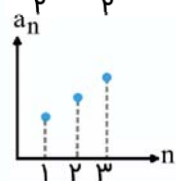
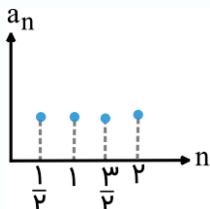
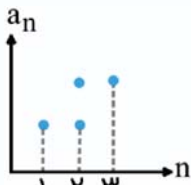
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

❖ همه‌ی دنباله‌ها دارای جمله عمومی نیستند.

رسم دنباله: با توجه به تعریف دنباله برای رسم آن محور مثبت افقی n (شماره جمله) و محور

عمودی جمله n ام یا a_n می‌باشد و چون $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد نمودار ما به صورت نقطه‌ای (گسسته) می‌باشد.

مثال: مشخص کنید کدام‌یک از نمودارهای زیر متعلق به دنباله هست یا نه؟



مثال: پنج جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $a_n = 2n + 1$

ب) $a_n = 3n^2 - 1$

پ) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ت) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ث) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

ج) $a_n = (n-2)^2$

چ) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

ح) $a_n = 3^n$

خ) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$



سوال ۱: با توجه به دنباله های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ و $d_n = n^2 - 1$ حاصل عبارتهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $a_7 - b_1 =$

ب) $c_7 - d_1 =$

پ) $b_7 + d_7 =$

سوال ۲: با توجه به دنباله های $a_n = \frac{8-n}{n+2}$ ، $b_n = 3^{n-1}$ و $c_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ حاصل $a_3 + b_7 + c_1$ را بدست آورید.

سوال ۳: با توجه به دنباله های $b_n = (-\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}-1}$ ، $c_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ و $d_n = 3n^2 + 1$ حاصل $b_7 + d_7 - c_1$ را بدست آورید.

رابطه بازگشتی: رابطه ای که ارتباط بین هر جمله و جمله قبل در دنباله را مشخص می کند.

❖ دنباله بازگشتی به حالت های زیر است :

❶ اگر به همگی جملات دنباله به غیر از جمله اول، مقدار ثابتی مثل d ($d \in \mathbb{R}$) اضافه شود، ضابطه رابطه بازگشتی به صورت زیر است : (دنباله حسابی)

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 = \text{جمله اول} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_n = a_{n-1} + d \\ a_1 = \text{جمله اول} \end{cases}$$

مثال:

الف) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

ب) $4, 1, -2, -5, \dots$

2 اگر همه جملات دنباله به غیر از جمله اول در عدد مثل $(r \in \mathbb{R}) r \neq 0$ ضرب شوند، در این صورت رابطه بازگشتی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n \\ a_1 = \text{جمله اول} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_n = ra_{n-1} \\ a_1 = \text{جمله اول} \end{cases}$$

مثال:

الف) ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ...

ب) ۳, ۱, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...

پ) $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, ۱, -۲, ...

3 دنباله‌هایی که از رابطه خاصی پیروی نمی‌کنند :

مثال:

دنباله ثابت

الف) ۱, ۱, ۱, ۱, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2} \\ a_1 = 1 \end{cases}$

ب) ۱, ۵, ۱, ۵, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$

پ) ۵, ۱, ۵, ۱, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5a_n} \\ a_1 = 5 \end{cases}$

ت) ۳, ۲, ۳, ۲, ۳, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{6}{a_n} \\ a_1 = 3 \end{cases}$

ث) ۱, -۱, -۱, ۱, ۱, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = (-1)^n a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

ج) ۱, ۱, -۱, -۱, ۱, ۱, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

چ) ۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ... $\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

سوال ۴: شش جمله‌ی اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & ; \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & ; \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های

زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

سوال ۵: جمله هشتم دنباله بازگشتی $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ را بدست آورید.

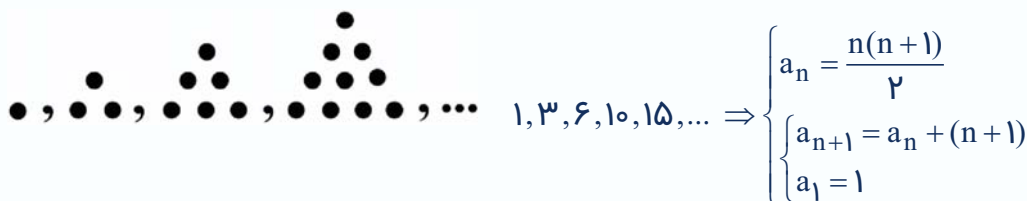
دنباله‌های مهم به همراه ضابطه دنباله و رابطه بازگشتی:

① دنباله جمع عداد سطر n ام مثلث خیام :

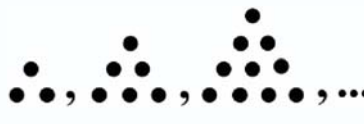


$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rightarrow \begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

② دنباله مثلثی :




حالت دیگر :




$$3, 6, 10, 15, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ a_{n+1} = a_n + (n+2) \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

3 دنباله مربعی:



$$1, 4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_n = n^2 \\ a_{n+1} = a_n + (2n+1) \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

حالت دیگر :



$$4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_n = (n+1)^2 \\ a_{n+1} = a_n + (2n+3) \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

4 دنباله فیبوناچی:

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases} \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

نکته: برای مجموع n جمله دنباله فیبوناچی از روش زیر استفاده می‌کنیم.

$$S_n = 2(\text{جمله یکی مانده به آخر}) + (\text{جمله آخر } a_n) - 1$$

سوال 6: جمله هشتم دنباله مقابل را بدست آورید. $1, 1, 2, 2, 4, 8, \dots \rightarrow a_8 = ?$

5 محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل : برای محاسبه جذر k به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \\ a_1 = k \end{cases}$$

سوال 7: جذر تقریبی $\sqrt{2}$ را به کمک رابطه بالا بدست آورید.

سوال ۸ : اگر $a_{3n+2} = \frac{n^2}{5n-1}$ باشد، مقدار a_5 کدام است؟

سوال ۹ : جمله عمومی دنباله $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots$ را بدست آورید.

دنباله حسابی: دنباله‌ای که به تمامی جملات به غیر از جمله اول، مقدار ثابتی اضافه می‌شود را « **دنباله حسابی** » گوئیم. و به آن مقدار ثابت اختلاف مشترک گفته و با d نمایش می‌دهیم.

