مدلسازی ریاضی:

بیان مسأله به زبان ریاضی، یعنی به زبان اعداد و ارقام را مدلسازی ریاضی می‌نامیم، هر چه زبان ریاضی بکار ساده‌تر، ابتدایی‌تر و نتیجه کار به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک تر باشد، مدلسازی با ارزش‌تر است.

اندازه‌گیری:

تخصیص معیار عددی به یک صفت یا موضوع را اندازه گیری می‌گویند.

خطای اندازه‌گیری:

تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه گیری شده را خطای اندازه گیری می‌نامیم در مقایسه‌ی دو مقدار باد واحدهای اندازه گیری یکسان باشند.

تست) در مدلسازی ریاضی، برای مساحت دایره به قطر تقریبی ۱۰ واحد طول، اگر خطای اندازه گیری قطر کمتر از $\frac{1}{6\pi}$ واحد طول باشد خطای مساحت تقریباً کمتر از چند واحد مربع است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{5}{18}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{6}$

قطر: $d = 10 + E \implies r = \frac{d}{2} = \frac{10+E}{2}$

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{10+E}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(100 + 20E + E^2)$$

$$\implies S = 25\pi + 5\pi E$$

خطای مساحت: $5\pi E < 5\pi \times \frac{1}{6\pi} = \frac{5}{6}$

تست) در مدلسازی ریاضی برای حجم یک مکعب به ضلع تقریبی ۲ سانتی‌متر، اگر خطای حجم کمتر از یک سانتی‌متر مکعب باشد حداکثر خطای اندازه‌گیری ضلع مکعب چند سانتی‌متر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

پاسخ:

$a = 2 + E$

حجم مکعب $=$ (طول ضلع)^3 : $(2+E)^3 = 8 + 12E + 6E^2 + E^3$

$\implies$ حجم مکعب $= 8 + 12E$

$12E < 1 \implies E < \frac{1}{12}$

$\implies E < \frac{0}{08}$ خطای اندازه‌گیری ضلع کمتر از $0/08$ سانتی‌متر است

تعریف: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم سرشماری کرده‌ایم.

تست) در کدام بررسی، اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است؟ (تجربی ۸۹)

۱) نمونه تصادفی ۲) سرشماری

۳) دسته بندی ۴) متغیر کیفی

در سرشماری اندازه‌ی نمونه و اندازه‌ی جامعه با هم برابرند زیرا تک تک افراد جامعه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تست) در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟ (سراسری ۹۳)

۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد ۲) نمونه برابر جامعه‌ی آماری

۳) اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه ۴) نمونه، زیر مجموعه‌ی جامعه‌ی آماری

گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ همان سرشماری هستند.

داده: نتایج حاصل از سرشماری یا نمونه گیری را داده می گویند.

روش‌های جمع آوری داده:

۱) پرسش نامه

۲) مشاهده و ثبت وقایع

۳) استفاده از داده های از پیش تهیه شده

۴) آزمایش

تست) جمع‌آوری داده به کدام طریق مورد قبول نیست؟ (تجربی ۹۱)

۱) مصاحبه ۲) انجام آزمایش

۳) مشاهده ۴) پرسش هدایت کننده

اگر در جمع‌آوری داده ها از پرسش هدایت کننده استفاده کنیم روی نحوه‌ی جواب‌گویی افراد تأثیرگذار است پس گزینه‌ی (۴) مورد قبول نیست.

تست) کدام طریق برای جمع آوری داده مناسب نیست؟ (تجربی ۹۰)

۱) مصاحبه ۲) الگوی خاص ۳) مشاهده ۴) آزمایش

استفاده از الگوی خاص مناسب نیست زیرا نتیجه گیری بر اساس الگوی خاص صحیح نیست.

نمونه تصادفی ساده: نمونه‌ی خوب، نمونه‌ای است که:

۱) هر یک از اعضاء امکان حضور در نمونه را داشته باشند.

۲) قبل از انتخاب نمونه نتوانیم با اطمینان در مورد حضور و یا عدم حضور عضوی در نمونه قضاوت کنیم.

نمونه گیری به کمک اعداد تصادفی:

ابتدا به کمک ماشین حساب یک عدد تصادفی تولید می‌کنیم که بین صفر و یک است که با فشردن دکمه‌ی INV و یا فشردن RAN در ماشین حساب مهندسی به دست می‌آید.

عدد به دست آمده را در اندازه‌ی جامعه ضرب می‌کنیم قسمت اعشاری را حذف و یک واحد اضافه می‌کنیم که شماره فرد انتخاب شده از جامعه را نشان می دهد.

