

# المپیادهای ریاضی لینینگراد

از سال ۱۹۶۱ به بعد

ترجمه: پرویز شهریاری

دミニتری ولا دیمیر وویچ فومین



$$\sum_{i \leq j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n-1}{n}$$

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}} = \frac{|AB| \cdot \sin(\widehat{ADB})}{|CD| \cdot \sin(\widehat{CBD})}$$

$$x^{\frac{1}{n(n-1)}} - x^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{S_{AXYC}}{S_{ABC}} \leq \frac{|AX|^n + |XY|^n + |YC|^n}{|AC|^n + |BC|^n}$$

$$\tan$$

$$\cot$$

$$\angle A' = 90^\circ$$

# المپیادهای ریاضی لنینگراد

از سال ۱۹۶۱ به بعد

دمیتری ولادیمیر و ویچ فومین

ترجمه: پرویز شهریاری

دانلود از سایت ریاضی سرا  
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)



انتشارات آشیان  
۱۳۷۴



انتشارات ایشتن  
المپیادهای ریاضی لینینگراد  
از سال ۱۹۶۱ به بعد  
تألیف: دمیتری ولاڈیمیر وویچ فومین  
ترجمه: پرویز شهریاری  
چاپ اول: ۱۳۷۴  
تیراژ: ۲۵۰۰ جلد  
حروفچینی: گنجینه  
لیتوگرافی و چاپ: هاشمیون  
کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است.

پخش: انتشارات گوتنبرگ  
تهران - خ انقلاب رویروی دانشگاه تهران  
تلفن: ۶۴۱۳۹۹۸

هدیه به جوانان و نوجوانانی  
که، با تکیه به عشق و تلاش  
خود، و گاه بدون کمترین  
امکان‌ها، نام سرزمین خود  
را در المپیادهای علمی  
جهانی، به گوش فرزانگان  
سراسرگیتی می‌رسانند.

مترجم

## سال ششم

۱. سه نفر می‌توانند کاری را انجام دهند. زمانی که طول می‌کشد تا دومی و سومی با هم، کار را تمام کنند، برابر نصف زمانی است که اولی، به تنهایی کار را به انجام می‌رساند. ولی اگر اولی و سومی با هم کار کنند، به اندازه یک سوم زمانی وقت لازم دارند که دومی بخواهد به تنهایی کار را انجام دهد. اولی و دومی، با هم، چقدر سریع‌تر از سومی، کار را به پایان می‌رسانند؟

۲. ثابت کنید، بزرگترین بخشیاب مشترک بین مجموع دو عدد با کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها، برابر است با بزرگترین بخشیاب مشترک این دو عدد.

۳. ۲۰ دانش‌آموز، برای حل، ۲۰ مساله، گرد هم آمدند. هر دانش‌آموز دو مساله را حل کرد، در ضمن هر مساله به وسیله دو دانش‌آموز حل شد. ثابت کنید، می‌توان ترتیبی داد که هر دانش‌آموز راه حل یکی از مساله‌ها را بیان کند، به نحوی که همه مساله‌ها توضیح داده شده باشند.

۴. دو نفر به نام‌های  $A$  و  $B$ ، می‌خواهند از نقطه  $M$ ، واقع در ۱۵ کیلومتری  $N$ ، خود را به نقطه  $N$  برسانند. سرعت پیاده‌روی آن‌ها، ۶ کیلومتر در ساعت است. در ضمن، دوچرخه‌ای دارند که می‌توانند، با آن، با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت حرکت کنند.  $A$  و  $B$ ، از نقطه  $M$ ، با هم به راه افتادند:  $A$  پیاده و  $B$  با دوچرخه. وقتی  $B$ ، به  $C$  رسید، که از  $N$  به طرف  $A$  پیاده می‌رفت، دوچرخه را به او داد،  $B$  مسیر خود را پیاده ادامه داد و  $C$  با دوچرخه، خود را به  $A$  رسانید.  $A$  دوچرخه را گرفت و سوار بر آن، مسیر خود را به طرف  $N$  ادامه داد.  $C$ ، چه موقع از  $N$  حرکت کرده‌است، به شرطی که می‌دانیم،  $A$  و  $B$  با هم به  $N$  رسیده‌اند؟ سرعت پیاده و سواره  $C$ ، همان سرعت‌های  $A$  و  $B$  است.

۵. ثابت کنید، از بین هر شش نفر، می‌توان سه نفر طوری جدا کرد،  
که یا دو به دو با هم آشنا، و یا دو به دو با هم نا آشنا باشند.

### سال هفتم

۶. همان مساله ۱.

۷. دایرة  $O$ ، مربع  $K$  و خط راست  $L$ ، داده شده‌اند. پاره‌خط راستی به طول معلوم، طوری رسم کنید که با خط راست  $L$  موازی باشد و، در ضمن،  
دو انتهای آن، به ترتیب، روی محیط دایرة  $O$  و محیط مربع  $K$  قرار گیرد.

۸. عدد سه‌رقمی  $\overline{abc}$  بر  $37$  بخش‌پذیر است، ثابت کنید، مجموع دو عدد  $\overline{cab}$  و  $\overline{bca}$  هم بر  $37$  بخش‌پذیر است.

۹. نقطه  $C$ ، نقطه وسط پاره‌خط راست  $AB$  است. روی نیم‌خط راست به مبدأ  $C$  و غیر واقع بر خط راست  $AB$ ، سه نقطه پیاپی  $P$ ،  $M$  و  $Q$  را طوری انتخاب کرده‌ایم که  $|PM| = |MQ|$ . ثابت کنید:

$$|AP| + |BQ| > 2|CM|$$

۱۰.  $1+2n$  چیز در اختیار داریم. ثابت کنید، تعداد دسته‌های انتخابی از این چیزها، به نحوی که، در هر یک از آنها، تعداد چیزها، فرد باشد، برابر است با تعداد دسته‌های انتخابی، به شرطی که در هر یک، تعداد چیزها زوج باشد.

### سال هشتم

۱۱. اگر از یک چهارضلعی، طول ضلع‌ها و فاصله بین دو نقطه وسط قطرها معلوم باشد، آن را رسم کنید.

۱۲. می‌دانیم  $A$ ،  $B$  و  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ، عددهای گویا هستند. ثابت کنید  $\sqrt{A}$  و  $\sqrt{B}$  هم، عددهایی گویا هستند.

۱۳. معادله  $3[x] - a^3$  را حل کنید.

۱۴. ثابت کنید، اگر نیمساز یک زاویه مثلث، زاویه بین میانه و ارتفاع را که از همان راس می‌گذرند، نصف کند، یا مثلث متساوی الساقین است و یا قائم الزاویه

۱۵.  $n$  عدد  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داده شده‌اند. هر یک از این عددها، یا برابر است با ۱ و یا  $-1$ ، در ضمن

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$$

ثابت کنید، عدد  $n$  بر ۴ بخش‌پذیر است.

۱۶.  $n$  نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند و می‌دانیم، برای هر دو نقطه دلخواه، یکی از دو کمانی که آنها را به هم پیوسته، از  $120^\circ$  درجه کمتر است. ثابت کنید، همه این  $n$  نقطه، روی کمانی برابر  $120^\circ$  درجه واقع‌اند.

#### سال نهم

۱۷. از مثلثی، یک راس و خط‌های راستی که نیمسازهای مثلث روی آنها قرار دارند، معلوم است. مثلث رارسم کنید.

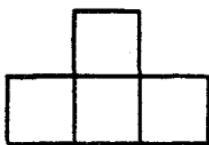
۱۸. همان مساله ۱۳.

۱۹.  $2n$  نقطه، روی یک صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید، می‌توان آنها را به یاری خط شکسته بسته‌ای چنان به هم وصل کرد که هیچ دو پاره خط راستی (از ضلع‌های این خط شکسته بسته) یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۲۰. زاویه‌ای معلوم است و می‌دانیم، در مثلث  $ABC$

$$\hat{A} + \hat{B} = \alpha$$

مسیر حرکت راس  $C$  از این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که راس‌های  $A$  و  $B$  روی ضلع‌های زاویه‌ای می‌لغزند.



شکل ۱

۲۱. ثابت کنید صفحه شطرنجی  $10 \times 10$  را، نمی‌توان با شکل‌های

شبيه شکل ۱ پوشانيد.

۲۲. سه عدد درست و غير صفر  $k$ ،  $m$  و  $n$  مفروض‌اند و می‌دانيم  $k$

و  $m$  نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، عدد درست  $x$  وجود دارد، به نحوی  
که  $n$  بر  $kx + n$  بخش‌پذیر باشد.

۲۳. ثابت کنید، همه عددهای به صورت

$$1156, 111556, 11115556, \dots$$

مجلدور کامل‌اند.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۴. قاعده یک هرم با حجم برابر  $V$  را، ذوزنقه‌ای تشکيل می‌دهد که

طول قاعده‌های آن، برابر  $m$  و  $n$  است. به کمک صفحه‌ای، هرمی به حجم

$U$  را از آن جدا کرده‌ایم، به نحوی که مقطع صفحه با هرم اصلی، ذوزنقه‌ای  
با قاعده‌های به طول‌های  $m_1$  و  $n_1$  شده است. ثابت کنید:

$$\frac{U}{V} = \frac{(m_1 + n_1)m_1n_1}{(m + n)mn}$$

۲۵. مطلوب است کمترین مقدار عبارت  $\frac{a^2 + x^2}{x}$ ، به شرطی که

$0 < a < x < 0$  کمیتی متغیر است.

۲۶. این چندجمله‌ای با ضریب‌های درست داده شده است:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

می‌دانیم  $p$ ، ریشه‌گویای این چندجمله‌ای است. ثابت کنید:  $p$  عددی است درست و  $f(m)$ ، برای هر عدد درست  $m$ ، بر عدد  $p - m$  بخش پذیر است.

۲۷. ثابت کنید:

$$\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}$$

۲۸. هر وجه مکعب را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرده، یکی از آن‌ها را به رنگ سفید و دیگری را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. ثابت کنید، درواقع تنها دو نوع رنگ‌آمیزی وجود دارد که، در آن‌ها، در هر راس مکعب، مجموع زاویه‌های سفید با مجموع زاویه‌های سیاه برابر است. دو حالتی را که در اثر دوران مکعب، بر هم منطبق می‌شوند، یک حالت به حساب می‌آوریم.

۲۹. حلزونی با سرعت ثابت روی سطح میز می‌خورد. بعد از هر ۱۵ دقیقه، به طرفی می‌چرخد و در فاصله بین هر دو چرخش، روی خط راست حرکت می‌کند. ثابت کنید، تنها بعد از تعداد درستی ساعت، می‌تواند به جای نخست خود برگردد.

۱۹۶۲

سال ششم

۱. سه‌نفر می‌خواهند از شهر  $A$  به شهر  $B$  بروند. آن‌ها، یک موتور سیکلت دارند که تنها دو نفر می‌توانند روی آن بنشینند. چگونه باید عمل کنند تا آخرین

نفری از آن‌ها که به شهر  $B$  می‌رسد، کمترین زمان را صرف کرده باشد؟ این زمان را پیدا کنید. سرعت پیاده ۵ کیلومتر در ساعت، سرعت موتورسیکلت ۴۵ کیلومتر در ساعت و فاصله بین دو شهر  $A$  و  $B$ ، برابر ۶۰ کیلومتر است.

۲. دو عدد  $a$  و  $b$ ، نسبت به هم اول‌اند. دو عدد  $b + a$  و  $a - b$ ، چه بخشیاب مشترکی می‌توانند داشته باشند؟

۳. سن کسی، در سال ۱۹۶۲، از مجموع رقم‌های سال تولد او، یک واحد بیشتر است. او چند سال دارد؟

۴. ۱۵ روزنامه، روی میزی را به طور کامل پوشانده‌اند. ثابت کنید، می‌توان هشت روزنامه را برداشت، به نحوی که، بقیه روزنامه‌ها، دست کم  $\frac{7}{15}$  سطح میز را پوشانده باشند.

۵. ثابت کنید، اسب بازی شطرنج را، روی صفحه شطرنجی  $20 \times 20$  می‌توان طوری حرکت داد که در همه خانه‌ها و، در ضمن، در هر کدام تنها یک بار قرار گیرد.

۶. آیا عددی که دو رقم سمت راست آن، عددهایی فردند، می‌تواند مجلدور یک عدد درست باشد؟

### سال هفتم

۷. ثابت کنید، با ضلع‌های یک چهارضلعی دلخواه، می‌توان یک ذوزنقه ساخت.

۸. همان مسأله ۲.

۹. همان مسأله ۴.

۱۰. در یک عدد شش‌رقمی، که بر ۷ بخش‌پذیر است، آخرین رقم سمت راست را به سمت چپ عدد بردایم. ثابت کنید، عدد جدید هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

\* ۱۱. سطح دایره‌ای را، به ۴۹ بخش چنان تقسیم کرده‌ایم که هیچ سه بخشی، نقطه مشترک نداشته باشند. «نقشه» حاصل را با سه رنگ مختلف طوری رنگ کرده‌ایم که، هر دو بخش مجاور، رنگ‌های متفاوت داشته باشند. مرز دو بخش را، با هر دو رنگ درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، روی محیط دایره، می‌توان دو نقطه پیدا کرد که دو سطر یک قطر و، در ضمن به یک رنگ باشند.

۱۲. روی ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$ ، مربع‌های  $ABDE$  و  $BCKL$  را ساخته‌ایم. مرکز این مربع‌ها را  $O_1$  و  $O_2$  و وسط پاره خط‌های راست  $DL$  و  $AC$  را،  $M_1$  و  $M_2$  می‌نامیم. ثابت کنید، چهارضلعی  $O_1M_1O_2M_2$ ، مربع است.

### سال هشتم

۱۳. چهار دایره، روی یک صفحه چنان قرار دارند که هر دایره بر دو دایره دیگر، از بیرون مماس است. ثابت کنید، نقطه‌های تماس، روی محیط یک دایره‌اند.

۱۴. عددهای درست  $a$  و  $b$  را می‌توان به صورت  $x^2 - 5y^2$  نشان داد ( $x$  و  $y$  عددهای درستی هستند). ثابت کنید، عدد  $ab$  را هم، می‌توان به همین صورت نشان داد.

۱۵. این معادله را حل کنید

$$x(x+d)(x+2d)(x+3d) = a$$

۱۶. می‌دانیم  $1 \leq m + n + p = 1$  و  $c + b + c = 1$ . ثابت کنید:

$$-1 \leq am + bn + cp \leq 1$$

۱۷. مثلثی با حداقل مساحت، در نیم‌دایره مفروض، محاط کنید.

۱۸. سه دایره، با شعاع‌های برابر، در یک نقطه، برخورد دارند. ثابت کنید، سه نقطه دیگر برخورد، روی محیط دایره‌ای به همان شعاع واقع است.

۱۹. دایره‌ای با کمترین شعاع پیدا کنید که، مثلث مفروض را در درون خود داشته باشد.

## ۲۰. می‌دانیم چندجمله‌ای

$$x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \dots + a_{n-1}x^2 + a_n$$

بر دو جمله‌ای  $1 - x$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، این چندجمله‌ای، بر  $1 - x^2$  بخش‌پذیر است

۲۱.  $p$  عددی است اول، غیر از عدهای ۲ و ۵. ثابت کنید، عدد طبیعی  $k$  وجود دارد، به تحوی که بتوان عدد  $pk$  را (در عددنويسي دهدهي)، تنها با رقم‌های برابر واحد نوشت.

## سال نهم

۲۲. همان مساله ۱۶.

۲۳. همان مساله ۲۰

۲۴. شبکه‌ای از مربع‌های به ضلع واحد تشکیل شده است. یکی از مربع‌های شبکه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، فاصله هر نقطه گرهی دلخواه از این شبکه تا یکی از رأس‌های این مربع، عددی است گنگ.

۲۵. مجموع ده عدد، برابر است با صفر. مجموع همه حاصل ضرب‌های دو به دوی آن‌ها هم، برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های این عدها، برابر صفر است.

۲۶. مثلثی با زاویه‌های حاده مفروض است. نقطه‌ای در داخل زاویه‌ای از آن انتخاب کرده‌ایم، که فاصله از آن تا هر یک از رأس‌های مثلث، از

کوچکترین ضلع مثلث، کوچکتر است. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از  
این نقطه تا سه رأس مثلث، از  $\frac{3}{4}$  محیط تجاوز نمی‌کند.

. ۲۷. همان مساله ۲۱

. ۲۸. روی صفحه‌ای،  $n$  نقطه که بر یک خط راست واقع نیستند، داده شده است. ثابت کنید، می‌توان خط شکسته بسته‌ای رسم کرد که از همه این نقطه‌ها بگذرد، بدون این که خودش را قطع کند.

\* ۲۹. باری به وزن  $13/5$  تن را در صندوق‌هایی جا داده‌ایم، به نحوی که وزن هر صندوق با بار از  $350$  کیلوگرم تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، همه بار را می‌توان در  $11$  کامیون یک تن و نیمی بار زد.

### سال دهم

۳۰. در یک مریع به ضلع واحد، یک چهارضلعی محاط کرده‌ایم که چهار رأس آن روی چهار ضلع مریع باشد. ثابت کنید، یکی از ضلع‌های آن طولی دارد که از  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  کمتر نیست.

۳۱. مجموع ده عدد برابر صفر و مجموع همه حاصل ضرب‌های دو بددوی آن‌ها هم، برابر صفر است. مجموع توان‌های چهارم این عددها را پیدا کنید.

۳۲. مخرج این کسر را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c}}$$

۳۳. این معادله را حل کنید

$$(3x+2)^4 + (2x-4)^4 = (2x+2)^4 + (4x-2)^4$$

۳۴. یک زاویه و دو پاره خط راست، روی ضلع‌های آن داده شده است. نقطه  $O$  واقع در درون زاویه را به نقطه‌های انتهایی این پاره خط‌های راست

وصل کرده‌ایم. مجموع مساحت‌های دو مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آید، برابر است با  $S$ . مطلوب است مکان هندسی نقطه  $M$  به شرطی که مجموع چنین مساحت‌هایی برای آن، برابر  $S$  باشد.

۳۵. مجموع  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{k}{n}\right) kx$  را پیدا کنید.

۳۶. جواب‌های طبیعی این معادله را پیدا کنید:

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n}}}} = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_n}}}}$$

۳۷. یک چندوجهی داده شده‌است. تعداد ضلع‌های همه وجه‌ها، به‌جز یکی، بر عدد طبیعی مفروض  $n$  بخش‌پذیر است ( $1 < n$ ). ثابت کنید، وجه‌های این چندوجهی را نمی‌توان با دو رنگ، چنان رنگ کرد، که هر دو وجه مجاور، به رنگ‌های متفاوت باشند.

۳۸. در یک  $n$  ضلعی کوثر (محدب)، همه ضلع‌ها و قطرها را امتداد داده‌ایم تا به صورت خط‌های راست درآیند. در ضمن، از این خط‌های راست، هیچ دو خط راستی موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. این خط‌های راست، در درون  $n$  ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ بیرون  $n$  ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

سال یازدهم

۳۹. همان مسالة ۳۰

۴۰. این چندجمله‌ای داده شده است:

$$x^{kn} + a_1 x^{k(n-1)} + a_2 x^{k(n-2)} + \dots + a_{n-1} x^k + a_n$$

ثابت کنید، اگر این چندجمله‌ای بر  $1 - x$  بخش‌پذیر باشد، آنوقت بر  $1 - x^k$  هم بخش‌پذیر است

.۳۳. همان مساله

.۳۴. مجموع  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^2$  را پیدا کنید.

.۳۵. همان مساله

.۳۶. همان مساله

.۳۷. همان مساله

.۳۸. همان مساله

.۴۷. در درون مربع  $1 \times 1$ ، چندضلعی کوثری به مساحت بیشتر از  $\frac{1}{2}$

قرار داده‌ایم. ثابت کنید، در چندضلعی، وتر با طول بیشتر از  $\frac{1}{2}$  پیدا می‌شود که با ضلعی از مربع، که از قبل تعیین شده است، موازی باشد.

### دور نهایی

.۴۸. ثابت کنید، با ۷ دایره به شعاع واحد، می‌توان دایره‌ای به شعاع ۲ را به طور کامل پوشاند، ولی با این ۷ دایره، نمی‌توان دایره‌ای به شعاع بزرگتر از ۲ را پوشاند.

.۴۹. در مربع با مساحت ۵، ۹ چندضلعی قرار داده‌ایم، که مساحت هریک برابر واحد است. ثابت کنید، دو تا از این چندضلعی‌ها، سطح مشترکی دارند که از  $\frac{1}{9}$  کمتر نیست.

.۵۰. سطح کره‌ای را به سه بخش تقسیم کرده‌ایم، به نحوی که هر بخش، رنگ خودش را دارد و هر مرز دو بخش دارای دو رنگ است. ثابت کنید،

می‌توان قطری از کره را پیدا کرد که دو سر آن از نظر رنگ، یکسان باشند.  
 ۵۱. رقم‌های یک عدد، تنها از  $0$  و  $1$  تشکیل شده‌اند. در ضمن، تعداد  
 رقم‌های  $1$ ، از دو تا کمتر نیست. ثابت کنید. چنین عددی نمی‌تواند مجلد  
 یک عدد درست باشد.

۵۲. ثابت کنید، از بین  $k$  عدد درست، می‌توان چند عدد انتخاب کرد،  
 به نحوی که مجموع آن‌ها، بر  $k$  بخش‌پذیر باشد.  
 ۵۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x^{\frac{1}{n}(n-1)} - x^{[\frac{1}{n}n]}}{x - 1} = 0$$

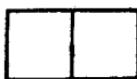
۵۴\*. با عدهای  $1, 2, 3, \dots, n$ ، دنباله‌های بی‌پایانی ساخته‌ایم.  
 دو جمله از دو دنباله را، یکسان می‌نامیم، وقتی که با هم برابر باشند و،  
 در ضمن، شماره ردیف آن‌ها، در دو دنباله، یکی باشد. چند دنباله می‌توان  
 ساخت، به نحوی که هر دو دنباله دلخواه از بین آن‌ها، درست  $k$  جمله  
 یکسان داشته باشند.

## ۱۹۶۳

### سال ششم

۱. دو نفر، در یک لحظه، از  $A$  به طرف  $B$  حرکت کردند: اولی از  
 طریق جاده آسفالت و با سرعت  $5$  کیلومتر در ساعت و دومی از «راه میانبر»  
 و با سرعت  $4$  کیلومتر در ساعت. اولی، یک ساعت دیرتر از دومی به  
 رسید و  $6$  کیلومتر هم بیشتر راه رفت. فاصله  $A$  تا  $B$ ، از طریق جاده آسفالت  
 چقدر است؟

۲. در جاده آسفالت، پیاده با سرعت  $5$  کیلومتر در ساعت می‌رود.  
 در همین جاده و از دو طرف، اتوبوس‌هایی با سرعت‌های یکسان در رفت و



شکل ۲

آمدند که هر ۵ دقیقه یک بار، از رویه رو به هم می رستند. در ساعت ۱۲ پیاده متوجه شد، اتوبوس‌ها در کنار او با هم رویه رو شدند و هر کدام به راه خود ادامه دادند. در ساعت ۱۴، دوباره اتوبوس‌ها، در کنار او به هم رسیدند. معلوم شد، در هیمن فاصله زمانی، تعداد اتوبوس‌هایی که از سمت مقابل به او رسیده‌اند، ۴ تا بیشتر از تعداد اتوبوس‌هایی است که از او جلو افتاده‌اند. سرعت اتوبوس را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید، عدد  $17^{17} - 43^{43}$  بر  $10$  بخش‌پذیر است.

۴. از صفحه شطرنج، دو خانه را در مرز صفحه، جدا کرده‌ایم. در چه حالت‌هایی می‌توان و در چه حالت‌هایی نمی‌توان، بقیه خانه‌های صفحه شطرنج را، با شکل‌هایی شبیه شکل ۲ پوشاند، بدون این‌که روی هم قرار گیرند؟

۵. فاصله هوایی از شهر  $A$  تا شهر  $B$  برابر  $30$  کیلومتر، از  $B$  تا  $C$  برابر  $80$  کیلومتر، از  $C$  تا  $D$  برابر  $236$  کیلومتر، از  $D$  تا  $E$  برابر  $86$  کیلومتر و از  $A$  تا  $E$  برابر  $40$  کیلومتر است. فاصله هوایی از  $C$  تا  $E$  را پیدا کنید.

۶. آیا می‌توان عددهای از  $1$  تا  $1963$  را طوری به صورت یک دنباله نوشت، به نحوی که هر دو جمله مجاور و، هر دو جمله‌ای که تنها یک جمله بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند؟

### سال هفتم

۷. مساحت یک چهارضلعی برابر  $3$  سانتی‌متر مربع و طول قطرهای آن،

برابر  $6$  سانتی متر و  $2$  سانتی متر است. زاویه بین دو قطر را پیدا کنید.  
۸. ثابت کنید، عدد  $2^{3456789} + 1$  عددی مرکب (یعنی غیر اول) است.

۹.  $20$  نفر در بازی شطرنج شرکت داشتند. کسی که در ردیف نوزدهم قرار گرفت،  $9/5$  امتیاز آورده بود. امتیازهای بقیه شرکت کنندگان را چگونه می توان در نظر گرفت؟

۱۰. مجموع طول های پاره خط های راستی که وسط ضلع های رو به رو را در یک چهار ضلعی به هم وصل می کنند، برابر است با نصف محیط چهار ضلعی. ثابت کنید، این چهار ضلعی، متوازی الاضلاع است.

۱۱. در اتوبوس شهری، به جز بلیت فروش،  $40$  مسافر نشسته اند که در جیب خود، تنها سکه های  $10$ ،  $15$  و  $20$  کوپکی و، روی هم،  $49$  سکه دارند. ثابت کنید، مسافرها نمی توانند، طوری ترتیب کار را بدene که پول بلیت های خود را پردازند (در سال  $1963$ ، ارزش بلیت اتوبوس شهری، برای هر نفر،  $5$  کوپک بوده است: هر  $100$  کوپک برابر یک روبل است).

۱۲. عدد طبیعی  $A$  را بر همه عده های کوچکتر از خودش تقسیم و سپس، همه باقی مانده های مختلف حاصل از تقسیم ها را با هم جمع کرده ایم، حاصل جمع برابر عدد  $A$  شده است.  $A$  را پیدا کنید (منظور از باقی مانده های مختلف، این است که اگر مثلاً دو یا چند بار، باقی مانده  $2$  به دست آید، تنها یک بار از آن استفاده کنیم).

۱۳. از یک صفحه شطرنجی، دو خانه دلخواه را جدا کرده ایم. در چه حالتی می توان و در چه حالتی نمی توان باقی مانده صفحه شطرنج را با مهره های دو خانه ای (شکل  $2$ ) به طور کامل پوشاند، بدون این که روی هم قرار گیرند؟

۱۴. نقطه  $A$  را روی میانه‌ای که از راس به قاعده مثلث رسم شده است، انتخاب کرده‌ایم. مجموع فاصله‌های از نقطه  $A$  تا ضلع‌های جانبی مثلث، برابر است با  $S$ . فاصله از نقطه  $A$  تا هریک از ضلع‌های جانبی را پیدا کنید، به شرطی که طول این ضلع‌ها، برابر  $x$  و  $y$  باشد.

۱۵. کسر دهدۀ  $\frac{abc\dots}{0}$  به این ترتیب ساخته شده است:  $a$  و  $b$  دو رقم دلخواهند؛ از آن به بعد، هر رقم برابر است با باقی مانده حاصل از تقسیم مجموع دو رقم قبل از آن، بر ۱۰. ثابت کنید این کسر، کسری متناوب ساده است.

۱۶. روی یک صفحه، یک  $m$  ضلعی و یک  $n$  ضلعی کوثر داده شده است ( $m > n$ ) این دو چندضلعی، صفحه را، حداقل به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۱۷. مجموع سه عدد درست مجدور کامل، بر ۹ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، در بین آن‌ها، دو عدد وجود دارد که تفاضلشان، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۱۸.  $2 + k$  عدد درست داده شده است. ثابت کنید، در بین آن‌ها دو عدد وجود دارد، که یا مجموع آن‌ها و یا تفاضل آن‌ها بر  $2k$  بخش‌پذیر است.

۱۹. زاویه قائم‌های دور راس خود دوران می‌کند. مطلوب است، مکان هندسی وسط پاره خط‌های راستی که نقطه‌های برخورد ضلع‌های زاویه با دایره مفروضی را به هم وصل می‌کنند.

### سال نهم

۲۰. عدد پنج رقمی  $\overline{abcde}$ ، بر ۴۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، هر عددی که از تبدیل دوری رقم‌های این عدد به دست آید، بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

۲۱. دو گروه عدد داریم:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$$

ثابت کنید:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

۲۲. از ذوزنقه‌ای، طول هریک از قطرها و ساق‌ها معلوم است. ذوزنقه

را رسم کنید.

۲۳. دو دایره با شعاع  $\frac{1}{2\pi} R$  مفروض‌اند. روی یکی از دایره‌ها ۲۰ نقطه را نشان گذاشته‌ایم و روی دیگری چند کمان انتخاب کرده‌ایم که مجموع طول‌های آن‌ها از  $\frac{1}{2}\pi$  کمتر است. ثابت کنید، می‌توان یکی از دایره‌ها را طوری روی دیگری قرار داد که هیچ‌کدام از نقطه‌هایی که نشان گذاشته‌ایم، در درون کمان‌های انتخابی، قرار نگیرد.

۲۴. همان مساله ۱۸.

۲۵. این معادله را، در مجموعه عددهای طبیعی حل کنید:

$$(z+1)^x - z^y = -1$$

سال‌های دهم و یازدهم

۲۶. ثابت کنید، اگر دو معادله با ضریب‌های درست

$$x^r + p_1 x + q_1 = 0 \quad \text{و} \quad x^r + p_2 x + q_2 = 0$$

دارای یک ریشه مشترک باشند و، این ریشه مشترک، عدد درست نباشد، آن‌وقت  $p_2 = q_2$  و  $p_1 = q_1$ .

۲۷. یک گنج سه‌وجهی و نقطه  $A$  روی یکی از پال‌های آن داده شده است. نقطه‌های  $B$  و  $C$  روی دو پال دیگر گنج حرکت می‌کنند. مکان هندسی گرانیگاه (مرکز ثقل) مثلث  $ABC$  را پیدا کنید.

۲۸. این معادله داده شده است:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

که در آن، هریک از  $x_i$ ‌ها برابر است با ۰ یا ۱؛ در ضمن، همه عددهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، با هم برابر صفر نیستند (ولی برخی از آن‌ها می‌توانند برابر صفر باشند). ثابت کنید، بیش از نصف انتخاب‌هایی که برای

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

وجود دارد، نمی‌توانند در معادله صدق کنند.

۲۹. در چندوجهی، زاویه مسطحة  $\alpha$  را، پیوسته به پال می‌نامیم، وقتی که، این پال، ضلعی از زاویه  $\alpha$  باشد. ثابت کنید، در هر چهاروجهی (هر با قاعدة مثلثی)، یالی وجود دارد که زاویه‌های پیوسته به آن، حاده هستند.

۳۰. ثابت کنید، برای  $k$  دنباله بی‌پایان زیر، که از عددهای طبیعی تشکیل شده‌اند،

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots$$

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots$$

$$x_1^3, x_2^3, x_3^3, \dots$$

.....

$$x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots$$

می‌توان شماره‌های  $p$  و  $q$  را پیدا کرد، به نحوی که، برای هر  $i \leq k$  داشته باشیم:  $x_p^i \geq x_q^i$ .

۳۱. ثابت کنید، نمی‌توان  $15$  مریع برابر را طوری روی صفحه رسم کرد که حتاً یکی از آن‌ها، به درون دیگری رخنه نکرده باشد، ولی یکی از آن‌ها، با همهٔ دیگران، تماس داشته باشند.

### دور نهایی

۳۲. رقم بعد از ممیز را در بیان دهد و این عدد پیدا کنید:

$$(5 + \sqrt{26})^{1963}$$

۳۳. قوطی کبریت را، چگونه در فضا نگه داریم که تصویر قائم آن بر صفحه، حداقل مساحت را داشته باشد؟

۳۴. پنج دایره، روی یک صفحه، دو به دو متقاطع‌اند. ثابت کنید، سه‌تا از آن‌ها، در یک نقطه مشترک‌اند.

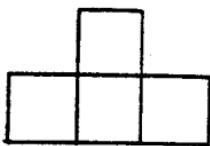
۳۵. عدد طبیعی  $a$ ، بر عدهای  $1, 2, 3, \dots, 9$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، اگر عدد  $2a$  را به صورت مجموعی از عدهای  $1, 2, 3, \dots, 9$  بنویسیم، آنوقت در بین آن‌ها می‌توان چند عدد پیدا کرد که مجموعشان بر  $a$ ، بخش‌پذیر باشد.

۳۶. چهار عدد مثبت داده شده است، در ضمن، مجموع هر سه تا از آن‌ها، از چهارمی بزرگتر است. ثابت کنید، یک چهاروجهی (هرمی با قاعدهٔ مثلثی) وجود دارد، به‌نحوی که این عدها، مساحت‌های وجههای آن باشند.

۳۷. این معادله را در مجموعه عدهای درست حل کنید:

$$x^4 - 2y^4 - 4z^4 - 8t^4 = 0$$

۳۸. ثابت کنید، خط شکسته بسته با پرامون برابر واحد را، می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر  $\frac{1}{4}$  پوشاند (خط شکسته، روی یک صفحه قرار دارد).



شکل ۳

۳۹. آیا مثلثی وجود دارد که، طول ضلع‌ها، ارتفاع‌ها و نیمساز‌های آن، عددهای درستی باشند؟

۴۰. بهازای چه مقدار  $2^n$ ، عدد  $1 + 2^n$ ، برابر توانی از یک عدد طبیعی است؟

۴۱. از دو نقطه گرهی یک صفحه شطرنجی، دو خط راست موازی رسم کردہ‌ایم. ثابت کنید، در هر حال، روی نواری که به دست می‌آید، بینهایت نقطه گرهی وجود دارد.

## ۱۹۶۴

### سال ششم

۱. سه نفر - «آنیلوف»، «بوریسوف»، «وروویف» - هرکدام شش بار، به یک هدف تیراندازی کردند. درنتیجه کار، معلوم شد، هر سه نفر، امتیاز‌های برابر آورده‌اند. «آنیلوف» در سه شلیک اول، ۴۳ امتیاز و «بوریسوف» در شلیک اول سه امتیاز آورد. می‌دانیم، امتیاز ۵ یک بار، امتیاز ۲۵ دو بار، امتیاز ۲۰ سه بار، امتیاز ۱۰ سه بار، امتیاز ۵ دو بار، امتیاز ۳ دو بار، امتیاز ۲ دو بار و امتیاز ۱ یک بار به دست آمده است. هریک از این سه نفر، در هر شلیک، چند امتیاز به دست آورده‌اند؟

۲. ثابت کنید، صفحه شطرنجی  $10 \times 10$  را نمی‌توان با ۲۵ تکه به صورت شکل ۳، پوشاند.

۳. در هر خانه صفحه شطرنج، عددهای طبیعی نوشته شده است، به نحوی که، هر عدد برابر است با واسطه حسابی دو عدد مجاورش. مجموع عددهای واقع در خانه‌های چهار گوشة صفحه، برابر است با ۱۶. عدد واقع در خانه ۲۲ را پیدا کنید.

۴. جدولی  $100 \times 100$  در اختیار داریم. حداقل، چند حرف می‌توان در خانه‌های این جدول قرار داد، به نحوی که هیچ دو خانه‌ای که در کنار هم قرار دارند، شامل حرف‌های یکسان نباشند؟

۵. گروه سربازان را به شکل مستطیلی به صفت کرده‌ایم. از هر ردیف، بلندترین مرد را، و از بین این بلندترین‌ها، کوتاهترین مرد را انتخاب کردیم. سپس، از هر ستون کوتاهترین مرد را، و از بین این کوتاهترین‌ها بلندترین مرد را انتخاب کردیم. کدام یک از این دو تفریق بلندترند؟

۶. حاصل ضرب سه عددی را پیدا کنید که مجموع، مجموع مجذورها و مجموع مکعب‌های آن‌ها، برابر واحد باشد.

### سال هفتم

۷. همه زاویه‌های یک  $n$  ضلعی کوثر، منفرجه‌اند. ثابت کنید، در این  $n$  ضلعی، مجموع طول‌های قطرها، از مجموع طول‌های ضلع‌ها بیشتر است.

۸. همه عددهای درست  $x$  و  $y$  را پیدا کنید که، به ازای هریک از آن‌ها،  $x^4 + 4y^4$ ، عددی اول باشد.

۹. مثلث  $ABC$  داده شده است. روی ضلع‌های این مثلث، متوازی‌الاضلاع‌های  $ACFG$  و  $BCMN$ ،  $ABKL$  راست  $MF$  و  $KN$ ، می‌توان یک مثلث ساخت.

۱۰. همان مساله ۲.

۱۱. حداکثر، چند عدد مختلف می‌توان پیدا کرد که، هریک از آن‌ها از ۵۰ کوچکتر و هر دو تا از آن‌ها، نسبت به هم اول باشند؟

۱۲. نقطه‌های  $D$  و  $E$  به ترتیب، وسط ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$  هستند. نقطه  $M$  روی  $AC$  و  $|ME| > |EC|$ . ثابت کنید:  $|MD| < |AD|$ .

سال هشتم

۱۳. عددهای اول  $p$ ،  $q$  و  $r$  را پیدا کنید، به شرطی که

$$pqr = 5(p + q + r)$$

۱۴. ثابت کنید، به شرطی که  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$ ، داریم.

$$\frac{\overline{abb\dots bb}}{\overline{bb\dots bbc}} = \frac{a}{c}$$

هر عدد صورت و مخرج کسر سمت چپ برابری، دارای  $n$  رقم است.

۱۵. مثلث را با معلوم بودن محیط، ارتفاع و زاویه مجاور قاعده، رسم کنید.

۱۶. ثابت کنید، مجنوز مجموع  $n$  عدد مختلفی که مخالف صفر و هر کدام مجنوز کامل‌اند، در ضمن برابر است با مجموع  $n$  مجنوز کامل درست و مخالف صفر.

۱۷. در چهارضلعی  $ABCD$ ، قطرهای  $AC$  و  $BD$  را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی مثلث‌های  $ABC$  و  $ADC$ ، بر هم مماس باشند، آنوقت دایره‌های محاط در مثلث‌های  $BAD$  و  $BCD$  هم مماس بر یکدیگرند.

۱۸. اگر عددهای  $a$  و  $n$  نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید، می‌توان عددهای درست  $x$  و  $y$  را پیدا کرد، به‌نحوی که  $|y| < \sqrt{n}$ ،  $|x| < \sqrt{n}$  و  $y - \Delta x$  بخش‌پذیر بر  $n$  باشد.

سال نهم

۱۹. همان مساله ۱۵.

۲۰. در درون یک مربع به ضلع واحد، ۵۱ نقطه قرار دارد. ثابت کنید،

در بین آنها، سه نقطه پیدا می‌شود که در درون دایره به شعاع  $\frac{1}{7}$  جا بگیرند.

۲۱. ثابت کنید، اگر برای عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{n}{1} \right] + \left[ \frac{n}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{n} \right] &= \\ = 2 + \left[ \frac{n-1}{1} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n-1}{n-1} \right] \end{aligned}$$

آن وقت  $n$ ، عددی اول است.

۲۲. همان مساله ۱۶.

۲۳. در مثلث  $ABC$ ، از راس  $A$  به نقطه  $D$  واقع بر ضلع  $BC$  وصل

کرده‌ایم.

۱) ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث‌های  $ADC$ ،  $ABD$ ،  $ABD$ ،

و نقطه  $A$ ، روی محیط یک دایره‌اند.

۲) نقطه  $D$  را طوری پیدا کنید که شعاع این دایره، کمترین مقدار ممکن

باشد.

۲۴. همان مساله ۱۸.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۵. در درون مربع به ضلع واحد،  $n$  ضلعي  $P$  قرار دارد. ثابت کنید،

می‌توان سه راس  $A$ ،  $B$  و  $C$  از  $n$  ضلعي  $P$  را پیدا کرد، بهنحوی که

$$S_{ABC} \leq \frac{100}{n^2}$$
 داشته باشیم:

۲۶. دو دستگاه مختصات قائم،  $N$  نقطه با مختصات درست  $(x, y)$  با شرط  $n < x^2 + y^2$  وجود دارد ( $n$ ، عددی درست است). ثابت کنید:

$$N \geq 3(n - 1)^2$$

۲۷. دایره‌ای به شعاع واحد، و چهار نقطه روی محیط آن داده شده است. از هر دو نقطه مجاور، دایره‌ای به شعاع واحد گذرانده‌ایم. ثابت کنید، چهار نقطه برخورد دیگر دایره‌های اخیر، روی محیط یک دایره قرار دارند.

۲۸. فرض کنید، در تجزیه عدد  $n$ ، عامل اول ۲، با نمای  $\alpha_n$  ظاهر

شود

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

ثابت کنید، در دنباله

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2^n - 1}$$

تعداد عددهای زوج، با تعداد عددهای فرد، یک واحد اختلاف دارد.

۲۹. دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط راست  $L$  روی یک صفحه‌اند. نقطه  $E$  را روی خط راست  $L$  طوری پیدا کنید که  $|AE| + |BE| = d$  برابر عدد مفروض باشد.

۳۰.  $S$  را دسته‌ای از عددهای طبیعی کوچکتر از عدد اول مفروض  $p$  می‌گیریم. در این دسته، اگر عددهای  $a$  و  $b$  وجود داشته باشد، باقی‌مانده حاصل از تقسیم عددهای  $ab$ ،  $a$  و  $b$  بر  $p$  هم وجود دارد. ثابت کنید، اگر در  $S$ ، دست کم دو عدد وجود داشته باشد، آنوقت مجموع عددهای دسته  $S$ ، بر  $p$  بخش‌پذیر است.

دور نهایی

۳۱. راس‌های یک مثلث با زاویه‌های حاده، روی دو ضلع رو به رو از یک مربع به ضلع واحد و راس‌های مثلث دوم با زاویه‌های حاده روی دو ضلع رو به روی دیگر این مربع قرار دارند. ثابت کنید، بخش مشترک مساحت‌های این دو مثلث، از چهار برابر عدد حاصل ضرب مساحت‌های دو مثلث تجاوز نمی‌کند.

۳۲. عده‌های طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مفروض‌اند که، در بین آن‌ها، ممکن است عده‌های برابر هم وجود داشته باشد.  $f_k$  را تعداد عده‌هایی، از این دسته عده‌ها می‌نامیم که از  $k$  کوچک‌تر نیستند. ثابت کنید:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

۳۳. مربع به ضلع واحد،  $n$  شکل را طوری پوشانده است که، هر نقطه آن، دست کم متعلق به  $\frac{q}{n}$  شکل است. ثابت کنید، لااقل یک شکل وجود دارد که، مساحت آن، از  $\frac{q}{n}$  کمتر نیست.

۳۴. همه عده‌های حقیقی را، به دو گروه بخش کرده‌ایم. ثابت کنید، برای هر  $c > k$ ، سه عدد  $c < b < a$  از یک گروه پیدا می‌شود، به نحوی که داشته باشیم

$$\frac{c - b}{b - a} = k.$$

۳۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، مثلثی با زاویه‌های معلوم محاط کنید که حداقل مساحت را داشته باشد.

۳۶\*.  $n$  نفر به ضرب سکه مشغول‌اند. برخی از آن‌ها، تنها سکه‌های تقلیلی درست می‌کنند و بقیه، فقط سکه‌های واقعی. وزن سکه تقلیلی، با وزن سکه واقعی فرق دارد. یک ترازو با گونه‌های مختلف وزنه و یک سکه واقعی در اختیار داریم. از هر کدام از ضرب‌کنندگان سکه، هرقدر سکه که مایل باشیم، می‌توانیم بگیریم. چگونه می‌توان، با سه بار وزن کردن، همه کسانی را که به ساختن سکه تقلیلی مشغول‌اند، شناخت؟

# ۱۹۶۵

## سال ششم

۱. در کارگاه صحافی، ۹۲ برگ کاغذ سفید و ۱۳۵ برگ کاغذ رنگی وجود دارد. برای صحافی هر کتاب، یک برگ کاغذ سفید یک برگ کاغذ رنگی لازم است. بعد از این که چند کتاب صحافی شد، تعداد برگ های باقی مانده سفید، نصف تعداد برگ های رنگی بود. چند کتاب صحافی شده است؟
۲. عدد های طبیعی از ۱ تا ۱۹۶۵ را در هم ضرب کرده ایم. ثابت کنید، آخرین رقم غیر صفر سمت راست حاصل ضرب، عددی زوج است.
۳. لاستیک های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک های عقب بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می شود. چه موقع باید جای لاستیک های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟
۴. مستطیل  $65 \times 19$  (سانتی متری) را به وسیله خط های راست موازی ضلع ها، به مریع هایی به ضلع یک سانتی متر بخش کرده ایم. اگر قطر این مستطیل را رسم کنیم، روی هم به چند بخش تقسیم می شود؟
۵. بخشی، بخشیاب و خارج قسمت را در این تقسیم پیدا کنید:

$$\begin{array}{r}
 * * * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r}
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 \end{array} \right.$$

۶. عددهای فرد از ۱ تا ۴۹ را، به این ترتیب نوشته‌ایم:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| ۱  | ۳  | ۵  | ۷  | ۹  |
| ۱۱ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۹ |
| ۲۱ | ۲۳ | ۲۵ | ۲۷ | ۲۹ |
| ۳۱ | ۳۳ | ۳۵ | ۳۷ | ۳۹ |
| ۴۱ | ۴۳ | ۴۵ | ۴۷ | ۴۹ |

از این عددها، پنج عدد طوری انتخاب کنید که هیچ دو تا از آن‌ها، متعلق به یک سطر یا متعلق به یک ستون نباشند. مجموع این پنج عدد، چند است؟

#### سال هفتم

۷. ثابت کنید، عددی که تعداد بخشیاب‌های آن، عددی فرد باشد، مجنور کامل است.

۸. در مثلث  $ABC$ ، که مساحتی برابر  $S$  دارد، میانه‌های  $AK$  و  $BE$  را رسم کرده‌ایم. اگر این دو میانه، در نقطه  $O$  با هم برخورد کرده باشند، مساحت چهارضلعی  $CKOE$  را پیدا کنید.

۹. لاستیک‌های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های عقب، بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع، جای لاستیک‌های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا اتومبیل بتواند بیشترین فاصله را، با همین لاستیک‌ها پیماید؟

۱۰. مستطیل  $60 \times 24$  را با رسم خط‌های راست موازی ضلع‌ها، به مریع‌های به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. اگر قطر مستطیل را هم رسم کنیم، چند بخش در مستطیل به وجود می‌آید؟

۱۱. اگر  $[A]$  به معنای بزرگترین عدد درستی باشد که از  $A$  تجاوز

نمی‌کند، این معادله را حل کنید:

$$\frac{5+6x}{8} = \frac{15x-7}{5}$$

۱۲. روی صفحه سفیدی رنگ پاشیده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دو نقطه هم‌رنگ پیدا کرد، به نحوی که فاصله بین آن‌ها، برابر ۱۹۶۵ متر باشد.

### سال هشتم

۱۳. مستطیل  $60 \times 24$  را، با رسم خط‌های راست موازی با ضلع‌ها، به مریع‌های به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. خط راست دیگری رسم کنید که، پس از آن، تعداد بخش‌های مستطیل، حداقل مقدار ممکن شود.

۱۴. مهندسان همیشه راست و بازرگانان همیشه دروغ می‌گویند.  $F$  و  $G$  مهندس‌اند.  $A$  توضیح می‌دهد، که  $B$  تاکید دارد، که  $C$  باور دارد، که  $D$  می‌گوید، که  $E$  اصرار می‌کند که  $F$  مهندس بودن  $G$  را نفی می‌کند. هم توضیح می‌دهد که  $D$  بازرگان باشد، روی هم در اینجا، چند بازرگان وجود دارد؟

۱۵. جاده مستقیمی از دشت می‌گذرد. جهان‌گرد، روی جاده در نقطه  $O$  ایستاده است. او می‌تواند از طریق جاده، با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت و از طریق دشت، با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت حرکت کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که، جهان‌گرد می‌تواند بعد از یک ساعت در آنجاها باشد.

### ۱۶. همان مسأله ۱۱.

۱۷. در کشوری، هر دو شهر، به وسیله جاده به هم مربوط‌اند؛ ولی هر جاده، یک طرفه است، یعنی تنها در یک جهت آن می‌توان حرکت کرد. ثابت کنید، شهری وجود دارد که، با خارج شدن از آن می‌توان، از همه شهرهای کشور، و از هر کدام تنها یک بار، عبور کرد.

۱۸. هشت عدد اول پیدا کنید، به نحوی که مجموع مجددوارهای آنها با ۹۹۲، از چهار برابر حاصل ضرب آنها تجاوز نکند.

سال نهم

۱۹. با دو پاره خط راست به طول واحد، از یک زاویه مفروض، یک چهار ضلعی جدا کنید که حداقل مساحت ممکن را داشته باشد.

۲۰. همان مسأله ۱۴.

۲۱. متوازی الاضلاع را به کمک خطهای راست موازی ضلعهای آن، به چند بخش تقسیم کرده‌ایم؛ در ضمن، یکی از ضلعها به  $m$  بخش و دیگری به  $n$  بخش تقسیم شده است. با رسم یک خط راست دیگر، متوازی الاضلاع را، حداقل به چند بخش می‌توان تقسیم کرد؟

۲۲. برای طولهای ضلعهای مثلث  $ABC$  داریم:

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \leq 6^6$$

روی ضلعهای  $AB$ ،  $BC$  و  $AC$ ، به ترتیب، نقطه‌های  $C'$  و  $A'$  و  $B'$  را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & |AC'| \cdot |C'B| \cdot |BA'| \cdot |A'C| \cdot |CB'| \cdot |B'A| < \\ & < |AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \end{aligned}$$

۲۳.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  و  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ، دو تبدیل مختلف از عددهای  $1, 2, \dots, n$  هستند. ثابت کنید، اگر  $n$  عددی زوج باشد، دست‌کم دو جمله از دنباله

$$A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_n + B_n$$

در تقسیم بر  $n$ ، به یک باقی مانده می‌رسند.

۲۴\*.  $n$  دایره در روی صفحه، مساحتی برابر ۱ واحد مربع را اشغال کرده‌اند. ثابت کنید، می‌توان از بین آن‌ها، چند دایرة غیرمتقاطع انتخاب کرد که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، بیشتر از  $\frac{1}{n}$  واحد مربع باشد.

سال‌های دهم و یازدهم

۲۵. این معادله را، در مجموعه عددهای درست حل کنید:

$$6xy - 4x + 9y - 366 = 0$$

۲۶. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\frac{1}{\cos \alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1)\alpha \cos n\alpha}$$

۲۷. همان مساله ۲۳

۲۸. برای کلاس دهم. روی ضلع  $AB$  از مثلث  $ABC$ ، نقطه داخله  $M_1$  را انتخاب کرده‌ایم. به مرکز نقطه  $A$  و به شعاع برابر  $|AM_1|$ ، کمان  $M_1 M_2$  را در درون مثلث  $ABC$  رسم کرده‌ایم ( $M_2 \in AC$ ). سپس، به مرکز نقطه  $C$  و به شعاع برابر  $|CM_2|$ ، کمان  $M_2 M_3$  را در درون مثلث  $ABC$  رسم کرده‌ایم ( $M_3 \in BC$ ). سرانجام، به مرکز نقطه  $B$  و به شعاع برابر  $|BM_3|$ ، کمان  $M_3 M_4$  را تا برخورد با  $AB$  رسم کرده‌ایم و غیره. عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که کمان بسته شود. طول این منحنی بسته را پیدا کنید، به شرطی که، طول ضلع‌های مثلث و اندازه زاویه‌های آن معلوم باشد.

برای کلاس یازدهم.  $A$  و  $B$ ، عددهایی غیرمنفی‌اند. ثابت کنید:

$$(A + B)^n \leq 2^{n-1}(A^n + B^n)$$

۲۹. مکعب  $12 \times 12 \times 12$  را به یاری صفحه‌های موازی با وجههای به مکعب‌های واحد تقسیم کرده‌ایم. اگر با صفحه دیگری، مقطعی به صورت شش ضلعی منتظم در مکعب بوجود آوریم، مکعب روی هم، به چند بخش تقسیم می‌شود؟

۳۰. سه دایره مفروض‌اند. نقطه‌ای بر صفحه پیدا کنید که مماس‌های مرسوم از آن بر دایره‌ها، یکی با دیگری، زاویه‌های برابر بسازند.

### دور نهایی

۳۱\*. در خانه‌های یک جدول  $n \times n$ ، عددهای درست غیرمنفی را قرار داده‌ایم. در ضمن، اگر در خانه‌ای عدد صفر قرار گرفته باشد، آنوقت مجموع همهٔ عددهایی که با این خانه در یک سطر یا یک ستون واقع‌اند، کمتر از  $n^2$  نیست. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای جدول، کمتر از  $\frac{1}{3}n^2$  نیست.

۳۲. دربارهٔ عددهای مثبت  $a, b, c, x, y, z$  می‌دانیم:

$$a < b < c, a < x < y < z < c,$$

$$abc = xyz, a + b + c = x + y + z$$

. ثابت کنید:  $c = z, b = y, a = x$

۳۳. بین همهٔ چندجمله‌ای‌های به صورت  $b + ax + x^2$ ، آن را پیدا کنید که ماکریم قدر مطلق آن، در بازه  $[1, -1]$ ، حداقل باشد.

۳۴. ثابت کنید، مساحت مربعی که در درون یک مثلث واقع است، از نصف مساحت مثلث تجاوز نمی‌کند.

۳۵. روی صفحهٔ شطرنجی، شکلی به مساحت واحد داده شده است. ثابت کنید، می‌توان این شکل را روی صفحه طوری جابه‌جا کرد که هیچ‌کدام از گرهای شبکه در درون آن نباشد.

\*۳۶. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای مثلثهای متساوی الاضلاعی که بر یک مثلث مفروض، محیط شده‌اند.

## ۱۹۶۶

### سال ششم

۱. کدام‌یک از این دو عدد بزرگترند:

$\frac{100\ldots001}{100\ldots001}$  (در صورت کسر ۱۹۶۵ صفر و در مخرج ۱۹۶۶ صفر)؛

یا  $\frac{100\ldots001}{100\ldots001}$  (در صورت کسر ۱۹۶۶ صفر و در مخرج ۱۹۶۷ صفر).

۲. در مسابقه فوتبال، ۳۰ تیم شرکت کرده‌اند. ثابت کنید، در هر لحظه،

می‌توان دو تیم پیدا کرد که، تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند، برابر باشد.

۳. روی تخته سیاه، همه عددهای درست از ۱ تا ۱۹۶۶ را نوشته‌ایم. هر

بار، دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و، به جای آنها، تفاضلشان را می‌نویسیم.

ثبت کنید، هر چند بار و به هر نحوی این عمل را تکرار کنیم، نمی‌توانیم به

حالی برسیم که، روی تخته سیاه، تنها عدد ۰ مانده باشد.

۴. مرکب سیاه را روی کاغذ سفید پاشیده‌ایم. ثابت کنید، روی صفحه

کاغذ، می‌توان سه نقطه همنگ پیدا کرد که روی یک خط راست باشند و،

در ضمن، یکی از این نقطه‌ها، درست وسط دو نقطه دیگر قرار گیرد.

۵. در یک مسابقه بازی شطرنج، بیش از سه شطرنج باز شرکت دارند

و هر کس با هر کس دیگر، به یک تعداد مسابقه می‌دهد. در مسابقه، ۲۶

دور بازی بود، بعد از ۱۲ دور، یکی از شرکت‌کنندگان در مسابقه، متوجه

شد، تعداد امتیازهای او عددی فرد، ولی تعداد امتیازهای هریک از دیگر

شرکت‌کنندگان، عددی زوج است. در این مسابقه، چند شطرنج باز شرکت

داشته‌اند؟

## سال هفتم

.۶. همان مسالة ۳.

۷. ثابت کنید، طول شعاع دایره، برابر است با تفاضل طول‌های دو پاره خط راست که یکی وتر کمان  $\frac{1}{10}$  و دیگری وتر کمان  $\frac{3}{10}$  دایره است.
۸. ثابت کنید، بهازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد

$$n(2n+1)(3n+1)\dots(1966n+1)$$

بر هر عدد اول کوچکتر از ۱۹۶۶ بخش پذیر است.

۹. چه عددی می‌توان به جای \* قرار داد تا مساله زیر تنها یک پاسخ داشته باشد: «روی صفحه،  $n$  خط راست وجود دارد که در \* نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند. مقدار  $n$  را پیدا کنید».

۱۰. همان مسالة ۴.

۱۱.  $n$  نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، هر مثلث به راس‌های این نقطه‌ها، مساحتی کمتر از ۱ دارد. ثابت کنید، همه این نقطه‌ها را، می‌توان در مثلثی به مساحت ۴ جا داد.

## سال هشتم

.۱۲. همان مسالة ۹.

.۱۳. همان مسالة ۸.

.۱۴. همان مسالة ۱۱.

۱۵. ثابت کنید، مجموع همه بخشیاب‌های  $n^2$ ، عددی فرد است.

۱۶. سه زاویه از یک چهارضلعی، منفرجه‌اند. ثابت کنید، از دو قطر چهارضلعی، قطر با طول بزرگتر، از راس زاویه حاده می‌گذرد.

۱۷. عددهای  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ، به این ترتیب ساخته شده‌اند:

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{x_1 + 1}{5x_1}; x_3 = \frac{x_2 + 1}{5x_2}, \dots$$

ثابت کنید، ساختمن این عددها را تا هر جا ادامه دهیم، همه عددهای حاصل، کمتر از  $\frac{1}{5}$  و بیشتر از  $\frac{2}{5}$  نیستند.

سال نهم

۱۸. از مستطیل مفروض، یک لوزی با حداقل مساحت ممکن جدا کنید.

۱۹. این معادله، در مجموعه عددهای درست، چند جواب دارد:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$$

۲۰. ثابت کنید، می‌توان صفحه را با نه رنگ مختلف چنان رنگ کرد که، فاصله بین هر دو نقطه هم‌رنگ، با  $1966$  متر فرق داشته باشد.

۲۱.  $p$  و  $q$ ، عددهایی اول‌اند.  $1 - q^3$  بر  $p$ ؛  $1 - p$  بر  $q$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید:  $.p = 1 + q + q^2$

۲۲. ضلع‌های مثلث  $ABC$ ، وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی الساقین هستند که در بیرون مثلث  $ABC$  ساخته شده‌اند. این مثلث‌ها را  $ABD$ ،  $ACF$  و  $BCE$  می‌نامیم. ثابت کنید، پاره خط‌های راست  $DE$  و  $BF$  بر هم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.

۲۳\*.  $k$  رنگ در اختیار داریم. با چند روش می‌توان ضلع‌های یک  $n$  ضلعی منتظم را رنگ کرد، به نحوی که ضلع‌های مجاور، رنگ‌های مختلف داشته باشند (چند ضلعی را نمی‌توان چرخاند)؟

سال‌های دهم و یازدهم

. ۲۴. همان مساله ۱۸.

. ۲۵. همان مساله ۱۹.

. ۲۶. همان مساله ۲۰ برای ۱۱ رنگ.

. ۲۷. همان مساله ۲۳.

. ۲۸. به ازای چه  $\epsilon$ ، می‌توان پاره خط راست به طول  $2a$  را به  $n$  پاره خط راست تقسیم کرد که طول هریک از آنها از  $a$  بیشتر نباشد، به نحوی که از آنها نتوان پاره خط راستی ساخت که طول آن برابر  $a$  نباشد و از  $\epsilon$  کوچکتر باشد؟

. ۲۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_1' + x_2' + \dots + x_n' = 1 \\ \dots \dots \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = 1 \end{cases}$$

دور نهایی

. ۳۰.  $m$  و  $n$  عددهایی طبیعی‌اند؛ در ضمن،  $m$  عددی فرد است. ثابت کنید،  $1 + 2^n - 2^m$  نسبت به هم اول‌اند.  
. ۳۱\*.  $T_n$  را بیشترین مساحتی می‌گیریم که یک  $n$  ضلعی محاط در یک  $k$  ضلعی کوثر می‌تواند داشته باشد ( $k < n < 3$ ). ثابت کنید، برای هر  $n < k$  داریم:

$$T_{n-1} + T_{n+1} \leq 2T_n$$

. ۳۲. از دنباله عددهای

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 2^n$$

به تعداد  $\left[\frac{2^n - 3}{3}\right]$  عدد انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، در بین عددهای باقی‌مانده، دو عدد پیدا می‌شود که یکی دو برابر دیگری است.

۳۳. «تجزیه مریع» را، به تقسیم آن، به مستطیل‌های می‌گوییم که ضلع‌های آن‌ها موازی با ضلع‌های مریع و تعداد آن‌ها محدود باشد. تجزیه را ساده می‌گوییم، وقتی از تقسیم بخش‌های بزرگتر به دست نیامده باشد (یعنی دو یا چند مستطیل آن، نتواند مستطیل بزرگتری تشکیل دهند). به ازای چه مقدارهایی از  $n$ ، تجزیه ساده مریع به  $n$  مستطیل ممکن است؟

۳۴\*.  $n$  نقطه روی صفحه داده شده است. بعضی از آن‌ها را به وسیله پاره‌خط‌های راستی به هم وصل کرده‌ایم، به نحوی که، از هر نقطه به هر نقطه دیگر، بتوان تنها به یک طریق رسید. ثابت کنید، برای این منظور، تعداد  $n^{n-2}$  روش برای وصل نقطه‌ها به یکدیگر وجود دارد.

۳۵\*. یک  $n$  ضلعی با ضلع‌های به طول‌های  $a_1, a_2, \dots, a_n$  در دایره‌ای محاط شده است؛ در ضمن، مرکز دایره در درون چندضلعی واقع است. ثابت کنید، این دایره را می‌توان به وسیله  $n$  دایره با شعاع‌های  $\frac{na_1}{6}, \frac{na_2}{6}, \dots, \frac{na_n}{6}$  پوشاند.

۱۹۶۷

### سال ششم

۱. گنجایش ظرف‌های مکعبی شکل به نسبت (۱ : ۸ : ۲۷) و حجم مایع درون آن‌ها، به نسبت (۱ : ۲ : ۳) است. مقداری از مایع ظرف اول در ظرف دوم ریخته‌ایم و، سپس، از ظرف دوم به ظرف سوم، تا جایی که سطح مایع در هر سه ظرف یکسان شود. سپس، از ظرف اول،  $\frac{4}{7} ۱۲۸$  لیتر مایع به ظرف دوم، ریخته‌ایم و، بعد، از ظرف دوم به ظرف اول آنقدر مایع برگرداندیم تا ارتفاع ستون مایع در ظرف اول دو برابر ارتفاع ستون مایع در

ظرف دوم شود. معلوم شد، در ظرف اول  $100$  لیتر کمتر از آن‌چه در آغاز در آن بوده، وجود دارد. در آغاز، در هر ظرف چقدر مایع بوده است؟

۲. عقایدهای ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار یک ساعت، در شبانه‌روز چند بار برابر هم منطبق می‌شوند؟

۳. ثابت کنید، در شهر لنین‌گراد، دو نفر پیدا می‌شود که، تعداد آشنايان لنین‌گرادی آن‌ها، یکی است.

۴. هریک از هشت عدد طبیعی مختلف، از  $16$  کوچکتر است. ثابت کنید، در بین تفاضلهای دو به دوی آن‌ها، دست‌کم سه عدد برابر وجود دارد.

۵. فاصله از  $A$  تا  $B$ ، برابر  $100$  کیلومتر است. در یک لحظه، دو دوچرخه‌سوار، اولی با سرعت  $20$  کیلومتر در ساعت از  $A$  به طرف  $B$ ؛ و دومی با سرعت  $30$  کیلومتر در ساعت از  $B$  به طرف  $A$  حرکت کردند. همراه با اولی، مگسی هم، با سرعت  $50$  کیلومتر در ساعت به پرواز درآمد. مگس تا برخورد با دوچرخه‌سوار دوم به طرف  $B$  رفت و، سپس، به طرف  $A$  برگشت تا به دوچرخه‌سوار اول رسید؛ دوباره، بعد از رسیدن به اولی برگشت و به طرف دوچرخه‌سوار دوم آمد و غیره. وقتی دو دوچرخه‌سوار به هم برسند، این مگس، چند کیلومتر از  $A$  به سمت  $B$  پرواز کرده است؟

### سال هفتم

۶. ذوزنقه را با معلوم بودن چهار ضلع آن رسم کنید.

۷. ثابت کنید:

$$(1 + x^1 + x^4 + \dots + x^{100})(1 + x^{102}) - 102x^{101} \geq 0$$

۸.  $M$  وسط ضلع  $AB$  و  $N$  وسط ضلع  $CD$ ، از چهارضلعی  $ABCD$  است. خط‌های راست  $AD$  و  $BC$ ، خط راست  $MN$  را

به ترتیب، در  $P$  و  $Q$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$|BC| = |AD|, \text{ آنوقت } \widehat{BQM} = \widehat{APM}$$

.۹. همان مساله ۴.

.۱۰. از راس‌های  $A$  و  $C$  در مستطیل  $ABCD$ ، کمانی از دایره‌ای را گذرانده‌ایم که، مرکز آن، در درون مستطیل واقع است. خط راستی موازی  $AB$  رسم کنید که  $BC$  را در نقطه  $P$ ،  $AD$  را در نقطه  $Q$  و کمان  $AC$  را در نقطه  $R$  طوری قطع کند که مجموع مساحت‌های شکل‌های  $AQR$  و  $CPR$ ، کمترین مقدار ممکن باشد.

.۱۱. همان مساله ۵.

سال هشتم

.۱۲.  $x$  و  $y$ ، ریشه‌های معادله  $t^2 - ct - c = 0$  هستند. ثابت کنید:

$$x^3 + y^3 + (xy)^3 \geq 0$$

.۱۳. دو دایره، در نقطه  $A$ ، مماس داخل‌اند. از نقطه  $B$  واقع بر محیط دایرة درونی ( $B \neq A$ )، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم تا دایرة بزرگتر را در نقطه‌های  $C$  و  $D$  قطع کند. ثابت کنید،  $AB$  نیمساز زاویه  $CAD$  است.

.۱۴. ثابت کنید  $1 + 2^{300}$  برابر  $3^{101}$  بخش‌پذیر است.

.۱۵. همان مساله ۱۰.

.۱۶. در گروهی از آدمها، هرکس یک دشمن و یک دوست دارد. ثابت کنید، این آدمها را می‌توان به دو دسته چنان تقسیم کرد که در هر دسته، نه دشمن‌ها وجود داشته باشند و نه دوست‌ها.

.۱۷. درباره عددهای  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$  می‌دانیم:

$$a_1 - 2a_2 + a_3 \leq 0,$$

$$a_2 - 2a_3 + a_4 \leq 0$$

.....

$$a_{98} - 2a_{99} + a_{100} \leq 0$$

در ضمن  $a_1 = a_{100} \geq 0$ . ثابت کنید، همه این عددها غیر منفی‌اند.

### سال نهم

۱۸. عددهای فرد متوالی  $p$  و  $q$  مفروض‌اند. ثابت کنید،  $p^p + q^q$  بر  $p+q$  بخش‌پذیر است.

۱۹. مثلث  $ABC$  مفروض است. به مرکز  $B$ ، دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر ضلع  $AC$  مماس باشد. از راس‌های  $A$  و  $C$ ، مماس‌های  $AM$  و  $CP$  را بر این دایره رسم می‌کنیم. خط راست  $MP$ ، خط راست  $AB$  را در نقطه  $E$  و خط راست  $BC$  را در نقطه  $H$  قطع می‌کند. ثابت کنید،  $AH$  و  $CE$ ، ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  هستند.

۲۰. دنباله‌ای شامل  $k$  عدد در اختیار داریم. تصمیم می‌گیریم، به جای هر عدد، مجموع همه عددهای واقع در سمت راست آن را قرار دهیم. ثابت کنید، اگر این عمل را به تعداد کافی تکرار کنیم، آنوقت، دنباله دو بار پشت سرهم تکرار می‌شود.

۲۱. از ۱۰۶ نقطه که هیچ سه نقطه‌ای از آن‌ها بر یک خط راست نیستند، چهار نقطه راس‌های یک مربع به ضلع واحد را تشکیل داده‌اند، و بقیه نقاطها در داخل این مربع‌اند. ثابت کنید، دست‌کم ۱۰۷ مثلث وجود دارد که، راس‌های آن‌ها، روی این نقطه‌هاست و مساحتی دارند که از ۱/۰ تجاوز نمی‌کند.

۲۲.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ .  $B$ ، بزرگترین عدد از عددهای

۲۳. ثابت کنید:  $|b_1 + b_2 + \dots + b_n|, |b_1 + b_2|, |b_1|$  است.

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq Ba_1$$

۲۴. در جنگلی به وسعت یک کیلومتر مربع و به شکل چندضلعی کوثر، مردی راه را گم کرده است. ثابت کنید، این مرد، با پیمودن ۲۵۰۷ متر، می‌تواند از جنگل خارج شود.

سال دهم

۲۵.  $p$  و  $q$  دو عدد فرد پشت سرهم‌اند. ثابت کنید  $p^q + q^p$  بر  $p+q$  بخش‌پذیر است.

۲۶. نقطه  $M$  در درون مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  واقع است. تصویرهای قائم نقطه  $M$  بر ضلع‌های  $BC$ ،  $AC$  و  $AB$  را، به ترتیب،  $C_1$ ،  $B_1$  و  $A_1$  می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & |AB_1| \cdot |BC_1| + |BC_1| \cdot |CA_1| + |CA_1| \cdot |AB_1| = \\ & = |AC_1| \cdot |BA_1| + |BA_1| \cdot |CB_1| + |CB_1| \cdot |AC_1| \end{aligned}$$

.۲۶. همان مساله .۲۵

.۲۷. همان مساله .۲۶

.۲۸. همان مساله .۲۷

۲۹. ثابت کنید، روی یک صفحه، چنان دستگاه محدودی از نقطه‌ها وجود دارد، که برای هر نقطه از این دستگاه، دست کم صد نقطه دستگاه پیدا شود که از این نقطه، به یک فاصله باشند.

دور نهایی

۳۰. دو دایره به مرکزهای  $O_1$  و  $O_2$ ، یکدیگر را در نقطه‌های  $A$  و  $D$  قطع کرده‌اند. از نقطه  $A$ ، مماس‌هایی بر دو دایره رسم کرده‌ایم تا دایره‌های دیگر را در نقطه‌های  $B$  و  $C$  قطع کنند. ثابت کنید:

$$|AB|^2 : |AC|^2 = |BD| : |CD|$$

۳۱. دو چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، چنان‌اند که با هم برابر عددی درست می‌شوند (یعنی، اگر اولی بهازای عددی، برابر یک عدد درست باشد، دومی هم بهازای همان عدد، برابر با عددی درست خواهد شد و برعکس). ثابت کنید، یا مجموع و یا تفاضل آن‌ها، مقداری است ثابت.

۳۲\*. روی هر ضلع مثلث، نقطه‌ای انتخاب و آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. به این ترتیب، چهار مثلث کوچک به دست می‌آید. می‌دانیم، این چهار مثلث، محیط‌هایی برابر دارند. ثابت کنید، نقطه‌های انتخابی، در وسط ضلع‌ها واقع‌اند.

۳۳. ۱۸ نفر در جایی گرد هم آمدند. ثابت کنید، در بین آن‌ها، می‌توان چهار نفر جدا کرد که یا دو به دو یکدیگر را بشناسند و یا دو به دو با هم نآنداشنا باشند.

۳۴\*. در یک جدول  $n \times n$ ، عددهای غیرمنفی را چنان نوشه‌ایم که، مجموع عددهای هر سطر و، همچنین، مجموع عددهای هر ستون، برابر واحد شده است. ثابت کنید، می‌توان  $n$  عدد مثبت پیدا کرد که، هیچ دوتایی از آن‌ها، در یک سطر یا یک ستون، قرار نگرفته باشند.

۳۵. این دنباله داده شده است:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{25} < a_{26}$$

در ضمن  $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 - a_{n-1}^4}$  و  $a_0 = 26$ ، ثابت کنید:

$$a_0 < 7 \times 10^{-8}$$

## سال ششم

۱. دانشآموزی، یک کیف، یک خودنویس و یک کتاب خرید.

اگر قیمت کیف  $\frac{1}{5}$ ، قیمت خودکار  $\frac{1}{3}$  و قیمت کتاب  $\frac{2}{5}$  قیمت فعلی آن بود، آنوقت، دانشآموز برای همه آن‌ها ۲ روبل می‌پرداخت. اگر کیف  $\frac{1}{2}$ ، خودکار  $\frac{1}{4}$  و کتاب  $\frac{1}{3}$  قیمت کنونی خود را داشتند، آنوقت، برای خرید آن‌ها، ۳ روبل لازم بود مبلغ خرید دانشآموز، درواقع، چقدر بوده است؟

۲. از این دو عدد، کدام و چقدر بزرگتر است؟

$$\underbrace{888 \dots 88}_{\text{عرق}} \times \underbrace{333 \dots 33}_{\text{عرق}} \\ 19$$

یا

$$\underbrace{444 \dots 44}_{\text{عرق}} \times \underbrace{666 \dots 67}_{\text{عرق}} \\ 19$$

۳. فاصله بین دو شهر  $A$  و  $B$  برابر ۱۹۴ کیلومتر، فاصله بین دو شهر  $B$  و  $C$ ، برابر ۱۱۶ کیلومتر، فاصله بین دو شهر  $C$  و  $D$ ، برابر ۴۵۱ کیلومتر و فاصله بین دو شهر  $D$  و  $A$ ، برابر ۱۴۱ کیلومتر است. فاصله بین دو شهر  $B$  و  $D$  چقدر است؟

۴. چهار چیز، با وزن‌های مختلف و یک ترازو (بدون هیچ وزنه‌ای) در اختیار داریم. چگونه می‌توان، با پنج بار استفاده از ترازو، این چیزها را نسبت به وزن آن‌ها، ردیف کرد؟

۵. چند تیم، در مسابقه والیال شرکت کردند. تیم  $A$ ، به شرطی نیرومندتر از تیم  $B$  به شمار می‌آید که یا از تیم  $B$  ببرد و یا تیمی مثل  $C$  وجود داشته

باشد که تیم  $A$  از  $C$  و تیم  $C$  از  $B$  بپردازد. ثابت کنید، اگر تیم  $T$ ، تیم پیروز مسابقه باشد، آنوقت این تیم از همه تیم‌های دیگر، نیرومندتر است.  
۶. در مساله ۱، معلوم کنید، کدام گرانتر است: کیف یا خودکار؟

### سال هفتم

۷. در مربعی، یک مستطیل (که طول و عرض نابرابر دارد) محاط کردۀ ایم. ثابت کنید، مجموع طول‌های طول و عرض آن (یعنی نصف محیط مستطیل)، برابر است با طول قطر مربع.
۸. پنج عدد پیدا کنید که مجموع دویده‌دی آنها برابر عدددهای  $۰, ۲, ۴, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴$  و  $۱۷$  باشد.
۹. در یک عدد  $10000$  رقمی، همه رقم‌ها، به جز یکی، برابر  $5$  هستند. ثابت کنید، این عدد نمی‌تواند مجذور کامل باشد.
۱۰. همان مساله ۵.
۱۱. در پنج ضلعی  $ABCDE$ ، وسط ضلع  $AB$  را  $K$ ، وسط ضلع  $BC$  را  $L$ ، وسط ضلع  $CD$  را  $M$ ، وسط ضلع  $DE$  را  $N$ ، وسط پاره خط راست  $KM$  را  $P$  و وسط پاره خط راست  $LN$  را  $Q$  می‌نامیم. ثابت کنید، پاره خط راست  $PQ$  با پاره خط راست  $AE$  موازی است و طولی برابر یک‌چهارم طول آن دارد.
۱۲. در دایره به شعاع برابر  $3$ ، چند دایره، به دلخواه، جا داده‌ایم. مجموع طول‌های شعاع‌های این دایره‌ها، برابر است با  $25$ . ثابت کنید، خط راستی پیدا می‌شود که، دست‌کم،  $9$  دایره داخلی را قطع می‌کند.

### سال هشتم

۱۳. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، طول قطر  $AC$  از طول قطر  $BD$  بزرگتر است. نقطه  $M$ ، روی قطر  $AC$  چنان است که از راس‌های

چهارضلعی  $BCDM$ ، می‌توان یک دایره گذراند. ثابت کنید، خط راست  $BD$ ، مماس مشترک دایره‌های محیطی دو مثلث  $ABM$  و  $ADM$  است.

۱۴.  $a$  عددی فرد است و  $x$  و  $y$ ، ریشه‌های معادله

$$t^2 + at - 1 = 0$$

همستند. ثابت کنید  $y^4 + x^4$  و  $y^5 + x^5$ ، دو عدد درست نسبت به هم اول، هستند.

۱۵. قرینه مثلث متساوی‌الاضلاعی را نسبت به یکی از ضلع‌های آن پیدا کرده‌ایم. قرینه مثلث جدید را هم، نسبت به یکی از ضلع‌های خودش، بدست آورده‌ایم. این عمل را، چند بار تکرار کرده‌ایم. در پایان، معلوم شد، آخرین مثلث، بر مثلث اصلی منطبق شده‌است. ثابت کنید، تعداد عمل‌های مربوط به پیدا کردن قرینه، عدد زوج است.

۱۶. همان مسالة ۱۲.

۱۷. همه عددهای دورقیمی را، که به صفر ختم نشده‌اند، طوری پشت سر هم نوشته‌ایم که هر عدد بعدی، با رقمی آغاز شود که عدد قبلی به آن ختم شده‌است. ثابت کنید، چنین روشی، برای نوشتن عددها، ممکن است. از بین همه عددهای چندرقمی که به این ترتیب می‌توان بدست آورد، مجموع بزرگترین و کوچکترین عدد را پیدا کنید.

۱۸\*. همه عددهای ۱۰ رقمی را که می‌توان با رقم‌های ۱ و ۲ و ۳ نوشت، یکی زیر دیگری می‌نویسیم. به دنبال هر عدد، باز هم رقمی از رقم‌های ۱، ۲ یا ۳ را می‌آوریم؛ در ضمن، به دنبال عدد ۱۱۱...۱، رقم ۱، به دنبال ۲۲۲...۲ و به دنبال ۳۳۳...۳ رقم ۳ آمده است.

می‌دانیم، به هر دو عددی که در همه مرتبه‌های دهگانه اختلاف دارند، رقم‌های مختلفی اضافه شده‌است. ثابت کنید ستون رقم‌هایی که به این ترتیب نوشته شده‌است، بر یکی از ستون‌های دهگانه قبلی منطبق است.

## سال نهم

۱۹. این معادله را حل کنید:

$$x = 1 - 1968(1 - 1968x^2)^2$$

۲۰. چهارضلعی را با معلوم بودن نقطه‌های وسط سه ضلع آن، رسم کنید، به شرطی که بدانیم، این سه ضلع چهارضلعی (که نقطه‌های وسط آنها داده شده است)، طولی برابر دارند. در ضمن، از بین سه نقطه مفروض، می‌دانیم کدام نقطه، مربوط به ضلعی است که بین دو ضلع دیگر قرار دارد.

۲۱. صفحه کاغذ شترنجی بی‌پایانی را، با ۹ رنگ مختلف رنگ کرده‌ایم. هر خانه یک رنگ دارد و، در ضمن، از همه رنگ‌ها استفاده شده است. دو رنگ را وقتی مجاور می‌نامیم که دو خانه با یک ضلع مشترک پیدا شود که با این دو رنگ، مشخص شده باشند. حداقل تعداد زوج رنگ‌های مجاور، چقدر می‌تواند باشد؟

۲۲. در مثلثی با زاویه‌های حاده، دو دایره مماس بر هم رسم کرده‌ایم، به نحوی که یکی از آنها بر دو ضلع  $AC$  و  $BC$  و دیگری بر دو ضلع  $AB$  و  $BC$  مماس است. ثابت کنید، مجموع طول‌های شعاع‌های این دو دایره، از طول شعاع دایره محاطی مثلث بیشتر است.

۲۳. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$1!(n-1)! + 2!(n-2)! + \dots + (n-1)!1! \leq \frac{2}{3}n!$$

۲۴\*. ثابت کنید، نمی‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را به چند مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کرد، به نحوی که، این مثلث‌ها، دو به دو با هم نابرابر باشند.

۲۵. مثلث‌های  $A_1B_1C_1$ ،  $ABC$  با مساحت‌های  $S_1$  و  $S_2$ ، چنان‌اند که داریم:

$$|AB| = |A_1B_1| + |A_2B_2|, |BC| = |B_1C_1| + |B_2C_2|,$$

$$|AC| = |A_1C_1| + |A_2C_2|$$

ثابت کنید:  $S \geq \sqrt{S_1 S_2}$ .

۲۶. این دستگاه معادله‌ها، چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2, \\ \cos x_2 = x_3, \\ \dots \\ \cos x_n = x_1 \end{cases}$$

۲۷.  $A_1B_1C_1$  و  $ABC$ ، مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع و هم‌جهت‌اند.

می‌دانیم:  $|BB_1| = b$  و  $|AA_1| = a$ . زاویه بین خط‌های راست  $AA_1$  و  $BB_1$ ، برابر است با  $\alpha$ . مطلوب است محاسبه طول پاره‌خط راست  $CC_1$ .

۲۸. همان مساله ۲۱، برای ۱۰ رنگ.

۲۹\*. ثابت کنید، چهاروجهی منتظم را، نمی‌توان به چند چهاروجهی منتظم دویه‌دو نابرابر تقسیم کرد.

۳۰\*. ثابت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  عده‌های مثبت و  $k$  عدد طبیعی است. ثابت کنید:

$$(\sqrt[k]{2}-1)(a_1+a_2+\dots+a_n) \leq \sqrt[k]{a_1^k \cdot 2 + a_2^k \cdot 2^2 + \dots + a_n^k \cdot 2^n}$$

۳۱. در دایره‌ای، دو وتر  $AB$  و  $AC$  داده شده‌اند. از نقطه  $M$  وسط کمان  $BAC$ ، عمودی بر وتر با طول بزرگتر فرود آورده‌ایم. ثابت کنید، پای عمود، خط شکسته  $BAC$  را نصف می‌کند.

۳۲.  $n$  نقطه روی محیط دایره داده شده است. دو نفر، به این ترتیب، باهم بازی می‌کنند: مداد را از یک نقطه به نقطه دیگر (روی پاره خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند) می‌برند. حرکت، بهنوبت انجام می‌گیرد؛ در ضمن، نمی‌توان روی یک پاره خط راست، دو بار حرکت کرد. کسی این بازی را باخته است که نتواند حرکت کند. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کند – بهشرط بازی درست – برنده می‌شود.

۳۳. روی یک صفحه،  $m$  نقطه داده شده است؛ در ضمن، همه آن‌ها، روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید، دست کم، به تعداد

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

مثلث می‌توان رسم کرد که راس‌های آن‌ها روی این نقاط هستند.

۳۴.  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، عددی حقیقی‌اند؛  $M$ ، بزرگترین و کوچکترین این عدد است. ثابت کنید:

$$(p-1)(M-m) \leq \sum_{i,j} (a_i - a_j) \leq p^{\frac{1}{4}} \frac{M-m}{4}$$

۳۵. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های یک نقطه درونی چهاروجهی تا راس‌های آن، از محیط چهاروجهی کمتر است.

۳۶\*. عدد درست  $n$  را طوری پیدا کنید که، بین رقم‌های عدد  $5^n$  (در عدد نویسی به مبنای  $10$ )، دست کم  $1968$  رقم برابر صفر پشت سرهم وجود داشته باشد.

۳۷\*. چندوجهی کوثری داده شده است که، در هر راس آن، سه وجه به هم رسیده‌اند. هر وجه را با یکی از چهار رنگی که در اختیار شاریم، رنگ

کرده‌ایم؛ در ضمن، دووجهی که بال مشترک دارند، با دو رنگ مختلف‌اند.  
ثابت کنید، تعداد وجههای با تعداد فرد ضلع‌ها که رنگ اول را دارند، و تعداد  
وجههای با تعداد فرد ضلع‌ها که رنگ دوم را دارند، یا هردو زوج‌اند و یا هردو  
فرد.

۳۸. هر دنباله با پایان از حرف‌های  $A$  و  $B$  را، یک واژه می‌نامیم. دو  
عمل روی واژه‌ها می‌توان انجام داد:

اول – در هرجای واژه،  $A$  را بگذاریم و در پایان واژه،  $B$  را بنویسیم،  
دوم – در هرجای واژه،  $AB$  را بگذاریم.

ثابت کنید، واژه‌هایی که می‌توان از واژه  $AB$ ، با عمل اول به دست آورد،  
همان واژه‌هایی است که می‌توان از واژه  $AB$ ، با استفاده از عمل دوم پیدا  
کرد.

## ۱۹۶۹

### سال ششم

۱. هشت رُخ را در خانه‌های صفحه شطرنج طوری قرار داده‌ایم که  
هیچ دو تابی از آن‌ها، یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید، تعداد رُخ‌های  
خانه‌های سیاه، عددی زوج است.

۲. در جدول  $3 \times 3$ ، عددهایی طبیعی را گذاشته‌ایم (شکل ۴). کولیا  
و پیتا، هر کدام چهار عدد را خط زده‌اند. معلوم شد، مجموع عددهایی که پیتا  
خط زده است، دو برابر مجموع عددهایی است که کولیا خط زده بود. کدام  
عدد، خط نخورده باقی مانده است؟

۳. میشا و ساشا، نیمروز و با دو چرخه، از شهر  $A$  به طرف شهر  $B$   
حرکت کردند. در همان لحظه حرکت آن‌ها، وانيا از  $B$  به طرف  $A$  حرکت  
کرد. سه نفر، سرعت‌های متفاوتی داشتند، ولی سرعت هر کدام، در طول راه

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۴  | ۱۲ | ۸  |
| ۱۳ | ۲۴ | ۱۴ |
| ۷  | ۵  | ۲۳ |

شکل ۴

ثابت بود. ساعت یک بعد از نیمروز، ساشا درست در نقطه وسط بین میشا و وانیا بود. ولی در ساعت یک‌ونیم پس از نیمروز، وانیا در نقطه وسط بین میشا و ساشا قرار داشت. میشا در چه ساعتی، در نقطه وسط بین ساشا و وانیا خواهد بود؟

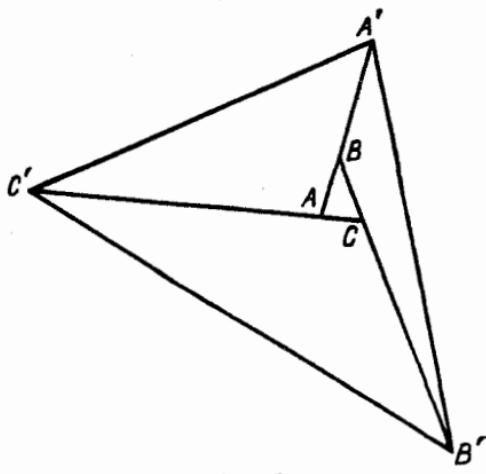
۴. ۳۵ توده گردو روی زمین چیده شده است. تصمیم گرفته می‌شود، در یک زمان، به ۲۳ توده، و به هر کدام یک گردو اضافه شود. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان تعداد گردوها را، در هر ۳۵ توده، برابر کرد.

۵. در هر سطر از ۶۴ سطر، یک عدد شش رقمی نوشته‌ایم که، همه آن‌ها، تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ هستند. می‌دانیم، همه این عددها با هم فرق دارند و، در ضمن، هردو عدد مجاور، تنها در یکی از مرتبه‌ها، با هم اختلاف دارند. چگونه می‌توان این عددها را نوشت؟

۶. به دو ریاضی‌دان، دو عدد طبیعی دادند و به آن‌ها اطلاع دادند که این دو عدد، یک واحد با هم اختلاف دارند. آن‌ها بهنوبت، از یکدیگر تنها یک چیز می‌پرسند: «آیا از عدد من اطلاع داری؟». ثابت کنید، دیر یا زود، یکی از دو ریاضی‌دان، پاسخ مثبت می‌دهد.

### سال هفتم

۷. همان مسأله ۱.



شکل ۵

۸. ضلع‌های مثلث  $ABC$  را، شبیه شکل ۵ ادامه داده‌ایم و می‌دانیم:

$$|AA'| = 3|AB|, |BB'| = 5|BC|, |CC'| = \lambda|CA|$$

نسبت مساحت مثلث  $A'B'C'$  به مساحت مثلث  $ABC$  چقدر است؟

۹. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 - 4} + \frac{6}{x^2 - 9} + \dots + \frac{20}{x^2 - 100} = \\ & = 11 \left[ \frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right] \end{aligned}$$

۱۰\*. در مرکز یک زمین مربعی، گرگ؛ و در هر راس مربع، یک سگ ایستاده‌اند. گرگ می‌تواند به هر سمتی برود، ولی سگ‌ها، تنها روی ضلع‌های

مربع می‌توانند حرکت کنند. می‌دانیم، گرگ از عهده یک سگ برمی‌آید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت سگ، یک‌ونیم برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ‌ها می‌توانند مانع فرار گرگ از درون مریع به بیرون آن شوند.

۱۱. چهار روستا که در چهار راس مریعی به ضلع برابر ۱۰ کیلومتر واقع‌اند، یک شرکت تعاونی روستایی تشکیل داده‌اند. شرکت تعاونی، این امکان را دارد که ۲۸ کیلومتر راه بسازد. آیا شرکت تعاونی می‌تواند، جاده‌ها را طوری ایجاد کند که، از طریق آن‌ها بتوان از هر روستایی به هر روستای دیگر رفت؟

#### ۱۲. همان مساله ۶.

#### سال هشتم

۱۳. خواسته‌ایم روی قاعده  $AD$  از ذوزنقه  $ABCD$ ، نقطه  $E$  را طوری پیدا کنیم که مثلث‌های  $ABE$ ،  $CDE$  و  $BCE$ ، محیط‌هایی برابر داشته باشند. ثابت کنید  $|BC| = \frac{1}{2}|AD|$ .

۱۴. در یک پنج‌ضلعی کوژ، طول همه ضلع‌ها، یکی است. روی قطر بزرگتر این پنج‌ضلعی، نقطه‌ای پیدا کنید که، از آنجا، هر ضلع، به زاویه‌ای دیده می‌شود که از  $90^\circ$  درجه بیشتر نباشد.

۱۵. خط‌های هوایی کشور، طوری طرح‌ریزی شده است که از هر شهر، با بیش از سه طریق به شهرهای دیگر نمی‌توان رفت، در ضمن، می‌توان با حداکثر یک توقف بین راه، از هر شهر به شهر دیگر پرواز کرد. این کشور، حداکثر چند شهر می‌تواند داشته باشد؟

#### ۱۶. همان مساله ۱۰.

۱۷. سه عدد سه‌رقمی مختلف در اختیار داریم که رقم سمت چپ آن‌ها، یکی است. در ضمن می‌دانیم، مجموع این سه عدد بر هریک از عددها،

بخش پذیر است. این عددها را پیدا کنید.

۱۸. دنباله با پایانی از صفرها و واحدها، با دو ویژگی داده شده است:

۱) اگر در دو جای مختلف، ولی دلخواه دنباله، در هر کدام، پنج رقم متولی انتخاب کنیم، این «عددهای» پنج رقمی با هم اختلاف داشته باشند (این دو «عدد» پنج رقمی را، می‌توان طوری انتخاب کرد که، بخشی از آن‌ها، روی هم قرار گرفته باشند).

۲) اگر رقم دلخواهی به سمت راست دنباله اضافه کنیم، آن‌وقت ویژگی اول برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم نخست این دنباله، بر چهار رقم پایانی آن، منطبق است.

سال نهم

۱۹.  $A$  و  $B$ ، دو نقطه از محیط دایره؛  $C$ ، نقطه وسط کمان  $AB$  و  $P$ ، نقطه‌ای از درون دایره است و، در ضمن  $|AP| < |BP| < |AC|$ ، ثابت کنید:  $\widehat{APC} > \widehat{BPC}$ .

۲۰. در لینی‌گراد، بليت تراموا را «خوش يوم» می‌دانند، وقتی که مجموع سه رقم اول آن، با مجموع سه رقم آخر، برابر باشد. ولی در مسکو، بليت را «خوش يوم» می‌دانند که، در آن، مجموع رقم‌های ردیف زوج، با مجموع رقم‌های ردیف فرد برابر باشد. چند بليت وجود دارد که هم برای لینی‌گرادی‌ها و هم برای مسکوی‌ها، «خوش يوم» باشد (بليت با شماره ۰۰۰۰۰۰ را هم در نظر بگيريد)؟.

۲۱.  $m$  و  $n$  عددهای طبیعی‌اند؛ در ضمن  $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$ . ثابت کنید:

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{4m^2} \right)$$

۲۲. مکان هندسی مرکزهای مستطیل‌هایی را پیدا کنید که بر یک چهارضلعی کوثر مفروضن محیط‌اند.

۲۳.  $1 < k$ ، عددی طبیعی است. دنباله  $(x_n)$  را، به این ترتیب، ساخته‌ایم:

$$x_1 = 1, x_2 = k, x_n = kx_{n-1} - x_{n-2} \quad (n > 2)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد طبیعی  $m$  وجود دارد، بهنحوی که  $x_n$  بر  $x_m$  بخش‌پذیر باشد ( $m > n$ ).

۲۴\*. ۶۰ نفر برای ۱۵ روز، وارد خانه استراحت شدند. در آنجا، هر روز چهار مرتبه سر میز غذا حاضر می‌شوند. میز غذاخوری، ۶۱ جا دارد. مدیر استراحتگاه، همیشه در جای ثابت خود می‌نشیند. مدیر می‌خواهد با همه مهمانان آشنا شود و، در ضمن، همه آن‌ها را با هم آشنا کند. برای این منظور، تصمیم می‌گیرد، هر بار مهمانان را به ردیف تازه‌ای پشت میز قرار دهد، بهنحوی که هیچ کس، دو بار در یک جا ننشیند و هر بار در سمت راست مدیر و در سمت راست هر مهمان، آدم جدیدی نشسته باشد. چگونه این تصمیم را اجرا کند؟

### سال دهم

۲۵. در چهاروجهی  $ABCD$ ، یال  $AB$  بر یال  $CD$  عمود است و  $O$ ، نقطه دلخواهی از فضاست. ثابت کنید، مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطه  $O$  تا وسط یال‌های  $AC$  و  $BD$ ، برابر است با مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطه  $O$  تا وسط یال‌های  $AD$  و  $BC$ .

۲۶. همان مساله ۲۰.

۲۷. همان مساله ۲۴.

۲۸.  $1 < k$ ، عددی طبیعی است. دنباله  $(x_n)$  را به این ترتیب

$$x_1 = 1, x_2 = k, x_n = kx_{n-1} - x_{n-2} \quad (n > 2)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد طبیعی  $n > m$  وجود دارد، به نحوی که  $1 - x_m$  و  $x_n$ ، نسبت به هم اول باشند.

۲۹. دنباله‌ای از عددهای طبیعی بسازید که، از تفاصل بین جمله‌های آن، همه عددهای طبیعی و، در ضمن، هرکدام تنها یکبار بدست آید  $ABC$ .  $30*$  ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  هستند. مثلثی است با زاویه‌های حاده و ضلع‌های با طول‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$ .  $A_1$  و  $A_2$ ، به ترتیب، تصویرهای نقطه  $A'$  روی ضلع‌های  $AB$  و  $AC$ ؛  $B_1$  و  $B_2$  تصویرهای نقطه  $B'$  بر ضلع‌های  $BC$  و  $BA$ ؛  $C_1$  و  $C_2$ ، به ترتیب، تصویرهای نقطه  $C'$  روی ضلع‌های  $CA$  و  $CB$  هستند. ثابت کنید:

$$a^r \cdot S_{A'A_1 A_2} + b^r \cdot S_{B'B_1 B_2} + c^r \cdot S_{C'C_1 C_2} = \frac{S^r}{R^r}$$

که در آن،  $S$  مساحت مثلث  $ABC$  و  $R$  طول شعاع دایره محیطی آن است.

### دور نهایی

۳۱. دست کم، چند دایره به شعاع واحد لازم است تا بتوان، با آنها، دایره به شعاع  $1/5$  را به طور کامل پوشاند؟

۳۲\*. ۵ گانگستر، جایی دور هم جمع شده‌اند. آنها با هم و در یک لحظه، به روی هم تیراندازی می‌کنند؛ در ضمن، هرکس به طرف نزدیکترین فرد یا یکی از نزدیکترین افراد به او. دست کم، چند نفر گشته می‌شوند؟

۳۳. مجموع عددهای مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، برابر است با ۱. ثابت

کنید:

$$\sum_{i < j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n-1}{4}$$

۳۴. صفحه را با سه رنگ مختلف رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، روی این صفحه می‌توان مثلثی با مساحت واحد پیدا کرد که، همه راس‌های آن، از یک رنگ باشند.

۳۵\*. از مریع به ضلع ۱۰۰۰۰۰۰، مریعی به ضلع ۱۰۰۰۰ را از گوشة آن جدا و بخش باقی‌مانده مریع را، به ۱۰ مستطیل تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم در یکی از این مستطیل‌ها، نسبت طول‌های دو ضلع، از ۹ بزرگتر است.

۳۶. مرکزهای چهار دایره برابر، راس‌های یک مریع‌اند. یک چهارضلعی با محیط حداقل ممکن، طوری بسازید که راس‌های آن روی محیط این دایره‌ها باشد.

۳۷.  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ، چندجمله‌ای‌هایی با ضریب‌های درست‌اند. ثابت کنید، می‌توان عدد درست  $a$  را طوری پیدا کرد که  $(a), F_1(a), F_2(a), \dots, F_n(a)$ ، همگی عددهایی مرکب باشند.

۳۸\*.  $x_n < \dots < x_1 < x_0$ ، عددهایی طبیعی‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \dots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

۱. عددی نه رقمی داریم که، در آن، از همه رقم‌ها، به جز صفر، استفاده شده است. بعد از جایه‌جایی برخی رقم‌ها، عدد حاصل، برابر  $\frac{1}{8}$  عدد اصلی شد. همه این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۲. طول ضلع‌های مثلثی، سه عدد درست پشت سر هماند. طول ضلع‌های این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، یکی از میانه‌های آن، بر یکی از نیمسازهای آن عمود است.

۳. در روستایی، ۱۹۷۵ نفر زندگی می‌کنند. آن‌ها، گاه به گاه، پول خود را با هم عوض می‌کنند، به این ترتیب که یکی از آن‌ها، یک سکه ۲۰ ریالی به دیگری می‌دهد و دو سکه ۱۰ ریالی می‌گیرد یا برعکس. آیا ممکن است حالتی پیش آید که، ضمن چند هفته، هریک از ساکنان روستا، برای این تعویض، درست ۱۵ سکه داده باشد؟

۴. از یک عدد سه رقمی، مجموع رقم‌های آن را کم کرده‌ایم. بعد دوباره از عدد حاصل، مجموع رقم‌های آن را کم کرده‌ایم. این عمل را ۱۰۰ بار انجام داده‌ایم. ثابت کنید، سرانجام، عدد صفر به دست می‌آید.

۵. در یک کشور، هر دو شهر، یا از راه هوایی و یا از راه آبی به هم مربوطاند. ثابت کنید از هر شهر به شهر دیگر می‌توان یا تنها از راه آب و یا تنها از راه هوا، سفر کرد.

۶. در یک مسابقه، ۱۲ تیم والیبال شرکت دارند. هیچ تیمی صاحب هفت امتیاز نشده است. ثابت کنید، سه تیم  $A$ ،  $B$  و  $C$  وجود دارد، به‌نحوی که  $A$  از  $B$ ،  $B$  از  $C$  و  $C$  از  $A$  بردۀ است.

### سال هفتم

۷. زاویه  $B$  از مثلث  $ABC$  را پیدا کنید، به شرطی که در آن، طول ارتفاع  $CH$  برابر نصف طول ضلع  $AB$  و زاویه  $A$  برابر  $75^\circ$  درجه باشد.

۸. همان مسأله ۴.

۹. مثلث متساوی الساقین، با زاویه راس  $20^\circ$  درجه داده شده است. ثابت

کنید:

الف) طول ساق از دو برابر طول قاعده بیشتر است؛

ب) طول ساق از سه برابر طول قاعده کوچکتر است.

۱۰. همان مساله ۵.

\* ۱۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1 \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

۱۲. ۳۶ تیم در یک مسابقه فوتبال شرکت کرده‌اند؛ در ضمن، هر دو تیم باید یکبار با هم بازی کنند. می‌دانیم، هیچ تیمی، کمتر از  $34$  بازی نکرده است. ثابت کنید، می‌توان تیم‌ها را به سه گروه  $12$  تیمی تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه، همه بازی‌ها انجام شده باشد.

سال هشتم.

۱۳. در زاویه  $ABC$  دو دایره محاط کرده‌ایم، به نحوی که یکی از آن‌ها در نقطه  $A$  بر ضلع  $BA$  و دیگری در نقطه  $C$  بر ضلع  $BC$  مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، روی خط راست  $AC$ ، پاره‌خط‌هایی با طول برابر، جدا می‌کنند.

۱۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^4 + xy + y^4 = 7 \\ x^4 + xz + z^4 = 21 \\ y^4 + yz + z^4 = 28 \end{cases}$$

۱۵. بر دایره‌ای، یک پنجضلعی محیط کرده‌ایم که طول همه ضلع‌های آن، عده‌های درست‌اند؛ در ضمن، طول دو ضلع اول و سوم، برابر واحد

است. ضلع دوم، در نقطه تماس خود با دایره، به چه پاره خط های راستی تقسیم می شود؟

۱۶. در مربع  $5 \times 5$ ، ۱۶ خانه را رنگ کرده ایم. ثابت کنید، می توان در آن، یک مربع  $2 \times 2$  پیدا کرد که، دست کم سه خانه آن، رنگ شده باشد.  
۱۷. در مثلثی، یک دایره و یک مربع محاط کرده ایم؛ راس های مربع، روی ضلع های مثلث اند. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مربع به طول شعاع دایره، بین دو عدد  $\sqrt{2}$  و ۲ قرار دارد.

۱۸. ۳۵ نقطه روی یک صفحه چنان اند که، هیچ سه نقطه ای، روی یک خط راست نیستند. برخی از نقطه ها را، با پاره خط های راست به هم وصل کرده ایم؛ روی هم  $100$  پاره خط راست. ثابت کنید، هر دو پاره خط راستی، یکدیگر را قطع می کنند.

### سال نهم

۱۹. دایره های  $O_1$  و  $O_2$ ، بر دایره  $O$ ، از درون و در نقطه های  $A$  و  $B$  مماس اند.  $M$ ، نقطه دلخواهی از محیط دایره  $O$  و  $C$  و  $D$ ، نقطه های  $O_1$  و  $O_2$  برخورد خط های راست  $AM$  و  $BM$ ، به ترتیب، با دایره های  $O_1$  و  $O_2$  است. ثابت کنید، خط های راست  $AB$  و  $CD$ ، با هم موازی اند.

۲۰. همان مساله ۱۶.

۲۱. یک نهضلعی، که طول همه ضلع های آن، عده های درست اند، بر دایره ای محیط کرده ایم. اگر طول های دو ضلع اول و سوم، برابر واحد باشد، پاره خط راست ضلع دوم در نقطه تماس خود با دایره، به چه پاره خط های راستی تقسیم می شود؟

۲۲. عده های مثبت  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  چنان اند که

$$a^r + b^r = c^r + d^r \quad \text{و} \quad a^s + b^s = c^s + d^s$$

ثابت کنید:  $ab = cd$

۲۳. همه عددهای طبیعی  $x, y, z$  و  $t$  را پیدا کنید که، برای آنها،

داشته باشیم:

$$31(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 40(yzt + y + t)$$

۲۴. مربع  $100 \times 100$  را، به وسیله سه نوار قائم تقسیم کرده‌ایم. پهنانی نوار اول (سمت چپ)، ۱۹ خانه و پهنانی نوار دوم، ۷۰ خانه است. در سطر اول، عددهای طبیعی را، به ردیف، از ۱ تا ۱۰۰ نوشته‌ایم. در سطر دوم، اول (یعنی از سمت چپ)، عددهای نوار سوم را، با همان ردیف خود، سپس عددهای نوار دوم و سرانجام عددهای نوار اول (در سطر اول) را با همان ردیف خود نوشته‌ایم. با همین روش، به کمک سطر دوم، عددهای سطر سوم را نوشته‌ایم و غیره، تا آن‌جا که همه خانه‌های مربع، پر شود. ثابت کنید، در هر ستون، به همه عددهای از ۱ تا ۱۰۰ برحورد می‌کنیم.

### سال دهم

۲۵. در چهاروجهی، یک کره و یک مکعب محاط کرده‌ایم. همه راس‌های مکعب، روی وجه‌های چهاروجهی است. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مکعب به طول شعاع کره، بین عددهای  $1 + \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} + 1$  قرار دارد.

۲۶. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) \geq 1$$

۲۷. در یک پنج‌ضلعی، که ضلع‌های با طول‌های برابر دارد، همه زاویه‌ها، از  $120^\circ$  درجه کوچکترند. ثابت کنید، همه این زاویه‌ها، منفرجه‌اند.

۲۸. همان مسأله ۲۲

۲۹. تابع  $f(x)$  را طوری پیدا کنید که، برای هر مقدار حقیقی  $x$ ، به جز  
و ۱، داشته باشیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1-x) = x$$

۳۰\*. مربع  $n \times n$  را، به سه نوار قائم تقسیم کرده‌ایم. نوار اول از سمت چپ،  $k$  خانه و نوار سوم  $m$  خانه دارد؛ در ضمن  $k - m$  و  $n - k$  نسبت به هم اول‌اند. در سطر اول، از چپ به راست، عددہای طبیعی از ۱ تا  $n$  را نوشته‌ایم. در سطر دوم از چپ به راست، ابتدا عددہای نوار سوم را، بدون تغییر ردیف آن‌ها، سپس عددہای نوار دوم و، سرانجام، عددہای نوار اول را، باز هم بدون تغییر ردیف آن‌ها، نوشته‌ایم. به همین ترتیب، از سطر دوم، سطر سوم را به دست آورده‌ایم و غیره، تا آنجا که همه خانه‌های مربع پر شود. ثابت کنید، در هر ستون، با همه عددہای از ۱ تا  $n$  بخورد می‌کنیم.

### دور نهایی

۳۱. عددہای  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ، مثبت و حاصل ضربی برابر واحد دارند. ثابت کنید، شماره  $n < k$  وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$t_k(t_{k+1} + 1) \geq 2$$

$t_{n+1}$  را، برابر  $t_1$  می‌گیریم).

۳۲. به کمک خم کردن سیم، یک چندضلعی مسطح کوثر ساخته‌ایم. ثابت کنید، با این سیم، نمی‌توان چندضلعی دیگری (که همنهشت با اولی نباشد) درست کرد، به نحوی فاصله بین هر دو نقطه سیم، بزرگتر نشده باشد.

۳۳. عددہای طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، چنان‌اند که، برای هر  $n$ ، داریم  $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < 2n$ . ثابت کنید، هر عدد طبیعی

دلخواه، یا برابر یکی از جمله‌های این دنباله و یا برابر تفاضل دو جمله از آن است.

$C$  و  $D$  دو نقطه دلخواه از محیط دایره‌ای هستند که بر نقطه وسط پاره خط راست  $AB$  مماس است.  $AD$  و  $BC$ ، به ترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های  $X$  و  $Y$  قطع کرده‌اند.  $CX$  و  $DY$  را، به ترتیب، در نقطه‌های  $M$  و  $N$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید:  $|AM| = |BN|$ .

۳۵\*. عدد  $2245$ ، با عده‌های  $2$ ،  $23$ ،  $224$ ،  $2345$  به پایان رسیده است. همین تعریف را، عده‌های  $5$ ،  $45$ ،  $345$  به  $2345$  به پایان رسیده است. همین تعریف را، برای هر عدد طبیعی دیگری می‌پذیریم. عده‌های طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_k$  به ترتیب، دارای  $n_1, n_2, \dots, n_k$  رقم هستند. می‌دانیم آغازهای هیچ کدام از این عده‌ها، با پایانهای هیچ کدام دیگر، یکی نیست؛ هیچ آغازی به جز خود عدد، با هیچ پایانی از آن، یکی نیست و هیچ کدام از عده‌های  $a_i$  بخشی از عدد دیگر نیست. ثابت کنید:

$$\frac{n_1}{10^{n_1}} + \frac{n_2}{10^{n_2}} + \dots + \frac{n_k}{10^{n_k}} < 1$$

به شرطی که بدانیم  $n_j < n_i$  (برای هر  $i$  و  $j$ ).

۳۶\*. در خانه‌های یک صفحه شطرنجی بپایان، عده‌های حقیقی را طوری نوشته‌ایم که، مجموع عده‌های واقع در هر مربعی (که ضلعهای آن، روی خطهای شبکه قرار دارد)، از لحاظ قدرمطلق، از واحد تجاوز نکند. ثابت کنید، مجموع عده‌های واقع در خانه‌های هر مستطیل (که ضلعهای آن، روی خطهای شبکه قرار دارد)، از  $10000$  تجاوز نمی‌کند.

۳۷\*. در مساله ۳۶، همچنین می‌دانیم، مجموع عده‌های واقع در خانه‌های یک مستطیل، از لحاظ قدرمطلق، بیشترین مقدار است. ثابت کنید، مجموع عده‌ها، در هر مستطیل، از لحاظ قدرمطلق، از  $4$  تجاوز نمی‌کند.

## سال ششم

۱. پترووا و ایوانووا با هم و باموتور، از شهر  $A$ ، به طرف شهر  $B$ ، و در همان لحظه حرکت آنها، ایوانوسکی و پتروسکی، باهم و با موتور، از شهر  $B$  به طرف شهر  $A$  حرکت کردند. سرعت ایوانووا دو برابر سرعت پترووا و سرعت ایوانوسکی سه برابر سرعت پتروسکی است. ایوانووا، در همان لحظه‌ای به پتروسکی رسید که پترووا به ایوانوسکی رسیده بود. کدامیک، به شهر  $A$  نزدیکتر است: نقطه برخورد ایوانووا با ایوانوسکی یا نقطه برخورد پترووا با پتروسکی؟

۲. بین مثلث‌هایی که، در آنها، مجموع طول‌های میانه‌ها، یکی است، در کدام یک، مجموع طول‌های ارتفاع‌ها بیشتر است؟

۳. کولیا، ژنیا و نادیا چند امتحان می‌دهند و؛ بسته به رتبه‌ای که در هر امتحان به دست می‌آورند (اول، دوم یا سوم)، امتیازی می‌گیرند. امتیازها، عده‌های درستی هستند و رتبه بالاتر، امتیاز بیشتری می‌گیرد. بعد از انجام همه امتحان‌ها، کولیا ۲۲ امتیاز گرفت، ولی ژنیا و نادیا، هر کدام ۹ امتیاز، ژنیا، در امتحان جبر، رتبه اول را به دست آورده بود. چه کسی در درس فیزیک، رتبه دوم را به دست آورده است؟

۴. عدد درستی را پیدا کنید که توان ششم آن در عددنویسی به مبنای ۱۰، از رقمهای ۵، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، تشکیل شده باشد.

۵. روی وجههای یک مکعب کوچک، عده‌های ۱ یا ۲ نوشته شده است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، به نوبت، مکعب را می‌اندازند. در آغاز بازی، عدد ۲۰۰ را روی تخته‌سیاه نوشته‌اند. هر کس که مکعب را می‌اندازد، می‌تواند، عددی را که آمده است با عدد روی تخته‌سیاه جمع یا از آن کم کند و یا بازی را واگذار کند. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین بار، یک عدد چهار رقمی

روی تخته سیاه بنویسد. بازی مساوی تمام می شود، وقتی که روی تخته سیاه، یک عدد دورقمی ظاهر شود و یا، سه بار پشت سرهم، بازی واگذار شود. ثابت کنید، به شرط بازی درست و سنجیده، کسی که بازی را آغاز کرده است، می تواند باخت نداشته باشد (یعنی، یا ببرد و یا مساوی کند).

۶. آیا می توان تمامی صفحه را، با مربع هایی پوشاند که، در بین آنها،

تنها دو مربع مساوی وجود داشته باشد؟

### سال هفتم

۷. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy^2 + x^2y + xy + x + y + 3 = 0 \\ x^2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

۸. بین مثلث هایی که، در آنها، مجموع طول های نیمسازها یکی است، مثلث را پیدا کنید که مجموع طول های ارتفاع های آن، بیشترین مقدار باشد.  
۹. نقطه  $K$  را در درون مربع  $ABCD$  انتخاب کنید. از راس های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، به ترتیب، بر خط های راست  $BK$ ،  $CK$ ،  $AK$  و  $DK$  عمود هایی رسم کنید. ثابت کنید، این خط های راست عمود، از یک نقطه می گذرند.

۱۰. همان مسالة ۵

۱۱. ثابت کنید، یک چندضلعی کوثر (به جز متوازی الاضلاع) را، می توان در مثلثی که از ادامه سه ضلع دلخواه چندضلعی به دست می آید، جا داد.  
۱۲. مستطیلی را به قطعه هایی با اندازه های  $2 \times 2$  و  $4 \times 1$  تقسیم کرده ایم. برای بازسازی مستطیل، یکی از قطعه های  $2 \times 2$  را کنار گذاشتم و، به جای آن، یک قطعه  $4 \times 1$  را انتخاب کردیم. ثابت کنید، با این جایه جایی، نمی توان مستطیل را بازسازی کرد.

## سال هشتم

۱۳. دو نقطه  $A$  و  $B$  با سرعت‌های برابر، و بدون تغییر سرعت، روی دو خط راست متقاطع حرکت می‌کنند. ثابت کنید، نقطه‌ای روی صفحه وجود دارد که، در هر لحظه، از دو نقطه  $A$  و  $B$  به یک فاصله است.

۱۴. عددهای  $5^{1971}$  و  $2^{1971}$  مفروض‌اند. اگر آن‌ها را پشت سرهم بنویسیم، عدد حاصل، چند رقم دارد؟

۱۵. روی محیط دایره‌ای،  $100$  عدد درست نوشته‌ایم که، مجموع آن‌ها، برابر واحد است. به هر عددی که از مجموع چند عدد پشت سر هم به‌دست آید، یک حلقه می‌گوییم. چند حلقه مثبت وجود دارد؟

۱۶. در دو توده چوب کبریت، روی هم  $100$  عدد چوب کبریت وجود دارد. دو نفر، به این ترتیب با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از توده‌ها را کنار می‌زند و توده دوم را، به دو بخش، که لازم نیست برابر باشند، تقسیم می‌کند. بعد نفر دوم، همین عمل را انجام می‌دهد و غیره. کسی بازی را می‌بازد که نتواند، در نوبت خود، توده باقی‌مانده چوب کبریت‌ها را به دو بخش تقسیم کند. آیا کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند طوری برنامه‌ریزی کند که، سرانجام، برنده شود؟

۱۷. عدد طبیعی  $n$ ، چنان است که  $1 + n$  بر  $2^4$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، مجموع همه بخشیاب‌های  $n$  (از جمله واحد و خود عدد) بر  $2^4$  بخش‌پذیر است.

۱۸. نیمساز داخلی مثلث  $ABC$  است. طول ضلع  $AB$  برابر  $15$  و طول ضلع  $BC$  برابر  $10$  است. ثابت کنید، طول نیمساز  $BD$ ، از  $12$  تجاوز نمی‌کند.

## سال نهم

۱۹. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x_0 = x_0^1 + x_0^2 + \dots + x_0^{100} \\ x_1 = 2(x_0x_1 + x_1x_2 + \dots + x_{99}x_{100}) \\ x_2 = 2(x_0x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{98}x_{100}) \\ x_3 = 2(x_0x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{97}x_{100}) \\ \dots\dots\dots \\ x_{100} = 2x_1x_{100} \end{cases}$$

۲۰. همان مساله ۱۳.

۲۱. عددی اول است. ثابت کنید  $4ac - b^2$  نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۲۲. همان مساله ۱۶، با این پرسش اضافی که، تعداد چوب‌کبریت‌ها، در آغاز، چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می‌کند، نتواند برنده شود؟

۲۳.  $CD$  نیمساز زاویه قائم‌های از مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  است.  $DK$ ، نیمسازهای داخلی مثلث‌های  $ADC$  و  $BDC$  هستند. ثابت کنید:  $AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2$ .

۲۴. آیا با مثلث‌های دو به دو مختلفی که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی گویا هستند، می‌توان صفحه را پوشانید؟

سال دهم

۲۵. همان مساله ۱۷.

۲۶. در یک چهاروجهی، یکی از ارتفاع‌ها، دو ارتفاع دیگر را قطع می‌کند. ثابت کنید، همه ارتفاع‌ها، از یک نقطه می‌گذرند.

۲۷. روی دو خط متقطع، دو مگس با سرعت‌های برابر و ثابت می‌خزند. ثابت کنید، نقطه‌ای در فضای وجود دارد که، همیشه، از دو مگس به یک فاصله است.

۲۸. ثابت کنید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{200} + \left(\frac{1}{2}\right)^{199} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{198} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{201} < \frac{1}{90}$$

۲۹. ثابت کنید، اگر عددهای  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$  را، پشت

سرهم، بعد از ممیز بتوسیم، یک عدد گنج به دست می‌آید.

۳۰\*. نقطه  $P$  و  $n$  خط راست دو بهدو ناموازی، روی صفحه داده

شده‌اند. نقطه  $P$  را روی همه خط‌های راست مفروض، تصویر می‌کنیم،

بعد، تصویرهای حاصل را دوباره روی همه خط‌های راست تصویر می‌کنیم و

غیره. ثابت کنید، همه نقطه‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند، سطح یک

دایره را می‌پوشانند.

### دور نهایی

۳۱. عددهای حقیقی و مثبت‌اند، ثابت کنید،

معادله

$$x^n + a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n = 0$$

بیش از یک ریشه مثبت ندارد.

۳۲. عددهای حقیقی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مفروض‌اند. برای  $k \leq n$

بزرگترین عدد از بین عددهای

$$a_k, \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

را  $A_k$  می‌نامیم. ثابت کنید، کوچکترین عدد در بین عددهای

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

از میانگین حسابی عددهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، بزرگتر نیست.