نکته: برای بدست آوردن جمله عمومی دنباله حسابی و رابطه بازگشتی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

n	۱	۲	۳	...	n
a_n	a	$a+d$	$a+2d$...	$a+(n-1)d$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 = a \end{cases}$$

اختلاف مشترک
 جمله اول دنباله
 $a_n = a + (n-1)d$
 شماره جمله
 جمله عمومی دنباله

یا $a_n = dn + (a - d)$

مثال: جمله عمومی و رابطه بازگشتی دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) ۱, ۳, ۵, ۷, ...

ب) ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ...

پ) ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

ت) ۳, ۱, -۱, -۳, ...

سوال ۱۰: رابطه بازگشتی مربوط به دنباله با ضابطه $a_n = 4n - 5$ را بدست آورید.

نکته: در دنباله حسابی داریم :

۱ اگر جملات a_m و a_n از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، اختلاف مشترک از رابطه زیر بدست

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad \text{می آید:}$$

عکس در همه جا درست نیست

۲ $m + n = p + q \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q \quad (m, n, p, q \in \mathbb{N})$ قابل تعمیم

۳ $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n \quad (n, k \in \mathbb{N})$

۴ $a_{m \pm n} = a_m \pm nd \quad (n, m \in \mathbb{N})$

سوال ۱۱: اگر در دنباله حسابی داشته باشیم $a_{10} = 15$ و $a_{20} = 45$:

(الف) d را بدست آورید.

(ب) a_{25} را بدست آورید.

۵ با توجه به علامت d می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} d > 0 \Rightarrow \text{دنباله افزایشی یا صعودی} \\ d = 0 \Rightarrow \text{دنباله ثابت} \\ d < 0 \Rightarrow \text{دنباله کاهشی یا نزولی} \end{cases}$$

۶ اگر a, b, c به ترتیب ۳ جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، در این صورت واسطه حسابی به صورت زیر است :

$$a, b, c \Rightarrow \begin{cases} 2b = a + c \\ b = \frac{a + c}{2} \end{cases}$$

۷ اگر بخواهیم m واسطه بین a و b درج کنیم به طوری که جملات تشکیل یک دنباله حسابی دهند،

در این صورت، اختلاف مشترک دنباله از رابطه زیر بدست می آید : $(a < b)$

$$a, \overbrace{\quad, \quad, \quad, \dots, \quad}^{\text{عدد } m}, b \Rightarrow d = \frac{b - a}{m + 1}$$

سوال ۱۲ : بین ۱۰ و ۱۸، ۳ عدد را طوری قرار دهید که تشکیل دنباله حسابی دهند.

8 اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر یک دنباله حسابی باشند، تعداد جملات دنباله یا همان n از رابطه زیر بدست می آید :

دنباله حسابی : a_1, a_2, \dots, a_n

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \quad \text{یا} \quad \text{تعداد جمله ها} = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{اختلاف مشترک}} + 1$$

9 اگر بخواهیم n جمله ی یک دنباله حسابی را جمع کنیم، از رابطه زیر استفاده می کنیم :

روش گاوس :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\text{جمع های معروف} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_n = An^2 + Bn + C \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{d}{2} \\ B = a_1 - \frac{d}{2} \\ C = 0 \end{cases} \\ S_{n+1} - S_n = a_n \end{cases}$$

سوال ۱۳ : مجموع دنباله های حسابی زیر را بدست آورید.

الف) $-1, 4, 5, \dots, 199$

ب) $\begin{cases} a_{n+1} = 5 + a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}, S_{10} = ?$

پ) ۱, ۵, ۹, ..., ۴۰۱

ت) ۱۳, ..., ۸۱, ۸۵, ۸۹

ث) مجموع بیست جمله اول اعداد زوج

دنباله هندسی: دنباله‌ای که در آن همه جملات به غیر از جمله اول، در مقدار ثابتی ضرب می‌شوند را «**دنباله هندسی**» گوئیم و مقدار ثابت را با r یا q نمایش داده و به آن نسبت مشترک گوئیم.

نکته: برای بدست آوردن جمله عمومی و رابطه بازگشتی دنباله هندسی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

n	۱	۲	۳	...	n
a_n	ar^0	ar^1	ar^2	...	ar^{n-1}

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n \\ a_1 = a \end{cases}$$

شماره جمله \rightarrow $a_n = a + r^{n-1}$
 جمله اول دنباله \rightarrow
 جمله عمومی دنباله \rightarrow
 نسبت مشترک \rightarrow

مثال: جمله عمومی و رابطه بازگشتی دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

ب) ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ...

پ) ۹, ۳, ۱, $\frac{1}{3}$, ...

ت) -۲, -۴, -۸, -۱۶, ...

ث) $-۸, -۴, -۲, \dots$

ج) $-۲, ۴, -۸, ۱۶, \dots$

نکته: 

$$1 \quad a_n = ar^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \begin{cases} r > 1 \Rightarrow \text{دنباله افزایشی} \\ 0 < r < 1 \Rightarrow \text{دنباله کاهشی} \\ r = 1 \Rightarrow \text{دنباله ثابت} \end{cases} \text{ (جملات مثبت)} \\ a < 0 \Rightarrow \begin{cases} r > 1 \Rightarrow \text{دنباله افزایشی} \\ 0 < r < 1 \Rightarrow \text{دنباله کاهشی} \\ r = 1 \Rightarrow \text{دنباله ثابت} \end{cases} \text{ (جملات منفی)} \end{cases}$$

حالت‌های دیگر بررسی شود.

2 اگر جملات a_n, a_m دو جمله دنباله هندسی باشند، قدرنسبت به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$$

عکس در همه جا درست نیست

3 $m + n = p + q \Leftrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q \quad (m, n, p, q \in \mathbb{N})$

4 $a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2 \quad (n, k \in \mathbb{N})$

5 $a_{m \pm n} = a_m \times r^{\pm n} \quad (n, m \in \mathbb{N})$

6 اگر a, b, c به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند در این صورت میانگین یا واسطه

هندسی به صورت مقابل است : $a, b, c \rightarrow b^2 = a \times c, \quad r = \frac{c-b}{b-a}$

7 اگر بخواهیم بین a و b و m عدد را طوری قرار دهیم که جملات تشکیل یک دنباله هندسی دهند،

نسبت مشترک از رابطه زیر بدست می‌آید : $(a < b)$

$$a, \overbrace{\quad, \quad, \quad, \dots, \quad}^{\text{عدد } m}, b \Rightarrow r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

سوال ۱۴: اگر $x, x+۲, x+۳$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بدست آورید.