تست) برای انتخاب نمونه‌ی تصادفی بین ۱۵۰ نفر عدد تصادفی به وسیله‌ی ماشین حساب ۰/۲۵۶ ظاهر شده است شماره‌ی نمونه کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

ابتدا عدد تصادفی را در اندازه‌ی جامعه ضرب می‌کنیم

$$0/256 \times 150 = 38/4 \xrightarrow{\text{حذف اعشار}} 38 \xrightarrow{+1} 39$$

۳۹ شماره‌ی نمونه است.

تست) اندازه‌ی یک جامعه ۱۵۰ می‌باشد برای انتخاب نمونه به اندازه‌ی ۲۴ ، به کمک ماشین حساب برنامه‌ریزی عدد تصادفی ۰/۳۶۲ ظاهر می شود، شماره‌ی انتخاب شده کدام است؟

(خارج ۹۲)

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

$$0/362 \times 150 = 54/3 \xrightarrow{\text{حذف اعشار}} 54 \xrightarrow{+1} 55 \quad \text{شماره‌ی نمونه}$$

تست) برای انتخاب نمونه‌ی تصادفی بین ۱۵۰ نفر به وسیله‌ی ماشین حساب، شماره‌ی نمونه انتخاب شده ۲۷ است عدد تصادفی تولید شده توسط ماشین حساب کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۰/۱۷۵ ۲) ۰/۱۸۰ ۳) ۰/۱۶۳ ۴) ۰/۱۸۲

عدد بین دو ۲۶ و ۲۷ می باشد $\Longrightarrow$ قسمت صحیح حاصل ضرب عدد تصادفی در اندازه جامعه $\Longrightarrow 27 - 1 = 26$

$$26 \leq \text{عدد تصادفی} \times 150 < 27 \xrightarrow{\div 150} 0/173 \leq \text{عدد تصادفی} < 0/180 \Longrightarrow 0/175 \text{ عدد تصادفی}$$

تست) دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی یک دبیرستان از شماره‌ی ۱ تا ۲۰ و دانش‌آموزان رشته‌ی تجری آن از ۲۱ تا ۶۰ شماره گذاری شده‌اند می‌خواهیم به کمک عدد تصادفی یک نفر از گروه ریاضی و یک نفر از گروه تجربی انتخاب کنیم، عدد تصادفی تولید شده توسط ماشین حساب برای رشته‌ی ریاضی ۰/۲۷۱ و برای رشته‌ی تجربی ۰/۱۸۵ می باشند شماره‌ی نفرات انتخاب شده کدام است؟

۱) ۲۴ , ۶ ۲) ۲۴ , ۵ ۳) ۲۵ , ۶ ۴) ۲۵ , ۵

پاسخ:

$$0/271 \times 20 = 5/420 \to 5 \to 5 + 1 = 6$$

تعداد افراد تجربی ۴۰ تا است. پس ۰/۱۸۵ را در ۴۰ ضرب می نمائیم.

$$0/185 \times 40 = 4/800 \to 4 \to 4 + 1 = 5 \to 5 + 20 = 25$$

انواع متغیرها

۱) متغیر تصادفی کمّی

- پیوسته: متغیری کمی‌ای است که اگر مقادیر a , b را بگیرد هر مقدار بین این دو را نیز می گیرد.
- گسسته: متغیری که پیوسته نیست را گسسته گویند.

عددی که به متغیر کمی گسسته نسبت داده می شود از راه شمارش به دست می آید اما عددی که به متغیر کمی پیوسته نسبت داده می شود از راه اندازه گیری به دست می آید.

۲) متغیر تصادفی کیفی

- ترتیبی: این متغیرها نوعی ترتیب طبیعی دارند و می توانیم آنها را با هم مقایسه کنیم.
- اسمی: در این متغیرها هیچ ترتیبی ملاحظه نمی شود و حالت ها قراردادی هستند.

تست) کدام یک از متغیرهای زیر قابل اندازه‌گیری می باشند؟ (خارج ۸۶)

۱) کمی گسسته ۲) کیفی ترتیبی

۳)کمی پیوسته ۴) کیفی اسمی

متغیر کمی پیوسته قابل اندازه گیری است.

تست) کدام یک از متغیرها قابل شمارش هستند؟

۱) کمی پیوسته ۲) کیفی اسمی

۳) کمی گسسته ۴) کیفی ترتیبی

متغیر کمی گسسته قابل شمارش می باشد و عدد آن توسط شمارش به دست می آید.

تست) خطای اندازه گیری در کدام نوع متغیرها وجود دارد؟ (خارج ریاضی ۸۶)

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته

۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

چون از اندازه گیری صحبت شده است پس متغیرها کمی هستند و می‌دانیم متغیرهای کمی پیوسته قابل اندازه گیری هستند پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

قبلاً در تست قبل بیان کردیم متغیرهای کمی گسسته قابل شمارش هستند.

