www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

جزوه آموزشی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل صفر : مفاهیم اولیه

اصل های ضربی و جمعی :

هرگاه z, y, x اعداد حقیقی باشند :

	اصول جمعی	اصول ضربی
بسته بودن	$x+y \in R$	$xy \in R$
جابجایی	$x+y=y+x$	$xy=yx$
شرکت پذیری	$(x+y)+z=x+(y+z)$	$(xy)z=x(yz)$
عضو خنثی	$x+۰=x$	$x\times ۱=x$

خاصیت توزیع پذیری ضرب روی جمع : $x(y+z)=xy+xz$

مثال : ثابت کنید عضو همانی ضربی ، منحصر به فرد است .

مثال : ثابت کنید عضو همانی (خنثی) جمعی ، منحصر به فرد است .

عضو قرینه :

برای هر x حقیقی عددی هست که مجموعش با x ، صفر شود و آن را با $-x$ نمایش می دهند : $x+(-x)=۰$

مثال : ثابت کنید عضو قرینه ، منحصر به فرد است .

مثال : ثابت کنید $-(-x)=x$ است .

مثال : ثایت کنید $-(x+y)=-x-y$ است .

مثال : ثابت کنید $x(-y)=-(xy)$ سپس ثابت کنید $(-x)(-y)=xy$ است .

عضو وارون :

برای هر x حقیقی عددی هست که ضربش با x ، یک شود و آن را با $x^{-۱}$ نمایش می دهند : $x\times x^{-۱}=۱$

مثال : ثابت کنید عضو وارون ، منحصر به فرد است ..

مثال : ثابت کنید $(x^{-۱})^{-۱}=x$ است .

مثال : ثابت کنید اگر $xy=۰$ آنگاه $x=۰$ یا $y=۰$ است .

بسط اعشاری :

۱-مختوم : کسرهای تحویل ناپذیری که مخرج فقط عامل ۲ یا ۵ دارد .

۲-متناوب : کسرهای تحویل ناپذیری که مخرج فقط عامل غیر ۲و ۵ دارد .

۳-متناوب مرکب : کسرهای تحویل ناپذیری که مخرج عوامل ۲یا ۵ به همراه عوامل غیر آن دارد .

مثال : نوع بسط اعشاری کسر های مقابل را مشخص کنید . $\frac{۲۳}{۱۵}$ $\frac{۸}{۱۱}$ $\frac{۳}{۵}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

کسر مولد بسط اعشاری متناوب :

عدد اعشاری $A/B\overline{C}$ از کسری حاصل می شود که به صورت مقابل ، مخرج به تعداد ارقام C رقم ۹ دارد و به تعداد ارقام B رقم ۰ دارد :

$$A/B\overline{C}=\frac{ABC-AB}{۹۹۹...\,۰۰۰...}$$

مثال : کسر مولد اعداد مقابل را بنویسید . $۱/\overline{۲۳۵}$ $۱/\overline{۳۷۳}$ $۰/۲۱\overline{۳}$ $۰/۲$

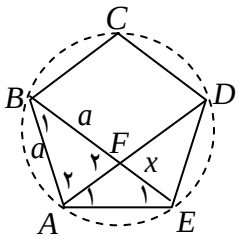
اعداد گنگ :

اعدادی با بسط اعشاری نامختوم و غیر متناوب مانند : $\pi=۳/۱۴۱۵۹...$

مثال : اگر a گویا و α گنگ باشد ، کدام عبارت الزاماً گنگ است ؟

$a^{۳}\alpha+a$ a^{α} $a\left(\alpha+\sqrt{۳}\right)$ $\alpha^{۲}+a$

قضیه هیپاسوس : در هر پنج ضلعی منتظم ، نسبت طول قطر به طول ضلع عددی گنگ است .



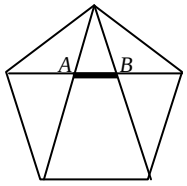
اثبات : پنج ضلعی منتظم محاطی است و می دانیم وتر های برابر از یک دایره دارای کمان های نظیر برابر هستند و به همین دلیل زاویه های هم شماره مشخص شده برابرند .

پس دو مثلث AEF و AEB متشابه هستند و : $\frac{AB}{EF}=\frac{EA}{EB}$

که می توان نوشت : $\frac{a}{x}=\frac{a+x}{a}$ که با حل این معادله داریم : $\boxed{x=(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})a}$

و به این ترتیب : $\boxed{(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})a}$:طول قطر

مثال : در پنج ضلعی منتظم مقابل به طول ۱ ، طول پاره خط AB را بیابید .



خواص نامساوی ها :

اگر $a<b$ آنگاه :

می توان به طرفین نامساوی هر عدد دلخواهی را اضافه کرد : $a+c<b+c$

می توان به طرفین نامساوی هر عدد مثبتی را ضرب کرد : $ac<bc$

می توان به طرفین نامساوی هر عدد منفی را ضرب کرد ، ولی باید جهت را تغییر داد : $ac>bc$

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $0 < a < b$ آنگاه :

می توان طرفین را به توان ۲ رساند : $a^2 < b^2$

می توان طرفین نامساوی را وارون کرد ، ولی جهت تغییر می کند : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

اگر $a > 1$ آنگاه :

هرچه توان بزرگ تر شود عدد بزرگتر می شود : $\ldots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < \ldots$

اگر $0 < a < 1$ آنگاه :

هرچه توان بزرگ تر شود عدد کوچک تر می شود : $\ldots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \ldots$

مثال : ثابت کنید اگر $0 < a < b$ آنگاه $0 < b^{-1} < a^{-1}$ و $a^2 < b^2$ است .

مثال : ثابت کنید بین هردو عدد گویا ، عدد گنگی وجود دارد . (اثبات با $\frac{1}{\pi}$)

مثال : کدام یک عدد گنگی بین اعداد گویای a,b است ؟

۱) $\frac{b-a}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{b+a}{\sqrt{2}}$ ۳) $b-\frac{b-a}{\sqrt{2}}$ ۴) $a+\frac{b-a}{\sqrt{2}}$

مثال : ثابت کنید اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le x < \varepsilon$ آنگاه $x = 0$ است .

مثال : اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le a^2 + b^2 - 2b + 1 < \varepsilon$ ، حاصل $a+b$ را بیابید .

همسایگی متقارن :

بازه ای متقارن به فاصله r از عدد x_0 را ، همسایگی به مرکز x_0 به شعاع r می نامند . و به صورت های زیر نمایش می دهند :

$$(x_0 - r, x_0 + r) \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

همسایگی متقارن محذوف :

همسایگی متقارنی که مرکز از آن حذف شده باشد را همسایگی متقارن محذوف می نامند و به صورت های زیر نمایش می دهند :

$$(x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < r$$

نکته : هر بازه (a,b) یک همسایگی متقارن به مرکز $x_0 = \frac{b+a}{2}$ و به شعاع $r = \frac{b-a}{2}$ است .

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مجموعه های زیر یک همسایگی متقارن هستند ، مرکز و شعاع همسایگی را مشخص کنید .

$$A=\left\{x\in R\middle|-۴<۳x-۱<۸\right\} \qquad B=\left\{x\in R\middle|x^{۲}-۵x+۶<۰\right\}$$

مثال : هر مجموعه جواب نامعادلات زیر را به صورت بازه متقارن نوشته و مرکز و شعاع همسایگی را بیابید .

$$\left|۳x+۱\right|<۰/۶ \qquad \left||x-۲|-۳\right|<۴ \qquad \frac{۱}{x^{۲}}>۹$$

مثال : مجموعه $\left\{x\in R\middle||۸x+a|<b\right\}$ همسایگی متقارن به مرکز ۱ و شعاع ۲ است مقدار ab را بیابید .

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل یکم : دنباله

دنباله اعداد : تابعی با دامنه اعداد طبیعی را دنباله می نامند .

مثال : دنباله ای از اعداد گویا بسازید که بین $\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۱}$ باشد .

مثال : چند دنباله $a_n = \frac{۲n-۷}{۵n-۱۴}$ چند جمله منفی دارد ؟

همگرایی دنباله ها :

دنباله a_n را همگرا گوییم و می نویسیم $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ هرگاه :

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq M \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

مثال : با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید دنباله $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$ همگرا به ۱ است .

مثال : با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید دنباله $\left\{۳-(\frac{۱}{۲})^n\right\}$ همگرا به ۳ است .

مثال : با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید دنباله $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$ همگرا به ۱ است .

مثال : با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید دنباله $\left\{\frac{۳n^۲+۱}{۴n^۲+۷}\right\}$ همگرا به $\frac{۳}{۲}$ است .

مثال : در دنباله $\left\{\frac{۴n+۱}{۲n-۵}\right\}$ حداقل برای چه مقدار n ، رابطه $۱/۹۹۹ < \frac{۴n+۱}{۲n-۵} < ۲/۰۰۱$ برقرار است ؟

مثال : از چه شماره ای به بعد فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{۳n-۲}{۲n+۱}\right\}$ از عدد $\frac{۳}{۲}$ کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ است ؟

واگرایی بینهایت دنباله ها :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \forall N > ۰ \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq M \quad \Rightarrow \quad a_n > N$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : ثابت کنید دنباله $\{۳^n\}$ واگراست .

مثال : به ازای $n \geq M$ مقدار جملات دنباله $\left\{\frac{n^۴}{۲n^۲+۸۰۰}\right\}$ از ۱۰۰ بزرگ تر می شوند . حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

محاسبه حد دنباله ها :

الف) آزمون قدرت : در بی نهایت ، یک عبارت با بزرگترین قسمت جمله هم ارز است .

$$a<b \quad \Rightarrow \quad a^n+b^n \approx b^n \qquad\qquad q<p \quad \Rightarrow \quad n^q+n^p \approx n^p$$

مثال : حد دنباله های زیر را بیابید .

$$\left\{\frac{n^۲-۱}{۲n^۲+n-۱}\right\} \qquad \left\{\frac{n^۲+۳n}{n+۵}-\frac{n^۳+۱}{n^۲+۷}\right\} \qquad \left\{\frac{۴^n+۹^{n+۱}}{۴^{n+۲}+۹^{n-۱}}\right\} \qquad \left\{\frac{\sqrt{۴n^۲+۲n}-n}{۲n}\right\}$$

ب) آزمون رشد : تابعی که رشد سریع تر دارد ، تکلیف حد کسر در بی نهایت را تعیین می کند . $(a \geq ۲)$

$$\log n<\sqrt{n}<n<n^a<a^n<n!<n^n$$

مثال : حد دنباله های زیر را بیابید .

$$\left\{\frac{۲^n}{n!}\right\} \qquad \left\{\frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n}{۲^n}\right\} \qquad \left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$$

ج) گویا کردن : در عبارات های رادیکالی در صورتی که آزمون قدرت باعث حذف جملات شود باید از گویا کردن استفاده کنیم .

$$\left\{\sqrt{۲n}-\sqrt{n}\right\} \qquad \left\{\sqrt{n^۲+۲n+۱}-\sqrt{n^۲+۱}\right\} \qquad \left\{\sqrt{۴n^۲+n}-۲n\right\}$$

د) قضیه فشردگی : اگر $b_n \leq a_n \leq c_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=l$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=l$

نتیجه : اگر a_n همگرا به صفر و b_n کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n=۰$

مثال : اگر $۳-\cos^۲\frac{۱}{n^۲}<a_n-۳<۲+\frac{۱}{n^۲}$ ، دنباله a_n همگرا به چه عددی است ؟

مثال : به کمک قضیه فشردگی ثابت کنید $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ همگراست .

مثال : حد دنباله های زیر را بیابید .

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left\{\left(\sqrt{۴n^{۲}+۱}-۲n\right)\cos n\right\} \qquad \left\{(-۱)^{n}\sin\frac{۱}{۲n+۱}\right\} \qquad \left\{\left([n]-n\right)\sin\frac{۱}{n}\right\}$$

ه) دنباله گویای $(۱+\frac{۱}{n})^{n}$ همگرا به عدد گنگ e است .