۳۳. از راس  $A$  در مثلث  $ABC$ ، خط راست دلخواهی رسم کرده‌ایم؛  $B_1$  و  $C_1$  تصویرهای نقطه‌های  $B$  و  $C$  روی این خط راست؛  $B_2$  تصویر  $B_1$  روی  $AC$  و  $C_2$  تصویر  $C_1$  روی  $AB$  است. ثابت کنید، نقطه برحورد خط‌های راست  $B_1B_2$  و  $C_1C_2$ ، روی یکی از ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  یا روی امتداد آن واقع است.

۳۴\*. مجموع عددهای درست  $b_1, b_2, \dots, b_n$  برابر است با واحد.

برای  $k \leq n$ ، تعداد عددهای مثبت را در دنباله

$$b_k, b_k + b_{k+1}, b_k + b_{k+1} + b_{k+2}, \dots$$

$$\dots, b_k + b_{k+1} + \dots + b_n + b_1 + \dots + b_{k-1}$$

با  $N_k$  نشان می‌دهیم. ثابت کنید، همه عددهای  $N_k$  مختلف‌اند.

۳۵. مریع به ضلع  $1 - n$  و مستطیل با ضلع‌های  $1 - a$  و  $1 - b$  را به مریع‌های به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم؛ در ضمن  $ab = n^2$ . به هریک از  $n^2$  گره مریع، یکی از گره‌های مستطیل را متناظر کرده‌ایم؛ در ضمن، گره‌های متفاوت مریع، متناظر با گره‌های متفاوت مستطیل‌اند. می‌دانیم، هریک از چهار راس و مرکز هر مریع  $2 \times 2$ ، متناظر با چهار راس و مرکز متوازی‌الاضلاعی است که راس‌ها و مرکز آن، در گره‌های شبکه مستطیل‌اند ثابت کنید:  $a = b$ .

۳۶\*. یال‌های یک گراف کامل را، که  $1 + 2n$  راس دارد، با سه رنگ مختلف، رنگی کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یکی از رنگ‌ها و  $1 + n$  راس را طوری انتخاب کرد که، از هریک از این راس‌ها به هر راس دیگر از آن‌ها، بتوان از طریق یال‌هایی حرکت کرد که دارای رنگ انتخابی ما باشند.

۳۷. ثابت کنید، معادله  $2 = x^3 + y^3 + z^3$  در مجموعه عددهای درست، بی‌نهایت جواب دارد.

سال ششم

۱. دو هواپیما، همزمان، از شهر A پرواز کردند. مسیر اولی چنین بود:

$$A - B - D - C - A - D - B - C - A$$

و مسیر دومی

$$A - B - C - D - A - B - C - D - A - B - C - D - A$$

کدام هواپیما، زودتر پرواز خود را تمام می‌کند، به شرطی که سرعت‌های آن‌ها یکسان باشد؟

۲. دو گروه جهان‌گرد، در دو راه‌پیمایی شرکت کردند (برخی از آن‌ها، در هر دو راه‌پیمایی بودند). در راه‌پیمایی نخستین، ۶۰٪ و در راه‌پیمایی دوم ۷۵٪ راه‌پیمایان مرد بودند. ثابت کنید، در مجموع (یعنی با گرد هم آنی دو گروه). تعداد مردان کمتر از تعداد زنان نیست.

۳. شش نقطه را روی صفحه طوری درنظر بگیرید که، هر سه نقطه از آن‌ها، راس‌های یک مثلث متساوی الساقین باشند.

۴. در عددی که از حاصل ضرب عده‌های از ۱ تا ۱۰۰ بدست می‌آید، همه صفرها را حذف کرده‌ایم. در عددی که می‌ماند، آخرین رقم سمت راست، عددی زوج است یا فرد؟

۵. دانش‌آموزان، هفت امتحان دادند و همه برای نمره‌های چهار و پنج؛ در ضمن، کسی بیش از دو نمره چهار نگرفت. می‌دانیم، دو دانش‌آموز وجود ندارد که، یکی از آن‌ها، در هر درس، نمره‌ای بیشتر یا مساوی دومی آورده‌است. ثابت کنید، تعداد دانش‌آموزان بیشتر از ۲۱ نفر نیست.

۶. آیا می‌توان عده‌های از ۱ تا ۱۲ را روی یال‌های یک مکعب طوری قرار داد که، اگر مجموع عده‌های هر سه یالی را که در یک راس به هم

می‌رسند، عدد متعلق به آن راس در نظر بگیریم، آنوقت، عدهای واقع در همه راس‌ها، یکی باشد؟

### سال هفتم

۷. آیا می‌توان با دو خط راست که از دو راس مثلث می‌گذرند، مثلث را به چهار بخش چنان تقسیم کرد که، سه بخش از آن‌ها مثلث‌هایی همان‌ر از (یعنی با مساحت‌های برابر) باشند؟

۸. همان مسأله ۲.

۹.  $ABCD$  یک ذوزنقه است ( $BC \parallel AD$ ). لحظه برخورد نیمسازهای دو زاویه  $A$  و  $B$  را  $M$ ، و نقطه برخورد نیمسازهای دو زاویه  $C$  و  $D$  را  $N$  می‌نامیم. با معلوم بودن طول ضلع‌های ذوزنقه، طول پاره‌خط راست  $MN$  را پیدا کنید.

۱۰. در راس‌های یک ۱۲ ضلعی منتظم، برگه‌های کوچکی به رنگ سیاه یا سفید گذاشته‌ایم. ثابت کنید، سه برگه هم‌رنگ پیدا می‌شود که، راس‌های یک مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل دهند.

۱۱. همان مسأله ۵.

۱۲. ثابت کنید، اگر یک عدد زوج را بتوان به صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت، آنوقت، نصف این عدد را هم، می‌توان به صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت.

### سال هشتم

۱۳.  $K$  و  $M$ ، نقطه‌های برخورد دو دایره‌اند. از نقطه  $K$ ، دو نیم‌خط راست رسم کرده‌ایم؛ یکی از نیم‌خط‌ها، دایره اول را در  $A$  و دایره دوم را در نقطه  $B$  و نیم‌خط دیگر، دایره اول را در نقطه  $C$  و دایره دوم را در نقطه  $D$  قطع کرده‌است. ثابت کنید، دو زاویه  $MAB$ ،  $MCD$  برابرند.

۱۴. آیا عددی طبیعی وجود دارد که مجموع رقم‌های مجاز آن، برابر

۱۹۷۲ باشد؟

۱۵. ثابت کنید، اگر قطرهای یک چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با

محیط‌های برابر تقسیم کنند، آین چهارضلعی، یک لوزی است.

۱۶. روی صفحه‌ای، چند دایره کوچک رسم و، برخی از آنها را،

به‌وسیله پاره‌خط‌های راستی به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، در این دایره‌ها

می‌توان عددهای درست را طوری قرار داد که، دو دایره وقتی، و تنها وقتی،

به هم وصل شده باشند که، در آنها، دو عدد نسبت به هم اول، وجود داشته

باشد.

۱۷\*. مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع به طول برابر ۳۲ داده شده است.

از گوشة آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع برابر واحد جدا کرده‌ایم. شکل

باقي‌مانده را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، تعداد

آنها، از ۱۵ کمتر نیست.

۱۸. عددهای طبیعی  $m, n, l, k, b, a$  چنان‌اند که

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{k}{l}, |ml - kn| = 1$$

ثابت کنید:  $b \geq n + l$ .

سال نهم

۱۹. همان مساله ۱۴.

۲۰. چهارضلعی  $ABCD$  در دایره‌ای محاط است. ثابت کنید، اگر

نقشه‌های برحور德 دو مماسی که از  $A$  و  $C$  بر دایره رسم می‌شوند، روی خط

راست  $BD$  باشد، آنوقت

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$$

۲۱. همان مساله ۱۸.

۲۲.  $AC$  بزرگترین ضلع مثلث  $ABC$  است. روی آن

$$|AC_1| = |AB| \text{ و } |CA_1| = |CB|$$

را جنا کرده‌ایم. همچنین، روی ضلع‌های  $AB$  و  $CB$ ، پاره خط‌های راست

$$|AA_2| = |AA_1| \text{ و } |CC_2| = |CC_1|$$

را جدا کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $C_1$  و  $C_2$ ، روی محیط یک دایره‌اند.

۲۳. عده‌های طبیعی  $m$  و  $n$  مفروض‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} \geq 1$$

۲۴. دنباله باپایانی از عده‌های درست داده شده‌است. زیر هریک از جمله‌های این دنباله، عددی را که معرف تعداد تکرارهای آن جمله در دنباله است، می‌نویسیم. به همین ترتیب، زیر دنباله دوم، دنباله سوم را می‌نویسیم و غیره. ثابت کنید، در مرحله‌ای از کار، به دو دنباله یکسان پشت‌سرهم می‌رسیم.

سال دهم

۲۵. عده‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، بین  $0$  و  $1$  قرار دارند. ثابت کنید:

$$a + b + c - 2\sqrt{abc} \geq ab + bc + ac - 2abc$$

۲۶. خط شکسته بسته فضایی را منتظم می‌نامیم، وقتی که هم طول ضلع‌های آن و هم اندازه زاویه‌هایی که هر دو ضلع مجاور تشکیل می‌دهند،

با هم برابر باشند. ثابت کنید، برای هر  $n > 5$ ، خط شکسته  $\alpha$  ضلعی منتظمی وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیست.

۲۷. عدد اول  $p$ ، با عدد  $3$  برابر نیست. ثابت کنید، عدد  $1 + 4p^2$  را می‌توان به صورت مجموع مجذورهای سه عدد طبیعی نوشت.

۲۸. همان مساله ۲۲

۲۹\*. مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت واحد، در درون هفت‌ضلعی کوثر با مساحت برابر  $1 / 1.000000$  قرار دارد. ثابت کنید، دست‌کم یکی از زاویه‌های هفت‌ضلعی از  $139^\circ$  درجه بیشتر است.

۳۰. چند تیم والیبال در یک مسابقه شرکت کردند که، بعد از آن، معلوم شد، هر تیم  $10$  برد و  $10$  باخت داشته است. ثابت کنید، می‌توان چند مسابقه را طوری انتخاب کرد که، در آن‌ها، هر تیم درست یکبار برد و یکبار باخت داشته باشد.

### دور نهایی

۳۱. برای عدد طبیعی  $k$ ، حداقل نسبت  $\frac{k^2}{101}$  را پیدا کنید. این حداقل، به ازای چه مقدارهایی از  $k$  به دست می‌آید؟

۳۲. ثابت کنید، خط راستی که مثلث را به دو بخش همارز (یعنی با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند، محیط آن را به نسبتی تقسیم می‌کند که از نسبت  $1 : 3$  بزرگتر نیست.

۳۳. رقم برابر  $9$  را پشت‌سرهم نوشه‌ایم. ثابت کنید، می‌توان  $100$  رقم در سمت راست آن طوری نوشت که، عدد حاصل، مجذور یک عدد درست باشد.

۳۴. نقطه  $M$  را روی ضلع  $BC$  از چهار‌ضلعی کوثر  $ABCD$  انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، بین دایره‌های محاطی مثلث‌های  $ACD$ ،  $ABD$  و

*AMD*، دو دایره با شعاع‌های نابرابر پیدا می‌شود.

۳۵. دنباله‌ای از عددهای طبیعی داریم که هر جمله آن، از جمله قبل بزرگتر و، از جمله سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله از جمله‌های قبلی. ثابت کنید، در این دنباله، بینهایت عدد مرکب وجود دارد.

۳۶. هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را، به ۳۰ بخش برابر تقسیم کردۀ‌ایم. با رسم خط‌های راستی موازی با ضلع‌های مثلث و از نقطه‌های تقسیم ضلع‌ها، مثلث اصلی را به ۹۰۰ مثلث کوچک تقسیم کردۀ‌ایم. حداکثر چند راس تقسیم وجود دارد که هیچ دوتایی از آن‌ها، روی ضلع یا روی خط راست رسم شده نباشد؟

۳۷\*. در شهری، ۱۹۷۲ ایستگاه مترو وجود دارد. هر خط مترو، تنها دو ایستگاه را به هم مربوط می‌کند. می‌دانیم اگر ۹ ایستگاه دلخواه بسته شود، سیستم مترو، ارتباط شهری را تامین می‌کند. همچنین می‌دانیم، برای رفتن از ایستگاه *A* به ایستگاه *B*، باید دست کم ۹۹ بار جا عوض کرد. ثابت کنید، همه ایستگاه‌های مترو را می‌توان به ۱۰۰۰ گروه طوری تقسیم کرد که، در هر گروه، هیچ دو ایستگاهی به وسیله خط مترو به هم مربوط نباشد.

۳۸\*. شهری به شکل یک مربع شطرنجی  $100 \times 100$  است که هر خانه شطرنجی آن، ضلعی به طول ۵۰۰ متر دارد. در در ازای هر ضلع یک مربع کوچک، تنها در یک جهت می‌توان حرکت کرد. می‌دانیم، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان بیش از یک کیلومتر در شهر جلو رفت. ثابت کنید، دست کم ۱۳۰۰ چهارراه در شهر پیدا می‌شود که، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان از آن‌ها خارج شد (هریک از چهار راس مربع بزرگ را هم، یک چهار راه به حساب آورید).

## سال ششم

۱. در سه مغازه، روی هم ۱۹۷۳ کتاب درسی وجود دارد؛ در سه روز نخست، مغازه اول، به ترتیب،  $\frac{1}{47}$ ،  $\frac{1}{7}$  و  $\frac{1}{2}$  کتاب‌های خود؛ مغازه دوم، به ترتیب،  $\frac{1}{41}$ ،  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{3}$  کتاب‌های خود؛ و مغازه سوم، به ترتیب،  $\frac{1}{25}$ ،  $\frac{1}{20}$  و  $\frac{1}{10}$  کتاب‌های خود را فروخت. در هر مغازه، چند کتاب درسی بوده است؟
۲. ورقه شوکولات، دو شیار در طول و سه شیار در عرض دارد که، بعیاری آن‌ها، می‌توان شوکولات را تقسیم کرد. دست‌کم چند بار باید شوکولات را شکست تا در هیچ‌کدام از تکه‌های آن شیاری وجود نداشته باشد؛ در ضمن، می‌توان چند تکه را، با روی هم قرار دادن شیارهای آن‌ها، با هم شکست.
۳. ثابت کنید، عددی که با ششصد رقم برابر ۶ و تعدادی صفر نوشته شده باشد، نمی‌تواند مجازور یک عدد درست باشد.
۴. ثابت کنید، هر مربع را می‌توان به صورت ۱۹۷۳ مربيع برید.
۵. روی تخته سیاه، سه ستون عدد نوشته شده است؛ در ضمن، هیچ عددی، در یک ستون دو بار نیامده است. در ستون چهارم، همه عددهایی را می‌نویسیم که درست یکبار در دو ستون اول آمده‌اند؛ در ستون پنجم، عددهایی را می‌نویسیم که در ستون‌های سوم و چهارم، درست یکبار آمده‌اند؛ در ستون ششم، عددهایی که در ستون‌های دوم و سوم، درست یکبار آمده‌اند؛ در ستون هفتم، عددهایی که در ستون‌های اول و ششم، یکبار با آن‌ها برخورد می‌کنیم. ثابت کنید، تعداد عددها، در ستون‌های پنجم و هفتم، یکی است.
۶. مثلث متساوی الساقینی داده شده که یکی از زاویه‌های آن برابر ۱۰۸ درجه است. ثابت کنید، می‌توان آن را به مثلث‌هایی با زاویه‌های حاده تقسیم کرد.

## سال هفتم

۷. همان مساله ۲.

۸. همان مساله ۳.

۹.  $E$  و  $K$ ، به ترتیب، وسط ضلع‌های  $AD$  و  $BC$  از مستطیل  $ABCD$ ،  $H$  نقطه دلخواهی از پاره خط راست  $EK$ ،  $M$  نقطه برخورد خط‌های راست  $AH$  و  $P$  و  $BC$  و  $P$  نقطه برخورد خط‌های راست  $BH$  و  $CD$  است. از نقطه  $M$ ، خط راستی موازی  $CD$  و از نقطه  $P$ ، خط راستی موازی  $AD$  رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه برخورد خط‌های راستی که رسم کرده‌ایم، روی خط راست  $DH$  قرار دارد.

۱۰. ثابت کنید  $5^{12} + 2^{10}$ ، عددی مرکب است.

۱۱. روی هر ضلع متوازی‌الاضلاع، یک نقطه طوری انتخاب کرده‌ایم که، با وصل آنها به یکدیگر، یک چهارضلعی به دست آمده است که مساحتی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع دارد. ثابت کنید، یکی از قطرهای چهارضلعی، با یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع، موازی است.

۱۲.  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، طول‌های ضلع‌های یک مثلث‌اند و می‌دانیم:

$$2(a^\wedge + b^\wedge + c^\wedge) = (a^\ddagger + b^\ddagger + c^\ddagger)^2$$

ثبت کنید، این مثلث، قائم‌الزاویه است.

## سال هشتم

۱۳.  $AD$  و  $BE$  نیمسازهای مثلث  $ABC$  هستند. ثابت کنید، اگر  $|AE| > |DE| > |BD| > |AC| > |BC|$

۱۴. مجموع رقم‌های یک عدد ده‌ رقمی برابر چهار است. مجموع رقم‌های مجدد این عدد، چه عددی می‌تواند باشد؟

۱۵. برای هر دو نقطه  $A$  و  $B$  از صفحه،  $A * B$  را به معنای قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $B$  می‌گیریم. سه راس یک مریع داده شده است. آیا می‌توان، تنها با استفاده از عمل  $*$ ، راس چهارم مریع را بدست آورد؟  
 ۱۶. مثلث را به تعدادی چندضلعی کوثر برباریم. ثابت کنید، در بین این چندضلعی‌ها، یا مثلث وجود دارد و یا دو چندضلعی پیدا می‌شود که، تعداد ضلع‌های آن‌ها، یکی است.

۱۷. چند عدد طبیعی، روی محیط دایره نوشته‌ایم. سپس، بین هر دو عدد مجاور، بزرگترین بخشیاب مشترک آن‌ها را قرار داده‌ایم و، در پایان کار، عدددهای نخستین را پاک کرده‌ایم. بعد، روی عدددهای باقی‌مانده، همان عمل قبلی را انجام داده‌ایم و غیره. ثابت کنید، بعد از چند گام، همه عدددهای روی محیط دایره، با هم برابر می‌شوند.

۱۸. چند نقطه داده شده است که بعضی از آن‌ها، به وسیله پاره خط‌های راستی به هم وصل شده‌اند؛ در ضمن، این پاره خط‌های راست به گونه‌ای رسم شده‌اند که از هر نقطه به هر نقطه دیگر، می‌توان از طریق آن‌ها رفت. آیا همیشه می‌توان، یکی از نقطه‌ها را، همراه با پاره خط‌های راستی که از آن خارج شده‌اند برداشت، به نحوی که باز هم نقطه‌های باقی‌مانده، از طریق پاره خط‌های راست به هم مربوط باشند؟

### سال نهم

۱۹. می‌دانیم، برای چهارضلعی محاطی  $ABCD$ ، داریم:

$$|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$$

خط راستی که از راس  $B$  و نقطه وسط قطر  $AC$  می‌گذرد، دایرة محیطی را در نقطه  $M \neq B$  قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$|AM| = |CD|$$

۲۰. مجموع رقم‌های یک عدد ۹ رقمی، برابر ۳ شده است. مجموع رقم‌های مکعب این عدد، چه عددی می‌تواند باشد؟

۲۱. روی ضلع‌های  $AB$  و  $CD$  از متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، نقطه‌های  $K$  و  $M$  را طوری پیدا کنید که مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث‌های  $CKD$  و  $AMB$  به دست می‌آید، حداقل مقدار ممکن باشد.

۲۲. همان مساله ۱۷.

۲۳. همان مساله ۱۶.

۲۴. ۱۰ تکه کوچک کاغذ سفید و ۲۰ تکه کوچک کاغذ سیاه را، روی محیط دایره قرار داده‌ایم. جای هر دو تکه کاغذ را، به شرطی که بین آن‌ها سه تکه کاغذ دیگر وجود داشته باشد، می‌توانیم با هم عوض کنیم. دو تبدیل کاغذها را (در این ۳۰ نقطه) همارز می‌نامیم، وقتی که یکی از آن‌ها را بتوان، با چند تبدیل از این‌گونه، منجر به دیگری کرد. چند تبدیل نا همارز وجود دارد؟

سال دهم

۲۵. همان مساله ۱۳.

۲۶. از یک تصاعد حسابی بی‌پایان، با جمله اول  $a \neq 0$  و قدر نسبت  $d$ ، توانسته‌ایم، یک تصاعد هندسی بی‌پایان جدا کنیم. ثابت کنید،  $\frac{a}{d}$ ، عددی گویاست.

۲۷. ثابت کنید:

$$\cos \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right) + \dots \\ \dots + 256 \cos \frac{\pi}{1024} \left(1 - \cos \frac{\pi}{1024}\right) < \frac{1}{2}$$

۲۸. ثابت کنید، در هر چندوجهی کوثر، دو وجه وجود دارد که، تعداد

ضلع‌های آن‌ها، یکی است.

۲۹. یک ۱۹۷۳ ضلعی کوڑ، نقطه  $O$  در درون این چندضلعی و زاویه  $\alpha$  داده شده است. می‌دانیم، به هر صورتی که زاویه  $\alpha$  را به راس  $O$  بسازیم، مساحت بخش مشترک چندضلعی و زاویه، ثابت می‌ماند. ثابت کنید، این چندضلعی منتظم است
۳۰. همان مساله ۲۴.

### دور نهایی

۳۱. می‌دانیم، مجموع قدر مطلق‌های تفاضل‌های دو به دوی پنج عدد غیر منفی، برابر واحد است. کمترین مقدار مجموع این عددها، چقدر می‌تواند باشد؟

۳۲. نقطه روی صفحه‌ای داده شده‌اند، به نحوی هیچ چهار نقطه‌ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، می‌توان سه نقطه پیدا کرد که، اگر دایره‌ای از آن‌ها بگنرا نیم، درست  $k$  نقطه در درون آن قرار می‌گیرد.
۳۳. این چندجمله‌ای، با ضریب‌های درست، داده شده است:

$$P(x) = a \cdot x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

در ضمن می‌دانیم معادله‌های

$$P(x) = 1, P(x) = 2, P(x) = 3$$

- دارای ریشه‌های درست هستند. ثابت کنید، معادله  $5 = P(x)$ ، نمی‌تواند دو یا بیشتر ریشه درست داشته باشد.

۳۴. چند تیم والیبال در مسابقه‌ای شرکت کردند. می‌دانیم، اگر تیم  $A$  از تیم  $B$  برده باشد، تیمی مثل  $C$  پیدا می‌شود که از  $A$  می‌باشد، ولی از  $B$  می‌برد. حداقل، چند تیم در این مسابقه شرکت کرده‌اند؟

۳۵. مربعی به ضلع واحد داده شده است. یک چهارضلعی در آن محاط کرده ایم. در این چهارضلعی، مربعی محاط کرده ایم که، ضلع های آن، با ضلع های مربع بزرگ موازی است. ثابت کنید، اگر طول ضلع مربع اخیر  $\frac{1}{2}$  برابر باشد، راس های آن در نقطه های وسط ضلع های چهارضلعی محاطی واقع است.

۳۶. چندضلعی کوژی با مساحت برابر ۹ مفروض است. ۱۰ خط راست موازی، که دو به دو به فاصله واحد از یکدیگرند، این چندضلعی را بریده اند. ثابت کنید، مجموع طول های پاره خط های راست روی این خط های راست موازی، که به وسیله چندضلعی پیدی آمده اند، از ۱۰ تجاوز نمی کند.

۳۷\*. دو نفر با هم بازی می کنند. اولی پیش خود، یک عدد ده رقمی در نظر می گیرد. دومی از او می پرسد: در مرتبه های مشخصی از عدد، چه رقم هایی وجود دارد؟ اولی به او پاسخ می دهد؛ ولی تنها رقم ها را نام می برد، بدون این که مرتبه آن ها را معن کند. حداقل، با چند پرسش از این گونه، می توان عدد را پیدا کرد؟

۳۸\*. مکعبی با ضلع به طول  $a$  را، روی یک صفحه شطرنجی انداخته ایم. ثابت کنید، این مکعب نمی تواند بیش از  $(1+a)^2$  راس از خانه های شطرنجی را پوشاند.

۳۹\*. روی محیط یک چندضلعی کوژ، دو حشره و دو مگس، در یک جهت و با یک سرعت حرکت می کنند. موقعیت نخستین حشره ها چگونه باشد تا، به فرض موقعیت دلخواه اولیه برای مگس ها، حداقل فاصله بین مگس ها، بیشتر از حداقل فاصله بین حشره ها نباشد (با مساله ۴۰.۸۰ مقایسه کنید).

۴۰. در مربعی به ضلع واحد، ۱۹۷۳ شکل رسم کرده ایم که، مجموع مساحت های آن ها، از ۱۹۷۲ بیشتر است. ثابت کنید، همه این شکل ها، نقطه مشترکی دارند.

سال ششم

۱. همه عددهای  $\overline{abc}$  را پیدا کنید که، برای آنها، داشته باشیم

$$\overline{abc} = 2(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac})$$

۲. آیا چند ضلعی کوژی وجود دارد که درست ۱۹۷۴ قطر داشته باشد؟

۳. با مقوا، چند مثلث متساوی الاضلاع درست کرده‌اند. در سه راس هر مثلث، عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشته‌اند. سپس، آنها را به شکل یک ستون روی هم چیده‌اند. آیا ممکن است، وضعی پیش آید که مجموع عددها در طول هر یال ستون، برابر ۵۵ شود؟

۴. در مسالة ۳، آیا ممکن است مجموع عددها در هر یال برابر ۵۰ شود؟

۵.  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، پشت خط حرکت آماده مسابقه دو هستند. در لحظه حرکت،  $C$  اندکی تاخیر داشت، ولی بعد، در طول حرکت، یا جلو می‌افتد و یا درست شش بار از او جلو افتادند.  $B$ ، در آغاز حرکت، نسبت به  $A$  تاخیر داشت. در جریان حرکت، یا  $A$  جلو می‌افتد و یا درست پنج بار از او جلو افتادند.  $B$  پیش از  $A$  به پایان خط رسید. در مسابقه، این سه نفر، چه ردیف‌هایی را به دست آورند؟

۶. کشور دارای ۱۹۷۴ شهر است. از پای تخت، به شهرهای دیگر، ۱۰۱ خط هوایی وجود دارد، ولی از شهر  $A$  (که دورترین شهر نسبت به پای تخت است)، تنها یک خط هوایی خارج می‌شود. برای شهرهای دیگر، هر شهر با ۲۰ خط هوایی به شهرهای دیگر مربوط است. ثابت کنید، از پای تخت می‌توان، با عوض کردن هوایپما، به شهر  $A$  پرواز کرد.

سال هفتم  
۷. می دانیم

$$a+b+c = 7 \text{ و } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$$

مطلوب است محاسبه مقدار

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

۸.  $O$  را مرکز مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  می‌گیریم. مجموعه نقطه‌های  $X$  را طوری پیدا کنید که، هر خط راستی که از  $X$  می‌گذرد، یا پاره خط راست  $AB$  و یا پاره خط راست  $OC$  را قطع کند.
۹. همه عددهای  $\overline{abcd}$  را پیدا کنید که، برای هریک از آنها، داشته باشیم:

$$\overline{abcd} = \overline{ad} \cdot \overline{ada}$$

۱۰. نقطه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی محيط دایره واقع‌اند.  $D$  وسط خط شکسته  $ABC$ ، روی پاره خط راست  $BC$  و  $E$  وسط کمان  $ABC$  است. ثابت کنید خط راست  $ED$  بر خط راست  $BC$  عمود است.
۱۱. همان مساله ۶

۱۲. در مثلث متساوی الساقین، نیمسازهای زاویه منفرجه و زاویه حاده را رسم کرده‌ایم. طول نیمساز زاویه راس، نصف طول نیمساز زاویه مجاور قاعده شده است. مقدار زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

سال هشتم

۱۳. روی صفحه، دو دایره، در بیرون یکدیگر داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در بیرون این دو دایره وجود دارد، بهنحوی که هر خط راستی که از این نقطه می‌گذرد، دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند؟

۱۴. این معادله را در مجموعه عددهای طبیعی حل کنید:

$$x^{x^{x^x}} = (19 - y^x)y^{x^y} - 74$$

۱۵. از یک مقوا شطرنجی  $8 \times 8$ ، خانه گوشه‌ای را بریده‌ایم. آیا بقیه مقوا را می‌توانیم به ۱۷ مثلث همارز (یعنی با مساحت‌های برابر) تقسیم کنیم؟

۱۶. در خانه ۱۰ از صفحه شطرنجی  $8 \times 8$ ، پیاده سفید و در خانه ۷۸، پیاده سیاه قرار دارند. پیاده سفید می‌تواند تنها به طرف بالا یا به سمت راست و پیاده سیاه، تنها به پایین یا به چپ حرکت کند. پیاده نمی‌تواند به خانه‌ای وارد شود که دیگری اشغال کرده است، ولی می‌تواند هر چند مرتبه، حرکت کند. می‌دانیم، بعد از مدتی، جای دو پیاده عوض شده است. ثابت کنید، در جریان حرکت‌های دو پیاده، لحظه‌ای وجود دارد که، خط راست گذرنده از مرکزهای خانه‌هایی که به‌وسیله دو پیاده اشغال شده است، بر خط راست گذرنده از مرکزهای خانه‌های ۱۰ و ۷۸ عمود است.

۱۷. ثابت کنید، نمی‌توان مجموعه باپایانی از  $n$  نقطه ( $n > 4$ ) پیدا کرد، بهنحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند و، در ضمن، برای هر سه نقطه این مجموعه، بتوان نقطه چهارمی از همین مجموعه پیدا کرد که با سه نقطه انتخابی، راس‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند.

۱۸. باکتری وجود دارد که، در طول زمان معینی، نصف می‌شود. یکی از نیمه‌ها، دوباره نصف می‌شود و غیره. ۱۰۰۰ باکتری ایجاد می‌شود. ثابت کنید، باکتری وجود دارد که، نتیجه تکثیر آن، از ۳۳۴ کمتر و از ۶۶۷ بیشتر نیست.

سال نهم

۱۹. همان مساله ۱۵.
۲۰. همان مساله ۱۴.
۲۱. همان مساله ۱۶، برای صفحه شطرنجی  $9 \times 9$ .
۲۲. مثلث  $ABC$  و دایرة  $S$ ، روی صفحه داده شده‌اند. شعاع دایرة محیطی مثلث برابر  $R$  و شعاع دایرة مفروض برابر  $\frac{1}{2}R$  است. ثابت کنید، نقطه  $T$  وجود دارد به نحوی که پاره خط‌های راست  $TA$ ،  $TC$  و  $TB$  محیط دایرة  $S$  را نصف می‌کنند.
۲۳. نقطه  $X$  درون دایرة به مرکز  $O$  قرار دارد. نقطه  $Y$  را روی قطری  $Y$  از  $X$  می‌گذرد، طوری انتخاب می‌کنیم که نقطه  $O$  وسط دو نقطه  $X$  و  $Y$  باشد. می‌خواهیم از نقطه  $Y$ ، وتر  $AB$  را چنان بگذرانیم که زاویه  $AXB$  حداقل مقدار ممکن باشد.
- ۲۴\*. در یک زیان، سه کلمه  $A$ ،  $B$  و  $C$  چنان‌اند که کلمه  $AABB$  بر کلمه  $CC$  منطبق است. ثابت کنید، کلمه‌ای مثل  $D$  وجود دارد که، هرکدام از کلمه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، با چند بار نوشتن کلمه  $D$  به درست می‌آیند.

### سال دهم

۲۵. آیا عددی ۲۰ رقمی که از سمت چپ با ۱۱ رقم برابر واحد آغاز می‌شود، وجود دارد که مجدد یک عدد درست باشد؟
۲۶. نیم خط‌های راست  $OS_۱$ ،  $OS_۲$ ،  $OS_۳$ ، که از نقطه  $O$  آغاز شده‌اند، سه صفحه موازی را، به ترتیب، در نقطه‌های  $A_۱$ ،  $B_۱$ ،  $C_۱$ ؛  $A_۲$ ،  $B_۲$ ،  $C_۲$ ؛  $A_۳$ ،  $B_۳$ ،  $C_۳$  قطع کرده‌اند. هرم  $OA_۱B_۲C_۳$  حجمی  $OA_۲B_۳C_۱$ ،  $OA_۳B_۱C_۲$ ،  $OA_۱B_۱C_۲$  برابر  $V$  دارد. حجم هرم‌های  $V_۱$ ،  $V_۲$ ،  $V_۳$  می‌نامیم. ثابت کنید:

$$V \leq \frac{1}{3}(V_۱ + V_۲ + V_۳)$$

۲۷. به شرط این که بدانیم:

$$|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1, |x_4| \leq 1$$

مقدار ماکزیمم این عبارت را پیدا کنید:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_1 x_4 - x_2 x_3 - \\ & - x_2 x_4 - x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + \\ & + x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

۲۸. ثابت کنید، نمی‌توان در فضای مجموعه محدودی از  $n$  نقطه پیدا کرد ( $n > 4$ )، به نحوی که برای هر سه نقطه آن، نقطه چهارمی از مجموعه وجود داشته باشد که، با هم، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل دهند.

۲۹. از نقطه  $O$ ، ۱۲ نیم خط راست، در یک صفحه رسم شده است و می‌دانیم، هر دو نیم خط مجاور، زاویه‌ای کوچکتر از  $\frac{\pi}{6}$  تشکیل می‌دهند. روی نیم خط راست  $S_1$ ، نقطه  $A_1$  را به فاصله ۷۲۹ از  $O$  انتخاب کرده‌ایم. از نقطه  $A_1$ ، خط راستی موازی با نیم خط راست  $S_{12}$  کشیده‌ایم تا  $S_2$  را در نقطه  $A_2$  قطع کند. از نقطه  $A_2$ ، خط راستی موازی با  $S_1$  رسم کرده‌ایم تا  $S_3$  را در  $A_3$  قطع کند و غیره. سرانجام، نقطه  $A_{13}$  روی  $S_1$  به دست می‌آید. ثابت کنید:  $|OA_{13}| \leq 1$ .

۳۰. عدد  $2^n$  را روی تخته سیاه نوشته‌ایم. زیر آن دو عدد طبیعی را در یک ردیف، قرار داده‌ایم، به نحوی که مجموع آن‌ها برابر  $2^n$  باشد. زیر هر کدام از عددهای جدید، دوباره، دو عدد طبیعی به مجموع عدد بالای خود نوشته‌ایم. این عمل را تا آنجا ادامه داده‌ایم که به عدد واحد برسیم. ثابت کنید، مجموع همه عددهایی که روی تخته سیاه نوشته‌ایم، از  $2^n \times n$  کمتر نیست.

## دور نهایی

۳۱. فراز سیاره‌ای که به شکل کره است، ۳۷ ماهواره (که هر کدام را یک نقطه به حساب می‌آوریم)، پرواز می‌کنند. ثابت کنید، در هر لحظه، می‌توان نقطه‌ای روی سیاره پیدا کرد که، از آنجا، بیش از ۱۷ ماهواره دیده نمی‌شود.
۳۲. گروهی از مردم در جایی گرد هم آمده‌اند. هر دو نفر از این گروه، به یک اندازه آشنا در آنجا دارند، ولی آشنای مشترکی ندارند. ثابت کنید، در این گروه، یا هیچ کس با دیگری آشنا نیست و یا کسی، درست یک آشنا دارد.
۳۳. ثابت کنید، در چندضلعی کوثر، که تعداد ضلع‌های آن عددی زوج است، قطری وجود دارد که با هیچ یک از ضلع‌های آن موازی نیست.
۳۴. در خانه‌های یک جدول مستطیلی، عده‌های طبیعی نوشته شده‌است. می‌توانیم، در هر مرحله، عده‌های یک ستون را دو برابر و یا از عده‌های یک سطر، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، می‌توان جدولی به دست آورد که تنها شامل صفرها باشد.
۳۵. ضلع‌های یک مربع را، پشت‌سرهم، با عده‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری کرده‌ایم. برای هر نقطه دلخواه  $A$  و ضلع با شماره  $k$ ، قرینه  $A$  نسبت به خط راست  $k$  را  $A_k$  می‌نامیم. همه نقطه‌های  $A$  را طوری پیدا کنید که هریک از نقطه‌های  $A_1, A_{12}, A_{122}, A_{1224}, A_{12241}, \dots$  در درون مربع قرار گیرند.
۳۶. مجموع صد عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، برابر است با ۲۰۰. ثابت کنید، از بین آنها، می‌توان چند عدد انتخاب کرد که مجموعی برابر ۱۰۰ داشته باشند.
۳۷. همه عده‌های طبیعی  $k$  را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: یک  $k$  ضلعی وجود نداشته باشد که خط راستی که از ادامه هر ضلع آن به دست

می‌آید، روی ضلع دیگر این  $k$  ضلعی قرار گیرد. تنها چند ضلعی‌هایی را در نظر بگیرید که ضلع‌های مجاور موازی نداشته باشند.

۳۸\*. عدد اول  $p$  داده شده است. ثابت کنید، از بین  $1 + p$  عدد طبیعی، که دو به دو با هم فرق دارند، می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که نسبت عدد بزرگتر بر بزرگترین بخشیاب مشترک آن‌ها، از  $1 + p$  کوچکتر نباشد.

## ۱۹۷۵

### سال ششم

۱. کولیا یک عدد دو رقمی اندیشید و واسیا تلاش کرد آن را پیدا کند. برای این منظور، واسیا عده‌های دو رقمی را روی تخته می‌نویسد؛ اگر این عدد، همان عدد مورد نظر باشد، کولیا در کنار آن علامت + و اگر تنها در یک رقم با عدد مورد نظر تطبیق کند، علامت - را می‌گذارد. ثابت کنید، کافی است واسیا ۱۰ عدد روی تخته بنویسد تا عدد مورد نظر را کشف کند.

۲. ۲۶ سنگ دومینو به ردیف چیده شده است. سپس، هریک از دو سنگ باقی‌مانده را نصف کرده‌اند. ثابت کنید، در بین چهار نیمه‌ای که به دست می‌آید، دو سنگ یکسان وجود دارد.

۳. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \dots + \frac{97}{98} - \frac{99}{100} &= \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50} \right) \end{aligned}$$

۴. در صفحه، دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر، خط‌های راست  $a, b, c, d, e$  که دایره را قطع کرده‌اند و، همچنین، نقطه  $X$  به فاصله ۱۱ سانتی‌متر

از مرکز دایره، داده شده است. قرینه نقطه  $X$  را، پشت سرهم نسبت به پنج خط راست پیدا کرده ایم؛ نقطه  $E$  بدست آمده است. ثابت کنید، نقطه  $E$  نمی تواند در درون دایره قرار گیرد.

۵. کولیا و واسیا، تنها به کمک رقم های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، یک عدد ۲۰ رقمی می نویسند. رقم اول (از سمت چپ) را کولیا، رقم دوم را واسیا می نویسد و غیره. واسیا می خواهد ترتیبی بدهد که عدد ۲۰ رقمی بر ۹ بخش پذیر باشد. آیا کولیا می تواند مانع او بشود؟

۶. با رقم های ۱، ۲ و ۳، همه عده های چهار رقمی را که ممکن است، نوشته ایم. هریک از عده ها با یکی از شماره های ۱، ۲ یا ۳ مشخص شده است. شماره ها را طوری به عده ها داده ایم که، اگر دو عدد در همه مرتبه ها با هم اختلاف دارند، دو شماره متفاوت داشته باشند. معلوم شد، عده های ۱۱۱۱، ۲۲۲۲، ۳۳۳۳ و ۱۲۲۲، با شماره هایی مشخص شده اند که همان رقم اول سمت چپ آن هاست. ثابت کنید، شماره بقیه عده ها هم، همان رقم اول سمت چپ آن هاست.

### سال هفتم

۷. کولیا و واسیا، بهنوبت و با رقم های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، یک عدد ۳۰ رقمی می نویسند. کولیا آغاز می کند و واسیا می خواهد، عدد حاصل، بر ۹ بخش پذیر باشد. آیا کولیا می تواند مانع او بشود؟

۸.  $p$  و  $p^{p+1}$  عده های اول اند.  $p$  را پیدا کنید.

۹. بین رقم های یک عدد سه رقمی، صفر وجود ندارد. این عدد را در مجموع عکس رقم های آن ضرب کرده ایم. حداقل مقدار این حاصل ضرب چقدر می تواند باشد؟

۱۰. شش ضلعی کوثر ABCDEF داده شده است.  $M_1$  وسط  $AB$ ،  $M_2$  وسط  $CD$ ،  $M_3$  وسط  $EF$ ،  $M_4$  وسط  $M_1M_2$ ،  $M_5$  وسط  $M_2M_3$ ،  $M_6$  وسط  $M_3M_4$

۱۰. وسط  $M_v$ ،  $DE$  و  $M_5M_6$  و  $M_7M_8$  است. ثابت کنید، پاره خط های راست  $M_4M_5$  و  $M_6M_7$ ، به ناچار یکدیگر را قطع می کنند.
۱۱. همه عدد های هفت رقمی را در نظر می گیریم که با رقم های ۱ و ۲ و ۳ ساخته شده اند. به هر کدام از این عدد ها، یکی از همین رقم ها را اضافه می کنیم، به نحوی که، اگر دو عدد در همه مرتبه ها با هم اختلاف دارند، در رقم اضافه شده هم، با یکدیگر فرق داشته باشند. همچنین می دانیم به عدد ۱۱۱۱۱۱۱، رقم ۱؛ به عدد ۲۲۲۲۲۲۲، رقم ۲؛ به عدد ۳۳۳۳۳۳۳، رقم ۳ و به عدد ۱۲۲۲۲۲۲، رقم ۱ اضافه شده است. ثابت کنید، برای همه عدد ها، رقمی که اضافه کرد هایم، همان رقم اول عدد هفت رقمی است.
۱۲. دایره ای به شعاع ۱ مفروض است. وتری از دایره را طوری رسم کنید که، اگر آن را ضلع یک مربع بگیریم، فاصله مرکز دایره تا یکی از راس های این مربع، حداقل مقدار ممکن باشد.

### سال هشتم

۱۳. نقطه برخورد ارتفاع های مثلث متساوی الساقین، روی محیط دایره محاطی مثلث است. نسبت ضلع های مثلث را پیدا کنید.
۱۴. پنج تصاعد هندسی بیان داریم که، همه جمله های آنها، عدد هایی درست اند. ثابت کنید، عددی طبیعی وجود دارد که در هیچ کدام از تصاعد ها، پیدا نمی شود.
۱۵. نقطه برخورد نیمساز های  $AD$  و  $CE$  از مثلث  $ABC$  است. می دانیم نقطه های  $B$ ،  $D$ ،  $E$  و  $F$  روی محیط یک دایره اند. ثابت کنید، شعاع این دایره، از شعاع دایره محاطی مثلث، کوچکتر نیست.
۱۶. ثابت کنید، نقطه های برخورد سهمی های

$$y = x^4 + x - 41 \quad x = y^4 + y - 40$$

روی محیط یک دایره‌اند.

۱۷. چند عدد طبیعی  $10^6 < N$  وجود دارد، بهنحوی که  $N$  بر  $\sqrt{N}$

بخش پذیر باشد.

۱۸. در هفت راس متواالی یک  $100$  ضلعی منتظم، تکه کاغذهایی از هفت رقم گذاشته‌ایم. در هر حرکت، می‌توانیم یکی از کاغذها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، بعد از  $10$  راس، روی راس یازدهم، به شرطی که آزاد باشد، بگذاریم. می‌خواهیم کاغذها را در هفت راسی که بعد از هفت راس نخستین واقع‌اند، قرار دهیم. چند وضع مختلف، برای این تکه کاغذها، ممکن است در این هفت راس پیش آید؟

### سال نهم

۱۹. قطرهای  $AB$  و  $CD$  را، عمود بر هم، در دایره‌ای رسم کرده‌ایم. روی کمان  $BD$ ، نقطه  $X$  را انتخاب کرده‌ایم؛ در ضمن،  $CX$  و  $AX$  با  $CD$  و  $AB$ ، به ترتیب، در نقطه‌های  $E$  و  $F$  برخورده‌اند. ثابت کنید، اگر نسبت  $\frac{|CE|}{|ED|}$  عددی گویا باشد، آنوقت نسبت  $\frac{|AF|}{|FB|}$  هم عددی گویا است.

۲۰. همان مسالة ۱۶.

۲۱. بین مثلثهایی که در یک مثلث مفروض قرار دارند، نسبت مساحت به محیط کدام‌یک، بیشترین مقدار است؟

۲۲. همان مسالة ۱۸.

۲۳. پنج نیم خط راست، که از یک نقطه آغاز شده‌اند، روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم. حداکثر چند زاویه منفرجه تشکیل می‌دهند؟

۲۴. در یک جدول مربعی  $100 \times 100$ ، بعضی از خانه‌ها را رنگ آمیزی کرده‌ایم. هر خانه رنگی، یا تنها خانه رنگی در ستون خود و یا تنها خانه رنگی در سطر خود است. حداکثر، چند خانه می‌تواند رنگی باشد؟

## سال دهم

۲۵. ۱۹۷۵ تصاعد هندسی داریم که، همه جمله‌های آن‌ها، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید که آن‌ها نمی‌توانند شامل همه عددهای طبیعی باشند.

۲۶. همان مسالة ۲۱.

۲۷. معادله  $1 + \sqrt{x^3 + 2} = 4\sqrt{x^3 + 2}$  را حل کنید.

۲۸. چهار کره با شعاع‌های برابر در فضا داده شده است. ثابت کنید، هیچ سه‌تایی از آن‌ها، چهارمی را نمی‌پوشاند.

۲۹. همان مسالة ۲۴.

۳۰. یک  $n$  ضلعی کوثر، در مربع  $1 \times 1$  قرار دارد. ثابت کنید، سه راس متواالی از این  $n$  ضلعی وجود دارد که مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند، از  $\frac{\lambda}{n^2}$  بیشتر نیست.

## دور نهایی (سال هشتم)

۳۱. درباره عددهای  $a, b, c$  و  $d$  می‌دانیم:

$$a^r + b^r = c^r + d^r = 1 \quad \text{و} \quad ac + bd = 0$$

مطلوب است محاسبه  $.ab + cd$

۳۲. کدام بزرگترند:

$$\begin{matrix} 3^{3^3} & : & 2^{2^2} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

(۹۹ بار ۳)      (۱۰۰ بار ۲)

۳۳. عددهای طبیعی  $a$  و  $b$  و  $c$  را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، عددهای  $c^a + b, b^c + a, a^b + c$ ، عددهایی اول‌اند.

۳۴. مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر صفحه را در اختیار داریم. می‌توانیم، قرینه هر نقطه را، نسبت به خط راستی پیدا کنیم که عمود منصف پاره خط راستی باشد که دو انتهای آن، دو نقطه از این مجموعه است. اگر از سه نقطه‌ای آغاز کنیم که فاصله دویمه‌ی آن‌ها، کمتر از واحد است، آیا می‌توان به مجموعه‌ای رسید که در آن، دو نقطه با فاصله‌ای بزرگتر از واحد وجود داشته باشد؟

۳۵. در یک گردبازی ۳۰ نفر جمع شده‌اند. هر نفر درست با کارهای علمی  $k$  نفر از این گروه آشناست.  $k$ ، دست‌کم چقدر باید باشد تا بتوانیم بگوییم، حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که با کارهای علمی یکدیگر آشنا هستند؟  
۳۶. هشت راس از راس‌های یک ۳۵ ضلعی منتظم را انتخاب کرده‌ایم ثابت کنید، چهار راس از این هشت راس، یا یک ذوزنقه و یا یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

۳۷\*. در کشوری، برخی شهرها، به وسیله جاده به هم مربوط‌اند. طول هر جاده، از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست. می‌دانیم، از هر شهر به هر شهر دیگر، می‌توان با پیمودن مسیری که از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست، رسید. یکی از جاده‌ها را، به دلیلی، بسته‌اند؛ ولی هنوز می‌توان، مثل سابق، از هر شهری به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، بعد از بسته شدن یکی از جاده‌ها، برای سفر از هر شهر به هر شهر دیگر، نیازی به پیمودن بیش از ۱۵۰۰ کیلومتر نیست.

۳۸\*. مرکزهای ۶۴ خانه صفحه شطرنج را علامت گذاشته‌ایم. آیا می‌توان صفحه شطرنج را با سیزده خط راست، چنان به بخش‌هایی تقسیم کرد که، در هر بخش، بیش از یک نقطه نشان‌دار (مرکز خانه) وجود نداشته باشد؟

.۳۹. همان مساله .۳۱

.۴۰. آیا می‌توان در فضای چهار کره دویمه دو غیرمتقاطع و نقطه  $A$  در بیرون آنها را، طوری درنظر گرفت که، هر نیم خط راستی که از نقطه  $A$  آغاز می‌شود، دستکم یکی از کره‌ها را قطع کند؟

.۴۱. همان مساله .۳۷

.۴۲. آیا تابع  $R \rightarrow R : f$  وجود دارد، به نحوی که برای هر  $x$  داشته باشیم :

$$f(x) + f^{-1}(x) = -x$$

.۴۳. همان مساله .۳۸

.۴۴\*. برای دنباله عددی درست  $x_0, x_1, x_2, \dots$  می‌دانیم :

$$x_0 = 0, |x_n| = |x_{n-1} + 1| (n \in \mathbb{N})$$

حداقل مقداری که عبارت  $|x_1 + x_2 + \dots + x_{1975}|$  می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟

.۴۵. نقطه‌های  $A_1, B_1$  و  $C_1$  را روی ضلع‌های  $AB, AC$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$  طوری انتخاب کردیم که پاره خط‌های راست  $A_1A$ ،  $B_1B$ ،  $C_1C$  در نقطه  $D$  به هم رسیده‌اند. پاره خط‌های راست  $A_1C_1$  و  $B_1C_1$  در نقطه  $E$  یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر  $|BD| = 2|B_1D|$  آنوقت  $|BE| = |B_1E|$ .

.۴۶\*. هریک از عددی  $x_0, x_1, \dots, x_n$  یا برابر ۰ است و یا برابر ۱. ثابت کنید :

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{(\sqrt{2})^2} + \dots + \frac{x_n}{(\sqrt{2})^n} &\leq \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \sqrt{x_0 + \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}} \end{aligned}$$

سال ششم

۱. ۳۰۰ نقطه روی محیط دایره‌ای نشان گذاشته شده است. حشره‌ای در یکی از این نقطه‌ها نشسته است. او در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، مرتب از نقطه‌ای به نقطه دیگر می‌جهد، به این ترتیب: اول روی نقطه مجاور، بعد از روی یک نقطه می‌جهد و در نقطه بعد از آن می‌نشیند، سپس از روی دو نقطه می‌جهد، بعد از روی سه نقطه و غیره. ثابت کنید، می‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که حشره، هرگز روی آن قرار نمی‌گیرد.
۲. عددی از ۱ تا ۹ را به سه گروه تقسیم کرده‌ایم: در هر گروه ۳ عدد. سپس، عددی از هر گروه را در هم ضرب کرده‌ایم؛ بزرگترین عدد از بین این سه حاصل ضرب را  $a$  می‌نامیم. کمترین مقدار ممکن برای  $a$  چقدر است؟
۳. روستاهای  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، در راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. در روستای  $A$ ، ۱۰۰ دانش‌آموز؛ در روستای  $B$ ، ۲۰۰ دانش‌آموز و در روستای  $C$ ، ۳۰۰ دانش‌آموز زندگی می‌کنند. مدرسه را در کجا بسازیم که مجموع مسافت‌هایی که همه دانش‌آموزان می‌پیمایند، کمترین مقدار ممکن باشد؟
۴. نواری به ۳۵ خانه، در یک ردیف، تقسیم شده است. در دو خانه مرزی، دو مهره گذاشته شده است. دو نفر بازی می‌کنند و، هر کدام، در نوبت خود می‌تواند مهره خود را یک یا دو خانه، به هر سمتی جابه‌جا کند. از روی مهره رقیب، نمی‌توان پرید. کسی که، در نوبت خود نتواند حرکت کند، بازی را باخته است. کسی که بازی را آغاز کرده است، چگونه بازی کند که برنده شود؟

۵. روی کاغذ شطرنجی، مربعی شامل  $11 \times 11$  خانه رسم کرده‌ایم. می‌خواهیم مرکزهای برخی از خانه‌ها را طوری نشان‌گذاری کنیم که، مرکزهای هر دو خانه دلخواه، روی پاره خط راستی باشد که دو نقطه نشان‌دار را، به صورت قائم یا به صورت افقی به هم وصل کرده‌است. حداقل، چند خانه را باید نشان گذاشت؟

۶. قطعه زمین مربع شکل را که حصاری به دور خود دارد، با حصارهای دیگری، به چند مربع کوچکتر تقسیم کرده‌ایم. طول ضلع هریک از مربع‌های کوچکتر با عدد درستی بیان می‌شود (برحسب متر). ثابت کنید، مجموع طول‌های همه حصارها، برحسب متر، بر  $4$  بخش‌پذیر است.

### سال هفتم

۷. همان مساله ۱، برای  $10^{\circ} 1$  نقطه.

۸. همان مساله ۲.

۹. جیرجیریک روی صفحه با جست به این طرف و آن طرف می‌رود: در جست اول  $1$  سانتی‌متر، در جست دوم  $2$  سانتی‌متر، در جست سوم  $3$  سانتی‌متر و غیره، او بعد از هر جست، به اندازه  $90^{\circ}$  درجه تغییر جهت می‌دهد. بعد از مدتی، تصمیم می‌گیرد، به جای نخست خود برگردد. آیا موفق می‌شود؟

۱۰.  $F$  یک پنج‌ضلعی کوثر است. محیط پنج‌ضلعی  $F$ ، محیط پنج‌ضلعی ستاره‌ای که راس‌هایش روی راس‌های پنج‌ضلعی  $F$  هستند و محیط پنج‌ضلعی درونی، عددی اولاند. ثابت کنید، مجموع این سه محیط، از  $20$  کمتر نیست.

۱۱. همان مساله ۵.

۱۲. همان مساله ۶.

## سال هشتم

۱۳.  $x_1, x_2, \dots, x_{25}$  عددهای درست و  $y_1, y_2, \dots, y_{25}$

همان عددها، ولی به ردیف دیگری هستند. ثابت کنید

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \dots (x_{25} - y_{25})$$

عددی زوج است.

۱۴.  $A$  و  $B$ ، عددهای سه رقمی‌اند. اگر  $B$  را یکبار در سمت راست

$A$  و بار دیگر در سمت چپ آن بنویسیم، دو عدد شش رقمی به دست می‌آید.

ثابت کنید، اگر  $A$  و  $B$  با هم برابر نباشند، تفاضل این دو عدد شش رقمی،

بر ۱۹۷۶ بخش پذیر نیست.

۱۵. در جاده کمریندی دایره‌ای شکل، یک دونده، دو دوچرخه‌سوار و یک موتورسیکلت سوار، هر کدام با سرعتی ثابت، حرکت می‌کنند: دونده و یکی از دوچرخه‌سوارها در یک جهت و موتورسیکلت سوار و دوچرخه‌سوار دوم، در جهت دیگر. دونده، هر ۱۲ دقیقه یکبار، با دوچرخه‌سوار دوم برخورد می‌کند؛ دوچرخه‌سوار اول، هر ۲۰ دقیقه یکبار به دونده می‌رسد و موتورسوار هر ۵ دقیقه یکبار به دوچرخه‌سوار دوم می‌رسد. موتور سوار و دوچرخه سوار اول، هر چند دقیقه یکبار، یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

۱۶. نقطه  $A$  در درون و نقطه  $B$  در بیرون ۱۹۷۶ ضلعی منتظم قرار

دارند.  $\vec{X}_A$  را مجموع بردارهای می‌گیریم که از نقطه  $A$  به راس‌های ۱۹۷۶ ضلعی رسم شده‌اند و  $\vec{X}_B$  را مجموع بردارهای از نقطه  $B$  تا راس‌های ۱۹۷۶ ضلعی. آیا ممکن است طول بردار  $\vec{X}_A$  از طول بردار  $\vec{X}_B$  بیشتر باشد؟

۱۷. زاویه  $C$ ، در چهارضلعی  $ABCD$ ، بزرگترین زاویه است.  $K$

نقطه برخورد خط راست  $AD$  و خط راستی است که از  $C$  موازی  $AB$  رسم

شود؛  $M$ ، نقطه برخورد خط راست  $AB$  و خط راستی است که از  $C$  موازی

رسم شود؛  $P$  نقطه برخورد خط‌های راست  $AD$  و  $BK$  و  $MD$  است. ثابت کنید، مساحت‌های چهارضلعی‌های  $BCDP$  و  $AMPK$  با هم برابرند.

۱۸. از مجموعه عددهای طبیعی، سه زیرمجموعه دویه‌دو جدا از هم، انتخاب کردہ‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دو عدد  $x$  و  $y$  را از دو تا از این زیرمجموعه‌ها طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها  $y + x$ ، در زیرمجموعه سوم نباشد.

### سال نهم

۱۹. در مثلث  $ABC$  می‌دانیم:

$$|AC| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC|)$$

ثابت کنید، طول شعاع دایره محاطی مثلث، یک‌سوم طول یکی از ارتفاع‌های آن است.

۲۰. ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ، کوچکترین عدد از بین دو عدد  $\sqrt[n]{m}$  و  $\sqrt[m]{n}$ ، از  $\sqrt[3]{mn}$  کوچکتر است.

۲۱. همان مساله ۱۴.

۲۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n \geq 5$ ، یک  $n$ -ضلعی کوثر وجود دارد، بهنحوی که طول ضلع‌های آن متفاوت باشد و، در ضمن، مجموع فاصله هر نقطه درونی  $n$ -ضلعی تا ضلع‌های آن (و یا امتداد ضلع‌ها)، به جای این نقطه بستگی نداشته باشد.

۲۳. حاکم، ۱۲ مشاور دارد و از آن‌ها گروه‌هایی به این ترتیب تشکیل داده است که، هر دو گروه، یک عضو مشترک داشته باشند، ولی ترکیب آن‌ها با هم فرق کند. حاکم توانست ۱۰۰۵ گروه تشکیل دهد. ثابت کنید، هنوز می‌تواند یک گروه دیگر، با توجه به شرط مساله، درست کند.

۲۴\*. مثلث  $ABC$  و دایره محيطي آن مفروض آند.  $K$ ، نقطه برخورد نيمساز داخلی زاویه  $B$  و نيمساز خارجی زاویه  $C$ ،  $L$ ، نقطه برخودر نيمساز داخلی زاویه  $C$  و نيمساز خارجی زاویه  $B$  و نقطه  $M$ ، وسط پاره خط راست  $KL$  است. ثابت کنید،  $M$ ، نقطه وسط کمان  $CAB$  از دایره محيطي مثلث است.

### سال دهم

۲۵. خط شکسته بسته‌ای که شامل چهار ضلع است و همه ضلع‌های آن، طول‌هایی برابر دارند، داده شده است. ثابت کنید، فاصله هر نقطه دلخواه فضنا تا هر راس خط شکسته، از مجموع فاصله‌های این نقطه تا سه راس دیگر آن، کوچکتر است.

۲۶. تابع  $f$  را، که در مجموعه عددهای حقیقی معین است، طوری پیدا کنید که برای هر  $x$  و  $y$  داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

۲۷. اگر بدانیم این معادله دارای جواب است، همه جواب‌های حقیقی آن را پیدا کنید:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bx} + \sqrt{b+cx} + \sqrt{c+ax} &= \\ &= \sqrt{b-ax} + \sqrt{c-bx} + \sqrt{a-cx} \end{aligned}$$

۲۸. طول ضلع‌های مثلثی، برابر  $a$ ،  $b$  و  $c$  است. ثابت کنید:

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a^r + b^r + c^r}{abc} < 3$$

۲۹. جدول  $5 \times 5$  به وسیله صفرها و واحدها، پر شده است. می‌دانیم در گوشة چپ بالا و در گوشة راست پایین، واحد، و در دو گوشة دیگر،

عدد صفر گذاشته شده است. ثابت کنید، می‌توان دو مربع مختلف  $2 \times 2$  در جدول پیدا کرد (ممکن است متقارع باشند) که تعداد صفرها و تعداد واحدها، در آنها یکی است.

. ۲۴. همان مساله ۲۴.

### دور نهایی

. ۳۱. در پنج ضلعی کوچک  $ABCDE$ ، همه ضلع‌ها طولی برابر دارند.

اگر بدانیم زاویه  $ACE$  برابر نصف زاویه  $BCD$  است، مقدار زاویه  $ACE$  را پیدا کنید

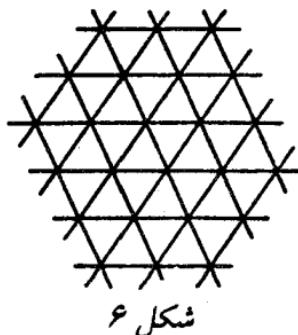
. ۳۲. فضا را به پنج زیرمجموعه غیرتنهی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که، دست‌کم، سه تا از آنها را قطع می‌کند.

. ۳۳. دستگاه را در مجموعه عددهای حقیقی حل کند.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

. ۳۴. در یک بازی، به تعداد محدودی موقعیت وجود دارد؛ در ضمن، برای هر موقعیت، تعداد موقعیت‌هایی که می‌توان از آنها به سمت آن رفت، برابر است با تعداد موقعیت‌هایی که می‌توان از آن به سمت آنها رفت. کسی می‌بازد که نتواند از موقعیت خود بیرون رود. ثابت کنید، تعداد موقعیت‌هایی که آغازکننده بازی را، به شرط بازی درست نفر دوم، دچار باخت می‌کند، بیشتر از نصف تعداد همه موقعیت‌ها نیست.

. ۳۵. جدولی  $100 \times 100$  داریم که همه خانه‌ای آن با سه رنگ مختلف، رنگ شده‌اند. می‌توانیم هر مربع  $2 \times 2$  را به رنگی درآوریم که، در



شکل ۶

آن، نسبت به دو رنگ دیگر برتری دارد؛ و اگر رنگ برتر در این مربع  $2 \times 2$  وجود نداشته باشد، به رنگی درآوریم که در آن وجود ندارد. ثابت کنید، به این ترتیب، می‌توان تمامی مربع بزرگ را به یک رنگ درآورد.

۳۶. صفحه را به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقسیم کرده‌ایم. (شکل ۶). همه مثلث را با چهار رنگ چنان رنگ کرده‌ایم که یک شکل به هم پیوسته را تشکیل دهند. ثابت کنید، از این شکل می‌توان دست‌کم ۳۳ لوزی غیرمتقاراطع بزید، به نحوی که هر لوزی شامل دو مثلث باشد.

۳۷. ثابت کنید، از بین عدد‌های ۱۹۷۶ رقمی که هرکدام از آن‌ها، شامل ۱۹۷۵ واحد و یک رقم برابر ۷ باشد، دست‌کم می‌توان ۶۵۸ عدد مرکب پیدا کرد.

۱۹۷۷

### سال ششم

۱. آیا می‌توان یک مربع را به ۱۹۷۷ مثلث طوری تقسیم کرد که روی ضلع‌های مربع، به تعداد برابر از راس‌های مثلث‌ها قرار گیرد و، در ضمن، راس هیچ مثلثی در درون ضلع مثلث دیگر نباشد.

۲۰. رخ را طوری روی خانه‌های صفحه شطرنج گذاشته‌ایم که هر رخ مورد تهدید دست کم یک رخ قرار دارد. ثابت کنید، می‌توان ۱۲ رخ را طوری برداشت که هشت رخ باقی‌مانده، همان ویژگی را داشته باشند.

۳. یک هشت‌ضلعی منتظم را به کمک دو خط راست، به چهار بخش با مساحت‌های برابر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، این دو خط راست بر هم عمودند.

۴. عدد ۱۱۱...۱۱۱ (شامل ۱۰۰ رقم) را به این صورت نوشته‌ایم:

$$a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_{99} \times 10^{99}$$

که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_{99}$  عدهای غیرمنفی و درست‌اند و مجموع آنها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، همه این عدها برابر واحدند.

۵. دنباله‌ای از عدهای درست را طوری نوشته‌ایم که جمله اول آن برابر ۲ و از آن به بعد، هر جمله برابر است با  $\frac{3}{7}$  جمله قبل، به شرطی که عدد درستی به دست آید؛ در حالتی که  $\frac{3}{7}$  جمله قبل همراه با کسری از عدد درست باشد، از این مقدار کسری صرف نظر می‌کنیم:

$$2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, \dots$$

ثابت کنید، در این دنباله عدد شش‌رقمی وجود دارد.

۶. دو نفر به نوبت روی یکی از خانه‌های نوار افقی ۱۲ خانه‌ای یک رقم می‌نویسند تا ۱۲ خانه پر شود. از رقم‌های ۰ و ۹ نباید استفاده کنند. ثابت کنید، نفر دوم می‌تواند ترتیبی بدهد که عدد ۱۲ رقمی حاصل بر ۷۷ بخش‌پذیر باشد.

۷. همان مساله ۱

۸. عدد ۱۹۷۷۱۹۷۷۱۹۷۷ را به این صورت نوشتایم:

$$a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_{11} \times 10^{11}$$

که در آن، عددهای  $a_0, a_1, \dots, a_{11}$  غیرمنفی و درست‌اند و، در ضمن، مجموع آن‌ها، از ۷۲ تجاوز نمی‌کند، این عددها را پیدا کنید.

۹. نقطه‌های  $K, L, M$  و  $N$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  از مریع  $ABCD$  انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$|KL| + |LM| + |MN| + |NK| \geq 2|AC|$$

۱۰. همان مساله ۶.

۱۱. همان مساله ۵.

۱۲. نقطه  $O$  در درون چندضلعی کوژ  $P$  واقع است و می‌دانیم، هر خط راستی که از  $O$  بگذرد، چندضلعی  $P$  را به دو بخش هم‌ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند. ثابت کنید، نقطه  $O$ ، مرکز تقارن چندضلعی  $P$  است.

سال هشتم

۱۳. نقطه  $D$  روی ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  قرار دارد.  $E$ ، نقطه دلخواهی از ضلع  $AC$  و  $K$ ، نقطه‌ای از ضلع  $AB$  است. خط‌های راست  $AD$  و  $BE$  در نقطه  $M$ ، خط‌های راست  $CK$  و  $BE$  در نقطه  $P$  و خط‌های راست  $CK$  و  $AD$  در نقطه  $T$  برخورد دارند. ثابت کنید، اگر

$$|BM| = |PE| \text{ و } |AT| = |MD|$$

.  $|CP| > |TK|$  آن‌گاه

۱۴.  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی است.  
ثابت کنید، عددهای طبیعی  $x$  و  $y$  وجود دارد، بهنحوی که یا هر دو عدد  $x$  و  $y$  عضو زیرمجموعه‌اند و یا هیچ‌یک از آن‌ها عضو زیرمجموعه نیستند.

۱۵. یک چندضلعی کوثر، چند ضلع می‌تواند داشته باشد تا مختصات هر راس آن، عددهایی درست باشند، ولی هر نقطه‌ای که در درون چندضلعی یا روی ضلع آن (به جز راس‌ها) قرار دارد، دست‌کم یک مختص داشته باشد، که عددی درست نباشد؟

۱۶. در صفحه کاغذ شطرنجی  $100 \times 100$ ، همه خط‌های شکسته‌ای که ضلع‌های خانه‌های صفحه شطرنجی، ضلع‌های آن را تشکیل می‌دهند و، در ضمن، دو راس متقابل مریع را با کوتاهترین مسیر به هم وصل می‌کنند، درنظر می‌گیریم. حداقل، چند مسیر از این‌گونه را باید درنظر گرفت تا، اجتماع آن‌ها، همه راس‌های خانه‌ها را دربر گیرد؟

۱۷. پاره‌خط‌های راست  $a_1, a_2, \dots, a_{1977}$ ،  $b_1, b_2, \dots, b_k$  را روی یک خط راست واقع‌اند. می‌دانیم، هر پاره‌خط راست  $a_k$ ، با هریک از پاره‌خط‌های راست  $b_{k-1}$  و  $b_{k+1}$ ، نقطه مشترکی دارد. به جز این،  $a_{1977}$  و  $b_1$  و، همچنین،  $a_1$  و  $b_{1977}$  هم دارای نقطه مشترک‌اند. ثابت کنید، به ازای هر  $k$ ، پاره‌خط‌های راست  $a_k$  و  $b_k$  دارای نقطه مشترک‌اند.

۱۸.  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ، بردارهایی از صفحه‌اند و هیچ دو تابی از آن‌ها، هم‌راستا نیستند. می‌دانیم، برای هر  $x$  و  $y$  ( $j \neq i$ )، بین بردارهای مفروض، بردار به صورت  $x\vec{a}_i + y\vec{a}_j$  وجود دارد که، در آن،  $x$  و  $y$  عددهایی منفی‌اند. ثابت کنید،  $n$ ، عددی فرد است.

### سال نهم

۱۹. همان مسالة ۱۳.

۲۰. همان مسالة ۱۶.

. ۲۱. همان مساله ۱۷.

. ۲۲. همان مساله ۱۸.

. ۲۳. تابع  $f$  در بازه  $[0, 1]$  با رابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, & x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ثابت کنید، برای هر بازه  $[a, b] \subset [0, 1]$ ، نقطه  $x$  از این بازه، و عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به نحوی که، نقطه

$$f(f(f(\dots f(x) \dots)) \quad (n \text{ بار})$$

روی بازه  $[a, b]$  واقع است.

. ۲۴\*. چند نقطه داده شده است؛ بعضی از این نقطه‌ها به وسیله کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند، به نحوی که می‌توان از هر نقطه به هر نقطه دیگر، به وسیله این کمان‌ها رسید. روی هر کمان، دو پیکان، یکی به رنگ آبی و دیگری به رنگ قرمز، در دو جهت مختلف رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، از هر نقطه به هر نقطه دیگر، می‌توان از مسیری حرکت کرد که رنگ پیکان بیش از یکبار عوض نشود، در ضمن، حرکت را تنها در جهتی می‌توان انجام داد که پیکان مشخص می‌کند.

#### سال دهم

. ۲۵. ثابت کنید، به شرط  $\frac{\pi}{4} < x < 0$  داریم:

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x > x^2$$

۲۶\*. چندضلعی کوثر چند راس می‌تواند داشته باشد تا مختصات همه راس‌های آن، عده‌هایی درست باشند، ولی دست‌کم یکی از دو مختص سایر نقطه‌های محیط و نقطه‌های درونی چندضلعی، عددی درست نباشد؟

۲۷.  $p$ ,  $n$  و  $k$  عده‌های طبیعی‌اند و  $1 < p$ . ثابت کنید، دست‌کم یکی از عده‌های

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}$$

بر  $p$  بخش ناپذیر است.

۲۸. ثابت کنید، مجموع همه زاویه‌های دو وجهی یک چهاروجهی، از ۳۶۰ درجه بیشتر است.

۲۹. عده‌های حقیقی  $a_1, a_2, \dots, a_{1977}$  چنان‌اند که

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{1977}$$

ثابت کنید:

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_2^2 + \dots + (-1)^{1976} a_{1977}^2 &\geq \\ &\geq (a - a_2 + \dots + (-1)^{1976} a_{1977})^2 \end{aligned}$$

۳۰. همان مساله ۲۳.

## ۱۹۷۸

سال ششم

۱. عده‌های ۱، ۲ و ۳ را در راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع گذاشته‌ایم. آیا می‌توان از این گونه مثلث‌ها، طوری روی هم و به صورت ستونی چید که مجموع عده‌ها در هر یال ستون برابر ۵۵ باشد؟

۲. یک چندضلعی را به یاری قطرهای آن به مثلثهایی تقسیم و، سپس، مثلثها را به رنگ‌های سیاه و سفید طوری درآورده‌ایم که هر دو مثلثی که ضلع مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف باشند. ثابت کنید، تعداد مثلثهای سیاه، از سه برابر تعداد مثلثهای سفید تجاوز نمی‌کند.

۳. آیا  $57599$ ، عددی اول است؟

۴. حداقل چند مهره شاه شطرنج باید انتخاب کرد تا پس از این‌که به دلخواه روی صفحه  $8 \times 8$  قرار دهیم، بهناچار دو شاه پیدا شود که یک خانه را بینند؟

۵. آیا می‌توان عددهای طبیعی از  $1$  تا  $1978$  را طوری در کنار هم، روی یک سطر قرار داد که، هر دو عدد مجاور و، همچنین، هر دو عددی که یک عدد بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند.

۶. زاویه  $B$ ، راس مثلث متساوی الساقین، برابر  $20^\circ$  درجه است. ثابت کنید:

$$3|AC| > |AB| \text{ و } 2|AC| < |AB|$$

### سال هفتم

۷. پنج عدد درست، در مجموع دویده‌دو،  $10$  عدد می‌دهند. آیا ممکن است، این‌ها،  $10$  عدد پشت‌سرهم باشند؟

۸. عددی طبیعی است. آن را بر همه عددهای طبیعی کوچکتر از خودش تقسیم و، سپس، همه باقی‌مانده‌ها را با هم جمع کرده‌ایم. نتیجه جمع، خود عدد  $a$  شده‌است. عدد  $a$  را پیدا کنید.

۹. همان مساله  $4$ .

۱۰. نقطه دلخواهی در درون مریع انتخاب و آن را به همه راس‌های مریع وصل کرده‌ایم. سپس، از هر راس مریع، عمودی بر پاره خط راستی رسم

کرده ایم که از راس مجاور آن، در جهت حرکت عقربه های ساعت، گذشته است. ثابت کنید، این چهار خط راست عمود، از یک نقطه می گذرند.

۱۱. روی محیط دایره و در راس های یک صد ضلعی منتظم، ۱۰۰ عدد سه رقمی گذاشته ایم. ثابت کنید، قطری از دایره وجود دارد که اگر مجموع عدد های واقع در هر طرف آن را بدست آوریم، تفاضل آنها از لحاظ قدر مطلق، از ۹۰۰ تجاوز نمی کند.

۱۲.  $n$  ضلعی کوثری داده شده است ( $n \geq 5$ ). ثابت کنید، می توان سه ضلع  $n$  ضلعی را طوری انتخاب کرد که، با ادامه آنها، مثلثی به دست آید که تمامی  $n$  ضلعی را دربر بگیرد.

### سال هشتم

۱۳. قطرهای چهار ضلعی، آن را به چهار مثلث با محیط های برابر تقسیم کرده است. ثابت کنید، این چهار ضلعی، یک لوزی است.

۱۴. عددی پنج رقمی بر ۴۱ بخش پذیر است. ثابت کنید، هر عدد پنج رقمی دیگری هم که از تبدیل دوری رقم های این عدد به دست آید، بر ۴۱ بخش پذیر است.

۱۵. میدان بزرگ مسابقه های دو، به شکل یک شش ضلعی است که هر یک از زاویه های آن برابر  $120^\circ$  درجه است و طول هر ضلع آن، بر حسب کیلومتر، با عددی درست بیان می شود. هر مرحله از مسابقه، در طول یکی از ضلع ها انجام می شود؛ در ضمن، مرحله های اول، سوم و پنجم به خانم ها و مرحله های دوم، چهارم و ششم به آقایان مربوط است. بعد از پایان مسابقه ها، خانم ها ادعا کردند که، مجموع طول های قطعه های مربوط به آنها، ۳ کیلومتر از مجموع طول های قطعه های مربوط به مردان بیشتر بوده است؛ ولی مردان ادعا داشتند که مجموع طول قطعه راه های مربوط به آنها، از مجموع طول قطعه راه های مربوط به زنان، ۵ کیلومتر بیشتر بوده است. کدام یک از دو

طرف، به روشی دروغ می‌گویند؟

۱۶. آیا می‌توان عده‌های درست را در خانه‌های یک صفحه شطرنجی بی‌پایان طوری قرار داد که مجموع عده‌ها، در هر مستطیل  $1978 \times 1918$ ، برابر ۶ باشد؟

۱۷. شش دایره روی صفحه رسم شده است؛ در ضمن، دایره اول بر دایره ششم و دوم مماس است، دایره دوم بر دایره اول و سوم، دایره سوم بر دایره دوم و چهارم مماس است و غیره. ثابت کنید، دایره تازه‌ای وجود دارد که هر شش دایرة مفروض را قطع می‌کند.

سال نهم

۱۸. همان مسالة ۱۴.

۱۹. چندجمله‌ای با ضریب بزرگترین درجه مثبت، تنها به‌ازای مقدارهای طبیعی و اول متغیر، برابر عده‌های اول می‌شود. ثابت کنید، این چندجمله‌ای به‌ازای همه عده‌های اول، برابر عده‌هایی اول است.

۲۰. برای عده‌های مثبت  $a_1, a_2, a_3$  و  $b_1, b_2, b_3$  می‌دانیم:

$$\sum_{i \leq j} a_i a_j \leq 1, \quad \sum_{i \leq j} b_i b_j \leq 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i \leq j} (a_i - b_i)(a_j - b_j) \leq 1$$

۲۱. همان مسالة ۱۶.

۲۲. مسالة ۱۷ را بینید. آیا همین حکم، برای هشت دایره درست است؟

سال دهم

. ۲۳. همان مساله ۱۹

. ۲۴. از برخورد شش خط راست، حداقل چند مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن است به وجود آید؟

. ۲۵. همان مساله ۱۴

. ۲۶. همان مساله ۲۰

. ۲۷. یک شش‌ضلعی کوثر داده شده‌است و می‌دانیم، هر قطر بزرگ آن، شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. ثابت کنید، این قطرها، در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

### دور نهایی

. ۲۸. خانه‌های یک جدول  $100 \times 100$  را با چند رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم؛ در ضمن، دو خانه هم‌رنگ، راس مشترکی ندارند. ثابت کنید، خانه‌های چهار گوشة جدول، رنگ‌های مختلفی دارند.

. ۲۹.  $A$  و  $B$  دو مجموعه با پایان (محدود) در صفحه‌اند. فرض می‌کنیم:

$$d_H(A, B) = \max(d_1, d_2)$$

که در آن،  $d_1$  برابر است با بزرگترین فاصله از نقطه‌های مجموعه  $A$  تا مجموعه  $B$ ، و  $d_2$ ، بزرگترین فاصله از نقطه‌های مجموعه  $B$  تا مجموعه  $A$  است. برای  $d_H$ ، نابرابری مثلثی را ثابت کنید، یعنی ثابت کنید، برای هر سه مجموعه باپایان  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  در روی صفحه، این نابرابری برقرار است:

$$d_H(X, Y) + d_H(Y, Z) \geq d_H(X, Z)$$

. ۳۰. در راس‌های یک  $100$  ضلعی منتظم، عددهای درستی گذاشته‌ایم. جهت را، حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. هر دقیقه، هریک از عددها،

تغییر می‌کند و به تفاضل این عدد با عدد بعد از خودش تبدیل می‌شود. ثابت کنید، بعد از پنج دقیقه، مجموع عددهای راس‌های ۱۰۰ ضلعی، بر ۵ بخش پذیر است.

۳۱. روی خط راستی، ۱۹۷۸ پاره‌خط راست داده شده است که، هیچ دو پاره‌خط راستی، در یکی از دو انتهای خود مشترک نیستند. ثابت کنید، این پاره‌خط‌های راست را نمی‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر  $n$  از ۱ تا ۱۹۷۸،  $n$  امین پاره‌خط راست، درست شامل  $n$  انتها از دیگر پاره‌خط‌های راست باشد.

۳۲\*. دنباله  $(a_n)$ ، که همه جمله‌های آن برابر ۰ یا ۱ می‌باشد، چنان است که، اگر  $2^n < k$ ، آنوقت  $a_k = a_{k+2^n}$ . ثابت کنید، این دنباله، متناوب نیست.

۳۳.  $M$ ، چندضلعی کوثر و  $H$ ، تجانس با ضریب  $\frac{1}{\varphi}$  – است. ثابت کنید، انتقال موازی  $T$  وجود دارد که چندضلعی  $T(H(M))$  در درون چندضلعی  $M$  قرار می‌گیرد.

۳۴\*. راس‌های یک گراف محدود، با دو رنگ مختلف، رنگ شده‌اند. در هر ثانیه، هر نقطه تغییر رنگ می‌دهد و به رنگی درمی‌آید که در همسایگی آن بیشتر است. ثابت کنید، برای هر نقطه لحظه‌ای فرا می‌رسد که، بعد از آن، یا تغییر رنگ نمی‌دهد و یا در هر ثانیه، تغییر رنگ می‌دهد.

۳۵\*. چندضلعی کوثر  $M$ ، که طول همه ضلع‌ها و قطرهای آن با عددهای درست بیان شده است، مفروض است. مریع  $K$  هم داده شده است. ثابت کنید، می‌توان تعداد محدودی چندضلعی همنهشت  $M$  انتخاب کرد، به نحوی که اجتماع آن‌ها،  $K$  را دربر بگیرد و، در ضمن، هر نقطه از مریع، که روی ضلع یکی از چندضلعی‌ها نیست، به وسیله تعدادی از چندضلعی‌ها (که برای همه این‌گونه نقطه‌ها تعداد ثابتی است) پوشانده شده باشد.

## سال پنجم

۱. روی صفحه کاغذ شطرنجی، مستطیل  $7 \times 13$  را رسم کرده‌ایم. از آن،  $15$  مستطیل  $2 \times 3$  جدا کنید.
۲. امسال (یعنی سال ۱۹۷۹)، سن شخصی برابر است با مجموع رقم‌های سال تولد او. این شخص کی به دنیا آمده است؟
۳. در مستطیل  $7 \times 6$ ،  $25$  خانه را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان، در آن، یک مریع  $2 \times 2$  پیدا کرد که، دست کم سه خانه آن رنگی باشد.
۴. در کیسه‌ای  $10$  کارت که روی آنها عددهای  $1, 2, 3, \dots, 5$  داریم:

  - ۹ (و روی هر کارت یک عدد) نوشته شده‌است، در اختیار داریم:  
 الف) سه کارت، به تصادف، بیرون می‌آوریم. ثابت کنید، با این سه کارت، می‌توان عددی (یک رقمی، دورقمی یا سه رقمی) درست کرد که بر  $3$  بخش‌پذیر باشد.
  - ب) چند کارت باید از کیسه بیرون آورد، تا، به کمک آنها، بتوان عددی بخش‌پذیر بر  $9$  درست کرد؟

۵. در کلاسی، هر پسر با سه دختر و هر دختر با دو پسر دوست است. در کلاس  $19$  نیمکت و  $31$  پیش‌آهنگ وجود دارد. این کلاس، چند دانش‌آموز دارد؟

## سال ششم

۶.  $a$ ،  $b$  و  $c$  عدهایی اول‌اند؛ در ضمن  $a+b$  و  $ab$  بر  $c$  بخش‌پذیرند.  
 ثابت کنید  $b^3 - a^3$  بر  $c$  بخش‌پذیر است.
۷. یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر  $30^\circ$  درجه است. از نقطه وسط وتر، عمودی بر وتر اخراج کرده‌ایم. ثابت کنید، طول پاره‌خط راستی از

این عمود که در درون مثلث قرار دارد، یک سوم طول ضلع بزرگتر مجاور به زاویه قائم است.

۸. چگونه می‌توان با دو ساعت شنی که، به ترتیب، می‌توانند ۵ دقیقه و ۷ دقیقه را اندازه بگیرند، ۹ دقیقه را اندازه گرفت؟

۹. در خانه‌های یک جدول مستطیلی، عددهای طبیعی را نوشته‌ایم. اجازه داریم همه عددهای یک سطر را دو برابر یا از همه عددهای یک ستون، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، می‌توان به آنجا رسید که همه عددهای جدول، برابر صفر باشند.

۱۰. حداقل چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰ می‌توان انتخاب کرد که، هر دو تا از آنها، نسبت به هم اول باشند؟

۱۱. عددی شامل سه رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر است. مجموع رقم‌های مکعب این عدد را پیدا کنید.

### سال هفتم

۱۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} 1 + a + b = ab \\ 2 + a + c = ac \\ 5 + b + c = bc \end{cases}$$

۱۳.  $AA_1$ ،  $BB_1$  و  $CC_1$  ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث  $ABC$  هستند. ثابت کنید، طول محیط مثلث  $ABC$ ، برابر است با طول خط شکسته  $.A.B_1C.A_1B.C_1A.$

۱۴. مستطیل  $1979 \times 1000$ ، به خانه‌هایی تقسیم شده‌است. اگر قطر آن را رسم کنیم، تمام مستطیل، به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

۱۵. می‌دانیم  $a^6$  عددی است هشت‌رقمی که از رقم‌های  $5, 2, 2, 1, 0$ ،  $4, 3, 2$  تشکیل شده‌است.  $a$  را پیدا کنید.

۱۶. مثلث  $ABC$  در دایره‌ای محاط است.  $A_1$  وسط کمان  $BC$ ،  $B_1$  وسط کمان  $AC$  و  $C_1$  وسط کمان  $AB$  است. ضلع‌های مثلث  $ABC$  روی پاره خط‌های راست  $A_1C_1$  و  $B_1C_1$ ،  $A_1B_1$  و  $B_1C_1$ ، پاره خط‌های راست  $M_1M_2$  و  $M_2M_1$  کوچکتری را جدا می‌کنند که وسط آنها را، به ترتیب،  $M_1$  و  $M_2$  نامیم. ثابت کنید، نقطه‌های  $B_1$  و  $C_1$  و نقطه‌های  $M_1$  و  $M_2$  روی محیط یک دایره‌اند.

۱۷. ثابت کنید، بینهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توان آنها را به صورت مجموع یک مجنور کامل و یک عدد اول نوشت.

### سال هشتم

۱۸. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $k > 1$ ، عددی با  $1 + k$  واحد و  $k$  رقم برابر صفر به صورت  $1010\ldots 01010$ ، یک عدد مرکب است.

۱۹.  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، طول ضلع‌های یک مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| < 1$$

۲۰. زاویه  $B$  از مثلث  $ABC$  برابر  $60^\circ$  درجه و  $AK$  و  $CE$  نیمسازهای مثلث‌اند. پاره خط‌های راست  $AK$  و  $CE$  یکدیگر را در  $O$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید:  $|OK| = |OE|$ .

۲۱. برداری را در نظر می‌گیریم که مبدأ آنها، مرکز یک  $2n$  ضلعی منتظم و انتهای آنها، راس‌های این  $2n$  ضلعی است. چند بردار، از این  $2n$  بردار، باید انتخاب کرد که، مجموع آنها، دارای حداقل طول ممکن باشد؟

۲۲.  $n$  عدد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول،  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داده شده‌است؛ در ضمن  $(1 - a_i)^2 < 2n$ . ثابت کنید، بین آنها، دست‌کم یک عدد اول وجود دارد.

۲۳. در هریک از خانه‌های جدول  $m \times n$ ، عدد ۱ گذاشته شده است. می‌توانیم هر مربع  $2 \times 2$  را درنظر بگیریم و علامت همه عددهای آن را عوض کنیم. آیا می‌توانیم به کمک این عمل‌ها، به جدولی بررسیم که علامت‌های عددهای آن، به صورت جدول صفحه شطرنج باشند (علامت‌های مثبت، در خانه‌های سیاه و علامت‌های منفی در خانه‌های سفید یا برعکس)? پاسخ باید بستگی به مقدارهای  $m$  و  $n$  داشته باشد.

### سال نهم

۲۴. ثابت کنید، اگر عدد  $k$  رقمی ( $k \geq 2$ ) اول باشد، آنوقت، یا همه عددهایی که از تبدیل دوری عدد به دست می‌آیند، مختلف‌اند و یا عدد  $k$  رقمی تنها با رقم‌های واحد نوشته شده است.

۲۵. مثلث‌هایی را درنظر بگیریم که دو به دو نابرابر و راس‌های آن‌ها در نقطه‌هایی از محیط دایره باشند که آن را به  $n$  کمان برابر تقسیم کرده‌اند ( $2 < n$ ). به ازای چه مقداری از  $n$ ، درست نیمی از این مثلث‌ها، متساوی الساقین‌اند؟

۲۶. عددهای طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 12$ )، همگی از ۱ بزرگتر و از  $9n^2$  کوچکتر و، در ضمن، دو به دو نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، در بین آن‌ها، عدد اول وجود دارد.

۲۷. در مرکز کف جعبه‌ای که به شکل مربع  $5 \times 5$  است، یک سوراخ مرباعی  $1 \times 1$  وجود دارد. کدام شکل کوثر را می‌توان انتخاب کرد که کمترین مساحت را داشته باشد و به هر طریقی که آن را در کف جعبه قرار دهیم، سوراخ را بپوشاند؟

۲۸. نقطه  $B$  بین دو نقطه  $A$  و  $C$  است. در نیم‌صفحه‌های به مرز ( $AC$ )، نقطه‌های  $K$  و  $H$  را طوری درنظر گرفته‌ایم که

$$|AK| = |KB|, |BH| = |HC|, \widehat{AKB} = \alpha, \widehat{BHC} = \pi - \alpha$$

زاویه‌های مثلث  $KHM$  را پیدا کنید، به شرطی که  $M$  وسط پاره خط راست  $AC$  باشد.

۲۹. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x + \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

سال دهم

۳۰. همان مساله ۲۴.

۳۱. همان مساله ۲۷.

۳۲. به ازای کدام عدد طبیعی  $y$ ، عدد  $3y^2 + y^2$ ، مجدور کامل است؟

۳۳. در دایره‌ای،  $n$  قطاع را طوری رنگ کرده‌ایم که، زاویه هر قطاع از  $\frac{n}{n^2 - n + 1}$  کمتر باشد. ثابت کنید، دایره را می‌توان به نحوی چرخاند

که، همه قطاع‌های رنگی، به بخش رنگ نشده دایره منتقل شوند.

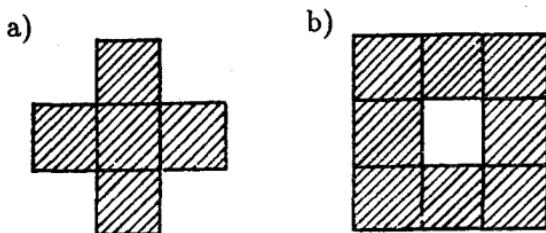
۳۴. یک چندوجهی کوثر داده شده است که، همه وجه‌های آن، به جز یکی، چندضلعی‌هایی را تشکیل می‌دهند که تقارن مرکزی دارند. ثابت کنید، این وجه اخیر هم، دارای تقارن مرکزی است.

۳۵\*. دو قطر  $AB$  و  $CD$  در دایره‌ای رسم شده‌اند. ثابت کنید، برای هر دو نقطه دلخواه  $E$  و  $F$  واقع بر محیط دایره، نقطه برخورد خط‌های راست  $AE$  و  $DF$ ، مرکز دایره و نقطه برخورد خط‌های راست  $CE$  و  $BF$ ، در یک امتدادند.

۳۶. در مثلث  $ABC$ ، طول ضلع‌های مثلث، سه عدد درست متواالی‌اند؛ در ضمن یکی از نیمسازهای مثلث، بر یکی از میانه‌های آن عمود است. طول ضلع‌های مثلث را پیدا کنید. (مساله ۲.۷۰ را هم ببینید).

## سال پنجم

۱. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۳۰ را در یک جدول  $6 \times 5$  طوری نوشت که، مجموع عددهای واقع در ستون‌ها، با هم برابر باشند.
۲. در اردوی پشاونگی نوجوانانی به سن ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ سال جمع شده‌اند. آن‌ها ۲۳ نفرند و روی هم ۲۵۳ سال دارند. در این اردو، چند نوجوان ۱۲ ساله وجود دارد، بهشرطی که بدانیم تعداد آن‌ها یک برابرویم تعداد ۱۳ ساله‌هاست؟
۳. ۲۰۰ نقطه روی پاره خط  $AB$ ، بهصورتی متقارن نسبت به نقطه وسط پاره خط قرار دارند. ۱۰۰۰ تا از این نقطه‌ها را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از نقطه‌های قرمز تا نقطه  $A$ ، برابر است با مجموع فاصله‌های از نقطه‌های آبی تا نقطه  $B$ .
۴. بین ۹ سکه، دو سکه تقلیبی وجود دارد. با چهار بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای، و بدون استفاده از وزنه، سکه‌های تقلیبی را پیدا کنید، بهشرطی که بدانیم، دو سکه تقلیبی هموزن‌اند و وزن هرکدام، اندکی بیشتر از وزن یک سکه واقعی است.
۵. مریع را به پنج ضلعی‌های کوثر تقسیم کنید.
۶. در راس‌ها و محل برخورد قطرهای یک چندضلعی، ایستگاه‌های تراموا قرار دارد. در ضمن می‌دانیم، هیچ سه قطری از چندضلعی، در یک نقطه به هم نمی‌رسند. روی برخی از قطرهای چندضلعی، خط حرکت تراموا وجود دارد، به نحوی که از کنار هر ایستگاه، دست‌کم یک خط می‌گذرد. ثابت کنید، از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگر می‌توان با حداقل دو بار عوض کردن تراموا رسید.



شکل ۷

### سال ششم

.۱. همان مساله ۱.

.۳. همان مساله ۳.

.۹. آیا می‌توان عده‌های طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۰ را طوری در یک ردیف نوشت که، مجموع هر دو عددی که یک عدد دیگر در بین آن‌هاست، بر ۳ بخش پذیر باشد؟

.۱۰. همان مساله ۴.

.۱۱. تعداد ۲۷ شوکولات، به صورتی در ۲۷ قوطی گذاشته شده است. دخترچه و پسرچه‌ای به نوبت، و هر بار یک شوکولات، بر می‌دارند. نخستین شوکولات را دخترچه انتخاب می‌کند. ثابت کنید، پسرچه می‌تواند طوری شوکولات انتخاب کند که دو شوکولات آخر، متعلق به یک قوطی باشند.

.۱۲. صفحه کاغذ شطرنجی را طوری با پنج رنگ، رنگی کنید که هر شکل نوع اول (شکل ۷-a) هر پنج رنگ را داشته باشد، ولی در هر شکل نوع دوم (شکل ۷-b)، هر پنج رنگ وجود نداشته باشد.

### سال هفتم

.۱۳. همه گروه عده‌های درست  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنید که، برای آن‌ها،

$$a^2 - b^2 - c^2 = 1, b + c - a = 3$$

. ۱۴. همان مساله ۹.

۱۵. یک  $n$ -ضلعی بر دایره‌ای محیط شده است. از نقطه دلخواهی واقع در درون دایره، به همه راس‌ها و نقطه‌های تماس وصل کرده‌ایم. مثلث‌های حاصل را، پشت‌سرهم، از ۱ تا  $2n$  شماره‌گذاری کرده‌ایم. ثابت کنید، حاصل ضرب مساحت‌های مثلث‌های ردیف زوج، برابر است با حاصل ضرب مساحت‌های مثلث‌های ردیف فرد.

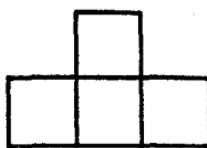
۱۶. مربع  $ABCD$  با بعدهای  $9 \times 9$  را به مربع‌های  $1 \times 1$  تقسیم کرده‌ایم. راس‌های این مربع‌ها را به چهار رنگ درآورده‌ایم: هر ۲۵ راس را به یک رنگ. همه بردارهای به صورت  $\vec{MA}$  را، که نقطه‌ای با رنگ اول است؛ همه بردارهای به صورت  $\vec{MB}$  را که نقطه‌ای از رنگ دوم است؛ همه بردارهای به صورت  $\vec{MC}$  را که نقطه‌ای از رنگ سوم است و، سرانجام، همه بردارهای به صورت  $\vec{MD}$  را که نقطه‌ای از رنگ چهارم است، در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، مجموع همه این بردارها، برابر بردار صفر است.

۱۷. ثابت کنید، عدد زیر، عددی مرکب است:

$$53 \times 83 \times 109 + 40 \times 66 \times 96$$

. ۱۸. همان مساله ۱۱.

. ۱۹. همان مساله ۱۲.



شکل ۱

۲۰. مجموع چهار عدد مثبت  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  برابر واحد است. ثابت

کنید:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 1$$

۲۱. نقطه  $O$ ، مرکز دایرة محاطی مثلث  $ABC$  است. نقطه‌های

$M$  و  $K$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $AC$  و  $BC$ ، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BK| \cdot |AB| = |BC|^2, |AM| \cdot |AB| = |AO|^2$$

ثابت کنید، نقطه‌های  $O$ ،  $M$  و  $K$ ، روی یک خط راست‌اند.

۲۲. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول‌اند. در هر دور بازی، کسی

که بازی را بیازد، کنار می‌رود و کسی که در بازی شرکت نداشته است، جای او را می‌گیرد. در پایان بازی‌ها، معلوم شد، نفر اول ۱۵ دور و نفر دوم ۲۱

دور بازی کرده‌است. نفر سوم چند دور بازی کرده‌است؟

۲۳. آیا می‌توان عده‌های از ۱ تا ۶۴ را در خانه‌های صفحه شطرنج

طوری قرار داد که، مجموع عده‌ها در هر چهار خانه‌ای که به صورت شکل ۸ است. بر ۵ بخش پذیر باشد؟

۲۴. چهار ضلعی کوثر، به وسیله قطرهای خود، به چهار مثلث تقسیم شده‌است. مجموع مجددرهای مساحت‌های دو مثلث رویه‌رو، برابر است

با مجموع مجددرهای مساحت‌های دو مثلث رویه‌روی دیگر. ثابت کنید، دست کم یکی از قطرهای، در نقطه برخورد خود با قطر دیگر، نصف می‌شود.

۲۵. کمترین مقدار عدد طبیعی  $n$  چقدر است، به شرطی که در نماد  $\frac{m}{n}$ ، بعد از معیز، با گروه رقم‌های ... ۵۰۱ ... بخورد کنیم؟
۲۶. دو سکه از ۹ سکه، تقلیبی است. سکه واقعی ۱۰ گرم و سکه تقلیبی ۱۱ گرم وزن دارد. چگونه می‌توان به کمک ترازوی یک کفه‌ای با پنج بار وزن کردن، سکه‌های تقلیبی را کشف کرد؟

سال نهم

۲۷. در مثلث  $ABC$ ، زاویه  $A$  دو برابر زاویه  $B$  است. ثابت کنید:

$$|BC|^2 = (|AC| + |AB|) \cdot |AC|$$

۲۸. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول‌اند. بعد از هر دور بازی، آنکه باخته، جای خود را به کسی واگذار می‌کند که در بازی شرکت نداشته‌است. در پایان بازی معلوم شد، اولی ۱۰ دور، دومی ۱۵ و سومی ۱۷ دور بازی کرده‌است. در دور دوم بازی، چه کسی باخته است؟

۲۹. دو عدد طبیعی مختلف پیدا کنید که، میانگین عددی و میانگین هندسی آنها، عده‌هایی دو رقمی‌اند و یکی از دیگری با جابه‌جا شدن رقم‌ها به دست می‌آید.

۳۰. ثابت کنید، اگر، برای هر مقدار  $x$  واقع در بازه  $[1, 5]$  داشته باشیم:

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1$$

$$\text{آنوقت } 17 \leq |a| + |b| + |c|.$$

۳۱. پاره خط راستی را که وسط دو ضلع رویه‌رو در چهارضلعی کوثر را به هم وصل کند، خط میانه چهارضلعی می‌نامیم. ثابت کنید، اگر مجموع طول‌های دو خط میانه چهارضلعی، برابر با نصف محیط چهارضلعی باشد، آنوقت این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

### . ۳۲. همان مساله ۲۵

۳۳. در خانه‌های صفحه شطرنج، عددهای حقیقی را نوشته‌ایم. می‌توانیم به جای هر دو عدد دلخواه، در هر دو خانه، میانگین حسابی آنها را بنویسیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان به جایی رسید که همه عددهای واقع بر صفحه شطرنج، با هم برابر باشند.

### سال دهم

۳۴. در بازی تنیس روی میز، سه نفر شرکت دارند. بعد از هر دور، آنکه بیازد، جای خود را به کسی می‌دهد که در بازی شرکت نداشته است. در پایان بازی‌ها، معلوم شد، اولی ۱۰ دور بازی را بردۀ است، دومی ۱۲ دور و سومی ۱۴ دور، هر کدام از این سه نفر، چند دور بازی کرده‌است؟

۳۵. در دنباله زیر، با چند عدد مختلف برخورد می‌کنیم:

$$\left[ \frac{1}{1980} \right], \left[ \frac{2}{1980} \right], \dots, \left[ \frac{1980^2}{1980} \right]$$

۳۶.  $f(x) = ax + b$  مفروض است. آیا عددهای  $a$  و  $b$  وجود دارند، به نحوی که به ازای هر  $x$  از بازه  $[0, 2\pi]$  داشته باشیم:

$$f'(x) + f(x) \cos x < \frac{1}{4} \sin x$$

### . ۳۷. همان مساله ۳۱

۳۸. در جدول مربعی  $n \times n$ ، عددهای حقیقی را نوشته‌ایم. می‌توانیم به جای هر دو عدد دلخواه، میانگین حسابی آنها را در هر دو خانه بنویسیم. همه عددهای طبیعی  $n$  را پیدا کنید که، برای هرگونه عددهای حقیقی نخستین، بتوان با تکرار عمل بالا، به جدولی رسید که همه عددهای واقع در خانه‌های آن، با هم برابر باشند.

\*۳۹. ثابت کنید، دو نقطه دلخواه از سطح یک چهاروجهی منتظم با  
یال به طول واحد را می‌توان با خط شکسته‌ای که از طریق سطح چهاروجهی  
می‌گذرد، طوری به هم وصل کرد که طول آن از  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  تجاوز نکند.

\*۴۰. دو سوسک، روی محیط چندضلعی کوثر واقع‌اند. آن‌ها در یک  
لحظه، در روی محیط چندضلعی، با سرعت‌های یکسان آغاز به حرکت  
می‌کنند. موقعیت نخستین سوسک‌ها چگونه باشد که، کمترین فاصله ممکن  
بین آن‌ها، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

دور نهایی (برای سال‌های هشتم و نهم)

۴۱. در المپیاد سراسری اتحاد شوروی، دانش‌آموزان سال‌های هشتم و  
نهم و دهم شرکت کردند. در گروه دانش‌آموزان لینین‌گرادی،  $k$  نفر از کسانی  
که در المپیاد شهری موفق شده بودند و هم آن‌ها که در المپیاد سراسری سال  
پیش پیروزی به دست آورده بودند، شرکت داشتند. در این گروه، حداقل چند  
نفر شرکت دارند؟

۴۲. ثابت کنید، برای هر  $x$ ،  $y$  و  $z$  از بازه  $[1, 5]$ ، همیشه داریم:

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \leq 3$$

۴۳. از نقطه‌ای واقع در درون مثلث، عمودهایی بر ضلع‌های مثلث فرود  
آورده‌ایم. نقطه درونی را در کجا انتخاب کنیم، تا حاصل ضرب طول‌های این  
سه عمود، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۴۴. کارت‌هایی را بین عده‌ای از مردم تقسیم کرده‌اند تا در آن‌ها،  
نویسنده، نقاش و آهنگ‌ساز مورد علاقه خود را نام ببرند. معلوم شد، هریک  
از هنرمندان فعال در این رشته‌ها، درست مورد علاقه  $k$  نفر است. ثابت  
کنید، کارت‌های جمع‌آوری شده را می‌توان به  $2 - 3k$  گروه، طوری تقسیم  
کرد که، در هر گروه، هر دو کارت، معرف ذوق‌های مختلف باشند.

۴۵. ثابت کنید، طول نیمسازی از مثلث که بر ضلع بزرگتر فرود می‌آید، از طول ارتفاعی که بر ضلع کوچکتر مثلث فرود آمده است، تجاوز نمی‌کند.

۴۶. راس‌های یک چندضلعی کوژ را، که تعداد ضلع‌های آن عددی فرد است، به سه رنگ مختلف طوری درآورده‌ایم که، هر دو راس مجاور، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. ثابت کنید، چندضلعی را می‌توان بهوسیله قطرهای غیرمتقاطع خود، طوری به صورت مثلث‌ها بربرد که، در هر مثلث، راس‌ها به سه رنگ مختلف باشند.

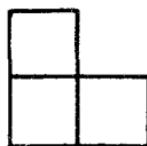
۴۷. حداقل چند مکعب مستطیل  $4 \times 1 \times 1$  را می‌توان در مکعب  $6 \times 6 \times 6$  جا داد، به نحوی که وجههای آن‌ها با وجههای متناظر مکعب، موازی باشد؟

۴۸\*.  $O$ ، مرکز تقارن چندضلعی کوژ  $F$  است.  $A_1$  و  $A_2$  و همچنین  $B_1$  و  $B_2$  را نقطه‌هایی از چندضلعی می‌گیریم که، نسبت به  $O$ ، قرینه هم باشند. می‌دانیم اجتماع چندضلعی‌هایی که از  $F$  با انتقال موازی بهاندازه بردارهای  $\vec{OA}_1$  و  $\vec{OA}_2$  به دست می‌آیند، نقطه‌های  $B_1$  و  $B_2$  را نمی‌پوشاند. ثابت کنید، اجتماع چندضلعی‌هایی که از انتقال موازی  $F$  بهاندازه بردارهای  $\vec{OB}_1$ ،  $\vec{OB}_2$  و  $\vec{OA}_1$ ،  $\vec{OA}_2$  به دست می‌آیند، تمامی چندضلعی  $F$  را می‌پوشاند.

## ۱۹۸۱

### سال پنجم

۱. کولیا و واسیا، دانش‌آموزان سال پنجم، نمره‌های خود را با هم مقایسه کردند؛ معلوم شد، تعداد نمره‌های ۵ کولیا، برابر است با تعداد نمره‌های ۴ واسیا؛ تعداد نمره‌های ۴ کولیا با تعداد نمره‌های ۳ واسیا؛ تعداد نمره‌های ۳ کولیا با تعداد نمره‌های ۲ واسیا؛ و سرانجام، تعداد نمره‌های ۲ کولیا با تعداد



شکل ۹

نمره‌های ۵ و اسیا یکی است. به جز این، معلوم شد، مجموع نمره‌های هریک برابر ۵۴ و معدل دو نفر با هم برابر است. ثابت کنید، آن‌ها در محاسبه اشتباه کرده‌اند.

۲. آیا می‌توان با رقم‌های ۱، ۲، ...، ۹، یک عدد نمرقی طوری ساخت که تعداد رقم‌های بین ۱ و ۲، تعداد رقم‌های بین ۲ و ۳، ...، تعداد رقم‌های بین ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۳.  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، سه نقطه‌اند که روی یک خط راست نیستند. در درون مثلث  $ABC$ ، ۹ نقطه دیگر انتخاب کرده‌ایم. برخی از این ۱۲ نقطه را بهوسیله پاره‌خط‌های راست طوری به هم وصل کنید که، این پاره‌خط‌های راست یکدیگر را قطع نکنند، مثلث  $ABC$  به مثلث‌های کوچکتری تقسیم شود و هریک از ۱۲ نقطه، درست به پنج نقطه دیگر وصل شده باشد.

۴. روی صفحه کاغذ شطرنجی، مربع  $12 \times 12$  را رسم کرده‌ایم. دست کم چند خانه آن را باید رنگ کرد تا نتوان در بخش رنگ نشده، سه خانه را شیوه شکل ۹، جدا کرد؟

۵. آیا عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به نحوی که عدد  $n^2$ ، از سمت چپ با رقم‌های ۹۸۷۶۵۴۳۲۱ آغاز شود؟

۶. از سکه‌های ۱ کوپکی، ۲ کوپکی، ۵ کوپکی و ۱۰ کوپکی، ۴ روبل داریم. ثابت کنید، با این سکه‌ها می‌توان ۳ روبل جدا کرد. [هر روبل، ۱۰۰ کوپک است].

## سال ششم

۷. ثابت کنید، بهازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ ، عددی درست است.

۸. نقطه  $C$  در درون زاویه قائم  $XOY$  واقع است. نقطه  $A$  را روی نیم خط راست  $OX$  و نقطه  $B$  را روی نیم خط راست  $OY$  انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، محیط مثلث  $ABC$  از دو برابر طول پاره‌خط راست  $OC$  بزرگتر است.

۹. همان مسأله ۴.

۱۰. همان مسأله ۶.

۱۱. عدد طبیعی  $n$  چنان است که  $1 + n^2$ ، عددی ده رقمی شده است. ثابت کنید، در عدد  $1 + n^2$ ، به دو رقم برابر، برخورد می‌کنیم.

۱۲. عددهای درست را در راس‌های مکعب نوشته‌ایم. می‌توانیم، هر بار، یک واحد به هر دو عددی که در دو سر یک یا ل قرار دارند، اضافه کنیم. آیا می‌توان با تکرار این عمل، به جایی رسید که همه عددهای واقع در راس‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشند، بهشرطی که در آغاز، در یکی از راس‌ها، عدد ۱ و در بقیه راس‌ها، عدد ۰ را گذاشته باشیم؟

## سال هفتم

۱۳. آیا عددی طبیعی وجود دارد که، با حذف رقم اول سمت چپ آن، خارج قسمت حاصل از تقسیم عدد بر ۱۹۸۱ به دست آید؟

۱۴. همان مسأله ۸.

۱۵. همان مسأله ۴.

۱۶. عدد طبیعی دلخواهی است، بزرگتر از  $3 \cdot S$ ، مجموع همه عددهای طبیعی  $x$  است، بهشرطی که  $x$  از  $m$  تجاوز نکند و  $1 + x^2 - x + m$  برش‌پذیر باشد. ثابت کنید،  $S$ ، بر  $1 + m$  بخش‌پذیر است (در

حالی که، چنین عدهای  $x$  وجود نداشته باشد، آنها را بر صفر می‌گیریم).

۱۷. از نقطه  $M$  واقع در درون مثلث  $ABC$ ، پاره خط‌های راست  $R_1R_2$  و  $Q_1Q_2$ ،  $P_1P_2$  را، به ترتیب موازی با ضلع‌های  $AC$ ،  $BC$  و  $AB$  رسم کرده‌ایم، به نحوی که دو انتهای هر پاره خط راست روی دو ضلع مثلث باشد. ثابت کنید:

$$\frac{|P_1P_2|}{|BC|} + \frac{|Q_1Q_2|}{|AC|} + \frac{|R_1R_2|}{|AB|} = 2$$

. ۱۸. همان مساله ۱۲.

### سال هشتم

۱۹. آیا ۱۹۸۱ عدد درست متوالی وجود دارد که مجموع آنها، مکعب یک عدد طبیعی باشد؟

۲۰. مربع واحد را به مستطیل‌هایی با ضلع‌های موازی ضلع‌های مریع تقسیم کرده‌ایم. در هر مستطیل، نسبت طول ضلع کوچکتر به طول ضلع بزرگتر را بدست آورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع این نسبت‌ها، کمتر از واحد نیست.

. ۲۱. ثابت کنید، اگر  $0 < 4xz < xy + xz$ ، آن‌گاه  $y^2 > 4xz$

۲۲. روی ضلع  $AB$  از مثلث  $ABC$ ، نقطه‌های  $C_1$  و  $C_2$ ، روی ضلع  $BC$ ، نقطه‌های  $A_1$  و  $A_2$ ؛ روی ضلع  $CA$ ، نقطه‌های  $B_1$  و  $B_2$  را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AC_1| = |C_1C_2| = |C_2B| = \frac{1}{3}|AB|,$$

$$|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C| = \frac{1}{3}|BC|,$$

$$|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A| = \frac{1}{3}|CA|$$

ثابت کنید، از برخورد مثلث‌های  $A_1B_1C_1$  و  $A_2B_2C_2$ ، شش مثلث برابر به دست می‌آید.

۲۳. راس‌های مثلث  $ABC$ ، در نقطه‌های گرهی یک صفحه کاغذ شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع واحد، قرار دارد. ثابت کنید، اگر  $|AB| > |AC| - \frac{1}{p}$ ، آنوقت  $|AB| > |AC|$  که، در آن،  $p$ ، محیط مثلث  $ABC$  است.

۲۴\*. مهره‌ای در روی صفحه شطرنج، می‌تواند از طریق خانه‌های سیاه حرکت کند؛ در ضمن، با یک حرکت، می‌تواند به هریک از خانه‌های قطری مجاور برود. دست کم چند حرکت لازم است تا همه خانه‌های سیاه را پیماید؟

### سال نهم

۲۵. مجموع فاصله‌های هر نقطه درونی چهارضلعی کوثر تا خط‌های راست شامل ضلع‌ها، مقداری ثابت است. ثابت کنید، این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۲۶. همان مسالة ۲۵

۲۷. همان مسالة ۲۴ برای جدول  $9 \times 9$  (خانه چپ و پایین جدول، سیاه است).

۲۸. دنباله  $\dots < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < 1$ ، از عدهای طبیعی، چنان است که، برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$a_{n+a_n} = 2a_n$$

ثابت کنید، عدد طبیعی  $c$  وجود دارد، به نحوی که، برای هر عدد طبیعی  $n$ ، داشته باشیم:  $a_n = n + c$ .

۲۹. عدهای درست  $a, b, c, d$  و  $A$  چنان‌اند که

$$a^r + A = b^r, c^r + A = d^r$$

ثابت کنید، عدد زیر، مجنور یک عدد طبیعی است.

$$2(a+b)(c+d)(ac+bd - A)$$

. ۲۳. همان مساله .

سال دهم

. ۳۱. در هریک از دو شانزده ضلعی منتظم مساوی، هفت راس را نشان گذاشته ایم. ثابت کنید، این دو چندضلعی را می توان طوری روی هم قرار داد که، دست کم چهار راس نشان دار اولی بر چهار راس نشان دار دومی منطبق شود.

. ۲۴. همان مساله .

. ۳۳. همان مساله .

. ۳۴. روی یال های جانبی  $AA_1, BB_1, CC_1$ ، از منشور مثلث القاعدة  $ABC$ ، نقطه های  $A_0, B_0$  و  $C_0$  را طوری نشان گذاشته ایم که

$$|AA_0| = a, |BB_0| = b, |CC_0| = c$$

$M$  را نقطه برخورد صفحه های  $C \cdot AB$  و  $B \cdot AC$ ،  $A \cdot BC$  و  $C \cdot AB$  می گیریم و، از آن، پاره خط راست  $MP$  را موازی یال های جانبی منشور رسم می کنیم ( $P$ ، روی صفحه قاعده  $ABC$  است). ثابت کنید، اگر  $|MP| = d$  آن وقت

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

. ۳۵. همان مساله . ۲۴، برای صفحه شطرنجی  $10 \times 10$ .

. ۳۶\*. آیا توانی طبیعی از عدد ۵ وجود دارد که، در صد رقم سمت راست آن، دست کم ۳۰ رقم پشت سرهم، برابر صفر باشد؟

دور نهایی

۴۷. عدد طبیعی  $p$  را طوری پیدا کنید که

$$2^{\frac{p}{2}} + 9$$

عددی اول باشد (در عدد بالا،  $p$  بار از عدد ۲ استفاده شده است).

۴۸. نقطه‌های  $C_1$ ،  $C_2$  و  $A_1$ ،  $B_1$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  از مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$ ، که ضلعی به طول ۲ دارد، انتخاب کرده‌ایم. بیشترین مقدار مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های  $A_1B_1C_1$ ،  $AB_1C_1$  و  $A_1BC_1$  چقدر می‌تواند باشد؟

۴۹. توده‌ای شامل  $m$  مهره وجود دارد. دو نفر با هم بازی می‌کنند و، به نوبت، از این توده مهره بر می‌دارند. در ضمن، در  $k$  مامین حرکت، می‌توان، به دلخواه، از ۱ تا  $k$  مهره برداشت. کسی بازی را می‌برد که آخرین مهره را دارد.  $m$  چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می‌کند بتواند برنامه‌ای برای بُرد حتمی خودش برویزد؟

۵۰. ثابت کنید، نمی‌توان مقدارهای گویایی برای عده‌های  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$(a + b\sqrt{3})^4 + (c + d\sqrt{3})^4 = 1 + \sqrt{3}$$

۵۱. ۱۶ خانه از مربع سفید  $8 \times 8$  را به رنگ سیاه درآورده‌ایم؛ در ضمن، در هر سطر و در هر ستون، درست ۲ خانه سیاه شده است. ثابت کنید، با دوباره رنگ کردن سطرها و ستونها، نمی‌توان تعداد خانه‌های سیاه را کمتر کرد.

۵۲\*. آیا ۶ عدد شش‌رقمی با رقم‌های از ۱ تا ۶، بدون تکرار رقم‌ها، وجود دارد، به نحوی که بتوان، هر عدد سه‌رقمی دلخواه را که با رقم‌های از

۱ تا ۶، بدون تکرار رقم‌ها، از یکی از این ۶ عدد، با خط زدن ۳ رقم آن به دست آورده؟

۴۳.  $p$  عدد را در یک ردیف نوشت‌ایم؛ هریک از این عددها برابر است با  $+1$  یا  $-1$ . در هر حرکت، می‌توان علامت‌های چند عدد ردیف هم را عوض کرد. دست کم چند بار باید این حرکت را انجام داد تا، برای هر ردیفی که در آغاز انتخاب کرده‌ایم، به دنباله‌ای برسیم که تنها شامل واحداً باشد؟  
۴۴\*. آیا می‌توان پنج نقطه با فاصله‌های دویمه‌دو مختلف، طوری در فضای پیدا کرد که محیط همه پنج ضلعی‌های فضایی با راس‌هایی در این پنج نقطه، با هم برابر باشند؟

۴۵. عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  در بازه  $[1, 0]$  واقع‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$$

۴۶\*.  $a_1, a_2, \dots, a_7$ ،  $b_1, b_2, \dots, b_7$ ،  $c_1, c_2, \dots, c_7$  را، سه انتخاب از عددهای درست فرض می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان چند گروه سه‌تایی  $(a_i, b_i, c_i)$ ، با اندیس‌های برابر، از این سه انتخاب، حذف کرد (و البته، نه همه آن‌ها را)، به نحوی که، مجموع عددهای باقی‌مانده در هریک از سه انتخاب اصلی، بخش‌پذیر بر ۳ باشد.