تست) مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است، نوع ان کدام است؟ (خارج انسانی ۹۰)

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته

۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

مراحل تحصیلی قابل اندازه‌گیری نیست فقط نوع آن معلوم است پس متغیر کیفی است و هم‌چنین ترتیب مشخصی دارند پس کیفی ترتیبی است.

تست) میزان آلودگی هوا، کدام نوع متغیر است؟ (خارج تجربی ۹۱)

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته

۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

میزان آلودگی هوا قابل اندازه‌گیری است و هر عددی می‌تواند باشد پس متغیر کمی پیوسته است.

تست) نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته

۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

نوع آلایندگی هوا قابل اندازه‌گیری نیست و هیچ ترتیب طبیعی ندارد پس متغیر کیفی اسمی است.

تست) قطر تنه‌ی درختان یک باغ، کدام نوع متغیر است؟ (انسانی ۹۳)

۱) کمی پیوسته ۲) کمی گسسته

۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

قطر تنه‌ی درختان ، قابل اندازه‌گیری است و می تواند هر عددی باشد پس متغیر کمی پیوسته است.

تست) گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟ (تجربی ۹۰)

۱) کیفی اسمی ۲) کیفی ترتیبی

۳) کمی پیوسته ۴) کمی گسسته

گروه خونی قابل اندازه گیری نیست پس کیفی است از طرفی ترتیبی طبیعی ندارد پس اسمی است.

تست) تعدادی دانش آموزان یک مدرسه، در هر روز در یک ساعت جهت انجام کارهای فوق برنامه آمادگی دارند. نوع متغیر کدام است؟ (خارج انسانی ۸۸)

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته

۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

تعداد دانش آموزان مدرسه، متغیر کمی گسسته است چون تعداد دانش آموزان قابل شمارش می باشد نه قابل اندازه گیری.

دسته بندی داده ها

دامنه‌ی تغییرات: اختلاف بین بزرگ ترین و کوچک ترین داده را دامنه‌ی تغییرات می گویند و با R نشان می‌دهند.

$R = Max - Min$

تعداد دسته: در انتخاب تعداد دسته ها به دامنه‌ی تغییرات توجه می‌کنیم هر چه دامنه‌ی تغییرات بزرگ‌تر باشد تعداد دسته ها را بیشتر در نظر می گیریم تعداد دسته ها را با k نمایش می دهیم.

طول دسته: هر دسته را با $[a,b)$ نشان می دهیم به $C = b - a$ طول دسته می گویند و a کران پایین دسته و b کران بالای دسته است. کران پایین جزء دسته است ولی کران بالا جزء دسته نیست.

نکته: همواره داریم: $R = C\,k$

مرکز دسته: در دسته‌ی $[a,b)$ به $x = \frac{a+b}{2}$ ، مرکز یا نشان دسته می گویند.

تست) در دسته بندی داده های آماری، مناسب ترین مقداری که می توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم کدام است؟ (کنکور ۹۴)

۱) مرکز دسته ۲) کران پایین

۳) میانگین مقادیر دسته ۴) کران بالا

مرکز دسته

تست) در ۵۶ داده‌ی آماری، بزرگ ترین و کوچک ترین آنها به ترتیب ۸۶ و ۶۵ است این داده ها به ۷ طبقه دسته بندی شده اند اگر داده هایی که در یک دسته قرار دارند یکسان در نظر گرفته شوند مقدار مشترک آنها در دسته‌ی پنجم کدام است؟ (انسانی ۸۸)

۱) ۷۷ ۲) ۷۷/۵ ۳) ۷۸ ۴) ۷۸/۵

ابتدا به کمک کوچکترین و بزرگترین داده دامنه‌ی تغییرات را می یابیم.

$R = Max - Min = 86 - 65 = 21$

$$R = Ck \Rightarrow 21 = C \times 7 \Rightarrow C = 3$$

$$\text{دسته‌ی اول}: \quad [65,68) \Rightarrow x_1 = \frac{65+68}{2} = 66/5$$

مقدار مشترک داده ها در دسته پنجم همان نشان یا مرکز دسته‌ی پنجم است اکنون کافی است از نشان دسته‌ی اول ۳ تا ۳ تا بالا برویم تا به نشان دسته‌ی پنجم برسیم:

$$x_1 = 66/5 \xrightarrow{+3} x_2 = 69/5 \xrightarrow{+3} x_3 = 72/5 \xrightarrow{+3} x_4 = 75/5 \xrightarrow{+3} x_5 = 78/5$$

تست) کوچک ترین و بزرگ ترین داده های آماری ۱۷/۲ و ۲۲/۶ هستند اگر کران پایین دسته‌ی دوم ۱۷/۸ باشد مرکز دسته‌ی آخر کدام است؟ (خارج تجربی ۸۶)

