



RIAZISARA

www.riazisara.ir

سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بنام خدا
معادلات دیفرانسیل و کاربردها
جلد اول

Differential Equations and Applications

تألیف

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز
(سال های ۱۳۴۲ - ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری
(سال های ۱۹۹۶ - ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

این دفتر به هموطن و دوست نا دیده و با محبت
آقای مرتضی اکبری کار شناس رشته برق تقدیم
می شود. ایشان مشوق من در تهیه این دفتر بوده
اند. همچنین با طرح سوالات متعدد در مورد
مسائل مختلف ریاضی، در بالا بردن بضاعت
مزجات من کمک شایان کرده اند. امید است در
کلیه مراحل زندگی موفق باشند.

پیش نیاز: مهارت کافی در جبر، مثلثات و سه جلد حسابان.

فصل اول

مفاهیم اصلی

Basic Concepts

بخش اول

تعاریف

Definitions

بخش ۱.۱: تعاریف

اولین تعریفی که باید به آن بپردازیم، تعریف معادله دیفرانسیل **Differential Equation** است. یک معادله دیفرانسیل، معادله ای است که شامل یک یا چند مشتق است، مشتق های ساده و یا مشتق های پاره ای.

یک معادله دیفرانسیل خیلی معروف وجود دارد که احتمالا همه می شناسند، و آن قانون دوم حرکت نیوتن است. اگر یک جسم به جرم m با شتاب a در حال حرکت است و بر آن نیروی F وارد می شود، پس قانون دوم نیوتن به ما می گوید

$$F = ma \quad (1)$$

برای این که ببینید این فرمول در حقیقت یک معادله دیفرانسیلی است، لازم است آنرا باز نویسی کنیم. ابتدا به خاطر بیاورید که شتاب را می توان به یکی از دو صورت های زیر باز نویسی کرد.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{یا} \quad a = \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2)$$

در فرمول شماره (۲) حرف v حرف اول **Velocity** است به معنی تندى. و حرف u برای جا بجایی. در کتب مختلف حروف دیگر ممکن است برای جا بجایی بکار برند، مثلا x توضیحات

در فرمول (۲) اگر مکان شی یک تابع زمان یعنی $u(t)$ باشد، پس تندى مشتق مرتبه اول این تابع است یعنی

$$v = \frac{du}{dt}$$

وشتاب مشتق مرتبه دوم آن است یعنی

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

تندی Velocity و سرعت Speed با هم اشتباه نشود.

سرعت یک کمیت عددی است .

تندی یک کمیت برداری است .

اگر سرعت را s و مسافت را d و زمان را t بنامیم. پس

$$s = \frac{d}{t}$$

یعنی سرعت عبارت است از مسافت طی شده در واحد زمان. وقتی می گوییم سرعت ماشین ۱۰۰ کیلو

متر در ساعت است ، یعنی در یک ساعت بدون توقف و تغییر ، می توانیم در یک ساعت ۱۰۰ کیلو

متر طی کنیم.

اما اگر تندی را $\bar{v}$ بنامیم ، پس

$$\bar{v} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

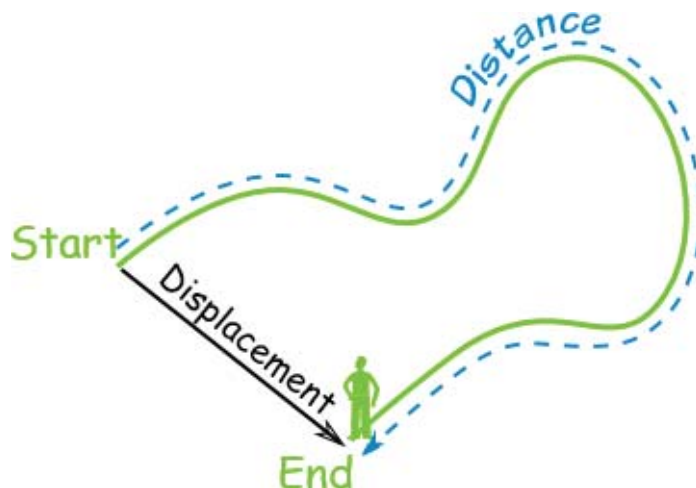
یعنی تندی عبارت است از جا بجایی Δu طی تغییر زمان Δt

ما معمولا در مکالمات روز مره از کلمه سرعت Speed استفاده می کنیم.

اما ، در فیزیک از کلمه تندی Velocity استفاده می کنیم.

به تصویر زیر نگاه کنید. مسافتی که این مرد طی کرده با نقطه چین و رنگ آبی نشان داده شده است.

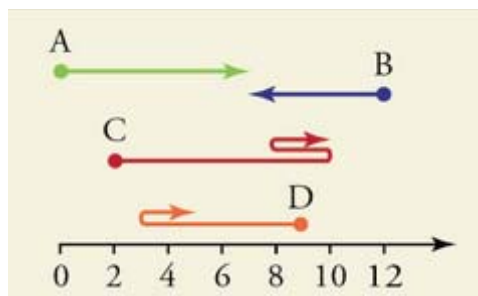
اما جا بجایی با بردار و رنگ سیاه نشان داده شده است.



ملاحظه می کنید که مسافت طی شده همیشه مساوی جا بجایی نیست ، ممکن است این دو مساوی باشند و

ممکن است مسافت بیشتر از جا بجایی باشد.

به تصویر زیر نگاه کنید.



مکان اولیه شی A صفر متر است. و مکان ثانوی یا پایانی ۷ متر است. پس جابجایی شی A مطابق زیر بدست می آید. اینجا جابجایی را با حرف x نشان می دهیم.

$$\Delta x_A = 7m - 0m = +7m$$

مکان اولیه شی B دوازده متر است و مکان پایانی ۷ متر است. پس جابجایی شی B مطابق زیر بدست می آید.

$$\Delta x_B = 7m - 12m = -5m$$

مکان اولیه شی C دو متر است و مکان پایانی ۱۰ متر است. پس جابجایی شی C مطابق زیر است.

$$\Delta x_C = 10m - 2m = 8m$$

مکان اولیه شی D نه متر است و مکان پایانی ۵ متر است، پس جابجایی شی D مطابق زیر است.

$$\Delta x_D = 5m - 9m = -4m$$

مثال دیگری می آوریم.

فرض کنید شما یک متر به طرف جلو بروید و سپس یک متر به عقب برگردید. فرض کنید در مدت ۳۰ دقیقه، ۵۰ مرتبه به جلو و ۵۰ مرتبه به عقب برگردید. پس در مدت ۳۰ دقیقه مسافتی که طی کرده اید ۱۰۰ متر است. یعنی $Distance = 100m$ است. لذا سرعت شما ۱۰۰ متر در ۳۰ دقیقه است. یعنی

$$سرعت = \frac{100 \text{ متر}}{30 \text{ دقیقه}}$$

اما جابجایی شما در این ۳۰ دقیقه ۰ متر است. لذا تندی شما هم صفر است. یعنی

$$Velocity = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{0}{30} = 0$$

امید است تفاوت ها را متوجه شده باشید.

پایان توضیحات

لذا، بعد از این گفتگو ها، قانون دوم نیوین را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل بر حسب تندی یعنی v یا بر حسب جابجایی u شی به صورت زیر نوشت.

$$m \frac{dv}{dt} = F(t, v) \quad (3)$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) \quad (4)$$

پس فرمول های (۳) و (۴) اولین معادله های دیفرانسیل ما هستند. در فصل های آینده ، هر دو شکل را خواهیم دید. در ذیل چند مثال دیگر معادله های دیفرانسیل ملاحظه می کنید.

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (۵)$$

$$\sin(y) \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 - y) \frac{dy}{dx} + y^2 e^{-5y} \quad (۶)$$

$$y^{(4)} + 1 \circ y''' - 4y' + 2y = \cos(t) \quad (۷)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (۸)$$

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (۹)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} = 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۱۰)$$

متغیر مستقل و متغیر وابسته Independent Variable and Dependent Variable همان طور که در جبر متغیر مستقل و متغیر وابسته داشتیم ، در معادلات دیفرانسیل هم همان متغیر ها با همان تعریف ها داریم. مثلاً در جبر در معادله $y = x^2 + 5$ متغیر مستقل x متغیر وابسته y و عدد ۵ عدد ثابت است. در معادله دیفرانسیل زیر

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

متغیر مستقل t است و متغیر وابسته y است. a و k ضریب Coefficient هستند. در معادله دیفرانسیل زیر

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$$

متغیر های مستقل x و y هستند و متغیر وابسته u است. ۲ هم ضریب است.

مرتبه یا درجه Order

درجه یا مرتبه یک معادله دیفرانسیل عبارت است از بالا ترین درجه یا مرتبه مشتق حاضر در معادله دیفرانسیل. در معادله بالا ، شماره (۳) معادله دیفرانسیل درجه اول است. (۴)، (۵)، (۶)، (۸)، (۹) درجه دوم هستند. شماره (۱۰) درجه سوم و شماره (۷) درجه چهارم است. توجه داشته باشید که درجه یک معادله دیفرانسیل بستگی به این ندارد که معادله دیفرانسیل ساده داریم یا معادله دیفرانسیل جزئی. در این دفتر ، ما به معادله های دیفرانسیلی درجه اول و دوم می پردازیم. زیرا همان طور که خواهید دید ، بیشتر روش های معادله های درجه دوم ، می توانند به اسانی برای حل معادله های درجات بالا استفاده کرد.