۱۹۸۲

سال پنجم

۱. شماره شش‌رقمی تلفن شخصی داده شده‌است. چند شماره هفت‌رقمی تلفن وجود دارد که، با حذف یکی از رقم‌های آن، شماره شش‌رقمی تلفن این شخص به دست می‌آید؟

۲. حشره‌ای، ۱ سانتی‌متر می‌جهد؛ سپس ۳ سانتی‌متر در همان جهت و یا در جهت عکس؛ بعد، در همان جهت یا جهت عکس، ۵ سانتی‌متر می‌جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از ۲۵ پرش، به جای اول خود برگردد؟ ۳. برخی از خانه‌های یک جدول  $5 \times 5$  را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان چهار خانه از جدول را با یک رنگ پیدا کرد که در محل برخورد دو سطر و دو ستون باشند.

۴. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۷۷ باشد، حاصل ضرب آن‌ها برابر ۷۷ باشد.

۵. عده‌های از ۱ تا ۱۲ را روی یال‌های مکعب طوری قرار دهید که، مجموع عده‌های واقع بر هر وجه، برابر با مجموع عده‌های واقع بر هر وجه دیگر باشد.

۶. دو نفر با هم بازی می‌کنند. چند مجموعه مهره وجود دارد. هر نفر باید، در نوبت خود، مجموعه‌ای دلخواه را که بیش از دو مهره دارد، به دو بخش کوچکتر تقسیم کند. بازی تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که، هیچ مجموعه‌ای، بیش از یک مهره نداشته باشد. کسی برنده است که آخرین حرکت را انجام داده باشد. ثابت کنید، اگر در آغاز، یک مجموعه شامل ۱۰۰ مهره وجود داشته باشد، کسی که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود.

### سال ششم

۷.  $a$  و  $b$ ، دو عدد دورقمی هستند که، رقم سمت راست آن‌ها، با هم برابر است. دو عدد را برابر ۹ تقسیم کرده‌ایم: خارج قسمت حاصل از تقسیم  $a$  بر ۹ برابر باقی‌مانده حاصل از تقسیم  $b$  بر ۹؛ و خارج قسمت حاصل از تقسیم  $b$  بر ۹ برابر باقی‌مانده حاصل از تقسیم  $a$  بر ۹ شده‌است. همه این‌گونه عده‌های  $a$  و  $b$  را پیدا کنید.

۸. همان مساله ۳.

۹. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر  $30030$  باشد، حاصل ضرب آنها بر  $30030$  بخش پذیر نیست.
۱۰. دایره‌ای به شعاع واحد و  $1982$  نقطه، روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، روی محیط این دایره، نقطه‌ای پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های از آن تا  $1982$  نقطه، از  $1982$  بیشتر باشد.
۱۱. حشره به اندازه  $1$  سانتی‌متر می‌جهد، به اندازه  $90$  درجه می‌چرخد و بعد به اندازه  $2$  سانتی‌متر می‌جهد، باز هم به اندازه  $90$  درجه می‌چرخد و به اندازه  $3$  سانتی‌متر می‌جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از  $1982$  پرش، در جای اول خود باشد؟

۱۲. در یک مدرسه، هیچ دانش‌آموز پسری با همه دانش‌آموزان دختر، درس ریاضی را تمرین نکرده است، ولی هر دانش‌آموز دختر، دست‌کم با یک پسر، درس ریاضی را تمرین کرده است. ثابت کنید دو زوج  $D_1, M_1$  و  $D_2, M_2$  ( $M$  پسر و  $D$  دختر) پیدا می‌شود که  $M_1$  با  $D_1$  و  $M_2$  با  $D_2$  درس خوانده است، ولی  $M_1$  با  $D_2$  و  $M_2$  با  $D_1$  نبوده است.

### سال هفتم

۱۳. درباره دو عدد  $a$  و  $b$  می‌دانیم:

$$\left( \frac{1+ab}{a+b} \right)^2 < 1$$

- ثابت کنید، از دو عدد  $a$  و  $b$ ، یکی بزرگتر از واحد و دیگری کوچکتر از واحد است.

۱۴. ثابت کنید، برای هر چهار زاویه از یک چندضلعی کوثر، مجموع دو زاویه، از تفاضل دو زاویه دیگر، بزرگتر است.

۱۵. ثابت کنید، عدد  $2\ldots 222$  (عددی  $1982$  رقمی با رقم‌های برابر  $2$ ، قابل تبدیل به صورت  $(y+xy)(x+xy)$  نیست ( $x$  و  $y$ ، عددی عایقی درست‌اند)).

۱۶. دانشآموزان کلاس‌های ششم و هفتم، در یک مسابقه تنیس روی میز شرکت کردند؛ در ضمن، تعداد دانشآموزان کلاس ششم، دو برابر تعداد دانشآموزان کلاس هفتم بود. مسابقه در یک دور انجام گرفت. تعداد بازی‌های برنده‌گان کلاس هفتم،  $40\%$  بیشتر از تعداد بازی‌های برنده‌گان کلاس ششم بود. چند دانشآموز در این مسابقه شرکت داشتند؟

۱۷. نه عدد طبیعی را، که از  $40$  بزرگتر نباشد، در خانه‌های یک جدول  $3 \times 3$  طوری قرار دهید که حاصل ضرب عددها در هر سطر، در هر ستون و در هریک از دو قطر، یکسان باشد.

۱۸. همان مساله ۱۲.

### سال هشتم

۱۹.  $p_1, p_2$  و  $p_3$ ، سه جمله‌ای‌هایی درجه دوم، با ضریب مثبت برای بزرگترین درجه، هستند. ثابت کنید، اگر هر دو تا از آن‌ها، ریشه مشترک داشته باشند، آن‌وقت، سه جمله‌ای  $p_1 + p_2 + p_3$ ، ریشه دارد.

۲۰. در مثلث  $ABC$ ، زاویه  $C$  دو برابر زاویه  $A$  است و، در ضمن  $|AC| = 2|BC|$ . ثابت کنید، این مثلث قائم‌الزاویه است.

۲۱. چهار جمله نخست یک دنباله عبارت است از

۱, ۹, ۸, ۲

از جمله چهارم به بعد، هر جمله برابر است با رقم سمت راست مجموع چهار جمله قبل از آن. آیا در این دنباله، به ردیف چهار جمله

۳, ۵, ۴, ۴

برخورد می‌کنیم؟

۲۲. هر زاویه بین دو قطر دلخواه یک ۱۸ ضلعی، بر حسب درجه، با عددی درست بیان می‌شود. ثابت کنید، با یک ۱۸ ضلعی منتظم سروکار داریم.

۲۳. خانه‌ای یک مستطیل  $41 \times 5$  را، با دو رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان سه سطر و سه ستون طوری انتخاب کرد که، هر ۹ خانه‌ای که در تقاطع این سطر و ستون‌ها قرار دارند، از یک رنگ باشند.

۲۴. صفحه را بهوسیله ۲۷ خط راست ( $1 < n$ ) به بخش‌هایی تقسیم کرده‌ایم؛ در ضمن، هیچ دو خط راستی با هم موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، این بخش‌ها، با بیش از  $1 - 2n$  زاویه به وجود نیامده‌اند.

#### سال نهم

۲۵. همان مسالة ۲۰

۲۶. همان مسالة ۲۱

۲۷. همان مسالة ۲۲

۲۸. می‌دانیم:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1$$

ثابت کنید، از این سه کسر، دو کسر برابر ۱ و یک کسر برابر ۱ - است.

۲۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $k$ ، عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\sqrt{n + 1981^k} + \sqrt{n} = (\sqrt{1982} + 1)^k$$

۳۰\*. چند مهره روی صفحه ریخته شده است؛ در ضمن، همه آن‌ها روی یک خط راست نیستند. می‌توانیم، هر مهره دلخواه را به جایی منتقل

کنیم که قرینه آن نسبت به یک مهره دیگر باشد. ثابت کنید، با این عمل، می‌توان مهره‌ها را به صورت راس‌های یک چندضلعی کوثر درآورد.

### سال دهم

.۳۱. همان مساله ۲۱.

.۳۲. همان مساله ۲۳.

.۳۳. همان مساله ۲۸.

.۳۴. در چهار وجهی  $ABCD$ ، مجموع زاویه‌های  $BAD$  و  $BAC$  برابر است با  $180$  درجه.  $AK$ ، نیمساز زاویه  $CAD$  است. مقدار زاویه  $BAK$  را پیدا کنید.

.۳۵. ثابت کنید می‌توان روی راس‌های یک  $n$ -ضلعی منتظم، عدددهایی مخالف صفر، طوری قرار داد که مجموع عدددهای واقع در راس‌های هر  $k$ -ضلعی منتظم، که راس‌های آن بر راس‌های  $n$ -ضلعی منطبق است ( $k \leq n$ )، برابر صفر شود.

.۳۶\*.  $4n$  نقطه روی محیط دایره‌ای انتخاب و آنها را، یک در میان، به رنگ‌های قرمز و آبی درآورده‌ایم. نقطه‌های هر رنگ را، به زوج‌هایی تقسیم و نقطه‌های هر زوج را با پاره خط‌های راستی از همان رنگ، به هم وصل کرده‌ایم (در ضمن، هیچ سه پاره خط راستی، در یک نقطه به هم نرسیده‌اند). ثابت کنید، دست کم،  $n$  نقطه برخورد پاره خط‌های راست قرمز با پاره خط‌های راست آبی پیدا می‌شود.

### دور نهایی

.۳۷. آیا عدد طبیعی  $k$  وجود دارد، به نحوی که از هر  $180$  راس دلخواه یک  $360$  ضلعی منتظم به مرکز  $O$ ، بتوان دو راس  $A$  و  $B$  را طوری انتخاب کرد که، مقدار زاویه  $\angle AOB$  درجه باشد؟

۳۸. مربع را به  $99^2 = 9801$  مربع برابر تقسیم و مرکزهای همه این مربع‌ها را، به جز یک مربع گوش‌ای، نشان گذاشته‌ایم. نقطه‌هایی را که نشان گذاشته‌ایم، به زوچ‌هایی تقسیم و نقطه‌هایی هر زوچ را، با بُرداری به هم پیوسته‌ایم. ثابت کنید، مجموع این بُردارها، برابر بُردار صفر نمی‌شود.

۳۹. ۱۰ نقطه روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم. حداکثر، چند پاره خط راست، که دو انتهای هر یک از آن‌ها در این نقطه‌ها باشند، می‌توان رسم کرد، به نحوی که هیچ سه پاره خط راستی، تشکیل یک مثلث، به راس‌هایی در این نقطه‌ها، ندهند؟

۴۰. پنیا، ۸ پیراشکی از دو نوع سیب‌زمینی و گوشتی خرید و، برای آن‌ها، یک روبل پرداخت. واسیا، ۹ پیراشکی خرید و یک روبل و یک کوپک پرداخت. هر پیراشکی گوشتی چند می‌ارزد، به شرطی که بدانیم، پیراشکی گوشتی گران‌تر است و، در ضمن، هر پیراشکی قیمتی بیش از یک کوپک دارد؟ هر روبل، برابر ۱۰۰ کوپک است.

۴۱. دایره‌ای در مثلث  $ABC$  محاط نقطه‌های  $D$  و  $E$ ، نقطه‌های تماس این دایره، با ضلع‌های  $BC$  و  $AC$  است. بر نیمساز زاویه  $BAC$  عمود  $BK$  را رسم کرده‌ایم. اگر  $K$ ، پای این عمود باشد، ثابت کنید، سه نقطه  $D$ ،  $E$  و  $K$ ، روی یک خط راست‌اند.

۴۲. دنباله‌ای بی‌پایان از عده‌های طبیعی است و می‌دانیم  $(A_n)$ ،  $A_{n+k} - A_k$ ، به ازای عده‌های طبیعی و دلخواه  $n$  و  $k$ ، بر  $A_n$  بخش‌پذیر است. حاصل ضرب  $B_n A_1 A_2 \dots A_n$  را  $B_n$  می‌نامیم. ثابت کنید،  $B_n$  به ازای هر  $n$  و  $k$ ، بر  $B_n B_k$  بخش‌پذیر است.

۴۳\*.  $n$  نقطه روی یک صفحه‌اند، به نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست و هیچ چهار نقطه‌ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، حداکثر  $2 - n$  دایره پیدا می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، از سه نقطه (از نقطه‌های مفروض) می‌گذرد و همه نقطه‌های دیگر، در درون آن قرار

می‌گیرند.

\* ۴۴. ثابت کنید، مجموعه همه عددهای طبیعی را نمی‌توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که، اگر عددهای  $a$  و  $b$  متعلق به یکی از این دو مجموعه باشد، عدد  $1 - ab$  هم متعلق به همان مجموعه باشد.

## ۱۹۸۳

### سال پنجم

۱. ۳۰ نفر در مسابقه شطرنج شرکت کردند. ردیف امتیازهای کسانی را به حساب آورده‌اند که، دست کم ۶۰٪ امتیازهای ممکن را به دست آورده باشند. حداقل، چند نفر ممکن است وارد ردیف‌بندی شده باشند؟

۲. ۱۰ مقوای مستطیل شکل  $20 \times 10$  سانتی‌متری را به ۲۰ تکه مثلثی شکل بریده‌ایم. با این تکه‌ها، چگونه می‌توان یک مربع ساخت؟

۳. هر یک از چهار نفر بهنیا، وهنیا، سه‌نیا و ژه‌نیا، یا همیشه راست می‌گرید و یا همیشه دروغ. این سخنان را شنیده‌ایم:

بهنیا (به وهنیا) : تو دروغ‌گویی.

ژه‌نیا (به بهنیا) : تو هم دروغ‌گویی.

سه‌نیا (به ژه‌نیا) : بله، هر دوی آن‌ها دروغ‌گو هستند. (و بعد از اندکی فکر) در ضمن، تو هم دروغ‌گویی.

از این چهار نفر، کدام راستگو و کدام دروغ‌گو هستند؟

۴. از کیسه‌ای که شامل برگ‌های کوچک کاغذی سیاه و سفید است، هشت برگ بیرون آورده‌ایم و آن‌ها را روی محیط دایره‌ای چیده‌ایم. هر بار، سه برگ ردیف هم را برداشته و به جای آن‌ها، برگ‌هایی با رنگ مخالف هر یک از آن‌ها گذاشته‌ایم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان به حالتی رسید که همه برگ‌ها سفید باشند.

۵. ماشین زمان می‌دهد از اول مارس به اول نوامبر هر سال دیگر یا از اول آوریل به اول دسامبر، از اول مه به اول ژانویه و غیره منتقل شویم. دو بار پیاپی نمی‌توان از ماشین زمان استفاده کرد. بارون مون هاوزن، در اول آوریل با ماشین زمان به مسافرت رفت و بعد از لحظه‌ای برگشت. او ادعا کرد ۲۶ ماه در مسافرت بوده است. به بارون ثابت کنید که درست نمی‌گوید.

۶. با چهار رقم مختلف، دو عدد چهار رقمی ساخته‌ایم که، یکی از آنها، بزرگترین عدد از بین عدهای چهار رقمی است که با رقم‌های مفروض می‌توان ساخت و، دیگری، کوچکترین عدد چهار رقمی در بین آنها است؛ در ضمن، در این دو عدد چهار رقمی، رقم تکراری وجود ندارد. مجموع این دو عدد، برابر است با ۱۰۴۷۷. این چهار رقم را پیدا کنید.

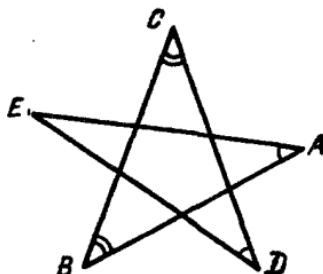
### سال ششم

۷. عدد زوج  $a$  دارای این ویژگی است که، اگر  $a$  بر عدد اول  $p$  بخش‌پذیر باشد، آنوقت  $1 - a$  بر  $1 - p$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، توانی از عدد ۲ است.

۸. میله‌ای به طول ۲ متر را به پنج بخش (که لازم نیست با هم برابر باشند) تقسیم کرده‌ایم. طول هر بخش از ۱۷ سانتی‌متر کمتر نیست. ثابت کنید، از بین این پنج تکه، می‌توان سه میله انتخاب کرد که، با آنها، بتوان یک مثلث ساخت.

۹. در پنج ضلعی ستاره‌ای که در شکل ۱ نشان داده شده است، دو زاویه  $A$  و  $D$  با هم و دو زاویه  $B$  و  $C$  با هم برابرند؛ همچنین، دو پاره خط راست  $AB$  و  $CD$ ، طول‌هایی برابر دارند. ثابت کنید، پاره خط‌های راست  $DE$  و  $AE$  هم، طولی برابر دارند.

۱۰. هشت عدد، که هریک برابر  $1 + 1 -$  است، روی محیط دایره‌ای نوشته‌ایم. با هر حرکت می‌توان علامت سه عددی را که در ردیف هم قرار



شکل ۱۰

دارند عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، می‌توان از ردیفی از دو عدد  $1 + 1 -$ ، به هر ردیف دیگری برسید.

۱۱. همان مساله ۵.

۱۲. راس‌های مثلثی، به رنگ آبی‌اند. آیا می‌توان ۱۰ نقطه آبی و ۲۰ نقطه قرمز در درون مثلث طوری قرار داد که، هیچ سه نقطه آبی، روی یک خط راست نباشند و، در ضمن، در درون هر مثلث با راس‌های آبی، دست‌کم یک نقطه قرمز قرار گرفته باشد؟

### سال هفتم

۱۳. همان مساله ۹.

۱۴. هر خانه از مربع شطرنجی  $100 \times 100$  را، به رنگ سیاه یا سفید درآورده‌ایم؛ در ضمن، تعداد خانه‌های سیاه، با تعداد خانه‌های سفید برابر است. ثابت کنید، این مربع را می‌توان، با برش روی خط‌های راست شبکه، به دو چندضلعی طوری تقسیم کرد که، در هر کدام از آنها، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر باشد.

۱۵. میله‌ای به طول ۲ متر را به پنج بخش تقسیم کرده‌ایم که؛ در ضمن، هیچ بخشی از ۱۹ سانتی‌متر کمتر نیست. ثابت کنید، با هر چهار بخش

دلخواه از این پنج بخش، می‌توان یک چهارضلعی ساخت.  
۱۶. همان مساله ۱۲

۱۷. ثابت کنید، عدد  $1 + 25^8$  را می‌توان به صورت ضرب سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد، تبدیل کرد.
۱۸. در هر خانه از جدول  $24 \times 24$ ، یکی از دو عدد  $1 + 1$  یا  $-1$  را نوشته‌ایم. در هر حرکت، می‌توان علامت یکی از عددها را، همراه با علامت‌های ستونی که این خانه در آن است یا سطر مربوط به این خانه، عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار محدود این حرکت، می‌توان از هر وضع نخستین عددهای جدول، به هر وضع دیگری رسید.

### سال هشتم

۱۹. عدد  $a$  از جابه‌جایی رقم‌های عدد  $b$  به دست آمده است. ثابت کنید، مجموع رقم‌های عدد  $5a$  با مجموع رقم‌های عدد  $5b$  برابر است.
۲۰. دو شطرنج‌باز،  $24 \times 24$  دور متوالی با هم بازی کردند. می‌دانیم در هیچ‌کدام از ردیف‌های فرد بازی، بازی به صورت مساوی تمام نشده است؛ در ضمن هیچ‌کدام از دو بازی‌کن، در سه دور متوالی نبرده است. حداقل امتیاز برنده مسابقه، چقدر می‌تواند باشد؟
۲۱. نقطه‌ای را که در درون یک شش‌ضلعی منتظم قرار دارد، به وسیله پاره‌خط‌های راست، به راس‌ها وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، با این پاره‌خط‌های راست، می‌توان یک شش‌ضلعی ساخت که، مساحت آن، از  $\frac{2}{3}$  مساحت شش‌ضلعی نخستین، کمتر نباشد.
۲۲. خط راست  $p$ ، با میانه  $CM$  از مثلث  $ABC$  موازی است. خط‌های راست  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$ ، خط راست  $p$  را، به ترتیب، در  $C_1$ ،  $A_1$  و  $B_1$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت مثلث  $AA_1C_1$  با مساحت مثلث  $BB_1C_1$  برابر است.

۲۳. ۴۰۰ ضلعی منتظم را به صورت متوازی‌الاضلاع‌هایی بربدیده‌ایم. ثابت کنید، در بین این متوازی‌الاضلاع‌ها، دست‌کم ۱۰۰ مستطیل وجود دارد.

۲۴\*. چند نقطه، روی محیط دایره‌اند. آن‌ها با سرعت‌های ثابت و، از نظر مقدار برابر، آغاز به حرکت کردند (برخی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برخی دیگر در خلاف این جهت). وقتی دو نقطه به هم برمی‌خورند، بلا فاصله و هر دو، جهت حرکت خود را عوض می‌کنند؛ در ضمن روی محیط دایره باقی می‌مانند و سرعت خود را، از لحاظ مقدار، حفظ می‌کنند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که، هر نقطه، در جای نخستین خود قرار می‌گیرد.

### سال نهم

۲۵. ارتفاع‌های  $AH$  و  $CP$  را در مثلث  $ABC$  رسم کرده‌ایم. مقدار زاویه  $B$  را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:  $|AC| = 2|PH|$ .

۲۶. اگر هر دو مختص نقطه‌ای در دستگاه محورهای مختصات، عددهای درستی باشند، آنوقت، نقطه را «درست» می‌نامیم. نقطه درست را «اول» می‌نامیم، وقتی هر دو مختص آن، عددهایی اول باشند. مربعی را، که راس‌های آن نقطه‌هایی درست باشند، «اول» می‌نامیم، وقتی که هر نقطه درست واقع بر محیط آن، اول باشد. همه «مربع‌های اول» را پیدا کنید.

۲۷. چند کودک، به صورت دایره‌ای ایستاده‌اند و، هر کدام از آن‌ها، چند شوکولات در دست خود دارد. با سوت داور، هر نفر، نصف شوکولات‌های خود را به نفر دست راستی خود می‌دهد (اگر تعداد شوکولات‌های کسی فرد باشد، داور، پیش از آغاز بازی، یک شوکولات به او می‌دهد). بازی چند بار تکرار می‌شود. ثابت کنید، زمانی فرا می‌رسد که، تعداد شوکولات‌ها، به طور مساوی بین کودکان تقسیم شده‌است.

۲۸. بهازای کدام عددهای طبیعی  $2 \leq n$ ، نابرابری

$$x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r \geq x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$$

برای همه مقدارهای متغیرهای  $x_i$  برقرار است؟

۲۹. دایره‌های  $K_1$  و  $K_2$ ، دارای نقطه‌های مشترک درونی نیستند.

خطهای راست  $l_1$  و  $l_2$  بر این دو دایره، از بیرون مماس‌اند و چهار نقطه تمسک، راس‌های یک چهارضلعی محیطی‌اند. ثابت کنید، دایره‌های  $K_1$  و  $K_2$ ، بر هم از بیرون مماس‌اند.

.۳۰. همان مساله ۲۴

سال دهم

۳۱. دنباله‌های  $(x_n)$  و  $(y_n)$  طوری ساخته شده‌اند که

$$x_1 = x_2 = 10, y_1 = y_2 = -10,$$

$$x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1, y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1$$

ثابت کنید، هر عدد طبیعی، حداکثر در یکی از این دنباله‌ها وجود دارد.

.۳۲. همان مساله ۲۷

.۳۳. همان مساله ۲۸

۳۴. یک گنج سه‌وجهی مفروض است. می‌دانیم، نیمسازهای دو زاویه مسطحة آن، بر هم عمودند. ثابت کنید، صفحه‌ای که از این دو نیمساز می‌گذرد، بر وجه سوم گنج عمود است.

۳۵. در یک هرم منتظم با قاعده ۲۰ ضلعی، مرکزهای دو کره محاطی و محیطی هرم، بر هم منطبق‌اند. مقدار زاویه‌های دو وجهی وجههای جانبی هرم را (بر حسب درجه) پیدا کنید.

.۳۶. همان مساله ۲۴

## دور نهایی

۳۷. ۹ راس یک  $20$  ضلعی منتظم را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مثلث متساوی‌الساقینی می‌توان پیدا کرد که، راس‌های آن، در نقطه‌های نشان‌دار باشد.

۳۸. مثلث  $ABC$  و نقطه‌ای در صفحه مثلث داده شده است. قرینه مثلث را نسبت به این نقطه به دست آورده‌ایم. از برخورد مثلث قرینه با مثلث  $ABC$ ، یک چندضلعی به دست آمده است. ثابت کنید، مساحت این چندضلعی، از  $\frac{2}{3}$  مساحت مثلث  $ABC$  تجاوز نمی‌کند.

۳۹. دو نفر روی یک صفحه کاغذ شطرنجی بی‌پایان، به نوبت، با نقطه‌گذاری در خانه‌های جدول، یک صلیب رسم می‌کنند. اولی می‌کوشد، به کمک چهار صلیبی که رسم شده است مربعی بسازد که ضلع‌های آن، با ضلع‌های خانه‌های جدول موازی باشد و دومی می‌کوشد مانع او شود. آیا اولی می‌تواند، با برنامه‌ریزی درست، برنده شود؟

۴۰. زاویه راس، در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، برابر  $100$  درجه است. روی نیم خط راست  $AB$ ، پاره خط راست  $AM$  را برابر قاعده  $BC$  جدا کرده‌ایم. اندازه زاویه  $BCM$  را پیدا کنید.

۴۱. به ازای کدام عدد طبیعی  $n$ ، می‌توان  $n$  عدد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را روی محیط دایره طوری قرار داد (همه عددها، با هم، برابر صفر نیستند)، به نحوی که، برای هر  $k \leq n$ ، مجموع  $k$  عدد ردیف، با آغاز از  $a_k$ ، برابر صفر شود؟

۴۲. صفحه شطرنجی بی‌پایان را، به وسیله لایه‌ای از تکه مقواهایی با اندازه  $2 \times 1$  پوشانده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های هر تکه مقوا، در امتداد خط‌های شبکه باشد. ثابت کنید، صفحه را می‌توان با سه لایه دیگر از همان گونه مقواها پوشاند، طوری که هیچ‌کدام از تکه مقواها، درست روی تکه

مقوای مشابه خود قرار نگیرد.

\* ۴۳. دنباله صعودی ( $a_n$ ) از عدهای طبیعی چنان است که، اگر یک عدد طبیعی عضو این دنباله نباشد، می‌توان آن را به صورت  $a_k + 2k$  نشان داد ( $k$ ، یک عدد طبیعی است). ثابت کنید، برای هر  $k$ ، نابرابری  $a_k < \sqrt{2}k$  برقرار است.

۴۴. کشوری دارای  $n^2$  شهر است که به صورت مربع قرار گرفته‌اند و، در ضمن، فاصله بین هر دو شهر مجاور، برابر  $10$  کیلومتر است. شهرها به وسیله جاده‌ها به هم مربوط‌اند؛ جاده‌ها خطاهای راستی را تشکیل می‌دهند که با ضلع مربع موازی‌اند. کمترین مقدار طول این دستگاه جاده‌ها چقدر است، به شرطی از هر شهر این کشور، بتوانیم به هر شهر دیگری، از طریق جاده‌ها برویم؟

## ۱۹۸۴

### سال پنجم

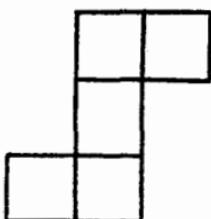
۱. ثابت کنید، در عدد صد رقمی

$$84198419 \dots 8419$$

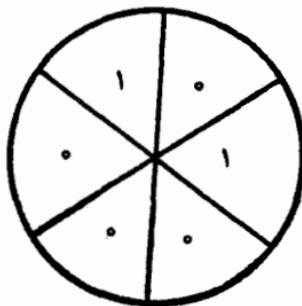
می‌توان، چند رقم از آغاز عدد و چند رقم از پایان عدد حذف کرد، به نحوی که مجموع رقم‌های باقی‌مانده، برابر  $1984$  باشد.

۲. در خانه‌های یک جدول  $4 \times 4$ ، عدهایی قرار دهید که، مجموع عدهای واقع در چهار گوش هر مربع  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$  و  $4 \times 4$ ، برابر صفر شود. هیچ‌کدام از عدهای درون خانه‌ها، برابر صفر نیست.

۳. روی خط راست،  $45$  نقطه را، در بیرون پاره خط راست  $AB$  نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطه  $A$ ، برابر با مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطه  $B$  نیست.



شکل ۱۱



شکل ۱۲

۴. خانه‌های صفحه شطرنجی دفترچه را، با هشت رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان شکلی شبیه شکل ۱۱، در آن پیدا کرد که، در درون آن، دو خانه هم‌رنگ وجود داشته باشد.

۵. دایره را به شش قطاع تقسیم کرده و، طبق شکل ۱۲، در هر قطاع عددی برابر ۰ یا ۱ گذاشته‌ایم. می‌توانیم، در هر حرکت، به دو عدد مجاور، یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، نمی‌توان به حالتی رسید که، هر شش عدد، با هم برابر باشند.

۶. عددهای از ۱ تا ۱۰۵، به ردیف (و با انداخت فاصله بین هر دو عدد) و در یک سطر نوشته شده‌اند. دو نفر، به نوبت، هر کدام یکی از علامت‌های +، - یا  $\times$  را بین دو عدد قرار می‌دهند. ثابت کنید، آن که بازی را آغاز کرده‌است، می‌تواند روشی در پیش گیرد که، سرانجام، عددی زوج به دست آید. (هر بازی‌کن، در نوبت خود باید یکی از جاهای باقی‌مانده بین دو عدد متولی را، با یکی از علامت‌ها، پر کند.)

### سال ششم

#### ۷. همان مساله ۳.

۸. قطرهای  $AC$  و  $BD$  در چهارضلعی  $ABCD$ ، یکدیگر را در

$O$  قطع کرده‌اند. محیط‌های دو مثلث  $ABC$  و  $ABD$  برابرند. همچنین دو مثلث  $ACD$  و  $BCD$  هم، محیط‌هایی برابر دارند. ثابت کنید:  $|AO| = |BO|$ .

۹. الف) همان مساله ۲.

ب) ثابت کنید، برای هر جدولی از این‌گونه، مجموع عددهای هر ستون، برابر صفر است.

۱۰. ۱۷۵ مداد گرانتر از ۱۲۵ خودکار و ارزانتر از ۱۲۶ خودکار است. ثابت کنید، برای خرید سه مداد و یک خودکار، ۱۰۰ تومان کافی نیست.

۱۱. همان مساله ۶.

۱۲. از یک صفحه کاغذ شطرنجی  $29 \times 29$ ، به تعداد ۹۹ مریع جدا کرده‌ایم که هر کدام از آن‌ها، شامل چهار خانه است. ثابت کنید، هنوز می‌توان یک مریع دیگر  $2 \times 2$  از آن جدا کرد.

## سال هفتم

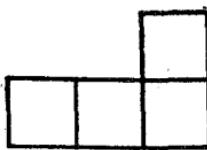
۱۳. آیا پاره خط‌های راست به طول‌های  $2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13$  و  $15$ ، می‌توانند ضلع‌ها و قطرهای یک پنج‌ضلعی کوثر باشند؟

۱۴. مطلوب است مقدار عددی عبارت

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{2}{xy + 1}$$

به شرطی که بدانیم، مجموع دو کسر اول این عبارت برابر است با  $\frac{3}{4}$ ؛ در ضمن،  $x$  و  $y$ ، با هم برابر نیستند.

۱۵. روی ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  در مثلث  $ABC$ ، مثلث‌های  $(|AC| = |AE|)$   $ACE$  و  $(|AD| = |AB|)$   $ADB$  متساوی‌الساقین



شکل ۱۳

را رسم کرده‌ایم. در ضمن، زاویه  $DAE$  برابر است با مجموع دو زاویه  $ACB$  و  $ABC$ . ثابت کنید، پاره خط راست  $DE$ ، طولی دو برابر طول میانه  $AM$  از مثلث  $ABC$  دارد.

۱۶. روی خط راستی، ۴۵ نقطه را در بیرون پاره خط راست  $AB$  انتخاب کرده‌ایم. برخی از این نقاط را به رنگ قرمز، و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌ایم. دو مجموع را محاسبه کرده‌ایم: ۱) مجموع فاصله‌های از نقاط را که قرمز تا نقطه  $A$  را با مجموع فاصله‌های نقاط را که آبی تا نقطه  $B$  با هم جمع کرده‌ایم؛ ۲) مجموع فاصله‌های از نقاط را که آبی تا نقطه  $B$  را با مجموع فاصله‌های از نقاط را که آبی تا نقطه  $A$ ، با هم جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، این دو مجموع، با هم برابر نیستند.

۱۷. مساله ۱۲ را، برای صفحه کاغذ شطرنجی  $31 \times 31$  حل کنید.

۱۸. دست کم چند رنگ لازم است تا صفحه شطرنجی بی‌پایان را بتوان طوری رنگ کرد که، در آن، هر چهار خانه دلخواهی که شبیه شکل ۱۳ انتخاب شود، با چهار رنگ مختلف باشد؟

### سال هشتم

۱۹. مربع  $100 \times 100$  را با قطعه‌های مستطیلی  $2 \times 1$  ساخته‌ایم.

ثبت کنید، زوج‌هایی از این قطعه‌ها، مربع  $2 \times 2$  می‌سازند.

۲۰. تفاوت دو عدد شش رقمی

$$\overline{abcdef} \text{ و } \overline{fdeabc}$$

بر ۲۷۱ بخش پذیر است. ثابت کنید  $b = d$  و  $c = e$ .

۲۱. عددهای حقیقی  $x_1, x_2, \dots, x_{101}$  چنان‌اند که

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \dots = x_{100} + x_{101} = x_{101} + x_1$$

ثابت کنید، همه این عددها، با هم برابرند.

۲۲. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از یک نقطه واقع بر صفحه یک ذوزنقه متساوی‌الساقین تا سه راس این ذوزنقه، بزرگتر است از فاصله همین نقطه تا راس چهارم ذوزنقه.

۲۳. میانه مثلث  $ABC$  و  $K$ ، نقطه‌ای واقع بر پاره خط راست  $BM$  است. می‌دانیم زاویه‌های  $BCK$  و  $BAK$  با هم برابرند. ثابت کنید، مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

۲۴. مجموعه  $A$  از عددهای طبیعی تشکیل شده‌است؛ در ضمن، بین هر صد عدد طبیعی متوالی، عضوی از مجموعه  $A$  وجود دارد. ثابت کنید، می‌توان چهار عضو مجموعه  $A$ ، مثل  $a, b, c$  و  $d$  را پیدا کرد، به‌نحوی که

$$a + b = c + d$$

### سال نهم

۲۵. همان مسالة ۲۱.

۲۶. همان مسالة ۲۲.

۲۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که به سه طریق بتوان آن را به صورت  $73y + 13x$  نشان داد ( $x$  و  $y$ ، عددهایی طبیعی‌اند)

۲۸. پاره خط‌های راست  $AA_1$ ،  $BB_1$  و  $CC_1$ ، ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  هستند. اگر مثلث  $A_1B_1C_1$  با مثلث  $ABC$  متشابه باشد، زاویه‌های مثلث  $ABC$  را پیدا کنید.

۲۹. همان مسالة ۲۴.

۳۰. مجموع سه عدد  $x$ ،  $y$  و  $z$  برابر صفر است. ثابت کنید، عدد  $(x^2 + y^2 + z^2)$  مجنور یک عدد درست است.

### سال دهم

۳۱. همان مساله ۲۲، برای هر نقطه دلخواه فضا.

۳۲. همان مساله ۲۴.

۳۳. ثابت کنید، تفاضل مجنورهای طول‌های ضلع‌های مجاور متوازی الاصل، از حاصل ضرب طول‌های دو قطر آن کمتر است.

۳۴. بعد از چند بار عمل مشتق‌گیری و عمل ضرب در  $1 + x$ ، که روی چندجمله‌ای  $x^8 + x^7 + \dots + x^1$  انجام شده است، به دو جمله‌ای  $ax + b$  رسیده‌ایم. ثابت کنید، تفاضل دو عدد درست  $a$  و  $b$ ، بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

۳۵. حداقل مقدار مجموع

$$|x_1 - 1| + |x_2 - 2| + \dots + |x_{63} - 63|$$

چقلدر است، به شرطی که  $x_1, x_2, \dots, x_{63}$ ، ترتیبی از عدهای  $1, 2, 3, \dots, 63$  باشند؟

۳۶. عدهای از ۱ تا ۱۰۰ را در راس‌های منشوری با قاعده‌های ضلعی گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان بالی از منشور را پیدا کرد، به نحوی که اختلاف عدهای دو انتهای آن، از ۴۸ تجاوز نکند.

### دور نهایی (سال‌های هشتم و نهم)

۳۷. نقطه‌های  $E$  و  $H$  را روی ضلع‌های  $AB$  و  $CD$  از چهارضلعی  $CDEA$  انتخاب کرده‌ایم. می‌دانیم دو مثلث  $ABH$  و  $MN$  مساحت‌هایی برابر دارند و در ضمن

$$|AE| : |BE| = |DH| : |CH|$$

ثابت کنید دو خط راست  $BC$  و  $AD$  موازی‌اند.

۳۸. دو نفر با هم پازی می‌کنند. نفر اول یک رقم می‌نویسد، نفر دوم، در سمت چپ یا سمت راست این رقم، رقمی می‌نویسد؛ بعد نفر اول دوباره در سمت چپ یا سمت راست عددی که پدید آمده است، یک رقم می‌نویسد و غیره. ثابت کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه، بعد از حرکت نفر دوم، عدد حاصل مجلدور کامل یک عدد درست نباشد.

۳۹. روی صفحه محورهای مختصات، چهار نقطه با مختصات درست داده شده است. اجازه داریم، بهجای هر نقطه (از این چهار نقطه)، قرینه آن را نسبت به یکی دیگر از چهار نقطه انتخاب کنیم. آیا می‌توان، بعد از چند عمل از این‌گونه، از نقطه‌های

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$$

به نقطه‌های زیر رسید:

$$(0, 0), (1, 1), (3, 0), (2, -1)?$$

۴۰. ده عدد، یکی برابر ۱ و بقیه برابر ۰ داده شده است. در هر حرکت، دو عدد را برمی‌داریم و، بهجای هردوی آنها، میانگین حسابی آنها را قرار می‌دهیم. بعد از یک رشته حرکت از این‌گونه، کوچکترین عددی که می‌تواند بهجای عدد ۱ نشسته باشد، چه عددی است؟

۴۱. عددهای مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_k$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n$  چنان‌اند که داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ثابت کنید، در خانه‌های جدول  $n \times k$ ، می‌توان عددهای غیر منفی را طوری قرار داد که، در بین آنها، دست‌کم به تعداد  $(n - 1)(k - 1)$  عدد صفر

وجود داشته باشد و، در ضمن، مجموع عددها در سطرهای برابر  $a_1, a_2, \dots$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n$  باشد.

۴۲. مهره را در یکی از ۱۶۹ نقطه با مختصات  $(x, y)$  گذاشته ایم که، در آن  $12 \leq x \leq 0$  و  $12 \leq y \leq 0$ . مهره می تواند از نقطه  $(x_1, y_1)$  به نقطه  $(x_2, y_2)$  برود، به شرطی که هر یک از عددهای  $|x_1 - x_2|$ ،  $|y_1 - y_2|$ ،  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  از ۲ کمتر و از ۹ بیشتر نباشد. ثابت کنید، نمی توان مهره را از هر ۱۶۹ نقطه گذراند، به نحوی که در هر نقطه، تنها یکبار باشد.

۴۳. دایره ای بر ضلع های زاویه ای به راس  $O$  مماس است. قطری از دایره را در نظر می گیریم که از نقطه تماس دایره با یکی از ضلع ها نگذشته باشد و دو انتهای آن را  $A$  و  $B$  مینامیم. مماس بر دایره در نقطه  $E$  ضلع های زاویه را در نقطه های  $C$  و  $D$  و خط راست  $OA$  را در نقطه  $|BC| = |DE|$  قطع کرده است. ثابت کنید:

۴۴\*. ثابت کنید، مجموعه  $A$  از عددهای طبیعی وجود دارد، به نحوی که، هر عدد طبیعی که متعلق به  $A$  نیست، برابر با میانگین حسابی دو عضو مختلف  $A$  باشد و هیچ عضو  $A$ ، دارای این ویژگی نباشد.

دور نهایی (سال دهم)

۴۵. همان مساله ۴۰.

۴۶. ثابت کنید، اگر مجموع زاویه های مسطحه راس یک هرم، از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد، آنوقت طول هر یال جانبی هرم، از نصف محیط قاعده کمتر است.

۴۷. درباره عدد  $a$  می دانیم، عدد  $3a$  را می توان به صورت  $x^2 + 2y^2$  نوشت ( $x$  و  $y$ ، عددهایی درست آند). ثابت کنید، خود عدد  $a$  را هم می توان به همین صورت نوشت.

- .۴۸. همان مساله ۳۹.  
 .۴۹. همان مساله ۴۳.  
 .۵۰. همان مساله ۴۴.

۵۱\*. عددهای درست  $a, b, c, d, e$  و چنان‌اند که

$$a+b+c+d+e = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

بر عدد فرد  $n$  بخش‌پذیرند. ثابت کنید، عدد

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$$

هم، بر عدد  $n$  بخش‌پذیر است.  
 ۵۲. شش عدد نخستینِ دنباله‌ای چنین است:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0$$

با آغاز از جمله هفتم، هر جمله برابر است با آخرین رقم مجموع شش جمله پیش از آن. ثابت کنید، در این دنباله، به ردیف شش عدد

$$0, 1, 0, 1, 0, 1$$

برخورد نمی‌کنیم.

۱۹۸۵

سال پنجم

۱. ۶۸ سکه به وزن‌های مختلف داریم. با ۱۰۰ بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، سنگین‌ترین و سبک‌ترین سکه را پیدا کنید.

۲. عدد ۴۵ رقمی شامل یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ...، نه رقم ۹ می‌باشد. ثابت کنید، این عدد مجنوز کامل نیست.

۳. مسافری از شهر زادگاه خود  $A$ ، به طرف دورترین شهر کشور نسبت به  $A$ ، یعنی  $B$ ، حرکت کرد؛ سپس از  $B$  به دورترین شهر نسبت به  $B$  رفت (شهر  $C$ ) وغیره. ثابت کنید، اگر  $A$  و  $C$  دو شهر مختلف باشند، مسافر هرگز به شهر خود نمی‌رسد.

۴. ۱۰۰۰ عدد طبیعی پیدا کنید که، مجموع آن‌ها، برابر با حاصل ضرب آن‌ها باشد.

۵. در انباری ۳۰۰ لنگه چکمه وجود دارد: برای شماره ۴۵ پا ۱۰۰ لنگه، برای شماره ۴۱ پا ۱۰۰ لنگه و برای شماره ۴۲ پا ۱۰۰ لنگه. در ضمن، ۱۵۰ لنگه چکمه برای پای راست و ۱۵۰ تا برای پای چپ است. ثابت کنید، دست کم ۵۰ جفت چکمه می‌توان از آن‌ها جدا کرد، به نحوی که هر جفت، شامل یک شماره چپ و راست باشد.

۶. همان مساله ۱۸، برای  $n = 10$

سال ششم.

۷. عدد ۱ را روی تخته سیاه نوشته‌ایم. هر ثانیه، به عددی که روی تخته وجود دارد، مجموع رقم‌هایش را اضافه می‌کنیم. آیا ممکن است، بعد از مدتی، عدد ۱۲۳۴۵۶، روی تخته ظاهر شود؟

۸. ارتفاع  $AK$ ، نیمساز  $BL$  و میانه  $CM$  در مثلث  $ABC$ ، در نقطه  $O$  به هم رسیده‌اند؛ در ضمن  $|AO| = |BO|$ . ثابت کنید، مثلث  $ABC$ ، متساوی‌الاضلاع است.

۹. برای عده‌های اول  $p$  و  $q$  و عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$$

این عددها را پیدا کنید.

۱۰. همان مساله ۵

۱۱. سه حشره روی یک خط راست‌اند. آن‌ها مرتب از روی یکدیگر می‌پرند (هر حشره از روی یک حشره و نه از روی دو حشره). آیا ممکن است، بعد از ۱۹۸۵ پرش، در جای اول خود باشند؟

۱۲. همان مساله ۱۸ بهازای  $n = 10$

### سال هفتم

۱۳. نقطه‌های  $P$  و  $Q$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $BC$  و  $CD$  از مربع  $ABCD$ ، طوری در نظر گرفته‌ایم که مثلث  $APQ$ ، متساوی‌الاضلاع باشد. خط راستی که از نقطه  $P$ ، عمود بر ضلع  $AQ$  رسم شده‌است،  $AD$  را در نقطه  $E$  قطع کرده‌است. نقطه  $F$  را در بیرون مثلث  $APQ$  طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث‌های  $FQE$  و  $PQF$  برابر باشند. ثابت کنید، پاره‌خط راست  $FE$  دو برابر پاره‌خط راست  $FC$  طول دارد.

۱۴. عددی طبیعی را مجدور و، سپس، ۶۰۰ واحد از آن کم کرده‌ایم. با عددی که به دست می‌آید، دوباره همین دو عمل را انجام داده‌ایم و غیره. عدد نخستین، چه می‌تواند باشد، به شرطی که، بعد از چند بار انجام این عمل‌ها، دوباره به همان عدد اصلی رسیده باشیم؟

۱۵. دو نقطه روی ضلع‌های رویه‌رو و در مستطیلی انتخاب و آن‌ها را به راس‌های مستطیل وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت‌های هفت بخشی که به این ترتیب در مستطیل پدید می‌آیند، نمی‌توانند همگی با هم برابر باشند.

۱۶. حداکثر چند عدد از بین عددهای  $1, 2, 3, \dots, 1985$ ، می‌توان انتخاب کرد، به نحوی که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر عددی اول نباشد؟

۱۷. ۱۹۸۵ نقطه به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز، روی صفحه‌ای قرار

دارند، به نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای، روی یک خط راست نیست. برخی از نقطه‌های ناهمزنگ را، به وسیله پاره خط‌های راست، به هم وصل کرده‌ایم، در ضمن، معلوم شد، تعداد پاره خط‌های راستی که از هر نقطه می‌گذرد، برابر است با تعداد پاره خط‌های راستی که از هر نقطه دیگر می‌گذرد. ثابت کنید، نقطه قرمز رنگی پیدا می‌شود که هم به نقطه‌های سبز و هم به نقطه‌های آبی وصل شده‌است.

۱۸. روی دو سکو،  $n$  صندوق، با شماره‌های از ۱ تا  $n$ ، به طور نامنظم و به صورتی دلخواه روی هم چیده شده‌اند. با جرقه‌قیل می‌توان، هر بار، چند صندوق را از یک سکو به سکوی دیگر برد. ثابت کنید، با انجام  $1 - 2n$  بار عمل جرقه‌قیل، می‌توان همه صندوق‌ها را، در یک سکو، به ردیف شماره‌های آن‌ها گذاشت.

### سال هشتم

۱۹. یک تصاعد حسابی که جمله‌های آن را عددهای طبیعی تشکیل داده‌اند، شامل برخی مجددهای کامل است. ثابت کنید، در بین جمله‌های این تصاعد، بینهایت مجدد کامل وجود دارد.

۲۰. دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (z+x)^3 = y \end{cases}$$

۲۱. در چهارضلعی کوثر  $ABCD$  داریم:

$$\widehat{ABD} = 65^\circ, \widehat{CBD} = 35^\circ, \widehat{ADC} = 130^\circ, |AB| = |BC|$$

زاویه‌های داخلی چهارضلعی  $ABCD$  را پیدا کنید.

۲۲. درباره عددهای مثبت  $a_1, a_2, c_1, b_1, c_2$  و  $b_2$  می‌دانیم:

$$b_1^r \leq a_1 c_1, b_2^r \leq a_2 c_2$$

ثابت کنید.

$$(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 2)^2$$

۲۳. دایره به مرکز  $O$ ، بر ضلع‌های زاویه‌ای، در نقطه‌های  $A$  و  $B$  مماس است. از نقطه دلخواه  $M$  واقع بر پاره خط راست  $AB$  (به جز خود نقطه‌های  $A$  و  $B$ )، خط راستی عمود بر خط راست  $OM$  رسم کرده‌ایم. این عمود ضلع‌های زاویه را در نقطه‌های  $C$  و  $D$  قطع کرده‌است. ثابت کنید:  $|MC| = |MD|$ .

۲۴. یک بازی دونفره، با مستطیل  $25 \times 1$  که شامل ۲۵ خانه مربعی است و ۲۵ مهره سروکار دارد. خانه‌های مستطیل با عددهای از ۱ تا ۲۵، به ردیف شماره‌گذاری شده‌اند. هر بازی‌کن، در نوبت خود، می‌تواند یا مهره‌ای را در یک خانه آزاد بگذارد و یا مهره‌ای را که، پیش از آن، در جدول گذاشته شده‌است، به خانه مجاور خود، که شماره بالاتری دارد، منتقل کند. در آغاز بازی، همه خانه‌ها آزادند. بازی وقتی تمام می‌شود که، همه خانه‌های جدول، به وسیله مهره‌ها اشغال شده‌باشند. کسی بازی را می‌برد که آخرین حرکت را انجام داده باشد. اگر بازی به درستی و اندیشه‌ای انجام شود، کدام یک برنده خواهد شد: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

سال نهم

۲۵. در چهارضلعی کوثر  $ABCD$ ، قطرها در نقطه  $O$  به هم رسیده‌اند و، در ضمن، می‌دانیم:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CBD}, \widehat{BCA} = \widehat{CDB}$$

ثابت کنید، مماس‌هایی که از نقطه‌های  $B$  و  $C$  بر دایره  $(AOD)$  رسم شوند، طولی برابر دارند.

۲۶. عددهای حقیقی  $a, b, c, x, y$  و  $z$  چنان‌اند که

$$x = by + cz, \quad y = cz + ax, \quad z = ax + by$$

در ضمن، دست‌کم یکی از عددهای  $x, y$  و  $z$  مخالف صفر است. ثابت کنید:

$$2abc + ab + ac + bc = 1$$

۲۷. طول هر ضلع چهارضلعی کوثر، از ۷ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، چهار دایرة با شعاع برابر ۵ و مرکزهای واقع در راس‌های چهارضلعی، به طور کامل، چهارضلعی را می‌پوشانند.

۲۸. درباره عددهای حقیقی  $a, b$  و  $c$  می‌دانیم:

$$a + b + c > 0, \quad ab + ac + bc > 0, \quad abc > 0$$

ثابت کنید، هر سه عدد  $a, b$  و  $c$  مثبت‌اند.

۲۹\*. دنباله عددهای  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ، با این شرط‌ها داده شده‌است:

$$x_1 = 0,001, \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$$

ثابت کنید:  $0,0005 < x_{1001} < 0,0001$ .

۳۰. همان مساله ۲۴.

سال دهم

۳۱. درباره عددهای حقیقی  $a, b, c, x, y$  و  $z$  می‌دانیم:

$$a^x = bc, \quad b^y = ac, \quad c^z = ab$$

در ضمن، عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  مثبتاند و، دست کم یکی از آنها، برابر واحد نیست. ثابت کنید  $z - xyz + y + z$  عددی درست است.

۳۲. مساله ۲۳ را بینید.

۳۳. خطهای راستی که از مرکز دایره محاطی هر وجه چهار وجهی، عمود بر آن وجه رسم کرده‌ایم، در یک نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، مجموع طول‌های هر دو یا متقابل چهار وجهی، مقدار ثابتی است.

۳۴. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4 + 1} dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4 - 1} dx < 9,0001$$

۳۵. همان مساله ۲۹

۳۶. همان مساله ۲۴

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. عدد ۱۵۸۴ دارای این ویژگی‌هاست.

الف) مجنور یک عدد درست نیست؛

ب) با مقلوب خود، یعنی ۴۸۵۱ فرق دارد،

ج) حاصل ضرب دو عدد ۱۵۸۴ و ۴۸۵۱، مجنور کامل است.

عددي ۲۰ رقمي پيدا کنید که همین ویژگي‌ها را داشته باشد.

۳۸. محيط مثلثی برابر ۱۰۰ سانتی‌متر و مساحت آن برابر ۱۰۰ سانتی‌متر مربع است. خطهای راستی موازی با ضلع‌ها و به فاصله یک سانتی‌متر از آنها رسم کرده‌ایم؛ این خطهای راست، مثلث را به ۷ بخش تقسیم می‌کنند که سه تا از آنها، متوازی‌الاضلاع‌اند. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های این سه متوازی‌الاضلاع، از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر است.

۳۹. ۱۵ تیم والیبال، در یک مسابقه، با هم بازی می‌کنند؛ هر تیم یک دور بازی با هر تیم دیگر. معلوم شد، هر تیم در هفت بازی برنده شده‌است.

چند گروه شامل سه تیم می‌توان پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم یکبار برنده شده باشد؟

۴۰. خانه‌های صفحه شطرنجی  $100 \times 100$  را با چهار زنگ، طوری زنگ کرده‌ایم که، در هر مربع  $2 \times 2$ ، هر چهار زنگ وجود داشته باشد. ثابت کنید، خانه‌های چهار گوشة صفحه، از چهار زنگ‌اند.

۴۱. ذوزنقه با قاعده‌های به طول‌های  $a$  و  $b$  بر دایره‌ای به شعاع  $R$  محیط شده است. ثابت کنید:  $.ab \geq 4R^2$ .

۴۲. دنباله عددی طبیعی  $a_1, a_2, \dots$  چنان است که  $a_1 = 1$  و تفاضل  $a_{k+1} - a_k$ ، بازای هر  $k$ ، برابر ۰ یا ۱ است. ثابت کنید، اگر بهازای مقداری از  $m$  داشته باشیم  $a_m = \frac{m}{1000}$  را پیدا

$$.a_n = \frac{n}{500}$$

۴۳. در دنباله  $a_1, a_2, \dots$ ، دو جمله اول برابر ۱، و هریک از بقیه جمله‌ها برابر مجموع دو جمله قبل از خود است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 1$$

۴۴. هر عدد طبیعی  $100 \leq k$  را با عدد طبیعی  $f(k)$ ، که باز هم از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند، متناظر کرده‌ایم و، سپس، این دنباله را ساخته‌ایم:

$$a_1 = 1, a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots$$

ثابت کنید، عدد  $100 \leq n$  پیدا می‌شود، به‌نحوی که، برای آن، داشته باشیم:  $.a_n = a_{2n}$

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۵. همان مساله ۳۸

.۴۶. همان مساله ۴۰

.۴۷. تیم والیبال با هم مسابقه دادند؛ هر دو تیم، یکبار با هم بازی کردند. فرض کنید، در بین تیم‌ها، بتوان  $T$  گروه سه تیمی پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم، یکبار بُرده باشد. ثابت کنید:

الف) اگر هر تیم کمتر از ۹ بُرد و بیشتر از ۱۰ بُرد نداشته باشد، آنوقت

$$.T = ۳۳۰$$

$$.T \leq ۳۲۰$$

.۴۸. همان مساله ۴۱

.۴۹. همان مساله ۴۲

.۵۰. همان مساله ۴۳

.۵۱. برای دنباله  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ، از عددهای طبیعی می‌دانیم:

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$$

(بهازای هر  $n$ ). ثابت کنید، برای هر  $n > 10$ ، عدد  $(a_n - 22)$ ، عددی مرکب است.

.۵۲. تعداد پسران یک کلاس، با تعداد دختران آن برابر است. هر پسر با تعداد زوجی از دختران دوستی دارد. ثابت کنید، می‌توان گروهی از چند پسر را طوری انتخاب کرد که، هر دختر، با تعداد زوجی از پسران این گروه، دوستی داشته باشد.

۱۹۸۶

سال پنجم

۱. ۹ «کارت» که روی هریک، عددی نوشته شده است، این طور در ردیف هم قرار دارند.

۷, ۸, ۹, ۴, ۵, ۶, ۱, ۲, ۳

در هر حرکت می‌توانیم چند کارت ردیف را بداریم و آن‌ها را به ردیف عکس بچینیم. چگونه می‌توان با سه حرکت، به ردیف زیر رسید:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

۲. ۴۴ وزیر روی صفحه شطرنج است. ثابت کنید، هر کدام از آن‌ها می‌تواند یکی دیگر را بزند.

۳. برای عددهای طبیعی  $a$  و  $b$  می‌دانیم:

$$24a = 42b$$

ثابت کنید،  $a + b$ ، عددی مرکب است.

۴. چند سکه مساوی را، چگونه روی صفحه میز بگذاریم که، هریک از آن‌ها، بر ۳ سکه دیگر مماس باشد؟

۵. عدد روی محیط دایره‌اند و، هر عدد، برابر است با مجموع دو عدد مجاور خود. ثابت کنید، همه عددها برابر صفرند.

۶. الف) عدد هفت رقمی پیدا کنید که رقم‌های تکراری نداشته باشد و خود عدد بر هریک از رقم‌هایش بخش‌پذیر باشد.

ب) آیا عدد هشت رقمی با این ویژگی وجود دارد؟

سال ششم

۷. همان مساله ۱.

۸. همان مساله ۲.

۹. در شش ضلعی  $ABCDEF$ ، مثلثهای  $ABC$ ،  $ABF$ ،  $BCD$ ،  $CDE$ ،  $CDB$ ،  $FED$ ،  $FEA$  و  $CF$ ، طولی برابر دارند.
۱۰. همان مساله ۵.

۱۱. حلقه، با سرعان ثابت، از مبدأ مختصات آغاز به حرکت کرد.  
او بعد از هر نیم ساعت به اندازه  $60^\circ$  درجه می‌چرخد. ثابت کنید، برای  
این‌که دوباره به مبدأ مختصات برسد، به تعداد درستی ساعت نیاز دارد.
۱۲. همان مساله ۶.
۱۳. ۱۱ دانش‌آموز در پنج انجمن علمی شرکت می‌کنند. ثابت کنید،  
می‌توان دو دانش‌آموز  $A$  و  $B$  پیدا کرد، به نحوی که هر انجمن مورد علاقه  
 $A$ ، مورد علاقه  $B$  هم باشد.

سال هفتم

۱۴. همان مساله ۵.

۱۵. برای عددهای طبیعی  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$$

$$\text{ثابت کنید: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{41}{42}$$

۱۶. در مثلث متساوی الساقین  $ABC$ ، زاویه راس  $B$  برابر  $108^\circ$  درجه است. نیمساز زاویه  $ACB$ ، ضلع  $AB$  را در  $D$  قطع کرده‌است. عمود بر این نیمساز در نقطه  $D$ ، قاعده  $AC$  را در نقطه  $E$  قطع کرده‌است. ثابت کنید:  $|AE| = |BD|$ .

۱۷. همان مساله ۶.

۱۸. نقطه‌های  $K$  و  $H$  را روی ضلع‌های  $BC$  و  $CD$  از مربع

*ABCD* طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$|KC| = 2|KB| \text{ و } |HC| = |HD|$$

برابری دو زاویه  $AKB$  و  $AKH$  را ثابت کنید.

۱۹. توده‌ای شامل ۲۵ چوب کبریت داریم. آن را، به صورتی دلخواه به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ سپس، هر بخش را، دوباره، به دو بخش دیگر تقسیم می‌کنیم تا جایی که در هر بخش تنها یک چوب کبریت باشد. هر وقت عمل بخش را انجام می‌دهیم، تعداد چوب کبریت‌های دو بخش را در هم ضرب می‌کنیم و، در جایی، می‌نویسیم. ثابت کنید، مجموع همه عدددهایی که نوشته‌ایم، برابر است با ۳۰۰.

#### سال هشتم

۲۰. همه عدددهای سه رقمی را پیدا کنید که، هر یک از آن‌ها، ۱۱ برابر مجموع رقم‌هایش باشد.

۲۱. نقطه  $E$  را روی ضلع  $BC$ ، نقطه‌های  $K$  و  $M$  را روی ضلع  $CD$  و نقطه  $H$  را روی ضلع  $AD$  از مربع  $ABCD$  انتخاب کرده‌ایم. در ضمن می‌دانیم:

$$|CE| = |CK| \text{ و } |DM| = |DH|$$

ثابت کنید، بر چهار ضلعی که از برخورد زاویه‌های  $HBM$  و  $EAK$  به دست می‌آید، می‌توان دایزهای محیط کرد.

۲۲. عدددهای درست  $a$  و  $b$  را پیدا کنید، به شرطی که

$$\frac{a}{999} + \frac{b}{1001} = \frac{1}{999999}$$

۲۳. نقطه‌های  $A, B, C, D, E, F$  را، به ترتیب وسط ضلع‌های  $AB$ ،  $M, K, I, H$  و  $O$  از پنج ضلعی  $ABCDE$  انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، طول خط شکسته  $HKOIMH$  از طول خط شکسته  $ACEBDA$  کمتر است.

۲۴. سه جمله‌ای‌ها درجه دوم

$$x^4 + b_1x^2 + c_1 \quad x^4 + b_2x^2 + c_2$$

ضریب‌هایی درست و ریشه مشترکی نادرست دارند. ثابت کنید، این دو سه جمله‌ای، بر هم منطبق‌اند، یعنی  $b_2 = b_1$  و  $c_2 = c_1$ .

۲۵\*. ۲۰۰ تیم فوتبال مسابقه می‌دهند. روز اول، هر تیم، یک بازی، روز دوم هم، هر تیم، یک بازی داشت و غیره. ثابت کنید، بعد از روز ششم، می‌توان ۳۴ تیم پیدا کرد که، هیچ دو تایی از آن‌ها، با هم بازی نکرده‌اند.

سال نهم

. ۲۶. همان مساله ۲۰

. ۲۷. همان مساله ۲۱

. ۲۸. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} a = bcd \\ a + b = cd \\ a + b + c = d \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

۲۹. روی ضلع‌های مثلث  $ABC$ ، متوازی‌الاضلاع‌های  $AA'B''B$ ،  $CC'A''A$ ،  $BB'C''C$  را ساخته‌ایم؛ در ضمن، طول ضلع‌های جانبی متوازی‌الاضلاع‌ها با هم برابرند:

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = a$$

مقدار  $a$  را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$|A'A''| = 3, |B'B''| = 4, |C'C''| = 5$$

. ۳۰. همان مساله ۲۴.

. ۳۱. عدهای درست  $a$ ,  $b$  و  $c$  را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\frac{a}{999} + \frac{b}{1000} + \frac{c}{1001} = \frac{1}{999 \times 1000 \times 1001}$$

سال دهم

. ۳۲. همان مساله ۲۰.

. ۳۳. همان مساله ۲۱.

. ۳۴. برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  می‌دانیم:  $ab = a + b$ . کمترین مقدار

حاصل ضرب  $ab$  چقدر است؟

. ۳۵. همه ریشه‌های مثبت این معادله را پیدا کنید:

$$x^{1986} + 1986^{1985} = x^{1985} + 1986^{1986}$$

. ۳۶. همان مساله ۳۱

. ۳۷. مطلوب است زاویه بین یال  $AB$  و وجه  $ACD$  در گنج سه‌وجهی

$ABCD$  به راس  $A$ ، به شرطی که

$$\widehat{BAC} = 45^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ, \widehat{BAD} = 60^\circ$$

شور نهایی (سال هشتم)

۲.۴۸ و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + 1$$

$$\text{ثابت کنید: } 1 < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

۳۹. ثابت کنید، در هر چندضلعی، ضلع  $BC$  و راس  $A$  (غیر از دو راس  $B$  و  $C$ ) پیدا می‌شود که، اگر از نقطه  $A$  بر خط راست  $BC$  عمود کنیم، پای عمود روی ضلع  $BC$  قرار گیرد.

۴۰. مریخی، در نیمه شب متولد می‌شود و درست ۱۰۰ شبانه روز زندگی می‌کند. می‌دانیم، در طول تاریخ تمدن مریخ، روی هم به تعداد فرد مریخی به دنیا آمده است. ثابت کنید، دست کم، ۱۰۰ روز وجود دارد که، تعداد ساکنان مریخ در هریک از آن‌ها، عددی فرد بوده است.

۴۱. مریع  $ABCD$  مفروض است. روی ضلع  $AB$ ، نقطه  $K$ ، روی ضلع  $CD$ ، نقطه  $H$  و روی پاره خط راست  $KH$ ، نقطه  $M$  را انتخاب کرده‌ایم. دایره‌های محیطی مثلث‌های  $AKM$  و  $MHC$  را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه دوم برخورد این دایره‌ها (غیر از نقطه  $M$ )، روی قطر  $AC$  از مریع قرار دارد.

۴۲\*. در کشوری، یکی از خط‌های هوایی یکسره را تعطیل کردند. معلوم شد، با وجود این، می‌توان از هر مرکز هوایی کشور، به هر مرکز دیگر، ولو با تعویض هوایپما، پرواز کرد. قبل از بسته شدن این خط، می‌شد هر پرواز هوایی را، از هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداقل  $n$  بار فرود هوایپما انجام داد. ثابت کنید، اکنون می‌توان سفر هوایی را از هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداقل  $2n$  مرتبه فرود هوایپما انجام داد (برای محاسبه، فرود در مقصد را هم به حساب بیاورید).

۴۳. دنباله‌ای شامل ۳۶ جمله، از صفرها و واحدها، با پنج صفر آغاز شده است. جمله‌های بعدی دنباله چنان‌اند که، هریک از ۳۲ ترکیب ممکن

را، می‌توان بین پنج جمله پشت سر هم دنباله پیدا کرد. پنج جمله آخر دنباله را پیدا کنید.

۴۴\*. ثابت کنید، می‌توان روی صفحه چند خط راست رسم کرد و چند نقطه را چنان نشان گذاشت که، روی هر خط راست، درست چهار نقطه نشان دار وجود داشته باشد و از هر نقطه نشان دار، درست چهار خط راست گذشته باشد.

۴۵\*. صفحه کاغذ شطرنجی، شامل  $45 \times 30$  خانه در دسترس است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: در هر حرکت (که به نوبت انجام می‌گیرد)، روی خط راستی که دو گره مجاور شبکه را به هم وصل می‌کند، می‌برند. نفر اول، بریدن را از کنار صفحه آغاز می‌کند؛ سپس، هر بازی کن در نوبت خود، باید برش بعدی را، به دنبال برش قبلی و از جایی ادامه دهد که برش نفر قبل تمام شده است. کسی بازی را می‌برد که، بعد از حرکت او، صفحه شطرنجی کاغذ، به دو بخش تقسیم شده باشد. به شرط بازی درست، کدام برنده می‌شود، آن که بازی را آغاز کرده است، یا رقیب او؟

دور نهایی (سال نهم)

.۴۶. همان مساله ۳۸.

.۴۷. همان مساله ۳۹.

.۴۸. همان مساله ۴۰.

.۴۹. همان مساله ۴۱.

۵۰. عضوهای مجموعه  $A$ ، عددهایی مثبت‌اند. می‌دانیم، مجموع هر دو عضو دلخواه از  $A$ ، خود عضوی از  $A$  است و، در ضمن، هر بازه  $[a, b] < 0$ ، شامل بازه‌ای است که به طور کامل از عضوهای مجموعه  $A$  تشکیل شده است. ثابت کنید، مجموعه  $A$ ، از همه عددهای مثبت حقیقی تشکیل شده است.

۵۱. به این الگوریتم توجه کنید:

کام ۰  $m = n$  می‌گیریم.

گام ۱. اگر  $n$  عددی زوج باشد، آن را نصف و، اگر فرد باشد، یک واحد به آن اضافه می‌کنیم.

گام ۲. اگر  $1 < n$ ، همان گام اول را برمی‌داریم و اگر  $1 = n$ ، الگوریتم تمام می‌شود.

چند عدد طبیعی  $m$  وجود دارد که، به ازای هر یک از آن‌ها، برای انجام این الگوریتم، درست ۱۵ بار از گام اول لازم باشد؟

۵۲. همان مساله ۴۴.

۵۳\*. مهره شاه، صفحه شطرنجی  $9 \times 9$  را می‌پیماید، به نحوی که، در هر خانه، درست یکبار باشد. مسیر حرکت شاه، مسیری بسته نیست و می‌تواند خودش را قطع کرده باشد. حداقل طول مسیر حرکت شاه چقدر است، به شرطی که حرکت در طول قطر برابر  $\sqrt{2}$  و حرکت قائم یا افقی برابر ۱ باشد.

دور نهایی (سال دهم)

۵۴. قطر یک مجموعه، به بزرگترین فاصله بین دو نقطه آن گفته می‌شود (اگر چنین فاصله‌ای وجود داشته باشد). می‌دانیم، مجموع قطرهای چندضلعی‌های  $M_1, M_2, \dots, M_n$  از قطر اجتماع آن‌ها کمتر است. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که هیچ‌کدام از چندضلعی‌ها را قطع نمی‌کند و، در هر سمت آن، دست‌کم یکی از چندضلعی‌ها قرار دارد.

۵۵.  $f : R \rightarrow R$  : تابعی پیوسته است. می‌دانیم، برای هر عدد حقیقی

$x$ ، عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به نحوی که

$$\underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n \text{ بار}} = 1$$

. ثابت کنید:  $f(1) = 1$ .

۵۶. ثابت کنید:

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$$

۵۷. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  (که لوزی نیست)، نیمساز زاویه  $BAD$  را رسم کرده‌ایم که، خط‌های راست  $BC$  و  $CD$  را، به ترتیب، در نقطه‌های  $X$  و  $Y$  قطع کرده است. ثابت کنید، مرکز دایره‌ای که از نقاطهای  $C$  و  $Y$  می‌گذرد، روی محيط دایره‌ای قرار دارد که از نقاطهای  $B$  و  $D$  گذشته است.

۵۸. این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^3 + \sqrt{1+x^6}}$$

۵۹\*. ثابت کنید، می‌توان چند دایره را روی صفحه چنان رسم کرد که نقطه برخورد درونی نداشته باشند و، هریک از آن‌ها، درست بر پنج دایره دیگر مماس باشد.

۶۰. برای عددهای حقیقی  $a, b, c, x, y$  و  $z$  می‌دانیم:

$$u_1 = ax + by + cz, \quad v_1 = ax + bz + cy,$$

$$u_2 = ay + bz + cx, \quad v_2 = az + by + cx,$$

$$u_3 = az + bx + cy, \quad v_3 = ay + bx + cz$$

$$u_1 u_2 u_3 = v_1 v_2 v_3$$

a)

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| ۱  | ۲  | ۳  | ۴  |
| ۵  | ۶  | ۷  | ۸  |
| ۹  | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
| ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ |

b)

|   |   |    |    |
|---|---|----|----|
| ۱ | ۵ | ۹  | ۱۳ |
| ۲ | ۶ | ۱۰ | ۱۴ |
| ۳ | ۷ | ۱۱ | ۱۵ |
| ۴ | ۸ | ۱۲ | ۱۶ |

شکل ۱۴

ثابت کنید، مجموعه  $\{u_1, u_2, u_3\}$  با مجموعه  $\{v_1, v_2, v_3\}$  برابر است.  
۶۱\*. همان مساله ۴۵، برای صفحه شطرنجی  $30 \times 30$ .

## ۱۹۸۷

### سال پنجم

- در خانه‌های یک جدول  $4 \times 4$ ، عددهای از ۱ تا ۱۶ را، آن‌طور که در شکل a-۱۴ دیده می‌شود، نوشته‌ایم. می‌توانیم بنابر قاعدة زیر، عددهای این جدول را عوض کنیم: به همه عددهای یک سطر، یک واحد اضافه، یا از همه عددهای یک ستون، یک واحد کم کنیم. چگونه می‌توان، با این عمل‌ها، به جدول شکل b-۱۴ رسید؟
- در کشوری، چهار نوع اسکناس وجود دارد: ۱ دلاری، ۱۰ دلاری، ۱۰۰ دلاری و ۱۰۰۰ دلاری. آیا می‌توان نیم میلیون عدد اسکناس به ارزش یک میلیون دلار جدا کرد؟
- می‌خواهیم شش قلعه را، به وسیله جاده، طوری به هم مربوط کنیم که، هر دو قلعه دلخواه، به هم مربوط باشند. طرحی از قلعه‌ها و جاده‌ها رسم کنید که تنها سه چهار راه وجود داشته باشد و، در ضمن، هر جاده به وسیله دو جاده دیگر قطع شده باشد.

۴. پسرها هر کدام یک پیراشکی و دخترها هر کدام یک شوکولات خریدند و مبلغی پرداختند. ولی اگر پسرها شوکولات و دخترها پیراشکی می خریدند، روی هم یک کوپک بیشتر می پرداختند. می دانیم، تعداد پسرها از تعداد دخترها بیشتر است. چندتا؟

۵. چند بلیت اتوبوس باید تهیه کرد تا در بین آنها، بلیتی با شماره شانس وجود داشته باشد؟ بلیتی را شانس به حساب می آورند که مجموع سه رقم اول با مجموع سه رقم آخر آن، با هم برابر باشند. تعداد بلیت‌ها، محدود نیست.

۶. دو نفر «خط و نقطه» بازی می‌کنند، در یک جدول شامل  $9 \times 9$  خانه. اولی در یکی از خانه‌ها خط و، سپس، دومی در یک خانه آزاد، نقطه می‌گذارد. بعد از پرشدن جدول، برای هر سطر یا هر ستونی که تعداد خط‌های بیشتری دارد، یک امتیاز به اولی، و برای هر سطر یا ستونی که تعداد نقطه‌های بیشتری دارد، یک امتیاز به دومی داده می‌شود. اولی چگونه می‌تواند برنده شود (امتیاز بیشتری بیاورد)؟

سال ششم

۷. همان مسالة ۱.

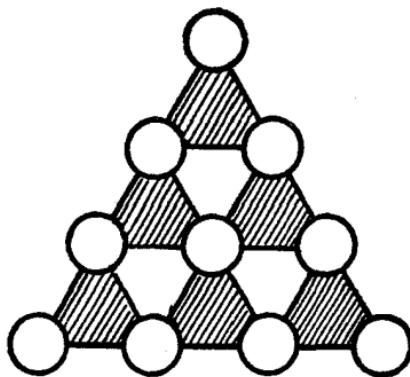
۸. در مثلث متساوی الساقین  $ABC$ ، ارتفاع  $CH$  و میانه  $BK$  را رسم کرده‌ایم. می دانیم:

$$|CH| = |BK| \text{ و } \widehat{KBC} = \widehat{HCB}$$

ثابت کنید، مثلث  $ABC$  متساوی الاضلاع است.

۹. همان مسالة ۴.

۱۰. واحد پول در کشورهای «دلاری» و «دیلری»، به ترتیب «دلار» و «دیلر» است؛ در ضمن در «دلاری»، هر «دلار» با ۱۰ «دیلر» معاوضه می‌شود،



شکل ۱۵

ولی در «دیلری»، هر «دیلر» با ۱۵ «دالر». کسی یک «دیلر» دارد و می‌تواند آزادانه به هر یک از دو کشور مسافرت کند و پول خودش را معاوضه کند. ثابت کنید، هرگز مقدار «دالرها» با مقدار «دیلرها» برابر نمی‌شود.

.۱۱. همان مساله ۵.

.۱۲. آیا می‌توان عددهای از ۰ تا ۹ را (هر کدام یکبار) در دایره‌های شکل ۱۵، طوری قرار داد که، مجموع عددهای سه راس هر مثلث هاشور خورده با مجموع عددهای سه راس هر مثلث هاشور خورده دیگر، برابر باشد؟

### سال هفتم

.۱۳. پاره خط‌های راستی که وسط ضلع‌های رویه را در چهارضلعی کوثر  $ABCD$  به هم وصل کرده‌اند، چهارضلعی اصلی را به چهار چهارضلعی دیگر تقسیم کرده‌اند که محیطی برابر دارند. ثابت کنید،  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع است.

.۱۴. همان مساله ۴.

.۱۵. همان مساله ۱۰.

۱۶. راس‌های خط شکسته بسته‌ای که خودش را قطع نکرده است و دارای هشت ضلع است، راس‌های یک مکعب‌اند. ثابت کنید، یکی از ضلع‌های این خط شکسته، بر یکی از یال‌های مکعب منطبق است.

۱۷. شرکت ساختمانی - تعمیراتی «مامسه»، ساختن جاده‌ای به طول ۱۰۰ کیلومتر از «آرباتوف» تا «چرنومور» را به عهده گرفت. برنامه‌ای که شرکت برای ساختن جاده در نظر گرفته است، چنین است: در ماه اول یک کیلومتر آن را آماده می‌کند و، سپس اگر در آغاز ماه  $\frac{1}{a}$  کیلومتر جاده ساخته شده‌است، ضمن آن ماه  $\frac{1}{a^2}$  کیلومتر از جاده آماده می‌شود. آیا هرگز تمام جاده، آماده بهره‌برداری می‌شود؟

۱۸. ابزاری برای رسم شکل‌ها بر صفحه در اختیار داریم که، به کمک آن، می‌توان

الف) از دو نقطه مفروض، خط راستی عبور داد؛

ب) از یک نقطه مفروض واقع بر یک خط راست، عمودی بر خط راست اخراج کرد.

اکنون، اگر نقطه‌ای در بیرون خط راست باشد، چگونه می‌توان با این وسیله، عمودی از این نقطه بر خط راست فرود آورد؟

### سال هشتم

۱۹. روی خانه‌های یک صفحه شطرنجی  $10 \times 10$ ، ۵۰ مهره گذاشته شده‌است: ۲۵ مهره در یک چهارم گوشة چپ و پایین صفحه و ۲۵ مهره در یک چهارم گوشة راست و بالای آن. با هر حرکت، یک مهره می‌تواند از روی مهره مجاور خود بپرد و در خانه آزادی که در ردیف افقی، عمودی و یا قطری آن‌هاست، قرار گیرد. آیا با تکرار این حرکت، می‌توان همه مهره‌ها را در خانه‌های نیمة چپ صفحه قرار داد؟

۲۰. به تعداد کافی، سکه‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ کوپیکی و همچنین سکه‌های ۱ روبلی در اختیار داریم (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپیک است). می‌دانیم  $a$  کوپیک را می‌توان با  $b$  سکه انتخاب کرد. ثابت کنید، در این صورت،  $b$  روبل را می‌توان با  $a$  سکه، به دست آورد.

۲۱.  $a, b, c, d$  و چهار عدد حقیقی دلخواهند. ثابت کنید:

$$(1+ab)^r + (1+cd)^r + (ac)^r + (bd)^r \geq 1$$

۲۲. مثلث  $ABC$  مفروض است. نقطه‌های  $A_1$  و  $A_2$ ، ضلع  $AC$  را و نقطه‌های  $B_1$  و  $B_2$ ، ضلع  $BC$  را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، اگر دو زاویه  $B_1AB_2$  و  $A_1BA_2$  برابر باشند، آنوقت مثلث  $ABC$ ، متساوی الساقین است.

۲۳. روی شاخه‌های یک چنار بزرگ، چند کلاع نشسته‌اند. با علامت، آنها جای خود را با هم عوض می‌کنند. هر دقیقه، یکی از کلاع‌ها، همسایه خود را که روی همان شاخه نشسته است، بیرون می‌کند و این کلاع به شاخه بالاتر می‌رود؛ اگر شاخه بالاتری وجود نداشته باشد، کلاع به پرواز درمی‌آید. همه شاخه‌ها در ارتفاع‌های مختلفی قرار دارند. ثابت کنید، مدت زمانی که برای به پایان رسیدن این جریان لازم است (یعنی وقتی که روی هر شاخه، تنها یک کلاع نشسته باشد)، به ردیف پروازها بستگی ندارد، بلکه تنها به وضع استقرار کلاع‌ها در آغاز، بستگی دارد.

۲۴. ۶۴ مکعب کوچک را به صورت مریع  $8 \times 8 \times 8$  چیده‌ایم. آیا می‌توان همین مکعب‌های کوچک را به صورت یک مکعب  $4 \times 4 \times 4$  طوری چید که مکعب‌های مجاور، در وضع جدید هم، مجاور یکدیگر باشند؟

### سال نهم

۲۵. خانه‌های جدول  $8 \times 8$ ، شیوه صفحه شطرنج به رنگ‌های سیاه

و سفیدند. می‌توانیم جای هر دو ردیف افقی یا هر دو ردیف قائم را با هم عوض کنیم. آیا می‌توان با تکرار این عمل، به جدولی رسید که تمامی نیمة سمت چپ آن شامل خانه‌های سیاه و تمامی نیمة سمت راست آن، شامل خانه‌های سفید باشد؟

۲۶. حاصل این کسر را محاسبه کنید:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\dots}}} \end{array}$$

(روی هم، در این کسر، ۱۰۰ بار از عدد ۲ استفاده شده است).

۲۷. دو دایره، در نقطه‌های  $A$  و  $B$ ، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مماس‌های بر دایره‌ها در نقطه‌های  $A$  و  $B$ ، بر هم عمودند.  $M$  را نقطه‌ای واقع بر محیط یکی از دایره‌ها می‌گیریم، به نحوی که در درون دایره دیگر قرار گرفته باشد.  $AM$  و  $BM$  را از طرف  $M$  امتداد می‌دهیم تا محیط دایره‌ای را که  $M$  در درون آن است، در نقطه‌های  $X$  و  $Y$  قطع کنند. ثابت کنید  $XY$  قطعی از این دایره است.

۲۸. همان مساله ۲۱

۲۹. بزرگترین عدد طبیعی را پیدا کنید که هر رقم آن، به جز دو رقم اول و آخر، از واسطه حسابی دو رقم مجاور خود کوچکتر باشد.

۳۰. اخترشناس ۵۰ ستاره در آسمان مشاهده کرد و، ضمن محاسبه، متوجه شد، مجموع فاصله‌های دویه‌دوی این ستارگان، برابر  $S$  است. ابر روی ۲۵ ستاره را پوشاند. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های دویه‌دوی ۲۵ ستاره‌ای که دیده می‌شوند، از  $\frac{1}{2}S$  کمتر است.

## سال دهم

- .۳۱. همان مساله ۲۰
- .۳۲. همان مساله ۲۶
- .۳۳. همان مساله ۲۷
- .۳۴. همان مساله ۲۱
- .۴۵. آیا عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به نحوی که  $(n+1)^n$  برابر  $n^n + (n+1)$  باشد؟ ۱۹۸۷
- .۳۰. همان مساله ۳۰

## دور نهایی (سال هشتم)

- .۳۷. در مثلث  $ABC$ ، هر سه زاویه حاده‌اند. زاویه  $B$  برابر  $60^\circ$  درجه است و ارتفاع‌های  $AD$  و  $CE$  یکدیگر را، در نقطه  $O$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$ ، روی نیمساز مشترک دو زاویه  $COD$  و  $AOE$  قرار دارد.
- .۳۸. عددهای مثبت  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  مفروض‌اند. ثابت کنید، به شرط  $ad = 1$ ، در فاصله از  $ab$  تا  $(a+c)(b+d)$ ، دست‌کم مجذور یک عدد درست وجود دارد.

.۳۹. روی تخته سیاه، این شکل، برای بازی با رقم‌ها، رسم شده‌است:

$$((((((\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}) * (\underline{\quad}))$$

دو نفر بازی می‌کنند. حرکت‌ها به نوبت انجام می‌گیرد. نفر اول، بازی را آغاز می‌کند و، در نخستین حرکت خود، رقمی را در نخستین جای خالی (در سمت چپ) می‌نویسد. در هر حرکت بعدی، باید رقمی در جای خالی بعد نوشته و، به جای علامت ستاره سمت چپ آن، یکی از دو علامت جمع یا ضرب

گذاشته شود. در ضمن، یک رقم را نمی‌توان دو بار نوشت. در پایان بازی، مقدار عبارتی که به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. اگر حاصل این عبارت، عددی زوج باشد، نفر اول برده است، و اگر عددی فرد باشد، پیروزی با نفر دوم است. اگر هر دو نفر، درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود؟

۴۰. در شهری، تنها می‌توانند آپارتمان‌ها را با هم مبادله کنند (ولی حق تقسیم آن‌ها را ندارند). دو خانواده‌ای که آپارتمان‌های خود را عوض کرده‌اند، حق ندارند در همان روز، به مبادله دیگری پردازنند. ثابت کنید، هر مبادله آپارتمان‌ها را، هر قدر بفرنج باشد، می‌توان در دو روز به انجام رساند.

۴۱. برای شش ضلعی  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ، نقطه  $O$  وجود دارد، به نحوی که همه ضلع‌های شش ضلعی، از آنجا با زاویه  $60^\circ$  درجه دیده می‌شوند. ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$|OA_1| > |OA_3| > |OA_5|,$$

$$|OA_2| > |OA_4| > |OA_6|$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$|A_1A_2| + |A_3A_4| + |A_5A_6| < |A_2A_3| + |A_4A_5| + |A_6A_1|$$

۴۲. این عدد را به ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید:

$$989 \times 1001 \times 1007 + 320$$

۴۳\*. صفحه را به چند دایره تقسیم کرده‌ایم که، در بین آن‌ها، دایره‌های متقطع هم وجود دارد، ولی یکی در درون دیگری نیست. ثابت کنید، قطعه‌هایی را که، به این ترتیب، از کاغذ جدا شده‌اند، نمی‌توان به صورت چند دایره غیرمتقطع درآورد.

\*۴۴. نگهبانان، می خواهند دزدی را که به قصر سلطان بغداد وارد شده بود، دستگیر کنند. برای گفتن دزد، نگهبان باید با او در یک اتاق باشد. قصر دارای ۱۰۰۰ اتاق است که به وسیله درها به هم مربوطاند. طرح ساختمان قصر به گونه‌ای است که از یک اتاق به اتاق مجاور، جز از طریق دری که آن‌ها را بهم وصل کرده است (و تنها یک در) نمی‌توان وارد شد.

الف) ثابت کنید، هر طرحی که قصر داشته باشد، ۱۰ نگهبان می‌توانند با برنامه‌ریزی، دستگیری دزد را تضمین کنند.

ب) ثابت کنید، پنج نگهبان، برای این منظور، کافی نیست.

ج) ثابت کنید، شش نگهبان برای این منظور کافی است.

دور نهایی (سال نهم)

۴۵. همان مساله ۳۷.

۴۶. همان مساله ۳۸.

۴۷. هشت عدد حقیقی غیر منفی را، که مجموعی برابر واحد دارند، در راس‌های یک مکعب گذاشته‌ایم. عده‌های دو انتهای یک یال را در هم ضرب کرده و، عدد حاصل را، روی یالی که این دو راس را به هم وصل کرده است، نوشته‌ایم. ثابت کنید، مجموع حاصل ضرب‌هایی که به این ترتیب

به دست می‌آیند، از  $\frac{1}{4}$  تجاوز نمی‌کند.

۴۸. دنباله عده‌های طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ... داده شده است و می‌دانیم:

$$a_1 < 1987 \text{ و } a_k + a_{k+1} = a_{k+2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ثابت کنید، اگر برای مقداری از  $n$ ، عده‌های  $a_n - a_1$  و  $a_2 + a_{n+1}$  بر ۱۹۸۷ بخش‌پذیر باشند، آنوقت،  $n$  عددی فرد است.

۴۹. همان مساله ۴۱.

۵۰. همان مساله ۴۲.

۱.۵۱. «کارت» را به طور ستونی روی هم چیده‌ایم. با این ستون کارت‌ها، می‌توانیم یکی از دو عمل زیر را انجام دهیم:  
 الف) بخشی از کارت‌ها را از بالا برداریم و، با همان ردیف، زیر بقیه کارت‌ها بگذاریم؛  
 ب)  $n$  کارت از بالا برداریم و، با همان ردیف، در  $n$  فاصله بین  $1 + 2n$  کارت دیگر قرار دهیم.  
 ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، نمی‌توان از وضع نخستین کارت‌ها، به بیش از  $(1 + 2n)$  وضع جدید رسید.

۴۴. همان مساله. ۵۲

دور نهایی (سال دهم)  
 ۵۳. همان مساله. ۳۷  
 ۵۴. تابع‌های پیوسته

$$f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

چنان‌اند که، برای هر  $x$  از بازه  $[0, 1]$  داریم:

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

ثابت کنید، اگر  $f$  تابعی صعودی باشد، می‌توان عددی مثل  $a$  از بازه  $[0, 1]$  را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$f(a) = g(a) = a$$

۴۷. همان مساله. ۵۵

۵۶. دنباله عددی حقیقی  $x_1, x_2, x_3, \dots$  و عدد طبیعی  $t$  داده شده‌اند. ثابت کنید، اگر بین همه مجموعه‌های مرتب ممکن  $t$  عضوی

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+t}\}$$

$t$  عضو متمایز، و نه بیشتر، وجود داشته باشد، آنوقت، دنباله  $x_1, x_2, \dots, x_3$  ... متناوب است.

۵۷. قطرهای چهارضلعی محاطی  $ABCD$ ، در نقطه  $O$  به هم رسیده‌اند. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & \frac{|AB|}{|CD|} + \frac{|CD|}{|AB|} + \frac{|BC|}{|AD|} + \frac{|AD|}{|BC|} \leq \\ & \leq \frac{|OA|}{|OC|} + \frac{|OC|}{|OA|} + \frac{|OB|}{|OD|} + \frac{|OD|}{|OB|} \end{aligned}$$

. ۴۲. همان مسالة ۵۸

. ۵۹. همان مسالة ۵۱

۶۰\*. از مجموعه  $m$  عضوی،  $S$  زیرمجموعه جدا کرده‌ایم که، به ترتیب، دارای  $a_1, a_2, \dots, a_s$  عضو هستند. می‌دانیم، در بین این زیرمجموعه‌ها، هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نیست. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\binom{m}{a_1}} + \frac{1}{\binom{m}{a_2}} + \dots + \frac{1}{\binom{m}{a_s}} \leq 1$$

$$\binom{m}{a_k} = \frac{m!}{a_k!(m-a_k)!}$$

۱۹۸۸

سال پنجم

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۴  | ۹  | ۵  |
| ۱۰ | ۱۸ | ۱۲ |
| ۶  | ۱۳ | ۷  |

شکل ۱۶

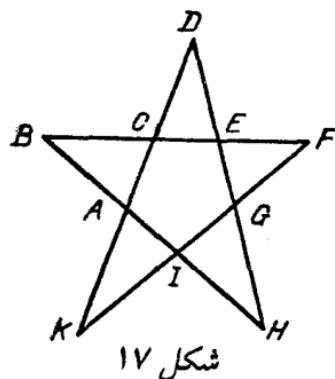
۱. در خانه‌های یک جدول  $3 \times 3$ ، صفر گذاشته شده است. می‌توان یک مربع  $2 \times 2$  در نظر گرفت و به همه عددهای خانه‌های آن، یک واحد اضافه کرد. ثابت کنید، با تکرار این عمل، نمی‌توان به جدولی رسید که در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

۲. داور و هر یک از ۳۰ بازی‌کن، برای خود، عددهای از ۱ تا ۳۰ را به ترتیب لخواهی نوشته‌اند. بعد، هر یک از بازی‌کنان، نوشته خود را با نوشته داور مقایسه می‌کند؛ اگر در ردیفی، عدد او با عدد داور برابر باشد، یک امتیاز می‌گیرد. معلوم شد، این ۳۰ نفر، امتیازهای مختلفی گرفته‌اند (هیچ دو نفری امتیاز مساوی نداشتند). ثابت کنید، نوشته یکی از بازی‌کنان، با نوشته داور تطبیق می‌کند.

۳. آیا می‌توان عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را، به ترتیبی در یک ردیف نوشت که اختلاف هر دو عدد مجاور (به شرطی که عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم)، از ۵۰ کمتر نباشد؟

۴. آیا می‌توان عددهای درست  $a$  و  $b$  را طوری پیدا کرد که یکی از آنها بر مجموع  $a$  و  $b$  و دیگری بر تفاضل آنها، بخش‌پذیر باشد؟

۵. ۱۰۰۱ مهره روی میز گپه شده است. در هر حرکت، می‌توان از گپه‌ای که بیش از یک مهره دارد، یک مهره را کنار گذاشت، سپس، یکی از گپه‌ها را به دو بخش تقسیم کرد. آیا می‌توان بعد از چند حرکت، به وضعی رسید که روی میز تنها گپه‌هایی، هر یک شامل سه مهره، وجود داشته باشد؟



شکل ۱۷

۶. قلعه‌ای شامل ۶۴ اتاق مربع شکل است؛ اتاق‌ها در هر دیوار خود دری دارند و به شکل مربع  $8 \times 8$  قرار گرفته‌اند. کف اتاق‌ها، رنگ سفید دارند. هر صبح، رنگ کار، در قلعه گردش می‌کند؛ در ضمن، از هر اتاقی که رد می‌شود، رنگ کف آن را عوض می‌کند (اگر سفید است، به رنگ سیاه و اگر سیاه است به رنگ سفید درمی‌آورد). آیا ممکن است، بعد از مدتی، کف اتاق‌ها، شبیه صفحه شطرنج، به رنگ‌های سفید و سیاه در آمده باشند؟

### سال ششم

۷. همان مساله ۳.

۸. همان مساله ۱.

۹. هر یک از عددهای طبیعی  $a, b, c$  و  $d$ ، بر عدد طبیعی  $ab - cd$  بخش پذیرند. ثابت کنید

$$ab - cd = 1$$

۱۰. ثابت کنید، ستاره شکل ۱۷ را نمی‌توان طوری رسم کرد که داشته باشیم:

$$|AB| < |BC|, |CD| < |DE|, |EF| < |FG|,$$

$$|GH| < |HI|, |IK| < |KA|$$

۱۱. دور میزگردی، ۲۵ نفر نشسته‌اند. هر کدام از آن‌ها، دو کارت در دست دارند. روی هریک از ۵۰ کارت، یکی از عدهای از ۱ تا ۲۵ نوشته شده‌است و، در ضمن، هر عدد روی دو کارت. در هر دقیقه، با علامت داور، هر کس یکی از کارت‌های خود را به نفر دست راستی خود می‌دهد و، در ضمن، آن کارتی را که عدد آن کوچکتر است. اگر زمانی، در دست یک نفر، دو کارت با عدهای برابر پیدا شود، جریان بازی تمام می‌شود. ثابت کنید، این وضع، دیر یا زود پیش می‌آید.

۱۲. ۵۰۰ چوب کبریت روی میز است. دو نفر با هم بازی می‌کنند. هر کس، در نوبت خود، می‌تواند ۱، ۲، ۴، ۸، ... (توانی از عدد ۲) چوب کبریت را بردارد. کسی بازد که نتواند، چیزی از روی میز بردارد. اگر هر دو نفر سنجیده و درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

### سال هفتم

۱۳. برای عدهای حقیقی  $x$  و  $y$  می‌دانیم:

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1.$$

۱۴. مثلث  $ABC$  زاویه‌هایی حاده دارد. در این مثلث، ارتفاع  $AH$  میانه  $BM$  را در نقطه  $L$  و نیمساز  $CK$  را در نقطه  $N$  قطع کرده‌است. میانه  $BM$  با نیمساز  $CK$ ، یکدیگر را در نقطه  $P$  قطع کرده‌اند (نقاطه‌های  $L$ ،  $N$  و  $P$ ، متمایزند). ثابت کنید، مثلث  $LNP$  نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۵. همان مساله ۹.

۱۶. همان مساله ۱۱.

۱۷. همان مساله ۱۰.

۱۸. راس‌های خانه‌ها را در یک صفحه شطرنجی  $21 \times 21$  به رنگ‌های قرمز و آبی درآورده‌ایم. در ضمن، همه راس‌های کنار بالا و همه راس‌های کناری سمت راست را، بهجز پایین‌ترین راس، با قرمز، رنگ کرده‌ایم. بقیه راس‌های کناری، آبی‌اند. ثابت کنید، در این صفحه شطرنجی، خانه‌ای با دو راس قرمز و دو راس آبی وجود دارد؟ در ضمن، راس‌های قرمز در دو انتهای یکی از ضلع‌های این خانه قرار دارند.

### سال هشتم

۱۹. می‌دانیم:

$$abc = 1 \text{ و } a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ثابت کنید، دست‌کم یکی از عددهای  $a$ ،  $b$  یا  $c$  برابر واحد است.

۲۰.  $ABC$ ، مثلثی است با زاویه‌های حاده؛ زاویه  $A$ ، در این مثلث، برابر  $30^\circ$  درجه،  $CC_1$  و  $BB_1$  ارتفاع‌های آن و  $B_2$  و  $C_2$ ، به ترتیب، وسط ضلع‌های  $AC$  و  $AB$  هستند. ثابت کنید، پاره‌خط‌های راست  $B_1C_2$  و  $B_2C_1$  بر هم عمودند.

۲۱. عددی  $100$  رقمی پیدا کنید که، در بین رقم‌های آن، صفر وجود نداشته باشد و، در ضمن، خود عدد بر مجموع رقم‌هایش بخش‌پذیر باشد.

۲۲. ستونی از  $n$  آجر به رنگ‌های مختلف، در جلو ماست. در هر حرکت، چند آجر از زیر بیرون می‌کشیم و با همان ردیف روی ستون قرار می‌دهیم و، بلا فاصله، ستون را برمی‌گردانیم (سرمهه می‌کنیم). ثابت کنید،

تعداد ستون‌های متفاوتی که می‌توان، به این ترتیب، به دست آورد، از ۲۷ تجاوز نمی‌کند.

۲۳. در ۱۲۰ خانه آپارتمانی، ۱۱۹ نفر زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پر جمعیت می‌نامیم که، دست کم، ۱۵ نفر در آن زندگی کنند. هر روز ساکنان یکی از آپارتمان‌ها با هم نزاع می‌کنند و در آپارتمان‌های مختلف پراکنده می‌شوند. آیا درست است که، زمانی، این جاهایی‌ها قطع می‌شود؟

۲۴. الف)  $x$  و  $y$  و  $z$ ، عددهایی غیر منفی‌اند و مجموعی برابر  $\frac{1}{2}$  دارند. ثابت کنید:

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z} \geq \frac{1}{3}$$

ب)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عددهایی غیر منفی‌اند و مجموعی برابر  $\frac{1}{3}$  دارند. ثابت کنید:

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \times \dots \times \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}$$

سال نهم

۲۵. عددهای درست  $a, b, c$  و  $d$  را پیدا کنید، به شرطی که

$$\begin{cases} ab + cd = -1 \\ ac + bd = -1 \\ ad + bc = -1 \end{cases}$$

۲۶. روی ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$ ، مربع‌های  $ABDE$  و  $BCFG$  را در بیرون مثلث ساخته‌ایم. معلوم شد، خط راست  $DG$  با خط راست  $AC$  موازی است. ثابت کنید، مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

۲۷. به شرط  $c < b < a$ ، ثابت کنید معادله

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

دارای دو ریشه  $x_1 < b < x_2 < c$  است؛ در ضمن  $c < b < a$ .

۲۸. الف) همان مساله ۲۴ ب) برای  $n = 2$ .

ب) همان مساله ۲۴ ب) برای  $n = 4$ .

۲۹. درباره عددهای طبیعی  $a$  و  $b$  و  $c$  می‌دانیم،  $a^3$  بر  $b$ ،  $b^3$  بر  $c$  و

$c^3$  بر  $a$  بخش‌پذیرند. ثابت کنید  $^{13}(a+b+c)$  بر  $abc$  بخش‌پذیر است.

۳۰. همه قطرهای یک متوازی السطوح با هم برابرند. ثابت کنید، این متوازی السطوح، یک مکعب مستطیل است.

#### سال دهم

۳۱. همان مساله ۲۸.

۳۲. همان مساله ۲۰.

۳۳. همان مساله ۲۹.

۳۴. تابع‌های  $f(x)$  و  $g(x)$  روی تمامی محور حقیقی معین‌اند و مقدارهای حقیقی می‌دهند. می‌دانیم، برای هر مقدار حقیقی  $x$  و  $y$

$$f(x+g(y)) = 2x+y+5$$

مطلوب است تابع  $(f(y)+f(x))$  (به صورتی صریح، بر حسب  $x$  و  $y$ ).

۳۵. ۱۰۰ عدد طبیعی پشت سر هم داده شده است. آیا می‌توان آن‌ها را طوری روی محیط یک دایره قرار داد که، حاصل ضرب هر دو عدد مجاور، مجبور کامل باشد؟

۳۶. در هر متنظم با قاعده شش‌ضلعی، مرکز کره محیطی بر سطح کره

محاطی واقع است. نسبت طول شعاع کره محیطی بر شعاع کره محاطی را پیدا کنید.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. زاویه‌های مثلث  $ABC$ ، حاده‌اند. در این مثلث، قرینه خط راست  $AC$  را نسبت به خط‌های راست  $AB$  و  $BC$  پیدا کرده‌ایم. دو خط راست حاصل، در نقطه  $K$  به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، خط راست  $BK$ ، از نقطه  $O$ ، مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$  می‌گذرد.

۳۸. عددهای حقیقی  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  و  $x_6$  در بازه  $[1, 5]$  قرار دارند. ثابت کنید:

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5) \times \\ \times (x_5 - x_6)(x_6 - x_1) \leq \frac{1}{16}$$

۳۹. دو عدد چهار رقمی  $a$  و  $b$  را پیدا کنید که، نسبت به هم اول باشند و برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ، عددهای  $a^m$  و  $b^n$ ، دست کم ۴۰۰۰ واحد با هم اختلاف داشته باشند.

۴۰.  $n$  شهر با  $1 - 2n$  جاده یک طرفه به هم مربوط‌اند. در ضمن، بدون نقض قانون حرکت در مسیرهای یک طرفه، می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، جاده‌ای وجود دارد که، با بستن آن، باز هم این ویژگی حفظ می‌شود.

۴۱. در ذوزنقه  $ABCD$  (با قاعده‌های  $AD$  و  $BC$ )، روی ضلع‌های  $CD$  و  $AB$ ، به ترتیب، نقطه‌های  $K$  و  $L$  را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دو زاویه  $BAL$  و  $CDK$  برابر باشند، آنوقت دو زاویه  $BKA$  و  $CKD$  هم برابرنند.

۴۲. دو گپه چوب کبریت، روی میز است: در یکی ۱۰۰ و در دیگری ۲۵۲ چوب کبریت. دو نفر، به نوبت، با هم بازی می‌کنند. در هر حرکت، می‌توان از یک گپه، چند چوب کبریت برداشت، به نحوی که تعداد آنها، بخشیابی از تعداد چوب کبریت‌های گپه دیگر باشد. کسی که آخرین چوب کبریت را بردارد، برنده است. با بازی درست، کدام برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده است، یا رقیب او؟

۴۳. به هر دنباله با پایانی از صفرها و واحدها، یک واژه می‌گوییم. «سه برابر» واژه  $A$  را به سه بار تکرار  $A$ ، یعنی  $AAA$  گوییم. مثلاً، اگر  $A = ۱۰۱$ ، آنوقت «سه برابر» آن  $۱۰۱۱۰۱۱۰۱$  می‌شود. یکی از دو عمل زیر را، درباره هر واژه می‌توان انجام داد.

۱) در جای دلخواهی از آن (ازجمله، در ابتدای انتهای آن)، «سه برابر» هر واژه دلخواه را قرار داد؛

۲) «سه برابر» هر واژه‌ای را از آن حذف کرد.

به این ترتیب، مثلاً از واژه  $۱۰۰۰۱$ ، می‌توان واژه  $۱۱۱۰۰۱$  یا واژه  $۱$  را به دست آورد. آیا با این دو عمل، می‌توان از واژه  $۱۰$  به واژه  $۱$  رسید؟

۴۴\*. بارون مون هاوزن، باغ خود را با درخت‌های کاج و توس پوشاند؛ در ضمن، در فاصله یک کیلومتر از هر درخت کاج، درست ۱۰ درخت توس نشاند. بارون معتقد است که، در باغ او، تعداد درختان کاج، از تعداد درختان توس بیشتر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟

دور نهایی (سال نهم)

.۴۵. همان مساله ۳۷

۴۶. روی صفحه شطرنج، چند مهره گذاشته‌ایم. با هر حرکت، یکی از مهره‌ها را به خانه آزاد مجاور خود (به صورت افقی یا قائم) می‌بریم. بعد از چند حرکت، معلوم شد، هر مهره در همه خانه‌ها، و هر خانه یکبار، بوده

و اکنون به خانه نخستین خود برگشته است. ثابت کنید، لحظه‌ای بوده است که، هیچ مهره‌ای، در خانه اولیه خود نبوده است.

۴۷. برای عددهای حقیقی و مثبت  $a, b, c$  و  $d$ ، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

۴۸. هر خیابان شهر  $A$ ، دو چهار راه دارد. حرکت در روی خیابان‌های شهر، یک طرفه است. شهرداری، طرح ساختمان شبکه پمپ بنزین‌ها را به مسابقه گذاشت؛ این طرح باید چنان باشد که از هر چهار راه، بتوان بدون نقض قانون حرکت کرد و به یکی از پمپ بنزین‌ها رفت، ولی از هر پمپ بنزین نتوان به پمپ بنزین دیگری رفت. ثابت کنید، در همه طرح‌هایی که به شهرداری پیشنهاد می‌شود، تعداد پمپ بنزین‌ها، یکی است.

۴۹. نقطه‌های  $M$  و  $N$  را روی ضلع‌های  $AB$  و  $CD$  از مربع  $ABCD$  انتخاب کرده‌ایم. پاره خط‌های راست  $CM$  و  $BN$  یکدیگر را در نقطه  $P$  و پاره خط‌های راست  $AN$  و  $MD$  یکدیگر را در نقطه  $Q$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید:  $|PQ| \geq \frac{1}{3}|AB|$ .

۵۰. دنباله  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ ، از عددهای طبیعی کوچکتر از ۱۹۸۸ تشکیل شده‌است. در ضمن، برای هر  $m$  و  $n$ ، عدد  $a_m + a_n$  بر  $a_{m+n}$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، این دنباله، متناوب است.

۵۱. همان مسالة ۴۳.

۵۲. همان مسالة ۴۴.

(دور نهایی (سال دهم)

۵۳. حلقه را روی صفحه می‌خزد و، بعد از هر یک متر، ۹۰ درجه می‌چرخد. حلقه ۳۰۰ متر خزید، ۹۹ بار به چپ و ۲۰۰ بار به راست

پیچید. در این موقع، حداکثر فاصله او تا نقطه آغاز حرکت، چقدر می‌تواند باشد؟

۵۴. تابع  $f: R \rightarrow R$ ، پیوسته است و برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1$$

می‌دانیم  $999 = 1000 \cdot f(1000)$ . مطلوب است  $f(500) = ?$ .

۵۵. همان مساله ۳۹.

۵۶. همان مساله ۴۰.

۵۷. مثلث  $ABC$  زاویه‌هایی حاده دارد. نقطه‌های  $M$  و  $N$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  انتخاب کرده‌ایم. دو دایره، یکی به قطر  $CN$  و دیگری به قطر  $BN$  رسم کرده‌ایم؛ این دو دایره، یکدیگر را در نقطه‌های  $P$  و  $Q$  قطع کرده‌اند. اگر  $H$  نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  باشد، ثابت کنید سه نقطه  $P$ ،  $Q$  و  $H$  روی یک خط راست‌اند.

۵۸\*. چندجمله‌ای  $P(x)$ ، با ضریب‌های حقیقی، مفروض است.

ثابت کنید، اگر برای هر  $x$  حقیقی داشته باشیم:

$$P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geq 0$$

آنوقت  $P(x)$ ، به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ، غیر منفی است.

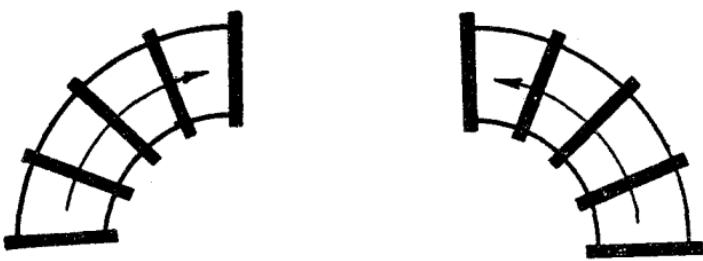
۵۹. همان مساله ۴۳.

۶۰\*.  $n$  ضلعی کوژ، روی صفحه داده شده است.  $a_k$  را طول ضلع  $k$ ام و  $d_k$  را طول تصویر چند ضلعی بر خط راستی می‌گیریم که از ضلع  $k$ ام گذشته است (برای  $k$  از ۱ تا  $n$ ). ثابت کنید:

$$2 < \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4$$

## سال پنجم

۱. برگزار کنندگان المپیاد برای سال‌های از پنجم تا دهم، تصمیم گرفتند، برای هر سال، هفت مساله داده شود که، درست چهار تا از آن‌ها، مورد استفاده برای سال‌های دیگر قرار نگیرد. حداکثر چند مساله می‌توان برای این المپیاد طرح کرد؟
۲. بلیت‌های تراموا، از ۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹ شماره‌گذاری شده‌اند. بلیتی را با شماره شناس به حساب می‌آورند که، مجموع سه رقم اول آن، با مجموع سه رقم آخر، برابر باشد. ثابت کنید، تعداد بلیت‌های شناس، با تعداد بلیت‌هایی که، مجموع رقم‌های شماره‌های آن‌ها، برابر ۲۷ باشد، برابر است.
۳. مجموعه جاده‌های راه‌آهن اسباب‌بازی، شامل قطعه‌هایی از دو نوع ۱ و ۲ است که، روی هرکدام از آن‌ها، جهت حرکت، با پیکان نشان داده شده‌است (شکل ۱۸ را بینید). خط، تنها وقتی آماده حرکت قطار است که، جهت همه قطعه‌ها، با جهت حرکت لوکوموتیو، یکی باشد. با استفاده از همه قطعه‌ها، می‌توان یک مسیر بسته، برای حرکت قطار، ساخت. ثابت کنید، اگر یکی از قطعه‌های نوع ۱ را با یکی از قطعه‌های نوع ۲ عوض کنیم، آن‌وقت نمی‌توان با همه قطعه‌ها، مسیر بسته‌ای، که برای حرکت قطار آماده باشد، درست کرد.
۴. ۳۲ مهره در اختیار داریم که، وزن دو به دوی آن‌ها، با هم اختلاف دارد. ثابت کنید، با ۳۵ بار استفاده از ترازوی دو کفهای، و بدون استفاده از وزنه، می‌توان سنگین‌ترین مهره و مهره‌ای را، که از نظر وزن، در ردیف دوم است، پیدا کرد.
۵. دست‌کم دو عدد شش‌رقمی پیدا کنید که، اگر اولی را بعد از دومی



شکل ۱۸

بنویسیم، عدد ۱۲ رقمی حاصل، بر حاصل ضرب دو عدد اصلی، بخش پذیر باشد.

۶. دو نفر روی یک جدول  $10 \times 10$ ، خط و نقطه بازی می‌کنند. هر کس در نوبت خود، یک خط یا یک نقطه در یکی از خانه‌های خالی جدول می‌گذارد. کسی بازی را برده است که، برای نخستین بار، سه خط (یا سه نقطه) به ردیف افقی یا قائم یا قطری به دست آورده باشد؛ در ضمن، ردیف باید بدون جای خالی باشد. آیا یکی از دو بازیکن، می‌تواند بُرد خود را، با طرح برنامه‌ای، تضمین کند؟ اگر جواب مثبت است، کدام یک: آن که بازی را آغاز کرده است یا رقیب او؟

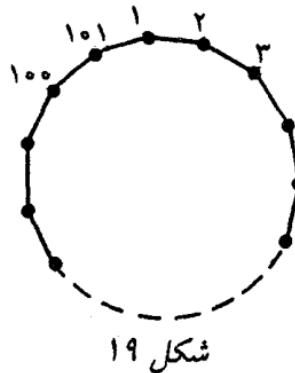
### سال ششم

۷. همان مساله ۱، ولی تنها برای کلاس‌های ششم تا دهم.  
۸. در پنج ضلعی کوثر  $ABCDE$ ، قطرهای  $BD$  و  $BE$ ، به ترتیب، قدر  $AC$  را در نقطه‌های  $K$  و  $M$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$|AE| = |EK| = |KB| \text{ و } |AK| = |MC|$$

$$\text{آنوقت } |EM| = |BC|$$

۹. همان مساله ۴، برای ۶۴ مهره و ۶۸ بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای



شکل ۱۹

و بدون وزنه.

۱۰. همه مقدارهای درست  $A$ ،  $B$  و  $C$  را پیدا کنید، به شرطی که

$$\begin{cases} A^2 + 2B^2 - 2BC = 100 \\ 2AB - C^2 = 100 \end{cases}$$

۱۱. به تعداد ۹۹ صد و یک ضلعی منتظم داریم که، راس‌های هر یک از آن‌ها، از ۱ تا ۱۰۱ شماره‌گذاری کرده‌ایم (شکل ۱۹). آیا می‌توان این ۹۹ چندضلعی را طوری روی هم گذاشت که، مجموع عددها در هر یال ستونی که بدست می‌آید، برابر با مجموع عددها در هر یال دیگر باشد؟

۱۲. کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از واحد را پیدا کنید که از ۶۰۰ برابر هر یک از بخشیاب‌های اول خود، کوچکتر نباشد.

۱۳. چند عدد غیر صفر (دست کم دو تا) داده شده است. می‌توان هر دو عدد دلخواه  $A$  و  $B$  را حذف کرد و، به جای آن‌ها، عددهای  $\frac{1}{2}B + A$  و  $\frac{1}{2}A - B$  را نوشت. ثابت کنید، بعد از انجام چند بار از این گونه عمل‌ها، نمی‌توان دوباره به همان عددهای اولیه رسید.

### سال هفتم

۱۴. دور یک میزگرد،  $2n$  نفر نشسته‌اند:  $n$  نفر فیزیکدان و  $n$  نفر شیمی‌دان؛ در ضمن، برخی از آن‌ها همیشه راست می‌گویند و بقیه همیشه

دروغ. می‌دانیم، تعداد دروغ‌گوها در بین شیمی‌دان‌ها، با تعداد دروغ‌گوهای فیزیک‌دان، برابر است. در برابر این پرسش که: «در سمت راست شما چه کسی نشسته است؟»، همگی پاسخ دادند: «یک شیمی‌دان». ثابت کنید،  $n$  عددی زوج است.

۱۵. در چهارضلعی  $ABCD$ ، قطرهای  $AC$  و  $BD$ ، در نقطه  $O$  به هم برخورده‌اند. می‌دانیم:

$$|AB| = |OD|, |AD| = |CO|, \widehat{BAC} = \widehat{BDA}$$

ثابت کنید،  $ABCD$ ، یک ذوزنقه است.

۱۶. ثابت کنید، اگر  $x + y + z \geq xyz$ ، آنوقت

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$$

. ۱۷. همان مساله ۵.

۱۸. کتاب‌دار، هر دقیقه، جلو قفسه‌ای می‌رود که، یک فرهنگ ۸ جلدی، به ردیف در آن چیده شده‌است و، هر بار، جای دو جلد از آن را با هم عوض می‌کند. آیا ممکن است، این کار را طوری انجام دهد که، بعد از مدتی، همه انواع تبدیل‌های ممکن جلد‌های فرهنگ، انجام گرفته باشد و، در ضمن، هر تبدیل تنها یکبار؟

۱۹. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: مهره‌ای، روی گره مرکزی یک جدول  $10 \times 10$  گذاشته شده‌است. در هر حرکت، کسی که نوبت اوست، می‌تواند مهره را به هر گروه دیگر منتقل کند، به شرطی که طول حرکت او (یعنی فاصله‌ای که مهره را، به اندازه آن جابه‌جا می‌کند)، بیشتر از طول حرکت قبلی رقیب او باشد. کسی می‌بازد که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد. اگر هر دو نفر، درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود؟

۲۰. آیا می‌توان ۱۰۰ عدد طبیعی مختلف پیدا کرد، به نحوی که، حاصل ضرب هر پنج عدد دلخواه از آن‌ها، بر مجموع همین پنج عدد، بخش‌پذیر باشد؟

سال هشتم

۲۱. ثابت کنید، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

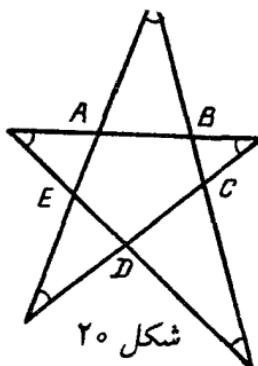
در مجموعه عددهای حقیقی، جواب ندارد.

۲۲.  $a$ ، عددی طبیعی و بزرگتر از واحد، و  $b$ ، بخشیاب طبیعی عدد  $b - a$  است. ثابت کنید، اگر  $b - a > \sqrt{a} + 1$

۲۳. در چهار ضلعی کوڈ  $ABCD$ ، قطرهای  $AC$  و  $BD$ ، در  $O$  برخورد کرده‌اند. نقطه‌های  $K$ ،  $L$ ،  $M$  و  $N$ ، به ترتیب روی ضلعهای  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  چنان‌اند که، نقطه  $O$ ، روی پاره‌خط‌های راست  $LN$  و  $KM$  قرار دارد و آن‌ها را نصف می‌کند. ثابت کنید  $ABCD$ ، یک متوازی‌الاضلاع است.

۲۴. در خانه‌های یک جدول شطرنجی بی‌پایان،  $m$  مهره گذاشته شده است. برای هر مهره، عددی را به دست آورده‌ایم که برابر است با حاصل ضرب تعداد مهره‌هایی که با آن در یک ستون قرار دارند، در تعداد مهره‌هایی که با آن در یک سطرند. ثابت کنید، تعداد مهره‌هایی که، برای آن‌ها، این عدد از  $10m$  کمتر نیست، از  $\frac{m}{10}$  تجاوز نمی‌کند.

۲۵. در پایان یک دور مسابقه شطرنج، که در آن  $k$  مسابقه انجام شد، تعداد امتیازهایی که شرکت‌کنندگان به دست آورده بودند، یک تصاعد هندسی با قدر نسبتی که برابر یک عدد طبیعی بود، تشکیل دادند. اگر قدر نسبت



تصاعد بزرگتر از واحد باشد، تعداد شرکت کنندگان، چند نفر می‌تواند باشد:

(الف) بهازای  $1989 = k$ ؛

(ب) بهازای  $1988 = ?k$

۲۶.  $n$  خط راست روی یک صفحه چنان‌اند که، هیچ دو تابی با هم موازی نیستند و، هیچ سه تابی، از یک نقطه نمی‌گذرد. بهازای چه مقداری از  $n$ ، می‌توان، در هر نقطه برخورد خط‌های راست، یکی از عدهای  $1, 2, 3, \dots, 1 - n$  را طوری قرار داد که، روی هر خط راست، به همه این عدها برخورد کنیم و از هر کدام تنها یکبار؟

### سال نهم

۲۷. همان مسالة ۲۱.

۲۸. نقطه  $X$  را روی ضلع  $AC$  از مثلث  $ABC$  انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی دو مثلث  $ABX$  و  $BCX$  بر هم مماس باشند، آنوقت نقطه  $X$ ، روی محیط دایرة محاط در مثلث  $ABC$  است.