۱) ۲۱/۷ ۲) ۲۱/۸ ۳) ۲۲/۳ ۴) ۲۲/۴

کران پایین دسته‌ی اول همان ۱۷/۲ (کوچکترین داده) است و کران پایین دسته‌ی دوم ۱۷/۸ است یعنی طول دسته $17/8 - 17/2 = 0/6$ است برای به دست آوردن مرکز دسته‌ی آخر کافی است از کران بالای دسته‌ی آخر یا همان بزرگترین داده (یعنی ۲۲/۶) نصف طول دسته را کم کنیم.

$$\text{مرکز دسته‌ی آخر} = 22/6 - \frac{0/6}{2} = 22/3$$

طول دسته‌ی اعشاری

در بعضی مواقع در رابطه‌ی $C = \frac{R}{K}$ خارج قسمت خوبی K , R به ما نمی دهند در این صورت اصطلاحاً با از بین بردن اختلافات جزئی داده های نزدیک به هم را یک کاسه کنیم پس C را یک عدد رند که به سمت بالا رند شده باشد در نظر می گیریم زیرا اگر به سمت پایین رند کنیم دسته‌ها کل دامنه‌ی تغییرات را پوشش نمی دهند. و برای زیبایی و تقارن ، مقدار اضافی را نصف کرده و دسته‌ی اول را به همان مقدار زودتر شروع می کنیم.

تمرین) کوچکترین و بزرگترین داده های آماری ۴۱ و ۷۰ است این داده را در ۷ طبقه دسته بندی کرده ایم حدود دسته ها را معلوم کنید.

$$R = Max - Min = 70 - 41 = 29$$

$$C = \frac{29}{7} = 4/1428 \xrightarrow{\text{رند به سمت بالا}} C = 5$$

اما ۷ دسته به طول ۵ می شود $7 \times 5 = 35$ واحد که ۶ واحد از دامنه‌ی تغییرات بزرگتر است پس سه واحد از ابتدا کم کرده و سه واحد به انتها اضافه می شود.

$$[38,43), [43,48), [48,53), [53,58), [58,63), [63,68), [68,73)$$

انواع فراوانی

۱) فراوانی مطلق: به تعداد دفعات تکرار یک داده و یا تعداد داده های موجود در یک دسته، فراوانی مطلق آن داده یا دسته می گویند فراوانی مطلق داده‌ی x_i یا دسته‌ی i ام را با f_i نشان می دهیم.

۲) فراوانی نسبی: اگر فراوانی مطلق را بر کل فراوانی ها (تعداد کل داده ها) تقسیم کنیم فراوانی نسبی به دست می آید. و با F_i نشان می دهیم.

$$F_i = \frac{f_i}{n}$$

۳) فراوانی تجمیعی: مجموع فراوانی مطلق هر دسته به علاوه‌ی فراوانی های مطلق دسته های قبل از آن را فراوانی تجمیعی آن دسته می نامند.

تست) هشتاد داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده اند، اگر ۲۰ داده‌ی جدید به این داده ها افزوده شود فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نمی کند نسبت افزایش داده های دسته‌ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

فراوانی مطلق دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی چهارم f_4 است پس فراوانی نسبی آن $\frac{f_4}{80}$ است.

با اضافه شدن ۲۰ داده‌ی جدید فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم f_{4+x} می شود پس فراوانی نسبی $\frac{f_{4+x}}{100}$ خواهد شد و چون فراوانی نسبی تغییر نکرده است داریم:

$$\frac{f_4}{80} = \frac{f_{4+x}}{100} \Rightarrow 100f_4 = 80(f_4 + x) = 20f_4 = 80x$$
$$\Rightarrow \frac{x}{f_4} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

تست) در دسته بندی ۱۲۰ داده‌ی آماری در ۹ طبقه، دسته‌ی اول به صورت ۲۵-۲۲ می باشد می دانیم ۴۵ درصد داده ها کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۰/۲ است. تعداد داده های کمتر از ۳۷ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۶۷ ۲) ۷۶ ۳) ۷۸ ۴) ۸۷

دسته‌ی وسط، دسته‌ی پنجم است.

$$C = 25 - 22 = 3$$
$$a_1 = 22 \xrightarrow{+3} a_2 = 25 \xrightarrow{+3} a_3 = 28 \xrightarrow{+3} a_4 = 31 \xrightarrow{+3} a_5 = 34 \Rightarrow \text{دسته‌ی پنجم} : [34,37)$$

۴۵ درصد داده ها کمتر از ۳۴ هستند یعنی ۴۵ درصد داده ها در دسته‌ی اول، دوم، سوم، چهارم قرار دارند و چون فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۰/۲ است و ۲۰ درصد داده ها نیز در دسته‌ی پنجم هستند پس $45 + 20 = 65$ درصد داده ها کمتر از ۳۷ هستند و چون تعداد کل داده ها ۱۲۰ می باشد داریم:

$$\frac{65}{100} \times 120 = 78 \qquad \text{تعداد داده‌های کمتر از } 37$$

تست) داده های جدول زیر، داده های آماری پیوسته است ، چند درصد داده ها در فاصله‌ی $[18/5 , 21/5)$ قرار دارند؟ (تجربی ۸۸)