معادله های دیفرانسیلی ساده و پاره ای Ordinary and Partial Differential Equations

یک معادله دیفرانسیل ، معادله دیفرانسیلی ساده می نامند ، اگر مشتق های ساده در آن باشد. یک معادله دیفرانسیل ، معادله دیفرانسیلی پاره ای می نامند ، اگر مشتق های پاره ای در آن باشد.

معادله های شماره های (۳) تا (۷) ساده هستند. و معادله های شماره های (۸) تا (۱۰) پاره ای هستند.

مخفف معادله دیفرانسیل ساده ode است.

مخفف معادله دیفرانسیل پاره ای pde است.

بیشترین قسمت این دفتر ، به معادلات دیفرانسیل ساده اختصاص داده شده است. در فصل آخر خلاصه ای خواهیم داشت در مورد معادلات دیفرانسیل پاره ای.

معادلات دیفرانسیل خطی Linear Differential Equations

یک معادله دیفرانسیل خطی ، معادله دیفرانسیلی است که بتوان آنرا به صورت زیر نوشت.

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \quad (11)$$

لازم است که توجه داشته باشید ، در معادلات دیفرانسیل خطی ، حاصل ضرب تابع و مشتق های آن وجود ندارد. همچنین تابع و مشتق های آن فقط دارای توان یک هستند. نه تابع و نه مشتق های آن داخل تابع

دیگری نیست. مانند $\sqrt{y'}$ یا e^y

ضریب های $a_0(t), \dots, a_n(t)$ و $g(t)$ می توانند تابع های صفر و یا غیر صفر ، تابع های ثابت و یا غیر ثابت ، تابع های خطی و یا غیر خطی باشند. فقط تابع $y(t)$ و مشتق های آن می توانند برای تشخیص خطی بودن معادله دیفرانسیل بکار برده شوند.

اگر یک معادله دیفرانسیل را نتوان به صورت شماره (۱۱) نوشت ، پس آنرا معادله دیفرانسیل غیر خطی می نامیم.

شماره های (۵) و (۷) معادله های دیفرانسیل خطی هستند و شماره (۶) غیر خطی. شماره های (۳) و (۴) را نمی توان مشخص کرد. چون نمی دانیم تابع F چه شکلی است. می توانند ، خطی و یا غیر خطی باشند ، بستگی به F دارند.

جواب یا حل Solution

جواب یک معادله دیفرانسیل در بازه $a < t < \beta$ عبارت است از یک تابع $y(t)$ بطوری که معادله دیفرانسیل مورد نظر را در بازه $\alpha < t < \beta$ برقرار کند.

مثال ۱

نشان دهید که $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ یک جواب $4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0$ است برای $x > 0$

حل

برای این کار مشتق مرتبه اول و دوم لازم داریم.

$$y'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \quad y''(x) = \frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$$

مشتق های بدست آماده بالا را در معادله دیفرانسیل داده شده می گذاریم.

$$4x^2 \left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}} \right) + 12x \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \right) + 3 \left(x^{-\frac{3}{2}} \right) = 0$$

$$15x^{-\frac{3}{2}} - 18x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$0 = 0$$

پس $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار می کند و لذا یک جواب است. اما چرا $x > 0$ را اضافه کردیم؟ زیرا

$$y(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ملاحظه می کنید که در مخرج $\sqrt{x^3}$ داریم، پس x باید نه می تواند منفی باشد و نه صفر.

شرط یا شرایط اولیه Initial Condition(s)

شرط یا شرایط اولیه، یک شرط یا مجموعه ای از شرایط در مورد جواب هستند که به ما اجازه می دهند که تصمیم بگیریم بدنبال کدام جواب هستیم. مانند

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{و/یا} \quad y^{(k)}(t_0) = y_k$$

پس، به عبارت دیگر، شرایط اولیه عبارتند از مقادیر جواب و یا مشتق ها در نقاط معین. همان طور که خواهیم دید، جواب های معادلات دیفرانسیل، منحصر به فرد هستند. همان طور که در مثال بعد خواهیم دید، تعداد شرایط اولیه، بستگی به درجه یا مرتبه معادله دیفرانسیل دارد. در مثال ۲ چون مرتبه معادله دیفرانسیل دو است، پس دو پیش شرط داریم.

مثال ۲

نشان دهید $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$

یک جواب $y'(4) = -\frac{3}{64}$ و $y(4) = \frac{1}{8}$ ، $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$

است. ملاحظه می کنید دو شرط داریم. یکی $y(4) = \frac{1}{8}$ و $y'(4) = -\frac{3}{64}$

پاسخ

این معادله را در مثال ۱ حل کردیم. حالا ببینیم آن دو شرط وجود دارند؟

$$y(4) = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{4})^3} = \frac{1}{8}$$

$$y'(4) = -\frac{3}{2} 4^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \frac{1}{(\sqrt{4})^5} = -\frac{3}{64}$$

ملاحظه می کنید هر دو شرط بر قرار هستند. در حقیقت $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ تنها جواب معادله دیفرانسیل داده شده است.

مساله با مقدار اولیه Initial Value Problem

مخفف IVP

یک مساله با مقدار اولیه عبارت است از یک معادله دیفرانسیل همراه با تعداد مناسب شرایط اولیه.

مثال ۳

معادله زیر یک مساله با مقدار اولیه است.

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0 \quad y(4) = \frac{1}{8}, \quad y'(4) = -\frac{3}{64}$$

مثال ۴

در ذیل یک مثال دیگر برای مساله با مقدار اولیه ملاحظه می کنید.

$$2ty' + 4y = 3 \quad y(1) = -4$$

همان طور که قبلا گفته شد ، تعداد شرایط اولیه ، بستگی به درجه معادله دیفرانسیل دارد. در مثال ۳ درجه معادله دیفرانسیل ۲ است ، پس تعداد شرایط اولیه هم ۲ است. در مثال ۴ مرتبه معادله ۱ است ، پس تعداد شرط اولیه هم ۱ است.

بازه اعتبار یا بازه درستی Interval of Validity

بازه اعتبار برای یک مساله با مقدار اولیه

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{یا} \quad y^{(k)}(t_0) = y_k$$

عبارت است از بزرگ ترین بازه ممکن که در آن ، جواب معتبر است و شامل t_0 است. پیدا کردن بازه معتبر مشکل است و فعلا آنرا مسکوت می گذاریم تا بعداً در مثال ها قابل درک باشد.

جواب عمومی یا جواب کلی General Solution

جواب کلی یک معادله دیفرانسیل عبارت است از کلی ترین شکلی که جواب می تواند داشته باشد بطوری که هیچ یک از شرایط اولیه برای آن در نظر گرفته نشده باشد.

مثال ۵

نشان دهید که

$$y(x) = x^2 + C$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر است.

$$y' = 2x$$

حل

معادله دیفرانسیل را با نماد لایپنیز باز نویسی می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

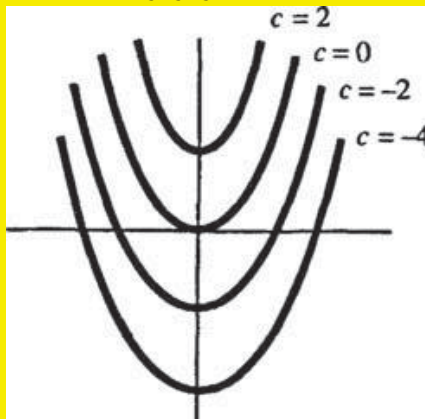
$$dy = 2x dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int dy = \int 2x dx$$

$$y = x^2 + C$$

در معادله بالا C هر عددی می تواند باشد. به تصویر زیر توجه کنید.



جواب واقعی Actual Solution

جواب واقعی یک معادله دیفرانسیل ، جواب ویژه ای است که نه فقط معادله دیفرانسیل را برقرار می کنند ، بلکه شرایط اولیه را هم برقرار می کند.

مثال ۶

جواب واقعی مساله با مقدار اولیه زیر چیست؟

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad , \quad y(0) = 2$$

حل

بر اساس مثال ۵ جواب کلی معادله بالا مطابق زیر است.

$$y(x) = x^2 + C$$

تنها کاری که لازم است انجام دهیم ، این است که مقدار C را مشخص کنیم. برای این کار ، شرایط اولیه را در جواب داده شده در مثال ۵ بکار می بریم.

$$2 = y(0) + C = 2(0) + C \Rightarrow C = 2$$

پس جواب واقعی مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$y(x) = x^2 + 2$$

پاسخ تلویحی و پاسخ صریح Implicit Solution and Explicit Solution

یک پاسخ صریح عبارت است از پاسخی که به صورت $y = y(t)$ باشد. به عبارت دیگر ، y فقط

یک مرتبه و آن هم سمت چپ و با توان یک ظاهر می شود. مانند مثال (۱)

پاسخ تلویحی آنست که صریح نباشد.

مثال (۷) : معادله زیر

$$y^2 = t^2 - 3$$

جواب واقعی تلویحی معادله دیفرانسیل زیر است.

$$y' = \frac{t}{y}, \quad y(2) = -1$$

ملاحظه می کنید که y در سمت چپ است اما به توان ۲. بعداً توضیح بیشتر داده می شود که چگونه این جواب را بدست آوردیم.