۲۹. همان مسالة ۲۲.

۳۰. خط شکسته بسته‌ای، که پنج ضلع دارد، یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای با پنج زاویه برابر ساخته است (شکل ۲۰). اگر طول خط شکسته، برابر واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی درونی  $ABCDE$  چقدر است؟

۳۱. آیا عددهای  $+1$ ،  $-1$  و  $0$  را در خانه‌های یک جدول  $10 \times 10$  می‌توان طوری قرار داد که، همه  $20$  مجموع سطرها و ستون‌ها، با هم فرق داشته باشند؟

. ۲۵. همان مساله . ۲۶

سال نهم

. ۲۷. همان مساله . ۲۸

۳۴. وترهای  $XK$  و  $XM$ ، قطر  $AB$  از دایره را، به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید:

$$5|KM| = 3|AB|$$

. ۲۹. همان مساله . ۳۰

. ۳۱. همان مساله . ۳۲

۳۷. آیا عمل  $*$  وجود دارد؛ به نحوی که وقتی با دو عدد طبیعی  $X$  و  $Y$  سروکار داریم، برای عدد طبیعی  $X * Y$ ، سه ویژگی زیر، با هم وجود داشته باشد:

$$\text{الف) } (A \neq B) \quad A * B = |A - B| * (A + B)$$

$$\text{ب) } (AC) * (BC) = (A * B)(C * C)$$

$$\text{ج) } (2k - 1) * (2k + 1) = 2k + 1$$

سال دهم

. ۳۸. ثابت کنید، برای سه عدد حقیقی دلخواه  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، سه عدد

$$(b - c)(bc - a^2), \quad (c - a)(ca - b^2),$$

$$(a - b)(ab - c^2)$$

نمی‌توانند با هم مثبت باشند.

. ۲۸. همان مساله ۳۹

. ۴۰. مجموعه نقطه‌های با مختصات  $(x, y)$  را روی صفحه نمایش دهید، به شرطی که بدانیم، دو عدد غیر منفی  $A$  و  $B$  پیدا می‌شوند، به نحوی که، بزرگترین عدد بین دو عدد  $A^2$  و  $B^2$  برابر  $x$ ، و کوچکترین عدد بین دو عدد  $B^2$  و  $A^2$  برابر  $y$  است.

. ۴۱. یک چندضلعی با ضلع‌های برابر، قاعده یک هرم را تشکیل می‌دهد. ثابت کنید، اگر همه زاویه‌های مسطحه راس هرم، با یکدیگر برابر باشند، آنوقت، در بین وجه‌های جانبی هرم، دو مثلث برابر پیدا می‌شود.

. ۴۲. همان مساله ۲۵

سال دهم (دبیرستان‌های فیزیک-ریاضی)

. ۴۳. همان مساله ۲۱

. ۴۴. عملی با نماد  $*$  داده شده است که هر دو عدد درست  $X$  و  $Y$  را، به عدد درست  $X * Y$  تبدیل می‌کند. می‌دانیم، هر عدد درست، به ازای بعضی مقدارهای درست  $X$  و  $Y$ ، برابر  $X * Y$  است. ثابت کنید، این عمل، نمی‌تواند به طور همزمان، دارای دو ویژگی زیر باشد:

$$\text{الف) } A * B = -(B * A)$$

$$\text{ب) } (A * B) * C = A * (B * C)$$

. ۴۵. همان مساله ۴۱

. ۴۶. همان مساله ۲۵

. ۴۷. ثابت کنید، اگر معادله

$$ax^4 + (c - b)x + (e - d) = 0$$

ریشه‌ای حقیقی و بزرگتر از ۱ داشته باشد، آن وقت معادله

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

دست کم یک ریشه حقیقی دارد.

دور نهایی (سال هشتم)

۴۸. نقطه  $M$  را در درون مثلث  $ABC$ ، طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\widehat{BMC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

و خط راست  $AM$  از مرکز دایرة محیطی مثلث  $BMC$  می‌گذرد. ثابت کنید،  $M$  مرکز دایرة محاطی مثلث  $ABC$  است.

۴۹. چند عدد طبیعی انتخاب کرده‌ایم که بخشیاب‌های اول آنها، از  $n$  تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، مجموع عکس‌های این عددها، از  $n$  بیشتر نیست.

۵۰.  $k$ ، عددی است طبیعی و بزرگتر از واحد. ثابت کنید، در خانه‌های جدول  $k \times k$ ، نمی‌توان عددهای  $1, 2, 3, \dots, k^2$  را طوری قرار داد که، مجموع عددهای هر سطر و، همچنین مجموع عددهای هر ستون، برابر توانی از عدد ۲ باشد.

۵۱. روی خانه‌های یک جدول  $10 \times 10$ ، ۹۱ مهره سفید قرار دارند. نقاش یکی از مهره‌ها را بر می‌دارد، آن را به رنگ سیاه در می‌آورد و در یکی از خانه‌های آزاد جدول می‌گذارد. بعد، مهره دیگری را، که سفید است، بر می‌دارد، به رنگ سیاه در می‌آورد و ... تا آنجا که دیگر مهره سفیدی باقی نماند باشد. ثابت کنید، ضمن کار نقاش، زمانی فرا می‌رسد که در دو خانه مجاور، دو مهره با رنگ‌های مختلف وجود دارد.

۵۲. حداکثر مساحت یک چهارضلعی، با ضلع‌های به طول ۱، ۴، ۷ و ۸، چقدر می‌تواند باشد؟

۵۳. دو نفر با هم بازی می‌کنند. روی تخته سیاه، عدد ۲ نوشته شده‌است. هر کس، در نوبت خود، عدد  $n$  را که روی تخته نوشته شده‌است، عوض می‌کند و، به جای آن، عدد  $d + n$  را می‌نویسد که، در آن،  $d$  یکی از بخشیاب‌های  $n$ ، به جز خود  $n$  است. کسی بازی را می‌برد که عددی بزرگتر از ۱۹۸۹۱۹۸۹ را روی تخته بنویسد. اگر هر دو نفر درست بازی کنند، چه کسی برنده می‌شود: آن که بازی را آغاز کرده‌است یا رقیب او؟

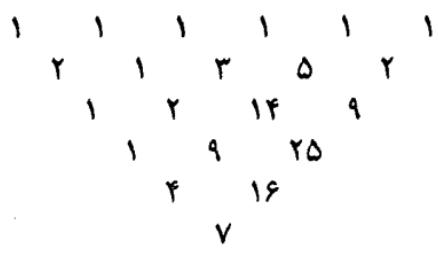
۵۴\*. در زبان قبیله «ترولیالیا»، هر دنباله‌ای از ۱۰ رقم ۰ و ۱، یک واژه است. دو واژه وقتی، و تنها وقتی متراff شمرده می‌شوند که بتوان، با عمل‌های به صورت زیر، از یکی، دیگری را به دست آورد: از واژه، چند رقم ردیف هم را، به شرطی که مجموع آن‌ها عددی زوج باشد، حذف و، به جای آن‌ها، همان رقم‌ها، ولی در جهت عکس، گذاشته شود. در زبان این قبیله، چند واژه با معناهای متفاوت وجود دارد؟

۵۵\*. پروفسور سمیت، در سالنی مریع شکل، که دیوارهای آینه‌ای دارد، ایستاده است. پروفسور جونس، می‌خواهد چند صندلی در سالن، طوری قرار دهد که آقای سمیت نتواند تصویر خودش را ببیند. آیا آقای جونس موفق می‌شود؟ (پروفسور و دانشجویان را، نقطه به حساب آورید. دانشجویان می‌توانند نزدیک دیوار، در گوش‌های ایستاده باشند.)

دور نهایی (سال نهم)

۵۶. همان مساله ۴۸.

۵۷. همه عدهای ۷ رقمی (از ۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹) را، به ردیفی دلخواه، پشت سر هم نوشته‌ایم. ثابت کنید، عدد ۷۰ میلیون رقمی حاصل، بر ۲۳۹ بخش پذیر است.



شکل ۲۱

.۵۸.  $x, y$  و  $z$ ، عددهایی حقیقی از بازه  $[1, 5]$  هستند. ثابت کنید:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

.۵۹. همان مساله

.۶۰. مثلث عددی، که سطر اول آن شامل  $n$  واحد و سطر دوم آن شامل  $1 - n$  عدد درست دلخواه است، این ویژگی را دارد (مثالی برای  $n = 6$  را در شکل ۲۱ ببینید). برای هر چهار عددی که یک چهار ضلعی به صورت  $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$  تشکیل دهند ( $a$  و  $c$ ، دو عدد مجاور در یک سطرند)، برابری  $ac = bd + 1$  برقرار است. همه عددهای مثلث مخالف صفرند. ثابت کنید، همه عددهایی که مثلث را تشکیل داده‌اند، عددهای درست‌اند.

.۶۱. دنباله عددهای حقیقی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  چنان است که، برای

هر عدد طبیعی  $k$ ، داریم:

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k}$$

ثابت کنید، در این دنباله، بینهایت عدد مثبت و بینهایت عدد منفی وجود دارد.

.۶۲\*. در مثلث  $ABC$ ، نقطه  $M$  روی ضلع  $AB$ ، نقطه  $N$  روی ضلع  $BC$  و نقطه  $O$ ، محل برخورد پاره خط‌های راست  $AN$  و  $CM$  است

است. می‌دانیم:

$$|AM| + |AN| = |CM| + |CN|$$

ثابت کنید:  $|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$ .

\*۶۳. به ازای چه مقدارهایی از  $k$ ، می‌توان ۱۰۰ کمان روی محیط دایره قرار داد، به نحوی که، هر کمان، درست به وسیله  $k$  کمان دیگر قطع شده باشد؟

\*۶۴. ثابت کنید، اگر مثلث مساله ۶۰، شامل عددهای طبیعی باشد، آنوقت تعداد عددهای مختلفی که در آن وجود دارد، کمتر از  $\frac{n}{4}$  نیست.

دور نهایی (سال دهم)

.۶۵. همان مساله ۴۸.

.۶۶. همان مساله ۴۹.

.۶۷. همان مساله ۵۰.

.۶۸. همان مساله ۵۲.

\*۶۹. این معادله، چند جواب حقیقی دارد:

$$\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))) = \frac{1}{3}x$$

\*۷۰. دنباله عددهای حقیقی  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ، چنان است که برای

هر  $m$  و  $n$  داریم:

$$|a_m + a_n - a_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}$$

ثابت کنید، این دنباله، یک تصاعد حسابی است.

\*۷۱. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. روی تخته سیاه، عدد ۱۰۰۰ نوشته شده است و گپهای شامل ۱۰۰۰ عدد چوب کبریت روی

میز است. بازی به نوبت است و هر کس، در نوبت خود، می‌تواند به تعداد کمتر از ۶ چوب کبریت از گپه بردارد و یا کمتر از ۶ چوب کبریت به آن بیفزاید (در آغاز بازی، هیچ کدام، چوب کبریت اضافی در اختیار ندارد) و، سپس، تعداد چوب کبریت‌های گپه، بعد از این حرکت، روی تخته سیاه نوشته می‌شود. کسی بازی را می‌بازد که، بعد از حرکت او، عددی روی تخته سیاه نوشته شود، که قبل آن، روی تخته آمده باشد. اگر هر دو نفر سنجدیه بازی کنند، چه کسی بازی را می‌برد، آغاز کننده بازی یا رقیب او؟

۷۲. همان مساله ۶۴.

## ۱۹۹۰

### سال ششم

۱. پنجا دفترچه‌ای ۹۶ برگی خرید و صفحه‌های آن را، از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری کرد. واسیا ۲۵ برگ از این دفترچه را، از جاهای مختلف آن جدا کرد و هر ۵۰ شماره‌ای را که روی آنها بود، با هم جمع کرد. ثابت کنید، این مجموع نمی‌تواند برابر ۱۹۹۰ شود.

۲. می‌دانیم، بین ۱۰۱ سکه، یک سکه تقلیبی وجود دارد. سکه‌های واقعی وزنی برابر دارند و وزن سکه تقلیبی با آنها یکی نیست. چگونه می‌توان با دو بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، معلوم کرد که، سکه تقلیبی سبک‌تر است یا سنگین‌تر؟

۳. آیا می‌توان مستطیل با اندازه‌های  $39 \times 55$  را به مستطیل‌هایی با اندازه‌های  $11 \times 5$  تقسیم کرد؟

۴. عدد ۱۲۳۴ روی تخته سیاه نوشته شده است. دو نفر با هم بازی می‌کنند. هر کس باید، در نوبت خود، یکی از رقم‌های غیر صفر عدد را از آن کم کند و نتیجه را، به جای عدد قبلی بنویسد. کسی برنده می‌شود که، برای

نخستین بار، عدد صفر را روی تخته سیاه بنویسد. چه کسی می‌تواند برنده شود: آن که بازی را آغاز کرده است یا رقیب او؟

۵. پتیا، کولیا و واسیا ۱۰۰ مساله حل کردند؛ در ضمن، هر کدام از آنها، درست ۶۰ مساله را حل کرده بود. مساله را دشوار می‌نامیم، به شرطی که تنها یک نفر آن را حل کرده باشد و مساله را ساده می‌نامیم، وقتی که هر سه نفر آن را حل کرده باشند. ثابت کنید، تعداد مساله‌های دشوار، درست ۲۰ عدد از تعداد مساله‌های ساده بیشتر بوده است.

۶. در روستای «م»، هر پسر با عده‌ای از دختران آشناست که همه دختران یکدیگر را می‌شناسند. برای هر دختر، تعداد آشناهای پسر، بیشتر از آشناهای دختر اوست. ثابت کنید، در روستای «م»، تعداد پسران کمتر از تعداد دختران نیست.

## سال هفتم

۷. «جون» و «مری» در آسمان خراشی زندگی می‌کنند که، در هر طبقه آن، ۱۰ آپارتمان وجود دارد. شماره طبقه «جون» برابر است با شماره آپارتمان «مری»، و مجموع شماره‌های آپارتمان‌های آن‌ها برابر است با ۲۳۹. «جون» در چه آپارتمانی زندگی می‌کند؟

۸. ۳۰ صندلی به ردیف گذاشته شده است. گاه به گاه کسی وارد می‌شود و روی یکی از صندلی‌های خالی می‌نشیند؛ در ضمن، یکی از کسانی که روی صندلی مجاور نشسته است (اگر چنین کسی وجود داشته باشد)، بلند می‌شود از محل بیرون می‌رود. اگر در آغاز، همه صندلی‌ها آزاد باشند، حداقل چند صندلی ممکن است اشغال شود؟

۹. روی صفحه کامپیوتر، عدد ۱۲۳ نقش بسته است. کامپیوتر، هر دقیقه، ۱۰۲ واحد به عددی که روی صفحه ظاهر شده است، اضافه می‌کند. برنامه‌ریز می‌تواند، هر وقت که مایل باشد، رقم‌های عددی را که روی صفحه

کامپیوتر است، جایه‌جا کند. آیا برنامه‌ریز، می‌تواند طوری عمل کند که، روی صفحه کامپیوتر، همیشه یک عدد سرهنگی باشد؟

۱۰. در چهارضلعی  $ABCD$ ، می‌دانیم:  $M$  وسط پاره خط راست  $N$ ،  $AD$  وسط پاره خط راست  $BC$  و  $|BC| = |AD|$ . عمود منصف‌های پاره خط‌های راست  $AB$  و  $CD$ ، یکدیگر را در نقطه  $P$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید، نقطه  $P$ ، روی عمود منصف پاره خط راست  $MN$  هم واقع است.

۱۱. مربع  $2 \times 2$  را به مستطیل‌های تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان چند تا از این مستطیل‌ها را انتخاب کرد و روی آن‌ها هاشور زد، به نحوی که تصویر بعضی هاشور خورده روی یکی از ضلع‌های مربع، طولی کمتر از ۱ و روی ضلع دیگر مربع، طولی بیشتر از ۱ نداشته باشد.

۱۲. همان مساله ۶.

۱۳. در بعضی از خانه‌های جدول مربعی  $50 \times 50$ ، عددهای  $+1$  و  $-1$  را گذاشته‌ایم، به نحوی که قدر مطلق مجموع آن‌ها، از  $100$  تجاوز نکند. ثابت کنید، می‌توان در این جدول، یک مربع  $25 \times 25$  پیدا کرد، به نحوی که قدر مطلق‌های مجموع عددهایی که در خانه‌های آن قرار دارند، از  $25$  تجاوز نکند.

### سال هشتم

۱۴. از یک دفترچه ۹۶ برگی که همه صفحه‌های آن، به ردیف، از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری شده‌است، ۲۴ برگ را جدا کرده و همه ۴۸ شماره آن را با هم جمع کرده‌ایم. آیا ممکن است عدد ۱۹۹۰ به دست آید؟

۱۵. همان مساله ۱۰.

۱۶. عددهای طبیعی  $a$ ,  $b$  و  $c$  را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$a^r + b - c = 100, \quad a + b^r - c = 124$$

۱۷. کشوری دارای ۱۰۱ شهر است. شهرها به وسیله جاده‌هایی به هم مربوطاند و، حرکت در همه جاده‌ها، یک طرفه است. هر دو شهر، با بیش از یک جاده به هم مربوط نیستند. در ضمن می‌دانیم، از هر شهر ۴۰ جاده خارج و به هر شهر ۴۰ جاده وارد می‌شود. ثابت کنید، می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت، بدون این‌که بیش از سه جاده مورد استفاده قرار گرفته باشد.

۱۸. بین ۱۰۲ سکه، دو سکه تقلیبی وجود دارد که، از لحاظ وزن، با سکه‌های حقیقی فرق دارند. می‌دانیم، وزن دو سکه تقلیبی با هم برابر و، همچنین، وزن سکه‌های حقیقی هم با یکدیگر برابر است. چگونه می‌توان با سه بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای و بدون استفاده از وزنه، روشن کرد که، سکه تقلیبی، سنگین‌تر است یا سبک‌تر؟

۱۹. در جزیره «افسانه»، هر شخص یا دروغگوست که همیشه ناراست می‌گوید و یا شوالیه است که همیشه راست می‌گوید. اگر هر جزیره‌نشین، دو جمله زیر را به زبان آورد:

- همه آشنایان من، با هم آشنا هستند؛

- بین آشنایان من، تعداد دروغگوها، کمتر از تعداد شوالیه‌ها نیست.  
ثابت کنید، در جزیره، شوالیه‌ها کمتر از دروغگوها نیستند.

۲۰. چند جفت عدد طبیعی  $(m, n)$  وجود دارد، به نحوی  $m$  و  $n$  از ۱۰۰۰ بزرگتر باشند و داشته باشیم:

$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$$

سال نهم

۲۱.  $x$  و  $y$ ، دو عدد طبیعی دلخواهند. آیا ممکن است عدد  $x! + y!$  به عدد ۱۹۹۰ ختم شده باشد (یعنی چهار رقم سمت راست آن ۱۹۹۰ باشد)؟

۲۲. آیا مثلثی وجود دارد که، طول هریک از ضلع‌های آن، عددی درست و طول یکی از میانه‌های آن برابر واحد باشد؟
۲۳. ثابت کنید، در هر تصاعد حسابی، که جمله‌های آن عدددهای طبیعی‌اند، دو جمله پیدا می‌شود که مجموع رقم‌های آن‌ها، یکی است.
۲۴. در چهارضلعی کوژ  $ABCD$ ، زاویه  $B$  برابر  $90^\circ$  درجه، قطر  $AC$  نیمساز زاویه  $A$  و طول قطر  $AC$  برابر طول ضلع  $AD$  است. در مثلث  $ADC$ ، ارتفاع  $DH$  را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط راست  $BH$  پاره خط راست  $CD$  را نصف می‌کند.
۲۵. عده‌های حقیقی  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، در بازه  $[1, 5]$  قرار دارند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

۲۶. همان مساله ۳۷ (الف) و (ب)).

- سال‌های دهم و یازدهم
۲۷. همه جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 6z, \\ y^4 + z^4 = 6x, \\ z^4 + x^4 = 6y \end{cases}$$

۲۸. دایره‌ای که در مثلث  $ABC$  محاط است، ضلع  $AB$  را به دو پاره خط راست  $AD$  و  $DB$ ، به ترتیب، به طول‌های ۵ و ۳ تقسیم کرده‌است. اندازه زاویه  $A$ ، برابر  $60^\circ$  درجه است. طول ضلع  $BC$  را پیدا کنید.

۲۹. همان مساله ۲۳.

۳۰. همان مساله ۲۲.

۳۱. چهار عدد طبیعی مختلف داده شده است. ثابت کنید، دو برابر حاصل ضرب این عددها، از مجموع همه حاصل ضرب‌های دویه‌دوی آنها، بیشتر است.

۳۲. آیا با مریع‌های با طول ضلع ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... می‌توان صفحه را پوشاند، به نحوی که مریع‌ها روی هم قرار نگیرند و، در ضمن، از هر نوع مریع حداقل  $\frac{1}{10}$  بار؛ ب) یک بار؛ استفاده شود؟

#### سال دهم (دبیرستان فیزیک-ریاضی)

۳۳. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هر کدام یک بار)، عددی شش رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟

۳۴. همان مساله ۲۴.

۳۵. چندجمله‌ای  $f$ ، با ضریب‌های درست داده شده است. می‌دانیم  $f(2)$  بر ۵ و  $f(5)$  بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید  $f(7)$  بر عدد ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳۶. همان مساله ۲۵.

۳۷. صفحه شطرنجی  $10 \times 10$  را با  $n$  مریع  $2 \times 2$  پوشانده‌ایم، به نحوی که، هر ضلع هر مریع، در امتداد یکی از خط‌های راست شبکه است. ثابت کنید، یکی از مریع‌ها را می‌توان طوری انتخاب کرد، که بقیة مریع‌ها، از قبل، تمامی شبکه را پوشانده باشند، به شرطی که:

$$\text{الف)} n = 55;$$

$$\text{ب)} n = 45;$$

\*ج) کوشش کنید، کمترین مقدار ممکن  $n$  را پیدا کنید که، به ازای آن، حکم مساله درست باشد.

#### سال یازدهم (دبیرستان فیزیک ریاضی)

.۳۸. همان مساله ۳۳.

.۳۹. همان مساله ۲۴.

.۴۰. همان مساله ۳۵.

.۴۱. برای عدد حقیقی و مثبت  $x$  می‌دانیم:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

$$\text{ثابت کنید: } 2 - \frac{1}{n} < x < 2$$

.۴۲. ثابت کنید، می‌توان فضا را به هشت وجهی‌ها و چهار وجهی‌های منتظم طوری تقسیم کرد که، طول هر یال از هر چندوجهی، عددی درست باشد و، در بین چند وجهی‌ها، نتوان ده چندوجهی پیدا کرد که طول یال‌های آن‌ها با هم برابر باشد.

(دور نهایی (سال نهم)

.۴۳. برای عددهای طبیعی  $a$  و  $b$ ، می‌دانیم  $a^2 + ab + 1$  بر  $b^2 + ab + 1$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید  $b = a$ .

.۴۴. روی یک پاره خط راست، چند پاره خط راست کوچکتر وجود دارد، به نحوی پاره خط راست اصلی را پوشانده‌اند. ثابت کنید، نیمه چوب این پاره خط‌های راست کوچکتر، دست‌کم نیمی از پاره خط راست اصلی را می‌پوشانند.

.۴۵. نقطه دلخواه  $P$  را روی ضلع  $BC$  از مربع  $ABCD$  انتخاب کرده‌ایم؛ دایره‌ای که از سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $P$  می‌گذرد، قطر  $BD$  را در نقطه دیگر  $Q$  قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطه  $C$ ،  $P$  و  $Q$  می‌گذرد، را در نقطه دیگر  $R$  قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های  $A$ ،  $R$  و  $P$  بر یک امتدادند.

.۴۶. از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$ ، همه زیرمجموعه‌هایی را انتخاب

کرده‌ایم که، هیچ کدام، شامل دو عدد مجاور از مجموعه اصلی، نباشند.  
عددهای هر زیرمجموعه را در هم ضرب کرده‌ایم؛ ثابت کنید، مجموع  
مجلورهای این حاصل ضرب‌ها برابر است با  $1 - !(n + 1)$ .

۴۷. راس‌های یک چهارضلعی محاطی، در نقطه‌های گرهی یک صفحه  
شطرنجی، با خانه‌هایی با ضلع به طول واحد، قرار دارند. می‌دانیم  $ABCD$   
ذوزنقه نیست. ثابت کنید:

$$||AC| \cdot |AD| - |BC| \cdot |BD|| \geq 1$$

۴۸. در کشور «آب» که شامل دو جمهوری «آ» و «ب» است، هر جاده  
شامل دو شهر از جمهوری‌های مختلف است. می‌دانیم از هر شهر، بیش از  
۱۰ جاده خارج نمی‌شود. ثابت کنید، روی نقشه کشور «آب»، هر جاده را  
می‌توان، با یکی از ۱۰ رنگ مفروض، طوری رنگ کرد که، هر دو جاده‌ای  
که از یک شهر خارج می‌شوند، دو رنگ مختلف داشته باشند.

۴۹\*. صاحب خانه، برای مهمانان خود، یک نان شیرینی بزرگ پخت.  
مهمانان او، یا  $p$  نفر خواهند بود و یا  $q$  نفر. او می‌خواهد، از قبل، نان  
شیرینی را طوری تقسیم کند (لازم نیست بخش‌های تقسیم، با هم برابر باشند)  
که، در هر حالت، بتواند آنها را، به طور برابر، بین مهمانان خود قسمت  
کند. حداقل تعداد بخش‌ها، چقدر است؟

۵۰\*. روی محیط دایره‌ای، ۲۰ عدد نوشته شده است. می‌توان در هر  
حرکت، سه عدد  $x$ ،  $y$  و  $z$  را که در ردیف هم قرار دارند، برداشت و سه  
عدد  $y - x$ ،  $y + z$  و  $-x - z$  را، با همان ردیف، به جای آنها گذاشت. آیا  
می‌توان با این عمل‌ها، از گروه عددهای

$$\{1, 2, 3, \dots, 9, 10, -1, -2, \dots, -9, -10\}$$

$$\{10, 9, \dots, 2, 1, -10, -9, \dots, -2, -1\}$$

رسید؟ ردیف عددها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به حساب آورید.

دور نهایی (سال دهم)

.۵۱. همان مساله ۴۳.

.۵۲. همان مساله ۴۴.

.۵۳. همان مساله ۴۵.

۵۴. آکیوشما و سریوژما با هم بازی می‌کنند (حرکت اول را آکیوشما انجام می‌دهد و، حرکتها، به نوبت انجام می‌گیرد). هر کس، در نوبت خود، یکی از خانه‌های جدول  $25 \times 25$  را رنگ می‌کند؛ در ضمن، آکیوشما از رنگ سفید و سریوژما از رنگ سیاه استفاده می‌کند. آیا آکیوشما می‌تواند طوری بازی کند که، در پایان کار (یعنی وقتی که همه خانه‌ها، رنگی شده‌اند)، بدون بستگی به عمل سریوژما، مهره شاه بتواند در همه خانه‌های سفید حرکت کند (در یک خانه، چند بار هم می‌تواند باشد)؟

۵۵. راس‌های چهارضلعی  $ABCD$ ، در نقطه‌های گرهی یک صفحه شطرنجی (با خانه‌های به ضلع با طول واحد) قرار دارند. در چهارضلعی، زاویه‌های  $A$  و  $C$  برابرند، ولی زاویه‌های  $B$  و  $D$  برابر نیستند. ثابت کنید:

$$||AB| \cdot |BC| - |CD| \cdot |DA|| \geq 1$$

\*۵۶. در قفسه، مجموعه ۱۰۰ جلدی نوشته‌های ل. ن. تولستوی، به صورتی نامنظم چیده شده است. می‌توان دو جلد دلخواه از آن‌ها را، یکی با شماره زوج و دیگری با شماره فرد، برداشت و جای آن‌ها را با هم عوض

کرد. دست کم چند بار باید این عمل را تکرار کرد تا، با هر وضع نخستین، جلد های کتاب، به ردیف شماره های خود، در قفسه قرار گیرند؟

۵۷\*. چند جمله ای  $f(x)$ ، با ضریب های درست، داده شده است و می دانیم،  $f(n)$ ، به ازای هر عدد درست  $n$ ، بر یکی از عددهای  $a_1, a_2, \dots, a_m$  بخش پذیر است. ثابت کنید، از بین این عددها، می توان یک عدد طوری انتخاب کرد که، به ازای هر عدد درست  $n$ ، چند جمله ای  $f(n)$  بر آن بخش پذیر باشد.

۵۸\*. ۲۲ نقطه را روی بازه  $[1, 0]$  علامت گذاشته ایم. می توانیم، هر دو نقطه را، با نقطه وسط پاره خط راستی که آنها را به هم وصل می کند، عوض کنیم. ثابت کنید، اگر  $20$  بار این عمل را انجام دهیم، به جایی می رسیم که، فاصله دو نقطه باقی مانده، از  $1/000$  تجاوز نمی کند.

#### دور نهایی (سال یازدهم)

۵۹.  $A$  و  $n$ ، دو عدد طبیعی بزرگتر از واحدند. ثابت کنید، تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از عدد  $1 - A^n$ ، به شرطی که دو بهدو نسبت به هم اول باشند، بر  $n$  بخش پذیر است.

۶۰. روی پاره خط راستی، پاره خط های راست کوچکتری وجود دارند، که پاره خط راست اصلی را پوشانده اند. از هر کدام از این پاره خط های راست کوچکتر، نیمی از آن را، نیمة چپ یا نیمة راست، کنار گذاشته ایم. ثابت کنید، نیمه های باقی مانده، دست کم، یک سوم پاره خط راست اصلی را می پوشانند.

۶۱. آیا روی صفحه، می توان یک شش ضلعی (که ممکن است کوژ هم نباشد) پیدا کرد، به نحوی که، همه قطرهای آن به جز یکی، با هم برابر باشند؟

۶۲. زاویه  $A$  از مثلث  $ABC$  برابر  $120^\circ$  درجه است. نیمسازهای

۹۰ درجه است. ثابت کنید، زاویه  $GFH$  برابر  $CH$  و  $BG$  را رسم کرده‌ایم.

\*۶۳. کشوری ۱۰۰ شهر دارد؛ هر دو شهر آن، درست به وسیله یک جاده یک طرفه به هم مربوطاند. معلوم شد، با رعایت قانون حرکت، نمی‌توان از هر شهری به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، می‌توان یک شهر را انتخاب و جهت حرکت را در همه جاده‌هایی که به این شهر وارد یا از آن خارج می‌شوند، عوض کرد تا بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر، با رعایت قانون حرکت، رفت.

\*۶۴.تابع پیوسته  $R \rightarrow R : f$  چنان است که، برای هر عدد حقیقی  $x$ ، برابری  $f(x + f(x)) = f(x)$  برقرار است. ثابت کنید،  $f$  تابع ثابتی است.

\*۶۵. روی محیط دایره، چند عدد، که مجموعی مثبت دارند، گذاشته‌ایم. می‌توانیم هر سه عدد ردیف هم  $x$ ،  $y$  و  $z$  را برداریم و، به جای آن‌ها، عده‌های  $x + y$ ،  $-y + z$  و  $y - z$  را (به همان ردیف) بگذاریم. ثابت کنید، به کمک این عمل، از یک گروه عدد انتخابی، تنها به یک گروه عدد می‌توان رسید که همه عده‌های آن منفی باشند.

## ۱۹۹۱

### سال ششم

۱. ۴۰ دانشآموز، برای «طرح کاد» وارد کارخانه شدند. آن‌ها پیچ، دوراهی و میخ با خود داشتند. نزد ۱۵ نفر از دانشآموزان، تعداد میخ‌ها با تعداد دوراهی‌ها برابر نیست. نزد ۱۰ نفر، تعداد میخ‌ها با تعداد پیچ‌ها برابر است. ثابت کنید، دست کم ۱۵ دانشآموز وجود دارد، که نزد آن‌ها، تعداد پیچ‌ها با تعداد دوراهی‌ها برابر نیست.

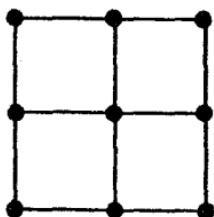
۲. در بازار سیاه می‌توان دو کوپن را با سه کوپن دیگر عوض کرد و برعکس. آیا می‌توان، بعد از جابه‌جایی‌ها، ۱۰۰ کوپن گوشت را با ۱۰۰ کوپن کالباس عوض کرد، به نحوی که در تمام جریان مبادله، ۱۹۹۱ کوپن رد و بدل شده باشد؟

۳. در جاده کمریندی، که به شکل دایره است، در یک لحظه و از یک نقطه، چهار اتومبیل  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  به راه افتادند؛  $A$  و  $B$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و  $C$  و  $D$  در خلاف جهت آن‌ها. سرعت هر اتومبیل، مقدار ثابتی است (ولی ممکن است با هم فرق داشته باشند). می‌دانیم، در همان لحظه‌ای که  $A$  و  $C$ ، برای نخستین بار به هم رسیده‌اند،  $A$  و  $B$  هم، یکدیگر را ملاقات کرده‌اند. ثابت کنید، در لحظه‌ای که  $A$  و  $B$ ، برای نخستین بار به هم می‌رسند،  $C$  و  $D$  هم یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

۴. سال‌هاست که بارون «مون‌هاوزن»، هر روز برای شکار اردک، به کنار دریاچه می‌رود. با آغاز اول اوت ۱۹۹۱، هر روز به آشپز خود گفت: «امروز، بیش از دو روز گذشته، ولی کمتر از هفته گذشته، اردک خواهم آورد». بارون، حداقل چند روز می‌تواند این جمله را بگوید؟ (به یاد داشته باشید که بارون، هرگز دروغ نمی‌گوید!).

۵. سه میله چوبی، هر کدام به طول یک متر، به رنگ‌های قرمز، سبز و آبی وجود دارد. کولیا دو میله را، هر کدام، به سه بخش تقسیم کرد؛ سپس واسیا میله سوم را به سه بخش تقسیم کرد. آیا کولیا می‌تواند، میله‌های اول و دوم را طوری تقسیم کند که، بدون بستگی به نوع تقسیم میله سوم به وسیله واسیا، بتوان از ۹ تکه موجود، سه مثلث ساخت، به نحوی که ضلع‌های هر مثلث با سه رنگ مختلف باشد؟

۶. نه تیم والیبال با هم مسابقه دادند: هر دو تیم در یک مسابقه با هم رویرو شدند. آیا این وضع به ناچار پیش می‌آید که: دو تیم  $A$  و  $B$  پیدا



شکل ۲۲

می شود، به نحوی که، هر تیم دیگری، یا به تیم  $A$  باخته است و یا به تیم  $B$

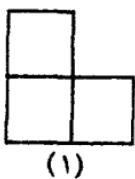
### سال هفتم

۷. عددهای از ۱ تا ۱۲ را روی دوازده پاره خط راستی که در شکل ۲۲ می بینید، طوری قرار دهید که، مجموع عددها روی ضلعهای هر مربع کوچک، با مجموع عددها روی ضلعهای هر مربع کوچک دیگر، برابر باشد.

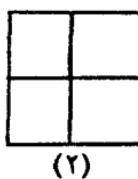
۸. غواصان، تعدادی مروارید به دست آوردند که از ۱۰۰۰ بیشتر نبود. آنها به این ترتیب مرواریدها را بین خود تقسیم کردند. مرواریدها را روی هم ریختند و هر کس، در نوبت خود، یا درست  $\frac{1}{2}$  و یا درست  $\frac{1}{3}$  از مرواریدهایی را که مانده بود، برداشت. بعد از آن که غواصان سهم خود را برداشتند، باقی مانده مرواریدها را به خدای دریا هدیه کردند. دست کم چند غواص، در کار به دست آوردن مروارید شرکت داشته‌اند؟

۹. ۱۹۹۱ نماینده از چهار قبیله  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، برای مذاکره، دور یک میزگرد نشستند. می‌دانیم، افراد قبیله  $A$ ، هرگز کنار افراد قبیله  $D$  نمی‌نشینند؛ همچنین، افراد قبیله  $C$  هرگز کنار افراد قبیله  $B$  نمی‌نشینند. ثابت کنید، دو نماینده از یک قبیله، پهلوی هم نشسته‌اند.

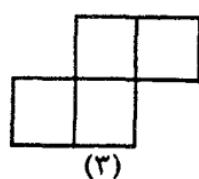
۱۰. در چهار ضلعی کوثر  $ABCD$ ، دو زاویه  $A$  و  $B$ ، با هم برابرند.



(۱)



(۲)



(۳)

شکل ۲۳

همچنین می‌دانیم:  $|AD| = 1$  و  $|BC| = 3$ . ثابت کنید، طول ضلع  $CD$  از ۲ بیشتر است.

۱۱. مساله‌ای به این صورت داده شده است: « $n$  عدد داریم که، مجموع هر ده عدد از آن‌ها، بزرگتر از مجموع بقیه عددها است. ثابت کنید، همه این عددها مثبت‌اند». می‌دانیم، در صورت مساله، به جای  $n$ ، عددی طبیعی غیر از ۲۰ بوده است، ولی موقع نوشتمن مساله، به اشتباه،  $n$  آمده است. این عدد چه بوده است؟ آیا باید همه حالت‌ها را پیدا کرد؟

۱۲. در کشوری، هر دو شهر، درست با یک راه، به هم مربوط‌اند: این راه، یا جاده اتومبیل رو است و یا خط راه آهن. ثابت کنید، در این کشور، می‌توانیم از هر شهر به هر شهر دیگر، تنها با یکی از دو وسیله، اتومبیل یا راه آهن، برویم، به نحوی که، ضمن راه، حداقل از دو شهر دیگر عبور کنیم.

۱۳. مربع  $7 \times 7$  را به صورت شکل‌هایی از سه نوع بریده‌ایم (شکل ۲۳). ثابت کنید، در شکل‌های بریده شده، درست یک شکل شامل چهار خانه (یعنی شکل نوع (۲) یا نوع (۳)) وجود دارد.

### سال هشتم

۱۴. همان مساله ۹

۱۵. عدد طبیعی  $x$ ، که در رقم‌های آن صفر وجود ندارد، در برابری

$$x \cdot \bar{x} = 1000 + p(x)$$

صدق می‌کند. در اینجا،  $\overline{x}$  مقلوب  $x$  است (یعنی عددی با همان رقم‌های عدد  $x$ ، تنها در جهت عکس)، و  $p(x)$  عبارت است از حاصل ضرب رقم‌های عدد  $x$ . همه این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۱۶. همان مساله ۵.

۱۷. از راس  $A$  در مثلث  $ABC$ ، عمودهای  $AX$  و  $AY$  را بر نیمسازهای خارجی دو زاویه  $B$  و  $C$  رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، طول پاره خط راست  $XY$ ، برابر است با نصف اندازه محیط مثلث  $ABC$ .

۱۸. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1) \dots (100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1) \dots (100^3 + 1)} = \frac{2367}{5050}$$

۱۹. مربع  $(1 - 2n) \times (2n - 1)$  را به صورت همان شکل‌های مساله ۱۳ بریده‌ایم. ثابت کنید، بین شکل‌های بریده شده، دست کم  $1 - 4n$  عدد از شکل نوع (۱) وجود دارد.

۲۰. ۱۰ عدد حقیقی مختلف را انتخاب کرده و آن را  $A$  نامیده‌ایم. در  $A$ ، همه مجموعهای ممکن ۵ عددی را به دست آورده‌ایم و مجموعه آن‌ها را  $A(5)$  نامیده‌ایم. آیا دو انتخاب مختلف  $A$  و  $B$  وجود دارد، به نحوی که  $A(5)$  و  $B(5)$  دو مجموعه برابر باشند؟

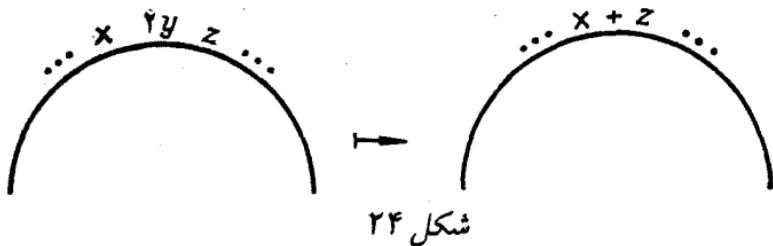
### سال نهم

۲۱.  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، عددهایی حقیقی و غیر منفی‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\max(a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a) \geq \max(a^2 - a, b^2 - b, c^2 - c)$$

در اینجا، منظور از  $\max(x, y, \dots)$ ، بزرگترین عدد از بین عددهای  $x$ ،  $y$ ، ... است.

۲۲. مثلث  $ABC$  زاویه‌هایی حاده دارد و، در ضمن  $|AB| > |BC|$  است. نقطه‌های  $X$  و  $Y$  را، به ترتیب، روی ضلع‌های  $AB$  و  $BC$ ، طوری انتخاب کرده‌ایم که  $|AX| = |BY|$ . ثابت کنید:  $\frac{1}{2}|XY| \geq |AC|$ .
۲۳.  $x$  و  $y$  و  $z$ ، طول‌های ضلع‌های مثلث، عددهایی درست‌اند؛ در ضمن، طول یکی از ارتفاع‌ها، برابر است با مجموع طول‌های دو ارتفاع دیگر. ثابت کنید  $z^2 + y^2 + x^2$ ، مجبور یک عدد درست است.
۲۴. دنباله عددهای طبیعی  $(a_n)$ ، به این ترتیب ساخته شده است: هر جمله‌ای که در ردیف زوج باشد، یعنی  $a_{2n}$  از روی  $a_{2n-1}$ ، با کم کردن یکی از رقم‌هایش از آن؛ و هر جمله‌ای که در ردیف فرد باشد، یعنی  $a_{2n+1}$  از جمله  $a_{2n}$ ، با اضافه کردن یکی از رقم‌هایش به آن، به دست می‌آید. ثابت کنید، جمله‌های این دنباله، از  $10a_1$  تجاوز نمی‌کنند.
۲۵. نقطه  $P$  در بیرون دایره به مرکز  $O$  واقع است. خط‌های راست  $L_1$  و  $L_2$  را، از نقطه  $P$  طوری گذارنده‌ایم که  $L_1$ ، در نقطه  $A$  بر دایره مماس است و  $L_2$ ، در نقطه‌های  $B$  و  $C$  دایره را قطع می‌کند. مماس‌های بر دایره، در نقطه‌های  $B$  و  $C$ ، یکدیگر را در  $X$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید. خط‌های راست  $AX$  و  $PO$  بر هم عمودند.
۲۶. در یک گرد هم‌آیی، هر نفر دست‌کم با یکی دیگر از شرکت‌کنندگان آشناست؛ در ضمن، برای هر دو نفر، نفر سومی وجود دارد که، با این دو نفر، آشنا نیست. ثابت کنید، همه شرکت‌کنندگان در گرد هم‌آیی را می‌توان به سه گروه طوری تقسیم کرد که، هر شرکت‌کننده در گرد هم‌آیی، دست‌کم یک آشنا در گروه خود داشته باشد.
۲۷. عدددهای درست را، روی محیط دایره نوشته‌ایم. به این ترتیب، می‌توان عمل کرد: هر عدد زوجی را حذف کرد و، بعد از آن، دو عدد مجاور آن را، با مجموع آنها عوض کرد (شکل ۲۴ را بینید). این عمل را تا آن جا ادامه می‌دهیم که، روی محیط دایره، یا عدد زوجی باقی نماند و یا، تعداد



عددان، برابر ۱ یا ۲ شود. ثابت کنید، تعداد عددانی که روی محیط دایره باقی می‌ماند، به روش عمل بستگی ندارد، ولی تنها به تبدیل نخستین عددان بستگی دارد.

### سال دهم

۲۸. عددانی حقیقی و غیر منفی  $a, b, c, d$  داده شده است. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & \max(a^r - b, b^r - c, c^r - d, d^r - a) \geq \\ & \geq \max(a^r - a, b^r - b, c^r - c, d^r - d) \end{aligned}$$

۲۹. دو دایره به مرکزهای  $O_1$  و  $O_2$ ، در نقطه‌های  $A$  و  $B$  یکدیگر را قطع کرده‌اند. دایره  $(O_1BO_2)$ ، دایره دوم را، در نقطه دیگر  $P$  قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های  $O_1, A, O_2$  و  $P$ ، روی یک خط راست‌اند.

۳۰. در یک گرد هم‌آبی، هر شرکت‌کننده، دست کم با یک نفر آشناست، ولی با همه شرکت‌کنندگان آشنا نیست. ثابت کنید، همه شرکت‌کنندگان در گرد هم‌آبی را، می‌توان به دو گروه چنان تقسیم کرد که، هر شرکت‌کننده، دست کم یک آشنا در گروه خود داشته باشد.

۳۱. تابع پیوسته و اکیداً صعودی  $f$  چنان است که:  $f(0) = 0$  و

۱) ثابت کنید:  $f(1) = 1$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{9}{10}\right) + \\ + f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) + f^{-1}\left(\frac{2}{10}\right) + \dots + f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) \leq \frac{99}{10}$$

۳۲. کامپیوتر می‌تواند، دو عمل زیر را، روی عدهای طبیعی انجام

دهد:

الف) آنها را مجنور کند؛

ب) عدد  $n$  رقمی ( $n > 3$ )  $X(n > 3)$  را به عدد  $A + B$  تبدیل کند که، در آن،  $A$  عبارت است از عدد سه رقمی سمت راست عدد  $X$ ؛ و  $B$  عدد  $(n - 3)$  رقمی سمت چپ عدد  $X$  است.

آیا می‌توان، با این کامپیوتر، عدد ۷۰۳ را از عدد ۶۰۴، به دست آورد؟

۳۳. خط راست  $L$ ، نقطه  $P$  و ضلعی  $M$ ، روی یک صفحه‌اند.

خط راست  $L$ ، همه ضلع‌های  $n$  ضلعی  $M$  را در نقطه‌های درونی ضلع‌ها قطع کرده‌است؛ در ضمن، این نقطه‌های برخورد، پای عمودهایی هستند که از نقطه  $P$  بر ضلع‌های  $M$  فرود آمده‌اند. ثابت کنید:  $n = 4$ .

۳۴\*. خانه‌های یک جدول  $N \times N$  را، به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز

درآورده‌ایم؛ در ضمن، به نحوی که کنار هر خانه قرمز، یک خانه آبی، کنار هر خانه آبی یک خانه سبز و کنار هر خانه سبز، یک خانه قرمز باشد (هر دو خانه متناظر، یک ضلع مشترک دارند). ثابت کنید، اگر تعداد خانه‌های

قرمز، برابر  $k$  باشد:

الف)  $k \leq \frac{2}{3}N^2$

ب)  $k \geq \frac{1}{11}N^2$

سال یازدهم

.۳۵. همان مساله ۲۸

.۳۶. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را، به سه گروه چنان تقسیم کرد که، مجموع عددهای گروه اول بر ۱۰۲، مجموع عددهای گروه دوم بر ۲۰۳ و مجموع عددهای گروه سوم بر ۳۰۴ بخش‌پذیر باشد؟  
.۳۷. همان مساله ۲۵

.۳۸. دنباله عددهای طبیعی  $(a_n)$ ، بنابر قاعده زیر ساخته شده است: هر جمله  $a_{2n}$  (جمله ردیف زوج)، با اضافه کردن یکی از رقم‌های  $a_{2n-1}$  به آن؛ و هر جمله  $a_{2n+1}$  (جمله با شماره فرد) از روی  $a_{2n}$ ، با کم کردن یکی از رقم‌هایش از آن. در ضمن، چه برای اضافه کردن و چه برای کم کردن، باید رقمی را انتخاب کرد که برابر صفر نباشد. ثابت کنید، جمله‌های این دنباله، از  $44 + 4a_1$  تجاوز نمی‌کنند.

.۳۹. آیا چهار عدد مختلف می‌توان پیدا کرد، به نحوی که هر دو تا از آن‌ها ( $x$  و  $y$ )، با این برابری به هم مربوط باشند:

$$x^{10} + x^9y + x^8y^2 + \dots + xy^9 + y^{10} = 1$$

.۴۰. نقطه‌های  $X$  و  $Y$  را، به ترتیب روی ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$  طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\widehat{AXY} = 2\widehat{ACB} \text{ و } \widehat{CYX} = 2\widehat{BAC}$$

درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{S_{AXYC}}{S_{ABC}} \leq \frac{|AX|^2 + |XY|^2 + |YC|^2}{|AC|^2}$$

.۴۱\*. روی سیاره «ترانای»، ۱۹۹۱ شهر وجود دارد که، هر دو تا از آن‌ها، با جاده‌ای به هم مربوط‌اند. هر روز، وزارت راه سه جاده را، برای

مرمت می‌بندد و اداره راهنمایی، یک جاده باز را، با حرکت یک طرفه اعلام می‌کند. وزارت راه، از بستن جاده‌هایی که یک طرفه اعلام شده‌اند، خودداری می‌کند. ثابت کنید، اداره راهنمایی، می‌تواند ترتیب کار را طوری بدهد که، رفتن از هر شهر به هر شهر دیگر ممکن باشد، بدون این‌که قانون حرکت در جاده‌های یک‌طرفه به هم بخورد.

### دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۲. ۷۰ عدد طبیعی مختلف، که هیچ‌کدام از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کند، داده شده‌است. ثابت کنید، در بین آن‌ها، دو عدد وجود دارد که به اندازه چهار یا پنج یا نه با هم اختلاف دارند.

۴۳. دو دایره، با شعاع‌های برابر، در نقطه‌های  $A$  و  $B$ ، یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط راست دلخواهی که از نقطه  $B$  می‌گذرد، دایره‌ها را در نقطه‌های دیگر  $X$  و  $Y$  قطع کرده‌است. مطلوب است مکان هندسی نقطه وسط پاره‌خط راست  $XY$ .

۴۴. عده‌های طبیعی  $A_1, A_2, \dots, A_n$  چنان‌اند که، بهازای هر عدد طبیعی  $k < n$ ، مجموعه هر  $k$  عدد، از  $(1 - k)n$  تجاوز نمی‌کند؛ در ضمن، مجموع همه عده‌های  $A_i$ ، برابر است با  $(n - 1)n$ . ثابت کنید، در مسابقه فوتبال بین  $n$  تیم که، در آن، هر دو تیم یکبار با هم بازی کنند، ممکن است تعداد امتیاز‌های تیم‌ها، برابر عده‌های  $A_i$  شود.

۴۵. عدد طبیعی  $a$  را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - 1}} + \dots + \sqrt{\sqrt{a_8} - \sqrt{a_8 - 1}} = 2$$

۴۶. آیا تابع  $f : N \rightarrow N$  وجود دارد، به نحوی که برای هر عدد طبیعی  $x$  داشته باشیم:

$$f(f(f(\dots f(x) \dots)) = x + 1$$

که، در آن،  $f$  به تعداد  $(x)$  مرتبه تکرار شده است.  
 ۴۷\*. ۲۶ رقم غیر صفر را در یک ردیف نوشتایم. ثابت کنید، عددی را که به این ترتیب به دست می‌آید، می‌توان طوری به چند بخش تقسیم کرد که، مجموع عددهایی که در هر بخش به دست آمده است، بر ۱۳ بخش پذیر باشد.

۴۸. قطرهای چهار ضلعی کوثر  $ABCD$ ، در نقطه  $M$ ، یکدیگر را قطع کرده‌اند.  $P$  و  $Q$  را مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای  $ABM$  و  $CDM$  می‌گیریم. ثابت کنید:

$$|AB| + |CD| = 4|PQ|$$

۴۹\*. وقتی از بُر زدن  $n$  ورق بازی صحبت می‌کنیم، به این معنا می‌گیریم که، دسته ورق را به تعداد دلخواهی بخش تقسیم کنیم و، بدون این که ردیف ورق‌ها را در درون هر بخش تغییر دهیم، بخش‌ها را به ردیف عکس، روی هم بگذاریم. ثابت کنید، دسته شامل  $1000$  ورق را، با حداقل  $56$  بار بُر زدن، از هر وضعی به هر وضع دیگر تبدیل کرد.

### دور نهایی (سال یازدهم)

۵۰. در گوشة بالا و راستِ جدول  $8 \times 8$ ، یک مهره سیاه وجود دارد. در هر حرکت می‌توان، در هر خانه‌ای از جدول، مهره سفید گذاشت و، در ضمن، همه مهره‌هایی را که در همسایگی آن قرار دارند (یعنی با آن، راسی مشترکی دارند)، با رنگ متضاد خود عوض کرد (یعنی سیاه را به سفید تبدیل کرد و برعکس). آیا با این روش می‌توان ترتیبی داد که همه خانه‌های جدول را با مهره‌های سفید پر کرده باشند؟

۵۱. وتر  $AB$ ، دایره را به دو قطعه دایره تقسیم کرده‌است.  $M$  و  $N$  وسطهای دو کمان  $AB$  از دایره‌اند. ضمن دوران دور نقطه  $A$ ، و به

اندازه زاویه‌ای، نقطه  $B$  به  $B'$  و نقطه  $M$  به  $M'$  رفته است. ثابت کنید، پاره خط‌های راستی که وسط پاره خط راست  $BB'$  را به نقطه‌های  $M'$  و  $N$  وصل می‌کنند، بر هم عمودند.

۵۲. عددهای حقیقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  در بازه  $[1, 1]$  واقع‌اند و مجموع مکعب‌های آن‌ها برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع خود عددها، از  $\frac{1}{n^3}$  تجاوز نمی‌کند.

۵۳. با عدد طبیعی، می‌توان این عمل‌ها را انجام داد:  
 الف) آن را در یک عدد طبیعی دلخواه ضرب کرد؛  
 ب) رقم‌های صفر را، در عدد نویسی به مبنای ۱۰ از آن حذف کرد.  
 ثابت کنید، به کمک این عمل‌ها، می‌توان از هر عدد طبیعی، به یک عدد یک رقمی رسید.

۵۴. دوتابع پیوسته

$$f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

مفروض‌اند؛ در ضمن تابع  $f$ ، یکنوا و صعودی است. درستی این نابرابری را ثابت کنید

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

۵۵\*. دنباله با پایان  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را، نسبت به عدد  $p$ ، «هم وزن» گوییم وقتی که همه مجموع‌های به صورت

$$a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots, (k = 1, 2, \dots, p)$$

در این دنباله، با هم برابر باشند. ثابت کنید، اگر دنباله‌ای که شامل ۵۰ جمله است، برای

$$p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$$

«هم وزن» باشد، آن وقت، همه جمله‌های دنباله، باید برابر صفر باشند.  
 \*۵۶. ثابت کنید،  $512^3 + 575^3 + 720^3$  عددی مرکب است.  
 \*۵۷. هر انتخابی از  $n$  راس  $n$  ضلعی منتظم را، «نمونه» می‌نامیم. آیا این حکم درست است که: ۱۰۰ دوران  $n$  ضلعی وجود دارد، به نحوی که تصویرهای «نمونه» در این دوران‌ها (یعنی نقطه‌هایی که از  $n$  راس انتخابی، بعد از ۱۰۰ دوران به دست می‌آید)، همه راس‌های  $n$  ضلعی را می‌پوشانند؟

## ۱۹۹۲

### سال ششم

۱. در دور مسابقه «خط و نقطه»، برای هر پیروزی یک امتیاز می‌دهند، برای تساوی امتیازی نمی‌دهند و برای باخت، یک امتیاز کم می‌کنند (یعنی امتیاز منفی می‌دهند). چند دانشآموز در مسابقه «خط و نقطه» شرکت کردند و هر نفر با هر نفر دیگر، درست یکبار بازی کرد. یکی از دانشآموزان ۷ امتیاز و دیگری ۲۰ امتیاز آورد. ثابت کنید، در مسابقه، دست کم یک تساوی بوده است.

۲. قلعه‌ای به شکل هفت ضلعی است و، در هر راس آن، یک برج نگهبانی وجود دارد. هر نگهبانی که در برج انتهای یکی از هفت دیوار قلعه است، از دیوار مراقبت می‌کند. در برج‌ها، دست کم چند نگهبان باید باشد تا هر دیوار حداقل زیر مراقبت هفت نگهبان قرار گیرد؟

۳. عدد طبیعی  $N$  داده شده است. ثابت کنید، مجموع رقم‌ها، در دو عدد  $(N - 1)$  و  $(N + 1)$  برابر نیست.

۴. در مجموعه سکه‌های «فه‌دیا»، قطر هر سکه از ۱۰ سانتی‌متر تع加وز نمی‌کند. او همه سکه‌های خود را در جعبه‌ای با اندازه‌های  $70 \times 30$  سانتی‌متری (که در یک ردیف، در کف آن چیده شده است) نگهداری می‌کند.

ثابت کنید، «فهديا» می‌تواند، همين سکمه را در يك رديف، در جعبه با اندازه‌های  $60 \times 40$  قرار دهد.

۵. ۲۷ نقطه، روی محيط دایره‌اند و آن را، به كمان‌های برابر تقسيم کرده‌اند. اين نقطه‌ها را، به رنگ‌های سياه و سفيد درآورده‌ایم، به نحوی که، هر دو نقطه سياه، در مجاورت هم و يا با فاصله تنها يك نقطه سفيد، قرار نگرفته باشند. ثابت کنید، سه نقطه سفيد پيدا می‌شود که راس‌های يك مثلث متساوي‌الاضلاع‌اند (يعني، محيط دایره را، به سه بخش برابر تقسيم کرده‌اند).

۶. سه متقلب، اسکناس‌های بسيار مختلفی را چاپ کردند؛ هر کدام از سه نفر به ارزش کل ۱۰۰ روبل. می‌دانيم، هر يك از آن‌ها می‌تواند به هر کدام از دو نفر ديگر، از ۱ تا ۲۵ روبل پردازد (در اين پرداخت، ممکن است طرف مقابل ناچار باشد، مبلغی را پس بدهد). ثابت کنید، آن‌ها می‌توانند با هم، هر مبلغی از ۱۰۰ تا ۲۰۰ روبل را پردازنند.

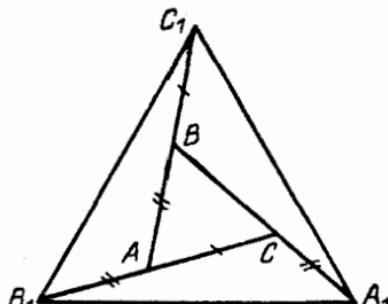
يادداشت: اسکناس‌ها تقلیب‌اند و می‌توانند هر ارزش دلخواهی را داشته باشند. در مساله، همه جا، صحبت بر سر مبلغ‌هایی است که، با تعداد درستی روبل، قابل بیان‌اند.

### سال هفتم

۷. ۹ گونه کالا، در اول ژانویه، هر کدام ۱ روبل قيمت داشتند. از اين روز به بعد، هر روز، قيمت هر کالا، نسبت به روز قبل، دو يا سه برابر شد. می‌دانيم، در اول فوريه، قيمت همه اين کالاهای، با هم فرق داشته‌اند. ثابت کنید، در اول فوريه، دو کالا وجود دارد که، قيمت يكی، دست‌کم ۲۵ برابر ديگري است.

۸. برای کدام عدداء طبیعی به صورت  $111\dots111$ ، عدد به صورت  $1000\dots001$  وجود دارد که بر آن‌ها بخش‌پذير باشد؟

۹. ضلع‌های مثلث  $ABC$  را طوري ادامه داده‌ایم که داشته باشيم



شکل ۲۵

(شکل ۲۵)

$$|BC_1| = |AC|, |AB_1| = |AB|, |CA_1| = |AB|$$

اگر مثلث  $A_1B_1C_1$  متساوی‌الاضلاع باشد، ثابت کنید، مثلث نخستین  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است.

۱۰. در یک صفحه شترنجی، ۱۰۰ نقطه گرهی شبکه را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان در بین نقطه‌های نشان‌دار، دو نقطه  $A$  و  $B$  را طوری پیدا کرد که مستطیل  $AXBY$  با ضلع‌های موازی خط‌های راست شبکه، شامل دست‌کم ۲۰ نقطه نشان‌دار باشد. (گره‌های واقع بر ضلع های مستطیل را هم به حساب آورید).

۱۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = \frac{1}{4}(b+c) \\ b^2 + 3b + 1 = \frac{1}{4}(a+c) \\ c^2 + 3c + 1 = \frac{1}{4}(a+b) \end{cases}$$

۱۲. همه سکه‌های مجموعه آقای «فدهدیا» قطری بیشتر از ۱۰ سانتی‌متر

ندازند. او همه سکه‌های خود را در سطح کف جعبه‌ای با اندازه‌های  $70 \times 30$  سانتی‌متری جا داده است. به او، سکه‌ای به قطر  $25$  سانتی‌متر هدیه کردند. ثابت کنید، اگرچه می‌تواند همه سکه‌های خود را در کف یک جعبه با اندازه‌های  $55 \times 55$  بچیند.

۱۳. سطح دایره‌ای به  $n$  قطاع تقسیم شده و  $1 + n$  قورباغه، به نحوی در آن‌ها نشسته‌اند. هر ثانیه، دو قورباغه‌ای که در یک قطاع باشند، به قطاع‌های مجاور (و مختلف) می‌جهند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که قورباغه‌ها، دست کم نیمی از قطاع‌ها را اشغال کرده باشند.

#### سال هشتم

۱۴. همان مساله ۷.

۱۵. همان مساله ۵.

۱۶. در ذوزنقه‌ای، طول یکی از قطرها، با مجموع طول‌های دو قاعده برابر است. اگر زاویه بین دو قطر، برابر  $60^\circ$  درجه باشد، ثابت کنید، ذوزنقه متساوی الساقین است.

۱۷. همان مساله ۱۱.

۱۸. دو عدد طبیعی  $k$  و  $n$  داده شده که، اختلاف آن‌ها، بیشتر از واحد است. می‌دانیم  $1 + 2n - k$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید، دو عدد  $1 + 2n$  و  $1 + k$ ، بخشیاب مشترکی بزرگتر از واحد دارند.

۱۹. خانه‌های مریع  $7 \times 7$  را به دو رنگ درآورده‌ایم. ثابت کنید، دست کم ۲۱ مستطیل وجود دارد که، راس‌های هریک از آن‌ها، در مراکزهای خانه‌های هم‌رنگ واقع است و ضلع‌های موازی با ضلع‌های مریع دارد.

۲۰. همان مساله ۱۳.

#### مساله نهم

۲۱. دو سه جمله‌ای درجه دوم  $f(x)$  و  $g(x)$ ، با ضریب بزرگترین درجه واحد، مفروض‌اند. می‌دانیم

$$f(19) + f(92) = g(19) + g(92)$$

به ازای چه مقدارهایی از  $x$ ، برابری  $f(x) = g(x)$  برقرار است؟

۲۲. درباره عدد طبیعی  $A$ ، می‌توانیم این عمل را انجام دهیم: عدد  $A$  را به دو بخش بزرگتر از واحد تقسیم کنیم و، سپس، حاصل ضرب این دو بخش را، به جای عدد  $A$  قرار دهیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می‌توان از هر عدد بزرگتر از ۴، به توانی از ۱۰ رسید.

۲۳. ۲۰ مکعب برابر، با یال‌های به طول واحد داده شده است. همه ۱۲۰ وجه این مکعب‌ها را به رنگ‌های سیاه و سفید درآورده‌ایم و، در ضمن، از هر رنگ، برای ۶ وجه استفاده شده است. ثابت کنید، این مکعب‌ها را می‌توان روی میز طوری قرار داد که، وجه‌های زیرین آنها، وجه زیرین  $6 \times 6$  یک مکعب بزرگ را تشکیل دهند و، در بین وجه‌های مکعب بزرگ که دیده می‌شوند، تعداد وجه‌های سیاه با تعداد وجه‌های سفید مکعب‌های کوچک، با هم برابر باشند.

۲۴. دو مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $A'B'C'$  متشابه‌اند (زاویه‌های به راس‌های  $B$  و  $B'$  قائم‌اند؛ راس‌های متناظر دو مثلث، با یک حرف بیان شده‌اند؛ حرکت روی محیط هر مثلث را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته‌ایم). این دو مثلث طوری قرار گرفته‌اند که  $A = C'$ ، و نقطه  $A'$  بر نیم خط راست  $(BC)$ ، بعد از نقطه  $C$  واقع است. ثابت کنید، مرکز دایره محیطی مثلث  $A'AC$  روی خط راست  $A'B'$  است.

۲۵. در خانه‌های یک جدول شطرنجی  $n \times n$ ، عددهایی گذاشته‌ایم، به نحوی که عدد واقع در خانه  $M$  محل برخورد نامین ستون و زامین سطر، برابر  $\frac{1}{i+j}$  باشد. سپس،  $n^2$  رُخ طوری در خانه‌های جدول گذاشته‌ایم

که، هیچ دو رُخی یکدیگر را نزنند. ثابت کنید، مجموع عدهای زیر رُخ‌ها، از واحد کمتر نیست.

۲۶. نقطه  $D$  را در درون ضلع  $AB$  از مثلث  $ABC$  طوری در نظر گرفتهایم که داشته باشیم:

$$|AD| : |DC| = |AB| : |BC|$$

ثابت کنید، زاویه  $ACB$  منفرجه است.

۲۷. دو عدد ده رقمی  $A$  و  $B$  چنان‌اند که، برای نوشتن آن‌ها، تنها از رقم‌های ۱ و ۲ استفاده شده‌است. ثابت کنید، تعداد عدهای ۲۰ رقمی که با حذف رقم‌های آن‌ها می‌توان عدد  $A$  را به دست آورد، برابر است با تعداد عدهای ۲۰ رقمی که با حذف رقم‌های آن‌ها، عدد  $B$  به دست می‌آید.

### سال دهم

۲۸. همان مساله ۲۱

۲۹. چهار راس و یک نقطه درونی مربع به ضلع واحد را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، سه نقطه نشان‌دار وجود دارد که، مساحت مثلث با راس‌هایی در این سه نقطه، مساحتی بیشتر از  $\frac{1}{8}$  ندارد.

۳۰. روی هر یک از  $n \geq 3$  کارت، یک رقم نوشته‌ایم؛ سپس این کارت‌ها را، به همه گونه‌هایی که ممکن است، کنار هم گذاشته‌ایم. به این ترتیب، تعداد  $n!$  عدد به دست می‌آید. آیا ممکن است، حاصل ضرب این عدها، در عدد نویسی به مبنای ۱۰، تنها با رقم‌های برابر ۱ نوشته شده باشد؟

۳۱. دایره در یک زاویه به راس  $O$  محاط شده و در نقطه‌های  $A$  و  $B$ ، بر ضلع‌های زاویه مماس است. نیم خط راست  $Ox$ ، این دایره را در

نقطه‌های  $C$  و  $D$  طوری قطع کرده است که

$$|OC| = |CD| = 1$$

اگر  $M$ ، نقطه بروخورد نیم خط راست  $Ox$  با پاره خط راست  $AB$  باشد، طول پاره خط راست  $OM$  چقدر است؟

۳۲. ۱۹۹۲ تکه سنگ کوچک، به صورت یک توده روی هم ریخته شده است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: هر کس در نوبت حرکت خود، باید تعدادی تکه سنگ را به دلخواه بردارد، تنها تعداد این تکه سنگ‌ها باید بخشیابی از تعداد تکه سنگ‌هایی باشد که رقیب او، در حرکت قبلی برداشته است. کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند، به هر تعداد تکه سنگ بردارد، ولی نه همه آن‌ها را یکباره. کسی بازی را می‌برد که آخرین سنگ را برداشته باشد. اگر بازی سنجیده انجام شود، چه کسی برنده می‌شود؟

۳۳. یک  $n$  ضلعی منتظم به مرکز  $O$ ، روی صفحه داده شده است. بردارهای به مبدأ  $O$  و انتهای یکی از راس‌ها را، به ترتیب و با آغاز از یک راس  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  می‌نامیم. ثابت کنید، اگر

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

عددهای حقیقی دلخواهی باشند، آنوقت بُردار

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

برداری غیر صفر است.

۳۴\*. در دسته گارد ملی، گروهبان‌ها و سربازان خدمت می‌کنند؛ در ضمن، هر سرباز از یک یا دو گروهبان، فرمان می‌برد. ثابت کنید، می‌توان، تا نیمی از دسته را بازنیسته کرد، به نحوی که، هر سرباز باقی‌مانده، درست از یک گروهبان، فرمان ببرد.

سال یازدهم

. ۳۵ همان مساله ۳۹.

. ۳۶ در سه جمله‌ای‌های مختلف و درجه دوم  $f(x)$  و  $(g(x))$  ضریب‌های بزرگترین درجه، برابر واحد است. می‌دانیم

$$f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$$

برابری  $f(x) = g(x)$ ، به ازای چه مقداری از  $x$ ، برقرار است؟

. ۳۷ روی محیط دایره، چند مهره سیاه و، به همان تعداد، مهره سفید گذاشته‌ایم. تعداد ردیف‌های سه مهره‌ای را که، در آن‌ها، مهره سفید بیشتر است،  $A$ ؛ و تعداد ردیف‌های سه‌تایی را که، در هر یک از آن‌ها، تعداد مهره‌های سیاه بترتیب دارد،  $B$  می‌گیریم. ثابت کنید  $A \leq 3B$ .

. ۳۸ مثلث  $ABC$  زاویه‌هایی حاده دارد و، در ضمن، متساوی الساقین نیست.  $CF$  و  $BE$ ، ارتفاع‌های این مثلث‌اند. نقطه‌های  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  چنان‌اند که، نقطه‌های  $D$ ،  $E$  و  $F$ ، به ترتیب، وسط پاره خط‌های راست  $AZ$  و  $CY$ ،  $BX$  و  $AB$  هستند. ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث‌های  $ABC$ ،  $ACX$  و  $BCZ$ ، راس‌های مثلثی‌اند که با مثلث  $ABC$  برابر است.

. ۳۹. دنباله  $(F_n)$ ، به این ترتیب، تعریف شده است:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n > 1)$$

ثابت کنید، در بین جمله‌های این دنباله، عده‌های به صورت  $7^k$  وجود ندارد.

. ۴۰. برای عده‌های مثبت  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، ثابت کنید:

$$-1 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{11} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{11} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{11} \leq 1$$

۴۱. همه خانه‌های یک جدول  $10 \times 10$  را به صورت سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم؛ در ضمن هم خانه‌های سیاه و هم خانه‌های سفید وجود دارد. ثابت کنید، می‌توان در خانه‌های این جدول، عددی‌های حقیقی را طوری قرار داد که، عدد هر خانه سفید، بزرگتر از میانگین حسابی عددی‌های خانه‌های مجاور خود، و عدد هر خانه سیاه کوچکتر از میانگین حسابی عددی‌های خانه‌های مجاور خود باشد (خانه‌هایی را مجاور می‌نامیم که یک ضلع مشترک داشته باشند).

دور نهایی (سال‌های نهم و دهم)

۴۲. نقطه  $D$  را روی ضلع  $BC$  از مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  در نظر گرفته‌ایم. خط راست موازی  $AD$  که از نقطه  $C$  گذشته است، خط راست  $AB$  را در نقطه  $E$  قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$|CE| : |CD| \geq 2\sqrt{3}$$

۴۳. به عددی طبیعی، در هر ثانیه، ۵۴ یا ۷۷ واحد اضافه می‌شود. ثابت کنید، بعد از مدتی، به عددی می‌رسیم که، دو رقم سمت راست آن، با هم برابرند.

۴۴. تعداد  $nk$  مهره در اختیار داریم که، آنها را، به نحوی، به  $n$  بخش کرده‌ایم. می‌توانیم، تعداد مهره‌های هر بخش را، با استفاده دلخواه از مهره‌های بخش‌های دیگر، دو برابر کنیم. به ازای چه مقدارهایی از  $k$ ، همیشه (یعنی به ازای هر  $n$ ) می‌توان با این عمل، ترتیبی داد که، در همه بخش‌های باقی‌مانده، تعداد مهره‌ها با هم برابر باشند؟

۴۵. ثابت کنید، اگر عدد طبیعی  $A$ ، مجنور کامل نباشد، می‌توان عدد

طبيعي  $n$  را طوري پيدا کرد که داشته باشيم:

$$A = \left[ n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$$

۴۶. ضلعي منتظم  $M$  را دور مرکز خود و به اندازه زاويه  $\frac{\pi}{n}$  دوران داده ايم تا چند ضلعي  $M'$  به دست آيد. حداقل چه تعداد چند ضلعي کوثر می توان از شكل  $M \cup M'$  بُرید؟

۴۷. دنباله  $(F_n)$  اين طور تعريف شده است:

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

ثابت کنيد، برای هر عدد طبيعي  $n$  داريم:

$$\sqrt[n]{F_{n+1}} > 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$$

۴۸\*. صفحه را، با ۱۹۹۲ رنگ مختلف، رنگ کرده ايم؛ روی اين صفحه، مثلث  $T$  رسم شده است. ثابت کنيد، روی صفحه، مثلثي برابر مثلث  $T$  پيدا می شود که، روی هر دو ضلع آن، نقطه هايی از يك رنگ وجود داشته باشد.

۴۹\*. ۱۲۸ رقم برابر واحد، روی تخته نوشته شده است. در هر حرکت می توان، به جاي دو عدد  $a$  و  $b$ ، عدد  $1 + ab$  را نوشت.  $A$  را بزرگترین عددی بگيريد که، بعد از ۱۲۷ حرکت، روی تخته به دست آمده باشد. رقم سمت راست اين عدد، چند است؟

دور نهايی (سال يازدهم)

۵۰.  $n$  پاره خط راست داده شده است و می‌دانیم، از هر  $1 - n$  پاره خط راست دلخواه، می‌توان یک  $(1 - n)$  ضلعی درست کرد. ثابت کنید، با سه تا از این پاره خط‌های راست می‌توان یک مثلث رسم کرد.

۵۱. سه عدد طبیعی چنان‌اند که، اگر به حاصل ضرب دو عدد دلخواه از آن‌ها یک واحد اضافه کنیم، عددی به دست می‌آید که بر سومی بخش‌پذیر است. همه این‌گونه سه‌تایی‌ها را پیدا کنید.

۵۲. همان مساله ۴۵.

۵۳. عده‌های طبیعی  $n$  و  $k$ ، با شرط  $k > n$  داده شده است. ثابت کنید، هر عدد طبیعی کوچکتر از  $\binom{n}{k}$  را می‌توان، درست با یک روش، به صورت مجموع

$$\left( \begin{array}{c} a_1 \\ 1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} a_2 \\ 2 \end{array} \right) + \dots + \left( \begin{array}{c} a_k \\ k \end{array} \right)$$

نشان داد که، در آن  $n \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ .

۵۴. می‌دانیم، برای هر چهار خط راستی که روی صفحه، در موقعیت کلی هستند (یعنی، هیچ دو تایی با هم موازی نیستند و هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند)، دایره‌های محیطی چهار مثلثی که، راس‌های آن‌ها، نقطه‌های برخورد این چهار خط راست است، از یک نقطه می‌گذرند. آیا می‌توان دسته‌ای از ۴۵ خط راست در موقعیت کلی پیدا کرد، به نحوی همه دایره‌های محیطی مثلث‌هایی که راس‌های آن‌ها، در نقطه‌های برخورد این خط‌های راست است، از یک نقطه بگذرند؟

۵۵. ۱۰۰ شهر یک کشور، با جاده‌هایی چنان به هم مربوط‌اند که، اگر همه جاده‌هایی را که از یک شهر مثل  $A$  خارج شده است، بیندیم، باز هم می‌توان از هر شهری به هر شهر دیگر رفت (البته، بدون در نظر گرفتن شهر  $A$ ). ثابت کنید، این کشور را می‌توان به دو بخش چنان تقسیم کرد که، در

هر بخش، ۵۰ شهر وجود داشته باشد و، در ضمن، در هر بخش بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

۵۶\*.  $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$  را تعداد روش‌های می‌گیریم که، به‌وسیله آنها، بتوانیم در خانه‌های یک جدول  $m \times n$ ؛ به تعداد  $a_1$  از عدد ۱، به تعداد  $a_2$  از عدد ۲، ...، و به تعداد  $a_k$  از عدد  $k$  طوری قرار دهیم که، در هر سطر عده‌ها از چپ به راست به طور صعودی غیر اکید و عده‌های هر ستون از بالا به پایین به طور صعودی اکید قرار گیرند. ثابت کنید، مقدار تابع  $L$ ، بستگی به ردیف متغیرهای آن ندارد.

۵۷\*. چند دایره به شعاع واحد، روی صفحه‌ای واقع‌اند. آیا درست است اگر بگوییم، همیشه می‌توان چند نقطه را طوری نشان کرد که، در درون هر دایره، درست یک نقطه نشان‌دار واقع باشد؟

## ۱۹۹۳

### سال ششم

۱. هفت نفر دور یک میز گرد نشسته‌اند؛ هریک از این افراد، یا شوالیه است و فقط راست می‌گوید و یا فقط دروغ می‌گوید. هریک از هفت نفر، مدعی شد: «دو نفری که در کنار من نشسته‌اند، دروغ‌گو و شوالیه هستند». ثابت کنید، همه آن‌ها، دروغ‌گو هستند.

۲. عده‌های از ۱ تا ۱۰۰ را به ردیف صعودی نوشته‌ایم (از چپ به راست). می‌توانیم، هر چند عدد را پاک کنیم و، بهجای آن‌ها، تعدادشان را بنویسیم (مثلًا، اگر سه عدد ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را پاک کردیم، بهجای آن‌ها، عدد ۳ را بنویسیم). آیا می‌تواند بعد از چند عمل از این‌گونه، تنها دو عدد ۵۰ و ۵۱ روی تخته باشد؟

۳. چند پسر و پنج دختر پشت میز نشسته‌اند و بشقابی حاوی ۳۰ شیرینی روی میز است. هر یک از دختران، به هر پسری که با او آشنا بود، یک شیرینی داد؛ سپس، هر پسر به هر دختری که با او آشنا نبود، یک شیرینی داد. معلوم شد که بشقاب خالی شده‌است. چند پسر در آن‌جا بوده‌است؟

۴. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد، به نحوی که حاصل ضرب دو عدد بزرگتر، با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۵. ترازویی دارای سه کفه است؛ ضمن وزن کردن، آن کفه‌ای پایین می‌آید که در آن، چیزی قرار گرفته باشد که، از لحاظ وزن، برابر میانگین سه چیزی باشد که در کفه‌ها قرار دارند. هفت چیز داده شده‌است که، همه آن‌ها، از نظر وزن با هم اختلاف دارند. چگونه می‌توان، با هشت بار استفاده از این ترازو، چیزی را مشخص کرد که، بین هفت چیز، وزن میانگین دارد؟ هر بار که از ترازو استفاده می‌کنیم، باید در هر کفه، یک چیز را قرار دهیم.

۶. روی یک صفحه، ۱۹۹۳ مثُلث داده شده است؛ در ضمن می‌دانیم، هر مثُلث، دست‌کم شامل چهار راس از مثُلث‌های دیگر است. ثابت کنید، سه مثُلث وجود دارد که نقطه مشترکی دارند.

## سال هفتم

۷. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۶ را در خانه‌های یک جدول مربعی  $4 \times 4$  طوری قرار داد که، اگر مجموع عددهای هر ستون و هر سطر را به دست آوریم، ۸ عدد طبیعی پشت سر هم داشته باشیم؟

۸. سه مسابقه دُوری شطرنج، بین یک گروه شرکت کننده انجام گرفت. می‌دانیم، هر دو شرکت کننده، هر سه بازی خود را در این مسابقه، به طور مختلف انجام دادند، یعنی با بُرد و تساوی. A در هریک از دو مسابقه اول، کمتر از همه امتیاز آورد. او در مسابقه آخر، چه مقامی را به دست آورده است؟

۹. عددی چهار رقمی را، از وسط، به دو عدد دو رقمی تقسیم کردهایم؛ معلوم شد، عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی، بخش پذیر است. آیا ممکن است، این مجموع، برابر ۹۴ باشد؟

۱۰. نقطه  $O$  را در درون پنج ضلعی کوژ  $ABCDE$  انتخاب کردهایم. معلوم شد، هر پنج مثلثی که، به این ترتیب، به دست می‌آید، با هم برابرند. ثابت کنید، یا همه این مثلث متساوی‌الساقین و یا همه آن‌ها قائم‌الزاویه‌اند.

### ۱۱. حداکثر مقدار عبارت

$$aek - afh + bfg - bdk + adh - ceg$$

را پیدا کنید، به شرطی که، هر یک از عدهای  $a, \dots, k$ ، برابر ۱ یا  $-1$  هستند.

۱۲. آدمی را «گوشه‌گیر» می‌نامیم که کمتر از ۱۰ آشنا داشته باشد. آدمی را «عجیب» می‌نامیم که، همه آشنایان او، افراد گوشه‌گیر باشند. ثابت کنید، تعداد آدم‌های عجیب، بیشتر از تعداد آدم‌های گوشه‌گیر نیست.

۱۳. در بعضی از خانه‌های یک جدول مستطیلی، ستاره گذاشته‌ایم. می‌دانیم، برای هر خانه ستاره‌دار، تعداد ستاره‌های واقع در ستون متعلق به آن خانه، با تعداد ستاره‌های متعلق به سطر آن خانه، برابر است. ثابت کنید، تعداد ستون‌هایی از جدول که، در هر کدام از آن‌ها، دست کم یک ستاره وجود دارد، برابر است با تعداد سطرهایی از جدول که، هر یک از آن‌ها، دست کم شامل یک ستاره است.

### سال هشتم

۱۴. در مسابقه تنیس روی میز، بین دانش‌آموزانی از کلاس ششم و کلاس هفتم، تساوی وجود نداشت؛ در ضمن کلاس هفتمی‌ها، دو برابر کلاس ششمی‌ها بودند. می‌دانیم، تعداد پیروزی‌های ششمی‌ها، با تعداد

پیروزی‌های هفتمی‌ها برابر شد. ثابت کنید، دانشآموزان کلاس ششم، در مسابقه پیروز شده‌اند.

۱۵. همان مساله ۳

۱۶. نقطه  $M$  را روی ضلع  $AC$  از مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  انتخاب کرده‌ایم؛ سپس، ضلع  $BC$  را از طرف راس  $C$  امتداد داده‌ایم و نقطه  $N$  را روی این امتداد طوری نشان گذاشته‌ایم که طول‌های دو پاره‌خط راست  $MN$  و  $BM$ ، برابر باشد. ثابت کنید، دو پاره‌خط راست  $AM$  و  $CN$  هم، طول‌هایی برابر دارند.

۱۷. عددهای طبیعی  $x$  و  $y$  چنان‌اند که، مجموع دو کسر

$$\frac{x^2 - 1}{y + 1} + \frac{y^2 - 1}{x + 1}$$

برابر عددی درست شده است. ثابت کنید، هر یک از این دو کسر، برابر عددی درست است.

۱۸. همان مساله ۶

۱۹. نقطه  $M$  وسط ضلع  $BC$  در چهار ضلعی کوثر  $ABCD$  است. می‌دانیم، مقدار زاویه  $AMD$  برابر  $120^\circ$  درجه است. ثابت کنید:

$$|AB| + \frac{1}{2}|BC| + |CD| \geq |DA|$$

۲۰. در یکی از خانه‌های جدول  $7 \times 7$ ، مهره‌ای گذاشته شده است. اجازه داریم، پشت سر هم، در خانه‌های خالی جدول مهره‌هایی قرار دهیم، به شرطی که مهره را، در حرکت نوبتی، در خانه‌ای قرار دهیم که تنها یک ضلع مشترک با یک خانه اشغال شده داشته باشد. حداقل چند مهره می‌توان روی خانه‌های جدول گذاشت؟

## سال نهم

۲۱. همه عددهای طبیعی را، که توانی از عدد ۲ هستند، پیدا کنید، به شرطی که بتوان با قرار دادن یک رقم در سمت چپ عدد، باز هم به توانی از عدد ۲ برسیم.

۲۲. چهارضلعی  $ABCD$  در یک دایره محاط است. خطهای راست  $AB$  و  $CD$ ، در نقطه  $M$  و خطهای راست  $BC$  و  $AD$ ، در نقطه  $N$ ، یکدیگر را قطع کردند. می‌دانیم  $|BM| = |DN|$ . ثابت کنید:  $|CM| = |CN|$

۲۳. به چند نفر مبلغی ارث رسید که بین خود تقسیم کردند. در این مساله، کسی را «بی‌چیز» می‌نامیم که کمتر از ۹۹ روبل دریافت کرده باشد و، اگر کسی بیش از ۱۰ هزار روبل ارث برده باشد، او را «چیزدار» می‌نامیم. می‌دانیم، هر جور ارث را تقسیم کنند، مقدار پول وارثان «چیزدار»، کمتر از مقدار پول «بی‌چیزان» نیست. ثابت کنید، به هر صورتی که ارث تقسیم شده باشد، مقدار ارثیه «چیزدارها»، دست کم ۱۰۰ برابر، «بی‌چیزان» است.

۲۴. درباره عددهای طبیعی  $a$ ،  $b$  و  $c$  می‌دانیم:

$$ab : (a - b) = c$$

در ضمن، می‌دانیم، سه عدد  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، بخشیاب مشترکی جز واحد ندارند. ثابت کنید،  $b - a$  مجزور کامل است.

۲۵. چند نقطه روی صفحه داده شده است. می‌توانیم، هر دو نقطه  $A$  و  $B$  را حذف و، به جای آنها، دو نقطه  $C$  و  $D$  را بگذاریم، به شرطی که خط راست  $CD$  بر خط راست  $AB$  عمود،  $C$  و  $D$  در دو طرف خط راست  $AB$  و طولهای  $|AC|$  و  $|BD|$ ، برابر باشد. ثابت کنید، بعد از انجام یک رشته عمل از این‌گونه، نمی‌توانیم دوباره به همان نقطه‌های نخستین برگردیم.

۲۶. درستی نابرابری زیر را، برای عددهای حقیقی و دلخواه  $x$ ،  $y$  و  $z$  ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[3]{z}}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

۲۷\*. دو ۱۰ ضلعی منتظم داده شده است که در هر راس از هر ده ضلعی، یک عدد طبیعی قرار دارد. می‌دانیم، مجموع عددها در هر ۱۰ ضلعی، برابر است با ۹۹. ثابت کنید، در دو چندضلعی، می‌توان چند رأس پشت سر هم را (و نه همه راس‌ها را) طوری انتخاب کرد که، مجموع های برابر داشته باشند.

### سال دهم

۲۸. چندجمله‌ای‌های  $P(x)$  و  $Q(x)$  چنان‌اند که، برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:

$$P(x^4 - x + 1) = Q(x^4 + x + 1)$$

ثابت کنید، هر چندجمله‌ای، مقداری ثابت است.

۲۹. دایره‌ای در درون مثلث  $ABC$  طوری رسم شده که بر ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  مماس است و، در ضمن، از نقطه  $P$  مرکز دایرة محاطی مثلث  $ABC$  می‌گذرد. دایرة دیگری، از نقطه‌های  $A$ ،  $P$  و  $C$  گذرانده‌ایم. ثابت کنید، این دو دایرة برابر هم مماس‌اند.

۳۰. همان مسالة ۲۳.

۳۱. همان مسالة ۲۴.

۳۲. نقطه  $M$  روی قطر  $AB$  از دایرة  $S$  (و غیر از مرکز دایرة) قرار دارد. دو نقطه مختلف  $P$  و  $Q$  را در یک طرف قطر  $AB$ ، روی محیط دایرة، طوری انتخاب کردیم که دو زاویه‌ای که دو قطعه  $PM$  و  $QM$  با قطعه  $AB$

می‌سازند، با هم برابر باشند. ثابت کنید، همه خطهای راست  $PQ$ ، از یک نقطه می‌گذرند.

۳۳. در جدول مربعی  $17 \times 17$ ،  $80$  خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم؛ بقیه خانه‌های جدول، سفیدند. اگر بیشتر خانه‌های یک ستون یا یک سطر، به رنگ سیاه باشند، می‌توانیم تمامی آن سطر یا آن ستون را سیاه کنیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، نمی‌توان، همه خانه‌های جدول را سیاه کرد.

۳۴\*. در مجموعه  $M$ ، عددهای طبیعی از  $1$  تا  $1993$ ، عمل با نماد  $a * b$  تعريف شده است که، هر دو عدد  $a$  و  $b$  از مجموعه  $M$  را به عدد  $a * b$  متعلق به همان مجموعه منجر می‌کند. می‌دانیم، برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  از مجموعه  $M$  داریم:

$$(a * b) * a = b$$

ثابت کنید، عدد  $a$  از مجموعه  $M$  وجود دارد که، برای آن داشته باشیم:

$$a * a = a$$

### سال یازدهم

۳۵. نقطه‌های  $D$  و  $E$  را، به ترتیب، روی ضلعهای  $AB$  و  $BC$  از مثلث  $ABC$  طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BD| + |DE| = |BC|, |BE| + |ED| = |AB|$$

همچنین می‌دانیم، چهارضلعی  $ADEC$ ، یک چهارضلعی محاطی است. ثابت کنید، مثلث  $ABC$ ، متساوی الساقین است.

۳۶. ثابت کنید، عددی به صورت

$$300\ldots01$$

نمی‌توان پیدا کرد که مجنوز کامل باشد.

۳۷. تابع  $f(x) = x^3 - 3x$  در همه محور حقیقی داده شده است.

ثابت کنید، تابع

$$f(f(f(f(f(f(f(f(x))))))))$$

مقداری را، دست کم ۱۹۹۳ بار قبول می‌کند.

۳۸. همان مساله ۳۲

۳۹. کشوری دارای  $n$  شهر است. برخی از شهرها با جاده‌هایی به هم مربوطاند؛ در ضمن، هر دو شهری، حداقل با یک جاده به هم مربوطاند. تعداد جاده‌هایی را که از یک شهر خارج می‌شوند، درجه آن شهر می‌نامیم.  $n \leq k \leq 2$  را عدد طبیعی می‌گیریم. ثابت کنید، می‌توان  $k$  شهر پیدا کرد که، درجه آن‌ها نسبت به هم، کمتر از  $1 - \frac{1}{k}$  با هم اختلاف دارد.

۴۰\*. تابع‌های مشتق‌پذیر  $f$  و  $g$ ، در بازه  $[0, 1]$  داده شده‌اند. در ضمن می‌دانیم  $1 = f(0)$  و  $f'g + 93fg' = g(0)$ ، غیر منفی است. ثابت کنید:  $g(1) \geq g(0)$ .

۴۱\*.  $n$  عددی طبیعی است و، روی تخته سیاه، همه عدهای طبیعی از  $n$  تا  $3n$  را نوشته‌ایم. اجازه داریم، هر دو عدد دلخواه  $a$  و  $b$  ( $a \leq b$ ) را از روی تخته پاک کنیم و، به جای آن‌ها، عدد  $\frac{1}{2}(a+b)$  را بنویسیم. ثابت کنید، بعد از یک رشته عمل از این گونه، روی تخته، تنها یک عدد کوچکتر از واحد باقی می‌ماند.

دور نهایی (سال نهم)

۴۲. دنباله عدهای مثبت  $(a_k)$  چنان است که، برای هر  $k$  داریم:

$$(a_{k+1} + k)a_k = 1$$

ثابت کنید، همه جمله‌های این دنباله، عدهایی گنگ هستند.

۴۳. نقطه‌های  $D$ ،  $E$  و  $F$  را روی ضلع‌های  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$  از مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  (با  $|AB| = |BC|$ ) نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$$|DE| = |DF| \text{ و } |AE| + |FC| = |AC|$$

ثابت کنید، دو زاویه  $BAC$  و  $FDE$  برابرند.

۴۴. در خانه‌های ستون چهارم جدول مستطیلی  $7 \times 6$ ، عده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷ را نوشته‌ایم. آیا می‌توان دیگر خانه‌های جدول را، طوری با عده‌های یک رقمی پر کرد که، عده‌های ۷ رقمی سطرها به تصاعد حسابی باشند؟ همچنین، عده‌های شش رقمی ستون‌ها هم، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند؟

۴۵. ثابت کنید، نمی‌توان مربع را به مثلث‌های متساوی‌الساقین تقسیم کرد که، زاویه راس هر کدام از آن‌ها، برابر  $10^\circ$  درجه باشد.

۴۶. در خانه  $h_8$  از صفحه شترنج، ستونی از  $n$  مهره مختلف وجود دارد. می‌توانیم مهره‌ها را از ستون برداریم و روی یکی از خانه‌های پایین یا چپ قرار دهیم. در ضمن، نمی‌توان مهره را در یک خانه دیگر، مگر خانه  $a_1$  گذاشت. بیشترین مقدار  $n$  چقدر می‌تواند باشد تا بتوان آن‌ها را از خانه  $h_8$  به خانه  $a_1$  برد که مهره‌ها به ردیف تختین باشند؟

۴۷. در یک مسابقه دوری والیبال، ۹۳ تیم شرکت دارند. می‌دانیم، هر ۱۹ تیم دلخواهی را که انتخاب کنیم، در بین آن‌ها، تیمی وجود دارد که از ۱۸ تیم دیگر بزرگ، و تیمی وجود دارد که به همه ۱۸ تیم دیگر باخته است. ثابت کنید، امتیازهای همه تیم‌ها، با یکدیگر فرق دارد.

۴۸. عددی طبیعی را روی تخته سیاه نوشته‌ایم. در هر ثانیه، مجموع رقم‌های مرتبه‌های زوج عدد (دهگان، هزارگان و غیره)، به عدد اضافه می‌شود. ثابت کنید، دیر یا زود، تغییر عدد، متوقف می‌شود.

۴۹. چهار نقطه را در درون یک چهار ضلعی کوثر نشان گذاشته ایم. ثابت کنید، نقطه‌ای روی محیط چندضلعی پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های آن تا راس‌های چهارضلعی، از مجموع فاصله‌های آن تا راس‌های نشان دار، بیشتر باشد.

دور نهایی (سال دهم)

۵۰. نقطه‌های  $D$ ،  $E$  و  $F$  را روی ضلع‌های  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$  از مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ) طوری در نظر گرفته ایم که پاره خط‌های راست  $DF$  و  $DE$  طولی برابر داشته باشند و، در ضمن، دو زاویه  $BAC$  و  $FDE$  نیز برابر باشند. ثابت کنید:

$$|AE| + |FC| = |AC|$$

۵۱. آیا می‌توان رقم‌های ۱ تا ۹ را در خانه‌های جدول  $10 \times 10$  طوری قرار داد که، همه عددهای ده رقمی سطرها، از عدد ده رقمی قطر اصلی بزرگتر باشند و عدد اخیر هم، به نوبه خود، بزرگتر از همه عددهای ده رقمی ستون‌ها باشد.

۵۲. نقطه  $O$ ، در صفحه مربع  $ABCD$  داده شده است. کمترین مقدار این کسر را پیدا کنید:

$$\frac{|OA| + |OC|}{|OB| + |OD|}$$

۵۳. ثابت کنید، تابع  $f(x)$  که در  $[0, +\infty]$  تعریف شده، وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(\dots(x)\dots)) = \frac{x}{x+1}$$

(از نماد  $f$ ، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۵۴. ۱۹۹۳ نقطه روی صفحه کاغذ نشان گذاشته شده است. بعضی از آنها، به وسیله پاره خط‌های راست غیر متقاطع به هم وصل شده‌اند؛ در ضمن، این پاره خط‌های راست چنان‌اند که، از بین آنها نمی‌توان یک خط شکسته بسته پیدا کرد. دو نفر، به نوبت، هر بار یک مهره روی یکی از نقطه‌ها می‌گذارند؛ در ضمن هر کس، باید مهره خود را در نقطه مجاور نقطه‌ای بگذارد که نفر قبلی مهره خود را در آنجا گذاشته است (نقطه‌ها را، وقتی مجاور می‌دانیم که، به وسیله یک پاره خط راست، به هم وصل شده باشند). کسی که، در نوبت خود، نتواند جایی برای مهره خود پیدا کند، بازی را باخته است. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کرده است، می‌تواند برنده شود.

۵۵. عددهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  در بازه بسته  $[1, 1]$  واقع‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i} \quad (a_{n+1} = a_1)$$

۵۶. در راس‌های یک  $n$  ضلعی منتظم،  $(1 - n)$  صفر و یک واحد گذاشته‌ایم. به راس‌های هر  $k$  ضلعی منتظم محاط در چند ضلعی اصلی، می‌توان یک واحد اضافه کرد. آیا با این عمل، می‌توان همه عددهای واقع در راس‌های  $n$  ضلعی را، برابر کرد؟

۵۷\*. در دو ظرف،  $1 + 2p$  گلوله وجود دارد. در هر ثانیه، نیمی از گلوله‌های ظرفی را که حاوی تعداد زوجی گلوله است، بر می‌داریم و به ظرف دوم می‌ریزیم.  $1 + 2p < k$  می‌گیریم و، فرض می‌کنیم،  $p$  و  $1 + 2p$  عددی اول باشند. ثابت کنید، دیر یا زود، ذر یکی از ظرف‌ها، درست  $k$  گلوله وجود خواهد داشت.

دور نهایی (سال یازدهم)

.۴۲. همان مساله .۵۸

.۵۹. ثابت کنید، تابع  $f(x)$ ، معین در بازه  $[0, +\infty]$  وجود دارد که،

برای آن داشته باشیم:

$$f(f(\dots(x)\dots)) = 1 + x + 2\sqrt{x}$$

(از نماد  $f$ ، ۴۵ بار استفاده شده است).

.۶۰. روی ضلع‌های  $BC$  و  $AB$  از مثلث  $ABC$ ، به ترتیب، نقطه‌های  $D$  و  $F$  را انتخاب کرده‌ایم. اگر  $E$  وسط پاره‌خط راست  $DF$  باشد، ثابت کنید:

$$|AD| + |FC| \leq |AE| + |EC|$$

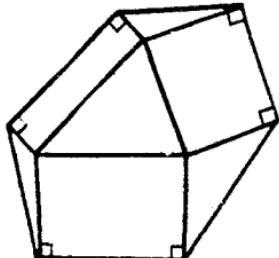
.۶۱. در کشور، سه نوع راه وجود دارد که شهرها را به هم مربوط می‌کنند: جاده شوسه، جاده مالرو و راه‌آهن. از هر شهر، از هر یک از این سه نوع، درست یک راه خارج می‌شود. می‌دانیم، از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان رسید. ثابت کنید، می‌توان از همه شهرها عبور کرد، بدون این که راهی، در دو جهت مختلف پیموده شود.

.۶۲. می‌تواند عددهای طبیعی از ۱ تا  $n$  را اختیار کند. ثابت کنید، برای عددهای مثبت  $a_k$  و  $b_k$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A + B}$$

که در آن  $B = \sum b_k$  و  $A = \sum a_k$ .

.۶۳\*. یک شش ضلعی کوثر چنان است که، روی سه ضلع «زوج» آن می‌توان مستطیل‌هایی در درون شش ضلعی طوری ساخت که، راس‌های آن‌ها، به صورتی که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، باشند. ثابت کنید، روی سه ضلع دیگر شش ضلعی هم می‌توان چنین مستطیل‌هایی ساخت.



شکل ۲۶

\*۶۴. روی محیط هر وجه یک چندوجهی کوژ یک مگس حرکت می‌کند (بنابراین تعداد مگس‌ها، با تعداد وجه‌های چندوجهی، یکی است)؛ همه آن‌ها، مسیر خود را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیمایند. می‌دانیم، سرعت آن‌ها در هر لحظه زمانی، از ۱ میلی‌متر در ساعت کمتر نیست. ثابت کنید، دیر یا زود، هر دو مگس، یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

\*۶۵. در کناره جدول ۱۹۹۳ × ۱۹۹۳، خانه‌های  $A$  و  $B$  را نشان گذاشته‌ایم که با تعداد فردی خانه از هم جدا شده‌اند. ثابت کنید، تعداد روش‌ها برای پوشاندن جدول، بدون خانه  $A$ ، با تکه‌های  $2 \times 1$ ، برابر است با تعداد روش‌هایی که برای پوشاندن جدول بدون خانه  $B$ ، با تکه‌های  $2 \times 1$  وجود دارد.

## پاسخ، راهنمائی، حل

۱.۶۱. پاسخ. اولی و دومی، برای به پایان رساندن کار، به اندازه  $\frac{2}{15}$  زمانی وقت لازم دارند، که سومی بخواهد به تنهایی کار را انجام دهد.

۴.۶۱. پاسخ.  $C$  باید  $\frac{3}{11}$  ساعت قبل از  $A$  و  $B$ ، حرکت کرده باشد.  
 ۵.۶۱. یکی از این شش نفر را درنظر می‌گیریم. روشن است که، این فرد، در بین پنج نفر دیگر، یا سه نفر آشنا و یا سه نفر ناآشنا دارد. بدون این‌که به کلی بودن راه حل لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که او با سه نفر آشنا باشد.  $A$ ،  $B$  و  $C$ . اگر از این سه نفر، دو نفر یکدیگر را بشناسند، آنوقت با سه نفر رویه‌رو هستیم که دو به دو با هم آشنا هستند. ولی اگر، این سه نفر، با هم ناآشنا باشند، آنوقت، با سه نفر ( $A$ ،  $B$  و  $C$ ) رویه‌رو هستیم که دو به دو با هم ناآشنا هستند.

۷.۶۱. دایرة  $O$  را موازی با خط راست  $L$ ، به اندازه فاصله مفروض، انتقال می‌دهیم. این عمل، همیشه، به کمک خطکش و پرگار ممکن است. دایرة جدید  $O'$ ، مربع  $K$  را قطع می‌کند. هر یک از نقطه‌های برخورد  $M$  یکی از دو انتهای پاره خط راست مورد نظر است.

۸.۶۱. راهنمائی.

$$\begin{aligned}\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 111(a+b+c) = \\ &= 3 \times 37(a+b+c)\end{aligned}$$

۱۰.۶۱. هر انتخاب دلخواه  $X$  از  $1 + 2n$  چیز، متناظر است با انتخاب  $Y$ ، که شامل هیچ کدام از چیزهای  $X$  نباشد؛ به زبان دیگر، در مجموعه  $1 + 2n$  عضوی، می‌توان هر زیرمجموعه را، با زیرمجموعه‌ای که شامل عضوهای زیرمجموعه اول نیست، متناظر کرد. اگر تعداد عضوهای زیرمجموعه  $X$  زوج باشد، بهنچار، تعداد عضوهای زیرمجموعه  $Y$  فرد

است. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد زوج عضوها، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی که تعداد عضوهای هریک، عددی فرد است.

۱۲.۶۱. اگر فرض کنیم:  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = r_1$ ، به دست می‌آید.

$$\sqrt{AB} = \frac{1}{2}(r_1^2 - A - B) = r_2$$

بنابراین، عده‌های  $\sqrt{A}$  و  $\sqrt{B}$ ، ریشه‌های معادله درجه دوم

$$t^2 - r_1 t + r_2 = 0$$

هستند، یعنی  $\frac{1}{2}(r_1 \pm \sqrt{r_1^2 - 4r_2})$ . چون

$$4A = (2\sqrt{A})^2 = 2r_1^2 - 4r_2 + 2r_1\sqrt{r_1^2 - 4r_2}$$

پس معلوم می‌شود که  $\sqrt{r_1^2 - 4r_2}$  عددی گویاست و، بنابراین، ریشه‌های معادله درجه دوم هم، عده‌هایی گویا هستند.

۱۳.۶۱. پاسخ.  $\sqrt{4}$

۱۵.۶۱. از آنجا که مجموع  $n$  عدد، که هریک از آنها یا برابر ۱ و یا برابر  $-1$  است، برابر صفر می‌شود، بنابراین، باید تعداد جمله‌های برابر ۱ با تعداد جمله‌های برابر  $-1$ ، مساوی باشد، یعنی  $n = 2k$ . چون، حاصل ضرب همه جمله‌ها به صورت  $(x_1 x_2 \dots x_n)^2$  درمی‌آید و، بنابراین، باید مثبت باشد، پس، تعداد جمله‌های منفی باید زوج باشد، یعنی  $k$  عددی زوج است و؛ درنتیجه،  $n$  بر  $4$  بخش‌پذیر می‌شود.

۱۶.۶۱. راهنمائی. با روش استقرای ریاضی روی  $n$ . فرض کنید، همه نقطه‌ها، به جز یکی (نقطه  $X$ )، روی کمان  $AB$  باشند که از  $120^\circ$  درجه کمتر است ( $A$  و  $B$ ، دو نقطه از نقطه‌های مفروض‌اند). اگر  $X$  روی کمان  $AB$  باشد، حکم مساله درست است. اگر  $X$  روی کمان  $AB$  نباشد،

آن وقت، یکی از دو کمان  $XA$  یا  $XB$  شامل کمان  $AB$  می‌شود و اندازه بزرگتر از  $120^\circ$  درجه پیدا می‌کند.

۱۹.۶۱. همه حالت‌های ممکن وصل نقطه‌ها را به وسیله  $n$  پاره خط راست در نظر می‌گیریم و، از بین آنها، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع طول‌های پاره خط‌های راست در آن، کمترین مقدار باشد. اگر در میان آنها، دو پاره خط راست  $AB$  و  $OC$  متقطع باشند، به جای آنها دو پاره خط راست  $AC$  و  $BD$  را در نظر می‌گیریم که، در این صورت، به انتخابی از پاره خط‌های راست می‌رسیم که، مجموع طول‌های آنها، کمتر از مجموع طول‌های پاره خط‌های راست قبلی است. تناقضی که به دست می‌آید، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۰.۶۱. پاسخ. پاره خط راست  $XY$  که، در آن،  $X$  و  $Y$ ، جای راس  $C$  در حالت‌هایی است که، یکی از نقطه‌های  $A$  یا  $B$ ، روی راس زاویه باشد.

۲۱.۶۱. از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، چنین پوششی ممکن باشد. صفحه شطرنجی مورد نظر را، با خانه‌های سیاه و سفید (مثل صفحه بازی شطرنج) فرض می‌کنیم. هر مهره به صورت شکل ۱ را در این صفحه قرار می‌دهیم. سه خانه سیاه و یک خانه سفید، یا سه خانه سفید و یک خانه سیاه را می‌پوشاند. از این دو نوع (یعنی مهره‌هایی که سه خانه سیاه و یک خانه سفید را می‌پوشانند و مهره‌هایی که روی سه خانه سفید یک خانه سیاه قرار می‌گیرند)، باید به تعداد برابر داشته باشیم، زیرا در صفحه شطرنجی، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر است. ولی این ممکن نیست، زیرا بیش از ۲۵ مهره از این نوع نداریم.

۲۲.۶۱. چون  $k$  و  $m$  نسبت به هم اول‌اند، عددهای درست  $a$  و  $b$  را می‌توان طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$ka + mb = -1$$

دو طرف این برابری را در  $n$  ضرب می‌کنیم:

$$kna + mnb = -n$$

بنابراین  $n$  بر  $k(mnb) + n$  بخش‌پذیر است.

۲۳.۶۱. همه این عددها، مجدور عددهایی به این صورت‌اند:

$$\dots ۳۳۴ ۳۳۳ \dots$$

۲۵.۶۱. پاسخ.  $a$ . راهنمائی.

$$\frac{a^r + x^r}{x} = a \left( \frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) \geq 2a$$

۲۶.۶۱. فرض کنید  $\frac{r}{s} = p$  که، در آن  $r$  و  $s$ ، عددهایی درست و

نسبت به هم اول‌اند. اگر مقدار  $p$  را در چندجمله‌ای قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + a_n s^n = 0$$

چون با آغاز از جمله دوم، همه جمله‌ها بر  $s$  بخش‌پذیرند، بنابراین جمله اول، یعنی  $r^n$  هم باید بر  $s$  بخش‌پذیر باشد. ولی،  $r$  و  $s$  نسبت به هم اول‌اند، بنابراین بهناچار باید داشته باشیم:  $1 = s$ ، یعنی  $p$ ، عددی درست است.

از نتیجه‌گیری بالا روشن می‌شود که  $f(x)$  بر  $x - p$  بخش‌پذیر است:

$$f(x) = (x - p) \cdot g(x)$$

و اگر  $x = m$  بگیریم

$$f(m) = (m - p) \cdot g(m)$$

یعنی  $f(m)$  بر  $m - p$  یا  $m - m$  بخش پذیر است.

۲۸.۶۱. روشن است که، اگر بخواهیم مجموع زاویه‌های سفید یا مجموع زاویه‌های سیاهی که، در یک راس مکعب، راس مشترک دارند، با هم برابر شوند، باید از راس مکعب، یا تنها یک قطر وجه بگذرانیم و یا هر سه قطر. آزمایش نشان می‌دهد که، در بین ۸ راس مکعب، درست دو راس وجود دارد که از آن‌ها، سه قطر وجه‌ها می‌گذرد. اکنون دیگر به سادگی روشن می‌شود که، تنها دو نوع رنگ‌آمیزی وجود دارد که، ضمن دوران مکعب، بر هم منطبق نمی‌شوند.

۲۹.۶۱. راهنمائی. ثابت کنید، زمانی که حلزون ضمن حرکت «به جلو - به عقب» لازم دارد، برابر است با زمانی که برای حرکت «به راست - به چپ» نیاز دارد و، هریک از این مقدارها، با تعداد درستی «نیم ساعت» بیان می‌شود.

۳۰.۶۲. پاسخ. تنها بخشیاب‌های مشترک آن‌ها، برابر است با ۱ و ۲.

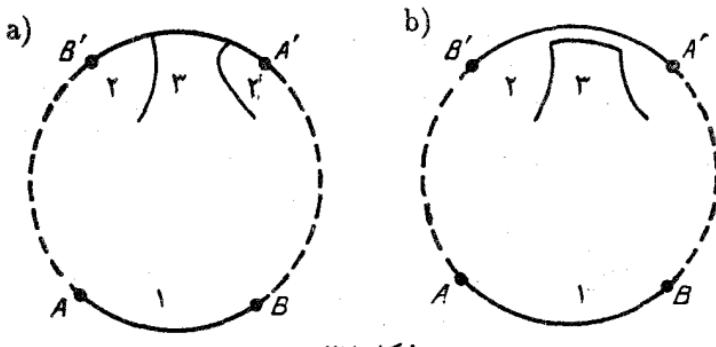
۳۰.۶۲. پاسخ. ۲۳ سال.

۵.۶۲. راهنمائی. اول ثابت کنید، اسب بازی شطرنج، می‌تواند از همه خانه‌های حاشیه به پنهانی چهارخانه‌ای صفحه شطرنجی بگذرد، سپس، با روش استقرای ریاضی، ثابت کنید که، این حرکت، برای هر صفحه شطرنجی  $(4n + 1) \times (4n + 1)$  وجود دارد.

۶.۶۲. نه، نمی‌تواند. دست کم، یکی از دو رقم سمت راست هر عدد مجدور کامل، باید زوج باشد.

۱۰.۶۲. راهنمائی. از این مطلب استفاده کنید که، عدد  $1 - 10^6$  بر ۷ بخش پذیر است.

۱۱.۶۲. انتهای منحنی‌هایی که مرز بخش‌ها را مشخص می‌کنند، محیط دایره را به چند کمان تقسیم می‌کنند. یکی از آن‌ها، مثلاً کمان  $AB$  را در نظر می‌گیریم که به رنگ اول درآمده باشد. کمان رو به روی آن  $A'B'$  ( $A$ ) و



شکل ۲۷

$A'$  و  $B'$  همچنین  $B$  و  $A$ ، دو سر یک قطراند)، ممکن است شامل  $0^\circ$  یا  $360^\circ$  چند نقطه تقسیم باشد. اگر نقطه‌های تقسیم، بیش از دو تا باشند، نقشه  $b$ ، چیزی شبیه شکل ۲۷-a-۲۷ دارمی‌آید. در این صورت، می‌توانیم بخش‌های دایره را آن‌طور که در شکل b دیده می‌شود تغییر دهیم که درنتیجه، تعداد نقطه‌های تقسیم کاهش می‌یابد. اگر روی کمان  $A'B'$ ، نقطه تقسیمی وجود نداشته باشد، آنوقت این کمان، به طور کامل، در درون کمان  $CD$  قرار دارد که، در آن  $C$  و  $D$ ، دو نقطه تقسیم‌اند. در این صورت،  $A$  و  $B$  در درون کمان  $C'D'$  قرار می‌گیرند و می‌توان همان عمل بالا را درباره آن‌ها انجام داد. با کم کردن تعداد نقطه‌های تقسیم روی محیط دایره، می‌توان سرانجام به تقسیمی از بخش‌ها رسید که، برای هر کمان  $AB$  (هریک از دو نقطه  $A$  و  $B$ ، انتهای یکی از مرزهای بخش‌هاست)، روی کمان  $A'B'$ ، درست انتهای یک منحنی مرزی وجود داشته باشد. از این‌جا، به سادگی نتیجه می‌شود که، تعداد کل انتهای منحنی‌ها، عددی فرد است که ممکن نیست.

۱۲.۶۲. چون  $O_1$ ،  $O_2$  و  $M_1$ ،  $M_2$ ، نقطه‌های وسط ضلع‌های چهارضلعی  $ADLC$  هستند، پس  $O_1M_1O_2M_2$  متوازی‌الاضلاع است. تنها، این می‌ماند که ثابت کنیم، پاره خط‌های راست  $AL$  و  $CD$ ، طولی برابر دارند و بر هم عمودند. در واقع، آن‌ها از یکدیگر، ضمن دوران دور

نقطه  $B$  به اندازه  $90^\circ$  درجه به دست می‌آیند.  
 ۱۳.۶۲. مرکزهای دایره‌ها را  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  می‌نامیم.  $M$  و  $N$ ، نقطه‌های تماس دایره‌ها؛ به ترتیب روی پاره خط‌های راست  $AB$ ،  $CD$  و  $DA$  واقع‌اند و داریم:

$$\widehat{NKL} = 180^\circ - \left( 90^\circ - \frac{\widehat{NAK}}{2} \right) - \left( 90^\circ - \frac{\widehat{KBL}}{2} \right) = \\ = \frac{1}{2}(\widehat{DAB} + \widehat{ABC})$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\widehat{MNL} = \frac{1}{2}(\widehat{ADC} + \widehat{DCB})$$

بنابراین، مجموع دو زاویه  $\widehat{NKL} + \widehat{MNL}$ ، برابر با نصف مجموع زاویه‌های چهارضلعی  $ABCD$ ، یعنی برابر  $180^\circ$  درجه می‌شود؛ و این، به معنای آن است که چهارضلعی  $KLMN$ ، قابل محاط در دایره است.

۱۴.۶۲. اثبات، از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$(x^r - \delta y^r)(a^r - \delta b^r) = (ax + \delta by)^r - \delta(ay + bx)^r$$

۱۵.۶۲. پاسخ.

$$x = -\frac{3}{2}d + \sqrt{\frac{5}{4}d^2 \pm \sqrt{d^4 + a}}$$

۱۶.۶۲. این دو بردار را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{V}_1 = (a, b, c); \quad \mathbf{V}_2 = (m, n, p)$$

بنابر شرط مساله، طول هریک از این دو بردار برابر واحد و، بنابراین، قدر مطلق مقدار حاصل ضرب عددی (اسکالر) آنها، یعنی  $am + bn + cp$ ، از حاصل ضرب طول‌های آنها، یعنی ۱، تجاوز نمی‌کند.  
**۲۰.۶۲.** راهنمائی. مقدار چندجمله‌ای را به ازای  $x = -1$  به دست آورید.

**۲۱.۶۲.** این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$1, 11, 111, \dots, \underbrace{11\dots11}_{p+1} \quad \text{رقم}$$

چون تعداد آنها، از  $p$  بیشتر است، پس، از تقسیم دو تا از آنها بر  $p$ ، به یک باقی‌مانده می‌رسیم. تفاضل این دو عدد، به صورت

$$111\dots11 - 11000\dots00$$

است. ولی چون  $p$  و ۱۵ نسبت به هم اول‌اند، عدد

$$111\dots11$$

هم بر  $p$  بخش پذیر است.

**۲۴.۶۲.** مختصات نقطه مفروض را  $(m, n)$  می‌گیریم. از چهار راس مربع، نقطه‌ای را، با مختصات  $(x, y)$ ، طوری انتخاب می‌کنیم که عددهای  $x - m$  و  $y - n$ ، فرد باشند. در این صورت، عدد

$$(m - x)^2 + (n - y)^2$$

نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد، زیرا به صورت  $2 + 4k$  است.

**۲۵.۶۲.** اگر دو برابر مجموع همه حاصل ضرب‌های دویهدوی عددها را، از مجذور مجموع این عددها کم کنیم، مجموع مجذورهای عددها، برابر با صفر می‌شود و، بنابراین، هریک از ده عدد، باید برابر صفر باشند.

۲۸.۶۲ حل این مساله، کاملاً شبیه حل مساله ۱۹.۶۱ است.

۲۹.۶۲ صندوق را کوچک می‌نامیم، به شرطی که وزن آن از ۳۰۰ کیلوگرم تجاوز نکند. روشن است که بقیه صندوق‌ها، بیش از ۴۴ عدد نیست و ما می‌توانیم، آن‌ها را در ۱۱ کامیون یک تن و نیمی (در هر کامیون ۴ صندوق) بار کنیم. باید ثابت کنیم، صندوق کوچک را، همیشه می‌توان در یکی از کامیون‌ها جا داد. درواقع، اگر چنین نباشد، به معنای آن است که در هریک از ۱۱ کامیون، بیش از  $(a - 1500)$  کیلوگرم بار وجود دارد که، در آن،  $a$ ، وزن صندوق کوچک است. ولی در این صورت، مجموع بار ۱۱ کامیون، از

$$11a - 16500 \text{ کیلوگرم}$$

تجاوز می‌کند، درحالی که نباید از  $(a - 13500)$  کیلوگرم تجاوز کند. ولی این، متناقض با آن است که فرض کرده بودیم.  $a \leq 300$ .

۳۱.۶۲ حل مساله ۲۵.۶۲ را بینید.

$$33.62 \text{ پاسخ. } 1 \pm \frac{1}{25} \sqrt{671} = 36 \pm 25$$

۳۴.۶۲ پاسخ. این مکان هندسی، عبارت است از پاره خط راستی که دو انتهای آن، روی دو ضلع زاویه است. نقطه‌های انتهایی این پاره خط راست، به صورتی روشن، باتوجه به شرط مساله به دست می‌آیند.