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمیعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

فراوانی تجمیعی دسته‌ی آخر همان تعداد کل داده ها است پس $n = 40$ و مرکز دسته‌ی $[18/5,21/5)$ برابر است با $\frac{18/5+21/5}{2}$ پس فراوانی مطلق این دسته برابر است با $f_3 = 25 - 13 = 12$ در نتیجه داریم:

$$x = \frac{12}{40} \times 100 = 30\%$$

تست) در داده‌های دسته بندی شده با مغیر پیوسته ، اگر S مساحت نمودار مستطیلی و S' مساحت سطح زیر چندبر فراوانی آن با توجه به دو دسته‌ی فرضی باشد این دو مساحت چگونه است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $S = S'$ ۲) $S > S'$

۳) $S < S'$ ۴) اظهار نظر نمی توان کرد.

همواره مساحت S با S' برابر است (طبق نمودار می توان نشان داد)

تست) در توزیع فراوانی داده های پیوسته ، کدام نمودار مناسب تر است؟ (تجربی ۸۷)

۱) مستطیلی ۲) چندبر فراوانی ۳) میله ای ۴) دایره ای

برای نمایش توزیع فراوانی داده های پیوسته، نمودارهای مستطیلی چندبر فراوانی بهتر از نمودار میله ای و دایره ای هستند و بین نمودار مستطیلی و چندبر فراوانی، نمودار چندبر فراوانی بهتر است زیرا مقایسه را آسان‌تر می کند.

تست) شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز شده اند در نمودار دایره ای زاویه‌ی مرکزی هر گروه با واحد درجه مطابق جدول زیر است تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

کد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه‌ی مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	α	۵۴	۱۸

۱) ۵۲ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۵۸

در نمودار دایره ای مجموع همه‌ی زوایای مرکزی 360° است پس:

$$27^\circ + 45^\circ + 99^\circ + \alpha + 54^\circ + 18^\circ = 360^\circ$$
$$\Rightarrow\ 243^\circ + \alpha = 360^\circ\ \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$

زاویه‌ی فراوانی : $\dfrac{360^\circ}{160} = \dfrac{117^\circ}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 52$

تست) نمودار ساقه و برگ زیر درصد نمودار قبولی یکی کلاس است اگر این نمرات به ۵ گروه دسته بندی شوند در نمودار میله ای فراوانی نسبی بلندی میله‌ی نظیر داده‌ی ۷۷/۵ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)

ساقه	برگ
۶	۰ ۲ ۴ ۷ ۹
۷	۸ ۲ ۳ ۳ ۵ ۶
۸	۱ ۴ ۵ ۵
۹	۰ ۱ ۳ ۳ ۵

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

پاسخ:

$$R = Max - Min = 95 - 60 = 35$$
$$R = CK\ \ \Rightarrow 35 = C \times 5\ \ \Rightarrow\ \ C = 7$$
$$[60,67), [67,74), [74,81), [81,88), [88,95)$$

در نمودار میله ای ، روی محور x ها مرکز دسته ها و روی محور y ها فراوانی آنها را نشان می دهیم. بلندی میلیه مورد نظر ۷۷/۵ است یعنی فراوانی ۷۷/۵ که مرکز دسته‌ی $[74,81)$ است را می خواهیم تعداد برگ ها برابر تعداد کل داده ها است یعنی $n = 20$ و فقط دو داده‌ی ۷۵ و ۷۶ در این دسته قرار دارند پس داریم:

$$F_3 = \frac{2}{20} = 0/1$$

شاخص‌های مرکزی

۱) مد: در یک جامعه‌ی آماری، مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد.

۲) میانه: در تعدادی داده‌ی آماری، میانه عددی است که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است.برای به دست آوردن میانه ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم سپس:

الف) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد داده‌ی وسط، میانه است.

ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد در این صورت نصف مجموع دو داده‌ی وسط میانه است.