مثال : حد دنباله های زیر را بیابید .

$$\left\{(\frac{۳n+۷}{۳n+۲})^{n+۲}\right\} \qquad \left\{(\frac{n+۳}{n+۲})^{\frac{n}{۲}}\right\} \qquad \left\{(\frac{n}{n+۱})^{۲n}\right\}$$

یکنوایی دنباله ها :

الف) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است اگر به ازای هر n : $a_{n+۱} \geq a_n$

ب) دنباله $\{a_n\}$ نزولی است اگر به ازای هر n : $a_{n+۱} \leq a_n$

نکته : برای دنباله های با جملات مثبت می توان نوشت :

الف) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است اگر به ازای هر n : $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \geq ۱$

ب) دنباله $\{a_n\}$ نزولی است اگر به ازای هر n : $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \leq ۱$

مثال : نشان دهید دنباله $\left\{\frac{n+۲}{n+۱}\right\}$ نزولی و دنباله $\left\{\frac{n!}{۲^{n}}\right\}$ صعودی است .

مثال : نوع یکنوایی دنباله های $\left\{\frac{۵^{n+۱}}{۲^{۲n}}\right\}$ و $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$ را مشخص کنید .

نکته : دنباله های $\{-a_n\}$ و $\left\{\frac{۱}{a_n}\right\}$ از نظر یکنوایی عکس دنباله $\{a_n\}$ است .

مثال : دنباله $\left\{\sqrt{n}-\sqrt{n+۱}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

کرانداری :

دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) از پایین کراندار : تمام جملات دنباله از عددی ثابت بزرگ تر باشند $(m \le a_n)$ مثال : $a_n = n$

ب) از بالا کراندار : تمام جملات دنباله از عددی ثابت کوچک تر باشند . $(a_n \le M)$ مثال : $a_n = -n$

ج) دنباله کراندار : تمام جملات دنباله بین دو عدد ثابت باشند . $(|a_n| \le k)$ مثال : $a_n = \frac{۱}{n}$

نکته : اگر حد دنباله ای بی نهایت نشود ، کراندار است و در غیر این صورت بی کران است .

مثال : نشان دهید دنباله های زیر کراندار است و کرانی برای آنها تعیین کنید .

$$\left\{(۱-\frac{۱}{n})\cos\frac{\pi}{n+۲}\right\} \qquad \left\{\frac{۲+\sin n}{n}\right\} \qquad \left\{\frac{n^۲+۷}{n^۲+۵}\right\}$$

مثال : کدام یک از دنباله های زیر کراندار است ؟

$$۱)\left\{\sqrt{n}\right\} \qquad ۲)\left\{n^۲+\cos\frac{\pi}{n}\right\} \qquad ۳)\left\{(-۱)^n\sqrt{n}\right\} \qquad ۴)\left\{(۲-\frac{۱}{۲^n})^۲\right\}$$

قضیه وایر اشتراس :

هردنباله صعودی و از بالا کران دار همگراست .

هر دنباله نزولی و از پایین کراندار همگراست .

مثال : ثابت کنید دنباله $\left\{\sin\frac{\pi}{۲n}\right\}$ و $\left\{\tan^{-۱} n\right\}$ همگراست .

مثال : ثابت کنید دنباله های $a_{۱}=۱$; $a_{n+۱}=\sqrt{۲۰+a_n}$ و $a_{۱}=۱$; $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n}$ همگرا هستند و عدد همگرایی را بیابید

اصل تمامیت اعداد حقیقی :

هر زیر مجموعه نا تهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد ، دارای کوچک ترین کران بالاست . (سوپریمم)

هر زیر مجموعه نا تهی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد ، دارای بزرگ ترین کران پایین است . (اینفیمم)

مثال : سوپریمم و اینفیمم مجموعه های زیر را مشخص کنید .

$$A=\left\{x \middle| [-x]=-۲\right\} \qquad B=\left\{\frac{x^۲}{x^۲+۱} \middle| x\in R\right\} \qquad C=\left\{x\in R \middle| |۲x-۱|<۳\right\}$$

فصل دوم : حد و پیوستگی

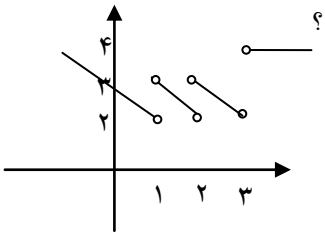
دانلود از سایت ریاضی سرا

حد تابع از روی نمودار :

زمانی که تابع در همسایگی یک نقطه از هر دو طرف تعریف شده باشد ، باید حد چپ و راست برابر باشد تا در آن نقطه حد داشته باشیم . ولی اگر تابع فقط در یک همسایگی یک طرفه آن نقطه تعریف شده باشد ، حد تابع همان حد یک طرفه خواهد بود .

مثال : تابع علامت $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ و تابع هویساید $H(t)=\begin{cases}۱ & t\geq ۰\\ ۰ & t<۰\end{cases}$ را رسم و حد چپ و راست صفر را در هر کدام حساب کنید .

مثال: با توجه به نمودار تابع $f\left(x\right)$ ، حد چپ تابع $fof\left(۳-x\right)$ در $x=۲$ را بیابید ؟



توابعی که در آنها باید حدود چپ و راست بررسی شوند :

الف) توابع چند ضابطه ای در نقاط مرزی

مثال : به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x+a\right)^{۲} & x\geq -۱\\ ۲x+۱ & x<-۱\end{cases}$ در $x=-۱$ حد دارد ؟

ب) توابع شامل جزء صحیح در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح شود..

نکته : تابع براکتی $f\left(x\right)=\left[x\right]+\left[-x\right]$ در همه جا حد دارد و حد آن -۱ است .

مثال : حدود زیر را در صورت وجود بیابید .

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\left[x\right]-۲}{x-۳}\qquad \lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x-۲}{\left[x-۲\right]}\qquad \lim_{x\to ۳^{+}}\left[\cot(\frac{\pi}{۴}x)\right]$$

مثال : به ازای کدام مقدار a تابع $f\left(x\right)=a\left[x\right]+\left[x+۱\right]$ در نقطه $x=۱$ حد دارد ؟

مثال :تابع $f\left(x\right)=\left[\frac{۴x^{۲}+۳}{x^{۲}+۱}\right]$ در چند نقطه حد دارد ؟ چرا ؟

قضیه فشردگی :

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

مثال : اگر به ازای هر x از بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ داشته باشیم $۳-\cos^{۲} x\le f(x)-۱\le ۲+x^{۲}$ حد تابع $f(x)$ را بیابید .

نتایج قضیه فشردگی :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱^{-}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱^{+}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{\pm}} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱^{\mp}$

د) صفر و کراندار : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و $g(x)$ کراندار باشد ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=۰$

مثال : حاصل حدود زیر را بیابید .

$\lim\limits_{x\to ۲}(۴-x^{۲})\sin\frac{۱}{x-۲}$ $\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۱)\left[\frac{۱}{x-۱}\right]$ $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\left(\left[x\left[\frac{۱}{x}\right]\right]+\left[\frac{x}{\tan x}\right]\right)$

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to ۰}(x^{۳}+ax+b)\left[\frac{۱}{x}\right]=۴$ زوج مرتب a,b را بیابید.

رفع ابهام صفر صفرم :

مثال : حدود زیر را بیابید .

$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^{۲}-۳x+۲}$ $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۴x^{۲}-۳x-۱}{|x-۱|}$ $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۳}-[x^{۳}]}{x^{۲}-۲x}$ $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۲}[x]-۸}{x-۲}$

$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x\sin x}{۱-\cos ۲x}$ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{۱-\cos x}}$ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^{۲}\sin\frac{۱}{x}}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}$

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{ax^{۲}+bx-۱}{x^{۲}+x}=۲$ مقدار a,b را بیابید .

قضیه عدم وجود حد :

اگر b_n,a_n دو دنباله همگرا به a و $f(b_n),f(a_n)$ به ترتیب همگرا به $l_۲,l_۱$ باشند ، به طوری که $l_۱\ne l_۲$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد .

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته : در مورد توابع ساده می توان از دنباله های $a_n = a + \frac{۱}{n}$ و $b_n = a - \frac{۱}{n}$ بهره برد .

و در مورد توابع مثلثاتی نیز از $a_n = a + \frac{۱}{۲n\pi}$ و $b_n = a + \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$ می توان استفاده کرد ..

مثال : به کمک دنباله ها ثابت کنید توابع داده شده در نقطه داده شده حد ندارند .

$f(x) = \begin{cases} x+۱ & x>۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases} \quad (x=۱)$ $\qquad f(x) = \frac{x}{[x]} \quad (x=۲)$ $\qquad f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x=۰)$

$f(x) = \cos\frac{\pi}{x-۱} \quad (x=۱)$ $\qquad f(x) = \sin\frac{۱}{x} \quad (x=۰)$ $\qquad f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \notin Q \end{cases} \quad (x=۲)$

پیوستگی در یک نقطه :

۱. مقدار تابع یعنی $f(a)$ را می یابیم (در صورتی که تعریف نشده باشد در مورد پیوستگی نمی توان حرف زد)

۲. حد تابع یعنی $\lim_{x\to a} f(x)$ را می یابیم .

۳. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ تابع در این نقطه پیوسته است .

نکته : تابع در نقاط انتهایی دامنه در صورتی پیوسته است که ، پیوستگی یک طرفه داشته باشد .

مثال : تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} [\cot x] + a & x < \frac{\pi}{۴} \\ [\sqrt{۲}\cos x] & x > \frac{\pi}{۴} \\ [۲x] + b & x = \frac{\pi}{۴} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته است . مقدار $a+b$ کدام است ؟

مثال : در تابع $f(x) = \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}$ مقدار $f(۰)$ را طوری تعریف کنید که تابع صفر پیوسته باشد .

مثال : پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید .

مثال : نقاط ناپیوستگی تابع $y = \sqrt{|x|(x-۲)}$ را بیابید. (نقطه منفرد ناپیوسته و نقاط مرزی باید بررسی شود)

مثال : نقاط پیوستگی تابع $y = \frac{۳ - \sqrt{x+۹}}{\sqrt[۳]{x+۱} - ۱}$ را بیابید . (منظور دامنه تابع است)

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : نشان دهید $y=\sin(\frac{x-1}{x^2+1})$ در R پیوسته است . (تابع درونی و بیرونی پیوسته و ترکیبشان پیوسته)

نکته : توابع شبه دیریکله فقط در نقاطی که دو ضابطه برابر باشند ، پیوسته است .

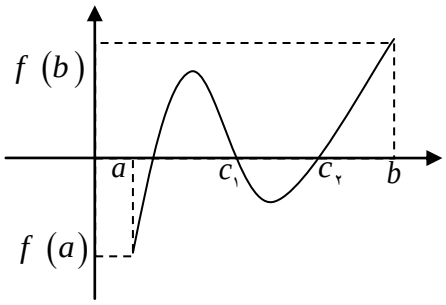
مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در کدام نقاط پیوسته است ؟

نکته : تابع $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح شود ناپیوسته است مگر آنکه آن نقطه طول نقطه مینیمم باشد یا عبارت ضریب پشت براکت را صفر کند .

مثال : تعداد نقاط ناپیوستگی توابع زیر را در بازه $(-2,2)$ بررسی کنید .

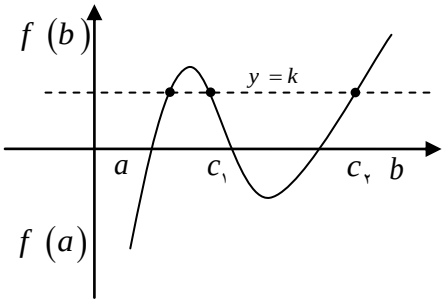
$$y=[x^2] \qquad y=x[x] \qquad y=(x^2-1)[\sqrt{x}] \qquad y=\left[\frac{x}{2}\right]$$

ویژگی های تابع پیوسته :



قضیه بولتزانو : اگر f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد که $f(c)=0$ یعنی تابع حداقل یک ریشه در این بازه دارداگر اکیداً یکنوا باشد (یک به یک است) دقیقاً یک ریشه دارد .

نتیجه : توابع چند جمله ای از درجه فرد ، حداقل یک ریشه حقیقی دارند .(زیرا $f(+\infty)=+\infty, f(-\infty)=-\infty$)



قضیه مقدار میانی : اگر f در $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)b$ ( ) باشد . آنگاه حداقل یک c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$ یعنی خط $y=k$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع می کند .اگر اکیداً یکنوا باشد (یک به یک است) دقیقاً در یک نقطه قطع می کند .