۳۵.۶۲ پاسخ. مجموع برای  $1 > n$  برابر صفر و برای  $n = 1$ ، برابر  $-x$  است.

$$36.62 \text{ پاسخ. } 1 = x_1 = x_2 > k, k > 1 \text{ و، برای}$$

۳۷.۶۲ اثبات با برهان خلف. فرض می‌کنیم، چنین رنگ‌آمیزی ممکن باشد؛ در ضمن، وجه خاصی که در صورت مساله، استثنای شده است، رنگ سفید داشته باشد. اگر مجموع ضلع‌های وجه‌های سیاه رنگ را در نظر بگیریم، عددی به دست می‌آید که، از یک طرف، معرف تعداد همه یال‌های چندوجهی

و، از طرف دیگر، بخش پذیر بر عدد طبیعی  $n$  است. به همین ترتیب، اگر مجموع ضلع‌های همه وجههای سفید را در نظر بگیریم، باید همان تعداد یال‌های چندوجهی به دست آید، ولی بر عدد طبیعی  $n$ ، بخش ناپذیر باشد. تناقض حاصل، به معنای آن است که، چنین رنگ کردنی، ممکن نیست.

۴۵.۶۲ راهنمائی. ثابت کنید، چندجمله‌ای بر  $a - x$  بخش پذیر است که، در آن،  $a$  عبارت است از ریشه دلخواه مختلطی از معادله  $1 = x^k$ .  
۴۶. پاسخ. این مجموع، برای  $2 > n$  برابر صفر، برای  $1 = n$  برابر  $1 - n$  برابر  $2$  می‌شود.

۴۷.۶۲ فرض می‌کنیم، چنین وتری وجود نداشته باشد. از هر راس چندضلعی، خط راستی موازی با ضلع مورد نظر مریع، رسم می‌کنیم. این خط‌های راست، چندضلعی را به مثلث‌ها و ذوزنقه‌هایی تقسیم می‌کنند که طول قاعده هیچ‌کدام از آن‌ها، از  $\frac{1}{2}$  تجاوز نمی‌کند. از آن‌جایکه، مجموع طول‌های ارتفاع‌ها، در این مثلث‌ها و ذوزنقه‌ها، از  $1$  تجاوز نمی‌کند، بنابراین، از مجموع نابرابری‌های مربوط به مساحت‌ها، معلوم می‌شود که مساحت تمام چندضلعی، نمی‌تواند از  $\frac{1}{2}$  بیشتر باشد که، با فرض مساله، متناقض است.

۴۸.۶۲ برای این که سطح دایره به شعاع  $2$  را پوشانیم، محیط آن را به شش کمان برابر تقسیم می‌کنیم و، نقطه‌های تقسیم را  $A, B, C, D, E$  و  $F$  می‌نامیم. سپس، شش دایره، به شعاع واحد و، به ترتیب، به قطرهای  $AB, CD, BC, FA, EF$  و  $DE$  رسم می‌کنیم. اکنون، اگر دایره هفتم را، به مرکز نقطه مرکز دایره بزرگتر رسم کنیم، تمامی سطح دایره به شعاع  $2$ ، با هفت دایره به شعاع واحد پوشیده می‌شود.

دایره‌ای با شعاع بزرگتر از  $2$  را نمی‌توان پوشاند، زیرا یکی از دایره‌ها، باید مرکز دایره بزرگتر را در بر گرفته باشد و، بنابراین، نمی‌تواند محیط دایره بزرگتر را قطع کند. دایره به شعاع بزرگتر از  $2$ ، به وسیله شش دایره پوشانده

شده است که هر کدام از آن‌ها، کمانی کوچک‌تر از  $\frac{1}{2}$  محیط دایره بزرگ‌تر را جدا می‌کنند و این، به معنای آن است که بخشی از محیط دایره بزرگ‌تر (هر قدر هم که کوچک باشد)، زیر پوشش قرار نمی‌گیرد.

۴۹.۶۲. راهنمائی. این نتیجه را می‌توان از نابرابری زیر نتیجه گرفت.

$$5 \geq S_1 + \dots + S_9 - S_{12} - \dots - S_{89}$$

که در آن،  $S_i$  مساحت  $i$  امین چندضلعی و  $S_j$ ، مساحت بخش مشترک چندضلعی  $j$ ام با چندضلعی  $i$ ام است.

۵۲.۶۲. این دنباله را که شامل  $k$  جمله است، درنظر می‌گیریم:

$$x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

( $x_1, x_2, \dots, x_k$ ) عدد درست انتخابی هستند). اگر هیچ‌کدام از جمله‌های این دنباله، بر  $k$  بخش‌پذیر نباشد، آنوقت دو جمله آن، در تقسیم بر  $k$ ، به باقی‌مانده‌های برابر می‌رسند و، درنتیجه، تفاضل آن‌ها، بر  $k$  بخش‌پذیر است. و این تفاضل، خود مجموعی از چند جمله دنباله است.

۱.۶۳. پاسخ. ۱۰ کیلومتر.

۲.۶۳. پاسخ. ۳۰ کیلومتر در ساعت.

۳.۶۳. راهنمائی. رقم سمت راست هریک از عده‌ها را پیدا کنید.

۴.۶۳. راه حل مساله ۱۳ را بیینید.

۵.۶۳. این نابرابری روشن است:

$$|CD| \leq |CB| + |BA| + |AE| + |ED|$$

ولی، هر دو طرف نابرابری، بنابر فرض، برابر ۲۳۶ است. بنابراین، باید نقطه‌های  $C, D, A, B$  و  $E$  روی یک خط راست باشند و، درنتیجه، فاصله  $E$  تا  $C$  برابر  $150$  کیلومتر شود.

.۶۰.۶۳ نه، نمی‌شود. راهنمائی. به تعداد عده‌های زوج توجه کنید.

.۷۰.۶۳ پاسخ. ۳۵ درجه.

.۸۰.۶۳ این عدد، بر ۳ بخش پذیر است.

.۹۰.۶۳ دو حالت برای تقسیم امتیازها وجود دارد: نفر بیستم، یا ۰ و یا ۵٪ امتیاز و نفر اول (یا یکی از نفرهای اول) ۱۰/۵ یا ۱۰٪ امتیاز و بقیه هرگدام ۱۰٪ امتیاز.

.۱۰.۶۳  $ABCD$  را چهارضلعی مفروض و  $P, N, M$  و  $Q$  را، به ترتیب، وسط ضلع‌های  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  می‌گیریم. این برابری‌های بُرداری روشن‌اند:

$$\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{QN}; \vec{BC} + \vec{AD} = 2\vec{MP}$$

بنابراین، برابری

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 2(|QN| + |NP|)$$

تنها وقتی برقرار می‌شود که بُردارهای  $\vec{AB}$  با  $\vec{DC}$ ، و  $\vec{BC}$  با  $\vec{AD}$  موازی باشند که، در این صورت،  $ABCD$ ، متوازی‌الاضلاع است.

.۱۱.۶۳ روشن است، بعد از پرداخت پول بلیت، باید هر مسافر، دست کم یک سکه داشته باشد. از طرف دیگر، باید ۲ روبل به صندوق اتوبوس داده شود، یعنی دست کم ۱۰ سکه. بنابراین، روی هم ۵۰ سکه لازم است.

.۱۲.۶۳  $A = 10$ . پاسخ.

.۱۳.۶۳ اگر دو خانه جدا شده، هردو سفید یا هردو سیاه باشند، پاسخ منفی است. در واقع، هر مهره دو خانه‌ای، یک خانه سفید و یک خانه سیاه را می‌پوشاند و، بنابراین، باید تعداد خانه‌های سفید با تعداد خانه‌های سیاه

برابر باشد. درحالی که، اگر دو خانه همزنگ را جدا کرده باشیم، برابری تعداد خانه‌های سفید با تعداد خانه‌های سیاه، به هم می‌خورد.

اگر یک خانه سفید و یک خانه سیاه از صفحه جدا کرده باشیم، مساله پاسخ مثبت دارد. با آزمایش و انتخاب حالت‌های مختلف، موضوع روشن می‌شود.

۱۵.۶۳. همه زوج‌های  $(x, y)$  را درنظر می‌گیریم که، در آن،  $x$  و  $y$ ، دو رقم پشت سر هم از کسر دهدۀ مفروض است. چون تعداد آن‌ها، بین‌نهایت است، بنابراین بین آن‌ها، دو زوج یکسان پیدا می‌شود. اگر به رقم‌های پشت سرهم قبل از آن‌ها مراجعه کنیم، می‌توان یکی از این زوج عددها را برابر  $(a, b)$  دانست. از آنجا که، این زوج، در جای دیگری تکرار شده است، بنابراین، با آغاز از آن، همه رقم‌های بعدی تکرار می‌شوند، یعنی کسر دهدۀ دوره‌ای ساده است.

۱۶.۶۳. پاسخ.  $2 + 2n$ . راهنمائی. تعداد نقطه‌های برخورد دو چندضلعی را ارزیابی کنید.

۱۷.۶۳. در تقسیم یک عدد درست مجدور کامل بر ۹، یکی از عددهای ۰، ۱، ۴ یا ۷ به عنوان باقی‌مانده به دست می‌آید. بنابراین، سه عدد مجدور کامل، که در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌های مختلف داشته باشند، نمی‌توانند مجموعی بخش‌پذیر بر ۹ پیدا کنند.

۱۸.۶۳. راهنمائی. باقی‌مانده‌هایی را که از تقسیم یک عدد بر  $2k$  می‌تواند به دست آید، به این ترتیب، دویه‌دو، در نظر بگیرید:

$$(1, 2k - 1); (2, 2k - 2); \dots; (k - 1, k + 1)$$

که اگر  $0$  و  $n$  را هم به حساب آورید، روی هم  $1 + k$  انتخاب از باقی‌مانده‌ها خواهید داشت. ولی از تقسیم  $2 + k$  عدد بر  $2k$ ، باقی‌مانده به دست می‌آید. بنابراین، دو تا از آن‌ها، با یکی از انتخاب‌های ما تطبیق می‌کنند.

۱۹.۶۲. پاسخ. اگر  $O$  مرکز دایره مفروض،  $R$  مقدار شعاع آن و  $C$  راس زاویه قائم باشد، آنوقت، مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای است که، مرکز آن، در وسط پاره خط راست  $OC$  قرار دارد و شعاع آن، برابر است با

$$\sqrt{2R^2 - |OC|^2}$$

۲۰.۶۲. داریم:

$$\begin{aligned}\overline{bcdea} &= 10\overline{abcde} + a - 100000a = \\ &= 10\overline{abcde} - 99999a\end{aligned}$$

ولی  $99999$  بر  $41$  بخش‌پذیر است، پس  $\overline{bcdea}$  هم بر  $41$  بخش‌پذیر خواهد بود. بهمین ترتیب، ثابت می‌شود، عددی که از تبدیل دوری عدد اخیر به دست می‌آید، یعنی  $\overline{cdeab}$ ، بر  $41$  بخش‌پذیر است و غیره.

۲۱.۶۲. جمله‌های نابرابری را، به زوچ‌هایی، به این صورت تقسیم

می‌کنیم:

$$a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$$

این نابرابری درست است، زیرا برای هر  $i$  و  $j$  داریم:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

از مجموع همه این گونه نابرابری‌ها، به نابرابری موردنظر می‌رسیم.

۲۳.۶۲. دو دایره را، یکی فرض می‌کنیم و به جای قرار دادن بر یکدیگر، از دوران دایره استفاده می‌کنیم. همه زاویه‌های ممکن دوران را، به عنوان عدددهایی از بازه بسته  $[1^\circ, 360^\circ]$  درنظر می‌گیریم، یعنی مقدار دوران، با طول کمانی اندازه گرفته می‌شود که، نقطه‌ای از محیط دایره را، ضمن آن جابه‌جا می‌کند.

برای هر نقطه نشاندار، مجموعه زاویه‌هایی از این بازه را جدا. می‌کنیم که، دوران به اندازه آن، نقطه‌ای ما را در درون یکی از کمان‌ها قرار دهد. هریک

از این مجموعه‌ها، از چند بازه تشکیل شده است که مجموع آن‌ها، طول کمتر از  $\frac{1}{20}$  دارد. چون تعداد این گونه مجموعه‌ها، برابر است با ۲۰، پس روی هم نمی‌توانند بازه  $[1, 5]$  را پوشانند و، بنابراین، دورانی وجود دارد که، به ازای آن، هیچ کدام از نقطه‌های ما، در درون کمان نشان شده قرار نمی‌گیرند.

$$25.63 \quad \text{پاسخ. } z = 2, y = 2, x = 1.$$

۲۶.۶۳. راهنمائی. دو عدد گنگ  $a_1 + \sqrt{b_1}$  و  $a_2 + \sqrt{b_2}$ ، تنها

وقتی با هم برابرند که داشته باشیم:  $a_1 = a_2$  و  $b_1 = b_2$  (یعنی  $a_1, b_1, a_2, b_2$  عددهایی گویا هستند).

۲۷.۶۳. پاسخ. بخشی از صفحه موازی با وجه  $BDC$  و به فاصله

یک سوم فاصله  $A$  از  $BOC$  و واقع در درون کنج.

۲۸.۶۳. بدون این که به کلی بودن مساله، لطمہ‌ای بخورد، می‌توان

فرض کرد  $a_1 \neq a_2$ ، در این صورت، روشن است که، برای هر انتخاب  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، که جوابی از معادله باشد، انتخاب

$$(1 - x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نمی‌تواند در معادله صدق کند. بنابراین، تعداد جواب‌ها، از نصف تعداد انتخاب‌ها تجاوز نمی‌کند.

۲۹.۶۳. یالی از هرم را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین طول را داشته باشد. چون در هر وجهی که، این یال ضلعی از آن باشد، زاویه روبروی به یال، بزرگترین زاویه است، بنابراین زاویه‌های پیوسته به آن، تنها می‌توانند حاده باشند.

۳۲.۶۳. چون مجموع

$$(\sqrt{26} + 5)^{1963} + (5 - \sqrt{26})^{1963}$$

عددی درست است (درستی این مطلب، به کمک رابطه بسط دو جمله‌ای ثابت

می شود)، و چون داریم:

$$-0/1 < 5 - \sqrt{26} < 0 \Rightarrow -10^{-1963} < (5 - \sqrt{26})^{1963} < 0$$

بنابراین، ۱۹۶۳ رقم اول بعد از ممیز، در عدد  $(5 + \sqrt{26})^{1963}$ ، برابر صفر است.

۳۳.۶۳. قوطی کبریت را باید طوری در فضا نگه داشت تا صفحه‌ای که از انتهای دوم یال‌هایی که از یک راس آن می‌گذرد، صفحه‌ای افقی (یعنی موازی با صفحه تصویر) باشد.

۳۵.۶۳. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض را بر این می‌گیریم که در بین این عدها، نتوان چند عدد پیدا کرد که مجموع آن‌ها بر  $a$  بخش‌پذیر باشد. در این صورت، به سادگی قابل تحقیق است که، در مجموع ما، نمی‌تواند بیش از هفت عدد واحد وجود داشته باشد، زیرا در غیر این صورت از مجموع بقیه عدها، می‌توان عده‌های از  $a - 8$  تا  $a$  را به دست آورد. سپس، بین عده‌های این مجموع، بیش از هفت عدد برابر ۲ نمی‌تواند وجود داشته باشد (با استدلالی مشابه قبل). به همین ترتیب ثابت می‌شود، در این مجموع، بیش از ده عدد  $3, 4, \dots, 9$  نباید باشد. در این صورت، مجموعی را که تنظیم کرده‌ایم، از  $45 \times 10$  تجاوز نمی‌کند که از

$$2 \times 2520 = 5040$$

کوچکتر است ( $2520$ ، کوچکترین عددی است که بر عده‌های  $1, 2, 3, \dots, 9$ ، بخش‌پذیر است).

۳۷.۶۳. پاسخ.  $x = y = z = t = 0$ . راهنمائی. جواب درستی را، که از لحاظ قدر مطلق، کمترین مقدار  $x$  می‌تواند باشد، در نظر بگیرید و سعی کنید، جواب دیگر  $x_1 = \frac{1}{2}x$  را آزمایش کنید.

۳۸.۶۳. چون محیط خط شکسته بسته برابر واحد است، فاصله دورترین

نقطه‌های آن از یکدیگر، نمی‌تواند از  $\frac{1}{2}$  تجاوز کند. اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی خط شکسته، با بیشترین فاصله ممکن درنظر بگیریم، دایره‌ای که مرکز آن وسط پاره خط راست  $AB$  و شعاع آن برابر  $\frac{1}{2}$  باشد، خط شکسته را به طور کامل می‌پوشاند.

۴۰.۶۳. تنها به ازای  $3 = 2^n + 1 = a^p$  در واقع، اگر  $n =$

$$2^n = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1)$$

در این صورت،  $1 + a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1$  باید برابر توانی از ۲، غیر از ۱، باشد.  $a$  عددی فرد است، پس تعداد این جمله‌ها، باید عددی زوج باشد، بنابراین  $p = 2q$ ، از آنجا

$$2^n = a^{2q} - 1 = (a^q - 1)(a^q + 1)$$

یعنی  $1 - a^q$  و  $a^q + 1$ ، باید توانی از ۲ (و در ضمن غیر از ۲) باشند. بنابراین، این دو عدد هم زوج‌اند، یعنی  $2^n = 8$ .

۴۱.۶۳. راهنمائی. اگر  $k$ ، ضریب زاویه خط‌های راست موازی، عددی گویا باشد، آنوقت روی مرز نوار، بی‌نهایت نقطه گرهی پیدا می‌شود.  $k$  را عددی گنگ فرض کنید. در این صورت، مساله منجر به اثبات این مطلب می‌شود که بی‌نهایت زوج  $(x, y)$  وجود دارد ( $x, y$ ، عددهایی درست‌اند) که

$$p = m_2 - kn_2 < x - ky < m_1 - kn_1 = q$$

که در آن  $(m_1, n_1)$  و  $(m_2, n_2)$ ، مختصات نقطه‌های مفروض‌اند، یعنی  $q < p$ ، عددهای ثابتی‌اند.

۲۵ + ۲۰ + ۲۰ + ۳ + ۲ + ۱؛ آنیلوف :

۵۰ + ۱۰ + ۵ + ۳ + ۲ + ۱؛ بوریسوف :

۲۵ + ۲۰ + ۱۰ + ۵ + ۱؛ وورویف :

#### ۲۰۶۴. حل مساله ۲۱.۶۱ را بیینید.

۳.۶۴. بزرگترین عددی را درنظر می‌گیریم، که در یکی از خانه‌ها نوشته شده است. روشن است که همه عدهای خانه‌های مجاور آن، باید با این عدد برابر باشند. عدهای مجاور عدهای جدید هم باید با آن‌ها برابر باشند وغیره. بنابراین، همه عدهای روی صفحه شطرنج با هم برابرند؛ یعنی عدد واقع در خانه  $e_2$  سیاه هم برابر ۴ است.

#### ۴.۶۴. پاسخ. چهار حرف.

۵.۶۴. کوتاهترین مردان بین بلندترها را  $A$  و بلندترین مردان از بین کوتاهترین‌ها را  $B$  می‌نامیم. ردیفی را که در آن  $A$  قرار دارد و ستونی را که شامل  $B$  است، درنظر می‌گیریم. در نقطه برخورد این ردیف و این ستون، سربازی ایستاده است که از  $A$  کوتاهتر و از  $B$  بلندتر است. یعنی از  $A$  از  $B$  بلندتر است.

#### ۶.۶۴. این حاصل ضرب برابر صفر است.

۷.۶۴. چون همه زاویه‌ها منفرجه‌اند، پس  $n \geq 5$ ، اکنون، همه قطرهایی را درنظر می‌گیریم که همه راس‌های  $n$  ضلعی را، یک در میان به هم وصل کرده‌اند. این‌ها، یک  $n$  ضلعی ستاره‌ای را تشکیل می‌دهند که، مجموع طول‌های پاره خط‌های راست مرزی آن، به روشنی از محیط  $n$  ضلعی بیشتر است. بنابراین، به‌طور مسلم، حکم مساله هم درست است.

#### ۸.۶۴. چون داریم

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

بنابراین،  $x^4 + 4y^4$  تنها وقتی اول است که داشته باشیم:

$$x = y = 1 \text{ یا } x = y = -1$$

۹.۶۴. راهنمائی. ثابت کنید، با انتقال های مناسب موازی، پاره خط های راست  $KN$ ،  $MF$  و  $GL$ ، به ضلع های یک مثلث تبدیل می شوند.

۱۱.۶۴. پاسخ. ۱۱ عدد.

۱۲.۶۴. چون میانه  $ME$  در مثلث  $MBC$ ، از نصف ضلع  $BC$  بزرگتر است، پس زاویه  $BMC$  حاده و، درنتیجه، زاویه  $BMA$  منفرجه است. در مثلث  $ABM$ ، منفرجه بودن زاویه  $BMA$ ، به معنای آن است که طول میانه  $MD$  از نصف طول ضلع  $AB$  کوچکتر است.

۱۳.۶۴. پاسخ. ۷ و ۵ و ۲

۱۶.۶۴. درستی این اتحاد روش است:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 = \\ & = (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^2 + (2a_1a_2)^2 + \dots + (2a_1a_n)^2 \end{aligned}$$

روشن است که تنها پرانتز اول (در سمت راست) می تواند صفر باشد، ولی اگر  $a_1$  را کوچکترین عدد بگیریم، این پرانتز هم برابر صفر نمی شود.

۱۷.۶۴. فرض کنید، دایره محاط در مثلث  $ABC$  بر قطر  $AC$  در نقطه  $X$  و دایره محاط در مثلث  $ADC$  بر قطر  $AC$  و نقطه  $Y$  مماس باشد (در مساله ما  $X = Y$ ). در این صورت داریم:

$$|AX| = |AB| + |AC| - |BC|,$$

$$|AY| = |AC| + |AD| - |CD|$$

با برابر قرار دادن  $|AY|$  و  $|AX|$ ، به دست می آید:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

یعنی، با یک چهارضلعی محیطی سروکار داریم. از طرف دیگر، با استدلالی مشابه، برای دایره‌های مماس بر قطر  $BD$ ، معلوم می‌شود که این دو دایره هم، بر قطر  $BD$ ، در یک نقطه مماس‌اند.

۱۸.۶۴. راهنمایی. همه زوج عددهای درست و غیرمنفی  $(x, y)$  را با شرط‌های  $\sqrt{n} < |x| < |y| < \sqrt{n}$  و عبارت‌های  $y - ax$  را درنظر بگیرید و، سپس، از اصل دیریکله استفاده کنید.

۲۰.۶۴. مریع واحد را به ۲۵ مریع کوچکتر، هریک به ضلع برابر  $\frac{1}{5}$  تقسیم می‌کنیم. بنابراین اصل دیریکله، در یکی از این مریع‌ها، دست کم ۳ نقطه قرار می‌گیرد. چون هریک از مریع‌های کوچک را می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر  $\frac{1}{7}$  پوشاند، حکم مساله ثابت است.

۲۱.۶۴. اگر توجه کنیم که

$$\left[ \frac{n}{1} \right] = n, \quad \left[ \frac{m}{n} \right] = 1, \quad \left[ \frac{n-1}{1} \right] = n-1$$

و دو طرف برابری را ساده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که باید، برابری

$$\left[ \frac{n}{k} \right] = \left[ \frac{n-1}{k} \right]$$

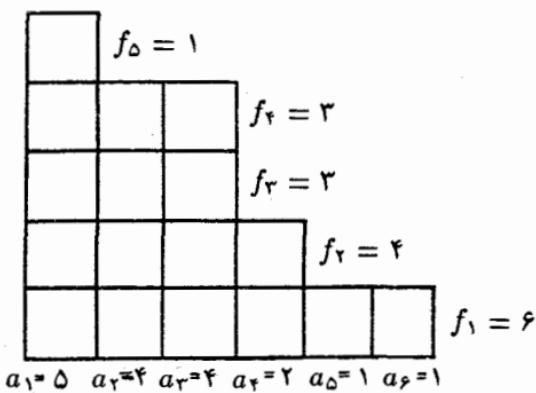
برای هر عدد درست  $1 \leq k \leq n-1$  برقرار باشد. ولی اگر  $n$  عددی مركب و بر عددی مثل  $p$  بخش‌پذیر باشد، آنوقت باید داشته باشیم:

$$\left[ \frac{n}{p} \right] > \left[ \frac{n-1}{p} \right]$$

که فرض ما را نقض می‌کند. بنابراین،  $n$  عددی اول است.

۲۵.۶۴. حل مساله ۳۰.۷۵ را بیینید.

۲۸.۶۴. فرض می‌کنیم  $0 = S_0, \alpha_0 = S_1, S_2, \dots, S_{2^n-1}$



شکل ۲۸

با اضافه کردن  $S_{2^n}$  به هر جمله آن (اگر تنها، باقی مانده‌های تقسیم بر ۲ را در نظر بگیریم)، این دنباله را می‌دهد:

$$S_{2^n}, \dots, S_{2^{n+1}-1}$$

زیرا، برای هر  $2^n < k < 2^{n+1}$ ، داریم:  $\alpha_k = \alpha_{k+2^n} - \alpha_{2^n}$ . با استفاده از روش استقرای ریاضی، روشن می‌شود که، در دنباله

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_{2^n-1}$$

تعداد عده‌های زوج با تعداد عده‌های فرد برابر است.

۳۰.۶۴. مجموع همه عده‌های دسته  $S$  را  $N$  می‌گیریم. در این صورت، اگر  $a$ ، عددی از دسته  $S$  باشد، آنوقت  $N$  و  $aN$  در تقسیم بر  $p$ ، به یک باقی مانده می‌رسند، زیرا ضرب در  $a$ ، تنها جای باقی مانده‌ها را در عده‌های دسته  $S$  عوض می‌کند. عدد  $a$  را، غیر از واحد می‌گیریم و نتیجه می‌گیریم که، چون  $N(1-a)$  بر  $p$  بخش‌پذیر است،  $N$  هم بر  $p$  بخش‌پذیر خواهد بود.

۳۱.۶۴. طول قاعده‌های مثلث‌ها را برابر  $a$  و  $b$  فرض می‌کنیم. برای هریک از این مثلث‌ها، متوازی‌الاضلاعی را در نظر می‌گیریم که، سه راس

آن، بر سه راس مثلث و، یک ضلع آن، بر قاعدهٔ مثلث منطبق باشد. در این صورت، بخش مشترک مثلث‌ها در درون بخش مشترک متوازی‌الاضلاع‌ها قرار می‌گیرد که مساحت آن از مقدار  $ab$  تجاوز نمی‌کند.

۳۲.۶۴ عده‌های  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را، به دریف و به صورت یک دیاگرام ستونی تنظیم می‌کنیم (شکل ۲۸ را ببینید). مجموع  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  برابر است با تعداد کل خانه‌ها در دیاگرام، و  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ، چیزی جز تعداد خانه‌های سطرها نیستند و، البته، مجموع آن‌ها هم، برابر تعداد کل خانه‌هاست.

۳۳.۶۴ مربع را به بخش‌ها، طوری تقسیم می‌کنیم که شامل برخوردهای شکل‌های مفروض باشند، در این صورت، اگر مساحت مربع را  $S$  بگیریم:

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

که در آن،  $s_i$  به معنای مساحت  $i$ -امین بخش است. چون هر بخش، دست‌کم  $q$  شکل را پوشانده است، بنابراین مجموع مساحت‌های همهٔ شکل‌ها از

$$qs_1 + qs_2 + \dots + qs_n = qS$$

کمتر نیست. بنابراین، یکی از شکل‌ها، مساحتی دارد که از

$$\frac{1}{n}qS = \frac{q}{n}$$

کمتر نیست (بنابر فرض  $S = 1$ ).

۳۴.۶۴ در آغاز، حکم را برای  $k = 1$  ثابت می‌کنیم و این، به سادگی و با آزمایش ثابت می‌شود. سپس، عدد دلخواه  $k$  را در نظر می‌گیریم. چون سه نقطه  $A, B$  و  $C$  متعلق به یک گروه (مثلاً گروه ۱)، پیدا می‌شود که، برای آن‌ها،  $B$  وسط پاره خط راست  $AC$  باشد، می‌توان این نقطه‌ها را متناظر

با عدهای  $1 + k$  و  $2 + k$  گرفت. در این صورت، عدهای  $1 + 2k$ ،  $2 + 2k$  یا متعلق به گروه ۲ است، یا اگر یکی از آنها متعلق به گروه ۱ باشد، آنوقت با دو عدد از عدهای  $1 + 2k$  همان سه عدد موردنظر را تشکیل می‌دهند. در حالتی هم که هر سه عضو گروه ۲ هستند، خودشان سه عدد مورد نظرند.

۴.۶۵. پاسخ. ۴۹ کتاب.

۴.۶۵. پاسخ. بعد از ۹۳۷۵ کیلومتر راه.

۴.۶۵. قطر،  $19 + 65 = 19$  خانه را قطع می‌کند و، بنابراین، به تعداد بخش‌های قبلی ۸۳ بخش اضافه می‌شود. تعداد کل بخش‌ها، برابر است با

$$19 \times 65 + 83 = 1318$$

۵.۶۵. پاسخ.  $989 : 112 = 110768$

۶.۶۵. باید عدهای روی یکی از قطراها را انتخاب کرد که، در هر حال، مجموع آنها برابر ۱۲۵ می‌شود.

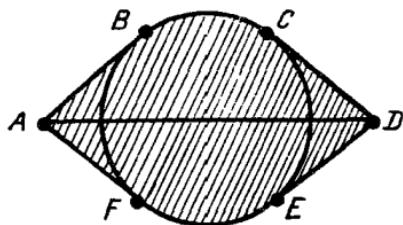
۷.۶۵. اگر  $d$  یکی از بخشیاب‌های عدد  $N$  باشد،  $\frac{N}{d}$  هم یکی دیگر از بخشیاب‌های آن است.  $\left(d, \frac{N}{d}\right)$  را یک زوج می‌گیریم (که حاصل ضرب آنها برابر است با  $N$ ). وقتی تعداد بخشیاب‌ها، عددی فرد باشد، به این معناست که بخشیابی وجود دارد که با خودش یک زوج تشکیل می‌دهد؛ و حاصل ضرب هر عدد در خودش، مجنور کامل است.

۸.۶۵. پاسخ.  $S = \frac{1}{3} \cdot 5^2$ .

۹.۶۵. پاسخ.  $1512 = 24 \times 60 + 72$  (حل مسأله ۴.۶۵ را ببینید).

۱۰.۶۵. پاسخ.  $x = \frac{7}{15}$  یا  $x = \frac{4}{5}$ .

۱۱.۶۵. مثلث متساوی الاضلاعی با طول ضلع برابر ۱۹۶۵ متر را در نظر می‌گیریم. بهنچار، دو راس این مثلث، هم رنگ‌اند.



شکل ۲۹

۱۳.۶۵. راهنمائی. حل مساله ۴.۶۵ را ببینید.

۱۴.۶۵. پاسخ. سه بازرگان. اگر بازرگان را با «ب» و مهندس را با «م» نشان دهیم، توزیع حرفه در گروه  $ABCDEFG$ ، یکی از این چهار حالت است:

مم ب بم بم بم؛  
مم بم بم بم؛

۱۵.۶۵. پاسخ در شکل ۲۹ داده شده است. خطهای راست  $AB$ ،  $DE$ ،  $DC$ ،  $AF$  بر دایره مماس‌اند. زاویه‌های  $BAF$  و  $CDE$ ، هر کدام برابر  $60^\circ$  درجه‌اند و طول پاره‌خط راست  $AD$  برابر ۱۲ کیلومتر است.

۱۷.۶۵. با استقرا روی تعداد شهرها، ثابت می‌کنیم. برای دو یا سه شهر روشن است. فرض می‌کنیم برای  $1 - n$  شهر، بتوان در مسیر زیر حرکت کرد:

$$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{n-1}$$

به جز این‌ها، شهر  $A$  را هم در نظر می‌گیریم (یعنی روی هم،  $n$  شهر). اگر یکی از دو مسیر  $A \rightarrow B_1$  یا  $A \rightarrow B_{n-1}$  وجود داشته باشد، استقرا ثابت است. ولی اگر، جهت این دو مسیر برعکس باشد، بی‌شک باید اندیس  $k$  وجود داشته باشد، به نحوی که  $A \rightarrow B_k \rightarrow B_{k+1}$  و  $A \rightarrow B_{n-1}$  به این ترتیب،

می‌توان از همه شهرها به صورت زیر گذشت:

$$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow A \rightarrow B_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow B_{n-1}$$

۱۸.۶۵. پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد. هر هشت عدد اول، باید

برابر ۲ باشند.

$$mn + m + n - 1 = 21.65$$

۲۳.۶۵. اگر همه باقی‌مانده‌ها، مختلف باشند، آن‌وقت، مجموع این

باقی‌مانده‌ها، یعنی

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

بر  $n$  بخش پذیر نیست. از طرف دیگر، مجموع خود جمله‌های دنباله

$$2(1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1)$$

بر  $n$  بخش پذیر است. تناقض حاصل، به این معناست که فرض نخستین،

مبني بر اين‌که، همه باقی‌مانده‌ها مختلف‌اند، نادرست است.

۲۴.۶۵. مرکز دایره‌ها را حفظ، ولی شعاع همه آن‌ها را، سه برابر می‌کنیم.

در ضمن، اگر دو تا از دایره‌های اولیه، متقطع باشند، دایره کوچکتر را کtar می‌گذاریم (حذف می‌کنیم). درنتیجه، این ویژگی حفظ می‌شود: دایره‌هائی که

سه برابر شده‌اند، مثل قبل، مجموعه‌ای را که بهوسیله دایره کوچکتر پوشیده می‌شد، می‌پوشانند. به این ترتیب چند دایره حذف می‌شوند و چند دایره

غیرمتقطع می‌مانند که، سه برابر شده آن‌ها، مجموعه‌ای به مساحت واحد را پوشانده‌اند. بنابراین، مجموع مساحت‌های آن‌ها کمتر از  $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$  نخواهد بود.

۲۵.۶۵. پاسخ. ۳،  $x = -24$ ،  $y = 14$  یا  $y = -2$ ،  $x = 24$ .

.  $\frac{2 \sin(n-1)\alpha}{\sin 2\alpha \cos n\alpha}$  . ۲۶.۶۵  
 ۲۸.۶۵ . مساله کلاس یازدهم. اثبات را با استقرار می‌دهیم. برای  $n = 1$  روشن است. برای عبور از  $n$  به  $n + 1$  داریم:

$$(A+B)^{n+1} \leq (A+B) \cdot 2^{n-1}(A^n + B^n) = \\ = 2^{n-1}(A^{n+1} + B^{n+1} + AB^n + BA^n)$$

$$\text{چون } (A^n - B^n)(A - B) \geq 0, \text{ پس}$$

$$AB^n + BA^n \leq A^{n-1} + B^{n-1}$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$2^{n-1}(A^{n+1} + B^{n+1} + AB^n + BA^n) \leq 2^n(A^{n+1} + B^{n+1})$$

۲۹.۶۵ . راهنمائی. یکی از راس‌های مکعب را، مبداء مختصات، در دستگاه محورهای مختصات فضایی بگیرید. در این صورت، صفحه مورد علاقه ما،  $x + y + z = 18$ ، تنها وقتی مکعب را در نقطه با مختصات  $(a, b, c)$  قطع می‌کند که داشته باشیم:

$$15 < a + b + c < 18$$

یعنی  $a + b + c$ ، برابر است با ۱۶ یا ۱۷ (گوشهای از مکعب را در نظر بگیرید که کمتر از دیگران از مبداء دور باشد). تنها این می‌ماند که تعداد جواب‌های معادله‌های

$$a + b + c = 16, 17$$

را در مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، که از ۱۱ تجاوز نکنند، پیدا کنیم. و این تعداد، برابر است با ۲۱۶.

۳۱.۶۵ سطrix را که مجموع عددهای واقع در آن، کمترین مقدار است، درنظر می‌گیریم و، این مجموع را،  $S$  می‌نامیم (بنابراین، مجموع عددهای واقع در جدول، یعنی در  $n$  سطر، بیشتر از  $nS$  خواهد بود). در این سطر، می‌تواند، دستکم،  $S - n$  صفر وجود داشته باشد که، در هریک از ستون‌های متناظر با آن‌ها (تعداد اولیه ستون‌ها برابر  $n - k$  و  $k \leq S$ )، مجموع عددها، از  $S - n$  کمتر نیست. در بقیه  $k$  ستون‌هم، مجموع از  $S$  کمتر نیست. به این ترتیب، مجموع همه عددها در جدول، از  $(n - k)(n - S) + kS$  کمتر نیست و

$$(n - k)(n - S) + kS = n^2 + k(2S - n) - Sn \geq \\ \geq n^2 + S(2S - n) - Sn$$

زیرا  $0 \leq 2S - n$ ، به زبان دیگر، مجموع همه عددها از  $n^2$  کمتر نیست، پس

$$(n - k)(n - S) + kS \geq n^2 + 2S(S - n) \geq \frac{1}{4}n^2$$

زیرا  $0 \leq (n - 2S)^2 \geq (n - S)S \leq \frac{1}{4}n^2$  نتیجه می‌شود.

$$x^2 - \frac{1}{2} \cdot 33.65$$

۳۵.۶۵ فرض کنیم، این طور نباشد و همه گره‌های صفحه شترنجی را، که فاصله‌ای بیش از ۲، نسبت به شکل  $F$  نداشته باشد، شماره‌گذاری می‌کنیم. مربع واحد  $K$  را درنظر می‌گیریم که، راس چپ و پایین آن، مبداء مختصات باشد و آن را  $O$  می‌نامیم. برای هر نقطه  $M$  از این مربع، بردار  $\vec{OM}$  را درنظر می‌گیریم و شکل مفروض را، به اندازه بردار  $\vec{OM}$  به موازات خود منتقال می‌دهیم. سپس، به نقطه  $M$ ، شمله گرهی از شبکه را می‌دهیم

که در درون شکل حاصل قرار دارد. اگر در درون این شکل، چند نقطه گرهی باشد، نقطه را با همه این شماره‌ها نشان می‌گذاریم. به سادگی قابل تحقیق است که، مجموعه نقطه‌های درون مربع  $K$ ، که با شماره  $n$  مشخص شده‌اند، نسبت به مجموعه ای که از برخورد شکل  $F$  با مربع واحد به راس بالا و سمت راست در گره با شماره  $n$ ، متقاض مركزی است. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع مساحت‌های مجموعه‌های نشان‌دار درون مربع  $K$ ، برابر است با مساحت شکل  $F$  و، بنابراین، این مجموع نمی‌تواند تمامی مربع واحد  $n$  را پوشاند.

۳۶.۶۵. پاسخ. روی ضلع‌های مثلث و در درون مثلث، کمان‌هایی برابر  $120$  درجه می‌سازیم. دایره‌ای که از نقطه‌های وسط این کمان‌ها بگذرد، مکان هندسی مطلوب است. راهنمائی. محاسبه‌ها را با استفاده از عدددهای مختلف انجام دهید. برای این منظور، باید با معادله مختلف خط راست و دایره آشنا بود.

۱.۶۶. پاسخ. نخستین عدد بزرگتر است.

۲.۶۶. روی هم  $30$  حالت ممکن (از  $0$  تا  $29$ )، برای تعداد بازی‌های هر تیم وجود دارد. ولی روشن است که، نمی‌توان در لحظه‌ای، دو تیم پیدا کرد که تعداد بازی‌های یکی برابر  $0$  و تعداد بازی‌های دیگری برابر  $29$  باشد. بنابراین  $30$  تیم داریم و  $29$  حالت، برای تعداد بازی‌ها؛ یعنی، در هر لحظه، دو تیم وجود دارد که تعداد بازی‌هایی که انجام داده‌اند، یکی است.

۳.۶۶. مجموع همه عدددهایی که روی تخته سیاه نوشته شده است، برابر  $983 \times 1967$ ، یعنی عددی فرد است. در ضمن توجه کنیم، وقتی به جای دو عدد  $a$  و  $b$ ، تفاضل آن‌ها، یعنی  $b - a$  را قرار دهیم، باز هم مجموع عدددهای موجود در تخته سیاه، عددی فرد خواهد بود، بنابراین، مجموع عدددهای موجود روی تخته، در هر حال عددی فرد است و نمی‌تواند برابر صفر (که عددی زوج است) بشود.

۴.۶۶. دو نقطه همنگ، و مثلاً سفید، در نظر می‌گیریم. این دو نقطه روی خط راستی قرار دارند که آن را، محور عددی فرض می‌کنیم و مبداء محور را روی یکی از آنها می‌گیریم؛ بنابراین، این نقطه را می‌توان  $\circ$  و نقطه دوم را با عدد ۱ مشخص کرد (فاصله بین دو نقطه را، واحد گرفته‌ایم). اگر یکی از نقطه‌های  $1 - \frac{1}{2}$  یا  $\circ$ ، به رنگ سفید باشد، آنوقت، حکم مساله ثابت شده است. درحالی که هر سه نقطه اخیر، به رنگ سیاه باشند، باز هم حکم مساله ثابت شده است.

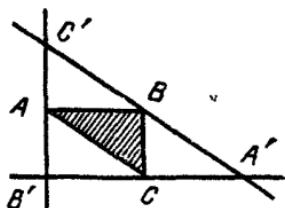
۵.۶۶. پاسخ. در مسابقه، ۱۴ شطرنج باز شرکت داشته‌اند.

۷.۶۶. محیط دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم می‌کنیم و شش نقطه تقسیم پشت‌سرهم را  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  و  $A_6$  می‌نامیم. در این صورت، خط راست  $A_2A_5$  موازی با قطر  $A_1A_6$  و خط راست  $A_3A_4$  و، همچنین، خط راست  $A_3A_6$  موازی با خط راست  $A_4A_5$  است. محل برخورد خط راست  $A_2A_5$  را با خط راست  $A_3A_6$ ، با حرف  $P$  نشان می‌دهیم. چهارضلعی  $PA_2A_4A_5$ ، متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، باید ثابت کنیم، طول پاره‌خط راست  $A_2P$ ، برابر است با طول شعاع دایره. ولی، چون چهارضلعی  $A_2OA_4P$  هم متوازی‌الاضلاع است ( $O$ ، مرکز دایره است)، پس  $|OA_4| = |OA_2| = |AP|$  و حکم ثابت است.

۸.۶۶. راهنمائی. از قضیه ویلسون استفاده کنید: برای هر عدد اول  $p$ ، عدد  $1 + (1-p)$  بر  $p$  بخش پذیر است.

۹.۶۶. پاسخ. ۲

۱۱.۶۶. مثلث  $ABC$  را در نظر می‌گیریم که، راس‌های آن در نقطه‌های مفروض باشد و حداقل مساحت را داشته باشد. در این صورت، روشن است که هریک از  $n$  نقطه مفروض، در مثلث  $A'B'C'$  قرار می‌گیرد (شکل  $(۳۰)$ ، که در آن  $A'B'$ ،  $A'C'$ ،  $B'C'$ ، به ترتیب، موازی  $BC$ ،  $AB$  و  $AC$  هستند. از آنجا که، مساحت مثلث  $A'B'C'$  چهار برابر مساحت



شکل ۳۰

مثلث  $ABC$  است، بنابراین، مساحت آن از  $\frac{1}{2}$  تجاوز نمی‌کند و همان مثلث مطلوب است.

۱۵.۶۶ راهنمائی. کافی است، برای حالتی که  $n$  عددی فرد است،

ثابت کنیم و سپس، بخشیاب‌ها را به صورت زوج‌های  $\left(d, \frac{n^2}{d}\right)$  تقسیم کنیم.

۱۷.۶۶ چون برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:  $x > 1 > x^4 + 1$ ، پس

$$\frac{x^4 + 1}{5x} > \frac{1}{5} \quad (\text{برای عدهای مثبت } x).$$

چون تابع  $10x - x^4$  کوثر است، پس حداقلر مقدار خود را در

بازه  $\left[\frac{1}{5}, 2\right]$  در دو انتهای این بازه اختیار می‌کند و، مقدار آن، در نقطه‌های

$\frac{1}{5}$  و  $2$ ، منفی است. بنابراین، اگر  $2 \leq x \leq \frac{1}{5}$ ، آنوقت  $2 \leq \frac{x^4 + 1}{5x} \leq \frac{1}{5}$

۱۹.۶۶ جواب. پاسخ.

۲۰.۶۶ راهنمائی. صفحه را با شش ضلعی‌های منتظم، که طول ضلع هر کدام ۹۸۲ متر باشد، فرش کنید. سپس، هر شش ضلعی را با یکی از رنگ‌ها، طوری رنگ کنید که، هر دو شش ضلعی یک رنگ، دست کم به وسیله دو شش ضلعی، از هم جدا شده باشند.

۲۱.۶۶  $(q^2 - 1) = (q - 1)(q^2 + q + 1)$  بر  $p$  بخش پذیر است.

چون  $q > p$ ، پس  $1 + q + q^2$  بر  $p$  بخش پذیر است. فرض

می‌کنیم:

$$(kq + 1)m = q^2 + q + 1 \Rightarrow m = q^2 + q - kmq + 1$$

در این صورت یا  $m \geq q^2 + q + 1$  و یا  $m = q^2 + q - kmq + 1$ .

$$q^2 + q + 1 \geq (q + 1)^2$$

که بی‌معنی است. بنابراین  $m = 1$ .

۲۲.۶۶. وسط پاره خط راست  $AB$  را  $M$  می‌نامیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که پاره خط‌های راست  $ME$  و  $MF$ ، طولی برابر دارند و بر هم عمودند. این اثبات از این‌جا به دست می‌آید که مثلث‌های  $CBU$  و  $CYA$ ، با دوران به اندازه  $90^\circ$  درجه دور نقطه  $C$ ، به هم تبدیل می‌شوند (در این‌جا،  $E$  و  $U$ ، راس‌های مربع‌های  $CBXY$  و  $ACUV$  هستند که نقطه‌های  $E$  و  $F$ ، مرکزهای آن‌ها را تشکیل می‌دهند). از این‌جا نتیجه می‌شود که، ضمن دوران به اندازه  $90^\circ$  درجه دور نقطه  $M$ ، راس  $B$  به نقطه  $D$ ، و نقطه  $F$  به نقطه  $E$  می‌رود. یعنی پاره خط‌های راست  $BF$  و  $DE$  برابر هم عمودند و طولی برابر دارند.

۲۳.۶۶. تعداد این روش‌ها را با  $x_n$  نشان می‌دهیم. در این صورت، به سادگی معلوم می‌شود که

$$x_1 = 0 \quad x_2 = k(k-1)$$

و برای هر  $n$ ، این رابطه برقرار است:

$$x_n = (k-2)x_{n-1} + (k-1)x_{n-2}$$

در واقع، ضلع‌ها را از اولین تا  $(n-2)$  (امین ضلع رنگ می‌کنیم. تعداد روش‌های این رنگ آمیزی، که به‌ازای آن، رنگ ضلع  $(n-2)$  ام، همان رنگ

صلع اول نباشد، برابر  $x_{n-1}$  است و، در این صورت،  $(1 - n)$  امین ضلع را می‌توان به یکی از  $2 - k$  رنگ، درآورد. تعداد روش‌ها، برای آنکه رنگ ضلع  $(2 - n)$  ام با رنگ ضلع اول، یکی باشد، برابر است با  $x_{n-2}$  و، در این صورت،  $(1 - n)$  امین ضلع می‌تواند به  $1 - k$  روش رنگ شود. از رابطه‌ای که ثابت کردیم، به کمک استقرا، نتیجه می‌شود:

$$x_n = (k - 1)^n + (k - 1)(-1)^n$$

۲۹.۶۶. پاسخ. یکی از مجھول‌ها برابر ۱ و بقیه برابر صفر.  
 ۳۰.۶۶ فرض می‌کنیم، عدهای  $1 + 2^n + \dots + 2^m - 1$ ، هردو، بر عدد اولی مثل  $p$  بخش‌پذیر باشند، یعنی از تقسیم  $2^n$  و  $2^m$  بر  $p$ ، به ترتیب، باقی‌ماندهای  $1$  و  $1$  به دست می‌آید. بزرگترین بخشیاب مشترک  $n$  و  $m$  را برابر  $d$  می‌گیریم. چون دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$an - bm = d$$

بنابراین،  $2^d$ ، در تقسیم بر  $p$ ، باقی‌ماندهای برابر ۱ – یا ۱ دارد.

ولی اگر

$$2^d \equiv 1 \pmod{p}$$

آنوقت

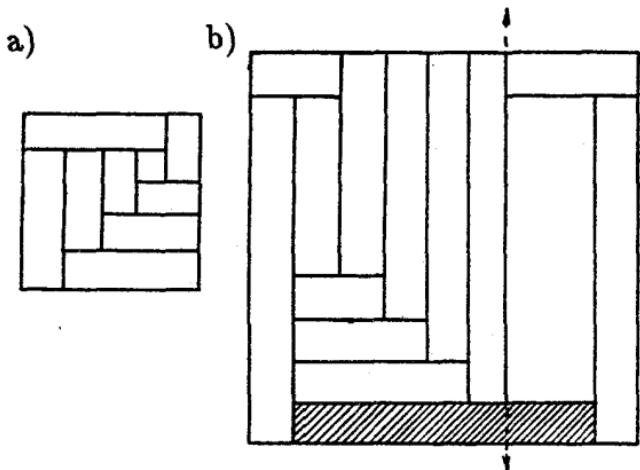
$$2^n \equiv 1 \pmod{p}$$

که با فرض مخالف است. پس

$$2^d \equiv -1 \pmod{p}$$

ولی، چون  $m$  عددی فرد است، پس  $k = \frac{m}{d}$  هم عدد فرد می‌شود و

$$2^m - (2^d)^k = (-1)^k \equiv -1 \pmod{p}$$



شکل ۳۱

باز هم مواجه با تناقض شدیم.

a-۳۴.۶۶. پاسخ. به ازای  $n = 5$  و به ازای  $n \geq 7$  روی شکل ۳۱.

تقسیم به تعدادی فرد و دلخواه (بیشتر از ۴) مستطیل، مثلًا برای  $n = 9$  داده شده است. روی شکل ۳۱ نیمة چپ مریع، متناظر با شکل a-۳۱ تقسیم شده است، ولی تقسیم نیمة راست آن، به چهار مستطیل ثابت شده است.

۱.۶۷. پاسخ. ۳۵۰، ۷۰۰ و ۱۰۵۰ لیتر.

۲.۶۷. پاسخ. دو بار.

۴.۶۷. همه تفاضل‌های ممکن را، باید بین عددهای از ۱ تا ۱۴ (۱ - ۱۵) جست‌وجو کرد. از طرف دیگر، برای ۸ عدد، ۲۸ تفاضل (برای دویه‌دوی آنها) به دست می‌آید. روشن است، در بین عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۶، تنها یکبار، تفاضل ۱۴ می‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، ۱۳ تفاضل ممکن، در بین ۲۷ تفاضل دویه‌دوی عدها وجود دارند. اگر هیچ کدام از این تفاضل‌ها، بیش از دو بار تکرار نشوند، آنوقت، تعداد همه

تفاضل‌ها از ۲۶ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، دست‌کم یکی از تفاضل‌ها، باید سه بار تکرار شود.

۵.۶۷. پاسخ. ۷۰ کیلومتر.

۷.۶۷. اگر پرانترها را باز کنیم، همه توان‌های زوج  $x^2$ ، از ۱ تا  $x^{202}$  به‌دست می‌آید. بنابراین، کافی است، درستی نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

$$1 + x^{202} \geq 2x^{101}, x^2 + x^{200} > 2x^{101}, \dots$$

ولی، این نابرابری‌ها، با نابرابری‌های زیر هم‌ارزنند:

$$(1 - x^{100})^2 \geq 0, (x - x^{100})^2 \geq 0, \dots$$

۸.۶۷. قرینه نقطه‌های  $B$  و  $C$  را نسبت به خط راست  $MN$  پیدا می‌کنیم، نقطه‌های  $B'$  و  $C'$  به‌دست می‌آیند. خط‌های  $AD$  و  $B'C'$  موازی‌اند؛ دو خط راست  $AB'$  و  $DC'$  هم، با خط راست  $MN$  موازی‌اند، بنابراین چهارضلعی  $AB'C'D$ ، متوازی‌الاضلاع است، یعنی

$$|AD| = |B'C'| = |BC|$$

۹.۶۷. راهنمائی. خط راست را باید طوری رسم کرد که داشته باشیم:

$$|PQ| = |RQ_1|$$

۱۰.۶۷. چون  $xy = -c$  و  $x + y = c$ ، محاسبه ساده‌ای روشن

می‌کند که

$$x^2 + y^2 + (xy)^2 = 2x^2 \geq 0.$$

۱۳.۶۷. مماس مشترک دو دایره را در نقطه  $A$  رسم می‌کنیم تا خط راست  $CD$  را در نقطه  $E$  قطع کند. روشن است که

$$\widehat{EDA} = \widehat{CAE} \text{ و } \widehat{ECA} = \widehat{DAE}$$

و مثلث‌های *DEA* و *CEA* متشابه‌اند. مثلث *BEA* متساوی الساقین

است، یعنی

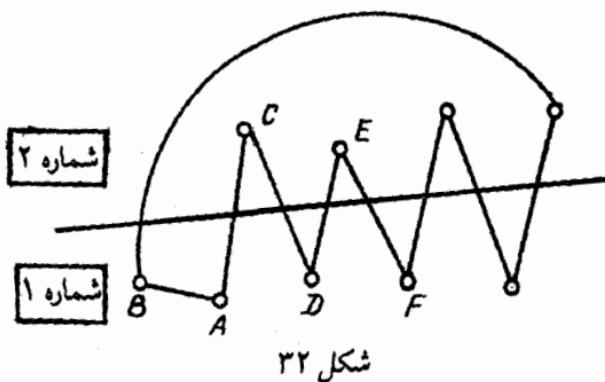
$$\begin{aligned} 2\widehat{BAE} &= 180^\circ - \widehat{BEA} = \\ &= \widehat{DAE} + \widehat{EDA} = \widehat{DAE} + \widehat{CAE} \end{aligned}$$

۱۴.۶۷ کافی است ثابت کنیم  $1 + 2^{3k} + 2^{3k+1}$  بر  $3^{k+1}$  بخش‌پذیر است.  
اثبات با استقرا داده می‌شود. درستی حکم، به ازای  $k = 1$  روشن است. گلر  
استقرایی را، می‌توان به باری اتحاد

$$2^{3x} + 1 = (2^x + 1)(2^{2x} - 2^x + 1) \quad (1)$$

انجام داد. وقتی  $x$ ، عددی فرد باشد، پرانتر دوم در سمت راست برابری، بر  
۳ بخش‌پذیر است.

۱۶.۶۷ در آغاز، همه افراد را به دو دسته دلخواه تقسیم و مقدار  $S$  را  
به این ترتیب پیدا می‌کنیم: برای هر فرد، تعداد دوستان و دشمنان او را، در  
دسته‌ای که خود این فرد در بین آن است، تعیین می‌کنیم و، سپس، این عددها  
را با هم جمع می‌کنیم. اکنون، یک نفر مثل  $A$  را در نظر می‌گیریم که، عدد  
مربوط به او، از صفر بیشتر باشد. دسته‌ای را که  $A$  در آن است (شماره ۱)  
می‌نامیم. اگر هم دوست و هم دشمن  $A$ ، بین افراد دسته شماره ۱ باشد،  
آن‌وقت، با انتقال  $A$  به دسته شماره ۲، می‌توانیم مقدار عدد  $S$  را کوچکتر  
کنیم. حالا فرض می‌کنیم، دوست او  $B$ ، در همان دسته شماره ۱ و دشمن  
او  $C$ ، در دسته شماره ۲ باشد. اگر  $D$  که دوست  $C$  است، در شماره  
۲ باشد، آن‌وقت می‌توانیم  $C$  را به شماره ۱ منتقل کنیم (مقدار  $S$ ، تغییر  
نمی‌کند) و بعد  $A$  را به شماره ۲ می‌بریم (مقدار  $S$ ، دو واحد کم می‌شود).  
فرض می‌کنیم،  $D$  در شماره ۱ باشد. دشمن او  $E$ ، در شماره ۲ است،  
در غیر این صورت، می‌توانیم، با عملی مشابه، مقدار  $S$  را کاهش دهیم. سپس



شکل ۳۲

دوست  $E$ ، که او را  $F$  می‌نامیم، در دسته شماره ۱ است و غیره. روش است که، دیر یا زود، زنجیر بسته می‌شود، یعنی ما به  $B$  می‌رسیم. ولی این، ممکن نیست، زیرا از یک طرف، باید در زنجیر، تعداد زوجی از افراد باشند (دوست‌ها و دشمن‌ها با هم عوض می‌شوند) و، از طرف دیگر، تغییر شماره دسته، تنها یکبار انجام می‌گیرد (شکل ۳۲ را ببینید). بنابراین، تعداد افراد در زنجیر، باید عددی فرد باشد.

بهاین ترتیب، در هر وضع، به شرط  $0 < S$ ، با جابه‌جا کردن افراد، می‌توان مقدار  $S$  را کم کرد تا آن‌جا که  $0 = S$  بددست آید.  
۱۷.۶۷. اگر در بین این اعداد، عدد منفی وجود داشته باشد، آن‌وقت، کوچکترین آن‌ها را  $a_1$  می‌نامیم. داریم:

$$a_i > \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1})$$

یعنی باید هر دو عدد  $a_{i-1}$  و  $a_{i+1}$ ، با  $a_i$  برابر و، درنتیجه، منفی باشند.  
بهاین ترتیب، همه اعدادهای ما، باید منفی باشند.  
۱۸.۶۷. داریم:

$$p^p + q^q \equiv (-q)^p + q^q = q^{rk-1}(q^r - 1) \pmod{p+q}$$

که،  $1 + q = 2k$  و  $p = 2k - 1$ ؛ و این مقدار برابر است با

$$q^{4k-1}(q-1)(q+1) = q^{4k-1} \cdot 2k(2k+2)$$

که بر  $p$ ، یعنی  $4k$  بخش پذیر است.

۲۰.۶۷ در نخستین بار عمل، آخرین عدد دنباله، در سمت راست، تغییر نمی‌کند و عدد دوم، از سمت راست، برابر عدد آخر می‌شود. بعد از دو بار انجام عمل، دو عدد سمت راست بی‌تغییر می‌مانند و عدد سوم، از سمت راست، برابر مجموع آنها می‌شود. در مرحله سوم، سه عدد سمت راست دنباله بی‌تغییر می‌مانند و عدد چهارم، از سمت راست، برابر مجموع، آنها می‌شود. اگر به همین ترتیب، عمل را  $k$  مرتبه تکرار کنیم، همه عددهای دنباله، بی‌تغییر باقی می‌مانند.

۲۱.۶۷ این عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})(b_1 + \dots + b_k)$$

با باز کردن پرانتزها، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

از طرف دیگر، چون  $a_k - a_{k+1}$  غیر منفی است و هر عبارت به صورت  $b_1 + \dots + b_k$  از لحاظ قدر مطلق، از  $B$  تجاوز نمی‌کند، بنابراین

$$|S| \leq B[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)] = Ba_1$$

۲۳.۶۷ راهنمائی، این مرد باید روی محیط نیم‌دایره‌ای به شعاع  $\frac{250\pi}{\pi}$  متر حرکت کند.

۲۴.۶۷ اثبات با حل مساله ۱۸.۶۷، شبیه است.

۳۵.۶۷ . به سادگی می‌توان تشابه دو مثلث  $O_1AD$  و  $O_2BD$  (و همچنین تشابه دو مثلث  $O_1AD$  و  $O_2CD$ ) را ثابت کرد. از آنجا، به دست می‌آید:

$$\frac{R}{|AD|} = \frac{r}{|BD|} \text{ و } \frac{R}{|CD|} = \frac{r}{|AD|}$$

که در آن‌ها،  $R$  و  $r$ ، طول شعاع‌های دو دایره‌اند. اگر این دو برابری را در هم ضرب کنیم و به حساب آوریم که

$$r^2 : R^2 = |AB|^2 : |AC|^2$$

به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

۳۱.۶۷ . این چندجمله‌ای‌ها را،  $f$  و  $g$  می‌نامیم؛ در ضمن، می‌توان فرض کرد که  $f$ ، به ازای  $x > x_0$ ، صعودی باشد.  $\epsilon$  را، برابر ۱ یا  $-1$  می‌گیریم، به نحوی که  $\epsilon g$  هم، به ازای  $x > x_0$  صعودی شود.  $f - \epsilon g$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کیم، مقدار ثابتی نباشد. فرض کنید:

$$f(x_1) = a \text{ و } g(x_i) = b, (x_1 > x_0)$$

که در آن،  $a$  و  $b$ ، دو عدد درست‌اند. اگر

$$h(x) = f(x) - \epsilon g(x) - (a - \epsilon b)$$

و  $x_1 > x_2$ ، چنان باشد که  $1$ ،  $f(x_2) = a + 1$  آنوقت روشن است که

$$\epsilon g(x_2) = \epsilon b + 1 \Rightarrow h(x_2) = 0$$

به همین ترتیب، اگر  $x_2 > x_3 > x_1$  چنان باشد که  $h(x_2) = \epsilon b + 1$  و  $h(x_3) = \epsilon b + 2$  آنوقت  $2$   $\epsilon g(x_3) = \epsilon b + 2$  وغیره.

به این ترتیب  $(h(x), h(x))$ ، بی‌نهایت ریشه پیدا می‌کند، یعنی  $0 \equiv h(x)$

۳۳.۶۷ هر فرد، در بین ۱۷ نفر دیگر، یا دست کم ۹ نفر آشنا و یا دست کم ۹ نفر نآشنا دارد. بدون این که به کلی بودن راه حل لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد، فرد مشخص  $A$ ، در این گرد هم‌آئی، دست کم ۹ نفر آشنا دارد. یکی از این ۹ نفر، و مثلاً  $B$  را، درنظر می‌گیریم. اگر بین ۸ نفر دیگر، ۶ نفر پیدا شود که هیچ‌کدام با  $B$  آشنا نباشند، آنوقت، مساله منجر به مسالة ۵.۶۱ می‌شود.

فرض می‌کنیم  $B$ ، در بین ۸ نفر دیگر، سه آشنا و پنج نآشنا داشته باشد (زیرا اگر  $B$  با چهار نفر آشنا باشد، این چهار نفر یا دویه‌دو با هم نآشنا هستند که، در این صورت، یک گروه چهارنفری مورد نظر را تشکیل می‌دهند و یا دست کم دو نفر آن‌ها یکدیگر را می‌شناسند که، در این صورت،  $A$  و  $B$  و این دو نفر، گروه چهارنفری دویه‌دو آشنا را تشکیل می‌دهند). اکنون تعداد آشناها را در این ۹ نفر محاسبه می‌کنیم: روی هم ۹ نفرند، هر نفر درست با سه نفر آشناست؛ چون هر آشنا دو بار به حساب می‌آید، بنابراین، تعداد زوج آشناها برابر

$$\frac{3 \times 9}{2} = 14,5$$

می‌شود که معنا ندارد. این تناقض، حل مساله را تمام می‌کند. ۳۴.۶۷ راهنمائی. هر ستون جدول را یک «پسر جوان» و هر سطر جدول را یک «دختر جوان» می‌نامیم و پسر و دختری را دوست به حساب می‌آوریم که در خانه محل برخورد آن‌ها، عددی مثبت قرار گرفته باشد. در این صورت، مساله منجر به این پیش‌قضیه، که آن را «پیش‌قضیه دختران» می‌نامیم، می‌شود: در گروهی،  $n$  پسر جوان و  $n$  دختر جوان جمع شده‌اند؛ در ضمن می‌دانیم، هریک از  $k$  پسر ( $k$ ، هر عددی از ۱ تا  $n$  است)، دست کم با  $n-k$  دختر آشناست. در این صورت، پسران و دخترانی می‌توانند با هم طوری ازدواج کنند که، در هر زوج، تنها پسر و دختر آشنا وجود داشته

باشد.

شرط «پیش قضیه دختران» از اینجا نتیجه می‌شود که، اگر  $k$  ستون در اختیار داشته باشیم، مجموع عدهای واقع در آن‌ها، برابر  $k$  می‌شود. بنابراین، همه عدهای مثبت این ستون‌ها، نمی‌توانند در کمتر از  $k$  سطر واقع باشند.

اثبات «پیش قضیه دختران» را، با استقراری روی  $n$  بدهید.

۱.۶۸. پاسخ. ۷ رویل.

۲.۶۸. پاسخ. عدد دوم بزرگتر است و به اندازه

(۴۴۴...۴) رقم (۱۹)

۳.۶۸. پاسخ. ۳۳۵ کیلومتر. راهنمائی. از نابرابری مثلث استفاده کنید.

۵.۶۸. فرض می‌کنیم، تیم  $T$ ، از  $n$  تیم بردۀ باشد. اگر تیمی مثل  $X$ ، در بین این  $n$  تیم نباشد، در ضمن، به هیچ‌کدام از آن‌ها نباخته باشد، آنوقت دست‌کم  $1 + n$  امتیاز خواهد داشت که با فرض پیروزی تیم  $T$  در تمام مسابقه، متناقض است. بنابراین، تیم  $X$ ، یا به خود  $T$  و یا به یکی از این  $n$  تیم باخته است.

۷.۶۸. راهنمائی. ثابت کنید، دو وتر موازی از یک مریع، تنها وقتی با هم برابرند که، یا نسبت به مرکز مریع قرینه یکدیگر باشند و یا وترهایی باشند که دو ضلع رویه‌رو را در مریع به هم وصل کرده‌اند.

۸.۶۸. پاسخ. ۱، ۱، ۳، ۶، ۱۱.

۱۲.۶۸. همه دایره‌ها را روی قطری از دایره بزرگتر تصویر می‌کنیم. روشن است که مجموع پاره‌خط‌های تصویر، برابر است با مجموع قطرهای دایره‌ها، یعنی  $50$ . چون قطر دایره بزرگ برابر است با  $6$ ، پس، اگر هر نقطه‌ای آن بهوسیلهٔ حداقل هشت تصویر پوشیده شده باشد، مجموع طول‌های آن‌ها، از  $8 \times 6$ ، یعنی  $48$  تجاوز نمی‌کند ( $50 < 48$ ). بنابراین، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست‌کم، بهوسیلهٔ  $9$  تصویر پوشیده است. خط راستی که از این

نقطه، عمود بر قطر رسم شود، خط راست موردنظر است.

۱۴.۶۸ ثابت می‌کنیم، خط راست  $BD$ ، بر دایرة محیطی مثلث  $ABM$  در نقطه  $B$  مماس است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم اندازه زاویه  $ABD$  برابر است با اندازه نصف کمان  $AMB$  از این دایرة. دو زاویه  $C$  و  $BDC$  برابرند (چهارضلعی  $BCDM$ ، محاطی است)؛ در ضمن، چون  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است، پس

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$$

$$\text{بنابراین } \widehat{ABM} = \widehat{BMC}$$

$$\widehat{ABD} + \widehat{AMB} = 180^\circ$$

و چون  $\widehat{AMB}$  برابر است با نصف کمان  $AB$  از دایرة  $ABM$ ، پس  $\widehat{ABD}$  برابر نصف کمان  $AMB$  از همین دایرة می‌شود. بهمین ترتیب ثابت می‌شود که  $BD$  در نقطه  $D$  بر دایرة محیطی مثلث  $ADM$  مماس است.

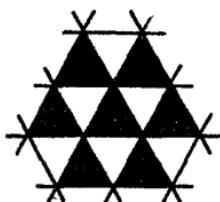
۱۴.۶۹ با استفاده از قضیه ویت (درباره رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌ها) به دست می‌آید:

$$S = x^4 + y^4 = a^4 + 4a^2 + 2;$$

$$T = x^5 + y^5 = -a^5 - 4a^3 - 3a^2$$

چون  $aS + T = -a$ ، بنابراین، بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد  $S$  و  $T$ ، همان بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد  $S$  و  $a$  و یا دو عدد ۲ و  $a$ ، یعنی واحد است ( $a$ ، عددی فرد است).

۱۵.۶۸ راس‌های مثلث مفروض را  $A$ ،  $B$  و  $C$  می‌نامیم و صفحه را، آن‌طور که در شکل ۲۳ می‌بینید، به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم. توجه



شکل ۳۳

کنیم؛ مثلث  $ABC$  هرجا باشد، قرینه آن نسبت به یکی از ضلع‌ها، از سیاه به سفید یا از سفید به سیاه تغییر رنگ می‌دهد. چون در پایان عمل، به رنگی مشابه رنگ نخستین مثلث می‌رسیم. بنابراین روشن است که، تعداد تبدیل‌ها، عددی زوج است.

۱۸.۶۸. راهنمائی. این عددها را درنظر بگیرید:

۱۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲

۲۱۲۲۲۲۲۲۲۲۲

.....

۲۲۲۲۲۲۲۲۲۱

و ثابت کنید، به دنبال یکی از آن‌ها، رقم ۱ اضافه می‌شود.  
فرض کنید، این عدد  $1222222222$  باشد. در این صورت، روشن است که باید به دنبال عدد

۲۲۳۳۲۳۳۳۳۳

رقم ۲ و به دنبال عدد

۳۱۱۱۱۱۱۱۱

رقم ۳ را نوشت. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، به دنبال هر عدد، رقم اول آن اضافه می‌شود.

پیش‌قضیه. این حکم، برای عددهایی هم، که برای نوشتن آن‌ها دو رقم شرکت دارند، درست است.

درواقع، اگر برای نوشتن عدد، تنها از دو رقم ۱ و ۲ استفاده کرده باشیم و نخستین رقم آن (یعنی رقم سمت چپ) برابر ۱ باشد، روشن است که نمی‌توان به دنبال آن رقم ۳ را نوشت و چون به دنبال عدد ۲۲۳۳۲۲۳۳۲۳۳ باید رقم ۲ بیاید، پس رقم ۲ را هم نباید به دنبال آن آورد. اکنون عدد دلخواهی را انتخاب می‌کنیم که مثلاً با ۲ آغاز شده باشد. این دو عدد را در نظر می‌کیریم:

$$\overline{1ab\dots c} \quad \overline{3xy\dots z} \quad (*)$$

که هردوی آن‌ها با رقم‌های ۱ و ۳ نوشته شده‌اند، به نحوی که در همهٔ مرتبه‌ها با عدد مفروض اختلاف داشته باشند. چون بنابر پیش‌قضیه، به دنبال عددهای  $(*)$ ، ۱ و ۳ می‌آید، پس به دنبال عدد مفروض، رقم ۲ خواهد آمد، چیزی که باید ثابت می‌کردیم.

۱۹.۶۸. دو ریشه این معادله، ریشه‌های معادله

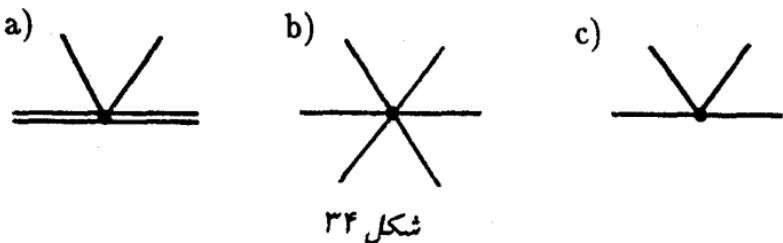
$$x = 1 - 1968x^2$$

هستند و دو ریشه دیگر، ریشه‌های معادله

$$1968x^2 - 1968x - 1967 = 0$$

۲۱.۶۸. پاسخ. هشت.

۲۲.۶۸. از رأس  $A$ ، پاره خط‌های راست  $AD$  و  $AE$  را مماس بر دایرة اول و دایرة دوم رسم می‌کنیم ( $D$  و  $E$  روی ضلع  $BC$  قرار دارند). روشن است که مثلث‌های  $ACD$  و  $AEB$ ، مثلث  $ABC$  را می‌پوشانند،



شکل ۳۴

یعنی مجموع شعاع‌های این دایره‌ها برابر است با

$$\frac{2S_{ACD}}{p_{ACD}} + \frac{2S_{ABE}}{p_{ABE}} \geq \frac{2(S_{ACD} + S_{ABE})}{p_{ABC}} \geq \frac{2S_{ABC}}{p_{ABC}}$$

و عبارت اخیر، مقدار شعاع دایره محاطی مثلث  $ABC$  را بیان می‌کند.

۲۴.۶۸. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، چنین تقسیمی ممکن باشد. انتهای‌های ضلع درونی مثلث‌های تقسیم را به سه گروه رده‌بندی می‌کنیم: نقطه‌های واقع بر ضلع مثلث بزرگ (در آن‌ها چهار ضلع درونی به هم می‌رسند - شکل a-۳۴)؛ نقطه‌های درونی مثلث که، در آن‌ها، شش مثلث تقسیم، یعنی ۱۲ ضلع بهم می‌رسند (شکل b-۳۴)؛ نقطه‌های واقع در داخل یک ضلع درونی مثلث تقسیم که، در آن‌ها، شش ضلع درونی مثلث‌های تقسیم به هم می‌رسند (شکل c-۳۴). اگر تعداد نقطه‌های این گروه‌ها را، به ترتیب،  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  بنامیم، آنوقت تعداد ضلع‌های درونی، برابر

$$\frac{1}{\rho}(4A_1 + 12A_2 + 6A_3) = 2A_1 + 6A_2 + 3A_3$$

خواهد شد. در ضمن، هر نقطه گروه سوم، متناظر است با سه ضلع درونی: آن که، این نقطه، روی آن‌ها قرار دارد و آن دو ضلعی که چسبیده به اولی هستند. به سادگی دیده می‌شود که، هر ضلع درونی تقسیم، متناظر است با نقطه‌ای از گروه سوم، در غیر این صورت، می‌توان دو مثلث برابر پیدا کرد. به این ترتیب، تعداد ضلع‌های درونی، از  $3A_3$  تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$A_1 = A_2 = 0$ ، یعنی مثلث‌های تقسیم، روی ضلع‌های مثلث بزرگ، راسی ندارند و این، به معنای آن است که همه تقسیم‌ما، چیزی نیست جز همان مثلث اصلی.

.۲۶.۶۸ پاسخ. یک جواب.

.۲۸.۶۸ پاسخ. ۹.

۳۰.۶۸  $\sqrt[k]{\sum b_i p^i}$  را با  $p$ ،  $\frac{1}{p}$  را با  $t$  و  $a_i p^i$  را با  $b_i$  نشان می‌دهیم. در این صورت، نابرابری مفروض را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(p-1) \left( \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \dots + \frac{b_n}{p^n} \right) \leq \sqrt[k]{b_1^k + \dots + b_n^k}$$

و اگر به جای  $\frac{1}{p}$ ، مقدارش  $t$  را قرار دهیم:

$$b_1 + b_2 t + \dots + b_n t^{n-1} \leq \frac{1}{1-t} \sqrt[k]{b_1^k + \dots + b_n^k}$$

چون

$$\sqrt[k]{b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k} \geq B = \max b_i$$

بنابراین، به این زنجیره نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 t + \dots + b_n t^{n-1} &\leq B(1 + t + \dots + t^{n-1}) = \\ &= \frac{B(1 - t^n)}{1 - t} \leq \frac{B}{1 - t} \leq \frac{1}{1 - t} \sqrt[k]{b_1^k + \dots + b_n^k} \end{aligned}$$

۳۱.۶۸ فرض می‌کنیم  $|AB| > |AC|$  و پای عمود را  $H$  می‌نامیم. روی امتداد پاره خط راست  $BA$ ، نقطه  $C'$  را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:  $|AC'| = |AC'|$ . به سادگی و با درنظر گرفتن زاویه‌ها، روش

می‌شود که خط راست  $MA$ ، نیمساز زاویه  $CAC'$  است. چون مثلث  $ACC'$  متساوی الساقین است، خط راست  $MA$  بر خط راست  $CC'$  عمود می‌شود و  $|MC| = |MC'|$  و یا  $|MB| = |MC'|$ ، یعنی  $MH$  میانه مثلث  $MBC'$  و نقطه  $H$  وسط پاره خط راست  $BC'$  است.

۳۳.۶۸ می‌توان مساله را، با استقراری روی  $m$  به نتیجه رساند، ولی

ساده‌ترین روش حل، چنین است:

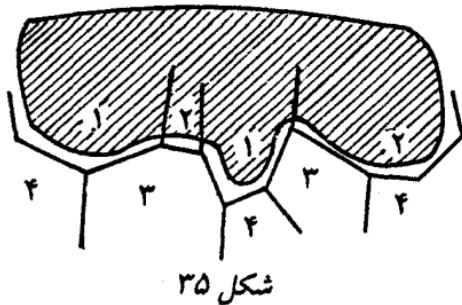
کمترین تعداد مثلث‌ها، وقتی به دست می‌آید که از  $m$  نقطه،  $1 - m$  نقطه روی یک خط راست باشند، زیرا در چنین حالتی، کافی است تنها نقطه  $m$  را به عنوان راس و هر دو نقطه دیگر (از  $1 - m$  نقطه واقع بر یک خط راست) را، قاعده مثلث بگیریم (هر مثلث دیگری، بر یکی از این مثلث‌ها منطبق است) و از  $1 - m$  نقطه (که هر دو تای آن‌ها باید قاعده یکی از مثلث‌ها را بسازد)، می‌توان به تعداد

$$C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)!}{(m-2)!2!} = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

قاعده مختلف، برای مثلث‌ها، جدا کرد.

۳۴.۶۸ راهنمایی. هریک از نابرابری‌ها را می‌توان به این ترتیب ثابت کرد: عده‌های  $a_i$  را طوری تغییر می‌دهیم که مجموع فاصله‌های هر دو تا از آن‌ها، نسبت به مجموع مفروض کمتر نشود (یا زیادتر نشود)؛ برای این منظور، می‌توان تقریباً همه  $a_i$ ‌ها را به یکی از دو انتهای پاره خط راست برد. در این صورت، اثبات درستی نابرابری‌ها، بسیار ساده می‌شود.

۳۵.۶۸ چهاروجهی را روی خط راست دلخواهی تصویر می‌کنیم. در این صورت، پاره خط راست  $AB$  و، در درون آن، نقطه‌های  $C$ ،  $D$  و  $O$  به دست می‌آید (نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $D$  و  $C$ ، تصویرهای راس‌های چهاروجهی و  $O$  تصویر نقطه مفروض است). با درنظر گرفتن حالت‌های مختلف، به سادگی روشن می‌شود که، مجموع فاصله‌های از نقطه  $O$  تا



نقشه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، از مجموع فاصله‌های دو به دوی این چهار نقطه، تجاوز نمی‌کند. تنها این می‌ماند که از گزاره زیر استفاده کنیم: مجموع تصویرهای پاره خط راست فضایی به طول  $d$  در همه جهت‌ها، برابر است با  $kd$  که، در آن،  $k$  ثابتی است که بستگی به موضع پاره خط راست و یا طول آن ندارد.

. ۳۶.۶۸ حل مساله ۳۶.۸۱ را بیینید.

. ۳۷.۶۸ فرض می‌کنیم، همه وجههای را که به رنگ‌های اول و دوم درآمده‌اند، به وسیله رنگ دیگری (رنگ پنجم) رنگ کرده‌باشیم. حوزه رنگ پنجم را در سطح چندوجهی درنظر می‌گیریم. با حرکت روی مرز این حوزه، می‌بینیم که در طرف دیگر این مرز، رنگ‌های سوم و چهارم، به تناوب آمده‌اند و، بنابراین، مرز هر حوزه‌ای از این‌گونه، شامل تعدادی زوج از راس‌های است که با راس‌های واقع در مرز مشترک رنگ‌های اول و دوم، فرق دارند (شکل ۳۵ را ببینید). از این‌جا نتیجه می‌گیریم که، برای هر مرز رنگ پنجم، تعداد زوجی از راس‌های مرز رنگ اول، بر تعداد زوجی از راس‌های واقع بر مرز رنگ دوم، منطبق است. اگر تمامی حوزه رنگ پنجم را درنظر بگیریم، معلوم می‌شود که تعداد زوجی از راس‌های روی وجههای رنگ اول (یعنی تعداد زوجی وجه مربوط به رنگ اول با تعداد فردی ضلوع)، بر تعداد

زوجی راس روی وجههای رنگ دوم (یعنی تعداد زوجی وجه رنگ دوم با تعداد فردی ضلع) منطبق است.

۳۸.۶۸. راهنمائی. ثابت کنید، در هر دو حالت، به واژه‌های می‌رسیم که، در آن‌ها، تعداد حرف‌های  $A$  و تعداد حرف‌های  $B$ ، یکی است و، در ضمن، دارای این ویژگی هستند: بین هر چند حرف اول واژه، تعداد حرف  $A$ ، از تعداد حرف  $B$  کمتر نیست.

۱.۶۹. خانه صفحه شطرنج، وقتی و تنها وقتی سفید است که مجموع شماره‌های ستون و سطر آن، عددی فرد باشد. چون مجموع همه شماره‌های سطرها و ستون‌ها، برای هشت رخ مفروض، برابر است با

$$2(1 + 2 + \dots + 8) = 72$$

که عددی است زوج، بنابراین باید تعداد خانه‌های با «شماره‌های فردی» که در این مجموع وجود دارد، زوج باشد. یعنی تعداد خانه‌های سیاهی که شامل رُخ هستند، عددی است زوج.

۲.۶۹. پاسخ. ۱۴. راهنمائی. باقی‌مانده تقسیم عددها بر چهار را در نظر بگیرید.

۳.۶۹. پاسخ. ساعت سه بعد از نیمروز.

۶.۶۹. فرض کنیم،  $n$  پرسش از این گونه شده باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، هر ریاضی‌دان می‌تواند مطمئن باشد که عدد ریاضی‌دان دیگر، از  $n$  کمتر نیست. اثبات را با استقرا روی  $n$  می‌دهیم. درستی حکم به‌ازای  $1 = n$  روشن است. فرض می‌کنیم، بعد از  $1 - n$  پرسش از این گونه، هر ریاضی‌دان مطمئن شده باشد که عدد مورد نظر ریاضی‌دان دیگر، از  $1 - n$  کمتر نیست. اکنون فرض می‌کنیم، عدد مربوط به ریاضی‌دان پرسش کننده برابر  $1 - n$  باشد؛ این ریاضی‌دان می‌داند که عدد ریاضی‌دان دیگر، برابر  $2 - n$  نیست، بنابراین بلافاصله خواهد گفت: «بله، می‌دانم، شما عدد  $n$  را

در دست دارید». به این ترتیب، بعد از  $n$  پرسش، هر ریاضی‌دان قانع می‌شود که عدد رقیب او، از  $n$  کمتر نیست.

اکنون روشن است که اگر عدد یکی از ریاضی‌دان‌ها برابر  $k$  باشد، بعد از  $k$  پرسش، این ریاضی‌دان یا رقیب او، به پرسش مربوط، پاسخ مثبت می‌دهد.

۸.۶۹. پاسخ.  $64$  برابر.

۹.۶۹. سمت چپ برابری، به این صورت قابل تبدیل است:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right] + \left[ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right] + \dots + \left[ \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x+10} \right] &= \\ \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+10} \right] + \left[ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+9} \right] + \dots + \left[ \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x+1} \right] &= \\ = 11 \left[ \frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right] \end{aligned}$$

۱۰.۶۹. از نقطه‌ای که گرگ ایستاده است، دو خط راست، موازی با قطرهای مربع رسم می‌کنیم. برای این‌که، گرگ نتواند فرار کند، سگ‌ها باید در نقطه‌های برخورد این خط‌های راست با ضلع‌ها، مستقر شوند. به سادگی دیده می‌شود که، در این حالت، کافی است سرعت سگ‌ها از  $\sqrt{2}$  برابر سرعت گرگ کمتر نباشد.

۱۱.۶۹. بله، می‌تواند. نقطه‌های  $P$  و  $Q$  را در درون مربع  $ABCD$  طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث‌های  $ABP$  و  $CDQ$ ، متساوی‌الساقین باشند و، در آن‌ها، هرکدام از زاویه‌های  $P$  و  $Q$  برابر  $120^\circ$  درجه شود. در این صورت، دستگاه جاده‌های،  $AP$  و  $DQ$ ،  $PQ$ ،  $BP$ ،  $CQ$  و  $CD$ ، به تقریب، طولی برابر  $27$  کیلومتر و  $321$  متر خواهد داشت.

۱۳.۶۹. نقطه  $X$  را روی پاره خط راست  $AD$ ، طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست  $BX$  موازی خط راست  $CD$  باشد. اکنون، اگر  $p(T)$  را

به معنای محیط مثلث  $T$  بگیریم، روشن است که

$$p(ABX) = p(BCX)$$

از طرف دیگر، بنابراین فرض داریم:

$$p(ABE) = p(BCE)$$

بنابراین

$$p(ABX) - p(BCX) = |XE| \pm ||CE| - |CX||$$

و با توجه به نابرابری مثلثی معلوم می‌شود که این تفاضل محیط‌ها، از  $|XE| - |XE| = 0$  بیشتر است. تناقض حاصل، به این معناست که  $E = X$ . به همین ترتیب  $CX$  موازی  $AB$  می‌شود. بنابراین، نقطه وسط ضلع  $AD$  است و  $|AE| = |BC|$

۱۵.۶۹. پاسخ. ۱۰ شهر.

۱۸.۶۹. باید جایی در دنباله، به  $abcd$  و  $abcd$  برخورد کنیم که، در آنها،  $abcd$ ، چهار رقم متولی دنباله‌اند. یعنی سه بار با چهار رقم متولی  $abcd$  برخورد می‌کنیم. چون قبل از آن تنها رقم‌های ۰ یا ۱ می‌توانند باشد، باید دنباله ما با  $abcd$  آغاز شود تا ۵ رقم متولی تکراری نداشته باشیم.

۲۰.۶۹. پاسخ. ۶۷۵۰ بليت. راهنمائي. باید رقم دوم عدد، با رقم پنجم آن برابر باشد.

۲۱.۶۹. در واقع

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} + \frac{m}{n}} > \frac{2n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}n}$$

$$(x_{n-1} \equiv -a(\text{mod } x_n)) \Rightarrow (x_{n+l} \equiv ax_l(\text{mod } x_n))$$

بنابراین  $x_{2n}$  بر  $x_n$  بخش پذیر است.

۲۴.۶۹ . مهمنان را از ۰ تا ۵۹ شماره‌گذاری می‌کنیم و آن‌ها را، در روز اول، به این ردیف می‌نشانیم (با آغاز از مدیر و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت):

$$\begin{aligned} & 0, \quad 0-1, \quad 0-1+2, \quad 0-1+2-3, \quad \dots \\ & \dots, \quad 0-1+2-3+\dots+58-59(\text{mod } 60) \end{aligned}$$

که در آن،  $(\text{mod } 60)$ ، به معنای باقی‌مانده حاصل از تقسیم بر ۶۰ است. در روز  $(1+k)$ ام، می‌توان آن‌ها را به این ردیف نشاند:

$$k, k-1, k-1+2, \dots, k-1+2-3+\dots+58-59(\text{mod } 60)$$

۲۵.۶۹ . بردارهای  $\vec{d}$ ،  $\vec{c}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{A}\vec{D}$ ،  $\vec{A}\vec{C}$ ،  $\vec{A}\vec{B}$  را، به ترتیب، و می‌نامیم. شرط عمود بودن  $\vec{B}\vec{D}$  و  $\vec{A}\vec{B}$ ، با برابری  $\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{d}$  (ضرب اسکالر) داده می‌شود. اگر شعاع برداری نقطه  $O$  را با  $\vec{r}$  نشان دهیم، آنوقت برابری موردنظر، به این صورت در می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left( \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{d} \right)^2 + \left( \vec{r} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right)^2 = \\ & = \left( \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{c} \right)^2 + \left( \vec{r} - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

که بعد از ساده شدن، به برابری روشن  $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d}$  می‌رسد.

۲۸.۶۹. راه حل مساله ۲۳.۶۹ را بینید.

۲۹.۶۹. پشت سرهم و، به کمک  $n$  عدد، دنباله‌ای می‌سازیم، بهنحوی که بعد از  $n$  گام، بین تفاضل‌های جمله‌های آن، عددهای  $1, 2, \dots, n$  و از هر کدام تنها یک بار و، همچین، بعضی عددهای طبیعی دیگر، بدون تکرار، وجود داشته باشد. در گام اول ۱ و ۲ را انتخاب می‌کنیم، در  $(1+n)$  امین گام، توجه می‌کنیم، کوچکترین عدد طبیعی  $X$ ، که در بین  $n+X$  تفاضل‌های جمله‌ها وجود ندارد، کدام است! آنوقت، عددهای  $n$  و  $n+X$  را انتخاب می‌کنیم. بهنحوی که  $n > 2m$ ، بزرگترین عددی است که، پیش از آن انتخاب کرده‌ایم). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، به دنباله‌ای می‌رسیم که با شرط‌های مساله، سازگار است.

۳۰.۶۹. اگر مساحت‌های مثلث‌ها را بر حسب  $a, b$  و  $c$  و زاویه‌های  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  (به ترتیب  $\widehat{ACB}, \widehat{BAC}$ ، و  $\widehat{ABC}$ ) بیان کنیم، بخش سمت چپ برابری، به این صورت در می‌آید:

$$\frac{1}{2}abc \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (a \cos \beta \cos \gamma + b \cos \alpha \cos \gamma + c \cos \alpha \cos \beta)$$

و سمت راست برابری، به صورت

$$\frac{(abc)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{4S}$$

زیرا  $R = \frac{abc}{4S}$ . بعد از ساده کردن، به این نتیجه می‌رسیم که باید این برابری را ثابت کرد:

$$a \cos \beta \cos \gamma + b \cos \alpha \cos \gamma + c \cos \alpha \cos \beta = 2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

چون

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma$$

نابرابری اخیر، با نابرابری زیر هم ارز می شود:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

که درستی آن روشن است.

۳۲.۶۹. پاسخ. دست کم ۱۰ نفر.

۳۳.۶۹ می گیریم. در این صورت، به این نابرابری می رسیم:

$$\sum_{i < j} \frac{1}{x_i + x_j} \leq \frac{n-1}{4}$$

و اگر از نابرابری  $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ، که برای هر دو عدد مثبت  $x$  و  $y$  درست است، استفاده کنیم:

$$\sum_{i < j} \frac{1}{x_i + x_j} \leq \frac{1}{4} \sum_{i < j} \left( \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j} \right) = \frac{n-1}{4} \sum_i \frac{1}{x_i} = \frac{n-1}{4}$$

۳۴.۶۹. فرض می کنیم، چنین مثلثی وجود نداشته باشد. دو نقطه  $A$  و  $B$  را از یک رنگ (و مثلاً، رنگ اول) و به فاصله  $d$  از یکدیگر، درنظر می گیریم. دو خط راست  $l_1$  و  $l_2$  را موازی با خط راست  $AB$  و به فاصله  $\frac{d}{2}$  از آن، رسم می کنیم. بنابراین فرضی که کردیم، روی این دو خط راست، نمی توان نقطه ای با رنگ اول پیدا کرد. ثابت می کنیم، می توان روی صفحه، خط راستی از یک رنگ پیدا کرد. اگر  $l_1$  و  $l_2$ ، از این گونه نباشند، آنوقت، نقطه هایی از آنها، که به فاصله  $\frac{d}{3}$  از یکدیگر باشند، باید رنگ های مختلف داشته باشند و، بنابراین، نقطه های به فاصله  $d$  از یکدیگر، هم رنگ باشند. ولی در این صورت، روی خط راست  $AB$  نباید نقطه هایی به رنگ دوم یا سوم پیدا شود، یعنی این خط راست، یک رنگ است. به این ترتیب، خط راست

یک رنگی (و مثلاً، رنگ اول) وجود دارد (خط راست  $\ell$ ). روش است که روی صفحه، نمی‌تواند نقطه‌های دیگری با رنگ اول پیدا شود. دو نقطه  $X$  و  $Y$ ، با یکی از دو رنگ طوری انتخاب می‌کنیم که  $XY$  موازی  $\ell$  باشد. شبیه استدلال قبل، می‌توانیم خط راست  $m$  را موازی  $XY$  و  $\ell$  که دارای یک رنگ (و مثلاً رنگ دوم) است، به دست آوریم. در این صورت، تمامی بقیه صفحه، دارای رنگ سوم خواهد بود و پیدا کردن مثلثی با مساحت واحد که راس‌هایش رنگ سوم را داشته باشند، دشوار نیست.

۳۷.۶۹  $x_0$  را عددی درست می‌گیریم، به نحوی که

$$y_1 = |F_1(x_0)| > 1, \dots, y_n = |F_n(x_0)| > 1$$

اکنون، عدد  $a = x_0 + ky_1y_2\dots y_n$  را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم به ازای هر دو عدد درست  $p$  و  $q$  و به شرط درست بودن ضریب‌ها در چند جمله‌ای  $F(x)$ ، همیشه  $F(p) - F(q)$  بر  $p - q$  بخش‌پذیر است. بنابراین  $(x_0) - F_1(a)$  بر  $y_1y_2\dots y_n$  بخش‌پذیر خواهد بود، یعنی  $F_1(a)$  بر  $y_1$  بخش‌پذیر است. به همین ترتیب،  $F_2(a)$  بر  $y_2$ ،  $F_3(a)$  بر  $y_3$  و غیره بخش‌پذیر است.  $k$  را به قدر کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم، به نحوی که  $(a) F_i(a)$  بیشتر از بزرگترین عدد، از بین عدهای  $y_1, y_2, \dots, y_n$  باشد، آنوقت مقدار لازم  $a$  به دست می‌آید.

۳۸.۶۹ اگر  $x_k > n^2$ ، آنوقت

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-1}}}{x_k} < \frac{\sqrt{x_k}}{x_k} = \frac{1}{\sqrt{x_k}} < \frac{1}{n}$$

یعنی مجموع جمله‌های متناظر، از واحد تجاوز نمی‌کند. در حالتی هم که داشته باشیم  $x_k \leq n^2$ ، داریم:

$$\frac{\sqrt{x_k - x_{k-1}}}{x_k} \leq \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \leq \frac{1}{x_{k-1} + 1} + \dots + \frac{1}{x_k}$$

اگر همه این گونه نابرابری‌ها را با هم جمع کنیم، معلوم می‌شود که مجموع از  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^r}$  بزرگتر نیست، اگر به دو طرف، یک واحد اضافه کنیم، نابرابری موردنظر به دست می‌آید.

۱۰. چون

$$123456789 \times 8 = 987654312$$

پس تنها زوج عددی که با شرط مساله سازگار است، همین دو عدد است. عدد کوچکتر را به هر صورتی بزرگتر کنیم، ۸ برابر آن، از عدد

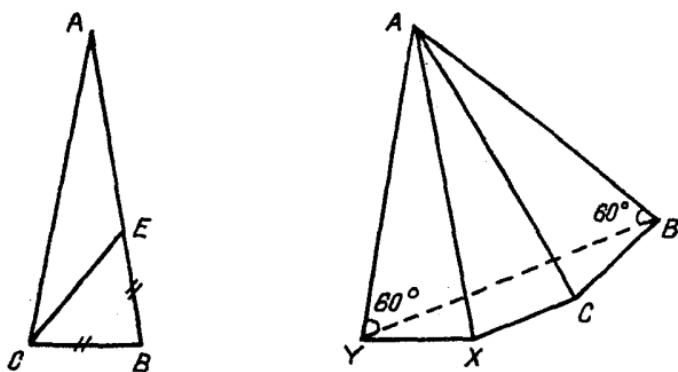
$$987654321$$

بزرگتر می‌شود.

۲۰. طول ضلع‌ها، برابرند با ۲، ۳ و ۴.

۳۰. نه، ممکن نیست. در واقع، در هر تعویض، سه سکه، رد و بدل می‌شود. بنابراین، تعداد سکه‌هایی که در تعویض شرکت دارند، باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اگر هر نفر ۱۰ سکه داده باشد، به معنای آن است که، روی هم، ۱۹۷۰۰ سکه رد و بدل شده‌است. ولی این عدد بخش‌پذیر بر ۳ نیست.

۵۰. تعداد شهرهای این کشور را  $n$  می‌گیریم و استدلال را براساس استقرا، روی  $n$ ، انجام می‌دهیم. درستی حکم، برای  $2 = n$  روشن است. فرض می‌کنیم، حکم مساله برای  $n$  شهر برقرار باشد. اکنون تعداد شهرها را  $1 + n$  می‌گیریم. وضع ارتباطی را بین  $n$  شهر، با کنار گذاشتن شهری مثل  $A$ ، درنظر می‌گیریم. اگر شهر  $A$ ، دستکم با یکی از شهرهای دیگر، با همان وسیله ارتباطی آن‌ها، مربوط باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ولی اگر شهر  $A$ ، با همه شهرهای دیگر، با وسیله ارتباطی دوم مربوط باشد،



شکل ۳۶

آنوقت روشن است که با همین وسیله ارتباطی، همه  $1 + n$  شهر به هم مربوطاند.

۶.۷۰. فرض می‌کنیم این طور نباشد و، برای هر سه تیم  $A$ ،  $B$  و  $C$  بدانیم، اگر  $A$  از  $B$  و  $C$  بردۀ باشد، آنوقت  $A$  هم در بازی بین  $A$  و  $C$ ، برنده باشد. ولی در این صورت، روشن است، تیم  $X$ ، که برنده مسابقه است، باید از همه تیم‌ها بردۀ باشد. سپس، تیم  $Y$ ، که مقام دوم را در مسابقه به دست آورده است، باید از همه تیم‌ها، به جز  $X$ ، بردۀ باشد و غیره. به این ترتیب، تیم برنده مسابقه، ۱۱ امتیاز، تیم دوم ۱۰ امتیاز، ...، تیم پنجم درست ۷ امتیاز باید داشته باشد که با فرض مساله، متناقض است.

۷.۷۰. پاسخ، مقدار زاویه  $B$ ، برابر  $30^\circ$  درجه است.

۹.۷۰. روی ساق  $AB$ ، پاره خط راست  $BE$  را با طولی برابر طول قاعده  $BC$  جدا می‌کنیم (شکل ۳۶). بنابراین

$$\widehat{CEB} = \widehat{ECB} = 50^\circ; \widehat{ACE} = 30^\circ$$

چون در هر مثلث، ضلع رویه روی زاویه بزرگتر، طول بیشتری دارد، پس

$|CE| > |CB|$  و  $|AE| > |CE|$ . از آن‌جا

$$|AB| = |AE| + |BE| > 2|CB|$$

برای اثبات بخش دوم مساله، سه نمونه مثلث را شیوه شکل (شکل سمت راست) پهلوی هم می‌گذاریم. از آن‌جا که طول خط شکسته  $BCXY$ ، بزرگتر است از طول پاره‌خط راست  $BY$ ، نابرابری مطلوب به دست می‌آید.  
۱۱.۷۰ اگر  $x^2 - 2y - 1 = 0$  را در معادله دوم دستگاه قرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$y^4 + 4y^2 - 4y - 1 = 0$$

سمت چپ این معادله قابل تجزیه است:

$$(y - 1)(y^3 + y^2 + 5y + 1) = 0 \quad (*)$$

ولی چون  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  و، بنابراین، پرانتر دوم در برابری  $(*)$  نمی‌تواند برابر صفر شود.  
پاسخ.  $y = 1, x = \pm 1$ .

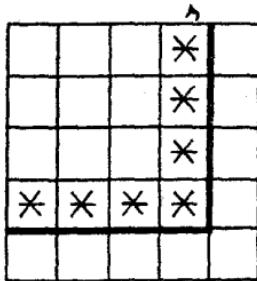
۱۳.۷۰ نقطه‌های دیگر تماس را، واقع بر ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  به ترتیب  $D$  و  $E$  می‌نامیم. نقطه دوم برخورد دایره‌های اول و دوم را با پاره‌خط راست، به ترتیب،  $X$  و  $Y$  می‌گیریم. در این صورت، بنابر ویژگی خط راستی که دایره را قطع می‌کند، داریم:

$$|CX| \cdot |CA| = |CE|^2;$$

$$|AY| \cdot |AC| = |AD|^2$$

ولی چون  $|CE| = |AD|$ ، بنابراین به دست می‌آید:

$$|CX| = |AY| \Rightarrow |AX| = |CY|$$



شکل ۳۷

.۱۴.۷۰ پاسخ.  $x = 4, y = 2, z = 1$

.۱۵.۷۰ پاسخ. طول هریک از دو بخش پاره خط راست، برابر  $\frac{1}{2}$

است.

.۱۶.۷۰ فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد. ستون سمت راست و سطر پایین را درنظر می‌گیریم. بدیهی است که باید، دست‌کم هشت خانه آن‌ها رنگ شده باشد (و البته، نه هر ۹ خانه) و، درنتیجه، باید خانه‌هایی از جدول، که در شکل ۳۷ با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم، بدون رنگ بمانند. درنتیجه، در مربع  $3 \times 3$  گوشی چپ و بالای جدول، باید ۸ خانه رنگی داشته باشیم، و این، به معنای آن است که در آن‌جا مربع  $2 \times 2$  با سه خانه یا چهار خانه رنگی وجود دارد.

.۱۸.۷۰ راهنمایی. ثابت کنید، برای هر طرحی از این‌گونه، نابرابری  $6 - 3y \leq x$  برقرار است که، در آن،  $x$  تعداد پاره خط‌های راست، و  $y$  تعداد نقطه‌های است.

.۲۱.۷۰ پاسخ. طول هر دو پاره خط راست، برابر  $\frac{1}{3}$  است.

.۲۳.۷۰ پاسخ.  $t = 4, x = 2, y = 3, z = 1$

.۲۴.۷۰ حل مساله ۳۰.۷۰ را بیینید.

.۲۶.۷۰ ۱.  $x = \sin y$  و  $y = \cos x$  می‌گیریم. در این صورت، باید این

نابرابری را ثابت کرد:

$$2xy + 1 - 2x^2 + 2(x - y) \geq 1$$

که به این صورت قابل تبدیل است:

$$(x - 1)(y - x) \geq 0$$

و این نابرابری برقرار است، زیرا  $1 < x$  و  $y < x$ .

۲۹.۷۰. با حل دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \\ f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{x-1} \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 1-x \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x(1-x)}$$

به دست می‌آید: ۳۰.۷۰. کافی است ثابت کنیم، از سطر دوم به بعد، هیچ‌کدام از عددها در جای قبلی خودشان نیستند، یعنی ردیف عددها در هر سطر، با ردیف عددها در سطرهای قبل از آن، فرق دارد. روشن است که، ضمن انتقال یک عدد از سطحی به سطح بعد، شماره آن، به اندازه یکی از عددهای  $m - k$ ،  $n - k$ ،  $m - n$  اضافه می‌شود. فرض می‌کنیم، بعد از چند گام، عدد مفروض،  $a$  مرتبه در گروه سمت چپ،  $b$  مرتبه در گروه میانی و  $c$  مرتبه در گروه سمت راست قرار گیرد. در این صورت، این عدد، به اندازه

$$x = a(n - k) + b(m - k) + c(m - n)$$

خانه، به سمت راست حرکت کرده است. اگر قرار باشد، به خانه‌ای در همان ردیف قبلی قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$x = 0; 0 \leq a \leq k, 0 \leq b \leq n - m - k, 0 \leq c \leq m$$

اکنون، به سادگی قابل تحقیق است که، هر بردار  $(a, b, c)$  که جوابی از معادله  $x = 0$  باشد، ترکیبی خطی و صحیح از بردارهای

$$\vec{v}_1 = (0, n-m, m-k) \text{ و } \vec{v}_2 = (1, -1, 1)$$

خواهد بود، تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، بردار

$$y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2$$

$y_1$  و  $y_2$ ، عدهای درست‌اند)، نمی‌تواند مختصات درستی که در نامعادله‌های قبلی صدق کند، داشته باشد.

۳۱.۷۵. فرض می‌کنیم، بهازای هر  $k$  داشته باشیم:

$$t_k(t_{k+1} + 1) < 2$$

اگر همه این گونه نابرابری‌ها را در هم ضرب کنیم، بدست می‌آید:

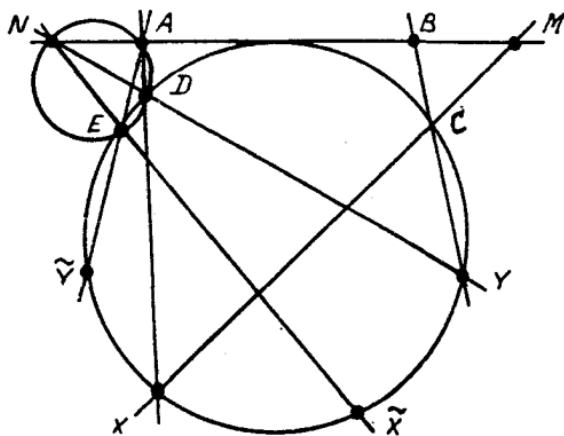
$$(t_1 + 1)(t_2 + 1) \dots (t_n + 1) < 2^n$$

ولی چون نابرابری  $t \geq 2\sqrt{t} + 1$  برای هر عدد مثبت  $t$  برقرار است، بنابراین

$$(t_1 + 1)(t_2 + 1) \dots (t_n + 1) \geq 2^n \sqrt{t_1 t_2 \dots t_n} = 2^n$$

می‌بینیم که به تناقض رسیدیم.

۳۳.۷۵. بین عدهای  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ، یا عددی وجود دارد که بر  $m$  بخش‌پذیر است و یا، اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، دو عدد پیدا می‌شود که در تقسیم بر  $m$ ، به یک باقی‌مانده می‌رسند. از آنجا که  $a_m < 2m$ ، بنابراین،  $a_k$  (یا  $a_k - a_l$ )، وقتی بر  $m$  بخش‌پذیر باشد، بمناچار باید برابر  $m$  باشد.



شکل ۳۸

۳۴.۷۰ دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که از نقطه‌های  $A$ ،  $D$  و  $N$  می‌گذرد. این دایره، دایرة مفروض را در نقطه دوم  $E$  قطع می‌کند. خط راست  $NE$ ، دایرة اصلی را در نقطه  $\tilde{X}$  و خط راست  $AX$  همان دایره را در نقطه  $ODE$  قطع می‌کند (شکل ۳۸). با توجه به زاویه‌های محاطی، مثلث‌های  $ODE$  و  $ONA$ ؛ همچنین مثلث‌های  $O\tilde{X}X$  و  $ODE$  مشابه‌اند.

درنتیجه، دو مثلث  $ONA$  و  $O\tilde{X}X$  مشابه می‌شوند، یعنی خط‌های راست  $NA$  و  $\tilde{X}X$  موازی‌اند.

خط راست  $AE$  را امتداد می‌دهیم تا دایرة اصلی را در  $\tilde{Y}$  قطع کند. شبیه استدلال بالا، به این نتیجه می‌رسیم که  $NA$  با  $\tilde{YY}'$  موازی است. بنابراین، خط‌های راست  $A\tilde{Y}$  و  $BY$ ، نسبت به قطر دایره قرینه یکدیگر و بر خط راست  $AB$  عمودند. به این ترتیب، نقطه‌های  $C$  و  $E$  قرینه یکدیگرند؛ سپس، خط‌های راست  $CX$  و  $E\tilde{X}$  قرینه هم و، درنتیجه، نقطه‌های  $N$  و  $M$  قرینه یکدیگرند.

۳۶.۷۰ با استفاده از عمل‌های مربوط به حل مساله ۳۷.۷۰ (مساله بعد)، روی مستطیل با اندازه‌های  $a \times b$  ( $a > b$ )، ما را به مستطیل با

اندازه‌های  $b - a$  می‌رساند. ثابت کنید، دیر یا زود، یا یک مربع و یا یک مستطیل «نه» بددست می‌آید.

۳۷.۷۰. راهنمائی. فرض می‌کنیم، مجموع عددها در مستطیلی برابر  $a + 4$  باشد. چهار مربع را درنظر می‌گیریم، بهنحوی که سه ضلع هر مربع، روی سه ضلع مستطیل واقع باشد. ضلع‌های چهارم آن‌ها، یک مستطیل جدید را محصور می‌کند. ارزیابی ساده‌ای نشان می‌دهد که، مجموع عددها در آن‌ها، از لحاظ قدر مطلق، از  $3a + 4$  کمتر نیست. بنابراین، اگر مستطیل اولیه را با حداکثر مجموع عددها درنظر بگیریم، بمناچار به نتیجه  $< a$  می‌رسیم؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱.۷۱. نقطه برخورد ایوانووا با ایوانوسکی، به شهر  $A$  نزدیک‌تر است.

۲.۷۱. پاسخ. در مثلث متساوی‌الاضلاع.

۳.۷۱. راهنمائی. روی هم  $4^{\circ}$  امتیاز گرفته‌اند. بنابراین  $40 = Sn$ ، که در آن،  $S$  مجموع امتیاز‌های یک امتحان و  $n$  تعداد امتحان‌هاست. در ضمن  $6 \geq S$ ، یعنی  $S$  برابر  $8, 10$  یا  $20$  است. چون زنیا در جبر رتبه اول را به دست آورده است، پس تعداد امتحان‌ها، بیش از  $2$  بوده، در غیر این صورت، باید  $22$  از  $2 \times 9$ ، یعنی  $18$  کمتر باشد. سپس به‌سادگی و با آزمایش معلوم می‌شود که

$$n = 5, S = 8 = 5 + 2 + 1$$

و نفر دوم در فیزیک، کولیا بوده‌است.

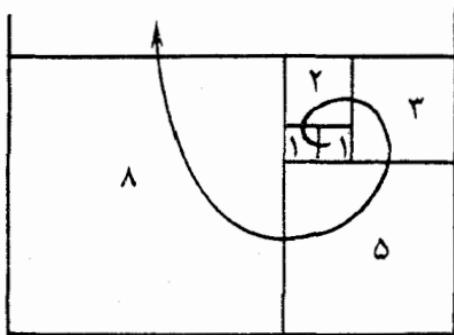
۴.۷۱. پاسخ.  $18$ .

۶.۷۱. بله، می‌توا. شکل ۳۹ را ببینید.

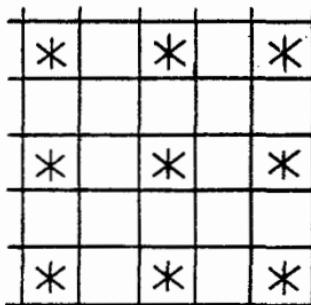
۷.۷۱. پاسخ.  $-2 = x, -12 = y$ .

۸.۷۱. پاسخ. مثلث متساوی‌الاضلاع.

۹.۷۱. دورانی به زاویه  $90^{\circ}$  درجه را درنظر می‌گیریم که مربع را به خودش تبدیل کند. دراین صورت، خط‌های راست  $AK$ ،  $BK$ ،  $CK$  و



شکل ۳۹



شکل ۴۰

$DK$  درست روی عمودهایی قرار می‌گیرند که رسم کرده‌بودیم. در نتیجه، نقطه  $K$  به نقطه مشترک این عمودها می‌رود.

۱۲.۷۱. فرض می‌کنیم، مستطیل را، به مربع‌های واحد تقسیم کرده باشیم و به برخی از آن‌ها، آن‌طور که در شکل ۴۰ نشان داده شده است، توجه می‌کنیم. در این صورت، هر قطعه  $2 \times 2$ ، درست یکی از مربع‌هایی را که نشان گذاشته‌ایم می‌پوشاند، ولی هر قطعه  $4 \times 4$  یا دو مربع نشان‌دار را می‌پوشاند و یا مربع نشان‌داری را نمی‌پوشاند، یعنی برای این‌که قطعه‌های  $2 \times 2$  تعویض شود، باید برای هر قطعه  $2 \times 2$ ، دو قطعه  $4 \times 1$  متناظر باشد، درحالی که با تبدیل یک قطعه  $2 \times 2$  با یک قطعه  $4 \times 1$ ، یک خانه نشان‌دار با ۰ یا ۲ خانه نشان‌دار عوض می‌شود که ممکن نیست.

۱۴.۷۱. پاسخ. ۱۹۷۲ رقم، زیرا حاصل ضرب این دو عدد برابر است  
با  $10^{1971}$ .

۱۵.۷۱. پاسخ. ۴۹۵۱. از این مطلب استفاده کنید که: از هر دو حلقه‌ای که یکی دیگری را تکمیل می‌کند (یعنی روی هم شامل ۱۰۰ عدد باشند)، یکی از آن‌ها، مجموعی مشتث دارد.

۱۶.۷۱. بله، کسی که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود. برای این منظور باید هر بار، توده‌ای از چوب کبریت‌ها را که تعدادشان زوج است، به دو بخش طوری تقسیم کند که، در هر بخش، تعداد چوب کبریت‌ها فرد باشد.

۱۸.۷۱. نقطه  $E$  را روی ضلع  $BC$  طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:  $|BE| = |ED|$ . در این صورت، خطهای راست  $AB$  و موازی و مثلث‌های  $DEC$  و  $ABC$  متشابه می‌شوند، یعنی

$$|BE| = |ED| = 6$$

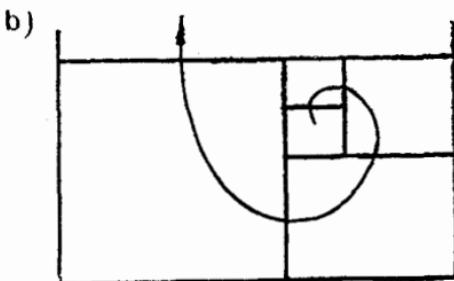
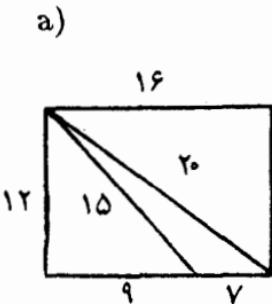
بنابراین، طبق نابرابری مثلثی

$$|BD| < |BE| + |ED| = 12$$

۱۹.۷۱. پاسخ. روی هم ۲۰۲ جواب وجود دارد: رشته اصلی جواب:  $x_0 = 0$ ،  $x_i = \pm \frac{1}{2}$  (روی هم ۲۰۰ جواب).  
یک جواب دیگر: همه  $x_i$ ها برابر  $0$ ; جواب آخر:  $x_0 = 1$ ،  $x_i = 0$  (برای  $i > 0$ ).

۲۱.۷۱. فرض می‌کنیم  $n^2 - 4ac = b^2$ . در این صورت داریم:

$$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b + n)(2ax + b - n)$$



شکل ۴۱

از اینجا با فرض  $x = 10$ ، معلوم می‌شود که عدد

$$20a + b - n \text{ یا } 20a + b + n$$

بر عدد اول  $\overline{abc}$  بخش‌پذیر است. ولی در این صورت

$$20a + b + n > 100a + 10b + c$$

که ممکن نیست، زیرا  $b < n$ .

۲۲.۷۱. پاسخ. برای اینکه آغاز کننده بازی نتواند برنده شود، باید در هر دو توده، تعداد فردی چوب کبریت وجود داشته باشد.

۲۴.۷۱. پاسخ. بله، می‌توان. راهنمائی. مستطیل  $16 \times 12$  را در شکل ۴۱ در نظر بگیرید که به مثلث‌هایی تقسیم شده است. با این گونه مستطیل‌ها، می‌توان صفحه را پوشاند (شکل ۴۱-b). همه این مستطیل‌ها به همان ترتیب قابل تقسیم‌اند. تحقیق کنید، مثلث‌هایی که به این طریق به دست می‌آیند، دو به دو با هم اختلاف دارند.

۲۷.۷۱. راهنمائی. از بیان برداری حرکت یکنواخت استفاده کنید.

۲۸.۷۱. اگر مقدار سمت چپ نابرابری فرض را  $x$  بگیریم، داریم:

$$2x \leq x + \sum_{k=1}^{200} \frac{1}{2^{200-k}} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{2}{201}$$

$$\begin{aligned}
 x &\leq \frac{2}{201} + \sum_{k=1}^{200} \frac{1}{2^{200-k}} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \\
 &= \frac{2}{201} + \sum_{k=1}^{180} + \sum_{k=181}^{200} \leq \frac{2}{201} + \left( \frac{1}{2^{199}} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \right) + \\
 &+ \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \right) \cdot \frac{1}{180} \times 181 \leq \\
 &\leq \frac{2}{20} + \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{90} \times 18 < \frac{1}{90}
 \end{aligned}$$

۳۰.۷۱. همه نقطه‌های برخورد خط‌های راست را، همراه با نقطه  $P$  در درون دایره‌ای قرار می‌دهیم. فرض کنید، شعاع این دایره، برابر  $R$  باشد. اکنون، عدد  $1 < t$  را طوری انتخاب می‌کنیم که، کسینوس همه زاویه‌های بین خط‌های راست، کوچکتر از  $t$  باشند. در این صورت، همه نقطه‌هایی که در صورت مساله از آن‌ها یاد شده‌است، نمی‌توانند در بیرون دایره‌ای به همان مرکز  $O$  و به شعاع برابر  $\frac{2R}{1-t}$  قرار گیرند. درواقع، اگر نقطه  $A$  روی خط راست  $l$  باشد و آن را روی خط راست  $m$  تصویر کنیم، نقطه‌ای مثل  $B$  روی  $m$  به دست می‌آید. در ضمن، خط‌های راست  $l$  و  $m$ ، در نقطه‌ای مثل  $K$  بهم می‌رسند که در درون دایره نخستین به شعاع  $R$  است؛ یعنی

$$|BK| < t \cdot |AK|$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 |BO| &< R + |BK| < R + t \cdot |AK| < R + \\
 &+ t(|AO| + R) < 2R + t|AO| < \frac{2R}{1-t}
 \end{aligned}$$

نابرابری اخیر، نتیجه‌ای است از نابرابری  $|AO| < \frac{2R}{1-t}$ .  
 ۳۱.۷۱. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^n + a_1 x^{n-1} = a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

دو طرف را بر  $x^{n-1}$  تقسیم می‌کنیم:

$$x + a_1 = \frac{a_2}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^{n-1}}$$

در سمت چپ این برابری، با تابعی یکنوا و صعودی و در سمت راست آن، روی نیم محور مثبت، با تابعی یکنوا و نزولی سروکار داریم، بنابراین، معادله، بیش از یک ریشه مثبت نمی‌تواند داشته باشد.

۳۴.۷۱. راهنمائی. گوییم، اندیس  $p$ ، برتر از اندیس  $q$  است، وقتی که

مجموع

$$b_p + b_{p+1} + \dots + b_{q-1}$$

عددی مثبت باشد. روشن است که، برای هر دو اندیس  $p$  و  $q$ ، یا  $p$  برتر از  $q$  و یا  $q$  برتر از  $p$  است؛ در ضمن ممکن نیست هم  $p$  برتر از  $q$  و هم  $q$  برتر از  $p$  باشد، همچنین به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، برای هر سه اندیس  $p$  و  $q$  و  $r$ ، ویژگی زیر وجود دارد: اگر  $p$  برتر از  $q$  و  $q$  برتر از  $r$  باشد، آنوقت  $p$  برتر از  $r$  است. تنها این می‌ماند، توجه کنیم، عدد  $N$  که در صورت مساله از آن یاد شده است، چیزی جز مقدار اندیس‌هایی نیست که اندیس  $k$  برتر از آن هاست. بنابراین، برای هر دو اندیس  $p$  و  $q$ ، اگر  $p$  برتر از  $q$  باشد، آنوقت  $N_p > N_q$ .