سوال ۱۵ : بین دو عدد ۳ و ۴۸، ۳ عدد را طوری قرار دهید که تشکیل دنباله هندسی دهند.

سوال ۱۶ : جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله را بدست آورید.

8 اگر a_1, a_n, a_m ، ۳ جمله از دنباله حسابی که ۳ جمله متوالی دنباله هندسی باشند، داریم :

$$r = \frac{l-n}{n-m}$$

9 مجموع n جمله دنباله هندسی به صورت زیر محاسبه می شود :

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} = a \times \frac{r^n-1}{r-1}$$

(الف) اگر جملات دنباله هندسی به بی نهایت میل کند و $0 < |r| < 1$ باشد، در این صورت داریم :

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n = \frac{a}{1-r}$$

(ب) اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله a_n را نشان دهد، رابطه بازگشتی زیر را داریم :

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_{n+1} = a_1 + rS_n \end{cases}$$

سوال ۱۷ : مجموع دنباله های زیر را بدست آورید.

(الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096 =$

(ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640} =$

-۳, ۶, -۱۲, ...

سوال ۱۸ : مجموع چند جمله از دنباله مقابل ۱۰۲۳ می شود؟

سوال ۱۹ : در یک دنباله هندسی، جمله اول ۱۵۳۶ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{3}$ می باشد.

(الف) تعیین کنید که چندمین جملهی دنباله برابر با ۶ است؟

(ب) مجموع ۶ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

نیمه عمر: مدت زمانی که طول می کشد تا مقدار یک ماده به نصف مقدار اولیه خود برسد. اگر A مقدار اولیه ماده در زمان مصرف و a_n میزان ماده موجود باشد، در این صورت داریم :

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

مقدار اولیه
نیمه عمر

سوال ۲۰ : شخصی ۲۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است مصرف کرده است. پس از ۶ ساعت چند میلی گرم دارو در بدن شخص موجود است؟

نکته:

سوال ۲۱: شخصی ۱۰۰ گرم از دارویی که نیمه عمر آن ۳ ساعت است را مصرف می‌کند. بعد از گذشت ۱۵ ساعت، چند میلی‌گرم از این دارو در بدن شخص باقی‌ماند؟

$$t = \frac{\text{مدت کل زمان}}{\text{طول یک نیمه عمر}} \quad \text{یا تعداد نیمه عمرهای سپری شده}$$

سوال ۲۲: شخصی یک ماشین به قیمت ۹۶۰۰۰۰۰۰ تومان خریداری کرده است. هزینه استهلاک این ماشین هر سال معادل ۱۰ درصد ارزش سال گذشته آن است. اگر قیمت این ماشین را در سال n ام بعد از خریداری با k_n نمایش دهیم :

(الف) ضابطه k_n را بنویسید.

(ب) بیشترین کاهش ارزش ماشین در چه سالی است؟

(پ) پس از چند سال ارزش ماشین کمتر از نصف ارزش اولیه آن است؟

سوال ۲۳: کالایی به قیمت یک میلیون تومان خریداری شده است، هزینه استهلاک این کالا هر سال معادل ۲۰٪ ارزش سال پیش است. ارزش کالا در سال چهارم را با جمله عمومی محاسبه کنید.

سوال ۲۴: در یک محیط کشت باکتری، در ابتدای کار ۲۰۰۰ باکتری موجود است. اگر پس از ۲ ساعت تعداد باکتری‌ها به ۸۰۰۰ برسد، پس از ۴ ساعت از شروع کار تعداد باکتری‌ها چقدر خواهد بود؟

۱- در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع، از مدل $r(t) = Be^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر پس از ۳ دقیقه تعداد باکتری‌ها دو برابر شود. با این روند در پایان دقیقه ۱۲ تعداد آنها چند برابر تعداد شروع آزمایش می‌شود؟

تجربی ۸۹

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۶ (۴)

۲- تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه بیستم ۳۲۰۰ باشد، در دقیقه سی‌ام تعداد آن‌ها کدام است؟

تجربی ۹۲

۴۸۰۰ (۱)

۵۶۰۰ (۲)

۶۴۰۰ (۳)

۷۲۰۰ (۴)

ریشه نام و توان گویا: ابتدا یادآوری از توان انجام می‌دهیم :

توان: اگر عددی مثل a را m بار در خودش ضرب کنیم، برای خلاصه نویسی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_m = a^m$$

توان m بار پایه

محاسبات سریع :

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	$6^1 = 6$	$8^2 = 64$	$10^1 = 10$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$7^1 = 7$	$11^2 = 121$	$10^4 = 10000$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$5^5 = 3125$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$10^5 = 100000$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$4^6 = 4096$		$7^3 = 343$	$13^2 = 169$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$
$2^7 = 128$					$14^2 = 196$	$10^{-2} = 0.01$
$2^8 = 256$					$15^2 = 225$	$10^{-3} = 0.001$
$2^9 = 512$					$16^2 = 256$	$10^{-4} = 0.0001$
$2^{10} = 1024$					$17^2 = 289$	
$2^{11} = 2048$					$18^2 = 324$	
$2^{12} = 4096$					$19^2 = 361$	
					$20^2 = 400$	
					$21^2 = 441$	
					$22^2 = 484$	
					$23^2 = 529$	
					$24^2 = 576$	
					$25^2 = 625$	

۱) $a^1 = a$

چرا؟ \Rightarrow تعریف نشده $= 0^0$

۲) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

۳) $1^m = 1$

۴) $0^m = 0 \quad (n > 0)$

۵) $\begin{cases} a^m \times a^n = a^{n+m} \\ a^m \times b^m = (a \times b)^m \end{cases}$

۶) $\begin{cases} a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \end{cases}$

۷) $(a^m)^n = a^{mn}$

۸) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$

۹) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0)$

۱۰) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (a > 0)$

۱۱) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

۱۲) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

رادیکال و ریشه :

$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} = 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$

ریشه n اُم : ریشه n اُم یک عدد مانند a را b می نامیم هرگاه $b^n = a \quad (n \geq 2)$ و به صورت $\sqrt[n]{a}$ نمایش می دهیم.