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : نشان دهید تابع $f(x)=\frac{x}{\pi}-\cos x-1$ در بازه $[0,\pi]$ حداقل یک باز محور طول ها را قطع می کند .

مثال : نشان دهید معادله $(x-1)(x+1)(x-3)+x^2-2x=0$ در بازه $[-2,2]$ حداقل دو ریشه دارد .

مثال: حدود a را چنان بیابید که معادله $x^3+ax+2=0$ حداقل یک ریشه در بازه $(-1,2)$ داشته باشد .

مثال : آیا تابع $f(x)=\frac{x^3}{4}+\sin \pi x+4$ در بازه $[-2,2]$ می تواند مقدار ۵ را اختیار کند ؟

مثال: نشان دهید خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$ را در بازه $[2,3]$ قطع می کند .

پیوستگی تابع وارون :

اگر f در $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد ، f^{-1} در $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است .

اگر f در $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد ، f^{-1} در $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است .

تعریف دنباله ای پیوستگی :

می گوییم f در a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله a_n همگرا به a از دامنه f ، همگرا به

$$\forall a_n \in D_f \quad ; \quad a_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(a_n) \to f(a)$$

مثال : تابع f در $x=5$ از چپ پیوسته و دارای حد راست ۲ است . اگر $f(5)=-1$ باشد ، دنباله $\left\{ f\left(\frac{5n^2+7}{n^2+1}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟

حد بی نهایت :

اگر مخرج صفر حدی شود در حالی که صورت عدد غیر صفر باشد ، حاصل بی نهایت می شود.

مثال : حدود زیر را بیابید .

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{[x-1]}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{[x-1]}{x-1} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x \qquad \lim_{x\to 0^+}\cot x$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴})$ $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-}\frac{۱+۲\sin x}{[\cos x]}$ $\lim_{x\to \pi}(۱+\cos x)\tan\frac{x}{۲}$

مثال : b,a را چنان بیابید که $\lim_{x\to ۴}\frac{۱+۲x}{۲x^۲+ax+b}=+\infty$.

حد در بی نهایت :

اگر مخرج بی نهایت شود در حالی که صورت عدد باشد ، حاصل بی نهایت می شود.

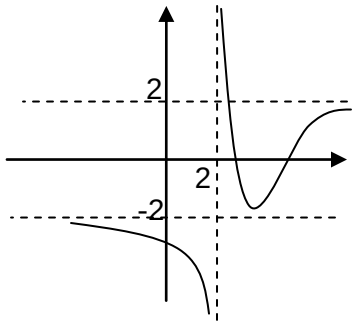
مثال : حدود زیر را بیابید .

$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲+۵x+۱}{۳x^۲-x}$ $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{۱}{x}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+\sqrt{x^۲+۱}}{۲x+\sqrt{x}}$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۴x^۲+x}}$

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x})$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\tan^{-۱}x}{۲-x}$ $\lim_{x\to-\infty}(x\sqrt{۱+x^۲}-x^۲)$

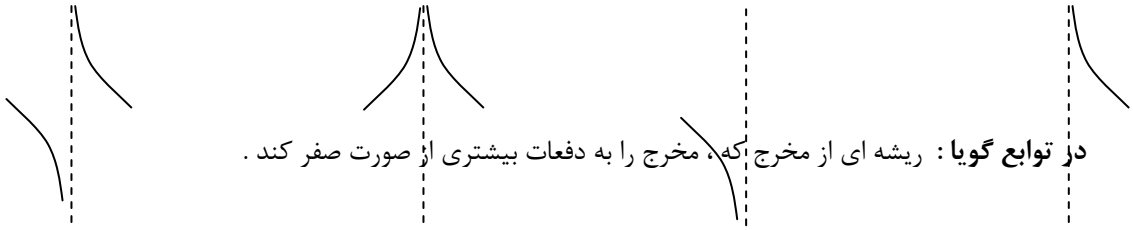
مثال : b,a را چنان بیابید که $\lim_{x\to+\infty}(ax+۳+\sqrt{۴x^۲+bx-۱})=۵$.

مثال : اگر نمودار f به صورت زیر باشد ، حاصل مجموع حد چپ و راست تابع $y=\left[fof(x)\right]$ در $x=۲$ کدام است ؟



مجانب قائم :

$x=a$ را مجانب قائم منحنی تابع f می نامند، هرگاه حداقل یکی از حدود یک طرفه در a بی نهایت شود .



در توابع گویا : ریشه ای از مخرج که، مخرج را به دفعات بیشتری از صورت صفر کند .

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : در تابع $y=\frac{5x^2-6x+1}{(x^2-1)(4x^2-3x-1)}$ فقط $x=1,\frac{-1}{4}$ به دفعات بیشتری مخرج را صفر می کنند .

مثال : مجانب های قائم تابع $y=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$ را بیابید.

مثال : مجانب های قائم تابع $y=\frac{\left[\frac{x}{3}\right]}{x(x^2-9)(x^2-4)}$ را بیابید .

در توابع شامل رادیکال : ریشه ای از مخرج که در دامنه ی باز حضور داشته باشد .

مثال : در تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ چون دامنه $x>2$ است . پس فقط $x=2$ مجانب قائم است .

مثال :مجانب های قائم تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}$ را بنویسید .

درتوابع نمایی :برای پایه بزرگتر از ۱ حداقل یک طرف ریشه مخرج نما مثبت (تا توان $+\infty$ بسازد) و برای پایه کوچکتر از ۱ حداقل یک طرف ریشه مخرج منفی(تا توان $-\infty$ بسازد) باشد .

مثال : تابع $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\tan^2 x}$ مجانب قائم ندارد . توان هیچگاه $-\infty$ نخواهد شد .

مثال : مجانب های قائم تابع $y=(\frac{1}{2})^{\frac{x-1}{x^4-x^2}}$ کدامند ؟

درتوابع لگاریتمی : در ریشه های صورت و مخرج ضابطه ، که حداقل علامت تابع در یک طرف ریشه مثبت باشد .

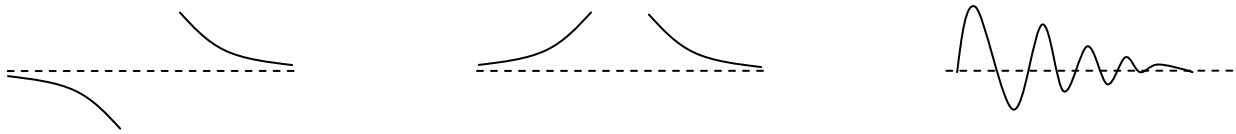
مثال : تابع $y=\log\frac{x^2-9}{x^2-25}$ دارای چهار مجانب قائم است ، زیرا صورت و مخرج ۴ ریشه دارد که اگر عبارت ضابطه تعیین علامت شود مشخص می شود حداقل یک طرف ریشه ها مثبت هستند .

مثال : تابع $y=\log_2(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})$ چند مجانب قائم دارد ؟ (فقط $x=1$ در دامنه حظور دارد و یک طرف مثبت است)

مجانب افقی :

دانلود از سایت ریاضی سرا

$y=L$ را مجانب افقی تابع f می نامند ، هرگاه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$



مثال : تابع $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ دارای دامنه محدود $D=[-1,1]-\{0\}$ است و به بی نهایت میل نمی کند پس مجانب افقی ندارد .

مثال : مجانب افقی تابع $y=\frac{x^2+6x-10}{x-2}-\frac{x^2+5x}{x+4}$ کدام است ؟

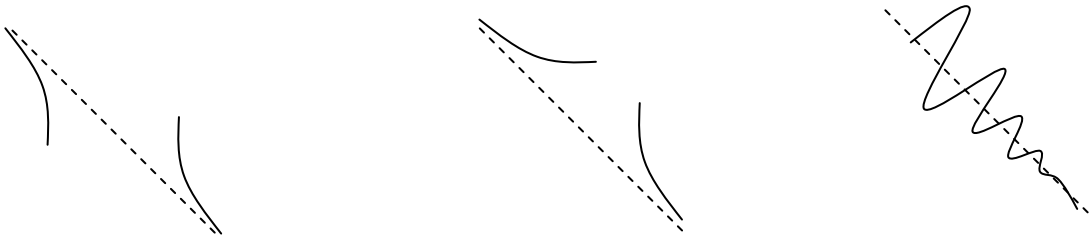
مثال : معادله مجانب افقی تابع $y=\frac{x^2\tan^{-1}x}{3x+2x^2}$ کدام است ؟

مثال : معادله مجانب افقی تابع $y=\frac{3x^2-4x-5}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است ؟

مثال : اگر تابع $y=\frac{(a^2+1)x^2+3}{x^2+ax+9}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد ، مجانب افقی آن را بیابید .

مجانب مایل :

خط $y=ax+b$ مجانب مایل تابع f است ، هرگاه $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ یا $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$



در توابع گویا که <u>درجه صورت یکی بیشتر از مخرج</u> است : خارج قسمت تقسیم ، مجانب مایل است.

مثال : مجانب مایل توابع زیر را بنویسید .

$y=\frac{x^3+1}{x|x|-4}$ $\qquad$ $y=\frac{x^5}{x^4-9}$ $\qquad$ $y=\frac{x^3+1}{x|x|-4}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

روش کلی : اگر $y = ax + b$ **مجانب مایل تابع** $y = f(x)$ **باشد آنگاه :**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = b$$

مثال : مجانب های مایل توابع زیر را بیابید.

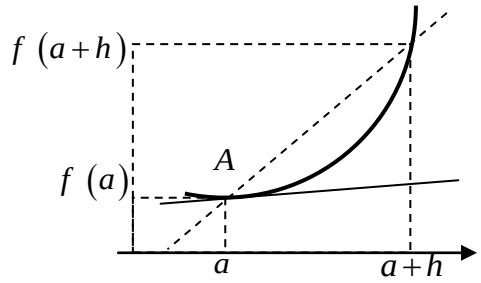
$$y = \sqrt{x^۲ + ۲} - ۲x \qquad y = \sqrt{\frac{x^۳ + x^۲}{x - ۲}} \qquad y = \frac{x\sqrt{x^۲ - ۴}}{x - ۱}$$

مثال :اندازه زاویه بین مجانب های مایل تابع $y = \sqrt{x^۲ + ۴x}$ را بیابید .

فصل سوم : مشتق و کاربرد های آن

مماس بر منحنی :

دانلود از سایت ریاضی سرا



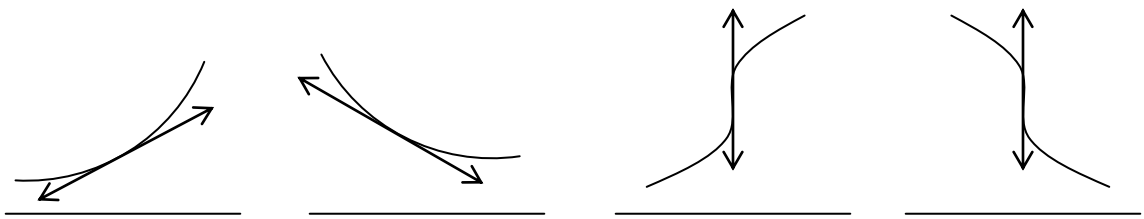
$$m_{AB}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

بنابر این مقدار حد $m=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ در صورت وجود ، شیب خط مماس بر تابع در نقطه $x=a$ است .

تعریف مشتق :

اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد . به مقدار حد زیر در صورت وجود مشتق تابع f در a می گویند .

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\xrightarrow{a+h=x}f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



$f'(a)>۰$ $\quad$ $f'(a)<۰$ $\quad$ $f'(a)=+\infty$ $\quad$ $f'(a)=-\infty$

مثال : به کمک تعریف مشتق ، مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید .

$f(x)=\frac{۱}{x+۲}\quad(x=۰)$ $\qquad$ $f(x)=\tan x\quad(x=\frac{\pi}{۴})$ $\qquad$ $f(x)=x(x-۱)...(x-۱۰۰)\quad(x=۰)$

مثال : به کمک تعریف مشتق نشان دهید $x=۲$ مماس قائم منحنی $y=\sqrt[۳]{x-۲}$ است .