میانگین: میانگین هر تعداد داده برابر با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد آنهاست و با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

تست) داده‌های آماری در ۹ طبقه با طول دسته‌ی ۴ دسته‌بندی شده‌اند اگر ۸ داده در چارک اول و سوم به آنها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم در دسته‌بندی جدید تعداد دسته‌ها کدام است؟

(ریاضی ۸۷)

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۳

$$\text{دامنه‌ی تغییرات} = CK = 4 \times 9 = 36$$

دامنه‌ی تغییرات تفاضل بزرگترین و کوچکترین داده است پس با افزودن هشت عدد در بازه‌ی داده شد دامنه‌ی تغییرات تغییری نمی‌کند از طرفی طول دسته یک واحد کاهش یابد داریم:

$$R = CK \implies 36 = 3k \implies k = 12$$

تست) اگر میانگین ۱۰ داده‌ی آماری $16 , 11 , 17 , 10 , a , 10 , 13 , 17 , 9 , 16$ برابر با ۳۱/۱ باشد میانه کدام است؟

(خارج انسانی ۹۱)

۱) ۱۱/۵   ۲) ۱۲   ۳) ۱۲/۵   ۴) ۱۳

$$\frac{31}{6} = \frac{16 + 9 + 17 + 13 + 10 + a + 10 + 17 + 11 + 16}{10}$$

$$= \frac{119 + a}{10} \implies a = 12$$

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم داریم:

$$9 ,10 , 10 , 11 , 12 , 13 , 16 , 16 , 17 , 17$$

چون تعداد زوج است میانگین دو داده‌ی وسط را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانه} = \frac{12 + 13}{2} = \frac{25}{2} = 12/5$$

تست) میانگین چند داده برابر ۵۷ است ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم می‌کنیم و سپس داده‌های حاصل را سه برابر کرده‌ایم میانگین داده‌های نهایی کدام است؟ (خارج تجربی ۸۴)

۱) ۴۵ ۲) ۷۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۹

هر بلایی سر داده‌ها آمده باشد سر میانگین نیز می‌آید یعنی:

جدید $\bar{x} = (57 - 12) \times 3 = 135$

تست) در ۸۰ داده‌ی آماری دسته‌بندی شده، فراوانی نسبی دسته‌ی اول ۰/۱۱۲۵ می‌باشد اگر ۱۰ داده‌ی دیگر بزرگ‌تر از میانه به آنها افزوده شود فراوانی نسبی جدید دسته‌ی اول کدام است؟

(خارج ریاضی ۹۰)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۰۲ ۳) ۰/۱۰۵ ۴) ۰/۱۱

به کمک فراوانی نسبی دسته‌ی اول، فراوانی مطلق را به دست می‌آوریم:

$$F_1 = \frac{f_1}{n} \Rightarrow 0/1125 = \frac{f_1}{80} \Rightarrow f_1 = 80 \times 0/1125 = 9$$

چون ده داده از میانه بیشتر هستند پس فراوانی نسبی دسته‌ی اول تغییر نمی‌کند.

تعداد کل داده‌ها $n = 8 + 10 = 90$

$$F_1 = \frac{9}{90} = 0/1$$

تست) در نمودار ساقه و برگ داده‌های آماری زیر میانگین جامعه کدام است؟

ساقه	برگ
۷	۵ ۵ ۶ ۷ ۷
۸	۰ ۱ ۱ ۲ ۴ ۷
۹	۱ ۲ ۳ ۳ ۳ ۴ ۹

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

برای کاهش حجم محاسبات از داده‌ها ۸۰ واحد کم می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{2(-5) + (-4) + 2(-3) + 0 + 2 + 4 + 7 + 11 + 12 + 3 \times 13 + 14 + 19}{18} = \frac{90}{18} = 5$$

حال ۸۰ واحد را به میانگین به دست آمده می‌افزائیم تا میانگین داده‌های اولیه به دست آید

داده‌های اولیه $\bar{X} = 5 + 80 = 85$

تست) در مجموعه‌ی اعداد $\{ 63 , 70 , 66 , 50 , 77 , 65 , 64 , x \}$ به ازای مقدار x شاخص‌های میانگین - مد - میانه برابر هم هستند.

(خارج ریاضی ۹۳)

۱) ۶۴ ۲) ۶۵ ۳) ۶۶ ۴) نشدنی

چون همه‌ی داده‌ها فقط یک بار آمده‌اند پس x یکی از این داده‌ها است زیرا اگر با یکی از آنها برابر نباشد مد معنایی ندارد چون میانگین با مد برابر است پس x مد است بنابراین داریم:

$$x = \frac{63 + 70 + 66 + 50 + 77 + 65 + 64 + x}{8}$$

$$\Rightarrow \quad 8x = 455 + x \quad \Rightarrow \quad 7x = 455 \quad \Rightarrow x = 65$$

تست) در جدول فراوانی زیر میانگین به صورت $\bar{X} = 12 + 2\bar{a}$ محاسبه شده است $\bar{a}$ کدام است ؟ (ریاضی ۸۸)

x	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
f	۲	۵	۵	۹	۳

$\downarrow$

y	-۴	-۲	۰	۲	۴
f	۲	۵	۵	۹	۳

۱) ۰/۲۵　　۲) ۰/۳۶　　۳) ۰/۴۵　　۴) ۰/۵۴

از تمام داده‌ها ۱۲ واحد کم می‌کنیم تا میانگین به صورت $2\bar{a}$ در آید

$$2\bar{a} = \frac{2(-4) + 5 \times (-2) + 5 \times 0 + 9 \times 2 + 3 \times 4}{2 + 5 + 5 + 9 + 3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = \frac{1}{4} = 0/25$$

نکته: وقتی از میانگین وزن‌دار استفاده می‌کنیم مرکز هر دسته را در فراوانی آن دسته ضرب نموده و سپس جمع همه‌ی این مقادیر را به تعداد کل داده‌ها تقسیم می‌کنیم میانگین به دست می‌آید.