ریشه n اُم $a \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n : \pm \sqrt[n]{a} & \Rightarrow \text{ریشه دوم } 25 \\ \text{فرد } n : \sqrt[n]{a} & \Rightarrow \text{ریشه سوم } 25 \end{cases} \\ a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه ندارد.} & \Rightarrow \text{ریشه چهارم } (-25) \\ \text{فرد } n : \sqrt[n]{a} & \Rightarrow \text{ریشه سوم } (-25) \end{cases} \end{cases}$

نکته:

$$1 \quad \begin{cases} a > 1 : \dots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < a^4 < a^5 < \dots \\ 0 < a < 1 : \dots < a^5 < a^4 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} a < -1 : \dots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \sqrt{a} < \dots \\ -1 < a < 0 : \dots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a < a^3 < a^5 < a^7 < a^9 < \dots \end{cases}$$

ساده کردن رادیکال‌ها: اگر عبارت زیر رادیکال جذر کامل نداشته باشد، به روش زیر عمل می‌کنیم، به این صورت که عدد داده شده را به حاصلضرب دو عدد می‌نویسیم که یکی از آنها جذر کامل داشته باشد، سپس با توجه به نکته‌ی زیر می‌توانیم رادیکال مورد نظر را به حاصلضرب دو رادیکال نوشته، سپس ساده کنیم یعنی

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \end{cases} \Rightarrow$$

چه زمانی نکته مقابل نادرست است؟

سوال ۲۵: حاصل هر یک از رادیکال‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt{8} =$	ب) $\sqrt{12} =$
پ) $\sqrt{18} =$	ت) $\sqrt{20} =$
ث) $\sqrt{24} =$	ج) $\sqrt{27} =$
چ) $\sqrt{32} =$	ح) $\sqrt{50} =$
خ) $\sqrt{75} =$	د) $\sqrt[3]{24} =$
ز) $\sqrt[3]{40} =$	ر) $\sqrt[3]{250} =$
ز) $\sqrt[3]{81} =$	

سوال ۲۶: حاصل عددی عبارات زیر را با استفاده از قوانین بدست آورید.

الف) $(\frac{2}{2})^5 \times (\frac{22}{10})^3 \times (\frac{2}{10})^4 \times (\frac{10}{22})^8 =$

ب) $2^2 \times 3^5 \times 2^3 =$

پ) $2^8 \times (\frac{1}{2})^5 \times 8^3 =$

معادلات توانی : معادلاتی که متغیر در توان آنها قرار می‌گیرد.

برای حل معادلات به این فرم کافی است پایه‌ها را یکسان کرده و از یکسان بودن پایه‌ها، برابری توان‌ها را نتیجه گرفت.

$$\square = \triangle \rightarrow \square = \triangle$$

سوال ۲۷ : در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را مشخص کنید.

الف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} \times 3^{-x} = 27$

ب) $4^{x+1} \times 8^x = 32$

پ) $(0.35)^{x+1} \times (0.35) = \left(\frac{35}{100}\right)^3$

ت) $(0.5)^{x+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 2^x$

ث) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+1} \times 9^{x+1} = \sqrt{3}$

سوال ۲۸ : اگر $3^x \times 2^y \times 5^z = 27^{\frac{1}{2}} \times 12^{\frac{1}{3}} \times 50^{\frac{1}{5}}$ باشد، حاصل $6x + 15y + 5z$ را بدست آورید.

سوال ۲۹: از دو تساوی $۲^{۲a+b} \times ۴^b = \frac{1}{۸}$ و $۳^{a-b} \times ۹^{۲b} = \frac{1}{۲۷}$ مقدار $a+b$ را محاسبه کنید.

سوال ۳۰: اگر $۲^{x-1} + ۲^x + ۲^{x+2} = ۳۵۲$ باشد، مقدار x را بدست آورید.

سوال ۳۱: حاصل هر قسمت را به صورت عددی توان دار بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x}}} =$

ب) $\sqrt{x \sqrt{x}} \times \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x}} =$

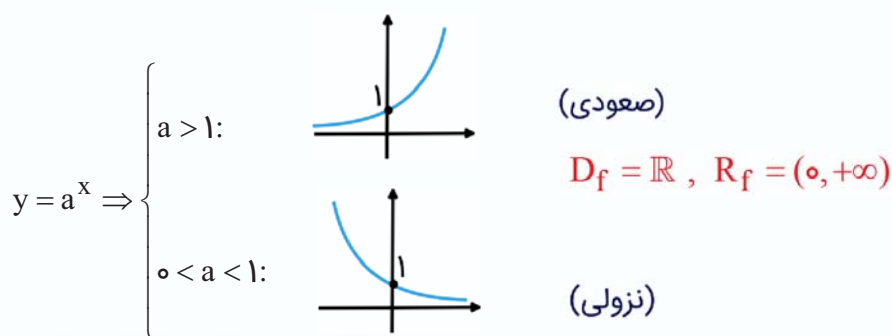
پ) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x \sqrt{x}}}} =$

ت) $\frac{\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a \sqrt{a}}} =$

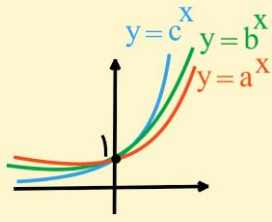
ث) $\sqrt[3]{a^n \sqrt{a^n}} =$

تابع نمایی: هر تابع که متغیر آن در توان باشد را تابع نمایی گوئیم و به صورت $y = f(x) = a^x$

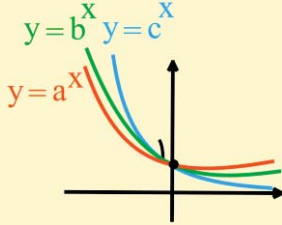
نمایش می‌دهیم:



نکته: با توجه به مقدار a در دو نوع نمودار بالا داریم :



$$c > b > a \Rightarrow \begin{cases} \text{بعد از صفر: } c^x > b^x > a^x \\ \text{قبل از صفر: } c^x < b^x < a^x \end{cases}$$



$$c < b < a \Rightarrow \begin{cases} \text{بعد از صفر: } c^x < b^x < a^x \\ \text{قبل از صفر: } c^x > b^x > a^x \end{cases}$$

سوال ۳۲: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2^x$

ب) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

پ) $y = 3^{-x}$

ت) $y = 3 \times 2^x$

ث) $y = \left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}$

ج) $y = 2^{x+1} - 2^x$



چ) $y = 2^x + 1$

ح) $y = 2^x - 2$

سوال ۳۳: نمودار $f(x) = 2^{x+1} + 3$ با خط $y = 35$ در چه طولی همدیگر را قطع می‌کنند؟