۳۶.۷۱. استقرای روی  $n$ . مجموعه  $X$  شامل  $n$  راس را انتخاب می‌کنیم که با یال‌های (مثلاً با رنگ اول) به هم مربوطاند. اکنون یکی از آن‌ها

را کنار می‌گذاریم و از بین بقیه راس‌ها، باز هم  $n$  راس انتخاب می‌کنیم که با یک رنگ به هم مربوط شده باشند (مجموعه  $Y$ ).

حالت اول. این رنگ، همان رنگ اول است. در این صورت، دو انتخاب از  $n$  راس، نباید متقاطع باشند و راس باقی‌مانده  $A$ ، به این  $2n$  راس تنها با یال‌های به رنگ‌های دوم و سوم، به هم مربوط‌اند. ولی در این صورت، تعداد یال‌های یکی از این دو رنگ، دست کم برابر با  $n$ ؛ و  $n$  راس متناظر، همراه با  $A$ ،  $1 + n$  راس موردنظر را تشکیل می‌دهند.

حالت دوم. رنگ اخیر، رنگ دوم (یا سوم) است. در این حالت، همه  $1 + 2n$  راس را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: دسته اول شامل سه راس که در یکی از دو مجموعه  $X$  یا  $Y$  باشند؛ دسته دوم، شامل بقیه راس‌ها. به‌سادگی دیده می‌شود، به‌جز حالت بی‌معنی که ممکن است پیش آید، هریک از این دسته‌ها به دو بخش چنان تقسیم می‌شود که، راس‌های بخش‌های مختلف دسته، تنها با یال‌های به رنگ سوم (و یا دوم) می‌توانند به هم مربوط شده باشند؛ در غیر این صورت، مجموعه شامل  $1 + n$  راس (که موردنظر ماست)، بلافضله ظاهر می‌شود. در یکی از این دسته‌ها، دست کم  $1 + n$  راس وجود دارد که تنها با یال‌های به رنگ سوم به هم مربوط‌اند: همان چیزی که لازم داریم.

۳۷.۷۱. برای هر عدد درست  $t$ ، این جواب را برای معادله داریم:

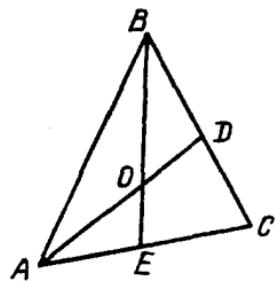
$$x = 1 + 6t^3, y = 1 - 6t^3, g = -6t^2$$

۱.۷۲. پاسخ. هواپیمای اول، زودتر پرواز خود را به پایان می‌رساند. از نابرابری مثلثی استفاده کنید.

۳.۷۲. پنج راس و مرکز یک پنج‌ضلعی منتظم.

۴.۷۲. پاسخ. عددی زوج.

۵.۷۲. حل مسأله ۱۳.۸۶ را به‌دققت بخوانید.



شکل ۴۲

۶.۷۲. نه، نمی‌شود. اگر عددهای واقع در راس‌ها برابر باشند، مجموع آن‌ها، باید مضربی از ۸ باشد. از طرف دیگر، مجموع این عددها (با توجه به این‌که، عدد هر یال دو بار به حساب می‌آید)، برابر است با  $11 \times 12$ .

۷.۲۲. نه، نمی‌توان. برای این‌که داشته باشیم:

$$S_{AOB} = S_{BOD} = S_{AOE}$$

باید داشته باشیم (شکل ۴۲) :

$$|AO| = |OD| \text{ و } |BO| = |DE|$$

ولی این به معنای آن است که، نقطه  $O$ ، باید نقطه وسط دو پاره خط راست  $AD$  و  $BE$  باشد، که ممکن نیست.

۹.۷۲. پاسخ. اگر  $|CD| = c$ ،  $|BC| = b$ ،  $|AB| = a$  و  $|DA| = d$

$$|MN| = \frac{1}{2}(b + c - a - d)$$

۱۲.۷۲. چون  $x^2 + y^2 = 2n$  (و  $x$  و  $y$ ، عددهایی درست‌اند)، پس  $x$  و  $y$ ، یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

۱۳.۷۲. چون چهارضلعی  $AKCM$ ، محاطی است، پس

$$\widehat{KAM} = 180^\circ - \widehat{MCD}$$

ولی چون  $\widehat{MAB} = 180^\circ - \widehat{KAM}$ ، بنابراین

$$\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$$

۱۶.۷۲. در ذهن خود منحنی‌هایی را درنظر می‌گیریم که تنها، آن دایره‌هایی را به هم وصل کرده باشند که به وسیلهٔ پاره خط‌های راست به هم وصل نشده‌اند. روی این منحنی‌ها، عددهای مختلف اول را می‌نویسیم و روی هر کدام، یک عدد. در هر دایره، حاصل ضرب همهٔ عددهای اول منحنی‌هایی را قرار می‌دهیم که این دایره را به دایره‌های دیگر وصل کرده‌است. این‌ها، همان عددهایی هستند که لازم داشتیم.

۱۷.۷۲. تابع  $f(x)$  را، بنابراین دستور، تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2\log_{\varphi}(1-x) + 2, & 0 \leq x \leq 2-\varphi \\ 0, & x > 2-\varphi \end{cases}$$

که در آن  $\frac{1}{\varphi}(1 + \sqrt{5}) = \varphi$ ، «عدد طلائی» است. در این صورت، یک نابرابری برقرار است: ضمن تقسیم مثلث به ضلع  $n$  و جدا کردن مثلث بالایی، تعداد مثلث‌ها، از  $2\log_{\varphi}n + f(x)$  کمتر نیست که، در آن،  $x = \frac{a}{n}$  و  $a$ ، برابر است با طول ضلع کوچکترین مثلث از مثلث‌هایی که شامل دو راس پایینی مثلث بزرگ هستند. نابرابری، با بریدن  $a$  نوار پایینی مثلث بزرگ و با استقرارا، به سادگی ثابت می‌شود.

چون  $14 > 2\log_{\varphi}32 > 2\log_{\varphi}32^7$ ، پس نابرابری مورد نظر مساله ثابت می‌شود.

۱۸.۷۲. داریم:

$$\begin{aligned}
 b &= b(kn - ml) = bkn - bml = \\
 &= bkn - anl + anl - bml = n(bk - al) + \\
 &+ l(an - bm) \geq n \times 1 + l \times 1 = n + l
 \end{aligned}$$

۴۰.۷۲ چون

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}} = \frac{|AD| \cdot \sin(\widehat{ADB})}{|CD| \cdot \sin(\widehat{CDB})}$$

و همچنین، از طرف دیگر

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}} = \frac{|AB| \cdot \sin(\widehat{ABD})}{|CB| \cdot \sin(\widehat{CBD})}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم:

$$\sin(\widehat{ADB}) : \sin(\widehat{ABD}) = \sin(\widehat{CDB}) : \sin(\widehat{CBD})$$

اگر از رابطه سینوس‌ها در مثلث‌های  $CBX$  و  $ABX$  استفاده کنیم ( $X$  نقطه برخورد مماس‌های بر دایره، در نقطه‌های  $A$  و  $B$ )، معلوم می‌شود که، این نسبت‌های سینوس‌ها، برابر است با

$$|BX| : |AX| \text{ و } |BX| : |CX|$$

(فرض کرده‌ایم، روی خط راست  $BD$ ، نقطه  $B$  بین نقطه‌های  $X$  و  $D$  باشد). چون  $|AX| = |CX|$ ، قضیه ثابت است.

$$\sqrt[n]{m+1} \leq 1 + \frac{m}{n} \quad .\quad ۴۳.۷۲$$

$$m+1 \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \quad \text{داریم:}$$

$$\text{به همین ترتیب } \sqrt[m]{n+1} \leq 1 + \frac{n}{m}. \text{ بنابراین}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geq \frac{1}{1 + \frac{m}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{n}{m}} = 1$$

۲۴.۷۲. روشن است که، از دنباله سوم به بعد، مقدار هر جمله، از عددی که این جمله زیر آن نوشته شده است، تجاوز نمی‌کند. چون دنباله غیرصعودی عددهای طبیعی، بهناچار در جایی، ثابت می‌ماند، درستی حکم مساله ثابت می‌شود: از لحظه‌ای مثل  $t_1$  به بعد، جمله اول دنباله تغییر نمی‌کند و تکرار می‌شود؛ از لحظه  $t_2$  به بعد، جمله دوم دنباله ثابت می‌ماند و غیره. بعد از لحظه  $t_n$  (که در آن،  $n$  برابر طول دنباله است)، بهناچار، خود دنباله، بدون تغییر، تکرار می‌شود.

۲۶.۷۲. خط شکسته‌ای می‌سازیم که همه زاویه‌های بین ضلع‌های مجاور آن، برابر  $90^\circ$  درجه باشد. اگر خط شکسته‌ای شامل  $n$  ضلع، با سه ضلع متواالی  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  (که بر یک صفحه واقع‌اند) ساخته شده باشد، خط شکسته با  $2 + n$  ضلع را به این ترتیب می‌سازیم: ضلع  $BC$  را حذف می‌کنیم و به جای آن، ضلع‌های  $BX$ ،  $XY$  و  $YC$  را اضافه می‌کنیم؛ در ضمن، ضلع‌های  $BX$  و  $YC$  را عمود بر صفحه  $ABC$  در نظر می‌گیریم. توجه کنیم: در خط شکسته جدید، ضلع‌های  $XY$ ،  $BX$  و  $YC$ ، روی یک صفحه‌اند، یعنی این ساختمان را می‌توان تکرار کرد. این باقی می‌ماند که خط‌های شکسته مشابهی برای  $n = 6$  و  $n = 7$  بسازیم که آن را به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

۲۷.۷۲. اگر  $1 = 3k + p$ ، آن‌وقت

$$4p^2 + 1 = (4k + 2)^2 + (4k + 1)^2 + (2k)^2$$

و اگر  $2 = 3k + p$ ، آنوقت

$$4p^2 + 1 = (4k+3)^2 + (4k+2)^2 + (2k+2)^2$$

۳۰.۷۲ مسابقه‌های انجام شده را روی یک طرح، به این ترتیب نشان می‌دهیم: هر تیم را به وسیله یک نقطه و هر بازی را به وسیله پاره خط راست جهت‌داری که دو تیم بازی‌کننده را به هم وصل می‌کند، نشان می‌دهیم (جهت پاره خط راست، از طرف تیم برنده به طرف تیم بازنده است). نقطه دلخواهی مثل  $A$  را در نظر می‌گیریم و پاره خط راست جهت‌داری، از آن به سمت نقطه‌ای مثل  $C$  و مثل  $B$  رسم می‌کنیم ( $A \rightarrow B$ ). سپس از  $B$  به سمت نقطه‌ای مثل  $C$  غیره. رسم را همیشه می‌توان، به این ترتیب انجام داد، زیرا بنا بر فرض مساله، تعداد پیکان‌هایی که به یک نقطه وارد شده، با تعداد پیکان‌های خارج شده از آن، برابر است. دیر یا زود، به نقطه‌ای می‌رسیم که قبلاً در آنجا بوده‌ایم که، درنتیجه، با دور بسته‌ای از پیکان‌ها مواجه می‌شویم که خودش را قطع نکرده‌است. جواب مساله، همان بازی‌های متناظر با این دور بسته است.

.۳۱.۷۲ ۲۰۱. پاسخ.

۳۳.۷۲ عدد  $99\dots99$  (۹۹ رقم) را با  $x$  نشان می‌دهیم. باید ثابت کنیم، عدد طبیعی  $n$  وجود دارد، به‌نحوی که

$$x \times 100^{100} + 100^{100} \leq n^2 < x \times 100^{100}$$

فرض می‌کنیم، چنین عدد طبیعی (یعنی  $n$ ) وجود نداشته باشد. در این صورت، عدد طبیعی  $k$  پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$k^2 < x \times 100^{100} + 100^{100} \quad (k+1)^2 \geq x \times 100^{100}$$

ولی در این صورت، باید داشته باشیم:

$$(k+1)^2 - k^2 > 100^{100} \Rightarrow 2k+1 > 100^{100} \Rightarrow k > \frac{100^{100}}{2}$$

که با فرض  $100^{100} < k^2$  ناسازگار است.

۳۵.۷۲. فرض می‌کنیم، این طور نباشد (برهان خلف). در این صورت، تعداد جمله‌های زوج در این دنباله، محدود است و روشن است که، هر عدد فرد دنباله از راه اضافه شدن یکی از این عددهای زوج به جمله دیگری از دنباله بدست می‌آید. بزرگترین عدد زوج دنباله را،  $m$  می‌نامیم. در این صورت، اگر  $n$  را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، آنوقت جمله  $n$ ام دنباله، نمی‌تواند بیشتر از  $m$ ، از جمله  $(1 - n)$ ام بزرگتر باشد. چون در مجموعه عددهای طبیعی، هر قدر جلو برویم، می‌توان  $m$  عدد مرکب پشت‌سرهم پیدا کرد، بنابراین، در این بخش از دنباله عددهای طبیعی، بهناچار، دست کم یکی از جمله‌های دنباله وجود دارد.

۳۶.۷۲. پاسخ. ۲۱. در واقع، برای هر راس می‌توان سه مختص، در رابطه با شماره‌هایی که به خط‌های راست موازی یکی از ضلع‌ها می‌دهیم، درنظر گرفت (شکل ۴۳ را بینید). روشن است که، مجموع سه مختص هر راس برابر است با ۳۰. چون برای هر دو راس موردنظر با مختص اول (همچنین دوم یا سوم)، باید مقدار مختص متفاوت باشد، بنابراین مجموع آنها از

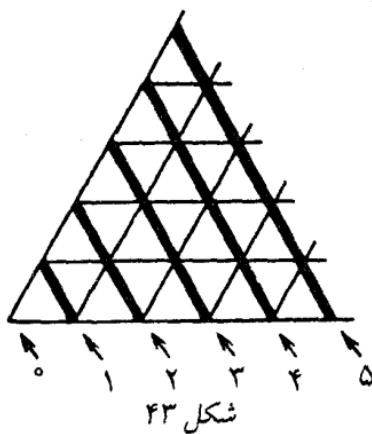
$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{3}n(n-1)$$

کمتر نیست؛ درنتیجه، مجموع همه مختصات این نقطه‌ها، از

$$\frac{3}{2}n(n-1)$$

کمتر نیست ( $n$ ، تعداد همه راس‌های موردنظر در تقسیم است). از طرف دیگر، این مجموع برابر است با ۳۰۷۲. بنابراین

$$3072 \geq \frac{3}{2}n(n-1) \Rightarrow n-1 \leq 20$$



شکل ۴۳

مثال مربوط به پاسخ ۲۱ را، به عنوان تمرین، به عهده خوانندگان می‌گذاریم.

۳۷.۷۲. برای اثبات، به پیش‌قضیه‌ای کم و بیش دشوار نیاز داریم که، به کمک استقرا، ثابت می‌شود.

پیش‌قضیه. هر دو ایستگاه مترو در این شهر، دست‌کم به موسیله ۱۰ مسیر غیرمتقطع به هم مربوط‌اند.

اکنون ایستگاه‌های  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم که، برای رفتن از  $A$  به  $B$ ، باید دست‌کم ۹۹ بار جا عوض کرد. فرض کنید:

$$A - X_1 - X_2 - \dots - X_{99} - B,$$

$$A - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{99} - B,$$

$$A - Z_1 - Z_2 - \dots - Z_{99} - B$$

۹ مسیر از این‌گونه پیدا می‌شود که، وجود آن‌ها، نتیجه‌ای از پیش‌قضیه است (این‌که، طول مسیر در این‌جا، درست برابر ۱۰۰ باشد، نقش اساسی ندارد). بقیه ۹۸۰ ایستگاه را، که داخل هیچ کدام از این مسیرها نیستند، در نظر می‌گیریم. از بین آن‌ها، یکی از ایستگاه‌ها را  $C$  می‌نامیم. این ایستگاه،

نمی‌تواند، در عین حال، هم به  $X_1$  و هم به  $X_{99}$  مربوط باشد. بنابراین،  $C$  با یکی از این ایستگاه‌ها، تشکیل گروهی را می‌دهد که، در آن، ایستگاه‌ها به هم مربوط نیستند. به این ترتیب، می‌توانیم به تعداد

$$97 \times 10 + 2 = 972$$

از این گونه زوج‌ها تشکیل دهیم. اگر هم، مثلاً، از  $X_k$ ، سه ایستگاه  $X_k$ ،  $X_{k+1}$  و  $X_{k+2}$  باقی بمانند، آنوقت  $X_k$  و  $X_{k+2}$ ، زوج لازم را تشکیل می‌دهند. ایستگاه‌های باقی مانده را، که تعداد آن‌ها برابر

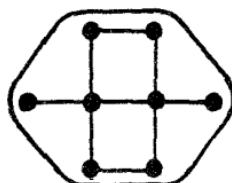
$$1972 - 2 \times 972 = 28$$

است، می‌توان همچون ۲۸ گروه جداگانه درنظر گرفت. به این ترتیب، ۱۰۰۰ گروه به دست می‌آید: ۹۷۲ زوج و ۲۸ ایستگاه جدا از هم، که با شرط مساله سازگارند.

۳۸.۷۲. چهارراه‌ها را به این ترتیب نام‌گذاری می‌کنیم: «چشم»، وقتی که تنها بتوان از آن خارج شد؛ «انبار» وقتی که نتوان از آن خارج شد؛ «روان»، وقتی که بتوان به آن وارد و از آن خارج شد. در این صورت، دو چهارراه یکسان نمی‌توانند در کنار هم قرار گیرند؛ این مطلب، برای «انبار» و «چشم» روشن است؛ برای چهارراه‌های «روان» هم، اگر دو تا در ردیف هم باشند، آنوقت مسیری به طول ۱۵۰۰ متر پیدا می‌شود که در طول آن، می‌توان بدون نقض قانون حرکت، جلو رفت، که البته مخالف فرض است.

اکنون به شکل ۴۴، که تنها هشت چهارراه دارد، توجه کنیم. آزمایش روشن می‌کند که، به ناچار، یکی از این هشت چهارراه «انبار» است. از خواننده می‌خواهیم، طرحی تهیه کند که، به کمک آن، بتوان نقشه شهر را با ۱۳۰۰ شکل مشابه شکل ۴۴، پوشاند، بدون این‌که روی هم قرار گیرند.

۱.۷۲. پاسخ. مغازه اول ۶۵۸، مغازه دوم ۶۱۵ و مغازه سوم ۷۰۰ کتاب درسی داشته است.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

۲۰.۷۳. پاسخ. چهار بار.

۳۰.۷۳. راهنمائی. بینید یک مجذور کامل، در تقسیم بر ۴، چه باقی

ماندهایی می‌دهد؟

۴۰.۷۳. راهنمائی. هر مربع را می‌توان به چهار و به شش مربع کوچکتر،

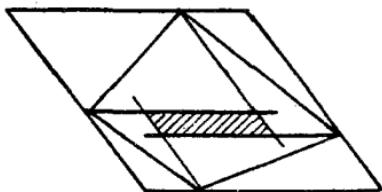
تقسیم کرد.

۶۰.۷۳. نمونه تقسیم را، در شکل ۴۵ می‌بینید.

۱۰.۷۳. داریم:

$$\begin{aligned} 2^{10} + 5^{12} &= (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 + 5^6 = \\ &= (2^5 + 5^6 - 2^3 \times 5^3)(2^5 + 5^6 + 2^3 + 5^3) = \\ &= 14657 \times 16657 \end{aligned}$$

۱۱.۷۳. از آنجا که مثلث‌های واقع در بیرون چهارضلعی، باید مساحت‌هایی به مجموعی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع داشته باشند، بنابراین، چهار متوازی‌الاضلاعی که روی این مثلث‌ها ساخته می‌شود (شکل ۴۶) باید در مجموع مساحتی برابر مساحت متوازی‌الاضلاع داشته باشند. ولی در این صورت، مساحت چهارضلعی که با ضلع‌های این چهار



شکل ۴۶

متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود (روی شکل ۴۶، این چهار ضلعی را هاشور زده‌ایم)، باید برابر صفر باشد. ولی این ممکن نیست، مگر این‌که یکی از قطرهای چهارضلعی شامل یکی از ضلعهای متوازی‌الاضلاع‌ها باشد، یعنی با ضلع متوازی‌الاضلاع اصلی موازی باشد.

۱۲.۷۳. از آنجاکه داریم:

$$\begin{aligned} & 2(a^\wedge + b^\wedge + c^\wedge) - (a^{\ddagger} + b^{\ddagger} + c^{\ddagger})^2 = \\ & = (a^{\ddagger} + b^{\ddagger} + c^{\ddagger})(a^{\ddagger} + b^{\ddagger} - c^{\ddagger})(a^{\ddagger} - b^{\ddagger} + c^{\ddagger})(b^{\ddagger} + c^{\ddagger} - a^{\ddagger}) \end{aligned}$$

و برای صفر بودن آن، باید یکی از عامل‌ها برابر صفر شوند، بنابراین، مثلث مفروض، در یکی از راس‌های خود، قائم است.

۱۳.۷۳. چون

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|} > \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

پس، نقطه  $E$ ، نسبت به نقطه  $D$ ، از خط راست  $AB$  دورتر است. درنتیجه، نقطه  $(DE) \cap (AB) = P$ ، روی خط راست  $AB$  طوری قرار دارد که  $A$  و  $P$  واقع است. یعنی  $B$

$$\widehat{ABE} < \widehat{BEP} \Rightarrow \widehat{DBE} < \widehat{BED}$$

و بنابراین  $|DE| > |BD|$ . به همین ترتیب

$$\widehat{EDA} > \widehat{PAD} \Rightarrow \widehat{DAE} < \widehat{EDA}$$

یعنی  $|DE| < |AE|$ .

۱۴.۷۳. پاسخ. این مجموع برابر است با ۷ یا ۱۶.

۱۵.۷۳. نه، نمی‌توان. اگر دستگاه محورهای مختصات قائم را طوری انتخاب کنیم که مختصات سه رأس مفروض مریع  $(0, 0, 1)$  و  $(0, 1, 0)$  باشد، آنوقت نقطه‌هایی را که مختصات آنها عدددهایی درست باشد و، در ضمن، نتوان آنها را به یاری عمل \* به دست آورد، نقطه‌هایی هستند که هر دو مختص آنها عدددهایی فرد باشند.

۱۶.۷۳. فرض می‌کنیم مثلثی وجود نداشته باشد و با چند ضلعی‌ها سروکار داشته باشیم. تعداد چند ضلعی‌ها را  $n$ ? فرض می‌کنیم. در این صورت، به ناچار، در بین آن‌ها چند ضلعی وجود دارد که تعداد ضلع‌های آن، از  $3 + n$  کمتر نیست (البته، به شرطی که بخواهیم تعداد ضلع‌های دو تا از چند ضلعی‌ها، برابر نباشد). از این  $3 + n$  ضلع، سه ضلع می‌تواند، در کناره باشد؛ بقیه ضلع‌ها باید به  $1 - n$  چند ضلعی دیگر چسبیده باشند. ولی در دو چند ضلعی کوژی که از راه برش به دست آمده‌اند، نمی‌توانند بیش از یک ضلع مشترک وجود داشته باشند.

۱۷.۷۳. اگر بین عدددهای روی محیط دایره، عدددهای مختلفی وجود داشته باشد، بعد از هر گام، مجموع عدددهای روی دایره، کاهش می‌یابد. زیرا بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد، از هر یک از آن دو عدد تجاوز نمی‌کند و تنها وقتی که دو عدد برابر باشند، با آن‌ها برابر است. چون، این مجموع، نمی‌تواند برای عدددهای طبیعی، بین‌نهایت مرتبه کاهش یابد، دیر یا زود، همه عدددهای روی محیط دایره با هم برابر می‌شوند.

۱۸.۷۳. بله، می‌توان. ابتدا، بیشترین تعداد پاره خط‌های راستی را که می‌توان کنار گذاشت، به نحوی که رابطه مفروض بین نقطه‌ها، همچنان برقرار باشد، حذف می‌کنیم. سپس، نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که درست یک پاره خط راست از آن خارج شده باشد. وجود چنین نقطه‌ای را، می‌توان به سادگی ثابت

کرد: کافی است، دو نقطه انتهایی خط شکسته‌ای را در نظر بگیریم که به وسیله پاره خط‌های راست ساخته شده است. هریک از این دو انتهای، چنین نقطه‌ای است.

. ۲۰.۷۳ . ۱۸، ۹ پاسخ.

۲۱.۷۳ . ۲۱.۷۳ پاسخ. نقطه‌های  $K$  و  $M$  را می‌توان به دلخواه، چنان انتخاب

کرد که داشته باشیم:  $|AK| = |DM|$ .

۲۴.۷۳ . ۱۱. ۱۱. همه‌چیز به این ترتیب روش می‌شود که ببینیم،

چند تکه کاغذ سفید، در ردیف‌های فرد قرار گرفته است. این تعداد در محدوده از ۰ تا ۱۰ می‌تواند باشد.

۲۶.۷۳ . ۲۶.۷۳ فرض کنید

$$a + kd, a + md, a + nd$$

سه جمله پشت‌سرهم از این تصاعد هندسی، با قدرنسبت برابر  $q$ ، باشند: در این صورت، باید داشته باشیم:

$$(a + md) : (a + kd) = q$$

یعنی، اگر  $t$  بگیریم، آنوقت  $\frac{a}{d} = t$

$$q = \frac{t+m}{t+k}; \quad t = \frac{qk-m}{1-q}$$

ولی چون  $\frac{qk-m}{1-q} = \frac{qm-n}{1-q}$  (کسر سمت راست این برابری هم، برابر است)، به دست می‌آید  $t$

$$qk - m = qm - n \Rightarrow q = \frac{n - m}{m - k}$$

این مقدار  $q$  عددی است گویا که، از آن جا، گویا بودن عدد  $t$  نتیجه می‌شود.

۲۸.۷۳ اگر چندوجهی دارای  $n$  وجه باشد، آنوقت، هر وجه می‌تواند از  $3$  تا  $1 - n$  ضلع داشته باشد، یعنی حداقل  $3 - n$  نوع وجه در آن پیدا می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که، دستکم دو وجه، در تعداد ضلع‌ها، یکی هستند.

۳۱.۷۳ پاسخ.  $\frac{1}{4}$ .

۳۲.۷۳ راهنمائی. از این حقیقت استفاده کنید که: اگر ضریب‌های  $P(x)$  عدددهای درست باشند ( $P(a) = P(b)$ ، برای عدددهای درست و دلخواه  $a$  و  $b$ ، بر  $b - a$  بخش‌پذیر است).

۳۶.۷۳ طول این پاره خط‌های راست را، به ترتیب،  $a_1, a_2, \dots, a_n$  می‌نامیم. در این صورت، با توجه به مقایسه مساحت ذوزنقه‌ها با مساحت چندضلعی، این دو نابرابری را خواهیم داشت:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \dots + \frac{a_9 + a_{10}}{2} \leq 9; 9 \left( \frac{a_1 + a_{10}}{2} \right) \leq 9$$

از مجموع این دو نابرابری به دست می‌آید:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} \leq 10$$

۳۷.۷۳ ثابت می‌کنیم، اگر عدد تنها با رقم‌های  $0$  و  $1$  هم نوشته شده باشد، نمی‌توان با  $9$  پرسش، آن را پیدا کرد. درواقع، انتخابی از مرتبه‌های عدد (مثلًا، مرتبه‌های اول، چهارم، هفتم و نهم) و پاسخ به پرسش، همارز است با این‌که، برای بُرداری مثل

$$1001001010$$

که  $10$  مختص دارد، حاصل ضرب عددی (اسکالر) بردار مفروض را در بردار انتخابی بدهیم. روشن است که برای تعیین دقیق بردار، اطلاع از حاصل ضرب عددی  $9$  بردار دلخواه، در حالت کلی، کافی نیست.

۳۸.۷۲. همه راس‌هایی را که به وسیلهٔ مریع پوشیده شده‌اند و کوچکترین چندضلعی کوثر  $F$  را، که این راس‌ها را دربر دارد، در نظر می‌گیریم. مساحت این چندضلعی را  $S$  و محیط آن را  $P$  می‌نامیم. در این صورت

$$S < A^*, P \geq 4a$$

فرض کنید،  $x$  راس روی محیط و  $y$  راس در درون این چندضلعی باشد.  
در این صورت

$$x + y = \left( \frac{x}{2} + y - 1 \right) + \frac{x}{2} + 1$$

و بنابر دستور معروف «پیک»:

$$S = \frac{x}{2} + y - 1$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$x + y = S + \frac{x}{2} + 1 \leq S + 2a + 1 \leq (a + 1)^2$$

۳۹.۷۲. حل مساله ۴۰.۸۰ را ببینید.

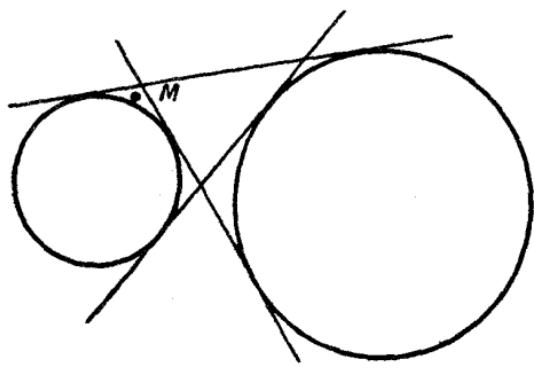
.۱۰.۷۲. پاسخ. ۱۳۴، ۱۴۴، ۱۵۰، ۲۸۸، ۲۹۴.

.۲۰.۷۲. پاسخ. نه، وجود ندارد. اگر چندضلعی کوثر، دارای  $n$  راس باشد، دارای  $\frac{1}{2}n(n-3)$  قطر خواهد بود و عدد ۱۹۷۴ را نمی‌توان به صورت

$$\frac{1}{2}n(n-3) \text{ نوشت.}$$

.۳۰.۷۲. نه، ممکن نیست. مجموع عدددهای هر سه یال، باید روی هم، برابر  $6k$  باشد که، در آن،  $k$ ، تعداد مثلث‌هاست. ولی

$$55 \times 3 = 165$$



شکل ۴۷

عددی فرد است.

۴.۷۴. پاسخ. بله، ممکن است.

۵.۷۴. پاسخ.  $B$  اول،  $A$  دوم و  $C$  سوم شد.

۶.۷۴. همه شهرهایی را درنظر می‌گیریم که بتوان از پای تخت، با پرواز هوایی به آنها رسید (مستقیم یا با تعویض هوایپما). اگر شهر  $A$  در بین چنین شهرهایی نباشد، آنوقت، باید مجموع همه خطهای هوایی که از شهرها (و از جمله پای تخت) خارج می‌شوند، عددی فرد باشد. از طرف دیگر، هر خط هوایی را باید دوبار به حساب آورد و، درنتیجه، این تعداد باید زوج باشد. تناقص حاصل، نشان می‌دهد که، شهر  $A$  هم باید در بین این شهرها باشد.

۷.۷۴.  $\frac{19}{10}$ . پاسخ.

۹.۷۴. پاسخ.  $1974, 1703, 1452, 1221, 1010$ .

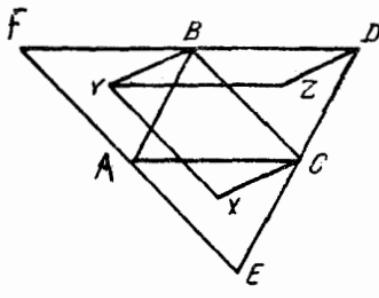
۱۰.۷۴. راه حل مساله ۳۱.۶۸ را ببینید.

۱۲.۷۴. پاسخ. ۳۶ درجه، ۳۶ درجه، ۱۰۸ درجه.

۱۳.۷۴. بله، چنین نقطه‌ای وجود دارد؛ مثلاً نقطه  $M$  روی شکل ۴۷.

۱۴.۷۴. پاسخ.  $y = 2, x = 3$ .

۱۵.۷۴. نه، نمی‌توانیم. ضلع مثلثی را درنظر می‌گیریم که به ضلع



شکل ۴۸

درونى خانه بريده شده متصل باشد. روش است که طول اين ضلع نمى تواند از واحد تجاوز کند. چون ارتفاع وارد بر همین ضلع، حداکثر برابر هفت است، بنابراین مساحت آن، از  $\frac{7}{2}$  تجاوز نمى کند؛ و اين مقدار، از  $\frac{63}{17}$  كمتر است.

۱۷.۷۴. بزرگترین مثلث را درنظر مى گيريم که راس های آن، سه نقطه از اين مجموعه باشند.  $D$  را نقطه ای از مجموعه مى گيريم، به نحوی که  $ABCD$  متوازي الاضلاع باشد (شکل ۴۸). همه نقطه های اين مجموعه، در درون مثلث  $DEF$  واقع اند. اکنون نقطه ديگري از مجموعه را، مثل  $X$  درنظر مى گيريم که در درون مثلث  $AEC$  باشد (حالت های ديگر هم، شبيه همین حالت مورد بررسی قرار مى گيرند). در اين صورت  $XBC$  را مى توان، تا يك متوازي الاضلاع تكميل کرد (راس چهارم آن را  $Y$  مى ناميم)؛ مثلث  $YBD$  را هم به يك متوازي الاضلاع، با راس چهارم  $Z$ ، تبديل مى کنيم. تنها اين مى ماند که توجه کنيم، برای تكميل مثلث  $XYZ$  به يك متوازي الاضلاع، به نقطه ای واقع در بیرون مثلث  $DEF$  نياز داريم.

۱۸.۷۴. فرض کنيد  $X_1$  تعداد اخلاف نخستین باکتری باشد، يعني  $X_1 = 100$ . تعداد اخلاف يكی از «فرزندان» بلافصل او، از  $\frac{1}{7}X_1$  كمتر نیست. اين تعداد را  $X_2$  مى ناميم. به همین ترتیب عدد  $X_3$  راتعريف مى کنيم

که از عدد  $X_2$  کمتر نیست و غیره. نخستین  $k$  را درنظر می‌گیریم، به نحوی که  $X_k \leq 667$  روش است که  $X_k \geq 334$ ، زیرا به ازای  $X_k \leq 333$ ، بدست می‌آید  $X_k \leq 666$  که با شرط انتخاب  $k$  سازگار نیست.

۲۲.۷۴. چون دایره  $S$  را می‌توان نتیجه تجانس دایرة محیطی مثلث، با ضریب تجانس  $\frac{1}{2}$  دانست، به سادگی می‌توانیم مرکز تجانس را پیدا کنیم. همین مرکز تجانس، نقطه مورد نظر مساله است.

۲۳.۷۴. پاسخ. وتر  $AB$  را باید عمود بر خط راست  $OX$  رسم کرد.  
۲۴.۷۴. راهنمائی. فرض کنید واژه  $A$  شامل  $m$  حرف و واژه  $B$  شامل  $n$  حرف باشد. ثابت کنید، هر دو حرف در واژه  $CC$ ، که شماره‌های مکان آن‌ها، به اندازه  $m$  یا  $n$  با هم اختلاف دارند، بر هم منطبق‌اند. در این صورت، همین حکم برای حروف‌هایی هم که به اندازه  $m - n$  در شماره ردیف خود با هم اختلاف دارند (با شرط  $m > n$ ) درست است و غیره.

بنابراین، اگر بزرگترین بخشیاب مشترک  $m$  و  $n$  را  $d$  فرض کنیم، آنوقت حروف‌هایی که شماره محل آن‌ها به اندازه  $d$  با هم اختلاف دارند، بر هم منطبق می‌شوند و، بنابراین، به جای واژه  $D$  می‌توان واژه‌ای را انتخاب کرد که از  $d$  حرف اول واژه  $A$  تشکیل شده باشد.

۲۵.۷۴. پاسخ. نه، وجود ندارد.  
۲۶.۷۴. راهنمائی. از این حقیقت استفاده کنید که، اگر روی نیم خط‌های راست و ثابت  $OS_1$ ،  $OS_2$  و  $OS_3$ ، به ترتیب نقطه‌های  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  را انتخاب کنیم، حجم هرم  $OXYZ$  برابر با

$$k \cdot |OX| \cdot |OY| \cdot |OZ|$$

می‌شود که در آن،  $k$  ضریبی است که به جای نقطه‌های  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  بستگی ندارد.

۴۷.۷۴. عبارت مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$$

حاصل ضرب این چهار پرانتز عددی غیرمنفی است که برابر صفر هم می‌تواند باشد. بنابراین، ماکزیمم عبارت، برابر واحد است.

۴۵.۷۴. ثابت می‌کنیم (با روش استقرای ریاضی) که، این مجموع، از  $x \log_2 x$  کمتر نیست که، در آن،  $x$  همان نخستین عددی است که روی تخته سیاه نوشته‌ایم. فرض کنید، در گام اول، نوشته باشیم:

$$x = a + b$$

در این صورت، بنابر فرض استقرای، مجموع عددهای زیر  $a$  از مقدار  $a \log_2 a$ . و مجموع عددهای زیر  $b$  از  $b \log_2 b$  کمتر نیست. درنتیجه، کافی است این نابرابری را ثابت کنیم:

$$a + b + a \log_2 a + b \log_2 b \geq (a + b) \log_2 (a + b)$$

و یا همارز آن

$$\frac{1}{2}(p \log_2 p + q \log_2 q) \geq \frac{p+q}{2} \log_2 \frac{p+q}{2}$$

( $p$  و  $q$ ، به معنای عددهای  $2a$  و  $2b$  هستند)، که نتیجه‌ای است از کوژ بودن تابع  $f(x) = x \log_2 x$ .

۴۱.۷۴. از مرکز سیاره و دو ماهواره، صفحه  $P$  را می‌گذاریم، قطر عمود بر صفحه  $P$  را رسم و دو انتهای قطر را پیدا می‌کنیم. در این صورت هیچ ماهواره‌ای را، نمی‌توان به طور هم‌زمان از هر دو نقطه انتهائی قطرها دید

و دو ماهواره انتخابی هم از این دو نقطه دیده نمی‌شوند. بنابراین از یکی از این دو نقطه، نمی‌توان بیش از  $\left[\frac{25}{2}\right]$ ، یعنی ۱۷ ماهواره را دید. ۳۳.۷۴ تعداد همه قطرهای یک  $2k$  ضلعی، برابر است با

$$k(2k - 3)$$

بنابراین، اگر هر قطر با یکی از ضلع‌ها موازی باشد، آنوقت ضلعی وجود دارد که با  $(3 - \frac{1}{2}k)(2k)$  قطر، یعنی دست‌کم با  $(1 - k)$  قطر موازی است. ولی این به معنای آن است که هریک از  $2k$  راس چندضلعی، انتهایی از این ضلع است، و این قطرها، و بنابراین یکی از آن‌ها، بر یک ضلع منطبق است. ۳۴.۷۴ کوچکترین عدد سطر اول را درنظر می‌گیریم و عدهای همه ستون‌هایی را که عددی برابر این کوچکترین عدد سطر اول دارند، دو برابر می‌کنیم. سپس، از عدهای سطر اول، واحد را (و اگر لازم باشد، چند بار) کم می‌کنیم. به این ترتیب، عدهای بعضی از خانه‌های سطر اول برابر صفر می‌شود. روشن است که، در ضمن، مجموع عدها در سطر اول، کاهش پیدا می‌کند. اگر این عمل را ادامه دهیم، سرانجام به جایی می‌رسیم که در همه خانه‌های سطر اول، عدد صفر قرار دارد. سپس، همین کار را با سطر دوم جدول انجام می‌دهیم و غیره. در ضمن، توجه داریم که عمل دو برابر کردن، در سطر اول (که همه عدهای آن، برابر صفر است) اثری ندارد. در پایان کار، به جدولی می‌رسیم که همه عدهای آن، برابر صفر است.

۳۵.۷۴ دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که، مبداء آن، بر راس بین ضلع‌های ۱ و ۲ قرار گیرد. در این صورت، تنها یک نقطه  $A$  پیدا می‌شود که ویژگی مورد نظر را دارد. نقطه با مختصات  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

یادداشت. به این نکته توجه کنید که عمل‌های  $A \rightarrow A_4$ ،  $A \rightarrow A_2$ ،  $A \rightarrow A_1$ ،  $A \rightarrow A_3$  بر یک مختص و عمل‌های  $A_1 \rightarrow A$  بر مختص دیگر اثری

نadar.

۳۶.۷۴. فرض می‌کنیم، این طور نباشد (برهان خلف). یکی از عددها را کنار می‌گذاریم و بقیه را شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت، مجموعه‌ای به صورت

$$x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{99}$$

در تقسیم بر ۱۰۰، به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند، زیرا در غیر این صورت، اگر دو عددی را که در تقسیم بر ۱۰۰ به یک باقی‌مانده رسیده‌اند، از هم کم کنیم، به مجموعی از چند عدد می‌رسیم که بر ۱۰۰ بخش‌پذیر، یعنی برابر ۱۰۰ است.

مجموع همه این عددها، نسبت به مُدول ۱۰۰، همنهشت با ۵۰ می‌شود (زیرا، مجموع باقی‌مانده‌ها، یعنی ۴۹۵۰، در تقسیم بر ۱۰۰، باقی‌مانده‌ای برابر ۵۰ دارد). از طرف دیگر، این مجموع، با مجموع

$$99x_1 + 98x_2 + \dots + x_{99}$$

همنهشت است. اگر این ۹۹ عدد را تبدیل دوری کنیم، به همان ترتیب به دست می‌آید.

$$99x_2 + 98x_3 + \dots + x_1 \equiv 50 \pmod{100}$$

با کم کردن این همنهشتی از همنهشتی قبلی به دست می‌آید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{99} - 99x_1 \equiv 0 \pmod{100}$$

یعنی

$$x_1 \equiv -S \pmod{100}$$

که در آن،  $S$  برابر است با مجموع همه ۹۹ عدد. بهمین ترتیب، برای هر  $x_k$  به دست می‌آید:

$$x_k \equiv -S \pmod{100}$$

یعنی این ۹۹ عدد با هم برابرند، زیرا همه آنها از ۱۰۰ کوچکترند. از این جا نتیجه می‌شود که یا همه آنها برابر ۱ و عدد کنار گذاشته شده برابر ۱۰۱ است که ممکن نیست و یا همه عددها برابر ۲ هستند که، در این صورت، مجموع پنجاهتا از آنها، برابر ۱۰۰ می‌شود.

۳۷.۷۴. پاسخ. همه عددهای زوج بزرگتر از ۹ و همه عددهای فرد بزرگتر از ۱۴.

خط راستی را درنظر می‌گیریم که دستکم دو ضلع  $AB$  و  $CD$  از  $k$  ضلوع مفروض، روی آن باشد. در این صورت، حداقل چهار خط راست وجود دارد که ضلع‌های  $k$  ضلوعی روی آنها واقع‌اند – به‌طور مشخص، آن ضلع‌هایی که یکی از دو انتهای آنها نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  باشند (و البته، غیر از ضلع‌های  $AB$  یا  $CD$ ). بنابراین، از این‌گونه خط‌های راست، حداقل پنجتا و تعداد ضلع‌ها، دستکم دهتا می‌شود.

اگر هم  $k$ ، عددی فرد باشد، آنوقت روی یکی از این خط‌های راست، باید دستکم سه ضلع  $k$  ضلوعی قرار گیرد؛ و این به‌معنای آن است که تعداد خط‌های راست از هفت کمتر نیست و  $k \geq 15$ .

جست‌وجوی  $k$  ضلوعی‌های مشخص از این‌گونه را، به‌عنوان تمرین، به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

۲.۷۵. اگر این چهار نیمه مختلف باشند (و مثلاً  $0, 1, 2, 3$ )، آنوقت در ردیفی که با ۲۶ سنگ دومینو درست کرده‌ایم، باید هفت صفر، هفت خال یک، هفت دو خال و هفت سه خال وجود داشته باشد. چون در درون زنجیری که ساخته‌ایم، تعداد خال‌های یکسان زوج و، در ضمن، ۷

عددی فرد است، بنابراین دستکم یک خال صفر، دستکم یک خال ۱، دستکم یک خال ۲ و دستکم یک خال ۳ باید در دو کرانه زنجیر باشد؛ در حالی که بیش از دو خال در هر طرف زنجیر وجود ندارد.

۴.۷۵. راهنمائی. ثابت کنید، اگر  $Q$  قرینه نقطه  $P$  نسبت به خط راستی باشد که دایره را قطع کرده است، آنوقت

$$|OQ| \geq |OP| - 2$$

که در آن،  $O$  مرکز دایره است.

۵.۷۵. پاسخ. بله، می‌تواند. کولیا در گام اول رقم ۱ را می‌نویسد و، از آن به بعد، به دنبال رقمی که واسیا می‌نویسد، کولیا رقمی می‌گذارد که با رقم واسیا، روی هم برابر ۶ شود. در این صورت مجموع ۱۹ رقم اول، برابر ۵۵ می‌شود؛ برای این‌که عدد ۲۰ رقمی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید رقم آخر برابر ۸ باشد که چنین رقمی در اختیار واسیا نیست.

۶.۷۵. حل مسأله ۱۸.۶۸ را ببینید.

۷.۷۵. پاسخ. نه، نمی‌تواند. از همان اندیشه‌ای استفاده کنید که در حل مسأله ۵.۷۵ مورد استفاده قرار دادیم.

۸.۷۵. پاسخ.  $p = 3$ .

۹.۷۵. پاسخ. حداقل این مقدار، برای عدد ۹۱۱ به دست می‌آید. مقدار حاصل ضرب در این حالت، برابر است با

$$911 \left( \frac{1}{9} + 1 + 1 \right) = 911 \times \frac{19}{9}$$

۱۰.۷۵. راهنمائی. گرانیگاه مجموعه راس‌های شش‌ضلعی، روی هر دو پاره خط راست است.

۱۱.۷۵. حل مسأله ۱۸.۶۸ را ببینید.

.۱۳.۷۵ پاسخ. ۴ : ۳ : ۳.

.۱۴.۷۵  $\{Aq^n\}$  را یکی از این تصاعدها و  $N$  را عددی طبیعی می‌گیریم. در این صورت، در بازه بسته  $[N_0, N]$ ، تعداد جمله‌های این تصاعد هندسی، از  $1 + \log_q N$  تجاوز نمی‌کند.

بنابراین، پنج تصاعد هندسی، بیش از  $5 \log_a N + 5$  عدد را، که از  $N$  بزرگتر نباشد، نمی‌پوشاند ( $a$  را کوچکترین قدرنسبت‌ها گرفته‌ایم و می‌توان فرض کرد  $2 \leq a$ ). روشن است، اگر  $N$  را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم به نابرابری

$$N > 5 \log_2 N + 5$$

بررسیم و، درنتیجه، جمله‌های تصاعدها، همهٔ عده‌های طبیعی بازه را نپوشاند.

.۱۵.۷۵ از فرض نتیجه می‌شود:  $\hat{B} = 60^\circ$ . بنابراین، شعاع دایره

( $BDEF$ ) از

$$\frac{1}{2}|BE| = |BE| \cdot \sin(FBE)$$

کمتر نیست (زیرا  $FBE = 30^\circ$ ) و عدد اخیر هم برابر طول عمودی است که از نقطه  $F$  (مرکز دایره محاطی) بر ضلع  $AB$  فروید آمده است (یعنی، شعاع دایره محاطی).

.۱۶.۷۵ از مجموع دو معادله به دست می‌آید:

$$x^2 + y^2 = 81$$

مختصات نقطه‌های برخورد دو سهمی، باید در این معادله صدق کنند، یعنی همهٔ آن‌ها، روی محيط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع برابر ۹ قرار دارند.

.۱۷.۷۵ پاسخ. ۲۹۹۸

۱۸.۷۵ روی هم، تنها هفت حالت مختلف می‌تواند پیش آید.

۱۹.۷۵ چون  $XE$  نیمساز زاویه  $CDX$  است، پس

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|CX|}{|DX|} = \cot \alpha$$

که در آن  $\widehat{DCX} = \alpha$ . به همین ترتیب

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \cot \beta = \cot(45^\circ - \alpha)$$

که در آن  $\widehat{XAB} = \beta$ . اگر نسبت اول را با  $t$  نشان دهیم، آنوقت، نسبت

دوم برابر  $\frac{1+t}{1-t}$  می‌شود که حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۱.۷۵ پاسخ. این مثلث، همان مثلث مفروض است.

۲۲.۷۵ پاسخ.

۲۴.۷۵ پاسخ. ۱۹۸. برای هر خانه رنگی، خطی را درنظر می‌گیریم

که، در امتداد آن، این خانه، تنها خانه رنگی است. همه ستون‌ها، در بین این خط‌ها نیستند، زیرا در غیر این صورت، تعداد خانه‌های رنگی از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. به همین ترتیب، همه سطرها هم، جزو سطرهای خطدار نیستند. بنابراین، تعداد خط‌هایی که رسم کرده‌ایم، از ۱۹۸ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، اگر همه خانه‌های یک سطر دلخواه و یک ستون دلخواه را، به‌جز خانه‌ای که در برخورد این سطر و این ستون است، رنگ کنیم، ۱۹۸ خانه رنگی به‌دست می‌آید.

۲۵.۷۵ حل مساله ۱۴.۷۵ را بیینید.

$$x = 4 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{34 + 20\sqrt{3}}$$

۳۰.۷۵  $x_i$  را زاویه بین  $a_i$  و  $(1+i)$  امین ضلع و  $a_i$  را طول ضلع  $i$  ام چندضلعی می‌گیریم. سه راس متوالی چندضلعی، مثلثی تشکیل

می‌دهند که مساحتی برابر

$$\frac{1}{2} a_i a_{i+1} \sin \alpha_i$$

دارد. حاصل ضرب این مساحت‌ها، برابر است با

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 a_2 \dots a_n)^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 a_2 \dots a_n)^2 \end{aligned}$$

و با توجه به نابرابری واسطه‌ها

$$a_1 a_2 \dots a_n < \left[ \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \right]^n \leq \left( \frac{4}{n} \right)^n$$

زیرا  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ، محیط  $n$  ضلعی است که نمی‌تواند از محیط مربع، که برابر  $4$  است، تجاوز کند. به این ترتیب، حاصل ضرب مساحت‌های مورد نظر، از  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{4}{n}\right)^{2n}$  تجاوز نمی‌کند. بنابراین، یکی از مساحت‌ها، نمی‌تواند از  $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{n}\right)^2$ ، یعنی  $\frac{4}{n^2}$  تجاوز کند.

. ۳۱.۷۵.  $ab + cd =$  پاسخ.

. ۳۲.۷۵.  $ab + cd$  عددی که با  $99$  رقم  $3$  ساخته شده، بزرگتر است.

. ۳۴.۷۵.  $ab + cd$  ممکن است.

. ۳۵.  $k = 15$  را در نظر می‌گیریم که  $30$  راس دارد و هر دو راس از آن، با یالی به هم مربوط‌اند، و اگر  $A$  از کارهای  $B$  اطلاع داشته باشد، روی یالی که از  $A$  به  $B$  می‌رود، پیکانی می‌گذاریم که جهت آن، از  $A$  به  $B$  است. به این ترتیب، باید

$$30 \times 15 = 450$$

پیکان داشته باشیم، در حالی که تعداد همه یال‌ها برابر است با

$$\frac{1}{2} \times 30 \times 29 = 435$$

بنابراین، باید روی یالی، دو پیکان (و البته، در دو جهت مختلف) وجود داشته باشد.

۳۸.۷۵ خانه‌های مرزی صفحه شطرنج را درنظر می‌گیریم. تعداد این خانه‌ها، ۲۸ است و یک جدول  $7 \times 7$  را احاطه کرده‌اند. خط‌های راستی که بخواهند این ۲۸ خانه را از هم جدا کنند، باید محیط این مربع  $7 \times 7$  را قطع کنند؛ ولی هر خط راست تنها می‌تواند دو ضلع از این مربع را، و ۱۳ خط راست، حداقل ۲۶ بار محیط مربع را قطع کند، یعنی نمی‌تواند آن را به ۲۸ بخش تقسیم کند.

۴۰.۷۵ بله، وجود دارد. یک چهار وجهی درنظر می‌گیریم که مرکز آن در نقطه  $A$  باشد. برای هر وجه این چهار وجهی، کره‌ای در نظر می‌گیریم که شامل این وجه باشد، ولی نقطه  $A$  را در بر نگیرد. سپس، به یاری چهار تجانس، این چهار کره را آنقدر از نقطه  $A$  دور می‌کنیم (با فاصله‌های مختلف) که، کره‌های حاصل، یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۴۲.۷۵  $f^{-1}(x) = y$  می‌گیریم. در این صورت، فرض مساله را، می‌توان این طور نوشت:

$$f(f(y)) + f(y) + y = 0$$

$0 = f(0)$  فرض می‌کنیم. اکنون خط راست را، به بازه‌هایی از شش نوع تقسیم می‌کنیم:

$$A_k = [p^{rk}, \varphi^{rk+1}]; \quad B_k = [\varphi^{rk+1}, \varphi^{rk+2}];$$

$$C_k = [\varphi^{rk+2}, \varphi^{rk+3}]; \quad \tilde{A}_k = [-\varphi^{rk+1}, -\varphi^{rk}];$$

$$\tilde{B}_k = [-\varphi^{rk+2}, -\varphi^{rk+1}]; \quad \tilde{C}_k = [-\varphi^{rk+3}, -\varphi^{rk+2}]$$

که در آن،  $k$  عدد درست دلخواه و  $(1 + \frac{1}{\varphi}) = \varphi$  که در معادله  $\varphi + \varphi^2$  صدق می‌کند. اکنون می‌توانیم تابع را به این صورت بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi x (x \in A_k \text{ یا } x \in \tilde{A}_k); \\ -\varphi x (x \in B_k \text{ یا } x \in \tilde{B}_k); \\ -\frac{x}{\varphi} (x \in C_k \text{ یا } x \in \tilde{C}_k) \end{cases}$$

۴۴.۷۵. پاسخ. ۲۰. چون

$$x_1^* = 1, x_2^* = x_1^* + 2x_1 + 1, \dots, x_{1976}^* = x_{1975}^* + 2x_{1975} + 1$$

پس، از مجموع همهٔ این برابری‌ها به دست می‌اید:

$$\sum_{i=1}^{1975} x_i = \frac{1}{\varphi} (x_{1976}^* - 1976)$$

از آنجا که نزدیکترین عدد زوج مجدد کامل به ۱۹۷۶ ( $x_{1976}$ ، زوج است)، برابر است با  $1936 = 44^2$ ، پس

$$\left| \sum_{i=1}^{1975} x_i \right| \geq 20$$

در بارهٔ دقت این عدد، خواننده می‌تواند قانع شود، زیرا ساختن دنباله  $\{x_i\}$  که، برای آن داشته باشیم:  $x_{1976} = 44$ ، کار دشواری نیست.

۴۶.۷۵. دنباله  $\{e_i\}$  را، با این قاعده می‌سازیم:

$$e_0 = \sqrt{2}, e_{n-1} - e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} - (1 + \sqrt{2})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$$

$$. S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

اکنون با استقرای روی  $n$ ، به سادگی ثابت می‌شود که این نابرابری برقرار

است:

$$x_0 + \frac{x_n}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{2^n}} + e_n \leq (1 + \sqrt{2}) \sqrt{x_0 + \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}}$$

که در آن  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ، انتخاب دلخواهی از صفرها و واحدهای است که، بین آن‌ها، دست کم یک واحد وجود دارد. عبور استقرایی با توجه به این نابرابری انجام می‌شود:

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}} - \sqrt{x} \leq \sqrt{a + \frac{1}{2}} - \sqrt{a}, \quad (x \geq a)$$

پادداشت. به این نکته توجه کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$$

۱. ۷۶. به عنوان نمونه، حشره هرگز روی نقطه‌ای که مجاور نقطه آغاز حرکت او، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، قرار نمی‌گیرد.

۲. ۷۶. پاسخ. ۷۲

۳. ۷۶. پاسخ. در روستای  $C$ . اگر مدرسه را در هر نقطه دیگری مثل  $X$  بسازیم، آنوقت اگر آن را به نقطه  $C$  منتقل کنیم، مجموع راهی که باید دانش‌آموزان پیمایند، به اندازه

$$300|CX| - 100(|AX| - |AC|) - 200(|BX| - |BA|)$$

تغییر می‌کند، یعنی کوتاه‌تر می‌شود، زیرا

$$|AX| - |AC| \leq |CX|;$$

$$|BX| - |BC| \leq |CX|$$

۴.۷۶. کسی که بازی را آغاز می‌کند، باید در حرکت اول، یک خانه جلو برود؛ بین مهره‌ها، ۲۷ خانه آزاد باقی می‌ماند. سپس، در برابر حرکت رقیب، باید این طور پاسخ بدهد: اگر رقیب او یک خانه جلو آمد، او دو خانه به جلو برود و اگر رقیب او دو خانه جلو آمد، او یک خانه جلو برود.

۵.۷۶. پاسخ. ۲۲ خانه.

۶.۷۶.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را اندازه ضلع‌های مربع‌های کوچک؛  $n$  را طول ضلع مربع بزرگ و  $S$  را مجموع طول‌های حصارهای درونی فرض می‌کنیم. در این صورت

$$4 \sum a_i = 2S + 4n; \sum a_i^2 = n^2$$

از برابری دوم نتیجه می‌شود که  $\sum a_i$  و  $n$  یا هر دو زوج و یا هر دو فردند؛ یعنی  $2 \sum a_i$  و  $2n$  در تقسیم بر ۴ به یک باقی‌مانده می‌رسند و این، به معنای آن است که

$$S = 2 \sum a_i - 2n$$

بر ۴ بخش‌پذیر و، بنابراین، مجموع طول‌های همه حصارها، یعنی  $4n + S$  بر ۴ بخش‌پذیر است.

۷.۷۶. راهنمائی. ثابت کنید حشره، در بیش از ۵۱ نقطه نمی‌تواند باشد.

۹.۷۶. پاسخ. بله، می‌تواند.

۱۰.۷۶. محیط پنج‌ضلعی درونی را  $x$ ، محیط پنج‌ضلعی ستاره‌ای را  $y + x$  و محیط خود  $F$  را  $z$  می‌گیریم. در این صورت، با توجه به نابرابری مثلثی داریم:

$$x < z < y, x + y < 2z$$

چون  $x, y$  و  $z$ ، عددهایی اولاند، نتیجه لازم را می‌توان از این نابرابری‌ها، بعد از اندکی دقت، به دست آورد.

۱۳.۷۶. اگر این حاصل ضرب فرد باشد، باید  $y_k - x_k$ ، به ازای هر مقدار  $k$ ، عددی فرد باشد. ولی در این صورت

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_{25} - y_{25}) = 0.$$

هم باید عددی فرد باشد.

۱۴.۷۶. این تفاضل برابر است با  $(A - B)$ . چون ۹۹۹ و ۱۹۷۶ نسبت به هم اول‌اند، این تفاضل تنها وقتی می‌تواند بر ۱۹۷۶ بخش‌پذیر باشد که  $A - B$  بر ۱۹۷۶ بخش‌پذیر باشد که تنها به ازای  $A = B$  ممکن است.

۱۵.۷۶. پاسخ. هر سه دقیقه یکبار.

۱۶.۷۶. پاسخ. بله، ممکن است.

۱۷.۷۶. اگر برابری‌های

$$S_{BCK} = S_{MKA} \text{ و } S_{CDK} = S_{MDK}$$

را با هم جمع کنیم و، سپس، بخش مشترک را از دو طرف برابری حذف کنیم، به برابری مورد نظر می‌رسیم.

۱۸.۷۶. این مجموعه‌ها را  $M_1, M_2$  و  $M_3$  می‌نامیم.  $a$  و  $b$  را دو عدد متوالی می‌گیریم که به دو مجموعه متفاوت تعلق داشته باشند؛ بدون این‌که به کلی بودن بحث لطمه‌ای وارد شود، می‌توان  $a \in M_1$  و  $b \in M_2$  گرفت و، همچنین،  $a$  را عددی فرد و  $b$  را عددی زوج فرض کرد. اکنون از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، هر دو عددی که از دو مجموعه مختلف انتخاب کنیم، مجموع آن‌ها عضوی از مجموعه سوم می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$(a + b) \in M_2, (a + 2b) \in M_1, \dots, (a + 2kb) \in M_1,$$

$$(a + (2k+1)b) \in M_2, \dots, (2a + b) \in M_2,$$

$$(3a+b) \in M_7, \dots, (2ka+b) \in M_7,$$

$$((2k+1)a+b) \in M_7, \dots$$

عدد  $ab + a + b = (2m + 1)a + b$  را در نظر می‌گیریم که، در آن  $2m = b$ . این عدد بر عدد  $2mb + a$  منطبق است. بنابراین، عدد  $ab + a + b$  باید هم عضو  $M_7$  و هم عضو  $M_1$  باشد، که ممکن نیست. فرض می‌کنیم. از  $|AB| = c$  و  $|AC| = b$ ،  $|BC| = a$ . ۱۹.۷۶

$$\text{آنچه} (a+b+c) = \frac{3}{4}b, b = \frac{1}{3}(a+c)$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{3b} = \frac{b \cdot h}{3b} = \frac{1}{3}h$$

( $h$ ) را طول ارتفاع وارد بر ضلع  $b$  گرفته‌ایم.

۲۲.۷۶ راهنمائی. یک  $n$ -ضلعی کوثر دلخواه که زاویه‌هایی برابر زاویه‌های  $n$ -ضلعی منتظم داشته باشد، درنظر بگیرید.

۲۳.۷۶ مجموعه‌ای که ۱۲ عضو داشته باشد، روی هم دارای

$$2^{12} = 4096$$

زیرمجموعه است، که می‌توان آنها را به ۲۱۱ زوج از نوع  $(A, \bar{A})$  تقسیم کرد که، در آن،  $\bar{A}$  متمم  $A$  است. چون

$$2^{11} = 2048 > 1000 + 2$$

بنابراین زوج  $(A, \bar{A})$  پیدا می‌شود که، در آن،  $A$  و  $\bar{A}$  مجموعه‌هایی غیرتنه باشند و، در ضمن، قبلاً به عنوان گروه درنظر نگرفته باشند. اگر  $A$  به عنوان گروه مناسب نباشد، آنوقت با یکی از گروه‌های انتخابی قبلی، مثل  $B$ ، اشتراکی ندارد، ولی در این صورت،  $\bar{A}$  شامل  $B$  می‌شود و با هریک از

گروههای قبلی، دارای اشتراک خواهد بود. بنابراین، هنوز می‌توان یک گروه تشکیل داد:  $\overline{A}$  یا  $A$ .

۲۴.۷۶. چون  $AK$ ، مثل  $AL$ ، نیمساز خارجی زاویه  $A$  است، پس روی پاره خط راست  $KL$  واقع است. روشن است که، این نیمساز از  $A$  وسط کمان  $CAB$  می‌گذرد، زیرا نیمساز داخلی زاویه  $A$ ، از وسط کمان  $CD$  عبور می‌کند. از اینجا ثابت می‌شود که  $|KH| = |LH|$ . آنها را بر خط راست  $CB$  تصویر و ثابت می‌کنیم، تصویر پاره خط راست  $CK$  با تصویر پاره خط راست  $BL$  برابر است. در واقع، آنها برابرند با

$$\frac{2 \operatorname{Stg} \frac{\gamma}{2}}{a+c-b}, \frac{2 \operatorname{Stg} \frac{\beta}{2}}{a+b-c}$$

$\widehat{ACB} = \gamma$  و  $\widehat{ABC} = \beta$ ،  $|AB| = c$ ،  $|AC| = b$ ،  $|BC| = a$ ) گرفته‌ایم). که چون

$$(a+c-b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = r = (a+b-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

( $r$ ، شعاع دایره محاطی مثلث  $ABC$  است)، بنابراین، تصویرهای مذکور برابرند که اثبات حکم مساله را تمام می‌کند.

۲۵.۷۶. حل مساله ۲۲.۸۴ را ببینید.

۲۶.۷۶.  $f(x)$  را با  $g(x)$  نشان می‌دهیم.  $x$  و  $y$  را دو عدد دلخواه می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$g(y) = g(x) + g(a);$$

$$g(x) = g(y - a) = g(y) + g(-a)$$

چون  $g(a) \geq 0$  و  $g(-a) \geq 0$ ، بنابراین به دست می‌آید:

$$g(y) \geq g(x) \geq g(y)$$

بهاین ترتیب،  $g$  مقداری ثابت و، درنتیجه، برابر صفر است. بنابراین  $f(x) = g(x) = 0$ ، یعنی  $0 = 0$ .

۲۷.۷۶ ۲۷.۷۶ پاسخ. اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  عددهای غیرمنفی و دستکم یکی از آنها مخالف صفر باشد، آنوقت  $0 = x$ . اگر هر سه عدد  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر صفر باشند، آنوقت  $x$  می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد. اگر بدانیم معادله جواب دارد، حالت دیگری پیدا نمی‌شود.

۲۹.۷۶ ۲۹.۷۶ فرض می‌کنیم، هر ۱۶ حالت با هم فرق داشته باشند. تعداد واحدها را در مربع مرکزی  $3 \times 3$  برابر  $x$  و در مرزها (به جز گوشها) برابر  $a$  می‌گیریم. در این صورت، مجموع واحدها، در مربع‌های  $4 \times 4$  چپ بالا و راست پایین برابر می‌شود با

$$2x + a + 2 = 16$$

زیرا در هریک از این مربع‌ها باید هشت واحد وجود داشته باشد (درواقع، مثلًا، عددهای واقع در مربع چپ بالا، همان عددهای گوشهاي چپ بالا در همه مربع‌های  $2 \times 2$  است و، بنابراین، در آنجا باید هشت واحد وجود داشته باشد). بهمین ترتیب، برای مربع‌های  $4 \times 4$  چپ پایین و راست بالا، به دست می‌آید:

$$2x + a = 16$$

که با برابری قبل ناسازگار است.

۳۱.۷۶ ۳۱.۷۶ پاسخ. ۳۰ درجه. راهنمائی. مثلث  $CDA'$  را برابر مثلث  $CBA$  ووصل به پنج ضلعی بسازید.

۳۲.۷۶ ۳۲.۷۶ راهنمائی. در آغاز فرض می‌کنیم بتوان پنج نقطه و در هریک از زیرمجموعه‌ها یک نقطه انتخاب کرد که هیچ چهارتایی از آنها، بر یک صفحه واقع نباشند. این پنج نقطه را دو به دو، به وسیله ده خط راست به هم وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم، هر کدام از آنها را، تنها به دو رنگ درآورده

باشیم. صفحه‌ای را درنظر می‌گیریم که با هیچ کدام از این پنج خط راست موازی نباشد. در این صورت، بین نقطه‌های برخورد این صفحه با خط‌های راست، دست کم چهار نقطه از زیرمجموعه‌های مختلف وجود خواهد داشت. از این چهار نقطه، شش خط راست می‌گذرد. تنها این می‌ماند که، خط راستی انتخاب کنیم که همه آن‌ها را قطع کند.

۳۳.۷۶. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که همه مجھول‌ها، غیرمنفی باشند. اگر  $x$  و  $y$  را بزرگترین و کوچکترین عدد از بین مجھول‌ها بگیریم، روش است که باید داشته باشیم:  $x^2 \leq 2x$  و  $y^2 \geq 2y$ ، یعنی برای  $x$  و  $y$  غیر صفر به دست می‌آید:

$$2 \leq y \leq x \leq 2$$

به این ترتیب، دستگاه دو جواب غیرمنفی دارد:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0 \quad x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 2$$

اکنون ثابت می‌کنیم، بین  $x_i$ ها، عدد منفی وجود ندارد.  $x_3$  را کوچکترین عدد بین  $x_i$ ها و  $x_2 < 0$  فرض می‌کنیم. اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، به دست می‌آید.

$$x_1 - x_3 = x_3^2 - x_4^2$$

$$چون 0 \geq x_2 - x_3 > |x_2|, |x_4| > |x_2| - x_3, \text{ بنابراین}$$

$$x_2 + x_4 = x_5^2 \leq 0$$

یعنی  $x_5 = 0$  (و بنابراین  $x_1 = x_2 = x_3$ )؛ درنتیجه، معادله پنجم با ناسازگاری مواجه می‌شود.

۳۴.۷۶. فرض می‌کنیم، تعداد موقعیت‌های باخت  $X$ ، بیشتر از تعداد موقعیت‌های بُرد  $Y$  باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، دو موقعیت باخت  $A$  و  $B$  وجود دارد، بهنحوی که با یک حرکت می‌توان از  $A$  به  $B$  رفت. درواقع، اگر این‌طور نباشد، آنوقت موقعیت‌های مجاور به باخت‌ها،  $nX$  می‌شود و، در ضمن، هریک از آن‌ها بیش از  $n$  مرتبه به حساب نمی‌آیند (در این‌جا  $n$  مجموع ثابتی است که در صورت مساله درباره آن صحبت شده است) بنابراین

$$Y \geq \frac{nX}{n} = X$$

که با فرض ما ناسازگار است.

این زوج  $A$  و  $B$ ، یکسان نمی‌توانند باشند، زیرا اگر از موقعیت  $A$  بتوان به موقعیت باخت رفت، آنوقت موقعیت  $A$ ، موقعیت بُرد است.

۳۶.۷۶. راهنمائی. حقیقت زیر را به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: در هر درخت (یعنی گراف بدون دُورهای ساده)، که مرتبه هر راس آن بیشتر از ۳ نباشد، می‌توان دست کم  $\frac{n+1}{3}$  یال غیرمتقاطع انتخاب کرد.

۳۷.۷۶. راهنمائی. باقی‌مانده حاصل از تقسیم این عددها را بر ۷ و ۱۲ پیدا کنید.

۲۰.۷۷. اگر فرض کنیم روی هر ردیف از خانه‌های قائم، یک رُخ وجود داشته باشد، آنوقت، همه رُخ‌ها را، به جز این هشت رُخ، می‌توان برداشت. ولی اگر در هر ردیف قائم یک رُخ نباشد، آنوقت به ناچار، در هر ردیف افقی صفحه شترنج، یک رُخ پیدا می‌شود که، در این صورت، بقیه رُخ‌ها را می‌توان برداشت.

۳۰.۷۷. اگر خط‌های راست از مرکز ۸ ضلعی نگذرنند، آن‌ها را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا، در وضع تازه خود، از مرکز هشت ضلعی بگذرنند و، در این صورت، مساحت‌های هر دو بخش رویه‌رو، با هم برابر خواهند بود. ولی

روشن است که، ضمن این انتقال خطهای راست، مساحت یکی از بخش‌ها بزرگتر و مساحت دیگری کوچکتر می‌شود. پذایش این تناقض، به معنای آن است که، این خطهای راست، در مرکز هشت‌ضلعی به یکدیگر برخورده‌اند. اگر این دو خط راست بر هم عمود نباشند، یکی از خطهای راست را دور مرکز می‌چرخانیم تا بر دیگری عمود شود که، در این صورت، چهار بخش با مساحت‌های برابر به‌دست می‌آید و، مثل قبل، با تناقض رویه‌رو می‌شویم.

۴.۷۷. با حل مساله ۸.۷۷ مقایسه کنید.

۵.۷۷. روشن است که دنباله نمی‌تواند از روی فاصله عددی

$$(100000, 999999)$$

پرش کند.

۶.۷۷. نفر دوم، باید با این روش عمل کند: عدد دوازده‌رقمی را، در ذهن خود، به دو عدد شش‌رقمی تقسیم کند؛ در هر حرکت نفر اول، اگر رقم  $x$  به‌وسیله نفر اول در جایی نوشته می‌شود، او عدد  $x - 9$  را در عدد شش‌رقمی دیگر، ولی در همان مرتبه بنویسد. عددی که به‌دست می‌آید، به صورت

$$A \times 10^6 + B$$

است که، در آن  $A + B = 999999$ . چون  $1 - 10^6$  بر ۷۷ بخش‌پذیر است، پس عدد

$$A \times 10^6 + B = A(10^6 - 1) + A + B = (10^6 - 1)(A + 1)$$

بر ۷۷ بخش‌پذیر می‌شود.

۸.۷۷. عدد ۱۹۷۷۱۹۷۷۱۹۷۷ را طوری می‌نویسیم که، برای آن، مقدار  $a_i$ ‌ها حداقل ممکن باشد. اگر یکی از عددهای  $a_i$ ، بزرگتر از ۱۰

باشد، می‌توان آن را به صورت  $a_0 - a_1 - a_2 - \dots - a_{10}$  تغییر داد و در ضمن، یک واحد به  $a_{i+1}$  اضافه کرد (به ازای  $i < 10$ ). این می‌ماند نتیجه بگیریم که این حالت، همان باز شده عدد مفروض در مبنای ۱۰ است که، مجموع رقم‌های آن، برابر ۷۲ می‌شود. بنابراین، پاسخ این است:

$$a_0 = 1, a_1 = 9, a_2 = 7, a_3 = 7, \dots, a_{10} = 7$$

۹.۷۷. راهنمائی. مرکز مربع مفروض را  $O$  می‌نامیم. پاره‌خط‌های راست  $LK$ ،  $KL$ ،  $MN$  و  $NK$  را روی قطرهای  $AC$  و  $BD$  تصویر می‌کنیم. در این صورت تصویرها بر اجتماع تصویرهای پاره‌خط‌های راست  $OL$ ،  $OK$  و  $ON$  بر همین قطرها منطبق می‌شوند. این باقی می‌ماند که از این قضیه استفاده کنیم: برای هر نقطه  $X$  واقع بر محیط مربع، مجموع طول‌های تصویرهای  $OX$  بر دو قطر، برابر  $\frac{1}{2}|AC|$  است. از آنجا، مجموع تصویرهای چهار پاره‌خط راست ما، از  $|AC|$  ۲ کمتر نمی‌شود و این، به معنای آن است که این حکم، برای خود پاره‌خط‌های راست هم درست است.

۱۰.۷۷. راهنمائی. اگر  $M$  راسی از چندضلعی باشد، در آغاز ثابت کنید، راس  $N$  وجود دارد، بهنحوی که  $O \in MN$ ؛ سپس، ثابت کنید؛ برای این دو راس داریم:  $|OM| = |ON|$ .

۱۱.۷۷. اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $N$  باشد، متمم آن را در  $N$ ، با  $\bar{A}$  نشان می‌دهیم. یکی از دو مجموعه  $A_1$  و  $\bar{A}_1$  بی‌پایان است. آن را  $C_1$  می‌نامیم. یکی از مجموعه‌های  $A_2 \cap C_1$  و  $\bar{A}_2 \cap C_1$  بی‌پایان است. آن را  $C_2$  می‌نامیم و غیره. درنتیجه، به مجموعه بی‌پایان  $C_n$  می‌رسیم. از آن دو عدد برمی‌گزینیم. این‌ها، همان دو عدد  $x$  و  $y$ ‌اند.

۱۲.۷۷. پاسخ. سه یا چهار ضلع.

۱۳.۷۷. پاسخ. ۱۰۱ خط شکسته. این که تعداد خط‌های شکسته

کمتر از ۱۰۱ نیست از اینجا نتیجه می‌شود که، اگر همه راس‌های روی قطعی را در نظر بگیریم که دو راس متقابل دیگر مریع را به هم وصل کرده است (تعداد این راس‌ها برابر ۱۰۱ است)، آنوقت هیچ کدام از خط‌های شکسته ما نمی‌تواند دو تا از این راس‌هار را در بر بگیرد. نمونه پاسخ برای ۱۰۱ خط شکسته روشن است.

۱۷.۷۷ از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، برخی از مقدارهای  $a_k$  و  $b_k$  نقطه مشترکی نداشته باشند. فرض می‌کنیم  $a_1$ ، در سمت چپ  $b_1$  باشد. چون  $b_2$  با  $a_1$  و  $b_1$  با  $a_2$  متقاطع است، به سادگی روشن می‌شود که  $b_2$  باید بهناچار در سمت چپ  $a_2$  باشد. اگر استدلال را بهمین ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شود که  $a_{1977}$  در سمت چپ  $b_{1977}$  و  $b_1$  در سمت چپ  $a_1$  واقع است. تناقض حاصل، حل مساله را تمام می‌کند.

۱۸.۷۷ دایره واحد را، به مرکز مبداء مختصات  $O$ ، و نقطه‌های برخورد آن را با خط‌های راست موازی بردارهای مفروض، در نظر می‌گیریم؛ در ضمن، اگر نقطه  $A$  چنان باشد که  $\vec{OA}$  با بردار متناظر خود هم‌جهت باشد، نقطه  $A$  را به رنگ قرمز، و اگر  $\vec{OA}$  با بردار متناظر خود در دو جهت مختلف باشند، نقطه را به رنگ آبی درمی‌آوریم. با توجه به شرط مساله معلوم می‌شود که نقطه‌های قرمز و آبی روی محیط دایره، به تناوب می‌آیند و دو سر هر قطر دایره، با دو رنگ مختلف مشخص می‌شود. نقطه‌ها را به ردیف شماره‌گذاری می‌کنیم:  $A_1, A_2, \dots$ ؛ و فرض می‌کنیم  $A_1$  به رنگ قرمز باشد. در این صورت  $A_{n+1}$  آبی است، یعنی تعداد نقطه‌ها در انتخاب  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  زوج و، بنابراین،  $n$  فرد است.

۲۳.۷۷ عدد طبیعی  $n$  را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \subset [a, b]$$

- ۱ را با  $t$  نشان می‌دهیم. در این صورت  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \{x + t\}$$

$\{a\}$  به معنای بخش کسری عدد  $a$  است. به این ترتیب

$$f(f(\dots(x)\dots)) = \{x + nt\}$$

که در آن، نماد  $f$ ، به تعداد  $n$  بار به کار رفته است. چون  $t$  عددی گنج است، بنابراین بخش‌های کسری عددهای  $x, x+2t, x+t, \dots, x+nt$  را پیدا کرد: با هم فرق دارند؛ بنابراین، می‌توان دو تا از آنها را پیدا کرد:

$$\{x + at\} \text{ و } \{x + bt\}$$

که اختلاف آنها کمتر از  $\frac{1}{n}$  باشد. به این ترتیب

$$k = |a - b| \Rightarrow |\{x\} - \{x + kt\}| < \frac{1}{n}$$

یعنی  $(f(f(\dots(x)\dots)))$  (از  $f$  به تعداد  $k$  مرتبه استفاده شده است)، در بازه  $[a, b]$  واقع است.

پادداشت. توجه کنید: در اینجا، حکم مساله را برای هر نقطه  $x$  از بازه  $[a, b]$  ثابت کردیم. ۲۵.۷۷ فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \sin xtgx, g(x) = x^4$$

چون  $f(0) = g(0)$ ، کافی است این نابرابری را ثابت کنیم:

$$f'(x) \geq g'(x)$$

چون  $f'(0) = g'(0)$ ، پس کافی است ثابت کنیم:

$$f''(x) \geq g''(x)$$

و در واقع داریم:

$$f''(x) = \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \left( \cos x + \frac{1}{\cos x} \right) > 2 = g''(x)$$

زیرا برای هر مقدار مثبت  $t \neq 1$ ، داریم:  $2 \cdot t + \frac{1}{t} > 2$

۲۶.۷۷ پاسخ. حداکثر هشت راس. راهنمائی. در غیر این صورت، مختصات وسط پاره خط‌های راستی که هر دو راس را به هم وصل می‌کنند، عددهای درستی می‌شود. پیدا کردن مثال‌ها، دشوار نیست.

۲۷.۷۷ فرض می‌کنیم، همه این عددها، بر  $p$  بخش‌پذیر باشند. در

این صورت عددهای

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k},$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k},$$

$$\dots \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

هم، باید بر  $p$  بخش‌پذیر باشند. به همین ترتیب، همه عددهای  $\binom{n+i}{J}$ ، که در آن  $J \leq i$  عددهای غیرمنفی و درست دلخواهند، بر  $p$  بخش‌پذیر می‌شوند. ولی در بین این عددها، عدد  $\binom{n}{0}$  وجود دارد، به ازای  $i = J = 0$ ، که برابر است با ۱. تنافق.

۲۸.۷۷. مقطع یک چهاروجهی را با یک صفحه در نظر می‌گیریم. در مقطع، یک مثلث به دست می‌آید که زاویه‌های آن، بزرگتر از زاویه‌های دو وجهی متناظرشان نیستند. بنابراین، مجموع سه زاویه دو وجهی از چهار وجهی، از  $180^\circ$  درجه بیشتر است. اگر چهار نابرابری از این‌گونه را با هم جمع کنیم، به نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۲۹.۷۷. راهنمایی. با روش استقرای ریاضی ثابت کنید، برای عددهای

دلخواه

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n+1}$$

نابرابری زیر برقرار است:

$$a_1^2 - a_2^2 + \dots - a_{2n}^2 + a_{2n+1}^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1})^2$$

۱.۷۸. حل مساله ۳.۷۴ را بیینید.

۲.۷۸. چون هر مثلث سیاه، دست‌کم با یک مثلث سفید تماس دارد، پس تعداد آن‌ها از تعداد کل ضلع‌های مثلث‌های سفید تجاوز نمی‌کند؛ تعداد این ضلع‌ها هم، برابر است با سه برابر تعداد مثلث‌های سفید.

۳.۷۸. نه، این عدد، اول نیست:

$$57599 = 240^2 - 1 = 239 \times 241$$

۴.۷۸. پاسخ. ۱۰ شاه.

۵.۷۸. پاسخ. نه، نمی‌توان.

۶.۷۸. حل مساله ۹.۷۰ را بیینید.

۷.۷۸. پاسخ. نه، ممکن نیست. باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۲ را در نظر بگیرید.

۸.۷۸. پاسخ.  $a = 8$

۱۰.۷۸ حل مساله ۹.۷۱ را ببینید.

۱۱.۷۸ فرض می‌کنیم، این طور نباشد و قطری را درنظر می‌گیریم که، در هر طرف آن، ۵۰ عدد وجود داشته باشد. تفاضل دو مجموعی را که از عدهای دو طرف قطر به دست می‌آید، مثبت می‌گیریم (یکی از دو طرف قطر را ثابت می‌گیریم و از مجموع عدهای این طرف، مجموع عدهای واقع در طرف دیگر را کم می‌کنیم). اکنون قطر را می‌چرخانیم، به نحوی که دو انتهای آن از روی یک عدد رد شوند. اگر این دو عدد را، که در واقع جای خود را از یک طرف قطر به طرف دیگر تغییر داده‌اند،  $a$  و  $b$  بنامیم، اختلاف مجموع‌های دو طرف قطر، به اندازه  $(b - a)$  تغییر می‌کند. روشن است که این عدد از

$$2(999 - 100) = 1798 < 1800$$

تجاوز نمی‌کند. اکنون بازه  $[900, 900]$  را درنظر می‌گیریم. روشن است که علامت اختلاف مجموع‌هایی که به‌وسیله قطر از هم جدا شده‌اند، بعد از ۵۰ دوران قطر، تغییر می‌کند. چون این تفاضل، در آغاز مثبت و بزرگتر از ۹۰۰ بود، اکنون منفی و کوچکتر از  $-900$  می‌شود. ولی چون بعد از هر یک از ۵۰ دوران، حداقل به اندازه  $1800$  تغییر می‌کند ( $1800$  طول بازه  $[900, 900]$  است)، بهناچار در لحظه‌ای، این تفاضل در همان بازه‌ای قرار می‌گیرد که مورد خواست مساله است.

۱۴.۷۸ حل مساله ۲۰.۶۳ را ببینید.

۱۵.۷۸ پاسخ. به‌طور حتم، حق با مردها نیست. ثابت کنید، اضافه یکی از مجموع‌ها نسبت به مجموع دیگر، باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۶.۷۸ بله، می‌توان. برای نوشتن چنین جدولی، محورهای مختصات را روی صفحه در نظر می‌گیریم؛ سپس، در هر خانه‌ای که مجموع دو مختص آن بر  $1918$  بخش‌پذیر است، عدد ۱ و در هر خانه‌ای که مجموع دو مختص

آن بر ۱۹۷۸ بخش پذیر است، عدد ۱ - را قرار می‌دهیم. اگر در خانه‌ای باید هر دو عدد را بگذاریم، مجموع آنها، یعنی صفر را می‌گذاریم. در همه خانه‌های دیگر، باید عدد صفر را قرار داد.

۱۷.۷۸. دایره‌ای را از نقطه‌های تماس این جفت دایره‌ها بگذرانید: اول

و دوم، سوم و چهارم، پنجم و ششم.

۱۹.۷۸. روشن است که درجه این چندجمله‌ای، باید فرد باشد.

چندجمله‌ای را  $f$  می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $2 = f(p)$ ; در این صورت  $2 \geq p$ . فرض می‌کنیم،  $y$  بزرگترین عدد اولی باشد که برای هر

$$n < x = f^{-1}(y)$$

داشته باشیم:  $(f(x) < f(n))$ ، و در بازه  $[x, \infty)$ ، تابع  $f$  یکنوا باشد. در این صورت، برای هر عدد اول از ۲ تا  $y$ ، متناظر آن در بازه از  $p$  تا  $x$  واقع می‌شود و عددی اول است. چون  $2 \geq p \geq y$  و  $x < y$  (البته  $f(x) = f(y)$  نمی‌تواند به صورت  $c - x$  باشد)، و اختلاف عدهای اول از بازه  $[2, y]$  باید متناظر با اختلاف عدهای اول از بازه  $[p, x]$  باشد، پس  $p = 2$  و  $y = x$  و، بنابراین،  $x = f(x)$ ; و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۰.۷۸. اگر برابری‌های روشن

$$(a_i - b_i)(a_j - b_j) = a_i a_j + b_i b_j - (a_i b_j + a_j b_i)$$

را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i \leq j} (a_i - b_i)(a_j - b_j) = \sum_{i \leq j} a_i a_j + \sum_{i \leq j} b_i b_j - \\ &\quad - \sum_{i \leq j} (a_i b_j + b_i a_j) \end{aligned}$$

اکنون توجه می‌کنیم:

$$\sum_{i \leq j} (a_i b_j + b_i a_j) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

بدون این که به کلی بودن مطلب صدمهای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

که در نتیجه، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{i \leq j} a_i a_j + \sum_{i \leq j} b_i b_j - (b_1 + b_2 + b_3)^* \leq \\ &\leq \sum_{i \leq j} a_i a_j \leq 1 \end{aligned}$$

ذیرا روش است که  $(b_1 + b_2 + b_3)^* \geq \sum_{i \leq j} b_i b_j$

۲۲.۷۸. دایره‌های به شعاع  $\varepsilon - \frac{1}{2}$  و به مرکزهای  $(0, 0)$ ،  $(0, 1)$ ،  $(1, 0)$  و  $(1, 1)$ ؛ دایره‌های به شعاع  $\varepsilon$  و به مرکزهای  $(\frac{1}{2}, 0)$ ،  $(0, \frac{1}{2})$  و  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و همچنین، دایره با شعاع  $\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}$  و به مرکز  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  را درنظر بگیرید.

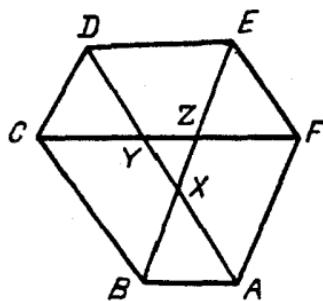
۲۴.۷۸. پاسخ. هشت مثلث.

۲۷.۷۸. فرض می‌کنیم، در شش ضلعی  $ABCDEF$ ، قطرهای  $AD$ ،  $BE$  و  $CF$  در یک نقطه یکدیگر را قطع نکرده باشند (شکل ۴۹ را ببینید). در این صورت، چون باید داشته باشیم:

$$S_{ABX} = S_{XDE}, S_{BCZ} = S_{ZEF}, S_{CDY} = S_{YAF}$$

به این نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$\begin{aligned} |AX| \cdot |BX| &> |DY| \cdot |EZ|, |FZ| \cdot |EZ| > |BX| \cdot |CY|, \\ |CY| \cdot |DY| &> |AX| \cdot |FZ| \end{aligned}$$



شکل ۴۹

که از ضرب آنها در یکدیگر، به یک نابرابری نادرست می‌رسیم؛ یعنی قطرها، و در یک نقطه به هم می‌رسند.

۲۸.۷۸ راهنمائی. با استقرا، روی مجموع بعدهای جدول، ثابت کنید، اگر خانه‌های جدول  $2n \times 2n$  را، با شرط صورت مساله رنگ کنیم، خانه‌های گوشه‌ای، رنگ‌های مختلفی پیدا می‌کنند.

۳۰.۷۸ اگر شش عدد متوالی واقع بر راس‌ها را

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+5}$$

بنامیم، بعد از پنج دقیقه، به جای عدد  $a_k$ ، عدد

$$a_k - 5a_{k+1} + 10a_{k+2} - 10a_{k+3} + 5a_{k+4} - a_{k+5}$$

خواهد بود. اگر همه عبارت‌های مشابه را جمع و جمله‌های بخش‌پذیر بر ۵ را در آنها، حذف کنیم، به دست می‌آید.

$$\sum_k (a_k - a_{k+5}) = 0$$

(در اینجا  $a_{102} = a_2$ ،  $a_{101} = a_1$  و غیره). بنابراین، این مجموع بر ۵ بخش‌پذیر است.

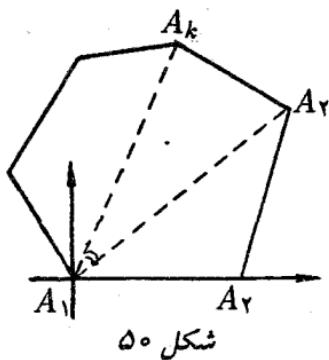
۳۱.۷۸. اگر پاره خط راست  $AB$  شامل نقطه انتهایی پاره خط راست  $AB$ ، و پاره خط راست  $CD$  شامل نقطه انتهایی پاره خط راست  $AB$  باشد ( $x$  یا  $y$  می‌توانند برابر  $0$ ،  $1$  یا  $2$  باشند)، آنوقت روشن است که  $x$  و  $y$  یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. از اینجا نتیجه می‌شود که، اگر همه عددهای  $a_k$  را با هم جمع کنیم ( $a_k$  را تعداد نقطه‌های انتهایی پاره خط‌های راست دیگری گرفته‌ایم) که روی پاره خط راست  $\mathbb{A}$  قرار دارند، آنوقت باید عددی زوج به دست آید. از طرف دیگر، مجموع

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1978$$

عددی فرد است. بنابراین، شماره‌گذاری پاره خط‌های راست، به صورتی که مساله خواسته است، ممکن نیست.

۳۲.۷۸. فرض می‌کنیم این‌طور نباشد؛ در ضمن برای سادگی کار،  $a_1 = 1$  می‌گیریم. از تعریف دنباله نتیجه می‌شود که، اگر عدد  $n$ ، وقتی در مبنای  $2$  نوشته می‌شود، شامل تعداد زوجی واحد باشد  $\circ$  و، در غیر این صورت  $1$ . مقدارهای به اندازه کافی بزرگ  $k$  داریم:  $a_{k+n_p} = a_k$  (برای هر  $n$ ). فرض می‌کنیم  $q = 2^k$ ؛ در ضمن  $q$  را طوری انتخاب می‌کنیم که عدد  $pq$  در مبنای  $2$ ، دارای تعداد فردی واحد باشد. در این صورت به دست می‌آید  $a_{k+pq} \neq a_k$ . تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۳.۷۸. مثلث  $K$  را طوری در نظر می‌گیریم که راس‌های آن بر راس‌های چندضلعی  $M$  واقع و، در ضمن، حداقل ممکن مساحت را داشته باشد. در این صورت، چندضلعی  $M$  در درون مثلث  $K'$  واقع می‌شود که از تجانس  $K$  با ضریب  $2$  - به دست می‌آید. برای این منظور، باید از هر راس مثلث، خط راستی موازی ضلع رو به روی آن رسم کرد. اکنون روشن است که  $M$  در تجانس به ضریب  $\frac{1}{2}$  -، به شکلی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را



شکل ۵۰

طوری انتقال داد که در درون مثلث  $K$  قرار گیرد.

۳۵.۷۸. چندضلعی را طوری درنظر می‌گیریم که راس  $A_1$  بر مبدأ مختصات و ضلع  $A_1A_2$  بر محور طولها قرار گیرد (شکل ۵۰). چون طول ضلعها و قطرها، عددهایی گویا هستند، پس کسینوس زاویه  $A_kA_1A_2$  عددی گویاست؛ بنابراین، باتوجه به برابری

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

سینوس‌های زاویه‌های گویایی از عدد ثابتی مثل  $t$  خواهند بود. درنتیجه، می‌توان فرض کرد که همه نقطه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_n$  در نقطه‌های گرهی یک شبکه مستطیلی با گام افقی و گام قائم  $h$  واقع‌اند، زیرا از مختصات گویا می‌توان، به کمک تجانس، به مختصات درست رسید. اکنون همه چندضلعی‌هایی را درنظر می‌گیریم که از  $M$ ، با انتقال موازی  $\vec{A_1P}$  به دست می‌آیند ( $P$ ، نقطه گرهی دلخواهی از شبکه است)، همچنین، همه چندضلعی‌هایی را که، با همین انتقال، از چندضلعی  $M'$  به دست می‌آیند ( $M'$ ، قرینه  $M$  نسبت به مبدأ مختصات است). این گروه چندضلعی‌ها که با مربع  $K$  برخورد می‌کنند، به همان صورتی که مورد خواست مساله است، آن را می‌پوشاند، زیرا همراه با هر چندضلعی  $N$  به ضلع  $XY$ ، که  $K$  را قطع می‌کند، چندضلعی دیگری هم وجود دارد که قرینه

$N$  نسبت به وسط  $XY$  است بنابراین، ضمن عبور از ضلع  $XY$ ، تعداد پوشش‌ها تغییر نمی‌کند.

.۲۰.۷۹ پاسخ. در سال ۱۹۵۷

.۲۱.۷۹ پاسخ. در کلاس ۳۵ دانشآموز وجود دارد.

.۲۲.۷۹ داریم:

$$\begin{aligned} a^r - b^r &= (a - b)(a^{r-1} + ab + b^{r-1}) = \\ &= (a - b)[(a + b)^{r-1} - ab] \end{aligned}$$

چون  $a + b$  و  $ab$  بر  $c$  بخش‌پذیرند، پس  $(a + b)^{r-1}$  و  $ab$  و درنتیجه مجموع آن‌ها بر  $c$  بخش‌پذیر است.

.۲۳.۷۹ حل مساله ۳۴.۷۴ را ببینید.

.۲۴.۷۹ ۱۰. پاسخ. ۱۶ عدد. راهنمائی. هر عدد را با هر بخشیاب اول خودش عوض کنید.

.۲۵.۷۹ .۱۱.۷۹

.۲۶.۷۹ ۱۲.۷۹ پاسخ.  $b = -1$ ،  $a = 0$  یا  $c = 4$ ،  $b = 3$ ،  $a = 2$  یا  $c = -2$

.۲۷.۷۹ ۱۳. هریک از ضلع‌های این خط شکسته، میانه‌ای از یک مثلث قائم‌الزاویه است (مثلاً  $A_1B_1C$ ، میانه مثلث  $BB_1C$  است) و بنابراین، طول آن برابر است با نصف طول وتر همان مثلث ( $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|$ ). اگر همه این برابری‌ها را با هم جمع کنیم، به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

.۲۸.۷۹ ۱۴.۷۹ حل مساله ۴.۶۵ را ببینید.

.۲۹.۷۹ .۱۵.۷۹

.۳۰.۷۹ ۱۶. نقطه برخورد  $A_1C_1$  و  $AB$  را  $P$  و نقطه برخورد  $A_1C_1$  و  $BC$  را  $Q$  می‌نامیم. مثلث  $BPQ$  متساوی‌الساقین است و بنابراین، میانه  $A_1C_1$  در آن بر نیمساز منطبق است ( $BB_1$ ). سپس،  $BM_2$  بر  $BM_1$

عمود و زاویه  $C_1M_2B_1$  برابر  $90^\circ$  درجه؛ همچنین زاویه  $C_1M_1B_1$  هم برابر  $90^\circ$  درجه است، یعنی  $M_1$  و  $M_2$  روی محیط دایره به قطر  $B_1C_1$  قرار دارند.

۱۷.۷۹ . مثلاً عددهای به صورت  $(3k + 2)^2$  از این قبیل‌اند. در واقع

$$n^2 + p = (3k + 2)^2 \Rightarrow p = (3k + 2 - n)(3k + 2 + n)$$

اگر بخواهیم،  $p$  عددی اول باشد، باید داشته باشیم:

$$3k + 2 - n = 1 \Rightarrow n = 3k + 1$$

که در این صورت، مقدار  $p$  چنین می‌شود:

$$p = 3k + 2 + n = 3k + 2 + 3k + 1 = 6k + 3$$

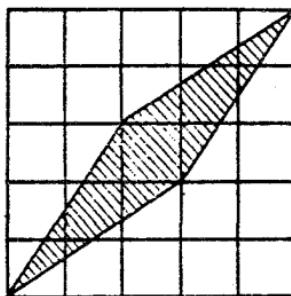
که بر ۳ بخش‌پذیر است و عددی اول نیست (به ازای  $k > 0$ ).

۱۸.۷۹ . اگر  $1 < k$ ، عددی فرد باشد، روشن است که عدد مفروض بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است. در حالت زوج بودن  $k$ ، اگر عدد را در ۱۱ ضرب کنیم، عددی به دست می‌اید که بر  $111\dots1$  (شامل  $k$  رقم برابر واحد) بخش‌پذیر است. چون  $A$  و ۱۱ نسبت به هم اول‌اند، پس عدد ما هم بر  $A$  بخش‌پذیر است.

۲۰.۷۹ . محاسبه مستقیم زاویه‌ها نشان می‌دهد که  $\widehat{EOK} = 120^\circ$  بنابراین چهارضلعی  $BEOK$  قابل محاط در دایره است. چون  $BO$  نیمساز زاویه  $B$  است، پس  $\widehat{OBE} = \widehat{OBK}$ ، یعنی وترهای  $OE$  و  $OK$  طول‌های برابر دارند.

۲۱.۷۹ . پاسخ. باید  $n$  بردار پشت سر هم را انتخاب کرد.

۲۲.۷۹ . اگر همه این عددها مرکب باشند، باید هر کدام از آن‌ها بخشیاب اولی کوچک‌تر از  $1 - 2n$  داشته باشد. ولی تعداد این عددها از



شکل ۵۱

۱ -  $n$  بیشتر نیست، یعنی دو تا از این بخشیاب‌ها بر هم منطبق‌اند، که با فرض مساله مبنی بر این‌که عددها دو به دو نسبت به هم اول‌اند، متناقض است.

۲۳.۷۹. پاسخ. تنها وقتی ممکن است که، هر دو عدد  $m$  و  $n$ ، بر ۴ بخش‌پذیر باشند.

۲۵.۷۹. پاسخ. به ازای  $10 = n$  یا  $11$  یا  $12 = n$ .

۲۷.۷۹. پاسخ. حداقل مساحت، برابر ۵ است. مثال را روی شکل ببینید.

۲۸.۷۹. پاسخ. اندازه زاویه‌ها:  $90^\circ$  درجه،  $\frac{1}{2}\alpha$ ،  $\frac{1}{2}\alpha$ ،  $90^\circ - \alpha$ .

۲۹.۷۹. راهنمائی. مجموع مجذورهای سمت چپ برابری‌ها را در نظر

بگیرید. پاسخ.  $y = 0$ ،  $x = 1$  یا  $y = 1$ ،  $x = 2$  یا  $y = -1$ ،  $x = 0$

۳۲.۷۹. فرض می‌کنیم  $x^y + 3^y = y^x$ ، یعنی

$$x^y - y^x = 3^y$$

بنابراین، باید  $y - x$  و  $x + y$ ، توان‌هایی از عدد ۳ باشند، یعنی  $3^k$  و  $3^{y-k}$ . درنتیجه  $\frac{1}{2}(3^k - 3^{y-k}) = y$ . چون

$$\frac{1}{2}(3^k - 3^{y-k}) \geq 3^{y-k-1} \geq 3^{\frac{1}{2}(y-3)}$$

و بها زای  $7 \geq y$ ، این عدد از  $y$  بزرگتر است (که به سادگی و با استقرار ثابت می شود)، پس تنها این می ماند که عده های کوچکتر از هفت را آزمایش کنیم.  
پاسخ.  $1 = y$  یا  $3 = y$ .

۳۴.۷۹. همه گونه های ممکن زاویه های دوران دایره را، از  $0$  تا  $2\pi$  در نظر می گیریم. اگر یکی از قطاع ها، زاویه ای برابر  $\alpha$  و دیگری زاویه ای برابر  $\beta$  داشته باشد، آنوقت زاویه های دوران، که بهما زای آن ها، نتیجه دوران قطاع اول، دومی را قطع می کند، بازه به طول  $\frac{2\pi}{n^2 - n + 1} \leq \alpha + \beta$  را پر می کند. اگر همه این گونه زوج ها را در نظر بگیریم (که تعداد آن ها برابر است با  $(1 - n)$ ، می بینیم که بازه های متناظر، مجموعی به طول حداقل برابر

$$\frac{2\pi n}{(n - 1)(n^2 - n + 1)} < 2\pi$$

خواهد داشت. بنابراین زاویه دوران مورد نظر، وجود دارد.

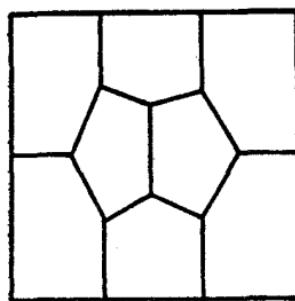
۳۴.۷۹. راهنمائی. ثابت کنید، برای هر ضلع این وجه، ضلع دیگری وجود دارد که با آن موازی است و طولی برابر آن دارد.

۳۵.۷۹. کوتاه ترین روش اثبات، که البته روش مقدماتی نیست، با استفاده از تبدیل های تصویری به دست می آید. با دور کردن نقطه برخورد خط های راست  $EA$  و  $BF$  به بینهایت، شکلی به دست می آید که نسبت به مرکز دایره متقارن است؛ و از همین جا، درستی حکم مساله نتیجه می شود.

۳۶.۷۹. حل مساله ۲.۷۰ را ببینید.

۱.۸۰. پاسخ. نه، نمی توان. اگر عده های از  $1$  تا  $30$  را در  $6$  ستون قرار دهیم، در حالتی که مجموع هر ستون با مجموع هر ستون دیگر برابر باشد، باید مجموع همه عده ها بر  $6$  بخش پذیر باشد، در حالی که مجموع همه عده ها، عددی فرد است.

۲.۸۰. پاسخ. در اردو، سه نوجوان دوازده ساله شرکت دارند.



شکل ۵۲

۳.۸۰. همه نقطه‌ها را، به ۱۰۰ زوج دو به دو متقارن تقسیم می‌کنیم. همه این زوج‌ها را به سه گروه می‌توان تقسیم کرد: دو نقطه یک زوج، به رنگ قرمزند؛ هر دو نقطه به رنگ آبی‌اند؛ از دو نقطه، یکی قرمز و دیگری آبی است. روشن است که زوج نقطه‌های گونه اول با زوج نقطه‌های گونه دوم، به تعدادی برابرند. تنها این می‌ماند توجه کنیم که فاصله از نقطه‌های گونه اول (دوم) تا نقطه  $A$  (تا نقطه  $B$ ) برابر است با طول پاره خط راست  $AB$ ، و در گونه سوم، در هر زوج، فاصله نقطه قرمز تا نقطه  $A$ ، برابر است با فاصله نقطه آبی تا نقطه  $B$ .

۵.۸۰. نمونه این تقسیم، در شکل ۵۲ داده شده است.

۶.۸۰. دو ایستگاه  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم، خط  $XY$  از ایستگاه  $A$  و خط  $MN$  از ایستگاه  $B$  عبور کند. اگر این دو قطر یکدیگر را قطع کنند، آنوقت می‌توان با یک جابه‌جایی از  $A$  به  $B$  رسید. در حالتی که این دو قطر یکدیگر را قطع نکنند، آنوقت در چهارضلعی  $XYMN$ ، دو قطر، و مثلاً  $YM$  و  $XN$ ، در نقطه‌ای مثل  $O$  به هم می‌رسند. در این صورت، در مسیر یکی از این قطرها (مثلاً  $YM$ ) تراهموا عبور می‌کند و می‌توان از  $A$  به  $B$ ، با دو جابه‌جایی و به ترتیب زیر رسید:

$$A \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow B$$

۹.۸۵. پاسخ. نه، نمی‌توان.

۱۱.۸۵. پسربیچه باید به این ترتیب عمل کند: اگر دختربیچه، شوکولات را از قوطی حاوی یک عدد شوکولات برمی‌دارد، او باید از قوطی که بیش از یک شوکولات دارد، بردارد؛ اگر دختربیچه از جایی که درست دو شوکولات است، برمی‌دارد، او باید شوکولات باقی‌مانده را از همان قوطی بردارد؛ و سرانجام، اگر دختربیچه به سراغ قوطی حاوی بیش از دو شوکولات رفته است، او باید سراغ قوطی حاوی یک شوکولات برود.

۱۲.۸۵. دستگاه محورهای مختصات را روی صفحهٔ شطرنجی در نظر می‌گیریم و، سپس، خانه‌های صفحه را، باتوجه به قاعدهٔ زیر، به رنگ‌های ۵، ۱، ۲، ۳ و ۴ درمی‌آوریم: اگر مختصات خانه‌ای، برابر  $(x, y)$  باشد، آنوقت آن را با شماره‌ای از رنگ‌ها، رنگ می‌کنیم که برابر با باقی‌مانده حاصل از تقسیم  $2y + 2x$  بر ۵ باشد.

۱۳.۸۵. پاسخ.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 9 \\ b = 8 \\ c = 4 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 9 \\ b = 4 \\ c = 8 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

۱۵.۸۵. راهنمایی. این مثلث‌ها را می‌توان به ۱۷ گروه تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه دو مثلث با مساحت‌های برابر وجود داشته باشد.

۱۷.۸۵. توجه کنید که

$$53 + 96 = 83 + 66 = 109 + 40 = 149$$

این نام‌گذاری‌ها را می‌پذیریم:

$$a = 53, b = 83, c = 109, x = 149$$

در این صورت، عدد ما به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{aligned} abc + (x-a)(x-b)(x-c) &= \\ &= x[x^2 - (a+b+c)x + (ab+ac+bc)] \end{aligned}$$

یعنی بر  $x = 149$  بخش‌پذیر است و خارج قسمت هم برابر واحد نیست.  
۲۰.۸۰ راهنمایی. از این نابرابری، که برای هر عدد مثبت  $x$  درست است، استفاده کنید:

$$\sqrt{194x} < 1 + 2x$$

۲۲.۸۰ روشن است که هر نفر، دست‌کم، در یکی از دو دور بازی متوالی شرکت دارد. چون اولی در ۱۰ بازی شرکت کرده، روی هم بیش از ۲۱ بازی نمی‌تواند وجود داشته باشد و، بنابراین، تعداد دورهای بازی، درست ۲۱ بار بوده است. از این‌جا نتیجه می‌شود که سومی در ۱۱ دور بازی شرکت داشته است (دومی در تمام مدت، پشت میز بازی بوده است).

۲۵.۸۰ می‌توان  $\dots 0, 501, 0, 502, \dots$  در نظر گرفت. اکنون تفاضل

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2} < 0, 502 - 0, 5 = 0, 002 = \frac{1}{500}$$

از طرف دیگر

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2m-n}{2n} \geq \frac{1}{2n}$$

زیرا  $n - 2m$  عددی طبیعی است. به‌این ترتیب باید داشته باشیم  $n > 2m$  و به‌ازای  $n = 251$ ، کسر مورد نظر وجود دارد.

$$\frac{126}{251} = 0, 501992\dots$$

۲۶.۸۰ با یکبار وزن کردن، می‌توان تعداد سکه‌های تقلیبی را در هر تعداد از سکه‌ها مشخص کرد. ۹ سکه را در خانه‌های یک جدول  $3 \times 3$  قرار می‌دهیم. با چهار بار وزن کردن، می‌توان تعداد سکه‌های تقلیبی را در هریک از دو سطر اول و در هر یک از دو ستون اول جدول پیدا کرد. اگر ضمن یکی از این عمل‌ها، معلوم شود، در یکی از سطرها یا در یکی از ستونها، دو سکه تقلیبی وجود دارد، آنوقت با توجه به وزن کردن‌های دیگر، جای سکه‌های تقلیبی روشن می‌شود و نیاز به عمل وزن کردن برای بار پنجم نیست. در حالتی هم که سکه‌های تقلیبی در یک سطر یا یک ستون نباشند، در محل برخورد سطر و ستون مربوط قرار دارند و، بنابراین، در بین چهار سکه‌اند، که با وزن کردن یکی از آن‌ها، جای سکه‌های تقلیبی روشن می‌شود.

۲۷.۸۰ اگر  $AK$  را نیمساز زاویه  $A$  فرض کنیم، با توجه به شرط

مسئله، داریم:

$$\widehat{CAK} = \widehat{KAB} = \widehat{ABK}$$

یعنی  $|AK| = |BK|$  و مثلث‌های  $ACK$  و  $ABC$  متشابه‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود.

$$|AC| : |BC| = |BK| : |AB|$$

که اگر ویژگی نیمساز را در نظر بگیریم:

$$|AC| : (|BC| - |BK|) = |AB| : |BK|$$

و از این دو برابری، به نتیجه مطلوب می‌رسیم.  
۲۹.۸۰ پاسخ. ۹۸ و ۳۲

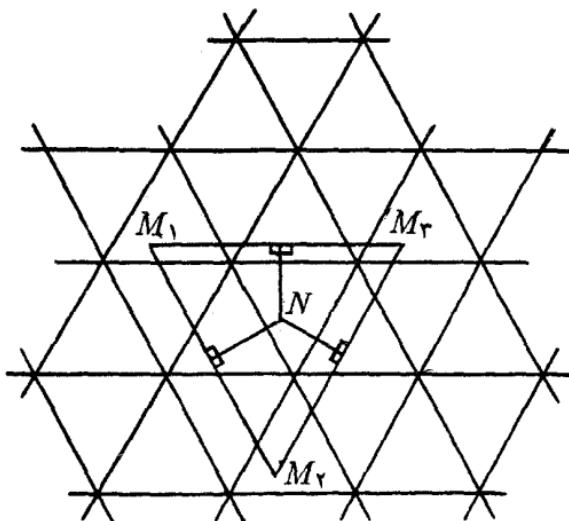
۳۰.۸۰ راهنمائی. در نابرابری شرط مسئله، عددهای  $۵$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $۱$  را قرار دهید.

۳۱.۸۰ حل مساله ۱۰.۶۳ را ببینید.

۳۵.۸۰ پاسخ، با ۱۴۸۶ عدد مختلف.

۳۹.۸۰ گستردۀ نامتناهی چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را بر صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ۵۳) و اثر هر راس آن را، همه‌جا با یک حرف مشخص می‌کنیم.  $M$  و  $N$  را، دو نقطه از سطح چهاروجهی می‌گیریم و به همه نقطه‌های متناظر آنها، روی گستردۀ چهاروجهی توجه می‌کنیم. نقطه‌های  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ، متناظر با نقطه  $M$ ، روی گره‌های شبکه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، قرار دارند. اثری از راس‌های  $N$  را درنظر می‌گیریم که در درون یکی از این مثلث‌های  $M_1M_2M_3$  واقع است: نقطه  $N_1$ . این می‌ماند که ثابت کنیم، یکی از فاصله‌های از  $N_1$  تا راس‌های  $M_1M_2M_3$ ، از  $\sqrt{3}$  بیشتر نیست. و این، از آنجا ناشی می‌شود که مثلث، به سه چهارضلعی  $OP_1P_2M_1, OP_1P_2M_2$  و  $OP_1P_2M_3$  تقسیم می‌شود که، در آنها، مرکز مثلث  $P_1, P_2, P_3$  و  $M_1M_2M_3$  پای عمودهایی است که از  $O$  بر ضلع‌ها فروд آمده‌اند، زیرا نقطه  $N_1$  بر یکی از آنها قرار دارد.

۴۰.۸۰ موقعیت مورد نظر سوسک‌ها، در حالتی است که آن‌ها محیط چندضلعی را نصف کرده باشند. فرض می‌کنیم، در این حالت، کمترین فاصله بین سوسک‌ها، در جریان حرکت، در نقطه‌های  $A$  و  $B$  پیش آید که، در آن، البته،  $A$  و  $B$  محیط چندضلعی را نصف می‌کنند. همچنین فرض می‌کنیم، با موقعیت نخستین دیگری از سوسک‌ها، کمترین فاصله بین آن‌ها در جریان حرکت، برابر  $|AB| > d$  باشد. در این صورت روشن است که، در ضمن، دو لحظه زمانی وجود دارد که سوسک‌ها، در راس‌های پاره خط‌های راست موازی  $AB$  واقع می‌شوند (که آن‌ها را  $A_1B_1$  و  $A_2B_2$  می‌نامیم)، این‌ها در دو طرف مختلف  $AB$  هستند و طول آن‌ها بیشتر از طول پاره خط راست  $AB$  است (زیرا طول آن‌ها، از  $d$  کمتر نیست) شکل ۵۴ را ببینید. ولی طول



شکل ۵۳

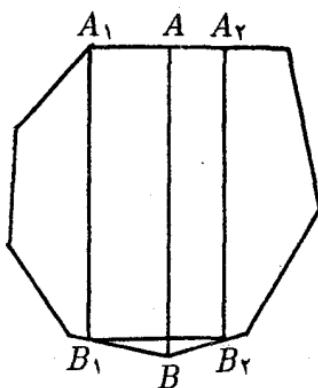
خط میانه ذوزنقه  $A_1B_1B_2A_2$  از طول  $AB$  بزرگتر نیست و، در ضمن، از هر قاعده ذوزنقه کمتر نیست. تناقض حاصل، درستی فرض نخستین ما را تایید می‌کند.

.۴۱.۸۰ پاسخ.  $3k$ .

.۴۲.۸۰ راهنمائی. عبارت سمت چپ نابرابری را، به عنوان تابعی از یکی از متغیرهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  در نظر بگیرید. به این نکته توجه کنید که، وقتی سه جمله‌ای، با ضریب درجه دوم مثبت باشد، به حداقل مقدار خود در یکی از دو انتهای بازة  $[1, 0]$  می‌رسد.

.۴۳.۸۰ پاسخ. نقطه را باید در گرانیگاه مثلث (نقطه برخورد سه میانه) گرفت.

.۴۴.۸۰ - ۲.  $3k$  اتاق درنظر می‌گیریم و همه مردم را، با رعایت شرط مساله به آن‌ها هدایت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم، در هر لحظه، فردی را که



شکل ۵۴

نوبت اوست، می‌توان به یکی از گروه‌ها اضافه کرد، به نحوی که شرط مساله، همچنان برقرار باشد. در واقع چون تعداد کسانی که به یک موسیقی دان یا به یک نقاش و یا به یک نویسنده علاقه‌مندند، از  $3 - 3k = (1 - k)3$  بیشتر نیست، بنابراین بین  $2 - 3k$  اتاق مفروض، می‌توان اتفاقی پیدا کرد که در آن هیچ کدام از این افراد نباشند؛ و شخصی را که نوبت اوست، به همین اتاق روانه می‌کنیم.

۴۶.۸۵. تعداد راس‌های چندضلعی را  $n$  می‌گیریم و، به کمک استقرای ریاضی، حکمی را که اندکی قوی‌تر است، ثابت می‌کنیم: این بُرش را می‌توان انجام داد، به شرطی که بدانیم از هر سه رنگ استفاده شده‌است و  $n$ ، عددی طبیعی است. برای  $n = 3$ ، وضع روشن است. راس  $A$  را در نظر می‌گیریم که راس‌های مجاور آن  $B$  و  $C$ ، رنگ‌های متفاوتی دارند (چنین راسی، مسلماً وجود دارد). با جدا کردن مثلث  $ABC$ ، یک  $(n - 1)$  ضلعی می‌ماند که یا در راس‌های آن، از سه رنگ استفاده شده (که در این صورت، باید از فرض استقرای استفاده کرد) و یا از دو رنگ. در این حالت، باید به این ترتیب عمل کرد: مثلث  $ABC$  را به جای خود برمی‌گردانیم و  $n$  ضلعی را به مثلث‌هایی می‌بریم که یکی از راس‌های هر کدام از آن‌ها، همان نقطه  $A$  و دو راس دیگر

آن، دو راس دیگر (و مجاور) ضلعی باشد.

۴۷.۸۵. مکعب را به  $27 = 3 \times 3 \times 3$  تقسیم و آنها را، به ردیف شطرنجی، به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم، بهنحوی که مکعب‌های گوشه‌ای سیاه باشند. در این صورت، در هر مکعب مستطیل، درست دو مکعب  $1 \times 1 \times 1$  سیاه و دو مکعب دیگر سفید خواهد بود. چون مکعب‌های سیاه  $1 \times 1 \times 1$  هشت عدد بیشتر از مکعب‌های سفیدند، پس به هر نحوی که مکعب مستطیل‌ها را قرار دهیم، دست‌کم هشت مکعب کوچک را نمی‌پوشانند. به این ترتیب، حداقل تعداد مکعب مستطیل‌ها، برابر است با ۵۲.

۴۸. نه، نمی‌توان؛ زیرا نمی‌توان همه عددها را در ردیف‌های زوج یا ردیف‌های فرد قرار داد.

۴۹. پاسخ. ۷۲ خانه.

۵۰. بله، وجود دارد؛ مثل عدد  $1111111111 = n$ .

۵۱. قرینه‌های نقطه  $C$  را نسبت به ضلع‌های زاویه،  $C'$  و  $C''$  می‌نامیم. محیط مثلث  $ABC$  برابر است با طول خط شکسته  $C'ABC''$  که، به روشنی، از طول پاره خط راست  $C'C''$  کمتر نیست؛ پاره خط راست  $C'C''$  هم، طولی دو برابر طول پاره خط راست  $OC$  دارد.