مثال (۸)

مطلوب است جواب واقعی صریح معادله دیفرانسیل زیر.

$$y' = \frac{t}{y}, \quad y(2) = -1$$

حل

از مثال (۷) می دانیم که یک جواب ضمنی معادله دیفرانسیل بالا مطابق زیر است.

$$y^2 = t^2 - 3$$

برای پیدا کردن جواب صریح، فقط لازم است آنرا برای $y(t)$ حل کنیم.

$$y(t) = \pm \sqrt{t^2 - 3}$$

اما یک مشکل پیش آمده است. اینجا دو جواب پیدا کرده ایم، در صورتی که فقط یک جواب صحیح است. برای پیدا کردن جواب صحیح، شرایط اولیه را مجدداً بکار می بریم.

$$y(2) = \pm \sqrt{2^2 - 3} = \pm \sqrt{4 - 3} = \pm 1$$

پس $y(t) = -\sqrt{t^2 - 3}$ شرط اول را برقرار می کند.

تمرینات بخش ۱.۱

۱ - نشان دهید $y = e^{-3x} + 2x + 3$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y' + 3y = 6x + 11$ است.

۲ - مرتبه یا درجه معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

a) $y' - 4y = x^2 - 3x + 4$

b) $x^2 y''' - 3xy'' + xy' - 3y = \sin x$

c) $\frac{4}{y} y^{(4)} - \frac{6}{x^2} y'' + \frac{12}{x^4} y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

۳ - جواب واقعی معادله دیفرانسیلی $y' = 2x$ که از نقطه $(2, 7)$ می گذرد را پیدا کنید.

۴ - نشان دهید که تابع $y = 2e^{-2t} + e^t$ جواب مساله با مقدار اولیه زیر است.

$$y' + 2y = 3e^t, \quad y(0) = 3$$

پاسخ تمرینات بخش ۱.۱

۱ - نشان دهید $y = e^{-3x} + 2x + 3$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y' + 3y = 6x + 11$ است. پاسخ

برای این کار ، ابتدا با استفاده از قاعده زنجیره ای y' را محاسبه می کنیم. پس داریم.

$$y' = -3e^{-3x} + 2$$

حالا y و y' را در سمت چپ معادله دیفرانسیل داده شده می گذاریم.

$$\begin{aligned} & \overbrace{(-3e^{-3x} + 2)}^{y'} + \overbrace{3(e^{-3x} + 2x + 3)}^y \\ &= -3e^{-3x} + 2 + 3e^{-3x} + 6x + 9 \\ &= 6x + 11 \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که سمت راست معادله دیفرانسیل داده شده بدست آوردیم.

۲ - مرتبه یا درجه معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

a) $y' - 4y = x^2 - 3x + 4$

b) $x^2 y''' - 3xy'' + xy' - 3y = \sin x$

c) $\frac{4}{y} y^{(4)} - \frac{6}{x^2} y'' + \frac{12}{x^4} y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

پاسخ

a) درجه یک

b) درجه سه

c) درجه چهار

۳ - جواب واقعی معادله دیفرانسیلی $y' = 2x$ که از نقطه $(2, 7)$ می گذرد را پیدا کنید.

پاسخ

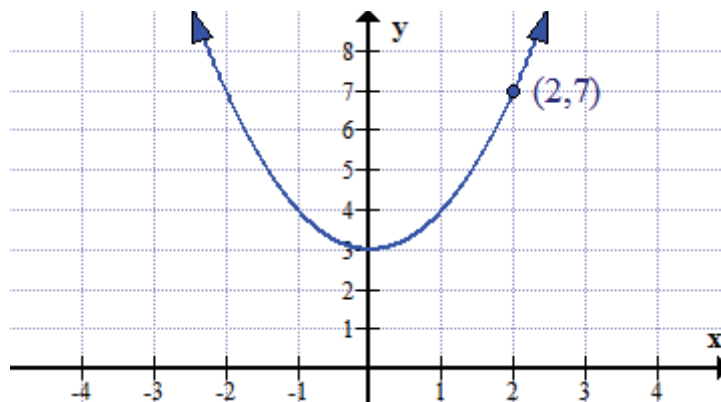
می دانیم که تابع $y = x^2 + C$ جواب کلی معادله بالا است. مثال ۵
برای پیدا کردن مقدار C مختصات نقطه داده شده را در جواب کلی معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$y = x^2 + C$$

$$7 = 2^2 + C$$

$$C = 3$$

پس جواب واقعی که از نقطه داده شده می گذرد $y = x^2 + 3$ است.



۴ - نشان دهید که تابع $y = 2e^{-2t} + e^t$ جواب مساله با مقدار اولیه زیر است.

$$y' + 2y = 3e^t, \quad y(0) = 3$$

پاسخ

برای این که یک تابع، مساله با مقدار اولیه را برقرار کند، باید هم معادله دیفرانسیل را برقرار کند و هم شرط اولیه را. برای این که نشان دهیم y معادله دیفرانسیل را برقرار می کند، ابتدا y' را محاسبه می کنیم.

$$y' = -4e^{-2t} + e^t$$

حالا y و y' را در سمت چپ معادله دیفرانسیل می گذاریم، و سپس ساده می کنیم.

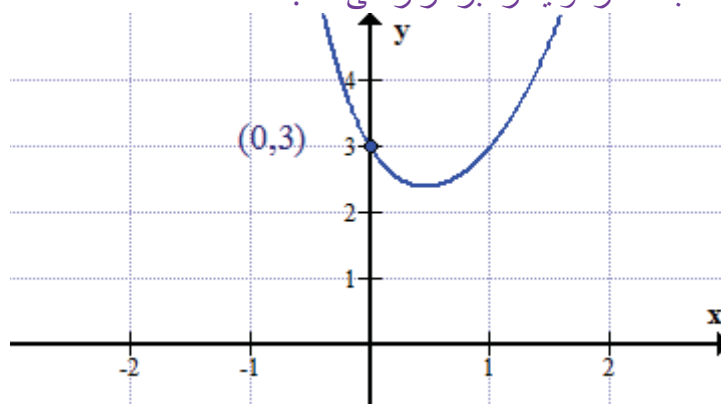
$$\begin{aligned} y' + 2y &= (-4e^{-2t} + e^t) + 2(2e^{-2t} + e^t) \\ &= -4e^{-2t} + e^t + 4e^{-2t} + 2e^t = 3e^t \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که $3e^t$ همان سمت راست معادله دیفرانسیل است. پس $y = 2e^{-2t} + e^t$ جواب معادله دیفرانسیل است.

حالا $y(0)$ را محاسبه می کنیم.

$$y(0) = 2e^{-2(0)} + e^0 = 2 + 1 = 3$$

پس تابع داده شده، مساله با مقدار اولیه را برقرار می کند.



بخش ۱.۲ میدان های راستا یا راستای میدان ها Direction Fields

یا میدان شیب Slope Field

این بخش را به دو دلیل انتخاب کرده ایم.

۱ - فهم میدان ها راستا و این که آنها، در مورد یک معادله دیفرانسیل و جواب آن، به ما چه می گویند، مهم است. میدان های راستا، وسیله خوبی برای توضیح و تشریح جواب های معادلات دیفرانسیل است.

۲ - می توان این بخش را بدون دانستن روش های حل معادله های دیفرانسیل، فهمید.

مراحل توصیف یک پدیده فیزیکی بوسیله یک معادله دیفرانسیل، مدل سازی می گویند.

یکی از ساده ترین پدیده فیزیکی، سقوط آزاد یک شئی است. پس اجازه دهید سقوط یک شئی با جرم m را در نظر بگیریم و یک معادله دیفرانسیل بسازیم، بطوری که پس از حل آن معادله، تندی Velocity شئی را در هر زمانی از t به ما بدهد. فرض می کنیم فقط نیروی جاذبه Gravity و مقاومت هوا Air Resistance روی جسم در حال سقوط اثر می کند. در تصویر زیر نیرو هایی که روی شئی اثر می کنند، نشان داده می شود.



اینجا فرض می کنیم نیرو هایی که به طرف پایین اثر می کنند، مثبت، و نیرو هایی که به طرف بالا اثر می کنند، منفی باشند. همچنین فرض می کنیم شئی در حال حرکت به طرف پایین، تندی مثبت دارد.

حالا، اجازه دهید به نیرو هایی که در تصویر بالا نشان داده شده اند، نظری بیندازیم.

F_G نیروی جاذبه است با فرمول $F_G = mg$ در این فرمول g شتاب به سبب یا به علت جاذبه است. در بعضی از کتب فارسی بجای نیروی جاذبه، نیروی گرانش بکار برده می شود، این کار پسندیده ای است، زیرا از واژه فارسی استفاده شده است. ما هم در این دفتر از هر دو واژه استفاده می کنیم، تا خواننده به هر دو واژه آشنا شود.

همچنین در این دفتر $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ یا $g = 32 \frac{ft}{s^2}$ بکار برده می شود. $\frac{m}{s^2}$ یعنی متر در ثانیه به توان ۲ و $\frac{ft}{s^2}$ یعنی فوت در ثانیه به توان ۲

همچنین در تصویر بالا F_A نیروی مقاومت هوا است و در این مثال فرض می کنیم متناسب است با تندی جرم. پس داریم $F_A = -\gamma v$ اینجا $\gamma > 0$ است. توجه داشته باشید که علامت منفی لازم است. زیرا هم γ و هم v مثبت هستند. و چون این نیرو به طرف بالا اثر می کند، پس باید منفی باشد.

در بخش ۱.۱ در مورد قانون دوم حرکت نیوتن صحبت کردیم.

$$F = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

پس می توان گفت

$$m \frac{dv}{dt} = F(t, v)$$

در فرمول بالا $F(t, v)$ عبارت است از مجموع نیرو های موثر بر شئی که می تواند یک تابع زمان t و تندى شئی یعنی v باشد.