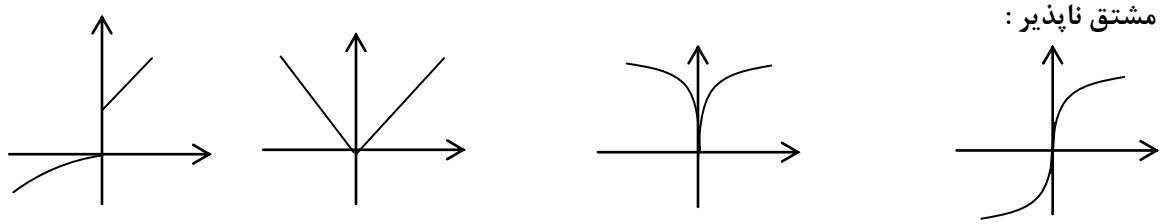
مثال : با استفاده از تعریف مشتق معادلات مماس و قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در $(۴,۲)$ بنویسید .

مشتق پذیری :

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق پذیر می گویند هرگاه ۱. در آن نقطه پیوسته باشد ۲. مشتق چپ و راست موجود و برابر باشد .

دانلود از سایت ریاضی سرا

نقاط مشتق ناپذیر :



مماس قائم $(f'_+ = f'_- = +\infty)$ بازگشتی $(f'_+ = +\infty, f'_- = -\infty)$ گوشه $(f'_+ = L_1, f'_- = L_2)$ ناپیوسته

مثال : b, a را چنان بیابید که $f(x) = \begin{cases} 2a + \sqrt{x^2 - 2x + 1} & x \geq 1 \\ b\sqrt[3]{x} & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد .

مثال : مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید . (توجه : ابتدا پیوسته بودن بررسی شود)

$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \quad (x = 2)$ $\qquad f(x) = |x-1|\sqrt{x} \quad (x = 1)$ $\qquad f(x) = |x^2 - 1| \quad (x = 1)$

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (x = 0)$ $\qquad f(x) = x[x] \quad (x = 0)$ $\qquad f(x) = x\,\mathrm{sgn}(x) \quad (x = 0)$

مثال : نوع نقطه مشتق ناپذیر داده شده در توابع زیر را مشخص گنید .

$f(x) = \sqrt[5]{(2-x)^3} \quad (x = 2)$ $\qquad f(x) = \sqrt{|x-1|} \quad (x = 1)$ $\qquad f(x) = (x-1)[x] \quad (x = 1)$

نکته : توابع شبه دیریکله در نقاط پیوسته مشتق پذیر است .

مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & x \in Q \\ 2x^2 & x \notin Q \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر است .

نکته : زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقاط گوشه برابر است با : $\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

در حالت خاص که $m_1 m_2 = -1$ باشد ، زاویه بین دو مماس ۹۰ درجه است .

مثال : زاویه بین مماس چپ و راست تابع $f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + x}$ در $x = 0$ را بیابید .

قواعد مشتق گیری :

دانلود از سایت ریاضی سرا

	تابع	مشتق
۱	$y = c$	$y' = ۰$
۲	$y = x^n$	$y' = nx^{n-۱}$
۳	$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
۴	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
۵	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
۶	$y = \tan x$	$y' = (۱ + \tan^۲ x)$
۷	$y = \cot x$	$y' = -(۱ + \cot^۲ x)$
۸	$y = a^x$	$y' = Lna \times a^x$
۹	$y = \log_a^x$	$y' = \frac{۱}{Lna \times x}$

توجه : حالت های خاص زیر را برای سرعت بخشیدن به کارتان به خاطر داشته باشید :

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$y = x\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{۳}{۲}\sqrt{x}$$

$$y = \frac{۱}{x} \Rightarrow y' = \frac{-۱}{x^۲}$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = Lnx \Rightarrow y' = \frac{۱}{x}$$

قضایای مشتق گیری :

	تابع	مشتق

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱	$y = cu$	$y' = cu'$
۲	$y = u + v$	$y' = u' + v'$
۳	$y = uv$	$y' = u'v + v'u$
۴	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}}$

نکته : مشتق تابع شبه هموگرافیک $y = \frac{au+b}{cu+d}$ را می توان به صورت $y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^{۲}} \times u'$ سریع محاسبه کرد .

مشتق توابع مرکب :

$$y = f\left(g\left(h(x)\right)\right) \quad \Rightarrow \quad y' = f'\left(g\left(h(x)\right)\right) \times g'\left(h(x)\right) \times h'(x)$$

مثال : مقدار مشتق $\sin^{۳}\sqrt{x}$ در $x = \frac{\pi^{۲}}{۹}$ چقدر است ؟

مثال: اندازه مشتق $\ln(\sin \pi x^{۲})$ در $x = \frac{۱}{۲}$ کدام است ؟

مثال: مشتق $\tan(e^{\sin x})$ به ازای $x = ۰$ کدام است ؟

مثال: اندازه مشتق $\tan^{-۱}(e^{۲x})$ به ازای $x = \ln ۲$ کدام است ؟

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$ حاصل $f'(۲)$ کدام است ؟

مثال: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+۱}}{x+۲}$ و $g(x) = \frac{x^{۲}+۴x+۱}{(x+۱)\sqrt{x+۱}}$ حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به ازای $x = ۱$ کدام است؟

مثال: اگر $f(\sin ۳x + \cos x) = g(-x^{۳} + ۲x)$ و $g'(۰) = ۳$ حاصل $f'(۱)$ کدام است ؟

مثال : اگر $f'(\sin x) = \cos ۲x$ آنگاه مشتق $f(\cos x)$ در $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است ؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x}$ و $g'(x)=\frac{x+۳}{x-۱}$ و $F(x)=(gof)(x)$، حاصل $F'(۴)$ را تعیین کنید .

مثال : مشتق توابع زیر را حساب کنید . (ساده کردن الزامی نیست)

$y=\sqrt{۱+\sin ۴x}$ $\quad$ $y=\cos^{۳}(۲x+۱)$ $\quad$ $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\quad$ $y=\sin(\cos x^{۲})$

$y=\sqrt[۴]{\frac{x}{x^{۲}+۱}}$ $\quad$ $y=e^{x+\ln(x^{۲}-۳x)}$ $\quad$ $y=\ln(\sin\sqrt[۳]{x})$ $\quad$ $y=e^{\tan ۲x}$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی $y=e^{۳x}\cos(\pi x)$ را در $(۰,۱)$ بنویسید .

مثال : معادله خط قائم بر منحنی $y=\frac{\ln x}{x}$ را در $(۱,۰)$ بنویسید .

نکته : در مواردی که مشتق تابع f در نقطه a خواسته شده باشد و $f(a)=۰$ باشد ، از تعریف مشتق استفاده می کنیم .

مثال : مشتق تابع $y=\frac{(x-۱)^{۲}\sqrt{x+۱}}{x}$ در $x=۱$ را بیابید .

نکته : اگر f تابع فرد (زوج) باشد ، f' تابع زوج (فرد) است . (پس اگر f زوج باشد $f'(۰)=۰$ است)

مثال : اگر f فرد و مشتق پذیر باشد و $f'(۳)=۲$ و $g(۲x+۱)=f(۱-۴x)$ ، آنگاه مقدار $g'(۳)$ کدام است ؟

مثال : اگر $f(x)=\frac{x\sqrt[۳]{x}+\cos x}{x\tan x-۲}$ مقدار $f'(۰)$ را بیابید ؟

مشتق ضمنی :

توابع به صورت $f(x,y)=۰$ را توابع ضمنی می گویند که اغلب قابل تبدیل به حالت $y=f(x)$ نیستند . در این نوع توابع برای مشتق گیری ، می توان از متغیر ها نسبت به x مشتق گرفت یا از فرمول زیر استفاده کرد :

$$y'_x=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x \text{ (} y \text{ ثابت)}}{\text{مشتق نسبت به } y \text{ (} x \text{ ثابت)}}$$

مثال : از رابطه $\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=۶$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(۱,۴)$ کدام است ؟ (آ ۸۶)

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: از رابطه $y = y^{۲}e^{\sin ۲x} + \sin x$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ در $(۰,۱)$ کدام است ؟ (س ۸۲)

مثال: خط مماس بر منحنی $\ln\left(x^{۲} - y\right) = \sqrt{y+۱} - x$ در $(۲,۳)$ ، نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می کند ؟

مثال: عرض از مبدا خط قائم بر منحنی $y^{۲} = y\ln\left(x^{۲} - ۳\right) + ۲x$ در $(۲,-۲)$ کدام است ؟

مثال : طول نقاطی از منحنی $x^{۲} - xy + y^{۲} = ۱$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط افقی باشد .

مثال : مشتق توابع زیر را بدست آوردید .

$$y^{۳} + \cos(x+y) = ۰ \qquad \sqrt{xy} + \sin(xy) = ۱ \qquad x\cos(xy) + ۳x^{۴} = ۰$$

مشتق تابع وارون :

قضیه : اگر f پیوسته و یک به یک باشد ، آنگاه : $(x,y) \in f \quad ; \quad \left(f^{-۱}\right)'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$

مثال : اگر $f(x) = x^{۳} + ۲x - ۲$ ، آنگاه $\left(f^{-۱}\right)'(۱)$ کدام است ؟

مثال : اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ، آنگاه $\left(f^{-۱}\right)'(\frac{۳}{۵})$ کدام است ؟

مثال : اگر $g(x) = \frac{۱}{x} f^{-۱}(x)$ و $f'(۴) = \frac{۱}{۲}, f(۴) = ۲$ ، آنگاه $g'(۲)$ را بیابید .

مثال : معادله خط مماس بر منحنی وارون تابع $f(x) = \frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}$ در نقطه $x = \frac{۱}{۲}$ واقع بر تابع وارون را بنویسید .

مثال : اگر $x > ۰$, $f(x) = xe^{x}$ خط مماس بر تابع $f^{-۱}$ در نقطه ای به طول e واقع بر آن ، محور y را با کدام عرض قطع می کند ؟

مشتق توابع وارون مثلثاتی

مشتق	تابع	

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱	$y=\sin^{-1}x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
۲	$y=\cos^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
۳	$y=\tan^{-1}x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
۴	$y=\cot^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$

مثال : ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $y=\sin^{-1}\sqrt{2x-1}$ در $x=\frac{3}{4}$ را بیابید ؟

مثال : در چه نقاطی مماس بر منحنی $y=\tan^{-1}2x$ موازی با نیمساز ربع اول و سوم است ؟

مشتق مراتب بالاتر :

اگر f روی بازه باز I مشتق پذیر باشد آنگاه ممکن است f' نیز در I یا نقاطی از آن مشتق پذیر باشد :

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

مشتق مرتبه n ام را با $f^{(n)}$ ، $y^{(n)}$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ نمایش می دهند .

مثال : اگر مشتق مرتبه دوم $y=\tan^{-1}x+ax^2$ در $x=1$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد ، a را بیابید .