سوال ۳۴: در تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، اگر $f(m) = \frac{1}{4}$ و $f(o) = \frac{m}{2}$ باشند، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow \text{معادله رشد}$$

مقدار اولیه: c

مدت زمان: t

میزان رشد: r

مقدار نهایی: $f(t)$

$$f(t) = c(1-r)^t \Rightarrow \text{معادله زوال}$$

سوال ۳۵: قیمت کالایی امسال ۵۰۰۰ تومان است. اگر تورم سالیانه ۱۰ درصد باشد، ۵ سال دیگر

قیمت همین کالا بدون تغییر در کیفیت آن چقدر است؟

سوال ۳۶: فردی مبلغ ۲۰۰۰۰۰۰۰ تومان در یک بانک سرمایه گذاری کرد. او بعد از گذشت دو سال مقدار ۲۷۰۰۰۰۰۰ تومان از بانک دریافت می کند. نرخ سود سالانه بانک برای سپرده او چقدر بوده است؟

سوال ۳۷: در یک روستا تعداد نفرهای بیکار ۱۰۰۰ نفر است. اگر بعد از گذشت دو سال تعداد افراد بیکار ۸۰۰ نفر شده باشد، نرخ زوال بیکاری در این روستا چقدر بوده است؟

سوال ۳۸: مقدار ۵۰ گرم از ماده یک جسم موجود است که بعد از گذشت چهار سال مقدار آن ۱۰ گرم می شود. نرخ زوال در این ماده چقدر است؟

سوال ۳۹: جدول زیر معرف اندازه ی توده باکتری E.Coli بعد از t ساعت است. تعداد باکتری ها بعد از گذشت ۶ ساعت برابر چند است؟

t	۰	۰/۵	۱	۱/۵
p(t)	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۸۰۰

تست‌ها:

۱- در دنباله‌ای با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n - 1$ با فرض $a_1 = 4$ جمله چهارم دنباله کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) ۱۳

(۳) ۲۱

(۴) ۲۵

۲- مجموع بیست جمله اول دنباله با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = 3$ کدام است؟

(۱) $\frac{100}{3}$

(۲) $\frac{100}{7}$

(۳) $\frac{91}{7}$

(۴) $\frac{91}{3}$

۳- در دنباله اعداد $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله دهم کدام است؟

(۱) ۹۷۹

(۲) ۹۸۷

(۳) ۱۰۱۵

(۴) ۱۰۲۳

۴- در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n > 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

تجربی ۹۵

(۱) ۱۲۷

(۲) ۱۵۹

(۳) ۲۴۷

(۴) ۲۵۵

۵- در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟

تجربی خارج ۹۵

۳۲(۱)

۴۸(۲)

۵۶(۳)

۶۴(۴)

انسانی ۹۹

۶- جمله پنجم از دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، کدام است؟

$\frac{22}{21}$ (۱)

$\frac{32}{31}$ (۲)

$\frac{10}{11}$ (۳)

$\frac{42}{43}$ (۴)

۷- جمله هشتم از دنباله اعداد با رابط $a_1 = a_2 = 3$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n$ کدام است؟

انسانی خارج ۹۹

۲۳(۱)

۱۹(۲)

۱۷(۳)

۱۳(۴)

۸- جمله چهاردهم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با فرض $a_{16} = \frac{1597}{987}$ ، کدام است؟

انسانی ۱۴۰۰

$\frac{233}{377}$ (۱)

$\frac{377}{610}$ (۲)

$\frac{377}{233}$ (۳)

$\frac{610}{377}$ (۴)

انسانی خارج ۱۴۰۰

۹- جمله دهم دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{55}{34}$
- (۲) $\frac{144}{89}$
- (۳) $\frac{610}{377}$
- (۴) $\frac{89}{55}$



انسانی ۱۴۰۱

۱۰- جمله ۴۰۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{1+a_n} & \text{فرد } n \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) صفر



۱۱- دو جمله متوالی دنباله $a_n = \begin{cases} 100 - \frac{1}{2}n^2 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{15}n & \text{فرد } n \end{cases}$ برابر هستند. اگر مقدار این دو جمله متوالی برابر

انسانی خارج ۱۴۰۱

مقدار صحیح k باشد، مقدار $k - a_{16}$ کدام است؟

- (۱) ۲۶
- (۲) ۲۸
- (۳) ۳۰
- (۴) ۳۲



۱۲- جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ کدام است؟ ([] نماد براکت است.)

انسانی ۱۴۰۲

- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۰

۱۳- جمله ششم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ کدام است؟ ([] نماد براکت است).

انسانی ۱۴۰۲

(۱) -۳

(۲) ۳

(۳) -۱

(۴) ۱

۱۴- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱ در جمله چندم، عدد مربع کامل غیر یک نوشته می شود؟ انسانی ۹۰

(۱) ششم

(۲) هفتم

(۳) هشتم

(۴) نهم

۱۵- در دنباله اعداد $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ، جمله بیست و سوم کدام است؟ سراسری انسانی ۹۴

(۱) ۸۴۲

(۲) ۵۱۷

(۳) ۵۲۹

(۴) ۵۷۶

۱۶- در دنباله مثلثی مجموع جملات هفتم و هشتم برابر کدام است؟ سراسری ۹۵

(۱) ۴۹

(۲) ۵۶

(۳) ۶۴

(۴) ۸۱

۱۷- در دنباله فیبوناچی، دو جمله آخر ۳۷۷ و ۶۱۰ می باشند. مجموع جملات این دنباله کدام است؟ سراسری ۹۶

(۱) ۱۵۷۶

(۲) ۱۵۹۶

(۳) ۱۶۱۸

(۴) ۱۶۲۸

خارج از کشور ۹۳

۱۸- در دنباله فیبوناچی $1, 1, 2, 3, \dots, 144$ مجموع جملات کدام است؟

(۱) ۳۶۷

(۲) ۳۷۶

(۳) ۳۷۷

(۴) ۳۷۸

۱۹- در دنباله فیبوناچی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ جمله یازدهم کدام است؟ انسانی خارج ۹۸