در این مثال ، دو نیرو بر شئی اثر می کنند یکی نیروی جاذبه یعنی $F_G = mg$ که به طرف پایین اثر می کند و مقاومت هوا $F_A = -\delta v$ که به طرف بالا اثر می کند ، پس منفی است. این دو را کنار هم

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

بگذاریم ، خواهیم داشت.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m} \quad (1)$$

فرمول بالا یک معادله دیفرانسیل درجه اول است. اگر این معادله را حل کنیم .تندى شئی در حال سقوط به ما می دهد. در فرمول بالا m جرم شئی و v تندى بر حسب متر در ثانیه است.

برای نگاه کردن به میدان های راستا و یا میدان شیب ، بد نیست چند عدد برای کمیت های معادله دیفرانسیل بدست آوریم. پس فرض می کنیم یک شئی با جرم ۲ کیلو گرم و $\gamma = 0.392$ داشته باشیم. این مقادیر را در فرمول (۱) می گذاریم. پس داریم.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{0.392v}{2} = 9.8 - 0.196v \quad (2)$$

حالا یک نگاه هندسی به این معادله دیفرانسیل بیندازیم. فرض می کنیم در زمان t تصادفاً $v = 30 \frac{m}{s}$

باشد. پس اگر در یک زمانی به نام t به طور اتفاقی $v = 30 \frac{m}{s}$ بشود ، فرمول (۲) می شود.

$$\frac{dv}{dt} = 3.92$$

بخاطر بیاورید که در حسابان دیدیم ، مشتق مثبت ، به این معنی است که تابع مورد بحث ، اینجا تندى ، صعودی است. پس اگر تندى شئی در یک زمانی 30 متر در ثانیه باشد ، باید تندى در آن زمان در حال افزایش باشد.

باز بخاطر بیاورید که مقدار مشتق در یک زمانی از t ، عبارت است از شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن زمان t

پس اگر در یک زمانی از t ، تندى تصادفاً 30 متر در ثانیه باشد ، شیب خط مماس بر نمودار تندى 3.92 است.

می توانیم به همین ترتیب ادامه دهیم و مقادیر مختلفی برای v انتخاب کنیم ، و شیب خط مماس بر تندى در محاسبه کنیم ، اما اجازه دهید منظم تر پیش برویم. بهتر است ابتدا آن مقادیری از تندى انتخاب کنیم که

دارای خط مماس با شیب صفر داشته باشند. یعنی خطوط مماس افقی. این کار آسانی است. تنها کافی است مشتق را مساوی صفر قرار دهیم و معادله را برای v حل کنیم.

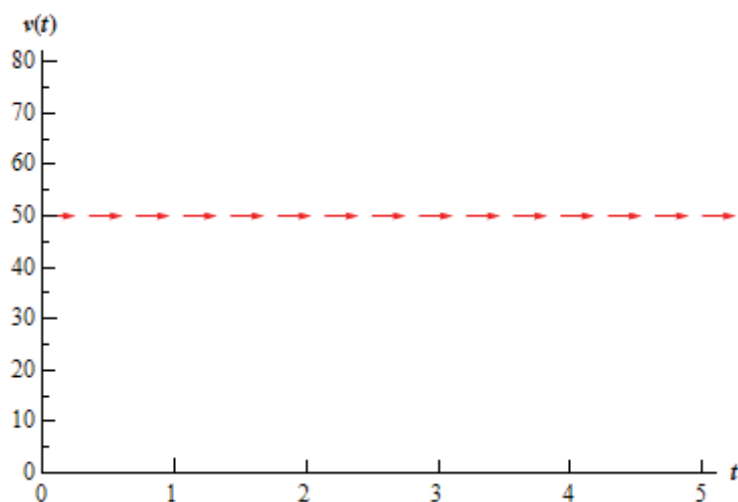
در مورد مثال ما ، فقط یک مقدار برای v داریم که دارای خط مماس افقی است. و آن $v = 50 \frac{m}{s}$ است. زیرا

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v = 0$$

$$0.196v = 9.8$$

$$v = \frac{9.8}{0.196} = 50$$

تصویر زیر ، نمایش حالتی است که $v = 50 \frac{m}{s}$ می باشد.

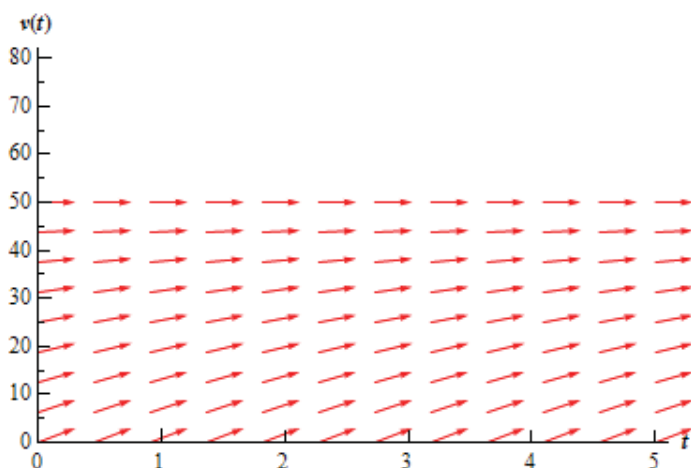


حالا ، چند خط مماس ، یعنی بردارها ، برای مقادیر دیگر v پیدا می کنیم. فعلا تنها شیب دقیقی که برای ما مفید است ، شیب خط افقی است. پس بجای پیدا کردن شیب های دقیق برای بقیه نمودار ، به دنبال شیب های صعودی یا نزولی می رویم. به چه سرعتی شیب صعودی یا نزولی است؟ برای این مثال ما ، کار آسانی است.

ابتدا توجه کنید سمت راست معادله (۲) یک چند جمله ای است و لذا پیوسته است. این یعنی تنها هنگامی می تواند تغییر علامت دهد که اول از صفر عبور کند. پس ، اگر مشتق تغییر علامت دهد ، هنگامی است که $v = 50$ است. و این تنها جایی است که مشتق تغییر علامت می دهد. این یعنی برای $v > 50$ شیب خطوط مماس بر تندى ، دارای یک علامت هستند. به همین طریق برای $v < 50$ شیب ها دارای یک علامت هستند. شیب ها در این دامنه ممکن است مقادیر متفاوت داشته باشند ، اما همگی دارای یک علامت هستند.

با $v < 50$ شروع می کنیم. در بالا دیدیم اگر $v = 30$ باشد ، شیب خط مماس 3.92 است ، یعنی مثبت است. لذا برای تمام مقادیر $v < 50$ شیب های خطوط مماس ، مثبت خواهند بود. همچنین ، با توجه به شماره (۲) هنگامی که v به 50 نزدیک می شود ، و همیشه کمتر از 50 باقی بماند ، شیب

های خطوط مماس به صفر نزدیک می شوند و لذا خطوط مماس بتدریج شیب کمتر دارند. اگر v از 50 دورتر شود ولی کمتر از 50 باقی بماند، شیب خطوط مماس، تند تر می شود. تصویر زیر این حالت را نشان می دهد.

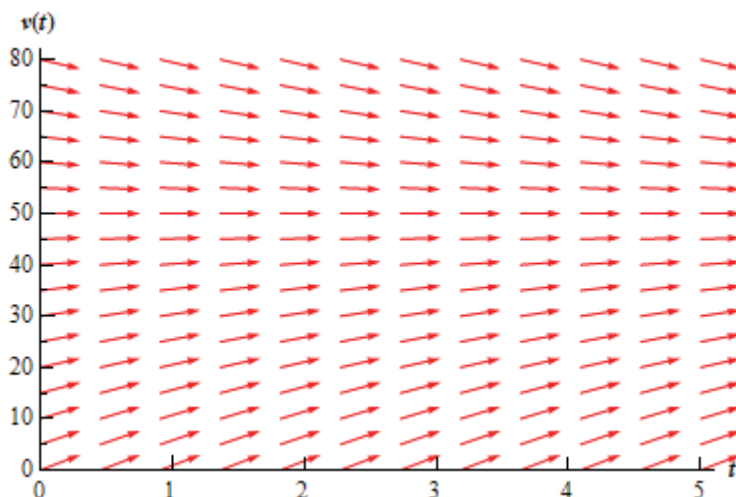


حالا به $v > 50$ نگاه می کنیم. ابتدا باید ببینیم آیا شیب ها مثبت هستند یا منفی. مثلاً برای $v = 60$ امتحان می کنیم و این مقدار را در شماره (۲) می گذاریم.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v$$

$$9.8 - 0.196(60) = 9.8 - 11.76 = -1.96$$

ملاحظه می کنید که شیب خط مماس منفی است. لذا برای تمام مقادیر $v > 50$ شیب های خطوط مماس منفی خواهند بود. اینجا هم هر چه به $v = 50$ نزدیک می شویم، خطوط مماس دارای شیب کمتر و هر چه از $v = 50$ دور تر می شویم، شیب خطوط مماس تند تر می شود. در تصویر زیر تمام حالت های گفته شده بالا را ملاحظه می کنید. به این نمودار، میدان راستا **Direction Field** و یا میدان شیب **Slope Field** می گویند.