تست) در جدول فراوانی تجمعی زیر میانگین داده‌ها کدام است؟

۱۱	۱۰	۹	۸	۷	مرکز دسته
۸۰	۶۸	۴۴	۲۴	۸	فراوانی تجمعی

۱) ۹/۲　　۲) ۹/۳　　۳) ۹/۵　　۴) ۹/۴

ابتدا فراوانی مطلق هر دسته را می‌یابیم سپس ۹ واحد از مرکز دسته کم می‌کنیم تا حجم محاسبات کاهش یابد.

مرکز دسته	-۲	-۱	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	24-8=16	44-24=20	68-44=24	80-68=12

$$\text{جدید}\ \bar{X}=\frac{8(-2)+16(-1)+20\times 0+1\times 24+2\times 12}{80}=\frac{16}{80}$$
$$=\ 0/2\ \Longrightarrow\ 0/2+9=9/2=\bar{X}$$

شاخص‌های پراکندگی

شاخص‌های پراکندگی تجمع داده‌ها حول میانگین را به ما نشان می‌دهند یعنی می‌گویند داده‌ها چقدر از میانگین دور یا نزدیکند که عبارتند از:

۱) دامنه‌ی تغییرات (*R = Max - Min*)

۲) واریانس: واریانس تعدادی داده برابر میانگین مجموع مجذور انحرافات از میانگین داده‌ها است و آن را با σ^2 نمایش می‌دهند.

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

و یا با فرمول

$$\sigma^2=\frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_nx_n^2}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

۳) انحراف معیار: جذر مثبت واریانس را انحراف معیار گویند و با σ نشان میدهند.

۴) ضریب تغییرات: ضرایب تغییرات داده‌های مثبت از تقسیم انحراف معیار داده‌ها بر میانگین آنها به دست می-آید. ضریب تغییرات را با $C.V$ نشان می‌دهیم داریم:

$$C.V=\frac{\sigma}{\bar{X}}$$

(تست) داده‌های آماری *18, 7 , 20 , 16 , 17 , 9 , 10 , 11 , 12 , 17 , 21 , 12 , 13* را با نمودار جعبه‌ای نشان می-دهیم واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

(خارج ریاضی ۹۰)

۱) ۴/۵۹ ۲) ۴/۹۵ ۳) ۵/۲۴ ۴) ۵/۷۱

داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای داده‌های بین چارک اول و سوم است پس داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$7\ ,\ 9\ ,\ \boxed{10\ ,\ 11}\ ,\ 12\ ,\ 12\ \boxed{1}\ ,\ 16\ ,\ 17\ \boxed{17\ ,\ 18}\ ,\ \ 20\ \ ,$$

$$Q_1=\frac{10+11}{2}=10\qquad Q_2\qquad Q_3=\frac{17+18}{2}=17$$

سپس داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای داریم:

$$11\,,12\,,12\,,13\,,16\,,17\,,17$$

$$\bar{X}=\frac{98}{7}=14$$

$$\sigma^2=\frac{(11-14)^2+2(12-14)^2+(13-14)^2+(16-14)^2+2(17-14)^2}{7}$$

$$=\frac{9+8+1+4+18}{7}\cong 5/71$$

تست) در جواب فراوانی زیر، واریانس داده‌ها کدام است؟ (خارج تجربی ۹۰)

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

۱) ۱۱/۷۲   ۲) ۱۱/۹۶   ۳) ۱۲/۲۴   ۴) ۱۲/۳۶

برای محاسبه‌ی راحت‌تر، ۱۸ واحد از تمام داده‌ها کم می‌کنیم در نتیجه از مرکز دسته نیز ۱۸ واحد کم می‌شود

مرکز دسته	۶-	۳-	۰	۳	۶
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

$$\bar{X}=\frac{4(-6)+3(-3)+9(0)+7(3)+2(6)}{4+3+9+7+2}=\frac{0}{25}=0$$

$$\sigma^2=\frac{4(-6-0)^2+3(-3-0)^2+9(0-0)^2+7(3-0)^2+2(6-0)^2}{25}=\frac{306}{25}=12/24$$

تست) میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آنها ۵ می‌باشد میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟
(خارج ریاضی ۹۲)