(۱) ۸۹

(۲) ۹۲

(۳) ۹۴

(۴) ۹۶

انسانی ۹۷

۲۰- در دنباله مثلثی، مجموع هر دو جمله متوالی، کدام دنباله را تشکیل می‌دهند؟

(۱) مربعی

(۲) حسابی

(۳) هندسی

(۴) فیبوناچی

انسانی ۹۸

۲۱- در دنباله اعداد $1, 2, 4, 7, 11, \dots$ جمله دهم کدام است؟

(۱) ۳۷

(۲) ۴۲

(۳) ۴۵

(۴) ۴۶

۲۲- در دنباله a_n ، اگر $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 1}$ و $a_1 = 1$ ، مقدار عددی a_{1397} کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5569}$

(۲) $\frac{1}{5579}$

(۳) $\frac{1}{5689}$

(۴) $\frac{1}{5585}$

۲۳- مقدار $a_3 = \frac{17}{12}$ از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_1}{a_n})$ تقریبی از \sqrt{k} است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_1 = k$

انسانی ۱۴۰۲

باشد، مقدار k کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)

۲۴- در محاسبه جذر اعداد به روش منصوب به تمدن بابل اگر a_4 تقریبی برای \sqrt{k} باشد، جذر تقریبی عدد ۳ کدام است؟

$\frac{99}{56}$ (۱)

$\frac{97}{56}$ (۲)

$\frac{95}{56}$ (۳)

$\frac{93}{56}$ (۴)

۲۵- در دنباله حسابی $a_{10}^2 - a_{10}^2 = 350$ اگر $a_{15} = 1/75$ ، اختلاف مشترک کدام است؟

-۲ (۱)

۱ (۲)

-۱ (۳)

۲ (۴)

۲۶- در دنباله حسابی $a_7 + a_{13} = 14$ ، مقدار $a_5 + 2a_{10} + a_{15}$ کدام است؟

۱۱ (۱)

۱۴ (۲)

۲۱ (۳)

۲۸ (۴)

۲۷- در یک دنباله حسابی $a_1 + a_2 + a_3 = 30$ ، مقدار a_5 کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۲۸- در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است. جمله هفتم کدام

خارج از کشور ۹۹

است؟

(۱) ۲۲

(۲) ۲۴

(۳) ۲۵

(۴) ۲۹

۲۹- در یک دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳ و ۳ جمله بعدی ۳۹ است. جمله چهارم کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۳۰- اگر جمله اول و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جمله دهم این دنباله کدام است؟

انسانی ۱۴۰۱

(۱) ۲۱

(۲) ۲۲

(۳) ۲۳

(۴) ۲۴

۳۱- جمله پنجم یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ناصفر، واسطه هندسی بین جملات سوم و نهم آن

خارج ۱۴۰۰

دنباله است. اگر جمله پنجم دنباله ۷ باشد، جمله صد و یکم دنباله کدام است؟

(۱) ۲۰۰

(۲) ۱۷۵

(۳) ۱۵۰

(۴) ۱۲۵

۳۲- در دنباله حسابی $125, x, 35, y, \dots$ عدد y کدام است؟

(۱) -10

(۲) -5

(۳) 0

(۴) 5

۳۳- بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد طوری قرار داده‌ایم که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی دهند. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۷

(۳) $14/5$

(۴) $15/5$

۳۴- در دنباله مقابل، جمله سوم کدام است؟ (دنباله حسابی است) $10, \dots, \dots, \dots, \dots, 46$

(۱) ۱۸

(۲) ۲۶

(۳) ۲۸

(۴) ۳۷

۳۵- عددهای $1-5x, 3x+4, 3x+3, 2x+3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. اختلاف مشترک این دنباله کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۷

(۳) ۳

(۴) ۶

۳۶- در یک دنباله حسابی، مجموع ۷ جمله اول مساوی ۱۸۲ و جمله هشتم برابر ۵۴ می‌باشد. جمله اول کدام است؟

خارج ۹۳

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۶

۳۷- در یک دنباله حسابی، اگر $S_n = (2k - 3)n^2 + 7n$ باشد، با فرض $d = 4$ مقدار k کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{2}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) $\frac{5}{2}$

۳۷- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی و S_n به صورت $3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ جمله چهارم S_n کدام است؟

کدام است؟

(۱) $\frac{7}{2}$

(۲) ۴

(۳) $\frac{9}{2}$

(۴) ۵

۳۸- در بیست جمله اول از یک دنباله عددی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است، جمله اول کدام است؟

خارج از کشور تجربی ۸۵

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۳۹- در یک دنباله عددی، مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن ۱۰ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

تجربی داخل ۸۰

(۱) -۵

(۲) -۴

(۳) -۳

(۴) -۲

انسانی ۹۸

۴۰- مجموع ۳۰ عدد طبیعی فرد متوالی، با کوچکترین عدد ۵۱، کدام است؟

۱۸۰۰(۱)

۲۱۰۰(۲)

۲۲۵۰(۳)

۲۴۰۰(۴)

۴۱- مجموع ۳۵ عدد طبیعی بخش پذیر بر ۳، که بزرگترین آنها ۱۵۰ باشد، کدام است؟ انسانی خارج ۹۸

۳۴۲۰(۱)

۳۴۶۵(۲)

۳۴۷۵(۳)

۳۵۰۰(۴)

۴۲- در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جملات

انسانی ۹۹

متوالی کدام است؟

۱/۵(۱)

۲/۵(۲)

۲(۳)

۳(۴)

۴۳- اعداد $1, x, y, \frac{5}{p}, \dots$ چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند، مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام

ریاضی خارج ۸۶

است؟

۵۷(۱)

۶۲/۵(۲)

۶۷/۵(۳)

۶۸(۴)

۴۴- مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی شروع از ۲۳ و ختم به ۶۱ کدام است؟ سراسری انسانی ۹۷

۷۸۰(۱)

۸۴۰(۲)

۸۵۰(۳)

۸۷۰(۴)

۴۵- مجموع n جمله اول یک دنباله عددی، به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع

ریاضی خارج ۹۰

جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هفدهم، کدام است؟

۹ (۱)

$\frac{۲۹}{۳}$ (۲)

$\frac{۴۹}{۳}$ (۳)

۱۸ (۴)

۴۶- در یک دنباله عددی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله،

تجربی ۸۹

کدام است؟

۹۰ (۱)

۱۰۵ (۲)

۱۲۰ (۳)

۱۳۵ (۴)

تجربی ۸۵

۴۷- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

۸۱۶ (۱)

۸۶۷ (۲)

۸۵۲ (۳)