۵۲. اگر همه رقم‌های این عدد با هم فرق داشته باشند، آنوقت مجموع این رقم‌ها برابر ۴۵ می‌شود، یعنی عدد  $1 + n^2 + n^3$  بر ۳ بخش‌پذیر است. ولی به ازای هیچ عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $1 + n^2 + n^3$  بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۵۳. راس‌های مکعب را، به این ترتیب به رنگ‌های سیاه و سفید درمی‌آوریم که، دو انتهای هر یال، رنگ‌های مختلفی داشته باشند. اختلاف مجموع عددهای راس‌های سیاه با مجموع عددهای راس‌های سفید را در نظر می‌گیریم. روشن است که، با انجام عمل مورد نظر مساله، این اختلاف تغییر نمی‌کند. چون اختلاف نخستین، برابر ۱ یا  $-1$  است، بنابراین نمی‌توان به

حالی رسید که همه عددها بر ۳ بخش پذیر باشند (زیرا، در غیر این صورت، باید ۱ یا ۱ - هم بر ۳ بخش پذیر باشد).

۱۳.۸۹. پاسخ. نه، چنین عددی وجود ندارد.

۱۶.۸۱. به سادگی روشن می‌شود که عدد  $x - m + 1 = m$  هم، در گروه عددهای  $x$  است. اگر  $(m + 1) = \frac{1}{2}x$ ، آنوقت نتیجه می‌شود که  $m = 3$ . بنابراین، همه عددهایی را که انتخاب می‌کنیم، به زوچهایی می‌توان تقسیم کرد که، مجموع دو عدد هر زوچ، برابر است با  $m + 1$ .

۱۹.۸۱. مجموع ۱۹۸۱ عدد درست متولی به شرطی که از  $n$  آغاز شده باشد، برابر است با

$$1981n + 990 \times 1981 = 1981(n + 990)$$

تنها این می‌ماند که  $n = 1981^2 - 990$  بگیریم.

۲۰.۸۱. چون ضلع‌های این مستطیل‌ها، طولی بیشتر از واحد ندارند، عددی که از نسبت ضلع کوچکتر به ضلع بزرگتر به دست می‌آید، از عدد مساحت آن مستطیل کمتر نیست؛ در ضمن، مجموع مساحت‌های مستطیل‌ها برابر واحد است.

۲۳.۸۱. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} |AB| - |AC| &= \frac{|AB|^2 - |AC|^2}{|AB| + |AC|} \geq \frac{1}{|AB| + |AC|} > \\ &> \frac{1}{|AB| + |AC| + |BC|} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

۲۴.۸۱. قطری از صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  را در نظر می‌گیریم که از گوشة چپ بالا و گوشة راست پایین گذشته است و همه خانه‌های سیاه زیر این قطر را، به ترتیب زیر، به رنگ‌های قرمز و آبی در می‌آوریم: اگر

مجموع شماره‌های سطر و ستون خانه (شماره‌ها را از پایین و از چپ در نظر بگیرید)، بر ۴ بخش پذیر باشد، خانه را قرمز رنگ، و اگر این مجموع بر ۴ بخش پذیر نباشد، خانه را آبی رنگ می‌کنیم. بعد، به صورت قرینه نسبت به قطری که در نظر گرفته بودیم، همه خانه‌های سیاه بالای قطر را هم، به رنگ قرمز و آبی درمی‌آوریم. مهره، در هر حرکت خود، به جز حرکت‌هایی که قطر را قطع می‌کند، از خانه قرمز به خانه آبی و برعکس می‌رود. از آن‌جا که تعداد خانه‌های آبی، هشت واحد از تعداد خانه‌های قرمز بیشتر است و عبور از خانه آبی به خانه آبی، تنها چهار تا است، پس مهره را باید، دست کم سه بار، به خانه‌ای حرکت داد که پیش از آن بوده‌است.

پاسخ. کمترین تعداد حرکت، برابر است با  $3 + 31 = 34$ ، یعنی ۳۴.

۲۷.۸۱. راهنمائی. از همان رنگ‌آمیزی که در بند اول حل مساله استفاده کردیم، برای تمامی جدول استفاده کنید. پاسخ. برای جدول  $9 \times 9$  باید ۴۸ حرکت انجام شود.

۲۸.۸۱. دنباله  $a_n - n$  غیر نزولی است، زیرا

$$a_{n+1} \geq a_n + 1$$

شرط مساله را می‌توان به صورت برابری  $b_n = b_{2n+b_n} = b_n$  نوشت. ولی از این‌جا نتیجه می‌شود که، مثلاً با عدد  $b_1$ ، باید بی‌نهایت مرتبه در دنباله  $\{b_n\}$  برخورد داشته باشیم، یعنی این دنباله، ثابت است. بنابراین، عدد  $c$  وجود دارد، به‌نحوی که، برای هر  $n$ ، داشته باشیم:  $a_n - n = c$ .

۲۹.۸۱. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} & 2(a+b)(c+d)(ac+bd-A) = \\ & = (a+b)(c+d)(2ac+2bd-2A) = \\ & = (a+b)(c+d)[2ac+2bd-(b^2-a^2)-(d^2-c^2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b)(c+d)[(a+c)^4 - (b-d)^4] = \\
 &= (a+b)(c+d)(a+b+c-d)(a-b+c+d) = \\
 &= (a+b)(c+d) \left( a+b - \frac{A}{c+d} \right) \left( c+d - \frac{A}{a+b} \right) = \\
 &= [(a+b)(c+d) - A]^4
 \end{aligned}$$

۳۱.۸۱. یکی از ۱۶ ضلعی‌ها را روی دیگری می‌گذاریم و ۱۶ دوران چندضلعی بالا را به زاویه‌های برابر مضرب‌های  $\frac{360}{16}$  در نظر می‌گیریم. اگر در هر کدام از این وضع‌ها، بیش از سه نقطه نشان دار دو چندضلعی، روی هم واقع نشود، به این معناست که همه نقطه‌های نشان‌دار منطبق بر هم، در جریان این ۱۶ حالت، از ۴۸ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر روشن است که، در هر لحظه، می‌توان هر راس نشان‌دار چندضلعی بالا را روی هر راس نشان‌دار چندضلعی پایین (که از قبل معین شده است) قرار داد، یعنی همه انطباق‌ها، روی هم، باید برابر ۴۹ باشد.

۳۵.۸۱. راه حل، کاملاً شبیه راه حل مساله ۲۴ است.  
پاسخ. ۵۳ حرکت.

۳۶.۸۱. در آغاز، عدد طبیعی  $k$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $1 - 5^k$  بر  $2^{100}$  بخش‌پذیر باشد. در ضمن فرض می‌کنیم، تعداد رقم‌های  $5^k$ ، در عددنويسي به مبنای ۱۰، بیشتر از  $100$  باشد. اگر این‌طور نباشد، می‌توان نمای ۵ را  $2k$ ،  $3k$  و غیره گرفت.

اکنون، عدد  $A = 5^{k+100}$  را در نظر می‌گیریم. تفاضل

$$A - 5^{100} = 5^{100}(5^k - 1)$$

بر  $2^{100} \times 5^{100}$ ، یعنی بر  $10^{100}$  بخش‌پذیر است؛ و این به معنای آن است که  $100$  رقم سمت راست، در دو عدد  $A$  و  $5^{100}$ ، بر هم منطبق‌اند.

اکنون توجه می‌کنیم که  $10^{70} < 5^{100}$ ، زیرا

$$2^{100} = 1024^{10} > 10^{30} = 2^{30} \times 5^{30}$$

$$\text{يعنى } 5^{30} > 2^{70}.$$

از اینجا روش می‌شود که تعداد رقم‌های غیر صفر، در صد رقم سمت راست عدد  $A$ ، از ۷۵ تجاوز نمی‌کند.

۳۷.۸۱. پاسخ.  $1 = p^2$  یا  $p = \sqrt{1}$ . راهنمائی. باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد بر ۵ را در نظر بگیرید.

۴۰.۸۱. فرض می‌کنیم، عددهای گویای  $a, b, c$  و  $d$  وجود داشته باشند. در این صورت، باید برابری زیر برقرار باشد:

$$(a - b\sqrt{3})^4 + (c - d\sqrt{3})^4 = 1 - \sqrt{3} \quad (*)$$

در واقع، اگر پرانتزهای سمت چپ را در برابری فرض، باز کنیم، نتیجه آن به صورت  $x + y\sqrt{3}$  درمی‌آید که، در آن،  $x$  و  $y$  عددهایی گویا هستند؛ در ضمن، مقدار سمت چپ برابری  $(*)$  هم، به صورت  $x - y\sqrt{3}$  در خواهد آمد. روشن است، اگر در حالت اول  $1 = x + y$  باشد، در حالت دوم،  $1 = x - y$  می‌شود. ولی برابری  $(*)$  ممکن نیست، زیرا  $\sqrt{3} - 1$ ، عددی منفی است.

۴۲.۸۱. پاسخ. نه چنین شش عددی وجود ندارد.

۴۳.۸۱. راهنمائی. هر ردیف عددهایی را که پشت سرهم و با یک علامت‌اند، یک رشته می‌نامیم. تعداد این رشته‌ها را در ردیف عددهای انتخابی خود، در نظر می‌گیریم. روشن است که با هر حرکت، از این تعداد، حداقل ۲ واحد کم می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که، تعداد حرکت‌ها، از  $\left[ \frac{p+1}{2} \right]$  کمتر نیست. همین تعداد هم، پاسخ مساله است.

۴۴.۸۱. بله، می‌توان. چهار کره با شعاع‌های مختلف، در فضای نظر می‌گیریم، به نحوی که، دویهدو بر هم مماس باشند؛ سپس، کره پنجم را، در فضای بین این چهار کره و مماس بر همه آنها، رسم می‌کنیم. مرکزهای این پنج کره، همان پنج نقطه مورد نظر مساله است.

$$c = \cos^2 z, b = \cos^2 y, a = \cos^2 x. \quad ۴۵.۸۱$$

این صورت، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \cos x \sin y \sin z + \cos y \sin x \sin z + \cos z \sin x \sin y - \\ & - \cos x \cos y \cos z \leq 1 \end{aligned}$$

که درستی آن روشن است، زیرا به‌سادگی به این صورت درمی‌آید:

$$\cos(x + y + z) \leq 1$$

۴۶.۸۱. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_v) = .$$

$$= [1 - (\sum_1^v a_i x_i^r)] [1 - (\sum_1^v b_i x_i^r)] [1 - (\sum_1^v c_i x_i^r)]$$

چندجمله‌ای، نسبت به هفت متغیر  $x_i$  از درجه ۱۲ است و  $x_i$ ‌ها می‌توانند مقادرهای ۰، ۱ و ۲ (یعنی باقی‌مانده‌های حاصل تقسیم بر ۳) را اختیار کنند. مقدار چندجمله‌ای را هم، نسبت به مذول ۳ قبول می‌کنیم (یعنی باقی‌مانده حاصل از تقسیم مقدار به دست آمده تابع، بر ۳). در این صورت، اگر مقادرهای  $f$  را در همه  $3^7$  انتخاب متغیرها، با هم جمع کنیم، عدد ۰ به دست می‌آید؛ این نتیجه از این‌جا به دست می‌آید که، در همه جمله‌های  $f$ ، متغیری وجود دارد که توان آن بیشتر از واحد نیست. از طرف دیگر

$$f(0, 0, \dots, 0) = 1$$

یعنی انتخاب دیگری از  $\{x_i\}$  وجود دارد که برای آن

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) \neq 0$$

یعنی

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) = 1$$

زیرا چندجمله‌ای  $f$ ، نسبت به مدول ۳، تنها مقدارهای ۰ و ۱ را قبول می‌کند.  
و این، به معنای آن است که

$$\sum_1^7 a_i x^i = \sum_1^7 b_i x^i = \sum_1^7 c_i x^i = 0$$

تنها این می‌ماند که سه تایی  $(a_i, b_i, c_i)$  را حذف کنیم که، برای آن،  $x_i = 0$ ؛  
در اینجا باید به حساب آورد که بازای  $x \not\equiv 0 \pmod{3}$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

.۶۴. پاسخ. ۱.۰.۸۲

.۲.۰.۸۲ نه، ممکن نیست. در طول ۲۵ پرش، حشره راهی را می‌پسمايد  
که بر حسب سانتی‌متر، عددی فرد است.

.۴.۰.۸۲ چون  $11 \times 770 = 2 \times 5 \times 7 \times x$ ، برای این که عدد  $(770 - x)$   
بر ۷۷۰ بخش‌پذیر باشد، باید  $x$  بر برخی از این عامل‌ها و  $x - 770$  بر برخی  
دیگر بخش‌پذیر باشد. ولی روشن است که، اگر  $x$  بر یکی از بخشیاب‌های  
۷۷۰ بخش‌پذیر باشد،  $x - 770$  هم بر آن بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین  $x$   
باید بر همه بخشیاب‌های ۷۷۰ بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست.

.۶.۰.۸۲ آغاز کننده بازی، در حرکت اول خود، مجموعه ۱۰۰ مهره‌ای  
را، به دو مجموعه شامل ۶۳ و ۳۷ مهره تقسیم می‌کند. از آن به بعد هم، هر  
وقت نوبت به او می‌رسد، باید تعداد بزرگتر را به صورت  $1 - 2^n$  درآورد.

۷۰.۸۲ پاسخ. مساله سه جواب دارد: (۳۵، ۷۵)، (۶۵، ۲۵) و (۱۵، ۵۵).

۱۰.۸۲ راهنمایی. دو نقطه دو سر قطر دایره را در نظر بگیرید و از این قضیه استفاده کنید که، میانه هر مثلث از نصف مجموع دو ضلع دو طرف میانه، کوچکتر است.

۱۱.۸۲ پاسخ. نه، ممکن نیست.

۱۲.۸۲ پسرها را شماره‌گذاری می‌کنیم و مجموعه دخترانی را که با پسر  $M_n$  درس خوانده‌اند با  $A_n$  نشان می‌دهیم. اگر حکم مساله نادرست باشد، آنوقت باید برای هر  $m$  و  $n$  یا  $A_n \subset A_m$  یا  $A_m \subset A_n$  باشد. بنابراین، به این زنجیره می‌رسیم:

$$A_{i_1} \subset A_{i_2} \subset A_{i_3} \subset \dots \subset A_{i_k}$$

که در آن،  $A_{i_k}$ ، بزرگترین  $A_i$  هاست. ولی چون  $A_{i_k}$  بر مجموعه همه دختران  $D$  منطبق نیست، بنابراین دختری پیدا می‌شود که با هیچ پسری تمرین ریاضی نکرده است (هریک از دختران مجموعه  $D|A_{i_k}$ ).

۱۳.۸۲ اگر پرانتر را به توان برسانیم، به نابرابری

$$1 + a^2 b^2 < a^2 + b^2$$

و یا هم از آن  $< (1 - a^2)(1 - b^2)$  می‌رسیم.

۱۴.۸۲ کافی است ثابت کنیم، مجموع سه زاویه راس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، از زاویه راس  $D$  بزرگتر است. در واقع، مجموع سه زاویه  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، از مجموع زاویه‌های مثلث  $ABC$ ، یعنی از  $180^\circ$  درجه کمتر نیست، در حالی که زاویه  $D$  از  $180^\circ$  درجه کمتر است.

۱۵.۸۲ تعداد دانش‌آموزان کلاس هفتم را  $x$  می‌گیریم. در این صورت،

تعداد امتیازهای کلاس هفتم ( $N_7$ ) از

$$x \cdot 2x + \frac{x(x-1)}{2}$$

تجاوز نمی‌کند. بهمین ترتیب، اگر  $N_6$  تعداد امتیازهای کلاس ششم باشد.

$$N_6 \geq \frac{2x(2x-1)}{2} = x(2x-1)$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$2x^2 + \frac{x^2 - x}{2} \geq \frac{7}{5}x(2x-1) \Rightarrow x \leq 3$$

با آزمایش (یا به طریقی دیگر) به دست می‌آید:  $N_7 = 21$ ،  $x = 3$ ،  $N_6 = 15$  و تعداد همه دانش‌آموزان برابر ۹ می‌شود.  
۱۷.۸۲ نمونه‌ای از این جدول:

|    |   |    |
|----|---|----|
| ۱۲ | ۹ | ۲  |
| ۱  | ۶ | ۳۶ |
| ۱۸ | ۴ | ۳  |

۱۹.۸۲ دو حالت ممکن است: یا سه جمله‌ای‌های  $p_1$ ،  $p_2$ ،  $p_3$ ، یا هر سه، ریشه مشترکی دارند (که در این صورت، اثبات روشن است)، یا عده‌های  $c < b < a$  وجود دارند، بهنحوی که هریک از آن‌ها، ریشه‌ای از دو سه‌جمله‌ای است. فرض کنیم  $b$ ، ریشه  $p_1$  و  $p_2$  باشد. در این صورت مقدار  $p_3$ ، در نقطه  $b$  منفی و، بنابراین، مجموع هر سه عبارت در نقطه  $b$  منفی می‌شود. از همین جا، وجود ریشه نتیجه می‌شود.

۲۰.۸۲ راهنمایی. نیمساز  $CK$  از زاویه  $K$  را رسم کنید. مثلث‌های  $ACK$  و  $ABC$  متشابه‌اند و مثلث  $ACK$  متساوی‌الساقین است. از این‌جا، می‌توان نسبت  $|AB| : |BC| : |AC|$  را پیدا کرد.

۲۱.۸۲ . بله، برخورد می‌کنیم. در واقع، دیر یا زود، باید چهار عدد ردیف هم تکرار شود. اگر در دنباله به عقب برویم، می‌بینیم نخستین چهار عدد ردیفی که تکرار می‌شود، عدهای  $(1, 9, 8, 2)$  است. اکنون اگر چهار جمله قبل از این‌ها را پیدا کنیم، همان چهار جمله مورد نظرند.

۲۳.۸۲ . در هر ستون، از پنج خانه، دست کم سه خانه از یک رنگ است. به این سه خانه و سه سطر متناظر آن‌ها توجه می‌کنیم. چون ۴۱ ستون داریم، و امکان سه‌تایی‌های سطراها (با به حساب آوردن رنگ‌ها) برابر است با  $2^5$ ، پس یکی از سه‌تایی‌ها، سه بار تکرار شده است؛ همان چیزی که می‌خواستیم.

۲۴.۸۲ . دایره‌ای را رسم می‌کنیم که، همه نقطه‌های برخورد خط‌های راست را، در درون خود داشته باشد. این خط‌های راست،  $42$  کمان روی محیط دایره جدا می‌کنند؛ در ضمن، از دو کمان مجاور، هر دو کمان با هم متعلق به دو زاویه نیستند (دلیل آن را بگویید). بنابراین، تعداد زاویه‌ها نمی‌تواند از  $2^2$  بیشتر باشد و تنها وقتی برابر  $2^2$  است که، از هر دو کمان مجاور، یکی متعلق به زاویه باشد. ولی در این حالت، چون تعداد خط‌های راست، عددی زوج است، دو کمان رویه‌رو، هر دو متعلق به زاویه‌ای می‌شوند، که ممکن نیست.

۲۹.۸۲ .  $\sqrt{1982} + 1$  را به توان  $k$  می‌رسانیم، نتیجه، به صورت  $a + b\sqrt{1982}$  در می‌آید که، در آن،  $a$  و  $b$  عدهایی درست‌اند؛ در ضمن، اگر  $\sqrt{1982} - 1$  را بتوان  $k$  برسانیم، نتیجه به صورت  $a - b\sqrt{1982}$  در می‌آید. از ضرب این دو توان در یکدیگر، به دست می‌آید:

$$(-1981)^k = a^2 - 1982b^2$$

یعنی  $a^2$  و  $1982b^2$ ، به اندازه  $1981^k$  با هم اختلاف دارند و کافی است، عدد کوچکتر را به جای  $n$  انتخاب کنیم.

۳۰.۸۲.  $X$  را سه مهره می‌گیریم. اگر قرینه  $X$  را نسبت به  $A$  و، سپس، نسبت به  $B$  پیدا کنیم، مثل این است که  $X$  را به اندازه بُردار  $\vec{AB}$  منتقل کردہایم. اکنون سه مهره  $A$ ،  $B$  و  $C$  را، که بر یک امتداد نیستند، انتخاب می‌کنیم. روشن است، با استفاده از انتقال به اندازه بُردارهای  $\vec{AC}$ ،  $2\vec{BC}$ ،  $2\vec{AB}$ ، می‌توان هر مهره‌ای را به درون دایره بزرگ ثابتی به شعاع  $R$ ، بُرد.  $(2 - n)$  ضلعی کوژی را درنظر می‌گیریم که، یکی از راس‌های آن، در نقطه  $A$  و زاویه راس  $A$ ، در درون زاویه  $BAC$  باشد. اکنون دایره‌های کوچکی را در نظر می‌گیریم که، مرکزهای آنها، روی راس‌های این چندضلعی و به نحوی باشد که، با جابه‌جا کردن هر راس  $(2 - n)$  ضلعی به نقطه‌ای در درون دایره متناظر خود، کوژ بودن چندضلعی به هم نخورد. تجانس به مرکز  $A$  را طوری در نظر می‌گیریم که، مُبدل همه دایره‌های کوچک، شعاعی بزرگتر از  $R$  داشته باشند، و  $(2 - n)$  ضلعی تبدیل شده، یک  $n$  ضلعی کوژ، با اضافه شدن راس‌های  $B$  و  $C$  تولید کند. اکنون می‌توان همه مهره‌ها را، به جز دو مهره  $B$  و  $C$ ، طوری منتقل کرد که، هر مهره، درون یکی از دایره‌ها قرار گیرد؛ در این صورت، مهره‌ها در راس‌های یک  $n$  ضلعی کوژ خواهند بود.

### ۳۴.۸۲. پاسخ. زاویه $BAK$ ، برابر $90^\circ$ درجه است.

۳۵.۸۲. پاسخ. راس‌ها را از  $0^\circ$  تا  $1 - n$  شماره‌گذاری می‌کنیم و در راس  $k\alpha$ ، عدد  $\cos\left(\frac{1}{n}k\pi + \alpha\right)$  را قرار می‌دهیم که در آن،  $n$  برابر یکی از عددهای از صفر تا  $1 - n$  و  $\alpha$  زاویه‌ای است که، به ازای آن، هیچ کدام از این عددها برابر صفر نشود.

راهنمانی. این عددها، عبارتند از تصویرهای بُردارهایی که از مرکز  $n$  ضلعی به راس‌های آن می‌روند، بر محوری که از مرکز چندضلعی می‌گذرد. ۳۶.۸۲. فرض می‌کنیم، هر دو پاره خط راست  $AB$  و  $CD$  از یک

رنگ، متقاطع باشند. آنها را با پاره خط‌های راست  $AC$  و  $BD$  از همان رنگ عوض می‌کنیم. در ضمن، تعداد نقطه‌های برخورد پاره خط‌های راست آبی با پاره خط‌های راست قرمز، تغییر نمی‌کند. این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که هیچ دو پاره خط راست هم‌رنگ، یکدیگر را قطع نکنند. اکنون کافی است توجه کنیم که، روی هر پاره خط راست قرمز، دست‌کم، یک نقطه برخورد با پاره خط راست آبی وجود دارد.

.۳۷.۸۲ پاسخ. بله، وجود دارد. مثلًا برای  $k = 120$

.۳۸.۸۲ هر برداری از این‌گونه، مثل بردار  $\vec{A_i A_j}$  را می‌توان به صورت تفاضل  $\vec{OA_j} - \vec{OA_i}$  نشان داد که، در آن،  $O$  مرکز مربع است. از این جا نتیجه می‌شود که، طول مجموع بردارهایی که رسم کرده‌ایم و طول مجموع بردارهایی که از نقطه  $O$  به نقطه‌های نشان‌دار رسم شده‌اند، با هم زوج و یا با هم فردند. اکنون، تنها این می‌ماند که قانون شویم، طول این مجموع، با عددی فرد بیان می‌شود.

.۳۹.۸۲ پاسخ. ۲۵ پاره خط راست.

.۴۰.۸۲ پاسخ. پیراشکی گوشتی ۱۳ کوبک و پیراشکی سبزه‌منی ۹ یا ۱۱ کوبک.

.۴۲.۸۲ راه حل را با استقرا روی  $n + k$  می‌دهیم. به این ترتیب، باید ثابت کنیم  $A_1 A_2 \dots A_k A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{n+k}$  بخش‌پذیر است. چون

$$A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{n+k} = A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{n+k-1} \times \\ \times (A_{n+k} - A_n) + A_n A_{n+1} \dots A_{n+k-1}$$

در ضمن جمله دوم، بنا بر فرض استقرا، بر  $A_1 A_2 \dots A_k$  بخش‌پذیر است، بنابراین کافی است، همین بخش‌پذیری را برای جمله اول، ثابت کنیم. ولی

$A_{n+k} - A_n$  بر  $A_{n+1}A_{n+2}\dots A_{n+k-1}$  و تفاضل  $A_1A_2\dots A_{k-1}$  برابر است. این بخش پذیرند و استدلال استقرایی به پایان می‌رسد.

۴۴.۸۲ فرض می‌کنیم تقسیم مجموعه همه عدهای طبیعی، به چنین دو مجموعه‌ای، که آنها را  $A$  و  $B$  می‌نامیم، ممکن باشد؛ در ضمن، عدد ۲ را عضو مجموعه  $A$  به حساب می‌آوریم.  $n$  را کوچکترین عضو مجموعه  $B$  و  $p$  را، کوچکترین عدد اولی می‌گیریم که عدد  $n$  را نمی‌شمارد. روشن است که  $n < p$ .

پیش‌قضیه. اگر  $x < p$ ، آنوقت، برای هر عدد  $b$  از  $B$ ، عدد  $xb$  هم به مجموعه  $B$  تعلق دارد. در واقع، کافی است، حکم پیش‌قضیه را، برای عدهای اول  $x$  ثابت کنیم. اگر  $xb$  متعلق به  $A$  باشد، آنوقت عدد  $\frac{n}{x}$  هم عضوی از  $A$  خواهد بود، ولی  $xb = nb \cdot \frac{n}{x}$ . که بهروشی شرط را نقض می‌کند. سپس، چون  $n$  بر  $p$  بخش‌پذیر نیست، عدد  $k < p$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $1 + \frac{kn+1}{p}$  بر  $p$  بخش‌پذیر باشد. ولی در این صورت،  $\frac{kn+1}{p} - 1 = kn - 1$  هم به مجموعه  $A$  تعلق می‌گیرد که پیش‌قضیه را نقض می‌کند.

۱۰.۸۳ پاسخ. بیش از ۲۳ نفر از شرکت کنندگان در مسابقه وارد در ردیف‌بندی نشده‌اند.

۳۰.۸۳. وهنیا و ژنهنیا راستگو، بهنیا و سنهنیا دروغ‌گو هستند.

۵.۸۳ استفاده از ماشین زمان، شماره ماه را ۴ واحد جلو می‌برد (اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم بر ۱۲ را در نظر بگیریم). چون ۲۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، بنابراین، چنین سفری ممکن نیست.

۶.۸۳ پاسخ. رسم‌های ۷، ۴، ۳، ۰.

۷۰.۸۳ اگر  $a$  بر عدد اول فرد ۱  $= 2k + 1$  بخش‌پذیر باشد، آنوقت باید  $1 - a$  بر  $1 - p$  یعنی  $2k$  بخش‌پذیر شود؛ و این، به معنای آن است

که باید، برخلاف فرض،  $a$  عددی فرد باشد.

۱۰.۸۳ فرض کنید  $a < b < c < d < e$ ، طول این بخش‌ها باشند.

فرض می‌کنیم، با هیچ سه‌بخشی نتوان یک مثلث ساخت. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$c \geq a + b; d \geq b + c \geq a + 2b; e \geq c + d \geq 3a + 3b$$

آنوقت طول میله اصلی باید بزرگتر یا برابر  $5a + 7b$  باشد. ولی بنابه فرض

$$5a + 7b \geq 12 \times 17 = 204$$

تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۱۲.۸۳ پاسخ. نه، نمی‌توان. راهنمائی. نقطه‌های آبی، به هر گونه‌ای باشند، می‌توان مثلث اصلی را به مثلث‌های کوچکتری، با راس‌های آبی، تقسیم کرد. تعداد این مثلث‌ها، بستگی به روش تقسیم ندارد و برابر است با  $1 + 2k$  که، در آن،  $k$  عبارت است از تعداد نقطه‌های آبی درون مثلث.

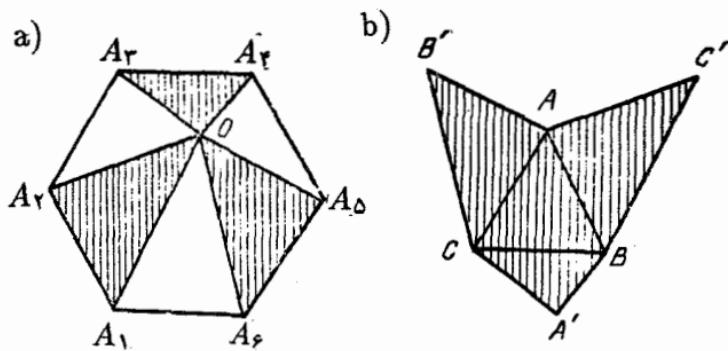
۱۷.۸۳ به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} 2^{58} + 1 &= 2^{58} + 1 + 2^{30} - 2^{30} = (2^{29} + 1)^2 - 2^{30} = \\ &= (2^{29} - 2^{15} + 1)(2^{29} + 2^{15} + 1) = \\ &= 5 \times \frac{2^{29} - 2^{15} + 1}{5} (2^{29} + 2^{15} + 1) \end{aligned}$$

۱۸.۸۳ این حرکت‌ها را، برای هر خانه از یک صلیب دلخواه شامل ستون و سطر انجام می‌دهیم. به سادگی می‌توان قانون شد که، نتیجه، عبارت است از تغییر علامت خانه‌ای که در نقطه بروخورد این خط‌ها قرار دارد. به این ترتیب، می‌توانیم علامت‌های عدد هر خانه‌ای را که بخواهیم، عرض کنیم.

۱۹.۸۳ راهنمائی. فرض کنید:

$$a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$$



شکل ۵۵

اگر  $s_k$ ، مجموع رقم‌های عدد  $\Delta a_k$  باشد، کافی است ثابت کنیم، مجموع رقم‌های عدد  $\Delta a$  برابر است با

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

۲۰.۸۳ . پاسخ.  $\frac{1}{2} ۱۸$  امتیاز.

۲۱.۸۳ . مساحت شش‌ضلعی منتظم  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  را برابر می‌گیریم (شکل a-۵۵). برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$S_{A_1OA_7} + S_{A_2OA_7} + S_{A_5OA_6} \geq \frac{1}{2} S$$

مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  را، با ضلعی برابر ضلع شش‌ضلعی منتظم در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، مثلث‌های  $AB'C$ ،  $AC'B$  و  $BA'C$  به ترتیب، برابر باشند با مثلث‌های  $A_1OA_2$ ،  $A_1OA_4$  و  $A_5OA_6$ . در این صورت، مساحت شش‌ضلعی  $AB'CA'BC'$  (شکل b-۵۵) را بینید) از

$$\frac{1}{2} S + S_{ABC} = \frac{2}{3} S$$

کمتر نیست.

۲۳.۸۳. دو ضلع رویه رو را در  $400$  ضلعی در نظر می‌گیریم. روشن است که آنها را می‌توان با زنجیره‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها به هم وصل کرد. اکنون، دو ضلع رویه روی دیگر را در نظر می‌گیریم که بر دو ضلع انتخابی قبلی عمود باشند و آنها را هم، با زنجیره‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها به هم وصل می‌کنیم. این دو زنجیره متوازی‌الاضلاع‌ها، یکدیگر را قطع می‌کنند و، بنابراین، به ناچار در برخورد خود با یکدیگر مستطیلی به وجود می‌آورند که ضلع‌های آن، با همان چهار ضلع انتخاب شده در  $400$  ضلعی موازی‌اند. از این گونه گروه‌های شامل چهار ضلع،  $100$  بار می‌توان در چند ضلعی انتخاب کرد، در ضمن، مستطیل‌های متناظر با آنها، بر هم منطبق نیستند.

۲۴.۸۳. به جای این‌که، نقطه‌ها در برخورد با یکدیگر، جهت حرکت خود را عوض کنند، فرض را بر این می‌گیریم که، هر دو نقطه، ضمن برخورد، از درون یکدیگر عبور کنند و با همان سرعت و در همان جهت به حرکت خود ادامه دهند، تنها شماره آنها عوض شود. در این صورت، بعد از زمان  $T$ ، که هر نقطه برای یک دوران کامل نیاز دارد، هر نقطه به همان جای نخست خود می‌رسد و، تنها، شماره خود را عوض کرده است. بعد از فاصله زمانی  $T$  برای بار دوم، دوباره نقطه‌ها در جای نخست خود قرار می‌گیرند و، باز هم، شماره آنها عوض شده‌است. روشن است که، بعد از زمان  $n!T$  ( $n$ ، تعداد نقطه‌های است)، همه نقطه‌ها، همان شماره‌های اولیه خود را، پیدا خواهند کرد.

۲۵.۸۳. پاسخ.  $60$  درجه.

۲۶.۸۳. پاسخ. تنها یک مریغ «اول» وجود دارد که، مختصات راس‌های آن، چنین‌اند:  $(2, 2)$ ،  $(2, 3)$ ،  $(3, 2)$ ،  $(3, 3)$ .

۲۷.۸۳. راهنمایی. اگر کمترین تعداد شوکولات را در لحظه زمانی  $n$ ،

در بین کودکان، با  $m_n$  نشان دهیم، آنوقت

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq M + 1$$

که در آن،  $M$  برابر است با بیشترین تعداد شوکولاتی که، در آغاز بازی، نزد یکی از کودکان است.

۲۸.۸۳. پاسخ. نابرابری، تنها برای  $n = 2$ ،  $n = 3$ ،  $n = 4$  و  $n = 5$  برقرار است. راهنمائی. نابرابری را به این صورت بنویسید:

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \dots + \left(x_{n-1} - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \\ + (5-n)\frac{x_n^2}{4} \geq 0$$

۲۹.۸۳. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم شعاع دایره  $K_1$  از شعاع دایره  $K_2$  بزرگتر نباشد. نقطه‌های تماس دایره‌های  $K_1$  و  $K_2$  را با خط‌های راست  $l_1$  و  $l_2$ ، با  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  نشان می‌دهیم (شکل ۵۶). روشن است که دو خط راست  $AC$  و  $BD$  موازی‌اند. خط‌های راست  $B_1D_1$  و  $A_1C_1$  را موازی با خط راست  $AC$  و مماس بر دایره‌های  $K_1$  و  $K_2$ ، به ترتیب در نقطه‌های  $E$  و  $F$  رسم می‌کنیم. در این صورت

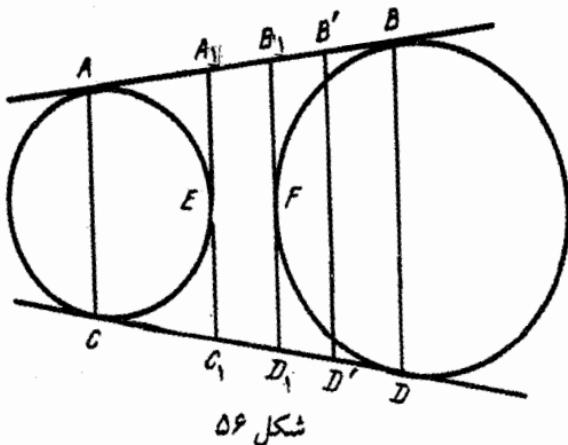
$$|AA_1| = |A_1E|, |CC_1| = |C_1E|,$$

$$|BB_1| = |B_1F|, |FD_1| = |DD_1|$$

روشن است که به شرط منطبق نبودن نقطه‌های  $E$  و  $F$ ، باید داشته باشیم:

$$|AA_1| = |CC_1| < |BB_1| = |DD_1|$$

نقطه‌های  $B'$  و  $D'$  را طوری در نظر می‌گیریم که  $A_1$ ، وسط پاره خط راست  $AB'$  و  $B_1$ ، وسط پاره خط راست  $CD'$  باشد. روشن است که خط



شکل ۵۶

راست  $B'D'$  با خط راست  $BD$  موازی است، ولی بر آن منطبق نیست.  
ذوزنقه  $AB'D'C$ ، یک چهار ضلعی محیطی است و، بنابراین، در ذوزنقه  $ABCD$ ، نمی‌توان دایره‌ای محاط کرد. تناقض.  
۳۱.۸۲. راهنمائی. باقی‌مانده حاصل از تقسیم بر ۱۰۱ را در نظر بگیرید.

۳۴.۸۳. بردارهای واحد  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  را روی یال‌های گنج سه وجهی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، نیمسازهای عمود بر هم، در طول بردارهای  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  باشند. در این صورت

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

یعنی

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -1 \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \\ (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{0} \end{cases}$$

از اینجا معلوم می‌شود، سه نیمساز زاویه‌های مسطحه گنج، دویه‌دو بر هم عمودند که به معنای درستی حکم مساله است.

۳۵.۸۲. پاسخ. ۹ درجه، ۸۵ درجه و ۳۰ دقیقه.

۳۷.۸۳. مجموعه راس‌های ۲۰ ضلعی منتظم را، می‌توان به صورت اجتماع مجموعه‌های راس‌های چهار پنج ضلعی منتظم در نظر گرفت. روشن است، در یکی از آنها، دست‌کم سه راس نشان‌دار وجود دارد. تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، هر سه راس دلخواه از یک پنج ضلعی منتظم، تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند.

۳۸.۸۳. راهنمائی. اگر گرانیگاه مثلث، یعنی نقطه برخورد میانه‌های آن را، مرکز تقارن قرار دهیم، شش ضلعی حاصل از برخورد مثلث با قرینه خود، مساحتی برابر  $\frac{2}{3}$  مساحت مثلث پیدا می‌کند.

۳۹.۸۳. پاسخ. بله، کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند با بازی درست، برنده شود.

۴۰.۸۳. پاسخ. ۱۰ درجه. روی نیم خط راست  $AM$ ، پاره خط راست  $BN$  را با طولی برابر طول قاعده  $BC$  جدا کنید.  $CM$  نیمساز زاویه  $C$  در مثلث متساوی‌الساقین  $BNC$  است، زیرا برابری

$$|BM| : |BN| = |CB| : |CN|$$

برقرار است. از آنجا که زاویه  $BCN$  برابر  $20$  درجه است، بنابراین زاویه  $BCM$  برابر  $10$  درجه می‌شود.

۴۱.۸۳. این وضع وقتی، و تنها وقتی پیش می‌آید که  $n$ ، برابر توانی از عدد  $2$  نباشد. راهنمائی. فرض می‌کنیم:

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

در این صورت، برابری موردنظر مساله را می‌توان این‌طور نوشت: برای هر  $k$ ، داریم  $s_{2k} = s_k$  (در ضمن  $s_1 = 0$ ). چون  $n$  متغیر مستقل  $s_k$ ، و  $n$  معادله به صورت بالا، وجود دارد، پس برابر صفر بودن همه  $a_k$ ‌ها، هم ارز

است با برابری همه متغیرهای  $s_k$ ، یعنی اینکه، برای هر دو اندیس  $k$  و  $m$ ، توانهای  $2^a$  و  $2^b$  پیدا می‌شود، بهنحوی که

$$2^a \cdot k \equiv 2^b \cdot m \pmod{n}$$

یا اینکه، برای هر  $k$ ، توانی از عدد ۲، مثل  $2^c$  وجود دارد، بهنحوی که  $2^c k$  بر  $n$  بخش‌پذیر است.

۴۲.۸۳. لایه دوم را به این ترتیب قرار می‌دهیم: تمامی صفحه را به مربعهای  $2 \times 2$  تقسیم می‌کنیم؛ این مربعها، یا دو تکه مقوای افقی و یا دو تکه مقوای قائم را می‌پوشانند. سپس لایه سوم را به این ترتیب در نظر می‌گیریم: خانه‌های مجاوری را، که هنوز با یک مقوای  $2 \times 1$  پوشیده نشده‌اند، با پاره خط‌های راست به هم وصل می‌کنیم. روشن است که، از هر خانه، دو پاره خط راست می‌گذرد. خط‌های شکسته‌ای را، که این پاره خط‌های راست تشکیل می‌دهند، به دو گروه تقسیم می‌کنیم: خط‌های بسته و خط‌های بی‌پایانی که بسته نیستند. خط‌های این دو گروه را می‌توان به پاره خط‌هایی غیرمتقطع تقسیم کرد که طولی واحد داشته باشند و لایه سوم را تشکیل دهند. لایه چهارم به صورت یک ارزشی به دست می‌آید: هر خانه، با پاره خط راست، درست به یک خانه مجاور وصل شده است.

۴۳.۸۳. فرض کنید،  $a_k$  نخستین جمله‌ای از دنباله باشد که در نامعادله مورد نظر صدق نمی‌کند. در این صورت روشن است که  $1 - a_k$  عضوی از دنباله نیست و، بنابراین، می‌توان  $s$  را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$a_s + 2s + 1 = a_k$$

فرض می‌کنیم:

$$n = \left[ \frac{a_s + 1}{2 + \sqrt{2}} \right] = a_s - \left[ \frac{a_s + 1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{زیرا } 1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n + 2n \leq (2 + \sqrt{2})n < a_s + 1$$

اکنون، هر عدد طبیعی  $x$  را، از  $1$  تا  $a_k$  با جمله‌ای مثل  $a_i$  از دنباله متناظر می‌کنیم که عدد  $x$  از آن بدست آید، یعنی  $x = a_i$  و یا  $x = a_i + 2i$ . از نابرابری که در بالا ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که، به هر  $x$ ، حداقل یک عدد از بازه از  $1$  تا  $k + n$  متناظر است، یعنی

$$a_k - a_s \leq k - n \Rightarrow a_k - (a_s - n) \leq k \quad (*)$$

$$w = \frac{a_s + 1}{\sqrt{2}}$$

$$a_s > \sqrt{2}w - 1$$

یعنی  $w \geq s$ . از اینجا بدست می‌آید:

$$\frac{a_s + 2s + 1}{2 + \sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}w - 1 + 2w + 1}{2 + \sqrt{2}} = w$$

به این ترتیب، ثابت کردیم  $w \geq \frac{a_k}{2 + \sqrt{2}}$  یا

$$a_s - n \leq \frac{a_k}{2 + \sqrt{2}}$$

که اگر آن را با نابرابری (\*) جمع کنیم، بدست می‌آید:  $a_k \leq \sqrt{2}k$ . ۴۴.۸۳ پاسخ.  $(1 - n^2)$ . راهنمائی. پاره خط راستی از این دستگاه جاده‌ها را در نظر بگیرید که از شهری آغاز یا به شهری ختم نشده باشد. فرض می‌کنیم، به یک سمت آن،  $a$  پاره خط راست و به سمت دیگر

آن،  $b$  پاره خط راست، متصل باشد؛ در ضمن  $b \geq a$ . اگر آن را به سمت اول حرکت دهیم، به طول دستگاه جاده‌ها، افزوده نمی‌شود. اگر حرکت به جایی ختم شود که روی پاره خط راست دیگری قرار گیرد، آنوقت طول جاده‌ها کمتر می‌شود؛ و اگر به پاره خط راستی با طول بزرگتر تبدیل شود، می‌توان باز هم، به سمتی، حرکت کرد (البته، به شرطی که، از هیچ طرفی به شهر ختم نشده باشد). اگر به همین ترتیب عمل کنیم، به جایی می‌رسیم که، تبدیل یافته جاده‌ها، از حالت نخستین خود، طول بیشتری ندارد، ولی در ضمن، همه جاده‌های آن، از شهری آغاز و به شهری ختم می‌شوند.

۲۰.۸۴ عددی ۱ و ۱ را، به این ترتیب قرار دهید:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

۳۰.۸۴ اختلاف فاصله یکی از این نقطه‌ها تا  $A'$  با فاصله همین نقطه تا  $B$ ، برابر است با طول پاره خط راست  $AB$ ؛ و روشی است، مجموع ۴۵ عدد به صورت  $|AB| \pm$  نمی‌تواند برابر صفر شود.

۵.۸۴ راهنمائی. قطاع‌ها را، یک در میان، با رنگ‌های سیاه و سفید، در نظر می‌گیریم. اکنون، اگر تفاضل مجموع عددی خانه‌های سیاه را با مجموع عددی خانه‌های سفید بدست آوریم، این تفاضل، با عملی که طبق صورت مساله باید انجام گیرد، تغییر نمی‌کند.

۶.۸۴ بازی‌کن اول، علامت ضرب را بین ۱ و ۲ می‌گذارد و، بعد، فاصله‌های بین عدها را با آغاز از فاصله ۳ و ۴، به زوج فاصله‌های پشت سر هم تقسیم می‌کند. وقتی دومی یکی از فاصله‌ها را با علامتی پر می‌کند، او فاصله زوج آن را با علامت ضرب پر می‌کند. اگر دومی بین ۲ و ۳، علامتی گذاشت، اولی علامت ضرب را در یکی از فاصله‌های باقی‌مانده قرار

می‌دهد. به این ترتیب، سرانجام، مجموع چند عدد زوج به دست می‌آید.  
۸.۰.۸۴ از برابری‌های فرض نتیجه می‌شود:

$$|AC| = |BD|, |AD| = |BC|$$

بنابراین، دو مثلث  $ABC$  و  $BAD$  برابرند. برابری زاویه‌های  $OCB$ ،  $BAD$  و  $BCA$ ، برابری مثلث‌های  $ODA$  و  $BDA$  را نتیجه می‌دهد که، از آنجا، برابری طول‌های پاره‌خط‌های راست  $OA$  و  $OB$  به دست می‌آید.

۱۰.۰.۸۴ مداد را با  $m$  و خودکار را با  $k$  نشان می‌دهیم. نابرابری‌های فرض را می‌توان این‌طور نوشت

$$7m > 5k, 25m < 18k$$

از این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$7m \geq 5k + 1, 25m \leq 18k - 1$$

دو طرف نابرابری اول را در ۲۵ و دو طرف نابرابری دوم را در ۷ ضرب می‌کنیم:

$$175m \geq 125k + 25, 175m \leq 126k - 7$$

اگر این دو نابرابری را از هم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$k \geq 32$$

و از نابرابری اول نتیجه می‌شود:

$$m \geq 23$$

و بنابراین  $101 \geq 3m + k$

۱۲.۸۴. روی صفحه شطرنجی، همه خانه‌های ستون‌ها و همه خانه‌های سطرهای را که، شماره آن‌ها در تقسیم بر ۳ به باقی‌مانده ۱ می‌رسند، نشان می‌گذاریم (شماره سطرهای را از پایین به بالا و شماره ستون‌ها را از چپ به راست در نظر بگیرید). اکنون، برای هر خانه نشان‌دار، مربعی  $2 \times 2$  را نشان می‌گذاریم که، گوشة چپ و پایین آن، همین خانه نشان‌دار باشد. روش است که هر مربع دلخواه  $2 \times 2$  نمی‌تواند با دو مربع نشان‌دار برخورد داشته باشد. چون تعداد مربع‌های نشان‌دار برابر است با  $100$ ، بنابراین، یکی از آن‌ها، با هیچ کدام از مربع‌های جدا شده  $2 \times 2$  برخورد ندارد. همین مربع نشان‌دار را، می‌توان از باقی‌مانده جدول جدا کرد.

۱۳.۸۴. پاسخ. نه، نمی‌توانند. از نابرابری مثلثی استفاده کنید.

۱۴.۸۴. پاسخ. مجموع برابر است با  $2$ . باید در صورت مساله و یا عمل آن اشتباهی رخ داده باشد. با معلوم بودن مجموع دو کسر اول، نمی‌توان مجموع کل، یعنی مقدار کسر سوم را پیدا کرد. با توجه به پاسخی که داده شده است، باید مقدارهای  $x$  و  $y$  چنین باشد:

$$x = \sqrt{-5} + \sqrt{-2}, y = \sqrt{-5} - \sqrt{-2}$$

۱۵.۸۴. راهنمائی. ثابت کنید، تفاضل این دو مجموع، برابر مضرب

فردی از طول پاره خط راست  $AB$  است.

۱۶.۸۴. پاسخ. هشت رنگ.

۱۷.۸۴. راهنمائی. به گوشة مربع توجه کنید.

۱۸.۸۴. فرض می‌کنیم  $x_1 > x_2$ ؛ در این صورت، از برابری اول نتیجه می‌شود:  $x_2 < x_3$ ، از برابری دوم به دست می‌آید:  $x_4 > x_3$ ، ... و سرانجام  $1 < x_2$  که با فرض متناقض است. پس  $x_2 = x_1$  و از آنجا، برابری بقیه عدهای  $x_i$  به دست می‌آید.

۲۲.۸۴ . راهنمائی.  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  را راس‌های ذوزنقه مفروض و می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، برای هر نقطه  $O$ ، داریم:

$$|OA| + |OB| + |OC| > |OD|$$

در واقع  $|AB| = |CD|$  و  $|OA| + |OB| \geq |AB|$ ؛ از طرف دیگر  $|OC| + |CD| \geq |CD|$ ؛ در ضمن، یکی از نابرابری‌ها، اکید است. بقیه حالتها هم، با روشی مشابه ثابت می‌شوند.

۲۴.۸۴ . عده‌های طبیعی را به گروه‌های صفتی پشت سر هم تقسیم و از هر گروه عضوی برای مجموعه  $A$  انتخاب می‌کنیم. اختلاف هر دو عضو پشت سر هم از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کند، بنابراین، دیر یا زود، این اختلاف تکرار می‌شود. درنتیجه، بین عضوهای  $A$ ، عده‌های  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  پیدا می‌شود، به نحوی که داشته باشیم:

$$a - c = d - b \Rightarrow a + b = c + d$$

۲۷.۸۴ . پاسخ. عدد ۱۹۸۴

۳۰.۸۴ . داریم:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= x^4(y+z)^4 + y^4(x+z)^4 + z^4(x+y)^4 = \\ &= 2(x^4y^4 + y^4z^4 + x^4z^4) + 2xyz(x+y+z) = \\ &= (x^4 + y^4 + z^4)^2 - x^4 - y^4 - z^4 \end{aligned}$$

بنابراین

$$2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^4 + y^4 + z^4)^2$$

۳۳.۸۴ . متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BD| &> |\vec{AC} \cdot \vec{BD}| = |(\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC})| > \\ &> |AB|^2 - |BC|^2 \end{aligned}$$

۱.۳۴.۸۴ می‌گیریم. چندجمله‌ای  $x^7 + x^4 - y$  به صورت

$$y^7 - 7y^4 + \dots$$

و دو جمله‌ای  $ax + b$  به صورت

$$ay - (a - b)$$

در می‌آید؛ در ضمن، عمل ضرب در  $1 + x$  به ضرب در  $y$ ، و عمل مشتق‌گیری نسبت به  $x$ ، به مشتق‌گیری نسبت به  $y$  تبدیل می‌شود. روشن است که مقدار ثابت  $(a - b)$ ، نتیجه‌ای از عمل‌ها روی  $y^7$  است.  $7y^6$ ، ضمن عمل، از درجه هفتم به درجه ششم و پایین‌تر می‌رسد، ولی ضریب آن همیشه مضربی از ۴۹ خواهد ماند. یعنی  $b - a$ ، مضربی از ۴۹ است.

.۳۵.۸۴ پاسخ.

.۳۶.۸۴ فرض می‌کنیم، چنین یالی وجود نداشته باشد. در سه راس مجاور ۵۰، تنها عده‌های ۱، ۹۹ و ۱۰۰ می‌توانند باشند؛ ولی بین دو عدد ۱ و ۹۹، عدد دیگری جز ۵۰ نمی‌تواند باشد. پس در انتهای دیگر یال جانبی، که در یک انتهای آن، عدد ۵۰ را گذاشته‌ایم، باید عدد ۱۰۰ و در دو راس مجاور ۵۰ (روی قاعده منشور) عده‌های ۱ و ۹۹ گذاشته شود. فرض می‌کنیم، عدد ۱ را در سمت راست و عدد ۹۹ را در سمت چپ ۵۰ گذاشته باشیم. در سمت راست عده‌های ۱ و ۱۰۰، تنها عده‌های ۵۱ و ۲ را می‌توان گذاشت. به همین ترتیب، اگر از سمت راست جلو برویم، می‌توانیم عده‌های بقیه راس‌ها را پیدا کنیم. اگر به این ترتیب، یک دور کامل منشور را طی کنیم، به سادگی معلوم می‌شود که باید جای عدد ۹۹ را عوض کنیم.

.۳۹.۸۴ پاسخ. نه، نمی‌توان. در واقع، برای چهار نقطه‌ای که می‌خواهیم نتیجه‌ای از چهار نقطه اول باشند، برای هر نقطه، تفاضل دو مختصص، بر ۳ بخش‌بذیر است. این ویژگی باید، ضمن عمل مورد نظر

مساله، حفظ شود، در حالی که برای مختصات نخستین چهار نقطه، این ویژگی وجود ندارد.

۴۰.۸۴. کوچکترین عدد غیر صفر را در نظر می‌گیریم. وقتی عمل

میانگین حسابی را انجام می‌دهیم، این عدد یا تغییر نمی‌کند و یا (اگر با عدد صفر در نظر گرفته شود)، به نصف خود تبدیل می‌شود. بنابراین، عدد ۱، نمی‌تواند بیش از  $2^9$ ، یعنی ۵۱۲ بار کوچک شود. پاسخ.  $\frac{1}{512}$ .

۴۱.۸۴. پاره خط راستی به طول

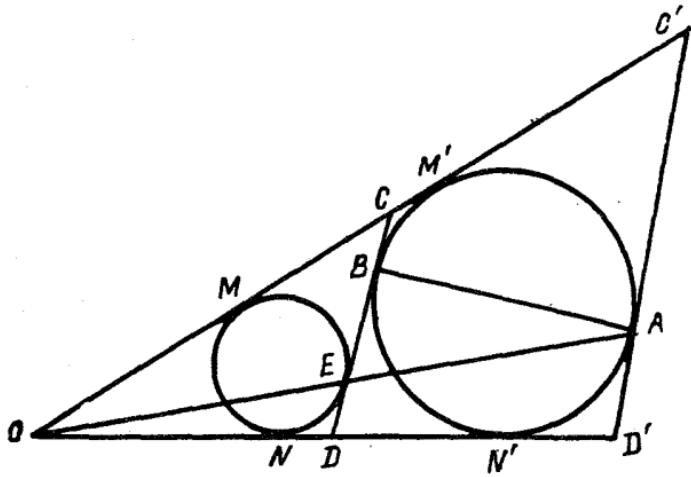
$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

در نظر می‌گیریم. سپس، این پاره خط راست را، با نقطه‌های به رنگ قرمز، به پاره خط‌های راستی به طول‌های  $a_1, a_2, \dots, a_k$  و، بعد، بهوسیله نقطه‌های به رنگ آبی، به پاره خط‌های راستی به طول‌های  $b_1, b_2, \dots, b_n$  تقسیم می‌کنیم. اکنون، در خانه محل برخورد سطر زام و ستون زام جدول، عددی را قرار می‌دهیم که برابر با طول تقاطع زامین پاره خط راست با دو انتهای، قرمز (و به طول  $a$ ) با پاره خط راست زام با دو انتهای آبی (و به طول  $b$ ) باشد. به این ترتیب، جدول مورد نظر به دست می‌آید.

۴۳.۸۴. حالتی را در نظر می‌گیریم که دایره در بیرون مثلث  $OCD$

قرار دارد (شکل ۵۷ را بینید). نقطه‌های برخورد ضلع‌های زاویه را، با مماس بر دایره در نقطه  $A$ ، با  $C'$  و  $D'$  نشان می‌دهیم، به نحوی که دایره، در مثلث  $OC'D'$  محاط شده باشد. روشن است که، در تجانس به مرکز  $O$ ، مثلث  $OC'D'$ ، مجانس مثلث  $OCD$  است. بنابراین، نقطه  $E$  عبارت است از نقطه تماس دایرة محاط در مثلث  $OCD$  با ضلع  $CD$ . نقطه‌های تماس این دو دایره را با خط‌های راست  $OD$  و  $OC$ ، با نقطه‌های  $N, M', M$ ،  $N'$  نشان می‌دهیم. با توجه به قضیة مربوط به برابری مماس‌ها، داریم:

$$2|BC| + |BE| = |BC| + |CE| = |M'C| + |CM| =$$



شکل ۵۷

$$\begin{aligned}
 &= |M'M| = |OM'| - |OM| = |ON'| - |ON| = \\
 &= |NN'| = |N'D| + |DN| = |DB| + |DE| = \\
 &= 2|DE| + |BE|
 \end{aligned}$$

یعنی  $|BC| = |DE|$ .

۴۴.۸۴. راهنمایی. مجموعه  $A$  را می‌توان مجموعه همه آن عددهای طبیعی در نظر گرفت که، در عدد نویسی به بنای ۳، شامل رقم ۲ نباشند.

۴۶.۸۴.  $SA_1A_2\dots A_n$  را، هرم مفروض می‌گیریم. یال  $SA_1$  را، یال جانبی با بیشترین طول (در بین یال‌های جانبی) فرض می‌کنیم. اکنون سطح جانبی هرم را روی یال  $SA_1$  می‌بریم و آن را روی صفحه، می‌گسترانیم. با توجه به شرط مساله، روشن است که، نقطه  $S$ ، در درون چندضلعی  $A_1A_2\dots A_nA'_1$  واقع می‌شود.  $B$  را نقطه دوم برخورد خط راست  $SA'_1$  با خط شکسته  $A_1A_2\dots A_nA'_1$  فرض می‌کنیم. این نقطه، خط شکسته را به دو خط شکسته  $A_1\dots B$  و  $A'_1\dots B$  به طول  $a$  و  $b$  تقسیم

$$|SA_1| < a + |SB|, |A'_1S| + |SB| = |A'_1B| < b$$

به ما می‌دهند:

$$2|SA_1| = |SA_1| + |SA'_1| < a + |SB| + |A'_1S| < a + b$$

و این عدد آخر، همان محیط قاعده هرم است.

۴۷.۸۴. به این اتحاد توجه کنید:

$$a = \frac{2a}{3} = \frac{x^r + 2y^r}{3} = \left( \frac{x \pm 2y}{3} \right)^r + 2 \left( \frac{x \mp 2y}{3} \right)^r$$

روشن است که  $x$  و  $y$ ، یا هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند و یا هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نیستند (در حالت اول، اثبات روشن است). اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم دو عدد بر ۳، یکسان باشد، علامت‌های بالا و اگر این باقی‌مانده‌ها مختلف باشند، علامت پایین را انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت، کسرها، عددهایی درست می‌شوند.

۵۱.۸۴. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$$

و فرض می‌کنیم:

$$P(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$$

بنابر رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌ها (قضیه ویت) داریم:

$$p = -(a + b + c + d + e);$$

$$q = \frac{1}{2}[(a + b + c + d + e)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)];$$

هر دو عدد  $p$  و  $q$ ، بر  $n$  بخش‌پذیرند. اگر برابری‌های

$$P(a) = 0, P(b) = 0, \dots, P(e) = 0$$

را با هم جمع کنیم، روشن می‌شود که

$$\begin{aligned} & a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + 5t + \\ & + r(a^r + b^r + c^r + d^r + e^r) + s(a + b + c + d + e) \end{aligned}$$

بر  $n$  بخش‌پذیر است. اکنون، کافی است توجه کنیم که

$$t = -abcde$$

بر  $n$  بخش‌پذیر است. این را هفت جملهٔ متوالی دنبالهٔ می‌گیریم؛

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$S(a, b, c, d, e, f) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + 12f$$

رقم‌های آخر عدهای

$$S(x_1, \dots, x_6), S(x_2, \dots, x_7)$$

بر هم منطبق‌اند (آزمایش کنید!)؛ از این‌جا معلوم می‌شود که، برای هر  $k$ ، رقم آخر عدد  $(x_{k+1}, \dots, x_{k+6})$ ، تغییر نمی‌کند. برای شش عدد اول دنباله داریم:

$$S(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18$$

و این مقدار، برای شش رقم  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$  برابر است با ۲۴. این دو عدد، در رقم آخر اختلاف دارند؛ بنابراین درستی فرض حکم مساله ثابت می‌شود.

۱۰.۸۵ سکه را به ۳۴ زوج تقسیم و، در هر زوج، سکه‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. سپس ۳۴ سکه سنگین‌تر را با ۳۳ بار استفاده از ترازو مقایسه و، در بین آن‌ها، سنگین‌ترین را پیدا می‌کنیم. بین ۳۴ سکه سبک‌تر هم، با ۳۳ بار استفاده از ترازو، سبک‌ترین را جدا می‌کنیم.

۱۰.۸۶ روشی است که، فاصله بین دو شهر  $B$  و  $C$ ، باید از فاصله بین دو شهر  $A$  و  $B$  بیشتر باشد، زیرا در غیر این صورت، مسافر باید از  $B$  به  $A$  برگردد. بهمین ترتیب، فاصله شهر بعدی تا شهر  $C$ ، باید کمتر از فاصله شهر  $C$  تا شهر  $B$  نباشد وغیره. به این ترتیب مسیر مسافت، در هر مرحله، طولانی‌تر می‌شود. اگر زمانی به  $A$  برسد، باید بعد از آن دوباره به  $B$  برود و فاصله  $A$  تا  $B$  از مرحله قبلی بیشتر باشد که ممکن نیست.

۱۰.۸۷ به عنوان نمونه می‌توان ۹۹۸ عدد را برابر ۱، یک عدد را برابر ۲ و یک عدد را برابر ۱۰۰۰ گرفت.

۱۰.۸۸ حل مساله ۱۰.۸۵ را بیینید.

۱۰.۸۹ پاسخ. نه، ممکن نیست. باقی‌مانده تقسیم بر ۳ را در نظر بگیرید.

۱۰.۹۰ پاسخ. ۲،  $p = 3$ ،  $q = 1$ ،  $n = 1$ ،  $p = 2$ ،  $q = 3$ ،  $n = 1$

۱۱.۸۵ حشره‌ها را  $A$ ،  $B$  و  $C$  می‌نامیم. شش حالت، برای وضع قرار گرفتن آن‌ها روی خط راست (از چپ به راست) وجود دارد:

$$ABC, BCA, CAB, ACB, BAC, CBA$$

سه حالت اول را «نوع اول» استقرار و سه حالت دوم را «نوع دوم» استقرار حشره‌ها می‌نامیم. به‌سادگی و با تحقیق روشی روشی که، با هر پرس یک حشره، نوع اول به نوع دوم (و برعکس) تبدیل می‌شود. بنابراین، بعد از ۱۹۸۵ پرس، وضع استقرار حشره‌ها، با وضع نخستین آن‌ها فرق خواهد

داشت.

۱۴.۸۵. پاسخ. عدد اصلی، ۲۵ بوده است.

۱۶.۸۵. پاسخ. ۴۹۷ عدد.

۱۷.۸۵. فرض می‌کنیم این طور نباشد و همه نقطه‌های قرمز را (اگر وجود دارند) در نظر می‌گیریم. هریک از آن‌ها، یا تنها به نقطه‌های آبی و یا تنها به نقطه‌های سبز وصل شده است. در حالت اول آن را به رنگ سبز و در حالت دوم به رنگ آبی درمی‌آوریم. به این ترتیب، شکلی بدون نقطه‌های قرمز به دست می‌آید. تعداد پاره خط‌های راستی را که از هر نقطه می‌گذرد با  $k$  و تعداد نقطه‌های آبی و سبز را، به ترتیب، با  $A$  و  $B$  مشخص می‌کنیم. تعداد همه پاره خط‌های راست، از طرفی برابر  $kA$  و، از طرف دیگر، برابر  $kB$  می‌شود، یعنی  $A + B = 1985$ ، که ممکن نیست، زیرا  $A + B = k + 1$ .

۱۸.۸۵. فرض می‌کنیم توانسته باشیم، در یکی از سکوها،  $k$  صندوق را به شماره‌های ردیف (در زیر صندوق شماره ۱، روی آن صندوق شماره ۲، ... و، سرانجام در بالا، صندوق شماره  $k$ ) قرار داده باشیم. اکنون، اگر در روی صندوق شماره  $n$ ، صندوق‌های دیگری وجود دارد، همه آن‌ها را به سکوی دیگر منتقل می‌کنیم و، سپس، همه صندوق‌ها را از این سکو (به جز آن‌ها که زیر صندوق  $(1 + k)$  است) به سکوی قبلی و روی صندوق شماره  $k$  می‌بریم. به این ترتیب، صندوق با شماره  $(1 + k)$  روی صندوق با شماره  $k$  قرار می‌گیرد. روشن است که، برای آخرین صندوق، یعنی صندوق با شماره  $n$ ، بیش از یک جایه‌جایی لازم نیست و، بنابراین، روی هم، با  $(1 - n)$  جایه‌جایی، به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

۱۹.۸۵. فرض کنید، در تصاعد حسابی  $\{a + nd\}$ ، جمله  $y^2$  وجود داشته باشد. در این صورت، همه عددهای به صورت  $(y + kd)^2$ ، جمله‌هایی از این تصاعد خواهند بود.

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{8}}, x = y = z = 0. \quad ۲۰.۸۵$$

$$x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\widehat{ABC} = 100^\circ, \widehat{DAB} = 57^\circ, 30^\circ \quad ۲۱.۸۵$$

از این موضوع استفاده کنید که، نقطه‌های  $A$  و  $D$  روی محیط دایره‌ای به مرکز  $B$  قرار دارند.

راهنمانی. سه جمله‌ای‌های درجه دوم

$$a_1x^2 + 2b_1x + c_1, a_2x^2 + 2b_2x + c_2$$

را مورد توجه قرار دهید.

راهنمانی. ثابت کنید، چهارضلعی  $ACOM$  قابل محاط در دایرة به قطر  $OC$  است.

راهنمانی. کسی که بازی را آغاز می‌کند، پیروز می‌شود. او می‌تواند، به این ترتیب، برای بازی خود برنامه‌ریزی کند: در نخستین حرکت، مهره را در خانه ۲۵ می‌گذارد؛ سپس این فکر را دنبال می‌کند که، بعد از هر حرکت او، بین هر دو گروه مهره و، همچنین، بین گروه مهره‌های مرزی و خانه‌های مرزی، به تعداد زوج، خانه‌های آزاد وجود داشته باشد.

را نقطه دلخواهی از درون چهارضلعی  $ABCD$  می‌گیریم. روشن است که، یکی از زاویه‌های  $AOB$ ،  $BOC$ ،  $COD$  و  $DOA$  از  $90^\circ$  درجه تجاوز نمی‌کند؛ برای مشخص بودن وضع، این زاویه را فرض می‌کنیم. در این صورت

$$|AO|^2 + |BO|^2 \leq |AB|^2 = 7^2 = 49$$

بنابراین  $|AO|^2 < 25$  و  $|BO|^2 < 25$ ، یعنی نقطه  $O$ ، در درون دایره‌ای به شعاع ۵ است که به مرکز نقطه  $A$  یا نقطه  $B$  رسم شده باشد.

۰.۲۹.۸۵ برای هر  $z \geq 1$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\frac{1}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_i - x_i^2} = \frac{1}{x_i(1-x_i)} > \frac{1+x_i}{x_i} = 1 + \frac{1}{x_i}$$

از این نابرابری نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{x_{1001}} > 1000 + \frac{1}{x_1} = 2000$$

از آنجا  $2000 < x_{1001} < 10000$ .

۰.۳۳.۸۵ نقطه  $O$  را بخورد خط‌های راستی می‌گیریم که در صورت مساله از آن‌ها یاد شده‌است. فرض می‌کنیم، نقطه‌های  $K, L, M, N$ ،  $A, B, C, D$  و پای عمودهای وارد از  $O$ ، به ترتیب بر یال‌های  $AB, AC, BC, CD$  و  $DA$  قرار گیرند. روشی است که نقطه  $F$  مرکز دایره محاط در مثلث  $ABC$  باشد.

$$(FK) \perp (AB), (FL) \perp (AC), |FK| = |FL|$$

یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویه  $AKF$  و  $AFL$  برابرند و  $|AK| = |AL|$ . به همین ترتیب ثابت می‌شود:

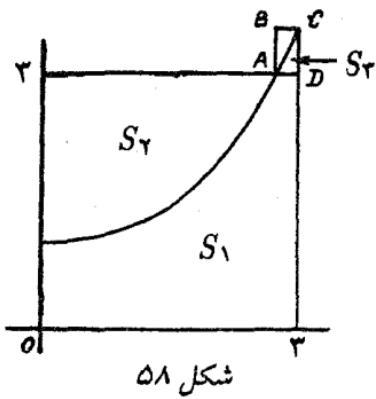
$$|CM| = |CL|, |DM| = |DN|, |BK| = |BN|$$

از مجموع این برابری‌ها به دست می‌آید:

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD|$$

برابری دوم هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۰.۳۴.۸۵ نمودار تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 1}$ ، مربع  $3 \times 3$  را به دو بخش با مساحت‌های  $S_1$  و  $S_2$  تقسیم می‌کند (شکل ۵۸).



شکل ۵۸

از یک طرف داریم:

$$\int_1^2 \sqrt{x^4 + 1} dx = S_1 + S_2$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطه  $\sqrt{x^4 - 1} = g(x)$  با تابع  $f(x)$ ، به دست می‌آید ( $g$  معکوس  $f$  است):

$$\int_1^2 \sqrt{x^4 - 1} dx = S_2$$

بنابراین، مجموع انتگرال‌ها برابر  $S_1 + S_2 + S_2$  می‌شود، و چون  $S_2$  از مساحت مستطیل  $ABCD$  کمتر است (مساحت این مستطیل، از  $1/0001$  تجاوز نمی‌کند)، پس درستی نابرابری‌های مساله ثابت می‌شود.  
۳۷.۸۵. پاسخ. به عنوان نمونه، این عدد:

۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴۱۵۸۴

۳۹.۸۵. همه گروه‌های سه تیمی را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد: آن‌هایی که، در بازی با هم، هر کدام یک بُرد داشته‌اند، و آن‌هایی که ضمن بازی با هم، به امتیاز‌های ۲، ۱ و ۰ رسیده‌اند. اگر تعداد گروه‌های سه تیمی

نوع اول را  $a$  و تعداد گروههای سه تیمی نوع دوم را  $b$  فرض کنیم، آن وقت  $a + b = 455$ . از طرف دیگر، تعداد گروههایی که در آنها، تیم مفروض درست ۱ امتیاز گرفته است، برابر ۴۹ است؛ در هر گروه نوع اول، سه تا از این تیم‌هاست، یعنی هریک از این‌گونه گروه‌ها سه بار به حساب آمده است و هر گروه نوع دوم، درست یکبار در محاسبه وارد شده است. به این ترتیب

$$3a + b = 49 \times 15 = 735$$

از این‌جا به دست می‌آید:  $a = 140$ .

۴۰.۸۵ حل مساله ۲۸.۷۸ را بیینید.

۴۲.۸۵ تفاضل  $n - 500a_n$  را در نظر می‌گیریم. این تفاضل، به ازای  $n$  برابر  $499$  و به ازای  $m = n - 500a_m$  برابر  $(-500a_m)$  است. روشن است، برای عبور از  $n + 1$  به  $n$ ، این تفاضل، یا به  $499$  صعود و یا به  $1$  نزول می‌کند. فرض کنید،  $n$  نخستین شماره‌ای باشد که، برای آن، این تفاضل مثبت نباشد. در این صورت روشن است که باید برابر صفر باشد، یعنی

$$a_n = \frac{n}{500}$$

۴۳.۸۵ راهنمائی. به کمک استقراء ثابت کنید:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+2}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}$$

۵۱.۸۵ راهنمائی. ثابت کنید  $a_n - a_{n-1}$  بخش‌پذیر است.

۵۲.۸۵ هر گروه پسرها را با گروهی از دخترها متناظر می‌کنیم که شامل همه دخترانی باشد که هر کدام از آن‌ها، با تعداد فردی از پسرهای این گروه دوستی دارد. با توجه به شرط مساله، در هر گروهی از این‌گونه، تعداد زوجی دختر وجود دارد. اگر تعداد پسران و تعداد دختران برابر  $n$  باشد، آن‌وقت به تعداد  $1 - 2^n$  گروه غیر تهی از پسران و به تعداد  $1 - 2^n$  گروه غیر تهی از دختران وجود دارد. ولی گروههایی که از تعدادی زوج دختر تشکیل شده

است، کمترند (آنها برابرند با  $1 - 2^{n-1}$ )، بنابراین دو گروه جداگانه پسران پیدا می‌شود که متناظر با یک گروه از دختران هستند. این، به معنای آن است که، برای هر دختر این کلاس، تعداد دوستانی که در بین پسران این گروه‌ها دارد، یا برای همه دختران زوج است و یا برای همه آنها فرد. اکنون کافی است، پسرانی را در نظر بگیریم که درست در یکی از دو گروه مورد بررسی قرار دارند؛ این، همان گروه مورد نظر است.

۳.۸۶. داریم:

$$77a = 44a + 43a = 43b + 43a = 43(a + b)$$

بنابراین  $43(a + b)$  بر ۷۷ بخش‌پذیر است، یعنی  $a + b$  بر ۷۷ بخش‌پذیر است و عددی است مرکب.

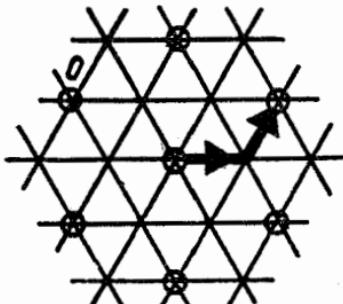
۵.۸۶. راهنمائی. اگر چهار عدد پشت سر هم روی محیط دایره را،  $a, b, c$  و  $d$  فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$b = a + c, \quad c = b + d$$

و از آنجا به دست می‌آید  $a + d = 0$ .

۶.۸۶. الف) روش است که، رقم صفر، نباید وجود داشته باشد. این عدد باید زوج باشد، یعنی رقم ۵ نمی‌تواند داشته باشد. مجموع ۸ رقمی که می‌ماند بر ۳ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، چنین عددی وجود ندارد.

۱۱.۸۶. حلزون روی یال‌های یک شبکه مثلثی می‌خزد. (شکل ۵۹ را ببینید)؛ در ضمن، اگر از نقطه  $O$  آغاز به حرکت کرده باشد، بعد از هر ساعت، در نقطه‌هایی خواهد بود که با دایره نشان داده‌ایم. اگر حرکت او،  $x$  ساعت طول بکشد که، در آن،  $n \in \mathbb{N}$  و  $1 < x < 0$ ، آنوقت، ضمن  $x$  ساعت، نمی‌تواند خود را، از یکی از این دایره‌ها، به مبدأ برساند.



شکل ۵۹

۱۳.۸۶. انجمن‌ها را با عددهای از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. مجموعه همه انجمن‌ها، دارای ۳۲ زیرمجموعه است. این زیرمجموعه‌ها را به ۱۰ گروه تقسیم می‌کنیم:

- $\phi, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\};$
- $\{2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\};$
- $\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\};$
- $\{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\};$
- $\{5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\};$
- $\{1, 5\}, \{1, 3, 5\};$
- $\{2, 3\}, \{2, 3, 5\};$
- $\{2, 4\}, \{2, 4, 5\};$
- $\{3, 4\}, \{2, 3, 4\};$
- $\{4, 5\}, \{1, 4, 5\}$

توجه کنید: در هر گروه، برای هر دو مجموعه دلخواه، یکی زیرمجموعه دیگری است.

اکنون، برای هر دانشآموز، مجموعه انجمن‌هایی را می‌نویسیم که، این دانشآموز، در آن‌ها شرکت دارد. چون ۱۱ دانشآموز وجود دارد؛ بنابراین دو تا از این مجموعه‌ها در یکی از گروه‌های ده‌گانه بالا خواهند بود، یعنی یکی از آن‌ها، زیرمجموعه دیگری است.

۱۶.۸۶. قرینه نقطه  $B$  را نسبت به نیمساز  $CD$  پیدا می‌کنیم؛ نقطه  $M$ ، روی پاره خط راست  $CE$  به دست می‌آید. با محاسبه زاویه‌ها، روشن می‌شود که هر یک از مثلث‌های  $DEM$  و  $AED$  متساوی الساقین‌اند و،  
بنابراین

$$|BD| = |DM| = |DE| = |AE|$$

۱۹.۸۶. نصف مجموع مجذورهای تعداد چوب کبریت‌ها در بخش‌های جداگانه را  $S$  می‌نامیم. در آغاز  $5 = 312/5$  و در پایان کار  $5 = S$ .  
اگر توده‌ای را که، در آن،  $x+y$  چوب کبریت وجود دارد به دو بخش جداگانه، یکی شامل  $x$  چوب کبریت و دیگری شامل  $y$  چوب کبریت، تقسیم کنیم، آن وقت، مقدار  $S$ ، به اندازه  $y/x$  کاهش می‌یابد. بنابراین، مقدار کاهش  $S$ ، برابر با همان عددی است که جایی نوشته‌ایم؛ و مجموع همه این عددها، برابر تفاضل دو مقدار  $S$ ، در آغاز و پایان کار است، یعنی

$$312/5 - 12/5 = 300$$

.۱۹۸. ۲۰.۸۶ پاسخ.

۲۲.۸۶. برابری را، به این صورت بنویسید:

$$1001a + 999b = 1$$

. $b = -501$ ،  $a = 500$  پاسخ.

۲۳.۸۶. راهنمائی. هر ضلع خط شکسته  $HKOIMH$ ، از مجموع طول‌های دو پاره خط راستی که وسط ضلع‌های مجاور پنج ضلعی را به هم

وصل می‌کنند، تجاوز نمی‌کند، یعنی از نصف مجموع طول‌های دو قطر مشخص پنج ضلعی بیشتر نیست.

۲۴.۸۶ حل مساله ۲۶.۶۳ را بینید.

۲۵.۸۶ ثابت می‌کنیم، برای هر

$$n = 1, 2, 3, \dots, 33$$

می‌توان دو گروه جدا از هم (دو مجموعه بدون اشتراک) از تیم‌ها در نظر گرفت که، در گروه اول  $n$  تیم و در گروه دوم  $5n + 1$  تیم وجود داشته باشد، به نحوی که همه تیم‌هایی که با تیم‌های گروه اول بازی کرده‌اند، از بین تیم‌های گروه دوم باشند (و این، به معنای آن است که، تیم‌های گروه اول، با هم بازی نکرده‌اند). برای  $n = 1$ ، تیم دلخواهی را در گروه اول قرار می‌دهیم و، در گروه دوم، آن شش تیمی را که با تیم گروه اول بازی نکرده‌اند. اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از  $33 < n$ ، توانسته باشیم، این دو گروه را تشکیل دهیم. چون در دو گروه، روی هم، تعداد تیم‌ها، عددی فرد است، تیمی مثل  $A$  وجود دارد که متعلق به هیچ‌کدام از این دو گروه نیست و، در روز اول، با یکی از تیم‌های گروه دوم، بازی کرده‌است. در ضمن، حداقل پنج تیم وجود دارد که در دو گروه ما نیستند و تیم  $A$ ، با آن‌ها بازی کرده‌است. تیم  $A$  را به گروه اول اضافه می‌کنیم، و این پنج تیم (یا کمتر از آن) را، به گروه دوم. اکنون، اگر لازم باشد، چند تیم (از آن‌هایی که در دو تیم ما شرکت ندارند) به گروه دوم می‌افزاییم، به نحوی که تعداد آن‌ها برابر شود با

$$5n + 6 = 5(n + 1) + 1$$

چون  $33 < n$ ، این عمل ممکن است و، بنابراین، توانسته‌ایم، دو گروه را برای  $1 + n$  تشکیل بدھیم.

اکنون دو گروه را برای  $n = 33$  در نظر می‌گیریم. چون

$$6n + 1 = 199 < 200$$

یعنی هنوز یک تیم وجود دارد که در دو گروه شرکت ندارد. این تیم را، به ۳۳ تیم گروه اول اضافه می‌کنیم، ۳۴ تیم به دست می‌آید که، در بین آنها، هیچ تیمی با تیم دیگر بازی نکرده است.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{42} & 28.86 \\ .c &= -500, b = -1, a = 500 & 31.86 \\ . & & 34.86 \end{aligned}$$

۳۵.۸۶ معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^{1985}(x - 1) = 1986^{1985}(1986 - 1)$$

چون  $x = 1986$  ریشه‌ای از معادله است و، سمت چپ معادله، برای  $1 > x$  صعودی است، پس ریشه دیگری ندارد.

۳۷.۸۶ درجه. پاسخ.

۳۸.۸۶ راهنمائی. از این برابری استفاده کنید:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

۴۰.۸۶ سال مریخ را  $100$  روز می‌گیریم. در زندگی هر مریخی، درست یک روز اول سال وجود دارد. چون تعداد همه مریخی‌ها، عددی فرد بوده است، بنابراین، روز اول یکی از سال‌ها، تعداد ساکنان مریخ فرد بوده است. به همین ترتیب، روز دوم یکی از سال‌ها، تعداد ساکنان مریخ فرد بوده است و غیره. بنابراین، تعداد چنین روزهایی، از  $100$  کمتر نیست.

۴۱.۸۶ راهنمائی. ثابت کنید:  $\widehat{NCH} = \widehat{KAN}$

۴۲.۸۶. فرض می‌کنیم، خط هوایی  $AB$  را بسته باشند و، اکنون، کوتاهترین مسیر، برای رفتن از شهر  $X$  به شهر  $Y$ ، به مسیری شامل  $1 + 2n$  فرود نیاز داشته باشیم. شهرهای مریوط به مسیر این پرواز را شماره‌گذاری می‌کنیم: قبلًا، کوتاهترین مسیر از  $X$  تا  $X_{2n+1} = Y$ ،  $X_0 = X$ ،  $X_{n+1}$ ، بیش از  $n$  فرود و پرواز از  $X_n$  تا  $Y$  هم، بیش از  $n$  فرود لازم نداشت. روشن است که، هر دو مسیر، از طریق خط  $AB$  بود؛ در ضمن، می‌توان فرض کرد، پرواز از  $A$  به طرف  $B$  باشد. فرض کنید، برای رفتن از  $X$  به  $X_{n+1}$ ، تعداد فرودها از  $A$  تا  $X$  برابر  $s_1$  و از  $B$  تا  $X_{n+1}$  برابر  $t_1$  باشد؛ برای رفتن از  $X_n$  به  $X_{2n+1}$ ، از  $B$  تا  $X$  باز  $s_2$ ، به تعداد فرود و از  $X_n$  تا  $A$ ، به تعداد  $t_2$  فرود لازم باشد.

در این صورت، با توجه به شرط مساله

$$s_1 + 1 + t_1 \leq n, \quad s_2 + 1 + t_2 \leq n$$

از مجموع این دو نابرابری، به دست می‌آید:

$$(s_1 + t_2) + (s_2 + t_1) \leq 2n - 2$$

بنابراین، یکی از جمله‌های سمت چپ نابرابری از  $1 - n$  تجاوز نمی‌کند. ولی این، به معنای آن است که در پرواز از  $X$  به  $X_n$  یا از  $X_{n+1}$  به طول پرواز از  $n$  کمتر و، در ضمن، شامل خط  $AB$  است. تناقض.

۴۳.۸۶. حل مساله ۱۸.۶۹ را ببینید.

۴۵.۸۶. پاسخ. آغاز کننده بازی برنده می‌شود.

۵۰.۸۶. عدد دلخیاه  $\circ > c$  را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که  $c \in A$ . روشن است که می‌توان عددهای  $a$  و  $b$  را پیدا کرد، به نحوی که  $a < b < c$  و، در ضمن  $[a, b] \subset A$ . درست به همین ترتیب، بازه

. $x \in A$  شامل بازه‌ای است مثل  $[c-a, c-b]$ ؛ بعویژه  $[x, y] \subset A$  است. چون  $c-x$  عضو  $A$ ، پس  $(c-x)+x = c$  هم عضو  $A$  است. ۵۱.۸۶ پاسخ. از این گونه عددها، به تعداد ۱۰ وجود دارد.

.۵۳.۸۶ پاسخ.  $\sqrt{2} + 64$

.۵۵.۸۶ فرض می‌کنیم  $f(1) > 1$  (حالت ۱ هم، کاملاً شبیه این حالت است). در این صورت، با توجه به پیوستگی تابع  $f(x)$  باید برای هر مقدار  $x$  داشته باشیم:  $0 < f(x) < 1$ . ولی در این صورت، برای هر تعداد نماد  $f$  باید داشته باشیم:

$$f(f(\dots f(1)\dots)) > 1$$

و این نتیجه، فرض را نقض می‌کند.

.۵۶.۸۶ راهنمایی. این عبارت را در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999} + \sqrt{10001}}$$

.۵۸.۸۶ اندیشه اصلی را حل، با توجه به زوج نبودن تابع

$$\frac{1}{1 + x^r + \sqrt{1 + x^s}}$$

به دست می‌آید. داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^r + \sqrt{1 + x^s}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + x^r + \sqrt{1 + x^s}} + \\ &+ \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^r + \sqrt{1 + x^s}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 - x^r + \sqrt{1 + x^s}} + \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^r + \sqrt{1 + x^s}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{1-x^3 + \sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{1+x^3 + \sqrt{1+x^6}} \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{(2+2\sqrt{1+x^6})dx}{(1+\sqrt{1+x^6})^2 - x^6} = \int_0^1 1 dx = 1
 \end{aligned}$$

۵۹.۸۶. کره محاط در قالب یک دوازدهوجهی منتظم و، در ضمن، دایرههایی که با وجههای چندوجهی روی آن حک شده است، درنظر می‌گیریم. با تصویر رسم‌الجسمی (ستریوگرافیک) این دایره‌ها بر صفحه، دایره‌هایی به دست می‌آید که همان ویژگی مورد نظر مساله را دارند. این ویژگی از آن جا ناشی می‌شود که هر وجه دوازدهوجهی به وسیلهٔ پنج دایره احاطه شده است.

۶۰.۸۶. به سادگی قابل تحقیق است که

$$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3,$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3 = v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3$$

$$چون u_1 u_2 u_3 = v_1 v_2 v_3, \text{ بنابراین، چندجمله‌ای‌های}$$

$$(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)(x - v_1)(x - v_2)(x - v_3)$$

بر هم منطبق‌اند؛ بنابراین، ریشه‌های آن‌ها هم بر هم منطبق‌اند.

۲۰.۸۷. نه، نمی‌توان. راهنمائی. باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۳ یا

بر ۵ را در نظر بگیرید.

۴.۸۷. تعداد پسرها را  $x$ ، تعداد دخترها را  $y$ ، قیمت یک پیراشکی را

$a$  و قیمت یک شوكولات را  $b$  می‌گیریم. در این صورت

$$ax + by = bx + ay - 1$$

این برابری را می‌توان این طور نوشت:

$$(x - y)(b - a) = 1$$

از آنجا:  $x + y = 1$

۱۰۰۵. پاسخ. ۱۰۰۱ بليت.

۱۰۰۶. راهنمائي. اولى باید از تقارن مرکزی استفاده کند. حداکثر امتيازهایي که اولى می تواند به دست آورد، برابر است با ۱۰، یعنی با ۲ امتياز اضافي، برنده شود.

۱۰۰۷. به سادگي معلوم می شود که اختلاف بين مقدار «دالرها» با مقدار «دلرها»، هميسه در تقسيم بر ۱۱، باقیماندهای برابر واحد می دهد.

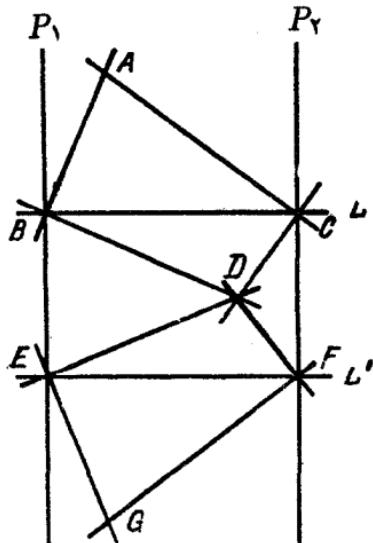
۱۰۰۸. پاسخ. بله، می توان نمونه جواب (از بالا به پايين و از چپ به راست) :

$$1, 5, 6; \quad 9, 3, 7; \quad 8, 2, 4;$$

۱۰۰۹. فرض می کنيم اين طور نباشد. راس های مکعب را طوري به رنگ های سياه و سفید در می آوريم که، هر دو راس مجاور، رنگ های متفاوتی داشته باشند. در اين صورت، هر ضلع خط شکسته، يا دو راسی از مکعب را به هم وصل می کند که هم رنگ آند، و يا يكی از قطرهای بزرگ مکعب است. روشن است که، در خط شکسته ما، دست کم باید دو ضلع وجود داشته باشد که راس های با رنگ های مختلف را به هم وصل کرده باشد؛ ولی در اين صورت، اين ضلع ها در مرکز مربع يكديگر را قطع می کنند که فرض مساله را نقض می کند.

۱۰۱۰. بعد از يك ماه هميسه بخشی از جاده که آماده نشده است، از ۱۰۰ کيلومتر كمتر است. بنابراین، هر ماه دست کم  $\frac{1}{100}$  کيلومتر از جاده ساخته می شود و، به اين ترتيب، بعد از ۱۰۰<sup>۱۱</sup> ماه، جاده، آماده بهره برداری می شود.

۱۰۱۱. نقطه A و خط راست L را در نظر می گيريم (شکل ۶۰ را ببینيد). از نقطه A، خط راست دلخواهی رسم می کنيم که خط راست L را



شکل ۶۰

قطع کند، بعد از  $A$  عمودی بر این خط راست اخراج می‌کنیم. این دو خط راست عمود بر هم، خط راست  $L$  را، به ترتیب، در نقطه‌های  $B$  و  $C$  قطع می‌کنند. از نقطه‌های  $B$  و  $C$ ، عمودهایی، به ترتیب، بر  $AB$  و  $AC$  اخراج می‌کنند. یکدیگر را در نقطه  $D$  قطع می‌کنند؛ در ضمن به سادگی روشن می‌شود که، تصویرهای  $A$  و  $D$  بر  $L$ ، نسبت به وسط پاره خط راست  $BC$ ، قرینه یکدیگرند. اکنون باید همین عمل را درباره نقطه  $A$  و خط راست  $L'$ ، که با  $L$  موازی است، انجام داد و به نقطه  $G$  رسید. روشن است که خط راست  $AG$  بر خط راست  $L$  عمود خواهد بود.

۱۹.۸۷. پاسخ. نه، نمی‌توان. راهنمائی. خانه‌های جدول را، شیوه خانه‌های صفحه شترنج سیاه و سفید در نظر بگیرید و به رنگ‌هایی توجه کنید که مهره‌ها در آن‌ها قرار دارند.

۲۰.۸۷. فرض می‌کنیم:

$$a = x + 2y + 0z + 10t + 20u + 50v + 100w,$$

$$x + y + z + t + u + v + w = b$$

دو طرف برابری دوم را  $100$  برابر می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 100b &= 100x + 50(2y) + 20(5z) + 10(10t) + \\ &\quad + 5(20u) + 2(50v) + 1(100w) \end{aligned}$$

با توجه به این برابری و برابری اول (برای  $a$ )، به رابطه مطلوب می‌رسیم.

**۲۳.۸۷** راهنمائی. با استقرا روی تعداد شاخه‌ها، ثابت کنید، بعد از مدت زمانی، روند کار به پایان می‌رسد و، در ضمن، تعداد کلاغ‌هایی که به پرواز می‌آیند، بستگی به ردیف پروازها ندارد.

$$\frac{100}{100} \cdot 26.87$$

**۲۷.۸۷** این برابری روشن است:

$$\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = \frac{1}{2} \widehat{AO'B}$$

چون  $OA$  بر  $O'B$  و  $OB$  بر  $O'A$  عمود است، پس

$$\widehat{AO'B} = 180^\circ - \widehat{AOB}$$

(در اینجا،  $O$  و  $O'$  مرکزهای دو دایره‌اند)، یعنی

$$\widehat{XAB} + \widehat{YBA} + \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 90^\circ$$

بنابراین، کمان  $XBay$  برابر  $180$  درجه و پاره خط راست  $XY$ ، قطر دایره است.

$$.96433469 \cdot 29.87$$

$A_1, A_2, \dots, A_{25}$  را ستاره‌های زیر ابر، و  $B_1, B_2, \dots, B_{25}$  را بقیه ستاره‌ها می‌گیریم. همه نابرابری‌های مثلثی به صورت

$$|B_i B_j| \leq |B_i A_k| + |B_j A_k|$$

را با هم جمع می‌کنیم ( $i \neq j, k \leq 25$ ). سمت چپ نابرابری برابر  $25T$  می‌شود که، در آن،  $T$ ، مجموع فاصله‌های دویده‌دو، بین ستارگان قابل مشاهده است. در سمت راست نابرابری، هر پاره خط راست  $B_i A_k$  ۲۴ بار می‌آید. بنابراین، مقدار سمت راست، از  $(S - T) ۲۴$  کمتر نیست. به این ترتیب:

$$25T \leq 24(S - T) \Rightarrow 49T \leq 24S$$

$$.T \leq \frac{24}{49}S < \frac{1}{3}S$$

.۳۵.۸۷ پاسخ. بله، وجود دارد، مثلاً به ازای  $n = 993$

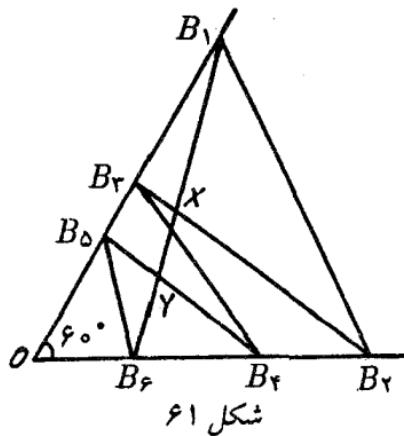
.۳۸.۸۷ راهنمائی. ثابت کنید:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq 1 + \sqrt{ab}$$

.۳۹.۸۷ پاسخ. آغاز کننده بازی برنده می‌شود.

.۴۰.۸۷ مبادله پیچیده‌ای از جایه‌جایی آپارتمان‌ها را در نظر می‌گیریم که منجر به چند دور مبادله می‌شود. هر دور مبادله را می‌توان به عنوان دوران یک چندضلعی، در نظر گرفت که، در هر راس آن، یک «آپارتمان» گذاشته شده است. ولی هر دوران چندضلعی را می‌توان ترکیبی از دو تقارن محوری دانست که، هر یک از آن‌ها، معرف انتخابی از مبادله‌های دوطرفه است.

.۴۱.۸۷ زاویه‌ای برابر  $60^\circ$  درجه را در نظر می‌گیریم و نقطه‌های  $B_i$  را روی ضلع‌های این زاویه و به فاصله برابر  $|OA_i|$  از راس نشان می‌گذاریم، به نحوی که نقطه‌های با اندیس زوج روی یک ضلع و نقطه‌های با اندیس فرد روی ضلع دیگر زاویه باشند (شکل ۶۱).



شکل ۱۶

به این ترتیب، باید ثابت کنیم:

$$|B_1B_2| + |B_4B_5| + |B_5B_6| < |B_2B_1| + |B_4B_5| + |B_6B_1|$$

ولی این نابرابری، از مجموع سه نابرابری روش زیر به دست می‌آید:

$$|B_1B_2| < |B_1X| + |XB_2|;$$

$$|B_2B_4| < |B_2X| + |XY| + |YB_4|;$$

$$|B_5B_6| < |B_5Y| + |YB_6|$$

۴۲.۸۷ . اگر ۹۹۱ را  $x$  بنامیم، عبارت عددی مفروض، به این صورت

درست می‌آید:

$$(x - 2)(x + 10)(x + 16) + 320 =$$

$$= x^3 + 24x^2 - 108x =$$

$$= x(x + 6)(x + 18) = 991 \times 997 \times 1009$$

سه عدد اخیر، عدهایی اولاند و، بنابراین، تجزیه تمام شده است.

۴۴.۸۷ راهنمائی. الف) در قصر همیشه اتاقی پیدا می شود که، اگر آن را بیندیم، قصر به چند بخش تقسیم می شود که، هر کدام از آنها، حداقل شامل نیمی از اتاق های قصر است. نگهبانی در این اتاق می گذاریم. بقیه نگهبانان برای بازرسی هر یک از بخش ها باقی می مانند. اگر به همین ترتیب عمل کنیم، به کمک استقرار به سادگی ثابت می شود که  $n$  نگهبان، برای دستگیر کردن دزد در قصری که بیش از  $2^n$  اتاق ندارد، کافی است.

ج) زنجیره ای از اتاق ها را پیدا کنید که بخش های تقسیم شده قصر به وسیله آن، شامل کمتر از یک سوم تعداد همه اتاق ها باشد.

۴۷.۸۷ راس های مکعب را با دو رنگ سیاه و سفید طوری رنگ می کنیم که هیچ یالی، دو راس هم رنگ را به هم وصل نکرده باشد. در این صورت، مجموع مورد نظر ما از  $x/y$  تجاوز نمی کند که، در آن،  $x$ ، مجموع عدد های واقع در راس های سیاه و  $x - 1 = y$ ، مجموع عدد های واقع در راس های سفید است. چون  $\frac{1}{4} \leq (1-x)x$ ، پس نابرابری حکم مساله هم برقرار است.

۵۱.۸۷ کارت ها را، در حالت اولیه، با عدد های از  $0$  تا  $2n$  شماره گذاری می کنیم. روشن است که، برای هر سه کارت با شماره های پشت سر هم، و مثلًا شماره های  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، عدد  $c - 2b + a$  بر  $1 + 2n$  بخش پذیر است؛ و این ویژگی، ضمن عمل های مورد نظر مساله، به قوت خود باقی می ماند. از این جا نتیجه می شود که شماره کارت های اول و دوم، در رابطه با دیگر کارت ها معین می شود. از آن جا که، از این زوج کارت ها، به تعداد  $(1 + 2n)(2n)$  وجود دارد، وضع استقرار کارت ها هم، بیش از این تعداد حالت نخواهد داشت.

۵۴.۸۷  $x$  را طوری در نظر می گیریم که داشته باشیم:  $x_0 = g(x_0)$ .

فرض می‌کنیم:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$$

در این صورت، از یک طرف  $x_n = g(x_n)$  (برای هر  $n$ )، و از طرف دیگر، به دلیل صعودی بودن تابع  $f(x)$ ،  $\{x_n\}$  دنباله‌ای یکنوا است. دنباله یکنوا و کران‌دار  $\{x_n\}$ ، حدی دارد که آن را  $a$  می‌نامیم که می‌توان آن را به عنوان «نقطه بی‌حرکت» برای  $f$  و  $g$  در نظر گرفت.

۵۶.۸۷. راهنمائی. با استقرای روی  $t$  ثابت کنید. همچنین از این مطلب استفاده کنید که، اگر  $t$  جمله پشت سر هم دنباله مفروض، جمله بعد از خود در دنباله را معین کنند، این دنباله متناوب است.

۶۰.۸۷. زیرمجموعه‌ها را با حروف  $A_1, A_2, \dots, A_s$  نشان می‌دهیم. برای هر  $k$ ، از ۱ تا  $m$ ، مجموعه  $C_k$  از زنجیره زیرمجموعه‌های به صورت

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_m = \{1, 2, \dots, m\}$$

را در نظر می‌گیریم که، در آن، هر  $B_i$  درست شامل  $i$  عضو است، و مجموعه  $B_{a_k}$  بر  $A_k$  منطبق است. روشن است که تعداد چنین زنجیره‌هایی، برابر است با حاصل ضرب تعداد زنجیره‌های به صورت

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_{a_k} = A_k$$

در تعداد زنجیره‌های به صورت

$$A_k = B_{a_k} \subset B_{a_k+1} \subset \dots \subset B_m$$

که، به ترتیب، برابرند با  $a_k!$  و  $(m - a_k)!$ . چون بنای فرض، مجموعه‌های نخستین  $A_k$ ، هیچ کدام شامل دیگری نیست، پس مجموعه‌های  $C_k$ ، دو

به دو، اشتراکی ندارند و، بنابراین، تعداد عضوها در اجتماع آنها، که برابر  $\sum a_k!(m-a_k)!$  است، از تعداد همه زنجیره‌ها، که برابر  $m!$  است، تجاوز نمی‌کند. از آن‌جا

$$\sum_{k=1}^s a_k!(m-a_k)! \leq m! \Rightarrow \sum_{k=1}^s \frac{1}{\binom{m}{a_k}} \leq 1$$

- ۱.۸۸. در پایان کار، باید عدد واقع در خانه مرکزی، برابر با مجموع عددهای چهار خانه گوشه‌ای باشد.
- ۳.۸۸. پاسخ. بله، می‌توان؛ به این ترتیب:

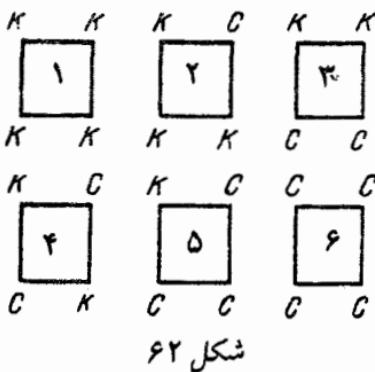
$$51, 1, 52, 2, 53, \dots, 49, 100, 50$$

- ۴.۸۸. پاسخ. نه، نمی‌توان. برای هر دو عدد غیر صفر، یا مجموع و یا تفاضل آنها، از لحاظ قدر مطلق، بزرگتر از هر دو عدد مفروض می‌شود.
- ۵.۸۸. پاسخ. نه، ممکن نیست. راهنمائی.  $S$ ، مجموع تعداد بخش‌ها با تعداد مهره‌های باقی‌مانده را در نظر بگیرید.

- ۹.۸۸. اگر  $p = ab - cd$  و  $d < p$  بخش‌پذیرند، پس  $ab$  و  $cd$  و، درنتیجه  $ab - cd$  بر  $p$  بخش‌پذیر است، یعنی  $1 < p = ab - cd$ .
- ۱۰.۸۸. راهنمائی. از این حقیقت استفاده کنید که، در مثلث، زاویه بزرگتر رو به روی ضلع بزرگتر است.

- ۱۲.۸۸. پاسخ. آغاز کننده بازی می‌برد. برای این‌که آغاز کننده بازی برننده شود، باید هر بار در نوبت خود، یا ۱ چوب کبریت و یا ۲ چوب کبریت بردارد، به نحوی که چوب کبریت‌های باقی‌مانده، به تعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد.

- ۱۸.۸۸. همه گونه‌های ممکن رنگ را برای چهار راس یک خانه در نظر می‌گیریم (شکل ۶۲؛ در این شکل،  $K$  نماینده قرمز و  $C$  نماینده



آبی است). اکنون، تعداد پاره خط‌های راستی را که دو انتهای قرمز دارند، برای همه خانه‌ها محاسبه می‌کنیم. هر پاره خط راست، در درون جدول، دو بار به حساب می‌آید و در کنار جدول، از این پاره خط‌های راست، ۴۱ عدد داریم، یعنی کل مجموع، عددی فرد است. از طرف دیگر، هر خانه‌ای که از گونه ۱، ۲، ۴، ۵ یا ۶ باشد، عدد زوجی به مجموع ما وارد می‌کند و تنها نمونه ۳، به مجموع به تعدادی فرد اضافه می‌کند. بنابراین، از گونه ۳، باید به تعداد فرد داشته باشیم، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

#### ۱۹.۸۸. راهنمائی. تحقیق کنید که

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$$

۲۱.۸۸. پاسخ. مثلاً عدد ۱۱۱...۱۱۹۹۵۱۲۵ (عدد، با ۹۴ رقم برابر واحد آغاز شده است).

۲۳.۸۸. پاسخ. بله، درست است. اگر هر صبح، هر دو نفری که در یک آپارتمان زندگی می‌کنند، از هم جدا شوند، آنوقت، بعد از جابه‌جایی، تعداد کل جدا شدن‌ها، کاهش می‌یابد. اگر در یکی از روزها، به تعداد  $n \geq 15$  نفر از هم جدا شوند و به آپارتمان‌هایی بروند که، به ترتیب،  $a_1$

$a_n, \dots, a_2, a_1$  ساکن دارند، آنوقت تعداد کل جدا شدن‌ها، به اندازه

$$\frac{1}{2}n(n-1) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 105 - 104 = 1 > 0$$

کاهش می‌یابد، زیرا

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 119 - n \leq 104$$

۲۴.۸۸ راهنمائی. از این نابرابری استفاده کنید:

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \geq \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$$

۲۷.۸۸ معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0$$

با توجه به رابطه بین  $a$ ،  $b$  و  $c$  داریم:

$$f(a) = (a-b)(a-c) > 0, \quad f(b) = (b-a)(b-c) < 0,$$

$$f(c) = (c-a)(c-b) > 0$$

بنابراین، در هریک از بازه‌های  $[a, b]$  و  $[b, c]$ ، دست کم یک ریشه معادله وجود دارد. ولی معادله درجه دوم، بیش از دو ریشه ندارد و، بنابراین، به ناچار، یکی از ریشه‌ها بین  $a$  و  $b$  و دیگری بین  $b$  و  $c$  قرار دارد.

۲۹.۸۸ راهنمائی. ثابت کنید، هر حاصل ضرب به صورت  $a^i b^j c^k$  که در آن،  $i$  و  $j$  و  $k$ ، عده‌های درست غیر منفی و مجموع آنها برابر ۱۳ باشد، بر  $abc$  بخش‌پذیر است.

$$g(x + f(y)) = \frac{x}{2} + y + \frac{5}{2} \quad ۳۴.۸۸$$

۳۵.۸۸ پاسخ. نه، نمی‌توان. در واقع، اگر حاصل ضرب هر دو عدد مجاور، مجنوز کامل باشد، باید در تجزیه این عددها به عامل‌های اول، توان عدد ۲، عددی زوج باشد، درحالی که بین ۱۰۰ عدد طبیعی پشت سر هم، عددهای به صورت  $1 + 2k + 4k$  وجود دارد.

$$36.88 \quad .1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$$

۳۹.۸۸ مثلاً، عددهای ۴۰۰۱ و ۸۰۰۱ از این گونه‌اند. تفاضل هر دو توانی از آن‌ها بر  $4000$  بخش‌پذیر و، در ضمن، مخالف صفر است.

۴۰.۸۸ اثبات را با استقراری روی  $n$ ، تعداد شهرها، می‌دهیم. درستی حکم، برای  $n = 2$  روشن است. به ازای  $n > 2$ ، با آغاز از یک شهر، حرکت می‌کنیم. روشن است که، دیر یا زود، به شهری می‌رسیم که قبلاً در آن بوده‌ایم، یعنی دوری از  $k < n$  شهر به دست می‌آید. این  $k$  شهر را، همراه با جاده‌های مربوط به آن‌ها، «شهر بزرگ» می‌نامیم و دستگاهی از  $n + 1 - k$  شهر به دست می‌آوریم که به یاری  $1 - k - n$  جاده به هم مربوط شده‌اند (اگر در داخل «شهر بزرگ»، دست‌کم یک جاده وجود داشته باشد که داخل دور نشده‌است، آن‌وقت همین جاده را می‌توان بست). چون

$$2n - k - 1 \geq 2(n + 1 - k) - 1$$

تنها این می‌ماند که از فرض استقرار استفاده کنیم.

۴۱.۸۸ از شرط می‌توان نتیجه گرفت که چهارضلعی  $AKLD$  محاطی است. بنابراین

$$\widehat{ABL} + \widehat{AKL} = 180^\circ$$

در این صورت روشن است که

$$\widehat{BKL} + \widehat{BCL} = 180^\circ$$

یعنی چهارضلعی  $BCLK$  هم محاطی است. از آن جا

$$\widehat{ABL} = \widehat{LCK} \Rightarrow \widehat{BLA} = \widehat{CKD}$$

۴۲.۸۸. پاسخ. بازی کن دوم برنده می شود.

۴۳.۸۸. به هر واژه  $A = a_1a_2\dots a_n$ ، عدد

$$T(A) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$$

را متناظر می کنیم. خودتان آزمایش کنید که، با انجام عملهای یاد شده، باقیمانده حاصل از تقسیم  $T(A)$  بر ۳ تغییر نمی کند. ولی چون

$$T(01) = 2 \quad T(10) = 1$$

بنابراین، نمی توان یکی را از دیگری به دست آورد.

۴۴.۸۸. پاسخ. با آن که به نظر عجیب می آید، چنین مجموعه ای از درختان وجود دارد.

۴۵.۸۸.  $A$  را نخستین مهره ای می گیریم که به خانه اولیه خود برگشته باشد. در این صورت در لحظه قبل از آن، هیچ کدام از مهره ها در خانه اولیه خود نبوده اند. در واقع، همه آنها، باید از خانه خود بیرون رفته باشند تا  $A$  بتواند از همه خانه ها بگذرد. از طرف دیگر، هیچ یک از آنها، قبل از  $A$ ، به خانه خود برگشته اند.

۴۶.۸۸. راهنمائی. از این نابرابری استفاده کنید:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

۴۷.۸۸. راهنمائی.  $k$  را بزرگترین عددی می گیریم که بی نهایت بار در دنباله تکرار شده باشد؛ در ضمن  $N$  را چنان عدد طبیعی فرض می کنیم که،

به شرط  $N \leq n$  داشته باشیم  $k \leq m > N$ . هر  $a_i$  را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم  $k \cdot a_i = a_{i+m}$ . در این صورت،  $m$  دوره تناوب دنباله  $\{a_i\}$  می‌شود، یعنی  $a_{i+m} = a_i$  به ازای هر  $i > N$ .

۵۳.۸۸. پاسخ.  $100\sqrt{2}$  متر. چون حلزون ۹۹ چرخش دارد، می‌توانیم مسیر او را به  $100$  بخش تقسیم کنیم، به نحوی که هر بخش شامل تعداد درستی متر باشد (برخی از بخش‌ها، ممکن است طولی برابر صفر داشته باشند)؛ حلزون، ضمن حرکت در طول آن‌ها، تنها به راست می‌چرخد و یا هیچ چرخشی ندارد. به سادگی دیده می‌شود که، فاصله بین آغاز و انتهای چنین بخشی از  $\sqrt{2}$  تجاوز نمی‌کند؛ بعضی فاصله بین آغاز و انتهای تمامی مسیر از  $\sqrt{2}$  تجاوز نمی‌کند. جستجوی نمونه‌ای برای این فاصله را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۵۴.۸۸. پاسخ.  $\frac{1}{500}f(500)$ . در واقع

$$f(999) = f(f(1000)) = \frac{1}{f(1000)} = \frac{1}{999}$$

بنابراین تابع، مقدارهای  $999$  و  $\frac{1}{999}$  را قبول می‌کند، یعنی عدد  $a$  را می‌توان پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:  $f(a) = 500$ . ولی در این صورت

$$f(500) = f(f(a)) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{500}$$

۵۸.۸۸. راهنمائی. از این پیش قضیه استفاده کنید: اگر عبارت  $P(x) + kP'(x)$  همیشه غیر منفی باشد، آنوقت  $(P(x),$  برای هر  $x$ ، غیر منفی است.

۶۰.۸۸.  $A_1 A_2 \dots A_n$  را چند ضلعی مفروض  $M$  می‌گیریم؛ ضلع  $n$  این چندضلعی، عبارت است از  $A_1 (A_i A_{i+1}) \equiv A_1$ .

$\vec{v} = \vec{A}_i + \vec{A}_{i+1}$  را در نظر می‌گیریم و گروه بردارهای  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{2n}$  را هم به آنها اضافه می‌کنیم. اکنون، این بردارها را، با آغاز از مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و، با آغاز از  $\vec{u}_1$ ، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{2n}$$

به انتهای این بردارها توجه می‌کنیم:

$$\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2; \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_{2n} = 0.$$

به سادگی دیده می‌شود که این‌ها،  $2n$  ضلعی کوثر  $N$  را، که نسبت به مرکز  $M$  خود متقارن است، تشکیل می‌دهند؛ در ضمن، هر ضلع چندضلعی  $M$  متناظر است با دو ضلع برابر و متوالی در چندضلعی  $N$ ؛ از این گذشته، طول تصویر  $N$  بر هر خط راست، دو برابر طول تصویر  $M$  بر همان خط راست است. از این‌جا نتیجه می‌شود که، عبارت  $\sum \frac{a_i}{d_i}$  برای  $N$ ، همان مقدار این عبارت را برای  $M$  به ما می‌دهد. بنابراین، کافی است نابرابری مورد نظر را، برای چندضلعی کوثر  $N$ ، که تقارن مرکزی دارد، ثابت کنیم.  
فرض کنید:

$$N = B_1 B_2 \dots B_{2n}$$

تصویر  $N$  را بر امتداد عمود بر ضلع  $B_i B_{i+1}$ ، با  $h_i$  نشان می‌دهیم. در این صورت ( $S(N)$  نشانه مساحت است) و به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{d_i} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i h_i}{S(N)} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{4S(OB_i B_{i+1})}{S(N)} = 4$$

. مرکز تقارن  $N$  است).

سمت چپ نابرابری، به این ترتیب ثابت می‌شود:

$$\sum \frac{a_i}{d_i} \geq \frac{\sum a_i}{D}$$

که در آن  $D$ ، قطر چندضلعی، یعنی بزرگترین فاصله بین راس‌هاست. چون  $\sum a_i$  محیط است، روشن است که  $\sum a_i > 2D$ .

۱۰.۸۹. پاسخ. ۳۳ مساله.

۲۰.۸۹. در واقع، اگر بهجای هر یک از سه رقم سمت چپ شماره بلیت شانس، اختلاف آن را از ۹ بنویسیم، آنوقت، مجموع رقم‌های عدد شش رقمی برابر ۲۷ می‌شود و بر عکس.

۳۰.۸۹. راهنمائی. ثابت کنید، اختلاف بین تعداد قطعه‌های نوع اول و تعداد قطعه‌های نوع دوم، باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد (در واقع، این اختلاف، باید برابر ۴ باشد).

۵.۸۹. پاسخ. ۱۶۶۶۷ و ۳۳۳۳۳۴.

۶.۸۹. پاسخ. بازی‌کن دوم می‌برد. برای این منظور، باید حرکت بازی‌کن اول را، در خانه‌ای که نسبت به خانه بازی‌کن اول، قرینه مرکزی است، تکرار کند؛ در ضمن، اگر بازی‌کن اول از خط استفاده کرده است، او از نقطه استفاده کند و بر عکس، تا آنجا که برنده شود. درستی این برنامه‌ریزی را می‌توانید روی جدولی با بعد کوچکتر آزمایش کنید.

۱۱.۸۹. پاسخ. نه نمی‌توان. وجهی از ستون را در نظر می‌گیریم که، ضلع (۱۰۱ - ۱) هیچ کدام از ۱۰۱ ضلعی‌ها روی آن نباشد: دو وجه از ۱۰۱ وجه، چنین‌اند. مجموع عددها، روی دو یال قائم چنین وجهی، در یکی فرد و در دیگری زوج است و نمی‌توانند برابر باشند.

۱۲.۸۹. پاسخ.  $3^5 \times 2^3 = 1944$ .

۱۳.۸۹. چون مجموع مجذورهای عددها، بعد از انجام این عمل، افزایش پیدا می‌کند، بنابراین، گروه عددهای اولیه، تکرار نمی‌شود.

۱۴.۸۹ روشن است که، تعداد دروغگوها، برابر است با تعداد فیزیکدانها، یعنی  $n$ . از طرف دیگر، تعداد دروغگوها، عددی زوج است.

۱۶.۸۹ اگر عددهای  $x$ ،  $y$  و  $z$ ، از لحاظ قدر مطلق، از واحد کوچکتر نباشند، آنوقت  $x^2 + y^2 + z^2$  از  $x + y + z$  بزرگتر و درستی نابرابری واضح است. ولی اگر یکی از عددها، و مثلاً  $x$ ، قدر مطلقی کوچکتر از واحد داشته باشد، آنوقت

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq |yz| \geq |xyz|$$

۱۸.۸۹ پاسخ. بله، کتابدار می‌تواند این کار را انجام دهد. از روش استقرا استفاده کنید.

۱۹.۸۹ نفر دوم برنده می‌شود. او باید مهره را به گرهی منتقل کند که قرینه آن نسبت به گره مرکزی باشد.

۲۰.۸۹ پاسخ. بله، چنان ۱۰۰ عددی وجود دارد. برای این منظور، کافی است ۱۰۰ عدد طبیعی دلخواه انتخاب و، سپس، همه آنها را، در عددی ضرب کنیم که برابر است با حاصل ضرب همه مجموعهای پنج به پنج این ۱۰۰ عدد.

۲۲.۸۹ فرض می‌کنیم  $k \cdot b = a + k$ . در این صورت

$$a^2 + 1 = (a + k)(a - k) + k^2 + 1$$

بنابراین،  $a^2 + k^2$ ، باید بر  $b$  بخش‌پذیر باشد. اکنون اگر  $k \leq \sqrt{a}$  فرض کنیم، آنوقت

$$k^2 \leq a \quad k^2 + 1 \leq a + 1 < b$$

(۱)  $b \neq a + 1$ ، زیرا  $a^2 + 1$  بر  $a + 1$  بخش‌پذیر نیست). می‌بینید، با این فرض، به تناقض رسیدیم.

۲۴.۸۹. فرض می‌کنیم، همه مهره‌ها در  $k$  ستون و، به ترتیب، برابر  $a_1, a_2, \dots, a_k$  مهره باشند. حاصل ضرب را، برای هر مهره‌ای که در ستون اول قرار دارد، محاسبه می‌کنیم: مجموع این حاصل ضرب‌ها، از  $a_1 m$  تجاوز نمی‌کند؛ به همین ترتیب، برای بقیه ستون‌ها. بنابراین، مجموع همه حاصل ضرب‌ها از

$$a_1 m + a_2 m + \dots + a_k m = m^k$$

تجاوز نمی‌کند و، روشن است که، اگر تعداد مهره‌هایی که برای آن‌ها، حاصل ضرب کمتر از  $10m$  نیست، بیشتر از  $\frac{m}{10}$  باشد، این رابطه به هم می‌خورد.