پس چرا میدان راستا مهم است؟

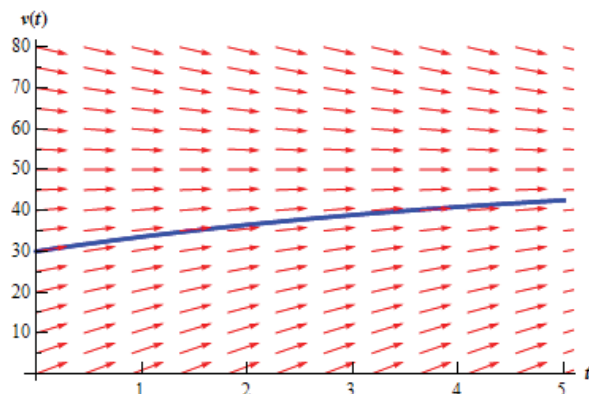
۱ - طرح جواب ها Sketch of Solutions

چون بردار های میدان راستا ، در حقیقت خطوط مماس بر جواب های واقعی معادله های دیفرانسیل هستند ، پس می توانیم آنها را به عنوان راهنمایی برای رسم نمودار های جواب های معادله دیفرانسیل بکار ببریم.

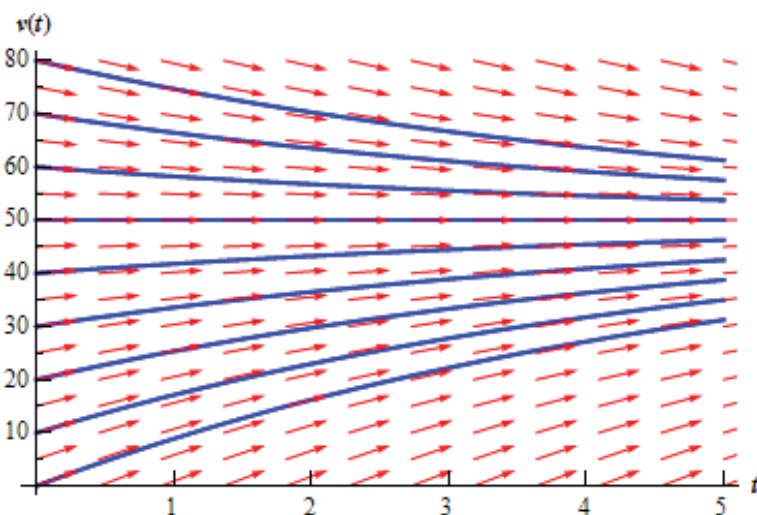
۲ - رفتار دراز مدت Long Term Behavior

در بسیاری از موارد ، ما کمتر علاقه داریم جواب های واقعی معادله های دیفرانسیل کدام هستند ، بلکه مایل هستیم بدانیم رفتار جواب ها چگونه است هنگامی که t افزایش می یابد. میدان راستا ، برای بدست آوردن رفتار دراز مدت جوابها بکار می رود.

بر می گردیم به معادله دیفرانسیل مورد بحث ما. فرض کنید می خواهیم بدانیم آن جوابی که مقدار آن $v(0) = 30$ است ، چگونه است. می توانیم به میدان راستا مراجعه کنیم و از 30 روی محور عمودی شروع کنیم ، در این نقطه می دانیم که جواب در حال افزایش است و در حالی که افزایش می یابد ، شیب جواب کمتر می شود ، زیرا تندی به $v = 50$ نزدیک می شود. پس با رسم یک جواب صعودی شروع می کنیم و هنگامی که به یک بردار بر خورد کردیم ، سعی می کنیم موازی آن ردیف پیش برویم. این تصویر زیر را به ما میدهد.



برای این که ببینیم تمام جوابها چگونه عمل می کنند ، چند جواب بیشتر اضافه می کنیم. با اضافه کردن جواب بیشتر ، تصویر زیر بدست می آوریم.



مجموعه جوابها یی که در تصویر بالا ملاحظه می کنید ، خانواده منحنی های جواب یا خم های انتگرال

نامیده می شوند. خم بروزن هم.

خانواده منحنی های جواب Family of Solution Curves

خم های انتگرال Integral Curves

مثال ۱

میدان راستای معادله دیفرانسیل زیر را رسم کنید. مجموعه خم های انتگرال را رسم کنید. مشخص کنید جوابها چگونه رفتار می کنند هنگامی که $t \rightarrow \infty$ و آیا این رفتار بستگی به مقدار $y(0)$ دارد؟ توضیح دهید.

$$y' = (y^2 - y - 2)(1 - y)^2$$

حل

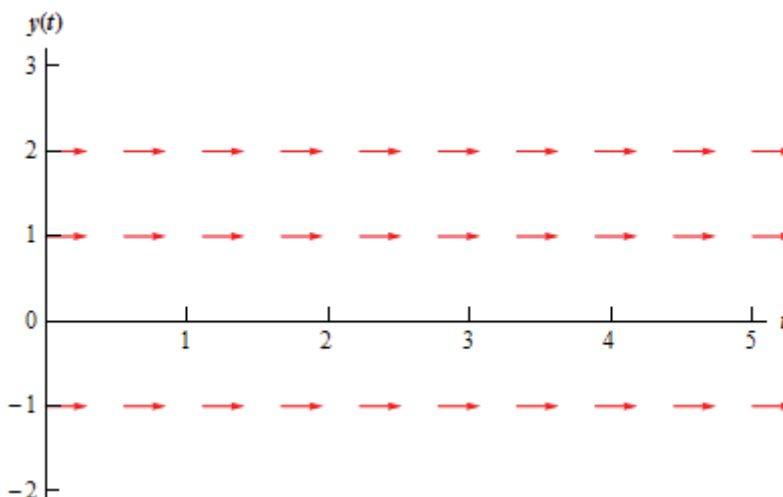
مهم نیست بدانیم این معادله دیفرانسیل چیست و از کجا آمده است. اگر بخواهید بدانید، راستش را بگویم، یک معادله من در آوردی است. خودم ساخته ام. ممکن است هیچ پدیده فیزیکی را بیان نکند. این معادله دیفرانسیل، از مثال شئی در حال سقوط که در بالابحث کردیم، پیچیده تر است. ابتدا مشخص می کنیم این مشتق کجا، صفر است.

$$0 = (y^2 - y - 2)(1 - y)^2$$

$$0 = (y - 2)(y + 1)(1 - y)^2$$

$$y = -1, 1, 2$$

می بینیم که سه مقدار برای y بدست آمد که در آنها مشتق و یا به عبارتی شیب خطوط مماس صفر است. مشتق در $y = -1, 1, 2$ صفر است، پس رسم میدان راستا را با خطوط مماس افقی با این مقادیر، شروع می کنیم.



ملاحظه می کنید که در صفحه مختصات ، چهار ناحیه پیدا شد. یکی بالای $y = 2$ یکی بین $y = 2$ و $y = 1$ یکی بین $y = 1$ و $y = -1$ و در نهایت ناحیه زیر $y = -1$

حالا باید بردار هایی به این چهار ناحیه اضافه کنیم. برای هر یک از این ناحیه ها یک مقدار برای y انتخاب می کنیم و آنرا در سمت راست معادله دیفرانسیل می گذاریم تا ببینیم آیا مشتق در آن ناحیه مثبت است و یا منفی. برای بدست آوردن میدان های راستای دقیق باید چند مقدار در هر ناحیه انتخاب کنیم. تا ببینیم این بردار ها چگونه رفتار می کنند.

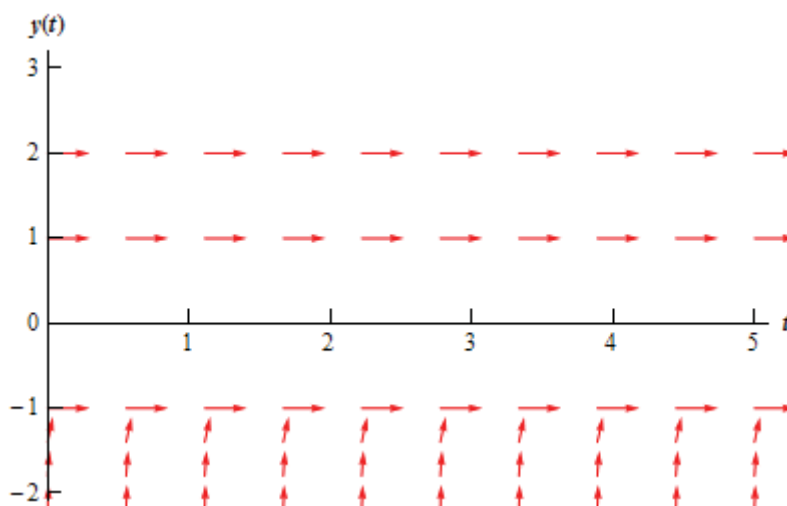
برای $y < -1$

در این ناحیه $y = -2$ را به عنوان نقطه آزمایشی ، انتخاب می کنیم. اینجا $y' = 36$ است. زیرا

$$y' = (y^2 - y - 2)(1 - y)^2$$

$$y' = ((-2)^2 - (-2) - 2)(1 - (-2))^2 = 36$$

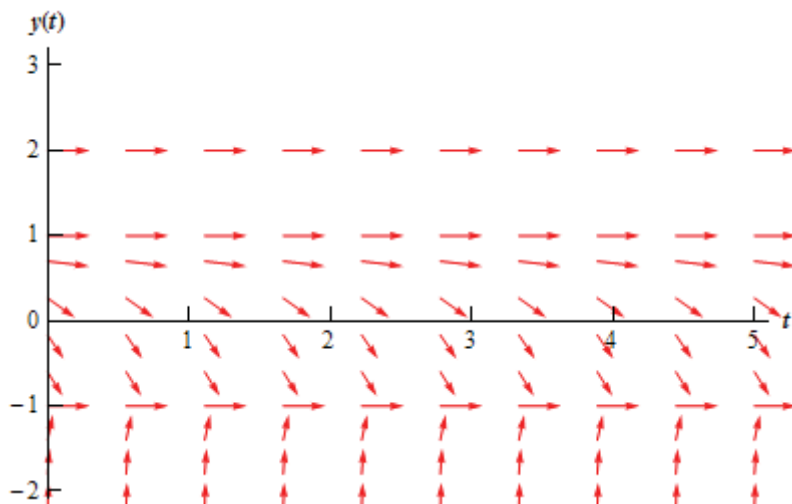
پس ، خطوط مماس در این ناحیه مثبت و با شیب خیلی تند هستند. همچنین هنگامی که $y \rightarrow -1$ این شیب ها کمتر می شوند ، اما مثبت می مانند. تصویر زیر نمایش میدان های راستا ، همراه با بردار های این ناحیه ، است.