۸۸۴ (۴)

۴۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آنگاه به

فیزیک ۸۳

مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟

۱۶۰ (۱)

۱۷۰ (۲)

۱۸۰ (۳)

۱۹۰ (۴)

۴۹- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند

برابر جمله اول است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۰- در یک دنباله عددی، مجموع بیست جمله اول ۳ برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است. اگر جمله

ریاضی ۹۰

سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(۱) ۳۲

(۲) ۳۴

(۳) ۳۶

(۴) ۳۸

۵۱- در یک دنباله عددی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر

است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱

۵۲- جمله ششم دنباله‌ای، رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ با شرط $a_1 = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{64}$

(۲) $\frac{1}{256}$

(۳) $\frac{1}{512}$

(۴) $\frac{1}{1024}$

۵۳- اگر رابطه بازگشتی مربوط به یک دنباله به شکل $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 4$ و جمله پنجم برابر ۸ باشد، جمله سوم

کدام است؟

(۱) 2^7

(۲) 2^8

(۳) 2^9

(۴) 2^{10}

۵۴- بین ۵ و ۴۰۵ می‌خواهیم ۳ واسطه هندسی مثبت درج کنیم. نسبت مشترک دنباله تشکیل شده

چند است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۵۵- پنج عدد مثبت $\frac{5}{3}, a, b, c, \frac{5}{12}$ به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی هستند. مقدار b کدام

است؟

(۱) $\frac{7}{3}$

(۲) $\frac{6}{5}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{3}{7}$

۵۶- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و

به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد، کدام است؟

(۱) ۱۴۵۶

(۲) ۱۴۶۸

(۳) ۱۵۴۶

(۴) ۱۶۵۴

سراسری ۸۱

انسانی ۹۸

۵۷- در یک دنباله هندسی، جمله اول ۲۲۴ با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ ، جمله n ام آن ۷ می باشد. مجموع جملات

انسانی خارج ۹۸

این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد، کدام است؟

۳۶۹ (۱)

۴۲۰ (۲)

۴۴۱ (۳)

۴۵۸ (۴)

انسانی ۹۹

۵۸- مجموع هشت جمله اول دنباله هندسی ...، ۱۶، ۳۲، ۶۴ کدام است؟

۱۲۸/۵ (۱)

۱۲۸ (۲)

۱۲۷/۵ (۳)

۱۲۷ (۴)

۵۹- جملات دوم و پنجم یک دنباله هندسی، به ترتیب $\frac{1}{4}$ و ۴ هستند، مجموع هشت جمله اول دنباله

انسانی خارج ۹۹

کدام است؟

۶۳/۵ (۱)

۶۳/۷۵ (۲)

۶۴/۵ (۳)

۶۷/۷۵ (۴)

۶۰- اگر $x - \frac{3}{4}, y, x, z, 4x$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار $|x| + |y| + |z|$ کدام است؟

انسانی ۱۴۰۰

۱ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)

۶۱- اگر $y, x-1, x, x+2, z$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۰

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۱۶ (۴)

۶۲- در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

انسانی ۱۴۰۱

۱) ۸۹۱

۲) ۹۷۲

۳) ۱۰۵۶

۴) ۱۲۹۶



انسانی خارج ۱۴۰۱

۶۳- در دنباله هندسی $\frac{1}{3}, d, e, \dots$ ، $a, b, c, \frac{4}{3}$ مقدار e کدام است؟ ($d > 0$)

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

۴) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$



۶۴- اگر ریشه دوم جملات دوم، نهم و شانزدهم از یک دنباله حسابی، ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، نسبت مشترک دنباله هندسی کدام است؟

انسانی ۱۴۰۲

۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲



۶۵- اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $[\frac{x}{z}]$ کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۲

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۹

۴) ۲۵

۶۶- جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آنها برابر ۲۱ است.

اگر $x+۶, y+۴, z+۲$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $[\frac{xy}{z}]$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۶۷- اگر $x+۸, x+۲, ۸$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صعودی با جملات مثبت باشند،

نسبت مشترک دنباله کدام است ؟

(۱) $\frac{۴}{۳}$

(۲) $\frac{۵}{۳}$

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۵}{۲}$

۶۸- اگر جملات سوم و پنجم و پانزدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی دنباله هندسی با جمله اول

$\frac{۵}{۶}$ باشد، جمله ششم دنباله هندسی کدام است؟

(۱) ۳۸۸۸

(۲) ۱۸۷۵

(۳) ۷۶۸

(۴) ۲۴۳

۶۹- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند ۳ جمله متوالی از دنباله هندسی

باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

تجربی ۹۲

(۱) $\frac{۵}{۳}$

(۲) $\frac{۷}{۴}$

(۳) $\frac{۹}{۴}$

(۴) $\frac{۷}{۳}$

۷۰- در یک دنباله عددی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند ۳ جمله متوالی از دنباله هندسی باشند.

تجربی ۸۸

چندمین جمله دنباله حسابی، صفر است؟

۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۱ (۳)

۱۲ (۴)

انسانی ۹۵

۷۱- اگر $A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0/3\sqrt{200}$ باشد، A^2 برابر کدام است؟

۳۲ (۱)

۴۵ (۲)

۴۸ (۳)

۵۰ (۴)

انسانی ۹۶

۷۲- از تساوی $(5/0)^x = 4 \times 2^{x+1}$ ، عدد x کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{2}$ (۴)

انسانی ۹۸

۷۳- حاصل $2^{0/76} \times 4^{0/12} \times 8^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

انسانی خارج ۹۸

۷۴- $2^{-\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{16}) (\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}$ ، کدام است؟

۱ (۱)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

ریاضی ۹۸

۷۵- اگر $A = \sqrt[5]{4^3 \sqrt[3]{16}} \times (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{\frac{1}{3}}$ کدام است؟

۰/۲۵ (۱)

۰/۵ (۲)

۰/۷۵ (۳)

۱ (۴)

ریاضی خارج ۹۸

۷۶- اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} (12)^{-\frac{1}{5}}$ باشد، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

انسانی ۱۴۰۲

۷۷- مقدار عبارت $\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{3^{16}} \times \dots \times \frac{1}{3^{256}}$ ، کدام است؟

$\frac{127}{3^{256}}$ (۱)

$\frac{127}{3^{512}}$ (۲)

$\frac{63}{3^{256}}$ (۳)

$\frac{255}{3^{512}}$ (۴)