مثال: از رابطه $x^2y-y^2-2\sqrt{x}+4=0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $(1,2)$ کدام است ؟

$$2xy+x^2y'-2yy'-x^{\frac{-1}{2}}=0\xrightarrow{(1,2)}4+y'-4y'-1=0\Rightarrow y'=1$$

$$2(y+xy')+2xy'+y''x^2-2(y'^2+y''y)+\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=0\xrightarrow[y'=1]{(1,2)}y''=\frac{13}{6}$$

مثال: اگر $g(x)=f(2x-\sin x)$ و $g''(\pi)=-18$ و $f''(2\pi)$ کدام است ؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : a,b را چنان بیابید که $f(x)=\begin{cases} bx^{۳}+cx & x<۱ \\ x^{۴}+a & x\geq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق مرتبه دوم داشته باشد . (پیوستگی – مشتق اول چپ و راست و مشتق دوم چپ و راست را بررسی می کنیم)

مشتق مراتب بالاتر برخی از توابع :

	تابع	مشتق مرتبه n ام
۱	$y=x^{n}$	$y^{(n-۱)}=n!x \quad , \quad y^{(n)}=n!$
۲	$y=\dfrac{۱}{ax+b}$	$y^{(n)}=\dfrac{(-a)^{n}\,n!}{(ax+b)^{n+۱}}$
۳	$y=\sin ax$	$y^{(n)}=a^{n}\sin\left(ax+\dfrac{n\pi}{۲}\right)$
۴	$y=\cos ax$	$y^{(n)}=a^{n}\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{۲}\right)$

مثال: مشتق مرتبه ششم توابع زیر را بنویسید .

$$\odot y=\left(x^{۲}+۲x+۱\right)^{۳}\rightarrow y=(x+۱)^{۶}\Rightarrow y^{(۶)}=۶!$$

$$\odot y=(۳x-۱)^{۶}\rightarrow y\approx ۳^{۶}x^{۶}\Rightarrow y^{(۶)}=۳^{۶}\times ۶!$$

$$\odot y=\frac{۴x+۱}{۲x-۱}\rightarrow y=۲+\frac{۳}{۲x-۱}\Rightarrow y^{(۶)}=\frac{۳\times(-۲)^{۴}\times ۶!}{(۲x-۱)^{۷}}=\frac{-۴۸\times ۶!}{(۲x-۱)^{۷}}$$

$$\odot y=\frac{۲x^{۲}+۲x+۱}{x+۱}\rightarrow y=۲x+\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow y^{(۶)}=\frac{۶!}{(x+۱)^{۷}}$$

$$\odot y=\frac{x^{۳}}{۱-x}\rightarrow y=\frac{x^{۳}-۱+۱}{۱-x}=-(x^{۲}+x+۱)+\frac{۱}{۱-x}\Rightarrow y^{(۶)}=\frac{۶!}{(۱-x)^{۷}}$$

$$\odot y=\sin^{۲}۲x\rightarrow y=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x\Rightarrow y^{(۶)}=-\frac{۱}{۲}\times ۲^{۶}\cos(۲x+۳\pi)=-۳\times ۲^{۹}\cos ۲x$$

کار برد های مشتق :

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱) آهنگ تغییرات :

به نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل ، آهنگ تغییرات گفته می شود (در مورد متحرک آهنگ تغییر را سرعت می گویند)

آهنگ متوسط تغییرات $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$ آهنگ لحظه ای تغییرات $\frac{dy}{dx}=f'(x)$

مثال : آهنگ آنی تغییر حجم کره نسبت به سطح آن وقتی مساحت سطح $S=\pi$ است . را بیابید.

مثال : آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[۰,۳]$ از آهنگ لحظه ای آن در $x=\sqrt{۲}$ چقدر کمتر است ؟

مثال : متحرکی روی محور x ها حرکت می کند ، اگر معادله حرکت $x=t^۲-۸t+۲۰$ باشد ، بعد از طی چه مسافتی متوقف می شود ؟

مثال : معادله حرکت گلوله ای که از زمین به هوا پرتاب شده است به صورت $s=-۵t^۲+۲۰t$ است . سرعت توپ در زمان برخورد با زمین چقدر است ؟ (راهنمایی : یعنی در ارتفاع صفر)

۲) تقریب زدن :

با توجه به تعریف مشتق در مقادیر خیلی کوچک h می توان نوشت :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx f'(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)}$$

نکته : اگر $C(x)$ هزینه تولید x کالا باشد ، هزینه نهایی $(x+۱)$ امین کالا برابر $C(x+۱)-C(x)\approx C'(x)$ است .

مثال : کدام یک تقریب بهتری برای $\sqrt{۷۹}$ است ؟

۱) $۹-\frac{۱}{۹}$ ۲) $۹-\frac{۱}{۸}$ ۳) $۹-\frac{۱}{۷}$ ۴) $۹-\frac{۱}{۱۰}$

مثال : اگر $C(x)=\frac{x^۲}{۵}+۵x+۲۰۰$ و $R(x)=\frac{x^۲}{۴}+۱۰۰x+۵۰۰۰$ به ترتیب تابع هزینه و فروش یک شرکت باشد ، سود نهایی ۲۰۰۱ امین محصول چقدر است ؟

۳) آهنگ تغییر وابسته :

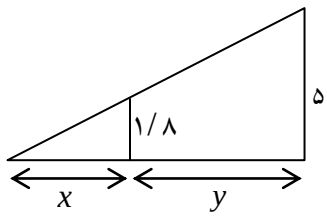
دانلود از سایت ریاضی سرا

مسائلی که دو متغیر وابسته، خود تابعی از زمان هستند . رابطه دو متغیر را نوشته و : $y'_t = y'_x \times x'_t$

مثال : متحرکی روی نمودار $y = \sqrt[۳]{x^۲ + ۲x}$ حرکت می کند ، اگر آهنگ آنی افزایش مولفه x آن ۳ متر بر ثانیه باشد ، در لحظه $x = ۲$ مولفه y آن با چه آهنگی افزایش می یابد ؟

مثال: ذره ای روی منحنی $x^۳ - y^۳ - xy = ۷$ در حال حرکت است . اگر مولفه x آن با سرعت ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد ، وقتی ذره به نقطه $(۱,۲)$ می رسد ، مولفه y آن با چه سرعتی تغییر می کند ؟

مثال: فردی با قد ۱۸۰ سانتی متر با سرعت ۴۰ سانتی متر در ثانیه به طرف تیر برقی حرکت می کند که ارتفاع آن ۵ متر است . طول سایه آن با چه سرعتی تغییر می کند ؟

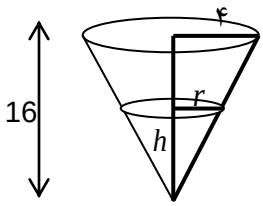


حل :

$$\frac{x}{x+y} = \frac{۱/۸}{۵} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۹}x \Rightarrow y'_t = \frac{۱۶}{۹}x'_t \Rightarrow$$

$$x'_t = \frac{۹}{۱۶}y'_t = \frac{۹}{۱۶}\times(-۴۰) = -۲۲/۵ \quad \frac{cm}{s}$$

مثال: در یک دستگاه تصویه به شکل مخروط برعکس ، محلول با سرعت ۲ سانتی متر مکعب در دقیقه از ظرف خارج می شود، هنگامی که ارتفاع محلول در ظرف ۸ سانتی متر است . سرعت کاهش ارتفاع محلول چند سانتی متر بر دقیقه است ؟

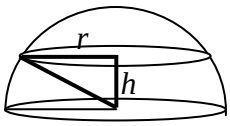


حل :

$$\frac{۸}{۱۶} = \frac{r}{۴} \Rightarrow r = ۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{۱۶} = \frac{r}{۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۴}h$$

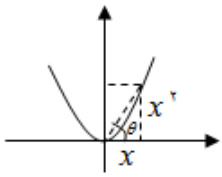
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۴۸}\pi h^۳ \Rightarrow V'_t = \frac{۱}{۱۶}\pi h^۲ h'_t = ۴\pi h'_t \Rightarrow ۲ = ۴\pi h'_t \Rightarrow h'_t = \frac{۱}{۲\pi}$$

مثال: در یک نیم کره به شعاع ۲۵ ، صفحه p موازی قاعده با سرعت ۰/۰۴ از آن دور می شود در حالی که فاصله دو صفحه ۱۲ است . سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه p و نیم کره کدام است ؟



$$r = \sqrt{۶۲۵ - h^۲} \Rightarrow S = \pi r^۲ = \pi(۶۲۵ - h^۲) \Rightarrow S'_t = -۲\pi h h'_t = -۲۴\pi \times ۰/۰۴ = -۰/۹۶\pi$$

تست : متحرکی روی منحنی $y = x^۲$ مطابق شکل در حرکت است ، مولفه x آن با آهنگ ثابت ۱۰ واحد در ثانیه افزایش می یابد . در لحظه ای که $x = ۳$ باشد ، آهنگ تغییر θ را بابید .



حل : $\tan\theta = \frac{x^۲}{x} = x \Rightarrow (۱+\tan^۲\theta)\theta'_t = x'_t \Rightarrow (۱+۹)\theta'_t = ۱۰ \Rightarrow \theta'_t = ۱$

۴) اکسترمم های نسبی :

دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطه بحرانی : $\boxed{\text{نقاط درونی دامنه}}$ مانند c که $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را نقاط بحرانی تابع می گویند .

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ را بیابید .

مثال : مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است ؟

مثال : طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ کدام است ؟

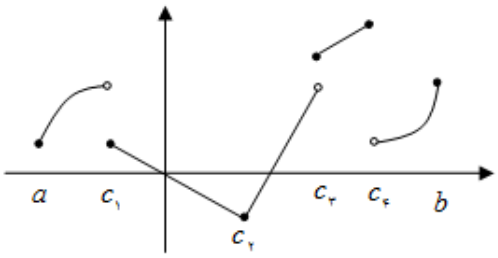
مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ در بازه $(-1,1)$ کدام است ؟

اکسترمم از نظر هندسی : اکسترمم های نسبی تابع در این نقاط اتفاق می افتند و $f(c)$ ماکزیمم نسبی است ، اگر از عرض نقاط کناری بالاتر باشد و مینیمم نسبی است ، اگر از عرض نقاط کناری پایین تر باشد .

نتیجه : نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نمی توانند طول اکسترمم های نسبی باشند .

نتیجه: تابع ثابت بیشمار نقطه بحرانی و در نتیجه بیشمار اکسترمم نسبی دارد .

مثال : شکل مقابل نمودار تابع در $[a,b]$ است . تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است ؟ (س ۸۰)



تشخیص نوع اکسترمم در نقطه بحرانی :

۱) **آزمون مشتق اول** :

تابع مشتق را در اطراف نقاط بحرانی تعیین علامت می کنیم . اگر تابع در اطراف نقطه بحرانی c به صورت $\overset{-}{\searrow} c \overset{+}{\nearrow}$ باشد این نقطه طول نقطه مینیمم نسبی است و اگر به صورت $\overset{+}{\nearrow} c \overset{-}{\searrow}$ باشد این نقطه طول نقطه ماکزیمم نسبی است .

مثال : به کمک آزمون مشتق اول ، نقاط اکسترمم نسبی و نوع آنها را برای توابع زیر مشخص کنید .

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y=\sqrt[3]{x^2(x-1)} \qquad y=\sqrt{3}x-2\cos x \qquad (0,\pi) \qquad y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

۲) **آزمون مشتق دوم** :

در مورد نقاط بحرانی c که $f'(c)=0$ است در صورتی $f''(c)>0$ ، c طول نقطه مینیمم نسبی است و در صورتی که $f''(c)<0$ ، c طول نقطه ماکزیمم خواهد بود .

مثال : به کمک آزمون مشتق دوم ، نقاط اکسترمم نسبی و نوع آنها را برای توابع زیر مشخص کنید .

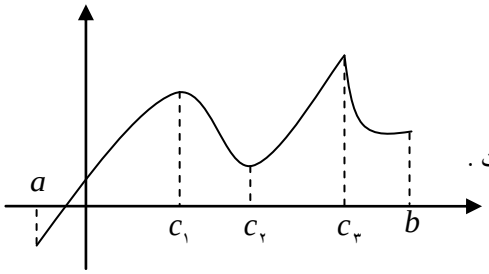
$$y=x^2e^{-x} \qquad y=\sin x+\cos x \qquad (0,2\pi) \qquad y=3x^5-5x^3$$

۵) **اکسترمم های مطلق :**

در نقاط بحرانی و کناره دامنه $f(c)$ ماکزیمم مطلق است ، اگر از عرض تمام نقاط بالاتر باشد و مینیمم مطلق است ، اگر از عرض تمام نقاط پایین تر باشد .

نتیجه: اکسترمم های مطلق به جز در نقاط کناره ، اکسترمم نسبی نیز هستند .

مثال :



a طول مینیمم مطلق و c_3 طول ماکزیمم مطلق است .

c_1,c_2,c_3 به ترتیب طول نقاط ماکزیمم، مینیمم ، ماکزیمم نسبی است .

مثال : اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<1 \\ \sqrt{x-1} & 1\le x\le 5 \end{cases}$ باشد ، آنگاه :

۱) مینیمم مطلق دارد ۲) ماکسیمم مطلق دارد ۳) ماکسیمم نسبی دارد ۴) هیچ کدام

یافتن مقدار اکسترمم های مطلق :

در یک جدول طول نقاط بحرانی و طول نقاط کناره را می نویسیم ، سپس عرض تمام آنها را بدست می آوریم . بیشترین و کمترین عرض ، به ترتیب ماکسیمم و مینیمم مطلق هستند .