۲۵.۸۹. اگر  $1989 = k$ ، تعداد شرکت کنندگان دو نفر، و اگر  $k = 1988$ ، تعداد شرکت کنندگان، یا ۲ نفر و یا ۳ نفر بوده است. تعداد شرکت کنندگان در مسابقه را  $n$  می‌گیریم و فرض می‌کنیم، اولی امتیاز، دومی  $Ap$  امتیاز، ...، و برنده مسابقه  $Ap^n$  امتیاز آورده باشد. قهرمان مسابقه، نمی‌تواند بیشتر از  $(1 - 2k)(n - 1)$  امتیاز و، همه دیگران، کمتر از  $(2 - k)(n - 1)$  امتیاز آورده باشند. با مقایسه این دو عدد معلوم می‌شود که، به ازای  $n \geq 4$

$$2k(n - 1) \leq k(n - 1)(n - 2)$$

از طرف دیگر  $Ap^{n-1} > A + Ap + \dots + Ap^{n-2} \cdot Ap < n$ . بنابراین  $4 \geq p$ ، تعداد امتیازهای قهرمان از دو برابر مجموع امتیازهای همه بقیه تجاوز می‌کند که، به ازای  $p = 3$  ممکن نیست. از این جا روشن می‌شود که  $n = 3$ ، تنها به ازای  $p = 2$  امکان دارد، یعنی بازی‌کنان به تعداد  $A$ ،  $2A$  و  $4A$  امتیاز گرفته باشند؛ در این صورت، مجموع کل امتیازها، برابر  $6k$ ، باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه، باید  $k$  بر ۷

بخش پذیر باشد. عدد ۱۹۸۹ بر ۷ بخش پذیر نیست و، بنابراین  $n = k = 1988$  تنها جواب ممکن برای این حالت است. پیدا کردن مثالی برای  $n = 3$ ، به هیچ وجه دشوار نیست.

۲۶.۸۹. پاسخ. تنها وقتی ممکن است که  $n$ ، عددی زوج باشد. همه نقطه‌هایی را در نظر می‌گیریم که با عدد ۱ مشخص شده‌اند، از هریک از این نقطه‌ها، دو خط راست عبور می‌کند و، بنابراین،  $n$  باید بر ۲ بخش پذیر باشد.

اکنون، فرض کنید،  $n$  عددی زوج است. خط‌های راست را، با عدددهای از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کنیم و برای هر  $i$  و  $j$ ، که از  $n$  کوچکترند، در نقطه برخورد  $i$ -امین با  $j$ -امین خط راست، باقی‌مانده مثبت حاصل از تقسیم  $i + j$  بر  $n$  را می‌نویسیم (یعنی، اگر باقی‌مانده‌ای نداشته باشد، به جای ۰، عدد  $n$  را می‌نویسیم). پهلوی نقطه برخورد  $n$ -امین خط راست با  $i$ -امین خط راست، باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد  $2i$  بر  $n$  را می‌نویسیم.

۳۰.۸۹. پاسخ. این محیط برابر است با  $\frac{1}{1 + \sin 18^\circ} - 1$ .

۳۱.۸۹. پاسخ. بله، می‌توان.

۳۷.۸۹. عملی را در نظر بگیرید که، هر دو عدد طبیعی را، به بزرگترین بخشیاب مشترک فرد آن‌ها تبدیل کنند.

۳۸.۸۹. مجموع این عدددها، برابر صفر است.

۴۱.۸۹. راهنمائی. ثابت کنید، دو وجهی که به کوتاه‌ترین یال جانبی متصل‌اند، با هم برابرند.

۴۴.۸۹. اگر از ویژگی‌های الف) و ب) پشت سر هم استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$(A * B) * C = -(C * (A * B)) = -((C * A) * B) = \\ = B * (C * A) = -(A * (B * C)) = -((A * B) * C)$$

از آن جا  $(A * B) * C = A * (B * C)$ . ولی بنابر شرط،  $A * B$  می‌تواند هر مقدار درست  $X$  و، از جمله  $X * C$  را پذیرد که مواجه با تناقض می‌شویم.  
۴۷.۸۹ ۱ >  $t$  را ریشه دوم عددی می‌گیریم که جوابی از معادله درجه دوم مفروض است. در این صورت

$$at^2 + (c - b)t + (e - d) = 0 \Rightarrow at^2 + ct + e = bt^2 + d$$

سمت چپ این برابری را  $F$  و سمت راست آن را  $G$  می‌نامیم ( $F = G$ ) و فرض می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + cx + dx + e$$

در این صورت به دست می‌آید:

$$f(\pm t) = F \pm tG$$

چون  $1 > t$ ، بنابراین، این دو مقدار، علامت‌های متفاوتی دارند، یعنی چندجمله‌ای  $f(x)$  در بازه  $[-t, t]$  دارای ریشه است.  
۴۸.۸۹ ۰. راهنمائی. مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$  را  $O$  بنامید و ثابت کنید، چهارضلعی  $ABOC$ ، محاطی است.  
۵۰.۸۹ ۰. فرض می‌کنیم بتوان چنین جدولی تشکیل داد. کمترین مجموع عددها در سطراها را  $2^a$  می‌گیریم. در این صورت

$$2^a \geq 1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

از طرف دیگر، مجموع همه عدددهای جدول، یعنی  $(1 + \frac{1}{2}k^2(k^2 + 1))$  باید پر  $2^a$  بخش‌پذیر باشد. اگر  $k$  عددی فرد باشد، آنوقت عدد  $(1 + \frac{1}{2}k^2(k^2 + 1))$

هم فرد است؛ ولی اگر  $k$  زوج باشد،  $(1 - \frac{1}{2}k^2)(k^2 + 1)$  هم زوج است و،  
بنابراین  $2^a$  باید  $\frac{1}{2}k^2$  را بشمارد، ولی

$$\frac{1}{2}k^2 < \frac{1}{2}k(k+1) \leq 2^a$$

۵۱.۸۹. فرض می‌کنیم این طور نباشد. در این صورت باید، در هر لحظه زمانی، سطر و ستونی وجود داشته باشد که به وسیله مهره‌ها پر شده باشند و، در ضمن، تمامی مهره‌های این صلیب از یک رنگ باشند. ولی مهره‌ای از این صلیب را (که فرض می‌کنیم، همه آن‌ها به رنگ سفید باشند) نمی‌توان تغییر داد و، این صلیب، باید همچنان سفید باقی بماند. تناقض.

۵۲.۸۹. پاسخ. ۱۸.

۵۳.۸۹. آغازکننده بازی، برنده می‌شود. او باید، در هر حرکت خود؛ یک واحد به عددی که روی تخته نوشته شده است، اضافه کند.

۵۴.۸۹. پاسخ. ۵۶ واژه. راهنمائی. همه واژه‌های این قبیله را، به

صورت

۱۱۰۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰

در نظر بگیرید و ثابت کنید، هر واژه را می‌توان به این صورت تبدیل کرد. برای اثبات این‌که، این واژه‌ها با هم فرق دارند، از مقدار زیر، که برای هر واژه قبیله معین است، استفاده کنید: تعداد صفرهایی که در سمت راست آن‌ها، به تعداد فردی واحد قرار دارد. ثابت کنید، با انجام عملی که در صورت مساله گفته شده است، این تعداد تغییر نمی‌کند.

۵۷.۸۹. راهنمائی. از این مطلب استفاده کنید که عدد  $1 - 10^7$ ، بر ۲۳۹ بخش پذیر است.

۵۸.۸۹. راهنمائی. از این نابرابری استفاده کنید:

$$(1 - x^2)(1 - y) + (1 - y^2)(1 - z) + (1 - z^2)(1 - x) \geq 0$$

۶۰.۸۹. راهنمائی. با آزمایش، قانون شوید که، عددهای واقع در چهار سطر اول، عددهایی درست‌اند. سپس، حکم مساله را به باری استقرا روی شماره سطر، ثابت کنید.

۶۱.۸۹. دنباله  $(b_k)$  را، به این ترتیب در نظر می‌گیریم که

$$b_1 = \arctg a_1, \quad b_{k+1} = b_k + \arctg \frac{1}{k}$$

در این صورت، به کمک دستور مربوط به تائزانت مجموع دو کمان، به دست می‌آید:

$$a_k = \operatorname{tg} b_k \text{ و } b_{k+1} = b_k + \arctg \frac{1}{k}$$

تنها این می‌ماند ثابت کنیم، دنباله  $(b_k)$ ، به طور نامحدود، صعودی است و اختلاف بین دو جمله پشت سر هم آن، به سمت صفر میل می‌کند.

۶۲.۸۹. راهنمائی. برابری‌های

$$|AM| + |AN| = |CM| + |CN|,$$

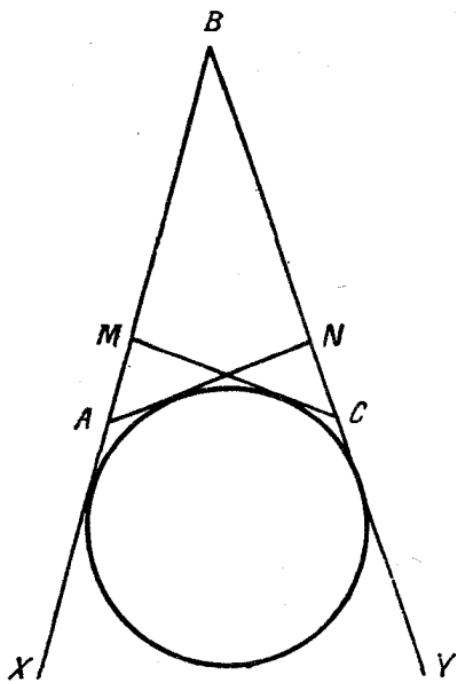
$$|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$$

به معنای آن است که در «چهارضلعی»  $X A O C Y$  (شکل ۶۳ را ببینید) می‌توان دایره‌ای محاط کرد، یعنی دایرة «محاطی بیرونی» برای چهارضلعی  $A B C O$  یا  $O M B N$  وجود دارد.

۶۳.۸۹. پاسخ. برای هر  $k$  که از  $100^{\circ}$  کوچکتر باشد و، در ضمن، عدد  $1 + k$  بر  $8$  بخش‌پذیر نباشد.

۶۴.۸۹. راهنمائی. ابتدا مربع  $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$  را، با تمایل  $45^{\circ}$  درجه در

نظر می‌گیریم که در مثلث ما محاط باشد. ثابت می‌کنیم، کمتر از  $\frac{n}{4}$  عدد مختلف، در آن نیست. برای این منظور، ثابت می‌کنیم، برای هر چهار عدد



شکل ۶۳

$a, b, c$  و  $d$  از این مربع، که در برخورد دو سطر و دو ستون مربع قرار دارند ( $a$  روی  $b$  و  $c$ ،  $d$  زیر  $b$  و  $c$ )، نابرابری  $ad < bc$  برقرار است. سپس توجه می‌کنیم، اگر در مربع، کمتر از  $\frac{n}{4}$  عدد مختلف باشد، به ناچار دو سطر مختلف و دو ستون مختلف مربع پیدا می‌شود که، برای چهار عددی که در نقطه‌های برخورد آن‌ها قرار دارند، باید، آن دو عددی که در یک سطر واقع‌اند، برابر باشند. ولی این نتیجه، ویژگی را که در بالا از آن یاد کردیم، نقض می‌کند.

۶۹.۸۹. پاسخ. سه جواب. راهنمایی. از محدب بودن تابع سمت چپ

برابری، در بازه  $[3, 5]$  استفاده کنید.

۷۰.۸۹. عدد طبیعی و ثابت  $k$ ، و عدد طبیعی دلخواه  $n$  را در نظر

می‌گیریم. در این صورت

$$|a_{n+1} + a_k - a_{n+k+1}| < \frac{1}{n+k+1};$$

$$|a_n + a_{k+1} - a_{n+k+1}| < \frac{1}{n+k+1}$$

بنابراین

$$|a_{n+1} + a_k - a_n - a_{k+1}| \leq \frac{2}{n}$$

یعنی، برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$|(a_{n+1} - a_n) - (a_{k+1} - a_k)| \leq \frac{2}{n}$$

اگر  $n$  را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، معلوم می‌شود که، در آن صورت، حد دنباله  $\{a_{n+1} - a_n\}$  برابر  $a_{k+1} - a_k$  می‌شود. به همین ترتیب، برای هر عدد طبیعی  $m$ ، حد دنباله، برابر  $a_{m+1} - a_m$  می‌شود. از آنجا که، حد دنباله تغییر نمی‌کند، بنابراین، باید برای هر  $m$  و  $k$  داشته باشیم:

$$a_{m+1} - a_m = a_{k+1} - a_k$$

یعنی، دنباله  $(a_n)$ ، یک تصاعد حسابی است.

۷۱.۸۹. پاسخ. نفر دوم، بازی را می‌برد. او از قبل، عدددهای از ۰ تا ۹۹۹ را، به ۱۲۵ بخش و هر بخش شامل ۸ عدد پشت سر هم تقسیم می‌کند؛ سپس، به این ترتیب عمل می‌کند: بعد از آن که بازی کن اول نخستین عدد خود را روی تخته سیاه نوشت، او توجه می‌کند که، این عدد، مربوط به کدام گروه از گروههای ۸ تایی است، آنوقت، بازی کن دوم، کوچکترین عدد از همان گروه ۸ تایی را روی تخته می‌نویسد (البته، کوچکترین عددی را که می‌تواند؛ برای این منظور، باید ۳ یا ۴ یا ۵ چوب کبریت بردارد). از

این گروه ۸ عدد، دو عدد روی تخته نوشته شده است. دومی باید ۶ عدد باقیمانده را به سه دسته دو عددی (به ردیف) تقسیم کند (در ذهن خود) و اگر اولی، عددی از این ۶ عدد را روی تخته نوشت، دومی، جفت این عدد را (در دسته‌های دو عددی) بنویسد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد، چوب کبریت‌هایی که دومی، در حرکت اول خود برداشته است، برای حرکت بعدی او (وقتی در داخل همان گروه ۸ عددی قبلی باشد) کافی است (روشن است که دومی، چوب کبریت‌هایی را که به دست آورده است، باید جداگانه بگذارد و تنها وقتی از آن‌ها استفاده کند که، حرکت اولی، در درون گروه ۸ عددی قبلی باشد). اگر اولی، ضمن حرکت خود، به گروه ۸ عددی دیگر برسد، دومی باید شیوه قبل عمل کند. به این ترتیب، در برابر حرکت اولی، بازی کن دوم همیشه دارای پاسخ است و، درنتیجه، برنده می‌شود.

۱.۹۰. مجموع شماره‌های پشت و روی هر برگ، عددی فرد است.

۳.۹۰. نه، نمی‌توان، زیرا عدد ۳۹ را نمی‌توان به مجموع چند عدد برابر ۵ یا ۱۱ تبدیل کرد.

۴.۹۰. آن که بازی را آغاز کند، می‌تواند برنده شود. برای این منظور، کافی است در نوبت حرکت خود، رقم سمت راست عدد را، از خود عدد کم کند.

۶.۹۰. حل مساله ۱۹.۹۰ را ببینید (پسران را شووالیه و دختران را دروغ‌گو در نظر بگیرید).

۷.۹۰. «جون» در آپارتمان شماره ۲۱۷ زندگی می‌کند.

۸.۹۰. پاسخ. تا ۲۹ صندلی هم می‌تواند اشغال شود.

۹.۹۰. بله، می‌تواند. در واقع، اگر عمل کامپیوتر را با → و عمل برنامه‌ریز را با ⇒ نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$123 \rightarrow 225 \rightarrow 327 \rightarrow 429 \rightarrow 531 \Rightarrow 135 \rightarrow$$

و به دنبال آن، همان عمل‌ها تکرار می‌شود.

۱۰.۹۰. راهنمایی. برابری دو مثلث  $BCP$  و  $ADP$  را ثابت کنید.

۱۳.۹۰. جدول را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم. اگر مجموع عددها، در این چهار بخش، علامتی یکسان داشته باشند، روشن است که، قدر مطلق مجموع در یکی از آن‌ها، از ۲۵ تجاوز نمی‌کند. اگر دو بخش وجود داشته باشد که، مجموع عددها در آن‌ها (مثلًاً  $a$  و  $b$ ) علامت‌های مختلفی داشته باشند، این دو بخش را با زنجیره‌ای از مربع‌های  $25 \times 25$  چنان متصل می‌کنیم که، هر دو مربع مجاور در زنجیره، به وسیله مستطیل  $25 \times 24$  پوشیده شوند. در این صورت، مجموع عددها در هر دو مربع مجاور زنجیره، بیش از ۵۵ با هم اختلاف پیدا نمی‌کنند. از طرف دیگر، چون  $a$  و  $b$ ، علامت‌های متفاوتی دارند، باید در زنجیره، دو مربع مجاور وجود داشته باشد که، مجموع عددها در آن‌ها، با دو علامت مختلف بددست آید. روشن است که در یکی از این مربع‌ها، قدر مطلق مجموع عددها از ۲۵ تجاوز نمی‌کند.

۱۴.۹۰. راهنمایی. مجموع شماره صفحه‌های یک برگ دفترچه، در تقسیم بر ۴، همیشه باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد.

۱۶.۹۰.  $c = 57$ ،  $b = 13$ ،  $a = 12$ . پاسخ.

۱۷.۹۰. دو شهر دلخواه  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، جاده  $A \rightarrow B$  وجود نداشته باشد؛ همچنین، شهری مثل  $C$  پیدا نشود، به نحوی که بتوان از  $A$  به  $C$  و، سپس، از  $C$  به  $B$  رفت (جاده‌های  $A \rightarrow C \rightarrow B$  وجود نداشته باشد)؛ ۴۰ شهر  $A_1$ ،  $A_2$ ، ...،  $A_{40}$  را پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی از  $A$  به طرف آن‌ها کشیده شده‌است؛ همچنین، ۴۰ شهر  $B_1$ ،  $B_2$ ، ...،  $B_{40}$  که، از آن‌ها، جاده‌هایی به  $B$  می‌رود. از

شهرهای  $A_i$ ، روی هم، ۱۶۰۰ جاده خارج می‌شود. در ضمن، تعداد کل جاده‌های بین خود شهرهای  $A_i$ ، از تعداد  $39 \times 20 = 780$  تجاوز نمی‌کند؛ و تعداد جاده‌هایی که، از آن‌ها، به بقیه ۱۹ شهر می‌رود، بیشتر از  $20 \times 20 = 400$  نیست. چون

$$1600 > 780 + 760$$

بنابراین، باید جاده‌ای به صورت  $A_i \rightarrow B_j$  وجود داشته باشد. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۸.۹۵ سه گپه و در هر کدام ۳۴ سکه جدا می‌کنیم و وزن اولی با دومی و، سپس، وزن دومی با سومی را مقایسه می‌کنیم. روش است که، وزن هر سه گپه، نمی‌تواند با هم برابر باشد. فرض می‌کنیم، در مقایسه اول، وزن‌ها متفاوت و در مقایسه دوم، وزن‌ها برابر درآید و، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، گپه اول سنگین‌تر باشد. در این صورت، یا در گپه‌های دوم و سوم، همه سکه‌ها واقعی‌اند، یعنی سکه تقلیبی سنگین‌تر از سکه واقعی است؛ و یا در هر یک از گپه‌های دوم و سوم، یک سکه تقلیبی وجود دارد و سکه‌ای سبک‌تر است. تنها این می‌ماند، بیینیم در گروه سوم سکه‌ها، سکه تقلیبی وجود دارد یا نه! اگر این ۳۴ سکه را به دو گروه ۱۷ سکه‌ای تقسیم و آن‌ها را با هم مقایسه کنیم، به نتیجه مطلوب می‌رسیم. حالت دیگری وجود ندارد.

۱۹.۹۵ چند دروغ‌گو انتخاب می‌کنیم (آن‌هار را «رهبر» می‌نامیم)، به نحوی که هیچ دو دروغ‌گوی رهبر با هم آشنا نباشند و، در ضمن، هر دروغ‌گویی، دست‌کم یک آشنا بین دروغ‌گویان رهبر داشته باشد. این انتخاب را، به این ترتیب، می‌توان انجام داد: یک دروغ‌گو را در نظر می‌گیریم و او را «رهبر» اعلام می‌کنیم؛ سپس، اگر دست‌کم یک دروغ‌گو پیدا شود که با او آشنا نباشد، او را دومین دروغ‌گوی رهبر اعلام می‌کنیم و غیره. در هر گام،

اگر دست کم یک نفر در بین دروغ‌گوها پیدا شود که با هیچ کدام از رهبران انتخابی آشنا نباشد؛ او را هم به گروه دروغ‌گویان رهبر داخل می‌کنیم. روشن است که، تعداد همه دروغ‌گوها، از مجموع

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

تجاوز نمی‌کند که، در آن،  $n$  تعداد دروغ‌گوهای رهبر، و  $a_i$  تعداد دروغ‌گوهای آشنا با  $i$  امین دروغ‌گوی رهبر به اضافه خود این رهبر است. تعداد شوالیه‌های آشنا با  $i$  امین دروغ‌گوی رهبر را  $b_i$  می‌نامیم. در این صورت، بنابر شرط مساله  $b_i \geq a_i$ . همچنین، به سادگی روشن می‌شود که، هیچ شوالیه‌ای، نمی‌تواند با دروغ‌گوی رهبر آشنا باشد، در غیر این صورت، این دو رهبر باید خودشان با هم آشنا باشند. از این‌جا، تعداد همه دروغ‌گوها، از

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

تجاوز نمی‌کند و، این مقدار هم، از تعداد همه شوالیه‌ها تجاوز نمی‌کند.  
۲۰.۹۵. پاسخ. ۱۷۰۶. راهنمائی. زوج عددهای  $(m, n)$  وقتی و تنها وقتی در نابرابری ای صورت مساله صدق می‌کنند که، خط راست  $y = x\sqrt{2}$  در صفحه شطرنجی مختصات، خانه‌ای را قطع کند که، نقطه راس چپ و پایین آن، به مختصات  $(m, n)$  باشد.

۲۳.۹۵.  $a$  را جمله‌ای از یک تصاعد حسابی و  $d$  را قدر نسبت آن فرض کنید. در این صورت همه جمله‌هایی از تصاعد که به صورت

$$a + 10^k d > a$$

باشند، مجموع رقم‌های برابر دارند.

۲۴.۹۵. از برابری دو مثلث  $AHD$  و  $ABC$ ، نتیجه می‌شود:  $|ACD| = |ABH|$ . از آنجا، دو مثلث متساوی الساقین

$$\widehat{HCD} = \widehat{BHA} = \widehat{CHK} \Rightarrow |CK| = |HK|$$

چون

$$\widehat{KDH} = 90^\circ - \widehat{HCD} = 90^\circ - \widehat{CHK} = \widehat{KHD}$$

.  $|CK| = |HK| = |KD| = |HK|$ ، یعنی  $|HK| = |KD|$

.  $a = b = c = 3$  یا  $a = b = c = 0$  ۲۷.۹۰ پاسخ.

.  $|BC| = 13$  ۲۸.۹۰ پاسخ.

۳۲.۹۰ ۳. پاسخ. الف) بله؛ ب) نه. راهنمائی. در حالت ب)، ثابت

کنید هر راس از هر مربع، روی ضلع مریع بزرگ قرار می‌گیرد. بعد، به مریعی که کوچکترین ضلع را دارد، توجه کنید؛ این مربع، در بین سه مربع «گیر» می‌کند و راهی برای مربع چهارم، که آن را احاطه کرده باشد، باقی نمی‌ماند.

۳۵.۹۰ ۴. راهنمائی. از این مطلب استفاده کنید که  $f(m) - f(n)$  بر

$n - m$  بخش‌پذیر است و ثابت کنید  $(v)^f$ ، هم بر ۲ بخش‌پذیر است و

هم بر ۵.

۳۷.۹۰ ۵. الف) در جدول، روی هم، ۹ مستطیل  $10 \times 2$  را می‌توان

به صورت افقی قرار داد. بنابراین، در یکی از آنها، دست کم، ۷ مربع  $2 \times 2$

واقع است. روشن است، یکی از آنها، به وسیله دو تای دیگر پوشیده

می‌شود.

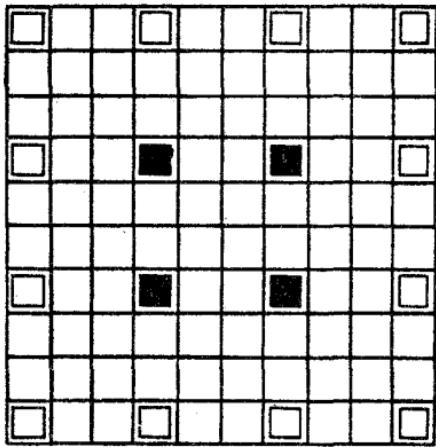
۶۴ ب) در مربع، ۱۲ خانه سفید و ۴ خانه سیاه را، آن‌طور که در شکل

می‌بینید، نشان می‌گذاریم. در این صورت می‌توانیم ۱۲ مربع انتخاب کنیم که

خانه‌های سفید را پوشانده باشند؛ در ضمن، در مرز صفحه، درست ۸ خانه

پوشیده نشده باقی بماند. اگر ۸ مربع دیگر را در نظر بگیریم که این خانه‌ها

را هم پوشانند، ۲۰ مربع به دست می‌آید که، درست، حاشیه را به پهنای ۲



شکل ۶۴

پوشانده‌اند. اکنون، چهار مربعی را در نظر می‌گیریم که چهار خانه سیاه را پوشانده‌اند. در مربع مرکزی  $6 \times 6$ ، این‌ها ۱۶ خانه را پوشانده‌اند و، برای ۲۰ خانه دیگر، می‌توانیم مربعی را پیدا کنیم که آن‌ها را هم پوشانده باشد. به این ترتیب، ۲۴ تا از مربع‌ها، مربع مرکزی  $6 \times 6$  را پوشانده‌اند. در نتیجه، ۴۴ مربع  $2 \times 2$  داریم که همه صفحه را پوشانده‌اند و یکی از ۴۵ مربع برای ما باقی می‌ماند.

ج) پاسخ. این حداقل، برابر است با ۳۹.

۴۲.۹۵. راهنمایی. تقسیم چهار وجهی با یال به طول واحد را به چهار وجهی با یال به طول  $\frac{1}{2}$  و هشت وجهی با یال به طول  $\frac{1}{3}$  در نظر بگیرید.

۴۳.۹۵. از اتحاد

$$b(a^2 + ab + 1) - a(b^2 + ab + 1) = b - a$$

نتیجه می‌شود که  $b - a$  باید بر  $1 + ab + b^2$  بخش‌پذیر باشد که، تنها برای  $a - b = 0$  ممکن است.

۴۵.۹۰. راهنمائی. نقطه  $R' = (AP) \cap (BD)$  را در نظر بگیرید و

ثابت کنید، چهارضلعی  $CPR'Q$ ، محاطی است.

۴۷.۹۰. از این قضیه، که به سادگی ثابت می‌شود، استفاده می‌کنیم:

مساحت هر مثلثی که، راس‌های آن، در نقاطهای گرهی شبکه شطرنجی قرار دارد، به صورت  $\frac{n}{2}$  بیان می‌شود که، در آن،  $n$  عددی طبیعی است. در این

صورت

$$|AC| \cdot |AD| \cdot \sin(\widehat{DAC}) \text{ و } |BC| \cdot |BD| \cdot \sin(\widehat{DBC})$$

عددهایی درست‌اند. بنابراین

$$||AC| \cdot |AD| - |BC| \cdot |BD|| = \frac{m}{\sin \alpha}$$

که در آن  $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = \alpha$ ، عدد درستی مخالف صفر است.  
از همین‌جا، نابرابری مطلوب، ثابت می‌شود.

۴۸.۹۰. راهنمائی. حکم را به یاری استقرا روی تعداد جاده‌ها، ثابت کنید.

۴۹.۹۰. پاسخ.  $1 - q + p$ . پیدا کردن مثال را به عهده خواننده می‌گذاریم و، در این‌جا، ثابت می‌کنیم، نان شیرینی را به تعداد کمتری بخش، نمی‌توان تقسیم کرد. فرض می‌کنیم، همه  $q + p$  مهمان در اتاق جمع شوند (فرض می‌کنیم، بین گروه مهمانان  $p$  نفری، کسانی از گروه  $q$  نفری نباشند).  
بخش دلخواهی از نان شیرینی را روی میز می‌گذاریم و دو مهمانی را پشت میز دعوت می‌کنیم که، این بخش را باید، یا ضمن تقسیم به  $p$  بخش و یا ضمن تقسیم به  $q$  بخش، دریافت کنند. بعد، همه بخش‌هایی را که باید این دو مهمان دریافت کنند، روی میز می‌گذاریم و مهمانانی را که، دست کم یکی از این بخش‌ها را، در یکی از حالت‌های تقسیم، باید به آن‌ها داد، پشت

میز دعوت می‌کنیم و غیره. به سادگی دیده می‌شود که، اگر  $k$  نفر پشت میز نشسته باشند، روی میز، بیش از  $1 + k$  بخش از نان شیرینی وجود ندارد. از اینجا معلوم می‌شود که، در پایان کار، همه مهمانان پشت میز نیستند؛ و این به معنای آن است که، در پایان این روند، بخشی از شیرینی روی میز است (و نه تمامی شیرینی!) که شامل چند بخش  $p$  قسمتی و هم چند بخش  $q$  قسمتی است که، با توجه به اول بودن  $p$  و  $q$  نسبت به هم، ممکن نیست.

۵۰.۹۰ پاسخ. بله، می‌توان. راهنمائی. ۲۰ عدد درست  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  را طوری انتخاب کنید که تفاضل‌های  $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{20} - x_1$  درست همان گروه عددهایی را بدهند که، روی محیط دایره واقع‌اند. ببینید، تبدیلی که در صورت مساله، از آن سخن رفته است، چه تاثیری بر گروه عددهای  $\{x_k\}$  می‌گذارد؟

۵۶.۹۰ ۱۲۴ بار. راهنمائی. همه تبدیل جلدها را، به «دورها» تقسیم کنید. عمل جابه‌جا کردن جلدها را از دو «دور» مختلف، «وصل» و عمل جابه‌جا کردن جلدها را از یک دور، «فصل» می‌نامیم. ثابت کنید، حداقل با ۲۵ عمل «وصل» و حداقل ۹۹ عمل «فصل»، می‌توان جلدها را به ردیف خود گذاشت. مثال برای حالتی که نتوان با کمتر از ۱۲۴ جابه‌جای، عمل مرتب کردن جلدها را انجام داد، چنین است: یک دور به طول ۵۰، شامل جلدی‌های با شماره‌های زوج، و ۲۵ دور از شماره‌های فرد و هر دور به طول ۲.

۵۷.۹۰ با بُرهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید، عددهای  $x_1, x_2, \dots, x_m$  وجود دارند، به نحوی که  $f(x_k)$ ، بهازای هر  $k$  از ۱ تا  $m$ ، بر  $d_k = p_k^{\alpha_k}$  بخش‌پذیر نیست. این وضع، به معنای آن است که عددهای  $a_k$  پیدا می‌شود ( $p_k$ ، عددهایی اول‌اند)، به نحوی که  $a_k$  بر  $d_k$  بخش‌پذیر، ولی  $f(x_k)$  بر  $d_k$  بخش‌ناپذیر است. اگر بین این عددها، توان‌هایی از یک عدد اول باشند، آن وقت، همه را، به جز کوچکترین آن‌ها، کنار می‌گذاریم؛

زیرا اگر  $f(x)$  بر آن بخش پذیر نباشد، بر بقیه هم بخش پذیر نیست. به این ترتیب، عدهای  $d_1, d_2, \dots, d_k$  را خواهیم داشت که، دو به دو، نسبت به هم اول‌اند. بنابر قضیه معروف چینی درباره باقی‌مانده‌ها، عدد درست  $n$  پیدا می‌شود که، برای هر  $k$  از  $1$  تا  $s$ ، نسبت به مدول  $d_k$ ، به همان باقی‌مانده‌هایی می‌رسد که  $x_k$  پیدا می‌کند. اکنون به این قضیه توجه می‌کنیم:  $f(m) - f(n)$  بر  $m - n$  بخش پذیر است (توجه کنیم: این قضیه، زمانی درست است که چندجمله‌ای، ضریب‌های درست داشته باشد. در حالتی که ضریب‌های چندجمله‌ای گویا باشند، ولی چندجمله‌ای به ازای عدهای درست، مقدارهای درست را قبول کند، در حالت کلی و همیشه، درست نیست). با استفاده از این قضیه، معلوم می‌شود که  $f(n)$ ، حتی به یکی از عدهای  $d_k$  و، بنابراین، بر حتی یکی از عدهای  $a_k$  بخش پذیر نیست. تناقض.

**۶۰.۹۵ راهنمائی.** پاره خط‌های راستی را که، به طور کامل، در درون پاره خط‌های راست دیگرند، حذف می‌کنیم. سپس، همه پاره خط‌های راست باقی‌مانده را که با دیگران در بخش یا بخش‌هایی مشترک‌اند در نظر می‌گیریم و مجانس آن‌ها را، به نوبت، نسبت به نقطه وسط خود و با ضریبی کوچک‌تر از واحد پیدا می‌کنیم، به نحوی که پاره خط‌های راست جدید، باز هم پاره خط راست اصلی را پوشانده باشند. در این صورت، هر پاره خط راست، دارای نقطه‌های درونی مشترکی با بیش از یک پاره خط راست دیگر نخواهد بود و، بنابراین، کافی است حکم را برای پاره خط راستی ثابت کنیم که به وسیله دو پاره خط راست کوچک‌تر پوشیده شده است.

**۶۱.۹۵** پاسخ. نه، چنین شش ضلعی وجود ندارد.

**۶۲.۹۵ راهنمائی.** ثابت کنید  $H$ ، مرکز دایرة محاطی بیرونی مثلث  $ACF$  (و مماس بر ضلع  $AF$ ) است.

**۶۳.۹۵ راهنمائی.** با استقرا روی  $n$  (تعداد شهرها) و با آغاز از

$n = 7$  ثابت کنید. برای عبور استقرایی، از این پیش قضیه، استفاده کنید: شهری وجود دارد که، از آن، دست کم دو جاده خارج می‌شود و به آن، دست کم دو جاده وارد می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که اثبات حکم برای  $n = 7$ ، به احتمالی دشوارترین مرحله حل مساله است.

۶۴.۹۵ راهنمائی. فرض می‌کنیم، دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  وجود داشته باشد، به نحوی که  $f(y) < f(x)$  و، در ضمن

$$x < y < x + f(x)$$

در این صورت، خط راست  $L$  با معادله  $x + ny = c$  وجود دارد ( $n$  عددی طبیعی است) که نقطه  $(y, f(y))$  را از نقطه  $(x, f(x))$  و نقطه  $((x + f(x), f(x + f(x)))$  منحنی از هم جدا می‌کند. چنین خط راستی باید، منحنی تابع  $f(x)$  را، دست کم در دو نقطه مختلف، قطع کند.

۶۵.۹۵ راهنمائی. دنباله

$$\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

را طوری در نظر بگیرید که داشته باشیم:

$$x_{k+1} - x_k \equiv a_k (\text{mod } n)$$

(در اینجا  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ، همان عدهای روی محیط دایره، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌اند). بینید، تبدیل‌های  $\{a_k\}$ ، دنباله را چگونه تغییر می‌دهد.

۱.۹۱. دانش‌آموزانی که، نزد آنها، تعداد میخ‌ها با تعداد دوراهی‌ها، برابر است و، در ضمن، تعداد پیچ‌ها با تعداد میخ‌ها برابر نیست، از

$$40 - 15 - 10 = 15$$

دانشآموز کمتر نیست. از طرف دیگر، بین این دانشآموزان، تعداد پیچه‌ها با تعداد دوراهی‌ها، برابر نیست.

۲۰.۹۱. پاسخ. نه، ممکن نیست. راهنمائی. تعداد تعویض‌های از نوع سه به دو، باید با تعداد تعویض‌های از نوع دو به سه، برابر باشد.

۴۰.۹۱. پاسخ. شش روز.

۵۰.۹۱. پاسخ. بله، می‌تواند. او باید هر دو میله اول را به بخش‌های ۵۰ سانتی‌متری، ۲۵ سانتی‌متری و ۲۵ سانتی‌متری تقسیم کند.

۶۰.۹۱. نه، چنین وضعی، ناچاری نیست. به این وضع توجه کنید: تیم‌های  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  در بازی بین خود، هر کدام یک امتیاز آورده‌اند؛ درست همین نتیجه را، تیم‌های  $B_1$ ،  $B_2$  و  $B_3$  در بازی بین خود و تیم‌های  $C_1$ ،  $C_2$  در بازی بین خود به دست آورده‌اند. در ضمن، همه تیم‌های  $A$  از تیم‌های  $B$ ، همه تیم‌های  $B$  از تیم‌های  $C$  و همه تیم‌های  $C$  از تیم‌های  $A$  برده‌اند.

۸۰.۹۱. پاسخ. ۱۲ غواص.

۹۰.۹۱. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد (بُرهان خُلف). اگر همه نمایندگان دو قبیله  $B$  و  $C$  از جای خود برخیزند و کنار روند، آن‌وقت، روشن است، بین هر دو نماینده‌ای که باقی مانده‌اند، درست یک صندلی خالی وجود دارد، یعنی تعداد کل صندلی‌های دور میز، عددی زوج است.

۱۱.۹۱. پاسخ.  $n = 19$ .

۱۲.۹۱. فرض می‌کنیم نتوانیم از شهر  $A$  به شهر  $B$  از طریق راه‌آهن طوری برسیم که، ضمن راه، بیش از دو بار قطار را عوض نکنیم؛ همچنین فرض می‌کنیم نتوان از شهر  $C$  به شهر  $D$ ، طوری با اتومبیل رفت که، ضمن راه، از بیش از دو شهر عبور نکنیم (مسکن است، دو شهر از این چهار شهر، یکی باشند). تنها آن جاده‌هایی را در نظر می‌گیریم که، شهرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  را به هم مربوط می‌کنند. روشن است، اگر یکی از امکان‌های

مسافت (راه آهن یا اتومبیل) را در نظر بگیریم، این امکان، چهار شهر مذکور را به هم وصل می‌کند و می‌توان از یکی به دیگری رفت، بدون این‌که، به جزء دو شهر باقی‌مانده، لزومی به عبور از شهری دیگر باشد. تناقض.

۱۳.۹۱. حل مساله ۱۹.۹۱ را ببینید.

۱۵.۹۱. پاسخ. ۲۴ یا ۴۲.

۱۷.۹۱. راهنمائی.  $AX$  و  $AY$  را ادامه دهید تا خط راست  $BC$  را در نقطه‌های  $K$  و  $L$  قطع کنند. ثابت کنید، پاره خط راست  $KL$ ، وسط دو ضلع مثلث  $AKL$  را به هم وصل کرده است.

۱۸.۹۱. راهنمائی. اگر

$$f(x) = x^4 + x + 1 \quad g(x) = x^4 - x + 1$$

آن‌وقت  $(1 - g(x)) = f(x - 1)$

۱۹.۹۱. به ستاره‌هایی از خانه‌ها توجه می‌کنیم که شماره سطرها و ستون‌های آن‌ها، عدددهایی فرد باشد. فرض کنید، ضمن بُریدن جدول، از شکل (۱)،  $x$  عدد و از شکل‌های (۲) و (۳)،  $y$  عدد به دست آمده باشد. در این صورت  $x + 4y = (2n - 1)^2 - 1$ . چون هر شکل، در بیش از یک ستاره نیست، پس  $x + y \geq n^2$ . از این‌جا

$$4x + 4y \geq 4n^2 \Rightarrow x \geq 4n^2 - (2n - 1)^2 = 4n - 1$$

۲۰.۹۱. پاسخ. بله، چنین انتخابی وجود دارد. به عنوان مثال

$$A = \{1, 2, \dots, 9, -45\}; \quad B = \{-1, -2, \dots, -9, 45\}$$

برای هر عدد  $x$ ، از مجموعه  $A(5)$ ، در مجموعه  $B$  پنج عدد وجود دارد که، مجموع آن‌ها برابر  $-x$  است و، بنابراین، مجموع پنج عدد دیگر از مجموعه  $B$ ، برابر  $x$  می‌شود.

۲۲.۹۱. از نقطه  $A$ ، نیم خط راستی موازی  $CB$  (و در جهت از  $C$  به  $B$ ) رسم و، روی آن، نقطه  $Z$  را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:  $|AZ| = |BX| \geq |AC|$ . به سادگی روشن می‌شود که  $|YZ| \geq |AC|$  و، با توجه به نابرابری مثلثی

$$|XZ| + |XY| \geq |AC|$$

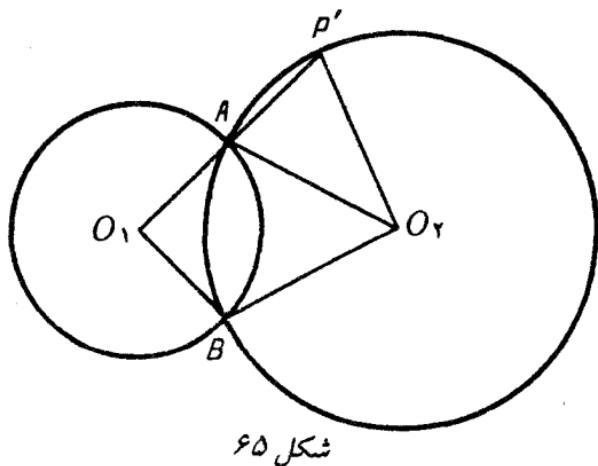
چون دو مثلث  $XY$  و  $AXZ$  برابرند، پس  $|XY| = |XZ|$  و  $.2|XY| \geq |AC|$

۲۳.۹۱. راهنمائی.  $z$  را کوچکترین ضلع مثلث بگیرید و ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y - z)^2$$

۲۴.۹۱. راهنمائی. تحقیق کنید، به ازای  $10^p \leq a_1$ ، هیچ عضوی از دنباله، نمی‌تواند از  $10^p$  بیشتر باشد.

۲۶.۹۱. گراف آشنایان را در نظر می‌گیریم و همه یال‌های اضافی را، در آن، حذف می‌کنیم، یعنی یال‌هایی را باقی می‌گذاریم که بستگی دو جزء را نشان دهد. راسی مثل  $X$  پیدا می‌شود که به راسی مثل  $Y$  پیوسته باشد؛ همه راس‌های  $X_k, X_1, X_2, \dots$  را در نظر می‌گیریم که تنها به راس  $Y$  مربوط باشند. این راس‌ها، همراه با راس  $Y$ ، گروه شماره ۱ را تشکیل می‌دهند. روشن است که، در بین راس‌های باقی‌مانده، هیچ راسی به همه راس‌های دیگر وصل نشده است، در غیر این صورت، برای این راس و راس  $Y$ ، راس سومی پیدا نمی‌شود که به آن‌ها مربوط نباشد. در عین حال، هر یک از راس‌های باقی‌مانده، دست کم به یک راسی که جزو گروه ۱ نیست، مربوط است. تنها این می‌ماند، ثابت کنیم، این راس‌ها را می‌توان به دو گروه، طوری تقسیم کرد که، هر راس، در گروه خودش، دست کم با



شکل ۶۵

یک راس دیگر مربوط باشد. و این، شبیه ساختمانی که در آغاز حل آوردیم، ثابت می‌شود.

۲۹.۹۱. چند حالت، برای استقرار دایره‌ها و نقطه‌های روی آن‌ها، نسبت به هم وجود دارد. حالتی را در نظر می‌گیریم که در شکل ۶۵ نشان داده شده‌است. فرض می‌کنیم، خط راست  $O_1A$ ، دایره دوم را در نقطه  $P'$  قطع کرده باشد. در این صورت

$$\widehat{AP' O_2} = \widehat{P'AO_2} = 180^\circ - \widehat{O_1AO_2} = 180^\circ - \widehat{O_1BO_2}$$

یعنی چهارضلعی  $O_1BO_2P'$ ، محاطی است و این، به معنای آن است که نقطه‌های  $P$  و  $P'$  بر هم منطبق‌اند.

۳۰.۹۱. راه حل مساله ۲۶.۹۰ (یعنی ۳۷.۹۰) را ببینید.

۳۱.۹۱. راهنمائی. دو نیمة مجموع مذکور از مساحت‌های زیر منحنی و بالای منحنی تابع  $f(x)$  را، در درون مربع  $[0, 1] \times [0, 1]$  مورد ارزیابی قرار دهید.

۳۲.۹۱. پاسخ. نه، نمی‌توان. راهنمائی. باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۳۷ را دنبال کنید.

۳۴.۹۱ راهنمائی. اگر تعداد خانه‌های با رنگ‌های قرمز، آبی و سبز را، به ترتیب،  $A$ ،  $B$  و  $C$  بگیریم، آنوقت، درستی این نابرابری‌ها روش است:

$$A \leq ۲B, \quad B \leq ۲C, \quad C \leq ۲A$$

اکنون، درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید.

$$A \leq B + ۴C, \quad B \leq C + ۴A, \quad C \leq A + ۴B$$

از این ساختمان استفاده کنید: برای هر خانه قرمز  $X_1$ ، زنجیره‌ای از سه خانه را در نظر می‌گیریم - خود خانه  $X_1$ ، خانه آبی مجاور آن  $X_2$  و خانه مجاور  $X_3$ ، یعنی خانه سبز  $X_3$  - در ضمن، تا حد امکان، این زنجیره را طوری انتخاب می‌کنیم که مرکزهای خانه‌های آن، روی یک خط راست نباشد. سپس، اگر زنجیره مستقیم باشد، خانه آبی، و اگر مستقیم نباشد، خانه سبز را نشان می‌گذاریم. در این صورت، هر خانه آبی، بیش از یکبار و هر خانه سبز، بیش از چهار بار نشان‌گذاری نمی‌شود. و این، به معنای درستی نابرابری  $A \leq B + ۴C$  است.

۳۸.۹۱ راهنمائی. امتحان کنید: اگر برای هر  $n$  داشته باشیم  $a_1 \leq ۱۰^p - ۱۰$  و  $a_n < ۱۰^p$ ؛ و به ازای  $a_n \leq ۴ \times ۱۰^p + ۸$  (برای هر  $n$ )، داریم:

۳۹.۹۱ پاسخ. نه، چنین عددهایی وجود ندارد. اگر دو طرف برابری را در  $x - y$  ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^{۱۱} - y^{۱۱} = x - y \Rightarrow x^{۱۱} - x = y^{۱۱} - y$$

یعنی چند جمله‌ای  $f(t) = t^{۱۱} - t + C$ ، باید چهار ریشه مختلف داشته باشد که ممکن نیست، زیرا  $f''(t)$  تنها یک ریشه دارد.

۴۰.۹۱. راهنمائی. نیمسازهای زاویه‌های  $XYC$  و  $AXY$  را درست کنید. این دو نیمساز، یکدیگر را در نقطه  $P$  و ضلع  $AC$  را در نقطه‌های  $R$  و  $Q$  قطع می‌کنند. از این مطلب استفاده کنید که مثلثهای  $AXR$  و  $QYC$  و  $XYP$  با مثلث  $ABC$  مشابه‌اند و آن را می‌پوشانند.

۴۱.۹۱. راهنمائی. وزارت راه، در ۵۰۰ روز اول، دور بسته‌ای، که طول آن از ۴۰۰ کمتر نیست، مرمت می‌کند. در این صورت، شهرهایی که، از آن‌ها، به شهرهای دور؛ حداقل ۳۰۰ جاده بسته نشده می‌رود، از ۱۵ تجاوز نمی‌کند. اکنون باید، ضمن ۳۰ روز، این شهرها را با دو جاده، برای رفت و برگشت، با هر شهر دیگر مربوط کرد. سپس، وزارت راه، طبق این قاعده عمل می‌کند: باید هر یک از شهرهای باقی‌مانده را، با دو جاده (برای رفت و برگشت) با دور مربوط کند؛ در ضمن، این کار را به این ترتیب انجام دهد که، هر روز، آن شهری را در نظر بگیرد که از آن در این روز، کمترین تعداد جاده‌های باز (به طرف دور) وجود داشته باشد.

۴۲.۹۱. پاسخ. دایرة به قطر  $AB$ .

۴۳.۹۱. راهنمائی. با استقرا روی تعداد تیم‌ها ثابت کنید.

۴۴.۹۱. راهنمائی. عددی  $a_k = (1 + 2k)^2$  را، برای مقادرهای  $k$ ، از ۱ تا  $\lambda$ ، در نظر بگیرید.

۴۵.۹۱. پاسخ. چنین تابعی وجود ندارد. راهنمائی. دنباله

$$a_1 = 1, a_2 = f(a_1), \dots, a_n = f(a_{n-1}), \dots$$

را در نظر بگیرید و ثابت کنید، هر عدد طبیعی، درست یکبار در بین جمله‌های آن ظاهر می‌شود و، در ضمن، دنباله یکنوا است.

۴۶.۹۱. از پیش قضیه زیر استفاده می‌کنیم (اثبات پیش قضیه را، خودتان با استفاده از استقرا بدھید):

پیش قضیه.  $S$  را مجموعه‌ای از  $13 \leq k$  عدد درست می‌گیریم که، هیچ

یک از عضوهای آن، بر ۱۳ بخش پذیر نباشد؛ مجموعه همه باقی مانده‌هایی که از تقسیم همه گونه‌های ممکن مجموع چند عضو  $S$  به دست می‌آید، با  $A(S)$  نشان می‌دهیم. در این صورت، مجموعه  $(A(S), k)$  عضو  $k$  ندارد.

اکنون، عدد ۲۶ رقمی خود را به ۱۳ عدد دو رقمی

$$\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}, \dots, \overline{a_{13} b_{13}}$$

تقسیم می‌کنیم و مجموعه  $S$ ، شامل عدهای  $9a_1, 9a_2, \dots, 9a_{13}$  را در نظر می‌گیریم. بنابر پیش قضیه، مجموعه  $(A(S), 9)$  عبارت است از مجموعه همه ۱۳ باقی مانده ممکن، در تقسیم بر ۱۳. بهویژه، این برابری را داریم:

$$[M] = [9a_{i_1} + 9a_{i_2} + \dots + 9a_{i_p}]$$

که در آن،  $M$  عبارت است از مجموع همه ۱۳ عدد دو رقمی و  $[x]$  به معنای باقی مانده حاصل از تقسیم عدد  $x$  بر ۱۳ می‌باشد. اکنون، هر یک از عدهای دو رقمی  $\overline{a_{i_p} b_{i_p}}$  را به رقم‌ها تقسیم می‌کنیم. مجموع عدهای یک رقمی که، به این ترتیب به دست می‌آید با بقیه عدهای دو رقمی، برابر است با

$$M - 9a_{i_1} - 9a_{i_2} - \dots - 9a_{i_p}$$

یعنی بر ۱۳ بخش پذیر است.

**۴۹.۹۱** راهنمائی. بُر زدن به مفهوم صورت مساله را می‌توان این طور فهمید که، دسته ورق را به چند بخش تقسیم و، هر کدام از بخش‌ها را وارونه کنیم و، سپس، هر بخش را در جای خودش قرار دهیم و دسته را وارونه کنیم. عمل وارونه کردن دسته ورق را کنار می‌گذاریم و، به جای بُر زدن، تنها عمل وارونه کردن بخش‌ها را انجام می‌دهیم و آن را «جا زدن» می‌نامیم. فرض

کنید  $F(n)$ ، به معنای تعداد «جا زدن‌ها» بی باشد که، برای تبدیل دسته‌ای از  $n$  ورق به هر ردیف دلخواه، کافی باشد. به شرط  $y < x$ ، نابرابری  $F(x) \leq F(y)$  روشن است. ثابت کنید:

$$F(2^k) \leq F(2^{k-1}) + k$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$F(1000) \leq F(1024) \leq 55$$

به این عدد، باید یک بُر زدن را اضافه کرد که تشکیل شده است از تقسیم دسته ورق، به بخش‌های یک ورقی (که منجر به وارونه کردن ساده دسته ورق می‌شود)، تا ردیف لازم ورق در دسته به دست آید.

۵۱.۹۱. وسط پاره خط راست  $BB'$  را  $D$  می‌نامیم. چون دو زاویه  $ABB'$  و  $AMM'$  با هم برابرند، پس خط‌های راست  $MM'$  و  $BDN$  در نقطه  $N'$  واقع بر محیط دایره یکدیگر را قطع می‌کنند. محاسبه‌ای کوتاه نشان می‌دهد که

$$|NM| : |MM'| = |NB| : |BD|$$

و برابری زاویه‌های  $NMM'$  و  $NBD$ ، از تشابه مثلث‌های  $NMM'$  و  $NBD$  نتیجه می‌شود. بنابراین، دو زاویه  $MM'N$  و  $BDN$ ، همچنین، دو زاویه  $NM'N'$  و  $NDN'$  با هم برابرند؛ یعنی  $M'DN'N$  یک چهارضلعی محاطی است و درنتیجه

$$\widehat{M'DN} = \widehat{M'N'N} = \widehat{MN'}N = 90^\circ$$

۵۲.۹۱. راهنمائی. از این حقیقت استفاده کنید که، برای هر  $x \geq -1$

داریم:

$$4x^2 - 4x + 1 = (x+1)(2x-1)^2 \geq 0$$

۵۴.۹۱. راهنمایی. برای هر  $t \in [0, 1]$  داریم:

$$(1-t)f(t) \leq \int_0^1 f(x)dx$$

$f(t) \leq 1$  را به جای  $t$  بگذارید و این حقیقت را به حساب آورید که آن وقت، تنها این می‌ماند که، یکبار دیگر، از دو طرف نابرابری انتگرال بگیریم.

۵۵.۹۱.  $z$  را زیسته  $p$  ام موهومی عدد ۱ می‌گیریم، یعنی  $1 = z^p$ .

چون

$$0 = z^p - 1 = (z - 1)(z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1)$$

و در ضمن  $1 \neq z$ ، بنابراین

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 - 0, (z \neq 1)$$

اکنون، این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$f(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \dots + a_n t^{n-1}$$

اگر دنباله  $(a_k)$ ، نسبت به  $p$ ، «هموزن» باشد، آنوقت، هر عدد مختلطی که ریشه  $p$  ام واحد باشد، برابر واحد نیست و ریشه‌ای از این چندجمله‌ای است. در واقع

$$f(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1} =$$

$$= (a_1 + a_{p+1} z^p + a_{2p+1} z^{2p} + \dots) +$$

$$+ z(a_2 + a_{p+2} z^p + a_{2p+2} z^{2p} + \dots) + \dots =$$

$$= S(1 + z + z^2 + \dots + z^{p-1})$$

$$S = a_1 + a_{p+1} + a_{2p+1} + \dots = a_2 + a_{p+2} + a_{2p+2} + \dots = \dots$$

از آنجا نتیجه می‌شود:  $f(z) = 0$ .

چون برای هر  $p$ ، به تعداد  $1 - p$  ریشه مختلط از عدد ۱ وجود دارد،

پس چندجمله‌ای  $f(t)$ ، باید به تعداد

$$2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 - 50 > 49$$

ریشه مختلف داشته باشد. ولی چندجمله‌ای نمی‌تواند، بیش از درجه خود، ریشه داشته باشد، مگر این که متعدد با صفر باشد، یعنی  $f(t) \equiv 0$  و همه ضریب‌های آن برابر صفر است.

۵۱۲. ۵۶. ۹۱  $x = 512$ ،  $y = 675$  و  $z = 720$  می‌گیریم؛ در این

صورت  $3xyz = 2z^3$  و داریم:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz = \\ &= (x + y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz) \end{aligned}$$

یعنی، عدد مفروض بر  $467 = x + y - z$  بخش‌پذیر است. در واقع، این عدد برابر است با

$$229 \times 467 \times 7621$$

۵۷. ۹۱. پاسخ. نه، این حکم درست نیست. راهنمائی.  $102^p = 2n$

که در آن،  $p$  عددی طبیعی و به اندازه کافی بزرگ است. همه رأس‌های  $2n$  ضلعی را، به ردیف، شماره‌گذاری کنید و، در «نمونه» خود، همه رأس‌هایی را قرار دهید که شماره آنها، در عدد نویسی، به مبنای  $102$ ، دست کم دارای یک رقم برابر صفر باشد.

۱۰۹۲. فرض می‌کنیم تساوی پیش نیامده باشد. در این صورت، کسی که ۲۰ امتیاز گرفته است، باید به تعداد زوج بازی کرده باشد، زیرا تعداد بُردهای او، ۲۰ واحد از تعداد باخت‌های او بیشتر است. از طرف دیگر، کسی که ۷ امتیاز آورده است، باید به تعداد فرد بازی کرده باشد. و این، تنافض ایجاد می‌کند، زیرا تعداد بازی‌های هر نفر، در این مسابقه، با تعداد بازی‌های هر نفر دیگر برابر باشد.

۲۰۹۲. پاسخ. ۲۵ نگهبان.

۳۰۹۲. تفاوت دو عدد، برابر است با  $1 + 3N$ . ولی یکی از این عددها باید بر ۳ بخش‌پذیر و، درنتیجه، مجموع رقم‌های آن، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، عدد دیگر بر ۳ بخش‌پذیر نیست و، درنتیجه، مجموع رقم‌های آن نمی‌تواند، برابر مجموع رقم‌های اولی باشد.

۴۰۹۲. از همان اندیشه‌ای استفاده کنید که، ضمن حل مساله ۱۲۰۹۲، مورد استفاده قرار گرفته است.

۶۰۹۲. چون نفر اول می‌تواند به نفر دوم، درست ۲۵ روبل پردازد (که البته، ممکن است همراه با بازپرداخت باشد)، بنابراین، نزدیکی از آن‌ها، به ناچار، چند اسکناس پیدا می‌شود که، مجموع مبلغ آن‌ها، از ۲۵ روبل کمتر و از ۵۰ روبل بیشتر نیست. در واقع، اگر اولی  $x$  روبل به دومی داده باشد و  $y$  روبل پس گرفته باشد، آن وقت  $25 = y - x$ ؛ در ضمن  $100 \leq x \leq y \leq 100$ . روشن است، اگر  $75 \geq x$ ، آن وقت  $25 \geq y$ ، ولی در ضمن  $75 \leq x$ ؛ یعنی یکی از دو عدد  $x$  یا  $y$  (مثلاً  $x$ )، در فاصله از ۲۵ تا ۷۵ روبل واقع است. سرانجام، اگر  $50 > x$ ، آن وقت می‌توانیم همه بقیه اسکناس‌های نفر اول را بگیریم.

فرض کنید، مجموع مجھول  $S$  در اسکناس‌ها، نزد نفر اول پیدا شود. چون نفر دوم می‌تواند به سومی، هر مبلغی از ۰ تا ۲۵ روبل پردازد، بنابراین نفر دوم و نفر سوم، با هم، می‌توانند هر مبلغی از ۷۵ تا ۱۲۵ روبل پردازند

(مثلاً، اگر لازم باشد ۱۱۹ روبل بپردازند، دومی ۱۹ روبل به سومی می‌دهد، آن وقت سومی می‌تواند ۱۱۹ روبلی را که در اختیار دارد، بپردازد). اگر به این پول،  $S$  روبل نفر اول را بیفزاییم، آن وقت می‌توانیم همه گونه‌های پرداخت از ۱۰۰ تا ۱۵۰ روبل را به دست آوریم. اگر این عددها را از ۳۰۰ کم کنیم، آن وقت به همه عددهای از ۱۰۰ تا ۲۰۰ می‌رسیم.

۷.۹۲. قیمت‌های تازه را به ردیف صعودی در نظر می‌گیریم. در این صورت، روشن است که، در هر دو عدد پشت سر هم، عدد دوم، دست کم یک برابر و نیم عدد اول است. بنابراین گرانترین کالا،  $\left(\frac{3}{2}\right)^k$  برابر ارزان‌ترین آن‌ها قیمت دارد. اکنون کافی است توجه کنیم:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k = (2/25)^4 > 5^2 = 25$$

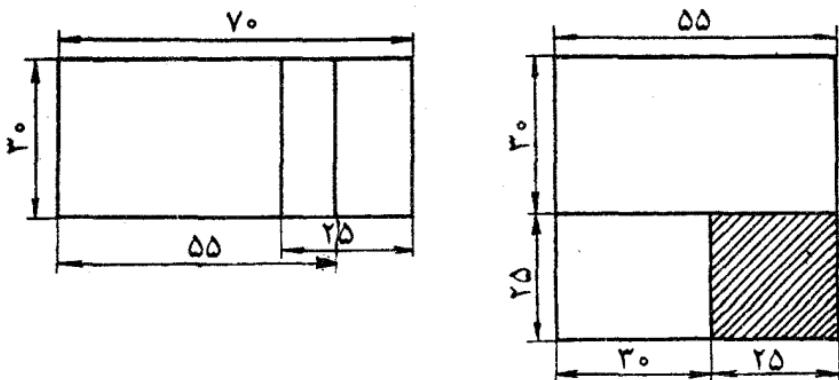
۸.۹۲. پاسخ. تنها برای عدد ۱۱.

۹.۹۲. همه نقطه‌های نشان‌دار گرهی را، با کوچکترین مستطیل ممکن  $\pi$ ، که ضلع‌های آن روی خط‌های شبکه باشد، محصور می‌کنیم. در این صورت، روی هر ضلع این مستطیل، یکی از نقطه‌های گرهی وجود خواهد داشت که آن‌ها را، با حرکت روی محیط مستطیل، به ردیف،  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  می‌نامیم. اکنون، پنج مستطیل را، که به وسیله زوج نقطه‌های  $(A, B)$ ،  $(A, C)$ ،  $(C, D)$ ،  $(D, A)$  و  $(B, C)$  معین می‌شوند، در نظر می‌گیریم. این مستطیل‌ها، تمامی مستطیل  $\pi$  را می‌پوشانند و، بنابراین، در یکی از آن‌ها، دست کم ۲۰ نقطه نشان‌دار وجود خواهد داشت.

۱۱.۹۲. اگر هر سه معادله را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 = 0$$

از آنجا  $a = b = c = -1$ ؛ و این، تنها جواب دستگاه است.



شکل ۶۶

۱۲.۹۲. مستطیل  $30 \times 70$  را، به وسیلهٔ دو مستطیل  $25 \times 30$  و  $25 \times 30$  سانتی‌متری می‌پوشانیم؛ البته، این دو مستطیل، در بخشی روی هم قرار می‌گیرند (شکل ۶۶ را ببینید). روشن است که هر سکه، می‌تواند به طور کامل، در یکی از این مستطیل‌ها قرار گیرد. اکنون، اگر این دو مستطیل  $25 \times 25$  را در یک مربع  $55 \times 55$  قرار دهیم، می‌بینیم که، در داخل مربع  $25 \times 25$  می‌توان سکه جدید را به طور کامل قرار داد.

۱۳.۹۲. راهنمائی. قبل از هر چیز، ثابت کنید، قورباغه‌ها، دیر یا زود، در همه قطاع‌ها خواهند بود. اکنون تنها کافی است به یک نکته توجه کنید: اگر در یکی از دو قطاع مجاور، قورباغه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت، یکی از این دو قطاع، در آینده هم، مهمنان قورباغه خواهد بود.

۱۴.۹۲. راهنمائی. روی خط راست  $AD$ ، پاره‌خط راست  $DE$  را، برابر قاعدة  $BC$  جدا کنید.

۱۵.۹۲. چون  $4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1)$  و  $4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$  هم  $k + n$  بخش‌پذیرند، پس عده‌های  $1 - 4n^2$  و  $1 - 4k^2$  هم  $k + n$  بخش‌پذیرند؛ در ضمن

$$4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1), \quad 4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$$

فرض می‌کنیم، عددهای  $1 - 2k$  و  $1 + 2k$  نسبت به هم اول باشند. روشن است که دو عدد  $1 - 2k$  و  $1 + 2k$ ، همچنین دو عدد  $1 - 2k + n$  و  $1 + 2k + n$  نمی‌توانند بخшибاب مشترک غیر از واحد داشته باشند که، در عین حال، بخшибاب مشترک عدد  $k + n$  هم باشد. در واقع، اگر مثلاً عددهای  $1 - 2k$  و  $1 + 2k$  بر عدد اول فرد  $p$  بخش‌پذیر باشند، آن وقت روشن است که حاصل ضرب  $2n \times 2k$ ، در تقسیم بر  $p$ ، باقی‌ماندهای برابر واحد می‌دهد و، آن‌وقت،  $1 + 4kn$  نمی‌تواند بر  $p$  بخش‌پذیر باشد. از این‌جا معلوم می‌شود که  $1 - 2k$  و  $1 + 2k$  بر  $k + n$  بخش‌پذیرند. ولی بهازای  $|k - n| > 1$ ، یکی از این دو عدد از  $k + n$  کوچکتر است و این، تناقض لازم را به ما می‌دهد.

۲۱.۹۲. پاسخ. تنها به ازای  $x = 55\frac{1}{2}$

۲۳.۹۲. راهنمائی. در آغاز، مکعب‌های کوچک را، به صورتی دلخواه، قرار دهید. فرض کنید، روی وجه‌های قابل دید،  $a$  وجه سیاه و  $b$  وجه سفید وجود داشته باشد. ثابت کنید، می‌توان مکعب‌های کوچک را، طوری تغییر وضع داد (یعنی چرخاند یا برگرداند) که تفاضل  $b - a$ ، در هر بار، یا تغییر نکند و یا به اندازه دو واحد تغییر کند. اکنون، با همین عمل، تغییر وضع را طوری انجام دهید که وجه‌هایی که پیش از این دیده نمی‌شدند، دیده شوند و برعکس، روشن است که، از این صورت عدد  $b - a$  تغییر علامت می‌دهد و، با توجه به پیوستگی عمل بالا، لحظه‌ای فرا می‌رسد که تفاضل  $b - a$  برابر صفر شود.

۲۴:۹۲. قرینه نقطه  $C'$  را نسبت به خط راست  $A'B'$ ، با  $D$  نشان می‌دهیم. روشن است، چهارضلعی  $CA'DC'$ ، یک چهارضلعی محاطی است. بنابراین، مرکز دایره محیطی مثلث  $A'AC$  بر مرکز دایره محیط بر این چهارضلعی واقع است و، بنابراین، روی عمود منصف پاره خط راست  $C'D$ ، یعنی روی خط راست  $A'B'$  قرار دارد.

۲۷.۹۲. حکم مساله را با استقرا روی  $n$  و به این ترتیب ثابت می‌کنیم:  
 تعداد عددهای  $n$  رقمی که بتوان با حذف، عدد  $k$  رقمی مفروضی را که تنها  
 با رقم‌های ۱ و ۲ نوشته شده است (عدد  $x$ )، به دست آورد، تنها به  $k$  و  $n$   
 بستگی دارد و به عدد مشخص  $x$  بستگی ندارد و، بنابراین، می‌توانیم، این  
 تعداد را، با  $F(k, n)$  نشان دهیم. برای  $n = 2$ ، درستی حکم روشن است.  
 اکنون فرض می‌کنیم، عدد  $k$  رقمی  $x$ ، به رقم ۱ ختم شده باشد. چند عدد  
 $n$  رقمی وجود دارد که به ۱ ختم شده باشد و از آن‌ها بتوان عدد  $x$  را به دست  
 آورد؟

روشن است که، این تعداد برابر است با  $F(k - 1, n - 1)$ . به همین  
 ترتیب، تعداد عددهایی که به ۱ ختم نشده‌اند و از آن‌ها می‌توان عدد  $x$  را به  
 دست آورد، برابر است با  $F(k, n - 1) - F(k - 1, n - 1)$ . هر دو عدد

$$F(k - 1, n - 1) \text{ و } F(k, n - 1)$$

به عدد  $x$  بستگی ندارد (بنابر فرض استقرا) و، بنابراین، عدد  $F(k, n)$  هم  
 به وضع مشخص عدد  $x$  بستگی ندارد.

۳۰.۹۲. راهنمائی. باید همه رقم‌ها را عددهایی فرد گرفت که، در این  
 صورت، همه  $n$  عددی که به دست می‌آیند، به صورت  $1 - 4k + 4k$  یا  $1 - 4k$   
 خواهند بود. ثابت کنید، تعداد عددهای به صورت  $1 - 4k$  زوج است. در  
 ضمن، توجه کنید: عدد به صورت  $11\dots111$ ، از گونه  $1 - 4k$  است.  
 ۳۱.۹۲. پاسخ.  $\frac{1}{2}$ . راهنمائی. ثابت کنید:

$$|OD| \cdot |CM| = |OC| \cdot |MD|$$

۳۲.۹۲. آغاز کننده بازی می‌برد. او، در نخستین حرکت خود، هشت  
 سنگ برمی‌دارد؛ درنتیجه، به تعداد

$$1992 - 8 = 1984 = 64 \times 31$$

سنگ باقی می‌ماند. از این به بعد، اولی حرکت‌های دومی را تکرار می‌کنند؛ چون حرکت‌ها به این معناست که، هر بار ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۸ سنگ برداشته شود و با توجه به این که، عدد ۱۹۸۴ بر ۱۶ بخش‌پذیر است، باید به تعداد زوج حرکت انجام شود (بدون در نظر گرفتن نخستین حرکت) و، بنابراین، آخرین حرکت را اولی انجام می‌دهد.

۳۳.۹۲. به سادگی ثابت می‌شود که

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = 0$$

عبارت صورت مساله را، این طور می‌نویسیم:

$$(a_2 - a_1)(\vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n) + (a_3 - a_2)(\vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n) + \dots + (a_n - a_{n-1})\vec{v}_n$$

به این ترتیب، یک ترکیب خطی از  $n$  بردار با ضریب‌های مثبت به دست می‌آید؛ در ضمن، همه این بردارها، نسبت به خط راست  $OA_1$ ، جهتی به سمت یک نیم‌صفحه دارند ( $A_1$  را انتهای بردار  $\vec{v}_1$  گرفته‌ایم)؛ خودتان این حکم را ثابت کنید: ترکیب خطی بردارهایی با ضریب‌های مثبت و در جهت یک نیم‌صفحه، نمی‌تواند برابر بُردار صفر باشد.

۳۴.۹۲. حالتی را بررسی می‌کنیم که، تعداد گروهبانان دسته، عددی زوج باشد (حالت دوم را هم، می‌توان شبیه این حالت، مورد بررسی قرار داد). تعداد سربازانی را که از یک گروهبان فرمان می‌برند، با  $x$ ، و تعداد سربازانی را که از دو گروهبان فرمان می‌برند، با  $y$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $2n$  گروهبان وجود داشته باشد و حالتی را در نظر بگیرید که  $n$  نفر از آن‌ها بازنشسته شده‌باشند. در این صورت، باید این افراد را هم بازنشسته کرد.

(الف) همه سربازانی را که تنها از این گروهبانان فرمان می‌برند؛

(ب) همه سربازانی را که از دو گروهبان، بین بقیه گروهبانان فرمان می‌برند.

فرض می‌کنیم، تعداد این گونه سربازان، از نصف همه سربازان، بیشتر باشد. همه گونه‌های مختلف  $n$  گروهبان را در نظر می‌گیریم و همه نابرابری‌هایی که، شبیه بالا، به دست می‌آیند، با هم جمع می‌کنیم. هر یک از  $x$  سربازی که درست از یک گروهبان پیروی می‌کند، در  $\binom{2n-1}{n-1}$  حالت، وقتی که فرمانده او بازنشسته شده است، بازنشسته می‌شود. هر یک از  $y$  سربازی که از دو گروهبان فرمان می‌برد، در  $\binom{2n-2}{n}$  حالت بازنشسته می‌شود، وقتی که هر دو فرمانده او در بین  $n$  گروهبان بازنشسته باشند و یا وقتی که هیچ کدام از آن‌ها، در بین بازنشستگان نباشند. بنابراین، به این نابرابری می‌رسیم:

$$x \cdot \binom{2n-1}{n-1} + y \left[ \binom{2n-2}{n} + \binom{2n-2}{n-2} \right] > \\ > \frac{1}{2}(x+y) \binom{2n}{n}$$

اکنون این می‌ماند که توجه کنیم:

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} \quad \text{و} \quad \binom{2n-2}{n} = \binom{2n-2}{n-2} < \\ < \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$$

و به این ترتیب، به تناقض می‌رسیم.

. $x = 37.92$  . $36.92$  پاسخ.

۳۷.۹۲ . $n$  را تعداد مهره‌های سیاه می‌گیریم. روشن است که، تعداد مهره‌های سیاه، از  $(4 + \frac{1}{3}(3B))$  تجاوز نمی‌کند، زیرا در هر سه‌تایی سیاه،

بیش از سه مهره و، در هر سه تالی سفید، بیش از یک مهره سیاه وجود ندارد؛ در ضمن، هر مهره در سه تا از این گروههای سه مهره‌ای شرکت دارد. از اینجا

$$A + B = 2n \leq \frac{1}{3}(6B + 2A) = 2B + \frac{2}{3}A$$

$$A \leq 3B$$

۳۸.۹۲. راهنمائی. روشن کنید که، مرکزهای این سه دایره، عبارتند از

قرینه‌های مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$ ، نسبت به ضلعهای آن.

۳۹.۹۲. به سادگی می‌توان روشن کرد که، در دنباله  $F_k$  (دنباله عددهای

فیبوناچی)، جمله‌ای بر ۷ بخش‌پذیر است که شماره ردیف آن جمله بر ۸

بخش‌پذیر باشد؛ همچنین، جمله‌ای بر ۳ بخش‌پذیر است که، شماره ردیف

آن جمله، بر ۴ بخش‌پذیر باشد. به این ترتیب، اگر عدد فیبوناچی بر ۷

بخش‌پذیر باشد، بر ۳ هم بخش‌پذیر است.

۴۳.۹۲. همه باقی‌مانده‌های ممکن را، در تقسیم بر ۱۰۰، به ردیف

زیر، روی محیط دایره در نظر می‌گیریم:

$$0, 77, 77 + 77 \equiv 54, 77 + 77 + 77, \dots, 77 \times 99 \equiv 23$$

در این صورت، اضافه کردن ۷۷ یا ۵۴ به عدد، به این معناست که، در

جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به عدد مجاور و یا عدد بعدی آن برویم.

روشن است که، ضمن این حرکت، نمی‌توانیم از روی دو عدد ۰ و ۷۷

بپریم؛ و در عدهایی که، نسبت به مُدول ۱۰۰، این باقی‌مانده‌ها را دارند،

دو رقم سمت راست، با هم برابرند.

۴۴.۹۲. پاسخ. تنها وقتی که  $k$ ، برابر توانی از ۲ باشد.

۲k مهره را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در یکی ۱ مهره و

در دیگری  $(1 - 2k)$  مهره وجود داشته باشد. فرض می‌کنیم توانسته باشیم،

دو بخش برابر، در هر بخش  $k$  مهره به دست آوریم. عملی که در صورت

مساله، از آن سخن رفته است، به چه معناست؟ زوج عددی  $(x, y)$ ، به زوج عددی  $(2x, y - x)$  تبدیل می‌شود. عمل عکس هم به این معناست که، زوج عددی  $(a, b)$ ، به زوج عددی  $\left(\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}\right)$  تبدیل می‌شود. روشن است، اگر در جهت عکس حرکت کنیم، تنها می‌توانیم، به زوج عددی به صورت

$$(ra + sb, (1 - r)a + (1 - s)b)$$

بررسیم که، در آن،  $r$  و  $s$ ، کسرهایی تحقیقی هستند که، مخرج آنها، توانی از ۲ می‌باشد. از طرف دیگر، اگر از زوج  $(k, k)$ ، بتوان زوج  $(1, 2k - 1)$  را به دست آورد، آن وقت  $(r - s)k = 1$  و، از آنجا،  $k$  توانی از ۲ خواهد بود.

دنبله اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۴۵.۹۲. راهنمائی. عدد  $n = A - [\sqrt{A}]$  را در نظر بگیرید.

۴۶.۹۲. پاسخ.  $n + 1$ . مثال روشن است.

ثابت می‌کنیم، تعداد کمتری چند ضلعی نمی‌توان جدا کرد. برای این منظور، همه راس‌های بیرونی شکل‌های  $M \cup M'$  را در نظر می‌گیریم و، آن چند ضلعی‌هایی را که، آن را، روی آنها، بریده‌ایم، شماره‌گذاری می‌کنیم و، فرض می‌کنیم، این راس‌ها، با رنگ‌های متناظر، مشخص شده باشند. از خواننده می‌خواهیم، به عنوان تمرین، ابتدا پیش قضیه زیر را ثابت کند و، سپس، حکم مساله را نتیجه بگیرد.

پیش قضیه.  $n$  نقطه را روی دایره نشان گذاشته و آنها را، طوری به چند رنگ درآورده‌ایم که، هر دو نقطه مجاور، به دو رنگ مختلف باشند؛ و اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  از یک رنگ‌اند و نقطه‌های  $C$  و  $D$  از یک رنگ دیگر، پاره خط‌های راست  $AB$  و  $CD$ ، نقطه بروخورد نداشته باشند. در این صورت، تعداد رنگ‌های لازم، از  $\left[\frac{1}{2}(n + 3)\right]$  تجاوز نمی‌کند.

۴۷.۹۲. این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{F_1}{F_2}, \frac{F_2}{F_3}, \dots, \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

و برای آن‌ها، نابرابری مربوط به میانگین‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n} \left( \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \dots + \frac{F_n}{F_{n+1}} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{F_{n+1}}}$$

از آنجا که، برای هر  $k$ ، داریم:

$$\frac{F_k}{F_{k+1}} = 1 - \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$$

بنابراین، سمت چپ نابرابری فوق را می‌توان این طور نوشت:

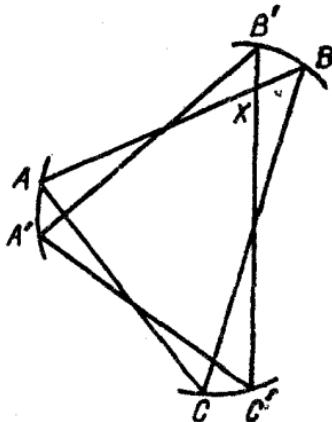
$$1 - \frac{1}{n} \left( \frac{F_0}{F_2} + \frac{F_1}{F_3} + \dots + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} \right)$$

که در آن،  $F_0$  را به معنای  $1 = F_2 - F_1$  گرفته‌ایم. اگر دوباره از نابرابری میانگین‌ها استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{F_n F_{n+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{F_{n+1}}}$$

که اگر دو طرف را در مخرج طرف دوم ضرب کنیم، به همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۴۸.۹۲. مثلث مفروض  $T$  را در نظر می‌گیریم، دایرة به مرکز  $O$  را بر آن محیط می‌کنیم و به همه مثلث‌هایی توجه می‌کنیم که از  $T$ ، با دوران دور  $O$  و به اندازه زاویه‌های کوچک، به دست می‌آیند. برای هر یک از این مثلث‌ها، می‌توان جدولی با اندازه‌های  $1992 \times 3$  رسم کرد و، در محل



شکل ۶۷

برخورد  $p$  امین ستون و  $q$  امین سطر، علامت ستاره گذاشت، به شرطی که روی  $q$  امین ضلع این مثلث، نقطه‌ای به رنگ  $p$ ام وجود داشته باشد؛ در حالتی که این شرط وجود نداشته باشد، خانه مربوط را در جدول، حالی می‌گذاریم. روش است که دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  (شکل ۶۷ را ببینید) پیدا می‌شوند که جدولی یکسان دارند ( $S$ ). نقطه  $X$ ، محل برخورد ضلع‌های  $AB$  و  $B'C'$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، این نقطه، به رنگ  $p$  باشد. در این صورت، در  $p$  امین ستون، در نخستین خانه جدول  $S$ ، باید ستاره گذاشته شده باشد. ولی، این به معنای آن است که روی نخستین ضلع مثلث  $A'B'C'$  (یعنی  $A'B'$ )، نقطه‌ای با رنگ  $p$ ام وجود دارد. به این ترتیب، برای دو ضلع  $B'C'$  و  $A'B'$  از مثلث  $A'B'C'$ ، نقطه‌هایی با یک رنگ وجود دارد. همین استدلال را، برای دو ضلع دیگر هم می‌توان کرد.

۴۹.۹۲. راهنمائی. ثابت کنید، برای به دست آوردن بزرگترین عدد، می‌توان به این ترتیب، عمل کرد: هر بار، عمل مورد نظر مساله را، روی کوچکترین عددها، انجام دهید.

اکنون، اگر عمل را به این ترتیب دنبال کنیم، معلوم می‌شود که، رقم

سمت راست بزرگترین عدد حاصل، برابر است با ۲.  
 ۵۱.۹۲ مساله تنها یک جواب دارد:  $(1, 1, 1)$ . راهنمائی. اگر سه عدد را  $a$ ,  $b$  و  $c$  بنامیم، باید دو به دو نسبت به هم اول، و هر سه، عددهایی فرد باشند. در ضمن؛ باید عدد

$$ab + bc + ac + 1$$

بر هر سه عدد  $a$ ,  $b$  و  $c$  و، درنتیجه، بر حاصل ضرب آنها، بخش پذیر باشد.

۵۴.۹۲ بله، می‌توان پیدا کرد. دو خط راست  $L_1$  و  $L_2$  را که در نقطه  $O$  بخورد دارند، و نقطه دلخواه  $P$  را که روی این خطوط‌های راست قرار ندارد، در نظر می‌گیریم. اکنون ۴۳ دایره مختلف، طوری از نقطه‌های  $O$  و  $P$  می‌گذرانیم که هر یک از دو خط راست مفروض را در دو نقطه، قطع کنند که، البته، یکی از آنها، همان نقطه  $O$  است. فرض کنید، دایرة خام (i) می‌تواند برابر یکی از عددهای از ۳ تا ۴۵ باشد)، خط راست  $\bar{L}$  را در نقطه دوم  $A_i$  و خط راست  $L_2$  را در نقطه دوم  $B_i$  قطع کند. در این صورت، خطوط‌های راست  $(A_i; B_i) = L_i$ ، همراه با دو خط راست  $L_1$  و  $L_2$ ، دسته خط راست لازم را به ما می‌دهند.

۵۵.۹۲ راهنمائی. فرض کنید، بخواهیم کشور را به دو بخش چنان تقسیم کنیم که، در یک بخش،  $k$  شهر و، در بخش دیگر  $k - 100$  شهر وجود داشته باشد؛ آن وقت، مساله را با استدلال استقرایی روی  $k$ ، حل کنید.

۵۶.۹۲ تحقیق می‌کنیم که

$$\begin{aligned} L(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_k) &= \\ &= L(a_1, \dots, a_{p+1}, a_p, \dots, a_k) \end{aligned}$$

انتخابی از خانه‌ها را در جدول  $n \times m$  «نمونه» می‌نامیم، وقتی که برخورد آن با هر ستون و هر سطر، شامل چند خانه ردیف باشد؛ همچنین، اگر دو خانه «نمونه» در گوشۀ چپ بالا و گوشۀ راست پایین مستطیلی مثل II واقع باشند، بقیۀ خانه‌ها هم در مستطیل II، متعلق به «نمونه» باشند. روشن است، اگر عده‌های خانه‌ها را به درستی جا دهیم، خانه‌هایی که به وسیله عده‌های  $p$  و  $1 + p$  اشغال شده‌اند، تشکیل «نمونه» می‌دهند. ثابت می‌کنیم، تعداد روش‌های جا دادن عده‌های  $1, 2, \dots, k$ ، به نحوی که عده‌های  $p$  و  $1 + p$ ، درست همان خانه‌های «نمونه» مفروض را اشغال کنند، با عوض کردن جای  $a_p$  و  $a_{p+1}$  با یکدیگر، تغییر نمی‌کند. در واقع، اگر در ستونی، «نمونه» ارتفاعی بیشتر از ۲ داشته باشد، آن وقت  $0 = L$ ، به ردیف خانه‌ها بستگی نخواهد داشت. اگر در ستونی، ارتفاع «نمونه» برابر ۲ باشد، آن وقت، این دو خانه، به وسیله عده‌های  $p$  و  $1 + p$ ، به طور یکسان، پر می‌شوند. با ادامه این زوج‌ها (تعداد آن‌ها را  $q$  می‌گیریم)، انتخابی از روش‌های مختلف به صورت  $d \times 1$  به دست می‌آوریم که، در آن‌ها، باید  $q - a_p - q$  عدد  $p$  و  $a_{p+1} - q$  عدد  $1 + p$  (و یا برعکس)، بدون ارتباط با هم جا داد. تعداد روش‌های جا دادن  $2q - a_p + a_{p+1}$  عددی که در اختیار داریم، در بین این نوارها، بستگی به این ندارد که از چه عده‌هایی  $q - a_p$  و از چه عده‌هایی  $q - a_{p+1}$  بار استفاده شده است؛ تنها این مهم است که با  $q - a_p - q$  چیز از یک نوع و  $a_{p+1} - q$  چیز از نوع دیگر سروکار داریم. جا دادن  $d$  عدد مشخص در نوار  $d \times 1$  هم، درست با یک روش ممکن است.

به این ترتیب، در هر «نمونه»، ردیف عده‌های  $a_p$  و  $a_{p+1}$ ، در تعداد روش‌های تبدیل، تاثیری ندارد. از مجموع همه «نمونه‌ها»، به برابری مورد نظر مساله می‌رسیم.

۵۷.۹۲. پاسخ. نه، درست نیست. راهنمائی. دسته‌ای از دایره‌ها را

در نظر بگیرید که، مرکزهای آنها، همه گرههای شبکه‌های با گام  $\frac{1}{1000}$  در درون مربع  $10 \times 10$  باشند.

۲.۹۳. نه، ممکن نیست. اگر ۵۰ عدد اول را حذف و، به جای آنها، عدد ۵۰ را بنویسیم، آن وقت باید همه عدهای روی تخته را (از جمله خود ۵۰) را حذف کنیم تا عدد ۵۱ را بنویسیم و، اگر در آغاز، به جای ۵۱ عدد اول، عدد ۵۱ را بنویسیم، آن وقت باید همه عدهای را کنار بگذاریم تا بتوانیم عدد ۵۰ را بنویسیم. در هر حال، تنها یک عدد روی تخته باقی می‌ماند: ۵۱ یا ۵۰.

۳.۹۳. تعداد پسرها را  $n$  می‌گیریم. در این صورت،  $5n$  نوع مختلف «پسر-دختر» خواهیم داشت. هر یک از این زوج‌ها، متناظر است با دادن یک شیرینی: اگر این پسرها و دخترها آشنا باشند، دختر شیرینی را می‌دهد و، اگر آشنا نباشند، پسر شیرینی هدیه می‌کند. از آنجا، به دست می‌آید:  $5n = 6$ . یعنی  $n = 6$ .

۴.۹۳. پاسخ. چنین عدهای وجود ندارند.

۶.۹۳. فرض می‌کنیم، هیچ سه مثلثی، نقطه مشترکی نداشته باشند. در این صورت، در درون هر یک از این مثلث‌ها، تنها یک نقطه وجود دارد که راس مثلث دیگر است؛ همچنین، یک راس از یک مثلث، متعلق به بیش از یک مثلث نیست. روی هم، چند راس وجود دارد؟ از یک طرف، حداقل  $3 \times 1993$  راس، زیرا هر مثلث سه راس دارد؛ از طرف دیگر، حداقل  $4 \times 1993$  راس، زیرا در درون هر مثلث، دست کم چهار راس وجود دارد و، بنابراین روش محاسبه، هیچ راسی دو بار به حساب نیامده است. تناقض.

۷.۹۳. پاسخ. نه، نمی‌توان.

۹.۹۳. پاسخ. نه، ممکن نیست.

۱۱.۹۳. هر یک از شش جمله این عبارت، برابر است با ۱ یا -۱ و، بنابراین، حاصل عبارت، عددی زوج است. این حاصل، نمی‌تواند برابر ۶

باشد، زیرا برای این منظور، هر یک از جمله‌های  $cdh$  و  $bfh$  برابر ۱ و حاصل ضرب آنها هم برابر ۱ باشد؛ در عوض، هر یک از جمله‌های  $ceg$  و  $bdk$  و  $afh$  داشته باشند. ولی این دو حاصل ضرب، یکی است و نمی‌تواند هم برابر ۱ و هم برابر ۱ – شود. ولی عبارت برابر ۴ می‌تواند باشد، مثلاً به ازای

$$a = b = c = e = h = k = 1 \quad d = f = g = -1$$

۱۲.۹۳. آدم‌های عجیب گوشه‌گیر را، آدم‌های عادی به حساب می‌آوریم. تعداد آشنايان بین بقیه گوشه‌گیرها را  $m$  و بقیه آدم‌های عجیب را  $k$  می‌نامیم. از یک طرف، این تعداد کمتر از  $10k$  نیست، زیرا هر عجیب گوشه‌گیر، دست‌کم با ۱۰ نفر آشناست؛ در ضمن نه با آدم‌های عجیب (آدم‌های عجیب، وقتی می‌توانند با هم آشنا باشند که، هر دو، گوشه‌گیر هم باشند). از طرف دیگر، این تعداد، از  $10m$  بیشتر نیست، زیرا تعداد آشنايان هر گوشه‌گیر، از ۱۰ نفر بیشتر نیست. بنابراین،  $m$  از  $k$  کمتر نیست، یعنی آدم‌های گوشه‌گیر، از آدم‌های عجیب کمتر نیستند.

۱۳.۹۳. در هر خانه‌ای که دارای ستاره است، تعداد ستاره‌ها را در ستون شامل این خانه در نظر می‌گیریم و، عکس آن را در این خانه می‌نویسیم. بنابراین، مجموع عدددها، در هر ستونی که دارای ستاره است، برابر ۱ می‌شود. اگر برای سطرهای هم، به همین ترتیب عمل کنیم، مجموع عدددها در هر سطر ستاره‌دار هم، برابر ۱ می‌شود. بنابراین، تعداد چنین سطرهایی (و هم ستون‌ها) برابر است با مجموع عدددهایی که در جدول نوشته شده است.

۱۴.۹۳. راهنمائی. ثابت کنید، از کلاس ششم تنها یک نفر شرکت داشته که، او هم، بردۀ است.

۱۶.۹۳. نقطه  $K$  را روی ضلع  $AB$  طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست  $KM$  با ضلع  $BC$  موازی باشد. به سادگی دیده می‌شود که،

مثلث‌های  $MKB$  و  $MCN$  با هم برابرند (در یک ضلع و سه زاویه). بنابراین خواهیم داشت:

$$|CN| = |KM| = |AM|$$

۱۷.۹۳. کسر اول را  $u$  و کسر دوم را  $v$  مینامیم. مجموع و حاصل ضرب این دو کسر، عددهایی درست‌اند، بنابراین  $u$  و  $v$ ، ریشه‌های معادله درجه دومی هستند که ضریب‌های درست دارد، مثلاً معادله

$$x^2 + mx + n = 0$$

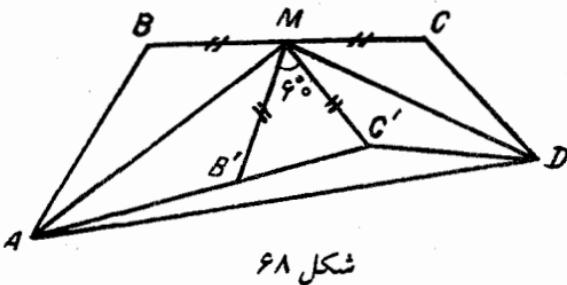
چون  $u$  و  $v$ ، عددهایی گویا هستند، پس ریشه دوم میان این معادله، یعنی  $\sqrt{m^2 - 4n}$  عدد درستی است؛ در ضمن، همراه با  $m$ ، عددی فرد یا زوج است، ولی در این صورت  $u$  و  $v$  هم، عددهای درستی می‌شوند، زیرا

$$u, v = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

و صورت کسر هم، عددی زوج است. ۱۹.۹۴.  $B'$  را قرینه  $B$  نسبت به خط راست  $AM$  و  $C'$  را قرینه نقطه  $C$  نسبت به خط راست  $MD$  می‌گیریم. زاویه  $B'MC'$  برابر  $60^\circ$  درجه و مثلث  $B'MC'$  متساوی‌الاضلاع است (شکل ۶۸). طول خط شکسته  $AB'C'D$  برابر است با

$$|AB| + \frac{1}{2}|BC| + |CD|$$

ولی طول این خط شکسته، از طول پاره خط راست  $AD$ ، که دو انتهای آن را به هم وصل کرده، بزرگتر است. ۲۰.۹۴. پاسخ. ۳۶ مهره.



شکل ۶۱

۲۱.۹۳. پاسخ. ۲ و ۴.

۲۲.۹۳. بنابر قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{|BM|}{\sin(BCM)} = \frac{|CM|}{\sin(CBM)}, \quad \frac{|DN|}{\sin(DCN)} = \frac{|CN|}{\sin(CDN)}$$

ولی بنابر شرط، همه این عبارت‌ها، به روشی برابرند و، اگر توجه کنیم که:

$$\sin(CBM) = \sin(ABC) = \sin(ADC) = \sin(CDN)$$

برابری  $|MC| = |NC|$  به دست می‌آید.

۲۴.۹۳. فرض می‌کنیم در تجزیه  $b - a$  به عامل‌های اول، به عدد

اولی مثل  $p$  برخورد کنیم که با توان فرد  $1 - 2k$  باشد. چون  $ab$  بر  $p^k$  بخش‌پذیر است، بنابراین، یکی از دو عدد  $a$  یا  $b$  (مثلاً  $a$ ) باید بر  $p^k$  بخش‌پذیر باشد؛ در این صورت، به ناچار، عدد

$$b = a - (a - b)$$

هم بر  $p^k$  بخش‌پذیر می‌شود. از آنجا  $\frac{ab}{a - b}$ ، یعنی  $c$ ، بر  $p$  بخش‌پذیر است. به این جا رسیدیم که  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، بخشیاب مشترکی برابر  $p$  دارند.

۲۵.۹۳. راهنمایی. مقدار  $S = \sum |OM_i|^2$  را در نظر بگیرید که، در آن،  $O$  مبدأ مختصات و  $M_i$ ‌ها، نقطه‌های مفروض‌اند. سپس، ببینید مقدار  $S$ ، بعد از عملی، که باید انجام داد، چه تغییری می‌کند؟

۲۶.۹۳ . فرض می‌کنیم نابرابری برقرار نباشد. در این صورت، باید

داشته باشیم:

$$\sqrt{x} < \sqrt[3]{xyz}, \sqrt[4]{y} < \sqrt[3]{xyz}, \sqrt[5]{z} < \sqrt[3]{xyz}$$

این نابرابری‌ها را می‌توان این‌طور نوشت:

$$x^{1/6} < xyz, y^{1/6} < (xyz)^{1/3}, z^{1/6} < (xyz)^{1/2}$$

از ضرب این سه نابرابری در یکدیگر به دست می‌آید:

$$x^{1/6}y^{1/6}z^{1/6} < (xyz)^{1/6}$$

که ممکن نیست.

۲۷.۹۳ . دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که، محیط آن، به ۹۹ کمان برابر تقسیم شده باشد. در بین نقطه‌های پایانی این کمان‌ها، ۱۰ نقطه را نشان می‌گذاریم که دایره را به ۱۰ کمان تقسیم کرده و، در ضمن، طول‌های این کمان‌ها، برابر همان ۱۰ عددی باشد که در راس‌های ده ضلعی اول قرار داده‌ایم (و البته، با همان ردیف). به همین ترتیب، دایرة دوم را، برای ده ضلعی دوم می‌سازیم. اکنون، دایرة دوم را، روی دایرة اول طوری قرار می‌دهیم که نقطه‌های تقسیم آن‌ها، بر یکدیگر قرار گیرند و، سپس، ۹۹ دوران آن را به اندازه مضرب‌های  $\frac{2\pi}{99}$  در نظر می‌گیریم. اگر بعد از هر دوران، بیش از یک نقطه نشان دار دایرة اول بر نقطه نشان داری از دایرة دوم قرار نگیرد، آن وقت، در مجموع، بیش از ۹۹ انتباراً پیدا نمی‌کنیم که ممکن نیست، زیرا روش است که تعداد همه این انتباراًها، باید درست برابر ۱۰۰ باشد. یعنی، درست کم در یکی از این دوران‌ها، باید لااقل دو نقطه نشان دار دایرة اول بر دو نقطه نشان دار دایرة دوم منطبق باشد؛ طول کمان‌های بین این دو نقطه، در دو دایرة یکی است و این، همان مجموع چند عدد پشت سر هم است.

۲۸.۹۳. اگر در برابری  $P(x^r - x + 1) = Q(x^r + x + 1)$

متغیر  $x$  را به  $-x$  تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$P(x^r + x + 1) = Q(x^r - x + 1)$$

از اینجا به دست می‌آید:

$$P(x^r - x + 1) = Q(x^r + x + 1) =$$

$$= Q((x+1)^r - (x+1) + 1) = P((x+1)^r + (x+1) + 1) =$$

$$= P(x^r + 2x + 2)$$

و این، به معنای آن است که

$$P(1) = P(7) = P(2) = \dots$$

یعنی، چندجمله‌ای  $P(x)$ ، مقداری را بینهایت مرتبه قبول می‌کند که، به معنای ثابت بودن این چندجمله‌ای است.

۳۲.۹۳. راهنمائی. اگر  $O$  را مرکز دایره بگیریم، ثابت کنید، چهار ضلعی  $PQOM$ ، قابل محاط در یک دایره است.

۳۳.۹۳. فرض می‌کنیم بتوانیم همه خانه‌های جدول را، با عملی که در صورت مساله آمده است، سیاه کنیم. لحظه‌ای را در نظر می‌گیریم که، عمل سیاه کردن خانه‌ها را، برای نهمین بار، در یکی از ردیف‌ها (و مثلاً در سطر) انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم این،  $(k+9)$  امین عمل باشد (روشن است که  $k$ ، از ۸ بزرگتر نیست). در این صورت، حداکثر  $k-17$  عمل باقی می‌ماند که باید به رنگ کردن ستون‌ها مربوط باشد. بنابراین، روی هم ۲۶ بار عمل رنگ کردن، انجام می‌گیرد. ولی در هر رنگ کردن، حداکثر ۸ خانه سیاه می‌شود، یعنی بعد از ۲۶ عمل، حداکثر ۲۰۸ خانه به رنگ سیاه درمی‌آید؛ در حالی که در آغاز کار ۲۰۹ خانه سفید داریم.

۳۴.۹۳. راهنمائی. همه زوج‌های مرتب  $(a, b)$  را، از عضوهای مجموعه  $M$  در نظر بگیرید و، با توجه به عکس حکم مساله، روش عادی تقسیم این مجموعه زوج‌ها را، به سه تایی‌های متقطع نشان دهید.

۳۶.۹۳. فرض می‌کنیم:  $k^2 = 100 \dots 001 = k + 1 - k - 1 = 3 \times 10^n \Rightarrow (k+1)(k-1) = 3 \times 2^n \times 5^n$

روشن است که تنها یکی از عدهای  $k-1$  یا  $k+1$  می‌تواند بر ۵ بخش پذیر باشد و، بنابراین، یکی از این عدها مضربی از  $5^n$  است. از اینجا به دست می‌آید:

$$5^n \leq 3 \times 2^n + 2$$

که به روشنی، برای  $n \geq 2$  نادرست است. حالت  $n=1$  هم، به طور مستقیم، قابل تحقیق است.

۳۷.۹۳. راهنمائی. ثابت کنید، تعداد نقطه‌هایی که از نقطه  $O$  در نگاشت

$$f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

به دست می‌آید، برابر است با  $3^7$ .

۳۹.۹۳. فرض می‌کنیم این طور نباشد و درجه شهرها را، به ترتیب صعودی منظم می‌کنیم:  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . در این صورت، باید این نابرابری‌ها را داشته باشیم:

$$d_k - d_1 \geq k-1, d_{k+1} - d_2 \geq k-1, \dots, d_n - d_{n-k+1} \geq k-1$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم: حالت  $1 < n < 2k-1$  و حالت  $1 \geq n \geq 2k-1$ ، در اینجا، تنها به حالت اول می‌پردازیم (بحث در حالت

دوم هم، شبیه حالت اول است). اگر همه نابرابری‌های بالا را جمع کنیم، به دست می‌آید.

$$(d_n + d_{n-1} + \dots + d_k) - (d_1 + d_2 + \dots + d_{n-k+1}) \geq \\ \geq (n - k + 1)(k - 1)$$

یعنی مجموع درجه‌های یک مجموعه  $A$ ، شامل  $n - k + 1$  شهر، دست کم به اندازه  $(n - k + 1)(k - 1)$ ، از مجموع درجه‌های مجموعه  $B$ ، شامل  $n - k + 1$  شهر دیگر بیشتر است. ولی مجموع درجه‌های شهرهای مجموعه  $A$ ، از

$$(n - k + 1)(n - k) \quad (جاده‌های درونی A) \\ +(n - k + 1)(2k - n - 2) \quad (جاده‌هایی که A را به \\ \text{شهرهای بیرون A و بیرون} \\ \text{متصل می‌کند}) \\ (x + B) \quad (جاده‌ای از A به B)$$

تجاوز نمی‌کند. به همین ترتیب، مجموع درجه‌های شهرهای  $B$ ، کمتر از  $x$  نیست. از آنجا، باید داشته باشیم:

$$(n - k + 1)(n - k) + (n - k + 1)(2k - n - 2) \geq \\ (n - k + 1)(k - 1)$$

یعنی

$$(n - k + 1)(k - 2) \geq (n - k + 1)(k - 1)$$

که یک تناقض است.

۴۰.۹۳. دو طرف نابرابری فرض را در  $f^{18}g^{92}$  ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(f^{19}g^{93})' = 19f^{18}f'g^{93} + 93g^{92}g'f^{19} \geq 0$$

چون تابع  $f^{19}g^{93}$  در بازه  $[1, 0]$  نزولی نیست، بنابراین

$$f^{19}(1)g^{93}(1) \geq f^{19}(0)g^{93}(0)$$

می‌دانیم  $1 \cdot g(1) \geq g(0)$ ، پس  $g(1) \geq g(0)$ .

۴۲.۹۳. فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله، یعنی  $a_k$ ، برابر  $\frac{p}{q}$  باشد که، در آن،  $p$  و  $q$  عددهای طبیعی‌اند. در این صورت، جمله بعد دنباله، برابر  $\frac{q-kp}{p}$  می‌شود و می‌بینیم که، مجموع صورت و مخرج کسر، کوچک شده است. بعد از چند گام، صورت یا مخرج کسر و، بنابراین خود کسر، منفی می‌شود.

۴۳.۹۳. روی قاعده  $AC$ ، نقطه  $D'$  را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$|AD'| = |FC|, |D'C| = |AE|$$

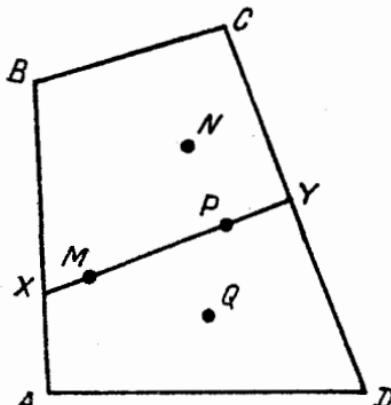
در این صورت، مثلث‌های  $AED'$  و  $FCD'$  برابرند و، بنابراین،  $|ED'| = |D'F|$ . از اینجا نتیجه می‌شود  $D = D'$ . سپس، معلوم می‌شود، اگر مجموع دو زاویه  $\widehat{ADE} = \widehat{CFD}$  و  $\widehat{CDE} = \widehat{FAD}$  را از  $180^\circ$  درجه کم کنیم، زاویه  $FDE$  به دست می‌آید و، بنابراین، برابر است با زاویه  $FCD$ .

۴۴.۹۳. راهنمائی. به باقی‌مانده عددها، در تقسیم بر ۳ توجه کنید.

۴۵.۹۳. راهنمائی. ثابت کنید، اگر چنین تقسیمی ممکن باشد، آن وقت باید تعداد زاویه‌های  $10$  درجه، از یک سوم تعداد کل زاویه‌ها بیشتر باشد.

۴۶.۹۳. پاسخ.  $50$  مهره.

۴۹.۹۳. این چهار نقطه درونی، ممکن است یک چهارضلعی کوثر تشکیل دهند و یا یک مثلث و نقطه‌ای در درون آن. در اینجا، تنها به حالت



شکل ۶۹

اول می پردازیم (شکل ۶۹).

برای نقطه  $Z$  واقع بر محیط چهارضلعی اصلی،  $S(Z)$  را به معنای مجموع فاصله‌های از  $Z$  تا راس‌های چهارضلعی، و  $T(Z)$  را به معنای مجموع فاصله‌های از  $Z$  تا چهار نقطه درونی می‌گیریم. نقطه‌های درونی را هم  $M$ ،  $N$ ،  $P$  و  $Q$  می‌نامیم که در درون چهارضلعی کوثر  $ABCD$  قرار دارند و چهارضلعی کوثر  $MNPQ$  را تشکیل می‌دهند.

خط راست  $MP$  را رسم می‌کنیم تا ضلع‌های چهارضلعی  $ABCD$  را در نقطه‌های  $X$  و  $Y$  قطع کند. یکی از دو نقطه  $X$  یا  $Y$ ، پاسخ مساله است. در واقع

$$S(X) + S(Y) = |XA| + |XB| + |XC| + |XD| + \\ + |YA| + |YB| + |YC| + |YD|;$$

$$T(X) + T(Y) = |XM| + |XN| + |XP| + |XQ| + \\ + |YM| + |YN| + |YP| + |YQ| = \\ = |XN| + |YN| + 2|XY| + |XQ| + |YQ|$$

ولی داریم:  $|XC| + |YB| > |BC| + |XY|$ ، بنابراین

$$|XB| + |XC| + |YB| + |YC| > (|XB| + |BC| + |CY|) + \\ + |XY| > (|XN| + |NY|) + |XY|$$

به همین ترتیب

$$|XA| + |XD| + |YA| + |YD| > (|XA| + |AD| + |YD|) + \\ + |XY| > (|XQ| + |QY|) + |XY|$$

از مجموع این دو نابرابری، به دست می‌آید.

$$S(X) + S(Y) > T(X) + T(Y)$$

یعنی، برای یکی از دو نقطه  $X$  و  $Y$ ، نابرابری لازم درست است.  
۵۱.۹۳ پاسخ. نه، نمی‌توان. برای اثبات، کافی است، تنها به این موضوع پردازیم که، هر عدد در سطرهای، از هر عدد در ستون‌ها، بزرگتر باشد.

۵۲.۹۳ ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{2}(|OA| + |OC|) \geq |OB| + |OD|$$

اگر دو طرف را مجنور کنیم، به دست می‌آید:

$$2(|OA|^2 + |OC|^2 + 2|OA|\cdot|OC|) \geq |OB|^2 + |OD|^2 + 2|OB|\cdot|OD|$$

که با توجه به برابری معلوم

$$|OA|^2 + |OC|^2 = |OB|^2 + |OD|^2$$

به این صورت قابل تبدیل است:

$$|OB|^2 + |OD|^2 + 4|OA| \cdot |DC| \geq 2|OB| \cdot |OD|$$

که درستی آن روشن است، زیرا مجموع مجذورهای دو عدد، کمتر از دو برابر حاصل ضرب آنها نیست. اگر  $O$  را روی  $A$  بگیریم، کمترین مقدار مورد نظر، یعنی  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  به دست می‌آید.

$$\text{.} f(x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{239}} \quad 53.93 \text{. پاسخ.}$$

۵۴.۹۳. فرض می‌کنیم، با هر حرکت آغاز کننده بازی، مثلاً گذاشتن مهره در نقطه  $A$ ، دومی پاسخ مناسبی، مثل گذاشتن مهره در نقطه  $B$  داشته باشد. حالتی را در نظر می‌گیریم که، حرکت اول بازی کن اول، در نقطه  $B$  باشد. اگر پاسخ دومی، توجه به نقطه  $C$ ، که با  $A$  فرق می‌کند، باشد، آن وقت بازی

$$(1)A - (2)B - 2(C)$$

منجر به بُرد اولی می‌شود؛ یعنی دومی باید به حرکت  $B(1)$ ، پاسخ  $A(2)$  را بدهد تا اولی برنده نشود. ولی این، به معنای آن است که، همه نقطه‌ها، به زوج‌های  $(A, B)$  تقسیم می‌شوند که، با فرد بودن عدد ۱۹۹۳، سازگار نیست.

۵۵.۹۳. درستی نابرابری

$$\frac{2}{1+xy} \geq \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

برای عددهای مثبت  $x$  و  $y$ ، روشن است (کافی است، کسرها را به یک

مخرج تبدیل کنیم). بنابراین، کافی است نابرابری‌های از نوع

$$\frac{2}{1+a_i a_{i+1}} \geq \frac{1}{1+a_i^*} + \frac{1}{1+a_{i+1}^*}$$

را با هم جمع کنیم.

۵۶.۹۳.  $O$  را مرکز  $n$  ضلعی و  $a_i$  را عددی می‌گیریم که در راس  $i$ ام

$n$  ضلعی وجود دارد. فرض می‌کنیم:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{OA}_i$$

به سادگی دیده می‌شود که، به ازای هر عملی که در صورت مساله از آن یاد شده است، بردار  $\vec{S}$  تغییر نمی‌کند. در ابتدا  $\vec{S} = \vec{OA}_1$ ؛ و اگر همه عددهای راس‌ها با هم برابر باشند، آن وقت  $\vec{S} = \vec{OA}_1$ . چون  $\vec{OA}_1 \neq \vec{S}$ ، پس پاسخ به پرسش مساله، منفی است.

۵۷.۹۳. از حساب همنهشتی‌ها، نسبت به مدول  $1 + 2p$  استفاده می‌کنیم. تعداد گلوله‌های ظرف اول را  $x$  و تعداد گلوله‌های ظرف دوم را  $y$  فرض می‌کنیم. در این صورت، در هر ثانیه، زوج  $(x, y)$  به زوج  $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  تبدیل می‌شود (فراموش نکنید که، تنها به باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر  $1 + 2p$  توجه داریم؛ روشن است که  $-x \equiv y \pmod{1 + 2p}$ ). طبیعی می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$2^m \equiv 1 \pmod{1 + 2p}$$

در این صورت، باقی‌مانده‌های  $1, 2, \dots, 2p$ ، در گروه  $m$  باقی‌مانده به صورت

$$\left\{ x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots, \frac{x}{2^{m-1}} \right\}, \frac{x}{2^m} \equiv x$$

پراکنده‌اند، یعنی  $2p$  بخش‌پذیر است:

$$m \in \{1, 2, \dots, 2p\}$$

حالتهای ۱ و  $m = 2$  روش‌است. اگر  $m = 2p$ ، آن وقت عددهای  $x$  و  $k$  در یک گروه قرار می‌گیرند، یعنی بعد از چند ثانیه، ظرف اول شامل درست  $k$  گلوله می‌شود.

اگر  $m = p$ ، آن وقت عدد  $2^r \equiv -1 \pmod{2p+1}$  در گروهی قرار می‌گیرد که با گروه شامل عدد ۱ فرق دارد. در واقع، اگر برای هر عدد طبیعی  $r$  داشته باشیم:

$$2^r \equiv -1 \pmod{2p+1}$$

آن وقت  $(1 + 2^r)^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$  و  $2^r \equiv 1 \pmod{2p+1}$  بخش‌پذیر می‌شود، یعنی  $r$  بر  $p$  بخش‌پذیر است. ولی در این صورت

$$2^r \equiv 2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$$

که یک تناقض است! از اینجا نتیجه می‌شود که، باقی‌مانده‌های  $k$  و  $(-k)$  در گروه‌های مختلف‌اند (تها دو گروه داریم) و، بنابراین،  $x$  با یکی از آنها، در یک گروه قرار می‌گیرد، چیزی که لازم داشتیم.

$$\text{۵۹.۹۳} . f(x) = \left( \frac{1}{45} + \sqrt{x} \right)^2$$

۶۰.۹۳. راهنمایی. انتقال موازی را در نظر بگیرید که نقطه  $F$  را به نقطه  $E$  می‌برد که، در این صورت، نقطه  $C$  به نقطه  $C'$  منتقل می‌شود.  
۶۲.۹۳. اثبات را می‌توان با استقراری روی  $n$  داد. برای  $2^n = n$  نابرابری

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} \leq \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}$$

$$\begin{aligned} & [a_1 b_1 (a_2 + b_2) + a_2 b_2 (a_1 + b_1)] (a_1 + a_2 + b_1 + b_2) \leq \\ & \leq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

که بعد از ساده کردن، به نابرابری روش

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$$

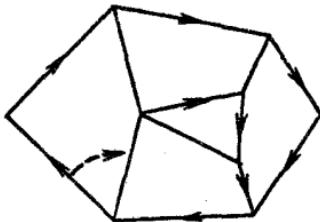
منجر می‌شود. گذر استقرانی، بسیار ساده است.

۶۳.۹۳. راهنمایی. به جای شرط وجود مستطیل‌های سه گانه، می‌توان دو شرط زیر را، که برقراری هردوی آن‌ها با هم، با شرط مساله هم ارز است، در نظر گرفت: اول، باید مجموع بردارهای  $\vec{BC} + \vec{DE} + \vec{FA}$  برابر بردار صفر باشد؛ دوم، اگر زاویه‌های شش ضلعی را در راس‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$ ،  $F$ ، به ترتیب  $\alpha_A$ ،  $\alpha_B$ ،  $\alpha_C$ ،  $\alpha_D$ ،  $\alpha_E$ ،  $\alpha_F$  بگیریم، آن وقت

$$\cos \alpha_A \cdot \cos \alpha_C \cdot \cos \alpha_E = \cos \alpha_B \cdot \cos \alpha_D \cdot \cos \alpha_F$$

اکنون، تنها باید به این نکته توجه کنیم که، این شرط‌ها «متقارن‌اند»، یعنی با عبور از یکی از ضلع‌های سه‌گانه، به ضلع‌های سه‌گانه دیگر شش ضلعی، تغییر نمی‌کنند.

۶۴.۹۳. مرکز وجه نام را  $A_i$  می‌نامیم (که می‌تواند عددهای از ۱ تا  $n$  را اختیار کند) و، مرکزهای وجههای مجاور را، با پاره خط‌های راست، به هم وصل می‌کنیم. گرافی را که به دست می‌آید،  $G$  می‌نامیم. لحظه زمانی دلخواه  $t$  را ثابت می‌کنیم و بعضی از یال‌های گراف  $G$  را، با پیکان‌هایی، به این ترتیب، علامت می‌گذاریم: اگر در لحظه مفروض، مگس نام روی یال مشترک وجههای نام و زام قرار دارد، آن وقت روی پاره خط راست  $A_i A_j$



شکل ۷۰

پیکانی در جهت از  $A_i$  به  $A_j$  می‌گذاریم. اکنون، از هر راس گراف  $G$  درست یک پیکان خارج می‌شود. بنابراین، برخی از این بردارها، یک دور تشکیل می‌دهند که رویه چند وجهی را به دو بخش تقسیم می‌کند (از این نوع دورها، ممکن است در گراف  $G$ ، چند تا باشد). سطح چنین بخشی را؛ با تعداد راس‌هایی از گراف  $G$ ، که در درون یا روی مرکز دور قرار دارند، اندازه می‌گیریم. چون این مقدار، بی‌تردد، تنها می‌تواند مقدار محدودی باشد، بنابراین، لحظه زمانی  $t$  وجود دارد که، سطح چنین بخشی در درون دوری مثل  $Z$ ، به حداقل مقدار می‌رسید. دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. یال‌ها در دور  $Z$ ، تکراری نیستند. در این صورت، باز هم به دو حالت توجه می‌کنیم: (الف) ضمن حرکت روی دور، بخش حداقل را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماییم؛ (ب) حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. در حالت «الف»، نخستین لحظه زمانی بعد از  $t$  را پیدا می‌کنیم که، در آن، یکی از پیکان‌های دور (مثلاً با مبدأ در راس  $A$ )، به یال مجاور «می‌پردازد» (شکل ۷۰ را بینید). به وسیله پیکان، از نقطه  $A$  می‌رویم. به سادگی دیده می‌شود که، دیر یا زود، به راسی که در آنجا بودیم، بر می‌گردیم و دوری که تشکیل می‌شود، بخشی را که دارای کمترین سطح است، محدود می‌کند که ممکن نیست. در حالت «ب»، باید از نظر زمانی به عقب برگشت و آخرین لحظه قبل از  $t$  را پیدا کرد که، در آن، «پرش» پیکان انجام گرفته است؛ دنباله بحث، شبیه قبل است.

حالت ۲. در ڈور، تکرار یال‌ها وجود دارد. ولی در این صورت، روش است که یالی مثل  $A_1; A_2$ ، دو بار در جهت‌های مختلف پیش می‌رود، یعنی با دو پیکان علامت گذاری شده است؛ و این، به معنای آن است که ناممین و زامین مگس، یا روی همین یال به هم می‌رسند و یا روی این یال به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند که، به ناچار، بعد از مدتی به هم می‌رسند.

۶۵.۹۳. خانه‌های جدول را، شبیه صفحه شطرنج، به رنگ سیاه و سفید درمی‌آوریم و، فرض می‌کنیم، گوشه‌های جدول، به رنگ سیاه باشند. در این صورت، می‌توان رنگ خانه‌های  $A$  و  $B$  را هم سیاه به حساب آورد، زیرا اگر آن‌ها سفید باشند، آن وقت تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی، در هر حالت، برابر صفر می‌شود.

یکی از روش‌های پوشاندن جدول خودمان  $T$  را در نظر می‌گیریم (بدون این که خانه  $A$  پوشانده شده باشد) و آن قطعه  $2 \times 1$  را در نظر می‌گیریم که روی خانه  $B = B_1$  (و خانه دیگر  $B_2$ ) قرار گرفته است. این قطعه را به خانه‌ای در جهت از  $B_1$  به طرف  $B_2$  حرکت می‌دهیم. خانه سوم  $B_2$ ؛ که در همین جهت است، به وسیله قطعه دیگری، که خانه‌های  $B_3$  و  $B_4$  را پوشانده است، اشغال شده است؛ آن را در جهت از طرف  $B_3$  به طرف  $B_4$  حرکت می‌دهیم و غیره. زنجیره‌ای از قطعه‌ها به دست می‌آید که یا به صورت یک ڈور به پایان می‌رسد و یا به خانه  $B_1$  تکیه می‌دهد. (تحقیق کنید، همیشه می‌توان قطعه  $2 \times 1$  را در این جهت حرکت داد؛ این، از آن‌جا نتیجه می‌شود که خانه  $B_{2k+1}$  همیشه یک خانه سیاه است و، در ضمن، شماره ستون آن و شماره سطر آن، به ترتیب، از شماره ستون و شماره سطر  $B_1$ ، به تعدادی زوج اختلاف دارد). از طرف دیگر، تشکیل ڈور ممکن نیست، زیرا در این حالت، در درون ڈور، تعداد خانه‌ها باید فرد باشد (خواننده، خود این حکم را ثابت کند). به این ترتیب، این زنجیره، به خانه  $A$  تکیه می‌دهد. در این صورت، می‌توان، از پوشش  $T$  بدون  $A$ ، به پوشش  $T$  بدون  $B$  و، این

زنجیره را به قطعه‌هایی با روش دیگر تبدیل کرد که  $A$  را پوشانده باشد، ولی  $B$  در بیرون پوشش باشد. به این ترتیب، هر روش پوشش بدون  $A$ ، با هر روش پوشش بدون  $B$ ، متناظر است.



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

[@riazisara](https://telegram.me/riazisara)