انسانی خارج ۱۴۰۰

۷۸- اگر $3^A \times 12^B = \frac{\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{9^{32}} \times \frac{1}{9^{64}}}{\frac{1}{3^2} \times \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{4^8}}$ باشد، مقدار $A + B$ کدام است ؟

(۱) $-\frac{13}{32}$

(۲) $\frac{13}{32}$

(۳) $\frac{13}{16}$

(۴) $-\frac{13}{16}$

انسانی ۱۴۰۱

۷۹- حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{18}$

(۴) $\sqrt{6}$

انسانی خارج ۱۴۰۱

۸۰- از تساوی $(\frac{1}{3})^x = 9^{x-1} \times (81)^{-1}$ ، مقدار x کدام است ؟

(۱) صفر

(۲) ۴

(۳) ۱

(۴) ۲

انسانی ۱۴۰۲

۸۱- اگر $(\frac{1}{3})^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{27^3 \sqrt[3]{243}} \times A$ باشد، حاصل $(5+A)^{\frac{1}{5}}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

انسانی خارج ۱۴۰۲

۸۲- اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt{8}} (18)^{-1/5}$ باشد، حاصل $\frac{1}{3} (10 + A^{-1})$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۰/۷۵
- (۳) ۰/۵
- (۴) ۰/۲۵

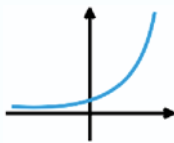
۸۳- اگر حاصل $3^x \times 2^y \times 5^z = 27^2 \times 12^3 \times 5^{\frac{1}{5}}$ باشد، حاصل $6x + 15y + 5z$ کدام است؟

- (۱) ۲۲
- (۲) ۲۴
- (۳) ۲۶
- (۴) ۲۸

۸۴- نمودار تابع $y = \frac{3^x}{2^x}$ به کدام صورت است؟

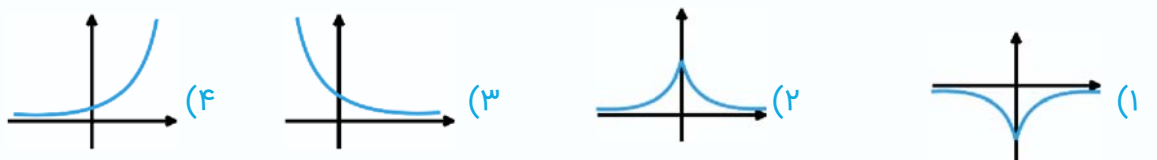


۸۵- نمودار تابع $y = (2m - 2)^x$ به صورت مقابل می‌باشد، حدود m کدام است؟



- (۱) $m < \frac{3}{2}$
- (۲) $0 < m < \frac{3}{2}$
- (۳) $m > \frac{3}{2}$
- (۴) $m > \frac{1}{2}$

۸۶- نمودار تابع $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$ به کدام صورت است؟



۸۷- نمودار تابع $f(x) = 2^{|x|}$ به کدام صورت است؟



۸۸- دو تابع $y = 2^{x-1}$ و $y = (\sqrt{2})^{x+3}$ در نقطه A متقاطع‌اند. مجموع طول و عرض A کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱

۸۹- نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B}$ نمودار $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

انسانی ۹۸

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۹۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a(\frac{1}{2})^x + b$ محور x ها را در طول -1 و محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$ کدام است؟

انسانی ۱۴۰۰

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۹۱- نمودار تابع با ضابطه $y = a(\frac{1}{3})^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴ محور y ها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x = -2$ کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۰

(۱) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{9}{4}$

(۳) ۲۷

(۴) ۳۶

۹۲- نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ

انسانی ۱۴۰۲

مختصات قطع می‌کند. مقدار bk کدام است؟

۶ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۹۳- نمودار تابع نمایی $f(x) = k - (\frac{1}{9})^{ax+b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۶ واحدی از

مبدأ مختصات قطع می‌کند، مقدار bk کدام است؟

-۵/۵ (۱)

-۲/۵ (۲)

-۴/۵ (۳)

-۳/۵ (۴)

۹۴- شخصی ۸ میلیون ریال در یک فعالیت تجاری سرمایه‌گذاری کرده و پس از ۳ سال ۲۷ میلیون ریال

برداشت نموده است. سود سالانه حاصل از این سرمایه‌گذاری چند درصد بوده است؟

۵۰ (۱)

۴۰ (۲)

۳۰ (۳)

۲۰ (۴)

۹۵- شخصی ۲۰ میلیون تومان در یک فعالیت تجاری سرمایه‌گذاری کرده است. اگر در پایان هر سال ۱۰

درصد سود علی‌الحساب به سپرده‌ها تعلق گیرد، میزان سرمایه‌وی در پایان سال سوم کدام است؟

۲۶۶۲۰۰۰۰ (۱)

۲۶۲۶۰۰۰۰ (۲)

۲۴۶۲۰۰۰۰ (۳)

۲۴۴۶۰۰۰۰ (۴)

۹۶- جمعیت کشوری حدود چهل میلیون نفر است. اگر جمعیت این کشور با نرخ سالیانه یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن پس از ۲ سال چقدر خواهد بود؟

(۱) ۳۹۲۰۴۰۰۰

(۲) ۳۹۲۴۶۰۰۰

(۳) ۳۸۴۰۲۰۰۰

(۴) ۳۸۶۶۰۰۰۰

۹۷- مقدار ۶۰ گرم از یک ماده موجود است. مقدار این ماده بعد از گذشت هر ساعت با نرخ ۲ درصد کاهش می‌یابد. مقدار این ماده بعد از ۷ ساعت چقدر خواهد بود؟

(۱) ۵۸

(۲) ۵۲

(۳) ۵۶

(۴) ۵۰

۹۸- جمعیت یک کشور با گذشت ۵۰ سال ۴ برابر شده است. یک جمعیت با همین رشد ثابت، با گذشت ۷۵ سال چند برابر خواهد شد؟

(۱) ۶

(۲) ۷/۵

(۳) ۸

(۴) ۹

۹۹- اگر قیمت اولیه کالایی ۱۶ هزار تومان باشد و قیمت این کالا پس از دو سال برابر با ۲۵ هزار تومان گردد، نرخ تورم سالانه چند درصد است؟

(۱) ۱۵ درصد

(۲) ۲۰ درصد

(۳) ۲۵ درصد

(۴) ۳۰ درصد