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : بیشترین مقدار تابع $y = \sin ۲x + ۲\cos x$ کدام است ؟

مثال : کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$ کدام است ؟

مثال : مجموع مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{۴ - x^۲}$ کدام است ؟

مثال : برد تابع $y = \tan^{-۱}\left(x^۲ + ۲x + ۲\right)$ کدام است ؟ (نقاط کناره دامنه بی نهایت هستند و مقدار تابع در آنها $\frac{\pi}{۲}$ است)

مثال : اکسترمم های مطلق توابع زیر را در بازه داده شده مشخص کنید .

$y = \frac{۳x}{۹ + x^۲}$ $[۰,۴]$ $y = x^۲ + |x + ۲|$ $[-۳,-۱]$ $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$ $[-۲,۲]$

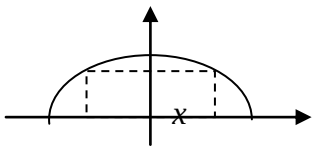
۶) بهینه سازی :

به مسائلی گفته می شود که هدف ماکزیمم کردن سود یا مینیمم کردن ضرر باشد .

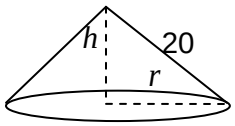
مثال : بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می توان با یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است ، محصور نمود . ۶۴۸ متر مربع است .طول طناب کدام است ؟

مثال: مستطیلی به محور های مختصات و خط $y = \frac{۴ - x}{۲}$ محدود شده است . طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکسیمم شود ؟

مثال: بیشترین مساحت از مستطیل هایی که دو رأس آن روی $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ها باشند ، کدام است ؟ (تابع داده شده ، نیم بیضی بالای محور x است)

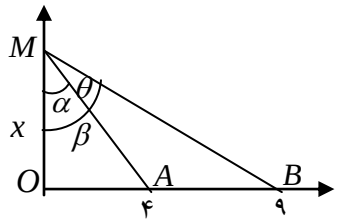


مثال: یک مخروط به مولد ۲۰ می خواهیم بسازیم . ارتفاع این مخروط چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود ؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نقطه M با کدام ارتفاع روی محور قائم انتخاب شود تا $A\hat{M}B$ بیشترین باشد ؟



حل :

$$\tan\beta = \frac{۹}{x}, \tan\alpha = \frac{۴}{x} \Rightarrow \tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{۹}{x}-\frac{۴}{x}}{۱+\frac{۳۶}{x^۲}} = \frac{۵x}{x^۲+۳۶}$$

با گرفتن مشتق معلوم می شود که بیشترین مقدار در $x=۶$ رخ می دهد .

مثال : کوتاه ترین فاصله مبدأ از نقاط منحنی $y=\frac{۲}{x^۲}$ کدام است ؟

حل : هر نقطه منحنی به صورت $(x,\frac{۲}{x^۲})$ است و داریم :

$$d=\sqrt{x^۲+\frac{۴}{x^۴}} \xrightarrow{y=x^۲+\frac{۴}{x^۴}} y'=۲x-\frac{۱۶}{x^۵}=۰ \Rightarrow x^۶=۸ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow d_{\min}=\sqrt{۳}$$

۷) تعیین نوع یکنوایی :

f' را تعیین علامت می کنیم ، در نقاطی که مشتق مثبت باشد ، تابع صعودی و در نقاطی که منفی باشد تابع نزولی است .

مثال : تابع $y=x^۳-۳x^۲-۹x$ در کدام بازه اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است ؟

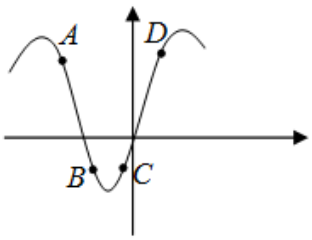
مثال : تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ در چه محدوده ای صعودی است ؟

مثال : حدود m را طوری تعیین کنید که $y=x^۳+mx^۲+x$ همواره صعودی باشد .

۸) جهت تقعر :

الف) تقعر رو به بالا : تابع بالای مماس های خود است و $f''>۰$

ب) تقعر رو به پایین : تابع زیر مماس های خود است و $f''<۰$



مثال : در کدام نقطه از نمودار مقابل f', f'' هردو مثبت هستند ؟

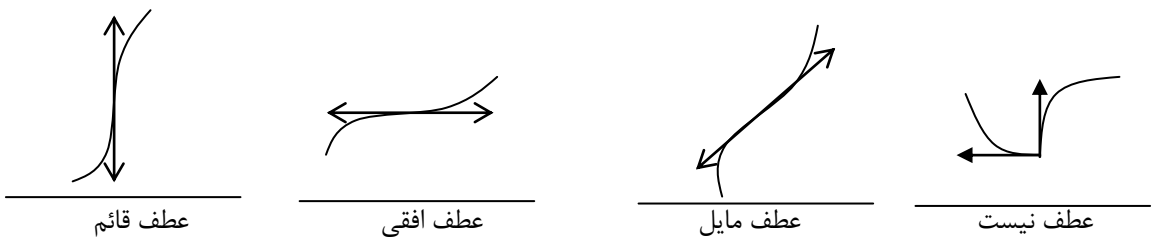
دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطه عطف : نقاط بحرانی تابع f'' مانند c نقطه عطف است ، اگر :

۱)در c پیوسته باشد. (در توابع چند ضابطه ای بررسی می شود)

۲) f' در اطراف c تغییر علامت ندهد (مشتق پذیر یا هردو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ باشد)

۳) f'' در اطراف c تغییر علامت دهد . (اگر ریشه صورت یا مخرج باشد از مرتبه فرد باشد)



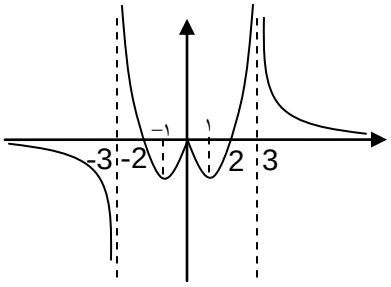
توجه : در نقطه عطف جهت تقعر تغییر کرده و مماس از منحنی عبور می کند .

مثال : نقاط عطف و جهت تقعر هر کدام از توابع زیر را مشخص کنید .

$$y = x^{۲} + \sqrt{x} \qquad y = \frac{۱}{۱+x^{۲}} \qquad y = \tan^{-۱} x \qquad y = \left|x^{۲} - ۳x\right|$$

مثال : c, b, a را چنان بیابید که $(۱,۲)$ نقطه عطف تابع $y = ax^{۳} + ۳bx^{۲} - c$ بوده و نمودار آن محور عرض ها را در ۴ قطع کند .

مثال : نمودار تابع f' به صورت شکل مقابل است . تابع f پیوسته باشد کدام نقطه اکسترمم نسبی و کدام عطف است ؟



حل : در ۳- و۳ مشتق وجود ندارد و در ۲- و ۰ و ۲ مشتق صفر است

پس این نقاط بحرانی هستند و در ۳- و ۲ مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد پس نقاط مینیمم داریم .

و در ۲- مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد پس ماکسیمم داریم .

و در ۳- و ۰ مشتق تغییر علامت نمی دهد و اکسترمم نداریم .

و نقاط بحرانی مشتق دوم ۳- و۳ و ۱- و ۱ است . که در ۳- مشتق چپ و راست متفاوت است و لذا عطف نیست .ولی بقیه عطف هستند .

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) رسم نمودار :

دامنه را مشخص می کنیم .

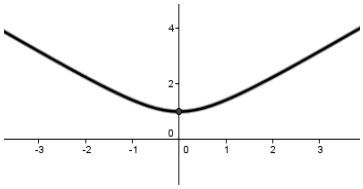
مجانب ها را در صورت وجود می یابیم .

نقاط برخورد با محور ها و نقاط بحرانی و عطف را به دست می آوریم .

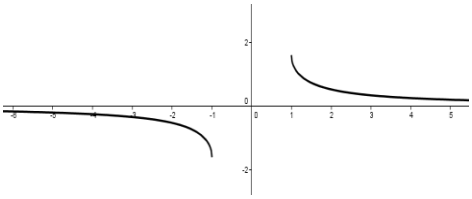
جدول رفتار تابع را که شامل y, y'', y' است را رسم می کنیم و طبق آن نمودار را می کشیم .

مثال : جدول رفتار و نمودار تابع های داده شده را رسم کنید .

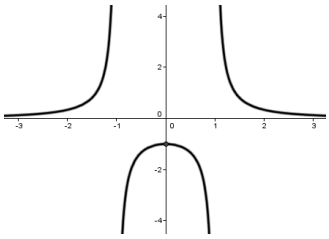
$y=\sqrt{x^{۲}+۱}$



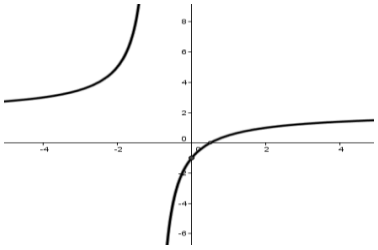
$y=\sin^{-۱}(\frac{۱}{x})$



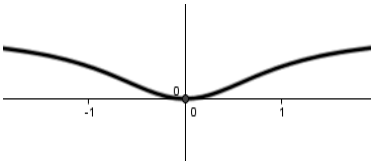
$y=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$



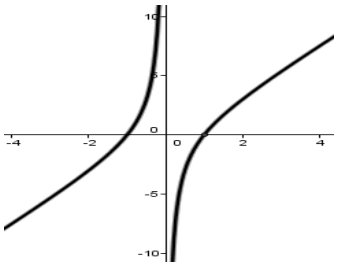
$y=\frac{۲x-۱}{x+۱}$



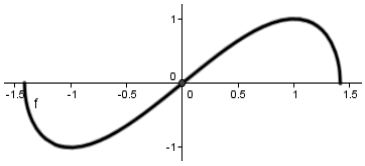
$y=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$



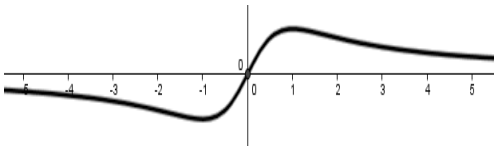
$y=\frac{۲x^{۲}-۲}{x}$



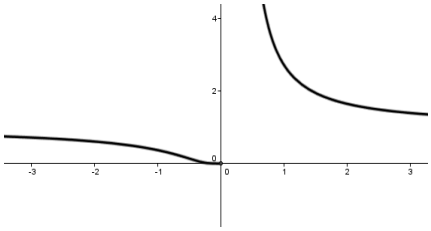
$y=x\sqrt{۲-x^{۲}}$



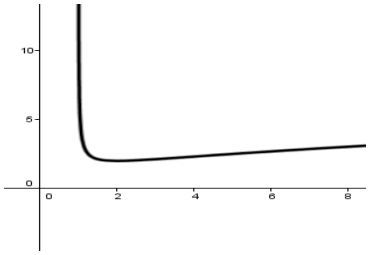
$y=\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$



$y=e^{\frac{۱}{x}}$



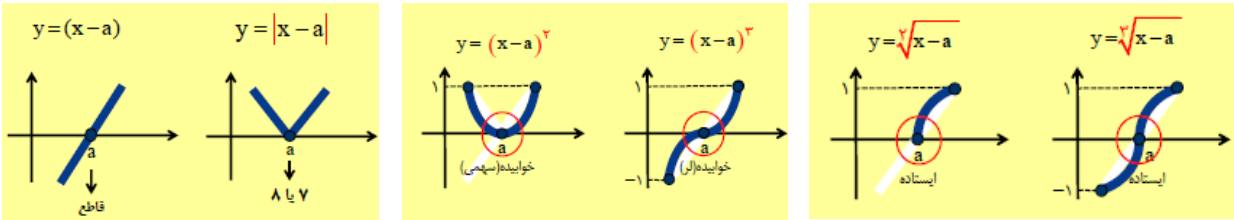
$y=\frac{x}{\sqrt{x-۱}}$



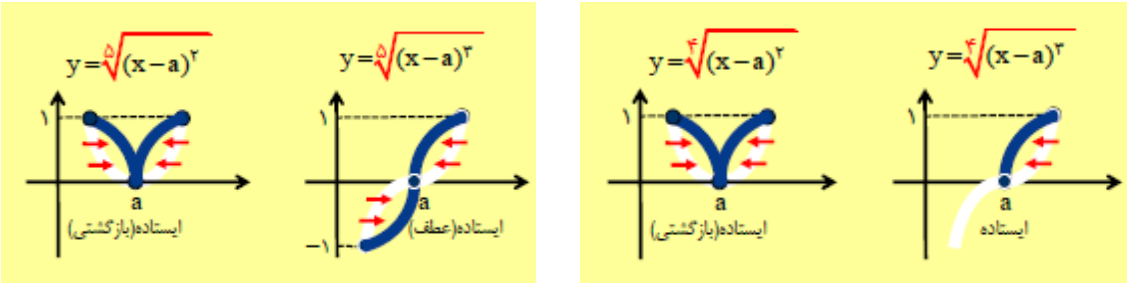
دانلود از سایت ریاضی سرا

رسم توابع تجزیه پذیر : (کاربرد در یافتن حدود برد ، یکنوایی، نقاط اکسترمم و عطف و...)