۱) ۱۲۴   ۲) ۱۳۴   ۳) ۱۴۹   ۴) ۱۶۹

فرض می‌کنیم n مربع با میانگین اضلاع $\overline{a4}$ داریم، میانگین مساحت‌های آنها خواسته شده است پس داریم:

$$\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}$$

$$\sigma^2=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^n}{n}-a^{-2}$$

$$\Rightarrow\ 5=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^n}{n}-12^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^n}{n}=5+144=149$$

تست) نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A , B به صورت زیر است:

$B : 16 , 14 , 17 , 14 , 17 , 18$ $\qquad$ $A : 15 , 14 , 15 , 16 , 17 , 19$

دقت عمل کدام بیشتر است؟

(ریاضی ۹۳)

۱) A $\qquad$ ۲) B $\qquad$ ۳) یکسان $\qquad$ ۴) غیر پیش‌بینی

ابتدا میانگین و سپس واریانس‌ها را محاسبه و مقایسه می‌کنیم.

$$\bar{X}_A = \frac{15+15+14+16+17+19}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\bar{X}_B = \frac{14+14+16+17+17+18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(14-16)^2 + 2(15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2(14-16)^2 + (16-16)^2 + 2(17-16)^2 + (18-16)^2}{6}$$

$$= \frac{8+0+2+4}{6} = \frac{7}{3}$$

پس دقت B بیشتر است.

تست) میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده‌ی آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد اگر داده‌های ۲۰ و ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده‌ی جدید کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)

۱) ۹/۲۵ $\qquad$ ۲) ۹/۳۶ $\qquad$ ۳) ۹/۵۲ $\qquad$ ۳) ۹/۶۳

میانگین داده‌های اضافه شده $\frac{28+27+20}{3} = 25$ می‌باشد پس با اضافه شدن آنها میانگین همچنان ۲۵ باقیمی‌ماند. انحراف معیار داده‌های اولیه ۳ می‌باشد پس واریانس $3^2 = 9$ است.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2}{18} - x^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2}{18} - 25^2$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2 = 18(9+625) = 11412$$

$$\text{جدید}\ \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2 + 20^2 + 27^2 + 28^2}{21} = \frac{11412 + 40 + 729 + 784}{21} - 625$$

$$= 634/52 - 625 = 9/52$$

تست) واریانس ۱۱ داده‌ی آماری صفر است اگر داده‌های 24 , 16 , 26 به آنها اضافه شود میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند انحراف از معیار ۱۴ داده‌ی آماری حاصل کدام است؟

(خارج ریاضی ۹۰)

۱) ۰/۷۵ $\qquad$ ۲) ۱/۲۵ $\qquad$ ۳) ۱/۵ $\qquad$ ۴) ۲

چون واریانس صفر است پس داده‌ها با هم برابر هستند اگر همه‌ی آنها x باشند داریم:

$$x = \frac{x + x + \cdots + x}{11} = \frac{x + x + x + \cdots + x + 24 + 16 + 26}{14}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11x + 66}{14} \quad \Rightarrow \quad x = 22 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 22$$

برای بدست آوردن انحراف معیار داریم:

$$\sigma^2 = \frac{11 \times (22 - 22)^2 + (24 - 22)^2 + (16 - 22)^2 + (26 - 22)^{-2}}{14} = 4$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{4} = 2$$

تست) مجموع ۴۰ داده‌ی آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۳۴۰ می‌باشد انحراف معیار کدام است؟
(خارج تجربی ۸۶)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

$$\bar{X} = \frac{100}{40} = 2/5 \quad \text{میانگین}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 340$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{340}{40} - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8/5 - 6/25} = \sqrt{2/25} = 1/5$$

تست) میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آنها ۶۵/۴۴ میباشد ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

(خارج تجربی ۹۴)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_1 ، x_2 ، ... x_n بگیریم در این صورت میانگین مساحت‌ها برابر است با :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 = 65/44 - 8^2 = 1/44 \quad \Rightarrow \sigma = 1/2$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1/2}{8} = 0/15$$

تست) در ۶۰ داده‌ی آماری میانگین ۳ و انحراف معیار ۱/۲ محاسبه شده است اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

وقتی به داده‌ها ۹ واحد اضافه شود انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی ۹ واحد واحد به میانگین اضافه می‌شود پس:

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{3 + 9} = 0/1$$

تست) در داده‌های آماری با میانگین $\bar{X}$ و انحراف معیار σ ، اگر به هر یک از داده‌ها مقدار $\bar{X}$ را اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه است؟

(تجربی ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

قدیم $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

وقتی به داده‌ها $\bar{X}$ واحد اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند ولی میانگی $\bar{X}$ اضافه می‌شود پس داریم:

$$\text{جدید} \quad C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}+\bar{X}} = \frac{\sigma}{2\bar{X}} = \frac{1}{2}\ \frac{\sigma}{\bar{X}}$$