برای $-1 < y < 1$

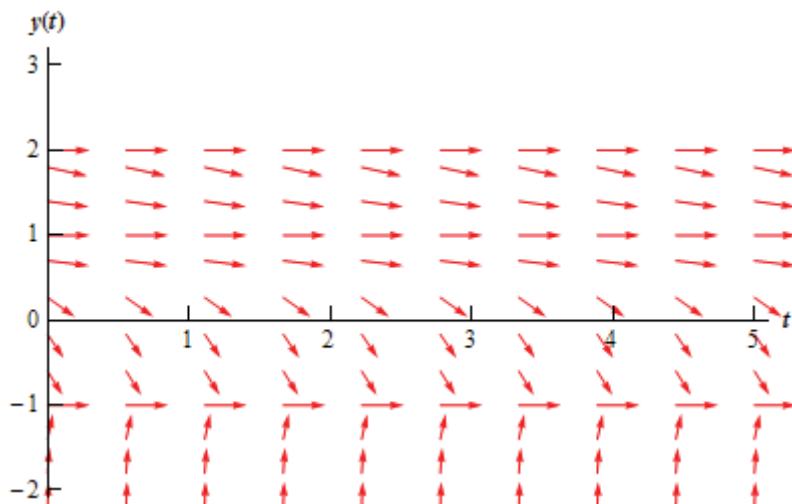
در این ناحیه می توانیم $y = 0$ به عنوان نقطه امتحان بکار ببریم. در این نقطه $y' = -2$ است. لذا خطوط مماس در این ناحیه شیب های منفی دارند و به نظر می رسد که شیب تند هم ندارد. پس بردار ها در این ناحیه چگونه هستند؟ هنگامی که $y \rightarrow 1$ البته کمتر از یک ، شیب ها باید منفی باشند و به صفر نزدیک شوند. هنگامی که از ۱ دور می شویم و به طرف -1 می رویم ، شیب ها تند تر می شوند و در عین حال منفی می مانند ، اما بالاخره بدون شیب ولی باز هم منفی می مانند هنگامی که $y \rightarrow -1$

زیرا مشتق در این نقطه باید به صفر نزدیک شود. تصویر زیر میدان های راستا است با بردار هایی که در این ناحیه اضافه شده اند.



برای $1 < y < 2$

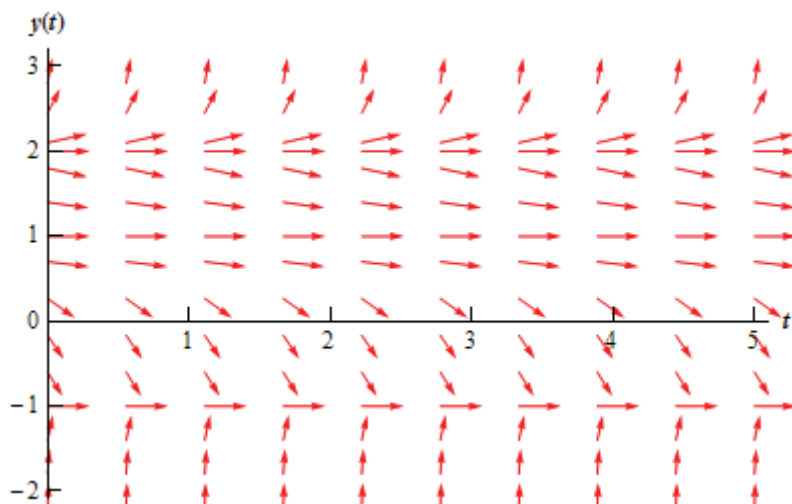
در این ناحیه $y = 1.5$ به عنوان نقطه امتحان بکار می بریم. در این نقطه $y' = -0.3125$ است. خطوط مماس در این ناحیه هم دارای شیب منفی هستند. اما ظاهراً به تندی ناحیه قبل نیستند. بردار ها تقریباً مانند ناحیه قبل رفتار می کنند. نزدیک $y = 1$ و $y = 2$ شیب ها تند نیستند و هنگامی که از یکی به طرف دیگری می رویم، تا حدودی شیب ها تند تر می شوند قبل از این که دوباره بدون شیب بشوند. تصویر زیر میدان های راستا است که این بردار ها به آن اضافه شده اند.



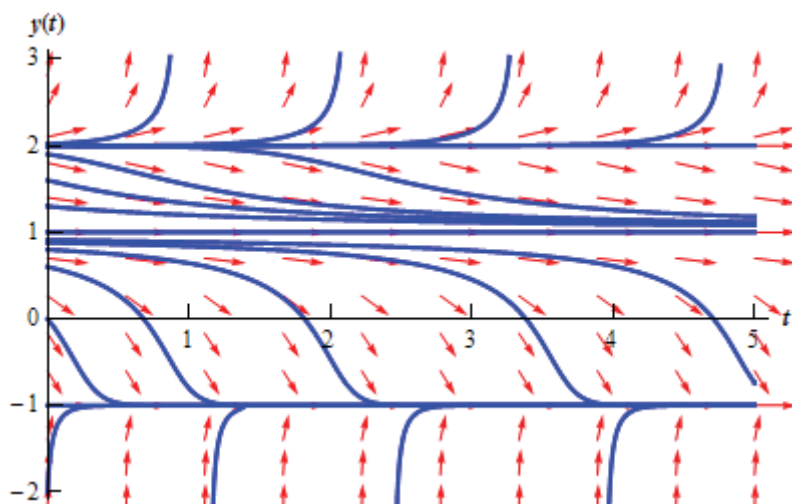
برای $y > 2$

در این ناحیه $y = 3$ به عنوان نقطه آزمایش بکار می بریم. در این نقطه $y' = 16$ است. پس، همانطور در ناحیه اول دیدیم، ابتدا خطوط مماس تقریباً کم شیب هستند و در حالی که از $y = 2$ دور می شویم، شیب تند تر می شود.

میدان هایر استای کامل این معادله دیفرانسیل در ذیل ملاحظه می کنید.



در ذیل هم مجموعه خم های انتگرال را ملاحظه می کنید.



در نهایت ، نگاهی می کنیم به رفتار دراز مدت جوابها. بر خلاف مثال اول ، در این مثال رفتار دراز مدت ، بستگی به مقدار y در $t = 0$ دارد. با امتحان کردن هر کدام از دو تصویر های قبل می توانیم به رفتار جوابها دست پیدا کنیم هنگامی که $t \rightarrow \infty$

مقدار $y(0)$	رفتار هنگامی که $t \rightarrow \infty$
$y(0) < 1$	$y \rightarrow -1$
$1 \leq y(0) < 2$	$y \rightarrow 1$
$y(0) = 2$	$y \rightarrow 2$
$y(0) > 2$	$y \rightarrow \infty$

در هر دو مثال بالا ، طرف راست مشتق ، فقط شامل تابع بود نه متغیر مستقل. هنگامی که طرف راست معادله دیفرانسیل شامل هر دو متغیر باشد ، کار پیچیده تر خواهد بود. **در این مورد نرم افزار های کمپیوتری می توانند کمک کنند.**

مثال ۲

میدان راستای معادله دیفرانسیل زیر را رسم کنید. همچنین مجموعه خم های انتگرال این معادله دیفرانسیل را رسم کنید.

$$y' = y - x$$

حل

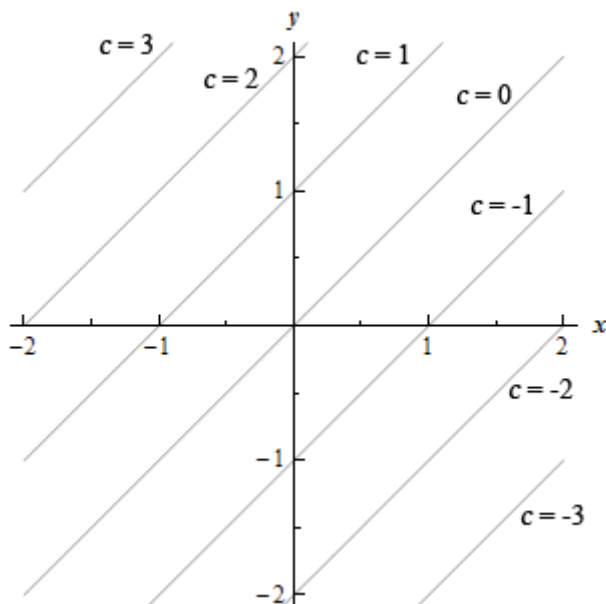
در این حالت که طرف راست معادله دیفرانسیل شامل هم تابع و هم متغیر مستقل است ، برای رسم میدان های راستا ، ابتدا باید مشخص کنیم که کجا مشتق ، ثابت است. برای این کار ، مشتق معادله دیفرانسیل را مساوی یک عدد ثابت قرار می دهیم ، مثلا c . این کار یک خانواده از معادله ها به ما میدهد ، موسوم به **خطوط هم شیب Isoclines**

روی هر کدام از این خطوط ، مشتق دارای مقدار ثابت c است.