با توجه به این نکته که « اعداد بین ۰ و ۱ اگر به توان برسند ، کوچک تر و اگر فرجه بگیرند بزرگ تر می شوند » تابع در اطراف ریشه خود به صورت های زیر هستند :



وقتی فرجه بر توان غلبه کند :

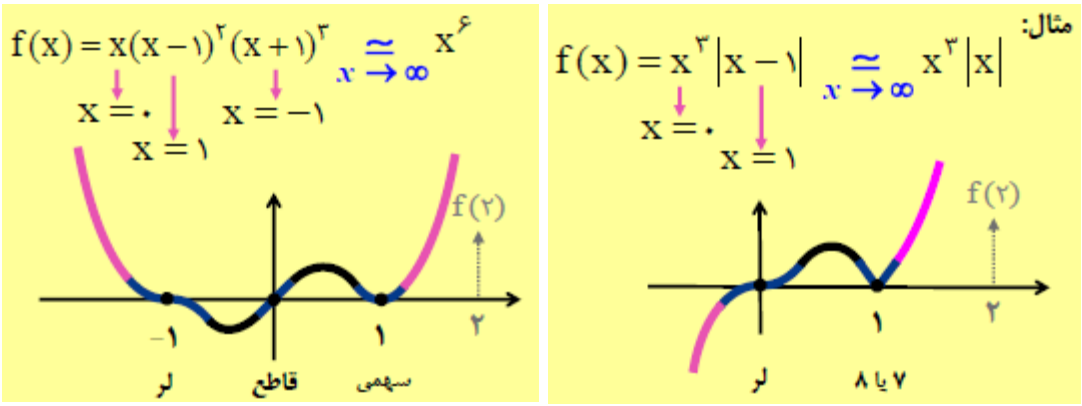


مراحل رسم نمودار تابع :

۱. دامنه ، ریشه ها و نوع آنها ، مجانب های قائم و نوع آنها ، را تعیین می کنیم .

۲. مجانب های افقی و مایل ، محل برخورد نمودار با مجانب ها و نوع برخورد را می یابیم .

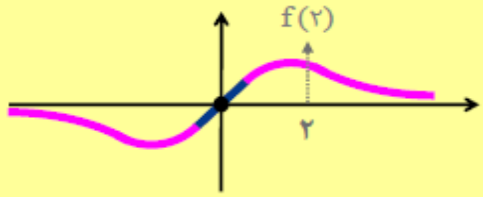
۳. با تعیین مقدار تابع در یک محدوده و نوع ریشه ها و مجانب ها ، تابع را رسم می کنیم .



دانلود از سایت ریاضی سرا

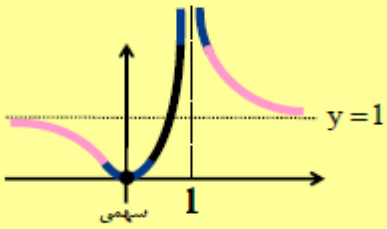
مثال:

$$f(x)=\frac{x}{x^{2}+1} \quad x=0 \quad \underset{x\to\infty}{\cong} \frac{x}{x^{2}}=0$$



قاطع

$$y=\frac{x^{2}}{(x-1)^{2}} \quad \underset{x\to\infty}{\cong} \frac{x^{2}}{x^{2}}=1$$

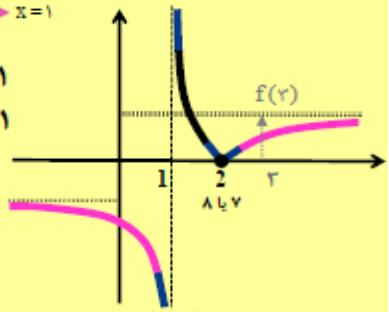


سهمی

انفصال زوج

$$y=\frac{|x-2|}{x-1} \quad x=2 \quad x=1$$

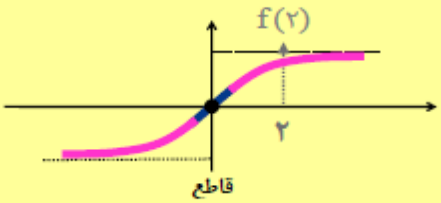
$$\begin{cases} y \underset{x\to+\infty}{\cong} 1 \\ y \underset{x\to-\infty}{\cong} -1 \end{cases}$$



۷ یا ۸

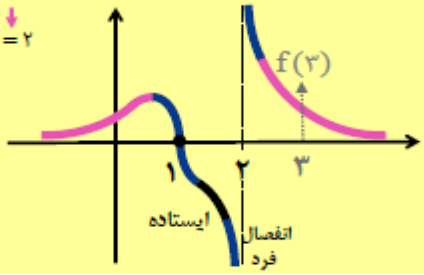
انفصال فرد

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}} \quad x=0 \quad \underset{x\to\infty}{\cong} \frac{x}{|x|} \begin{cases} \underset{x\to+\infty}{\cong} 1 \\ \underset{x\to-\infty}{\cong} -1 \end{cases}$$



قاطع

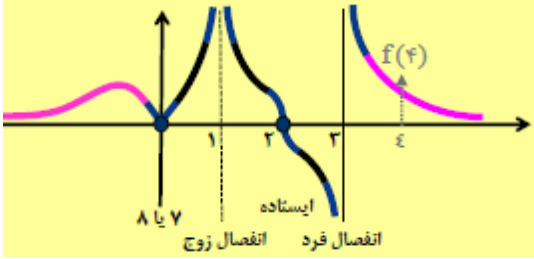
$$y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-2} \quad x=1 \quad x=2 \quad \underset{x\to\infty}{\cong} 0$$



ایستاده

انفصال فرد

$$y=\frac{|x|\sqrt[3]{x-2}}{(x-1)^{2}(x-3)} \quad \underset{x\to\infty}{\cong} \frac{|x|\sqrt[3]{x}}{x^{2}.x} \quad \underset{x\to\infty}{\cong} 0$$



۷ یا ۸

ایستاده

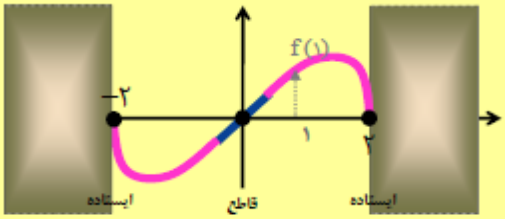
انفصال زوج

انفصال فرد

مثال:

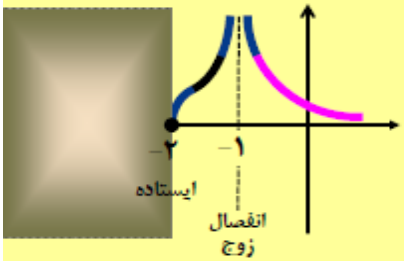
$$f(x)=x\sqrt{4-x^{2}} = x\sqrt{(2-x)(2+x)}$$

$x=0 \quad x=2 \quad x=-2$



ایستاده قاطع ایستاده

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)^{2}} \qquad D_f=[-2,+\infty)-\{-1\}$$



ایستاده

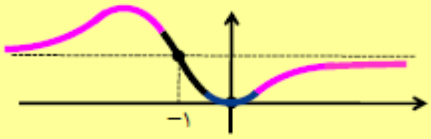
انفصال زوج

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال:

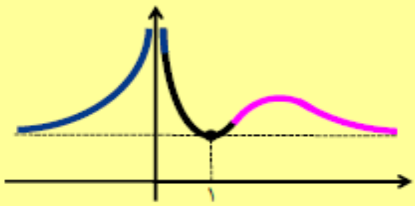
$$f(x)=\frac{\overset{\to x=0}{x^{2}}}{x^{2}+x+1} \underset{x\to\infty}{\simeq} 1$$

$$\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=1 \to x^{2}=x^{2}+x+1 \to x=-1$$



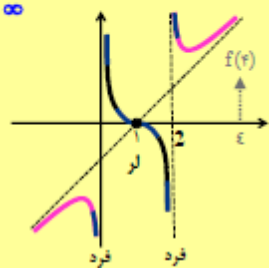
$$f(x)=\frac{x^{4}+x^{2}-2x+1}{x^{4}}=\frac{x^{4}+(x-1)^{2}}{\underset{\to x=0}{x^{4}}} \underset{x\to\infty}{\simeq} 1$$

$$\frac{x^{4}+(x-1)^{2}}{x^{4}}=1 \to (x-1)^{2}=0 \to x=1$$



$$y=\frac{(x-1)^{2}}{x^{2}-2x} \to y=\frac{(x-1)^{3}}{x(x-2)} \begin{matrix}\to x=1\\ \to x=0\ ,\ x=2\end{matrix}$$

$$y=\frac{\boxed{x^{2}}\boxed{-3}x^{2}+3x-1}{\boxed{x^{2}}\boxed{-2}x} \underset{x\to\infty}{\simeq} x-1$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل چهارم : انتگرال

نماد سیگما :

یک نماد فشرده سازی برای نوشتن جمع است : $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

مثال : جمع های زیر را بسط دهید .

$$\sum_{m=1}^{k} \sin\frac{m\pi}{3k} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

مثال : جمع های زیر را با نماد سیگما بنویسید .

$$1)\ 5+6+7+8+9 \qquad 2)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$$

$$3)\ 1+2x+3x^2+\ldots+100x^{99} \qquad 4)\ \frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots$$

خواص سیگما :

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} c = nc \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c \qquad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$4)\ \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$$ قاعده لغزندگی

$$5)\ \sum_{i=m}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_m - a_{n+1}$$ قاعده تلسکوپی

چند مجموع معروف :

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2\ldots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل جمع های زیر را بیابید .

$$۱)\sum_{i=۱}^{۲۰} i(i+۱) \qquad ۲)\sum_{k=۱}^{۲۰}((k-۱)^{۳}+۳k) \qquad ۳)\sum_{n=۱}^{۱۰}((\frac{۱}{۲})^{n}+۱)$$

$$۴)\sum_{n=۱۰۰}^{۲۰۰}\frac{۱}{n^{۲}+n} \qquad ۵)\sum_{k=۱}^{۲۴}\frac{\sqrt{k+۱}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^{۲}+k}} \qquad ۶)\sum_{n=۱}^{۱۰۰}\log\frac{n+۲}{n+۱}$$

مساحت به عنوان حد مجموع :

اگر تابع پیوسته f را در بازه $[a,b]$ به n قسمت مساوی تقسیم کنیم آنگاه مساحت زیر نمودار طبق مراحل زیر بدست می آید

$$۱)\Delta x=\frac{b-a}{n} \qquad ۲)x_i=a+i\Delta x \qquad ۳)S_n=\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad ۴)\lim_{n\to+\infty} S_n=A$$

مثال : به کمک حد مجموع ، مساحت ناحیه تحت خط $y=x+۱$ و محدود به خطوط $x=۲, x=۰$ را بیابید .

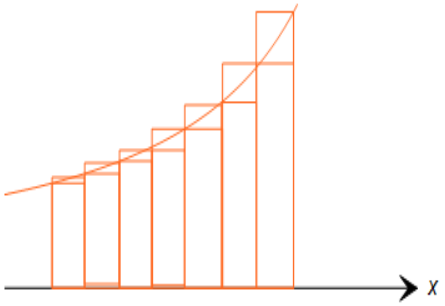
مثال : به کمک حد مجموع ، مساحت ناحیه تحت منحنی $y=x^{۲}+۱$ و محدود به خطوط $x=۴, x=۰$ را بیابید .