بخاطر بیاورید که در دو مثال بالا ، برای شروع و بدست آوردن میدان راستا ، برای پیدا کردن خط هم شیب با $c = 0$ شروع کردیم. اینجا خانواده خطوط هم شیب مطابق زیر است.

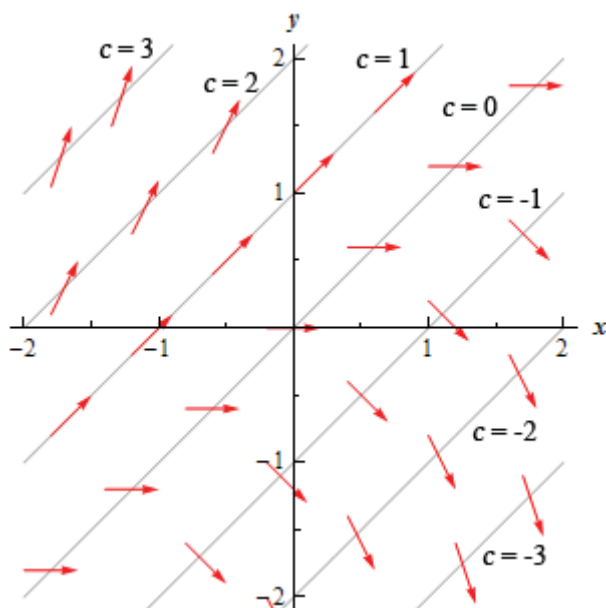
$$c = y - x$$

در زیر ، نمودار این منحنی ها برای مقادیر مختلف c ملاحظه می کنید.

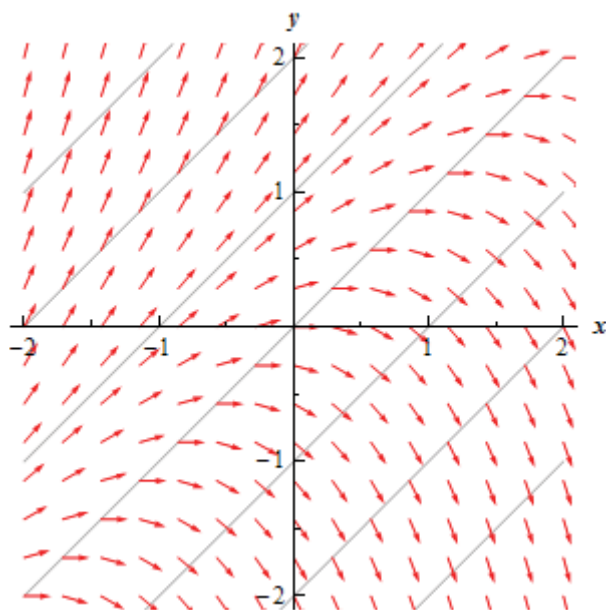


روی هر کدام از این خطوط و یا خطوط هم شیب ، مشتق ثابت است و مقدار آن c است. روی خط هم شیب $c = 0$ مشتق همیشه صفر است و لذا خطوط مماس همه ، افقی هستند. روی خط هم شیب $c = 1$ خطوط مماس همیشه دارای شیب یک خواهند بود. روی خط هم شیب $c = -2$ خطوط مماس

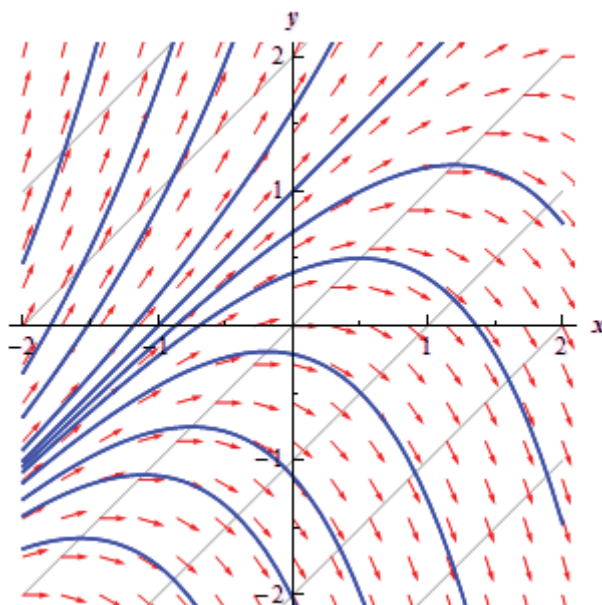
همیشه دارای شیب ۲- خواهند بود. الی آخر. در زیر چند خط مماس روی هر کدام از خطوط هم شیب ملاحظه می کنید.



برای اضافه کردن بردار های بیشتر برای مکان های بین خطوط هم شیب ، با $c = 0$ شروع می کنیم و به طرف $c = 1$ حرکت می کنیم. در حالی که این کار را می کنیم ، شیب بردار ها ، یا همان خطوط مماس ، از صفر به یک به تدریج اضافه می کنم. این عمل در تصویر زیر نشان داده شده است.



حالا می توانیم خم های انتگرال را اضافه کنیم. تصویر زیر.



برای رسم این میدان ها احتیاج به نرم افزار هایی که برای این کار ساخته شده باید استفاده کرد. مانند جئو جبرا Geogebra و یا نرم افزار های مهندسی و غیره

خلاصه مطالب گفته شده

میدان های راستا یا میدان های شیب عبارت است از یک نمایش تصویری برای نشان دادن تمام جواب های یک معادله دیفرانسیل ، بدون حل آن معادله. میدان های شیب شامل پاره خط ها یا بردار های کوتاهی هستند که نمایش شیب در نقاط مختلف می باشند. این پاره خط ها یا بردار ها ، خطوط مماس بر خانواده ای از منحنی های جواب معادله دیفرانسیل در نقاط مختلف هستند. این خطوط مماس ، جهت منحنی جواب را نشان می دهند. میدان های شیب برای نمایش منحنی های جواب معادله دیفرانسیل بدون حل آن معادله ، مفید است.

مراحل رسم میدان های شیب

- ۱ - مختصات نقاط روی نمودار را مشخص کنید.
- ۲ - این مختصات را در معادله دیفرانسیل بگذارید تا شیب بدست آید.
- ۳ - یک پاره خط کوتاه یا بردار که نمایش شیب خط مماس در آن نقطه است ، رسم کنید.
- ۴ - این کار را برای تمام نقاط داده شده انجام دهید.

تمرینات بخش ۱.۲

میدان شیب معادله دیفرانسیل داده شده در نقاط داده شده را رسم کنید.

$$۱) \quad \frac{dy}{dx} = x - 2y$$

$$(-1, 2), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (1, -1)$$

$$۲) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$$

$$(-1, 2), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (1, -1)$$

میدان شیب معادله های دیفرانسیل زیر را رسم کنید.

$$۳) \quad \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$۴) \quad \frac{dy}{dx} = 2y$$

$$۵) \quad \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$۶) \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$۷) \quad \frac{dy}{dx} = y - 1$$

$$۸) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

۹ - برای معادله دیفرانسیل زیر ، میدان شیب ، دوخط هم شیب و دو جواب را رسم کنید.

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

۱۰ - برای معادله دیفرانسیل زیر میدان شیب و خم های انتگرال را رسم کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

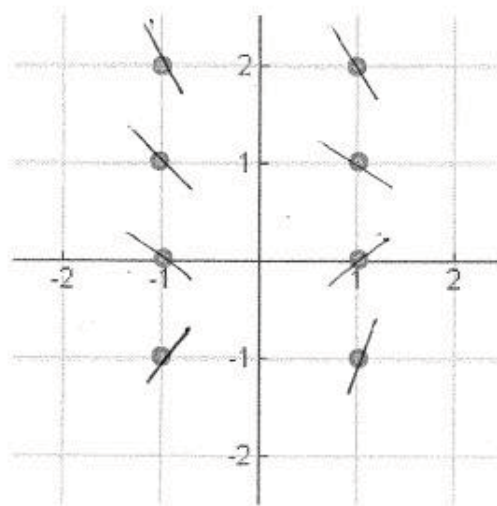
پاسخ

میدان شیب معادله دیفرانسیل داده شده در نقاط داده شده را رسم کنید.