مجموع بالا و پایین ریمان

اگر در افزار یک بازه به n قسمت مساوی ، l_i را طول نقطه مینیمم هم بازه و u_i را طول نقطه ماکسیمم هر بازه در نظر بگیریم ، مجموع پایین و بالای ریمان را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$L_n=\sum_{i=۱}^{n} f(l_i)\Delta x=\left(f(l_۱)+f(l_۲)+...+f(l_n)\right)\Delta x$$

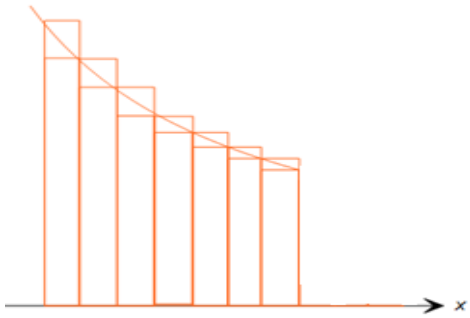
$$U_n=\sum_{i=۱}^{n} f(u_i)\Delta x=\left(f(u_۱)+f(u_۲)+...+f(u_n)\right)\Delta x$$



نکته : در توابع صعودی ، نقاط ابتدایی هر بازه طول نقطه مینیمم

و نقاط انتهایی هر بازه طول نقطه ماکسیمم است .

دانلود از سایت ریاضی سرا



نکته : در توابع نزولی ، نقاط ابتدایی هر بازه طول نقطه ماکسیمم

و نقاط انتهایی هر بازه طول نقطه مینیمم است .

نکته: اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد ، اختلاف مجموع بالا و پایین ریمان $\left|f(b)-f(a)\right|\Delta x$ است .

مثال : مجموع بالا و پایین ریمان تابع $y=x^{۲}+۱$ در بازه $[۰,۴]$ را به ازای $n=۴$ بیابید .

مثال : مجموع بالا و پایین ریمان تابع $y=\frac{۱}{x}$ در بازه $[۱,۳]$ را به ازای $n=۵$ بیابید .

مثال : مجموع بالا و پایین ریمان تابع $y=\cos x$ در بازه $[۰,\pi]$ را به ازای $n=۴$ بیابید .

مثال : مجموع بالا و پایین ریمان تابع $y=e^{x}$ در بازه $[-۲,۲]$ را به ازای $n=۴$ بیابید .

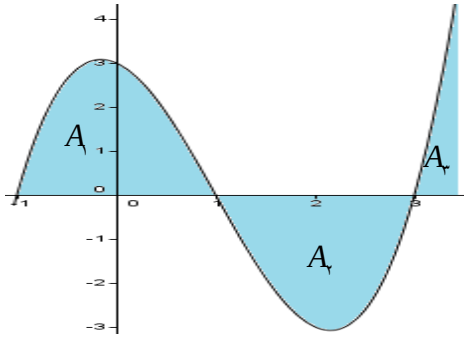
مثال : اختلاف مجموع ریمان بالا و پایین برای تابع $y=\frac{x}{x+۱}$ در بازه $[۲,۶]$ به ازای $n=۸$ را بیابید .

مثال : مجموع بالای ریمان تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ را روی بازه $[۰,۱]$ بیابید و $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n(f)$ را حساب کنید .

انتگرال معین :

اگر f تابعی کراندار در بازه $[a,b]$ باشد . و دنباله های $\{U_n\},\{L_n\}$ هر دو به عدد A همگرا باشند . می گوییم تابع در این بازه انتگرال پذیر است و $\int_a^b f(x)\,dx=A$.

و از نظر هندسی ، انتگرال معین ، مساحت (علامت دار) محصور بین تابع و محور طول ها و خطوط $x=b, x=a$ است :



$$\int_a^b f(x)\,dx=A_۱-A_۲+A_۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل $\int_{-1}^{3}(x-[x])dx$ را با استفاده از رسم نمودار و مفهوم مساحت بدست آورید .

مثال : حاصل $\int_{-2}^{1}(|x|+[x])dx$ را با استفاده از رسم نمودار و مفهوم مساحت بدست آورید .

فرمول های انتگرال نامعین :

اگر $F'(x)=f(x)$ آنگاه $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ می نامند و خواهیم داشت : $\int f(x)dx=F(x)$

	فرمول انتگرال		فرمول انتگرال
۱	$y=\int dx=x+c$	۷	$y=\int \tan axdx=-\frac{1}{a}Ln\lvert\cos ax\rvert+c$
۲	$y=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad n\neq -1$	۸	$y=\int \cot axdx=\frac{1}{a}Ln\lvert\sin ax\rvert+c$
۳	$y=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$	۹	$y=\int(1+\tan^2 ax)dx=\frac{1}{a}\tan ax+c$
۴	$y=\int\frac{dx}{x}=Lnx+c$	۱۰	$y=\int(1+\cot^2 ax)dx=\frac{-1}{a}\cot ax+c$
۵	$y=\int \sin axdx=\frac{-1}{a}\cos ax+c$	۱۱	$y=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$
۶	$y=\int \cos axdx=\frac{1}{a}\sin ax+c$	۱۲	$y=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

مثال : حاصل انتگرال های زیر را بیابید .

$\int\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx \qquad \int(x^2+2\sqrt{x}+\frac{1}{x^2})dx \qquad \int\frac{3x^2-x}{x}dx \qquad \int x(5x^2-1)^2dx$

$\int \sin^2 xdx \qquad \int \sin 4x\cos 2xdx \qquad \int(\sin 3x+\tan x)dx \qquad \int\frac{2+e^{3x}}{e^x}dx$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته : انتگرال معین را با استفاده از انتگرال نامعین به صورت مقابل می توان حساب کرد : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

مثال : حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید .

$$\int_{۱}^{۴} (\sqrt{x})^{۵}(x\sqrt{x}+\frac{۱}{x})dx \qquad \int_{۰}^{۱} \frac{(x+۱)^{۲}}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}} \sin^{۲} ۲x dx \qquad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sin ۳x \cos x dx$$

$$\int_{e}^{۰} \frac{dx}{x}dx \qquad \int_{۰}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^{۲}}} \qquad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{dx}{۱+x^{۲}} \qquad \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \cos x dx$$

نکته : در صورتی که تابع درون انتگرال دارای جزء صحیح یا قدر مطلق باشد ، باید حدود انتگرال را به طور مناسب محدوده بندی و انتگرال را به چند انتگرال با حدود مناسب تبدیل و سپس آن را محاسبه کرد . به طور مثال :

$$\int_{-۲}^{۱} |x^{۲}+x| dx = \int_{-۲}^{-۱} (x^{۲}+x)dx + \int_{-۱}^{۰} -(x^{۲}+x)dx + \int_{۰}^{۱} (x^{۲}+x)dx = (\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{-۲}^{-۱} - (\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{-۱}^{۰} + (\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱۱}{۶}$$

مثال : حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید .

$$\int_{۰}^{۲} x^{۲}[x]dx \qquad \int_{۰}^{۴} (\left[\frac{x}{۳}\right]+[x])dx \qquad \int_{۰}^{۲} [x+۱]|x-۱|dx \qquad \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} [x]\cos x dx$$

ویژگی ها انتگرال معین :

$$۱)\int_a^a f(x)dx = ۰ \qquad ۳)\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)dx \qquad ۵)\, f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$۲)\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰ \qquad ۴)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad ۶)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

مثال : حاصل انتگرال های زیر را بیابید .

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \sin x\, dx \qquad \int_{۲}^{۲} \sqrt{۴-x^{۲}}\, dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲x\, dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{dx}{۱+x^{۲}}$$

کران انتگرال :

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد دارای ماکسیمم M و مینیمم m است و انتگرال تابع در این بازه دارای حدود زیر است :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

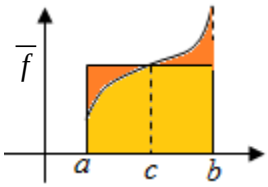
مقدار میانگین (مقدار متوسط) تابع در یک بازه :

مقدار میانگین تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با : $\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

از نظر هندسی مقدار متوسط وجود یک عدد مانند c در بازه فوق را بیان می کند

که مساحت مستطیل ایجاد شده با انتگرال تابع در این بازه برابر است :

(در نتیجه مساحت دو قسمت قرمز برابر است)



مثال : بدون محاسبه انتگرال ، یک کران بالا و یک کران پایین برای آن بنویسید . (ماکس و مین را با اکسترمم مطلق بیابید)

$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ $\int_0^2 \frac{dx}{10+x}$ $\int_0^3 (x^3-4x+3)dx$

مثال : نامساوی های زیر را اثبات کنید . (ماکس و مین را با اکسترمم مطلق بیابید)

$\frac{\pi}{6}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\cos^{-1}x dx\le\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{1}{2}$ $\frac{7}{6}<\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{1-x^2}<\frac{21}{10}$

مثال : مقدار میانگین تابع $y=2x+1$ را در بازه $[-1,3]$ را بدست آورده و مقدار c مربوط به آن را بدست آورید .

مثال : مقدار میانگین تابع $y=3x^2+2x$ را در بازه $[1,2]$ را بدست آورید . در چه نقطه ای از این بازه مقدار تابع با مقدار متوسط تابع برابر است ؟

مثال : مقدار میانگین تابع $y=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ را در بازه $[0,\pi]$ را بدست آورید .

مثال : مقدار میانگین تابع $y=\frac{1}{x}$ را در بازه $[0,e^2]$ را بدست آورید .

مشتق گیری از تابع انتگرال :

$$F(x)=\int_u^v f(t)dt \quad\Rightarrow\quad F'(x)=v'f(v)-u'f(u)$$

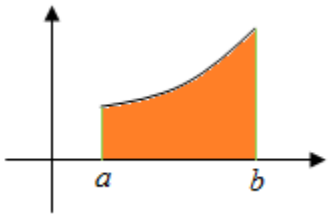
مثال : مشتق توابع زیر را بیابید .

$\frac{d}{dx}x^2\int_0^{5x}e^{-t^2}dt$ $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{\sin x}\frac{dt}{8+t^2}$ $F(x)=\int_{x^2}^{3}(\sin\sqrt{t+1}-t)dt$ $F(x)=\int_2^x\sin^{-1}t dt$

دانلود از سایت ریاضی سرا

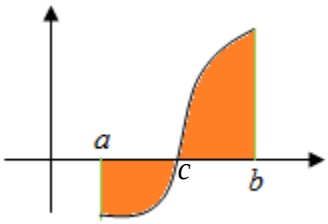
مساحت محصور بین منحنی تابع و محور طول ها در یک بازه :

الف) اگر تابع در بازه $[a,b]$ ریشه نداشته باشد :



$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

ب) اگر تابع در بازه $[a,b]$ ریشه داشته باشد :



$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=x^{۳}-۲۷$ ، محور طول ها و خطوط $x=۳, x=۱$ را بیابید .

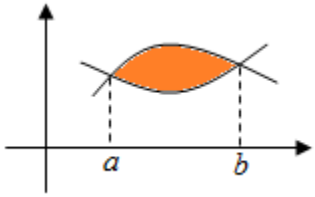
مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=۲-x^{۲}$ و محور طول های را بیابید .

مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=x^{۳}$ و محور طول های در بازه $[-۲,۲]$ را بیابید .

مثال : مساحت یک طاق $y=\sin x$ را بیابید .

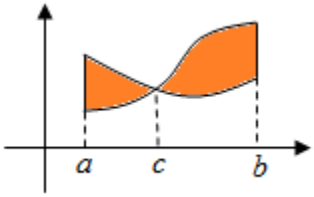
مساحت محصور بین منحنی دو تابع در یک بازه :

الف) اگر $g=f$ در بازه $[a,b]$ ریشه نداشته باشد .



$$S=\left|\int_a^b (f-g)\,dx\right|$$

ب) اگر $g=f$ در بازه $[a,b]$ ریشه داشته باشد :



$$S=\left|\int_a^c (f-g)\,dx\right|+\left|\int_c^b (f-g)\,dx\right|$$

مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=x^{۲}+۳x$ و $y=۲x^{۲}+x$ محور طول های را بیابید .

مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=x^{۳}$ و $y=۸$ محور عرض ها را بیابید .

مثال : مساحت سطح محصور بین تابع $y=x^{۲}$ و $y=x$ و خطوط $x=۲, x=۰$ را بیابید .

دانلود از سایت ریاضی سرا