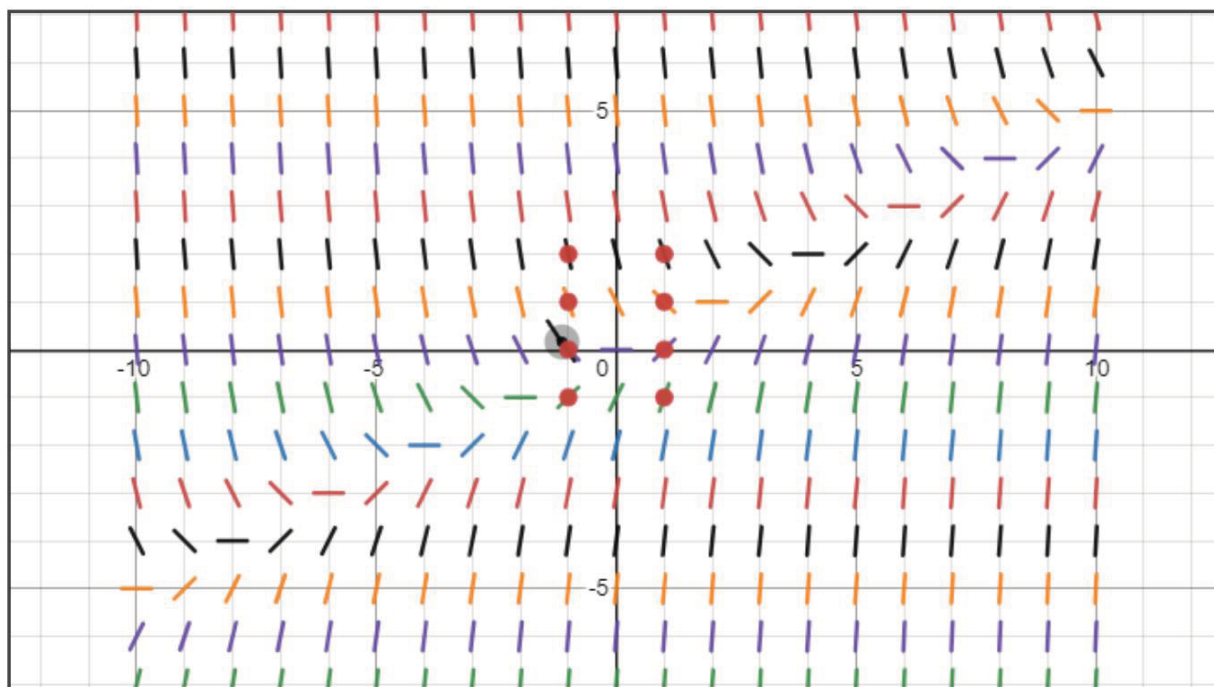
$$۱) \frac{dy}{dx} = x - 2y$$

$$(-1, 2), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (1, -1)$$

x	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
y	2	1	0	-1	2	1	0	-1
y'	-5	-3	-1	1	-3	-1	1	3



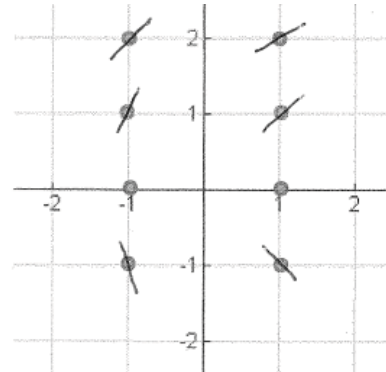
تصویر زیر از طریق نرم افزار تهیه شده است. نقاط داده شده مشخص شده اند.



$$۲) \frac{dy}{dx} = \frac{۲-x}{y}$$

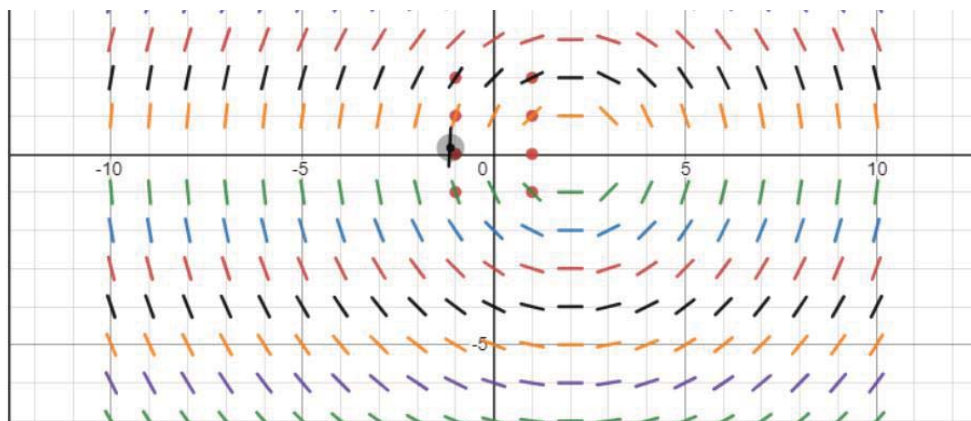
$$(-۱, ۲), (-۱, ۱), (-۱, 0), (-۱, -۱), (۱, ۲), (۱, ۱), (۱, 0), (۱, -۱)$$

x	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
y	2	1	0	-1	2	1	0	-1
y'	3/2	3	und.	-3	1/2	1	und.	-1



حروف *und* در جدول بالا یعنی تعریف شده نیست.

تصویر زیر از طریق نرم افزار تهیه شده است. نقاط داده شده مشخص شده اند.

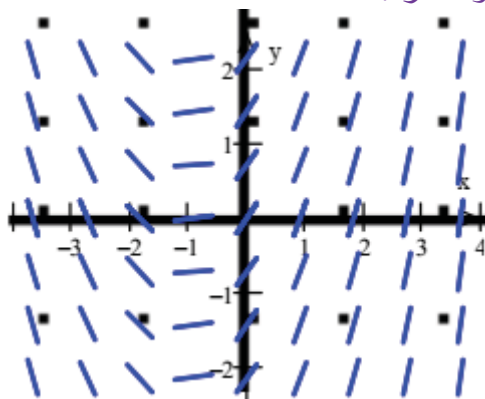


میدان شیب معادله های دیفرانسیل زیر را رسم کنید.

$$۳) \frac{dy}{dx} = x + ۱$$

x	y	$\frac{dy}{dx}$
-۲	هر مقدار	-۱
-۱	هر مقدار	0
0	هر مقدار	۱
۱	هر مقدار	۲
۲	هر مقدار	۳

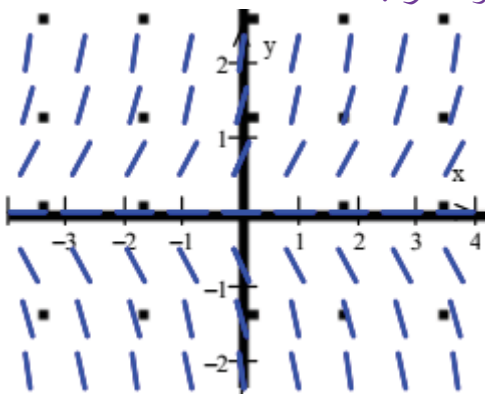
تمام نقاطی که مختصات x آنها یکسان است ، دارای شیب مساوی هستند ، زیرا در معادله جمله x وجود دارد ، اما جمله y وجود ندارد.



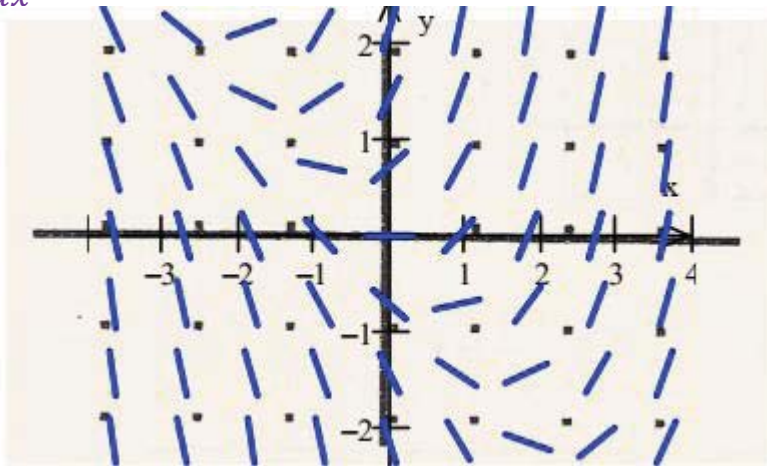
۴) $\frac{dy}{dx} = 2y$

x	y	$\frac{dy}{dx}$
هر مقدار	-۲	-۴
هر مقدار	-۱	-۲
هر مقدار	۰	۰
هر مقدار	۱	۲
هر مقدار	۲	۴

تمام نقاطی که مختصات y آنها یکسان است ، دارای شیب مساوی هستند ، زیرا در معادله جمله y وجود دارد ، اما جمله x وجود ندارد.



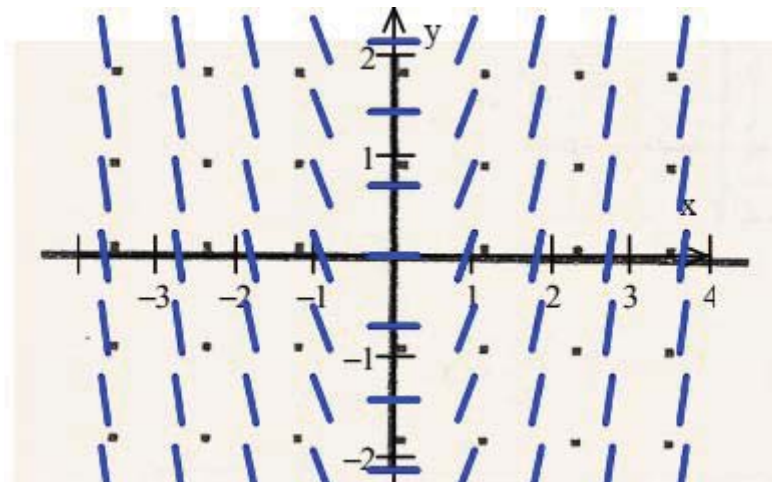
$$۵) \frac{dy}{dx} = x + y$$



x	y	dy/dx
0	-2	-2
-2	0	-2
1	2	3
2	2	4
-2	2	0

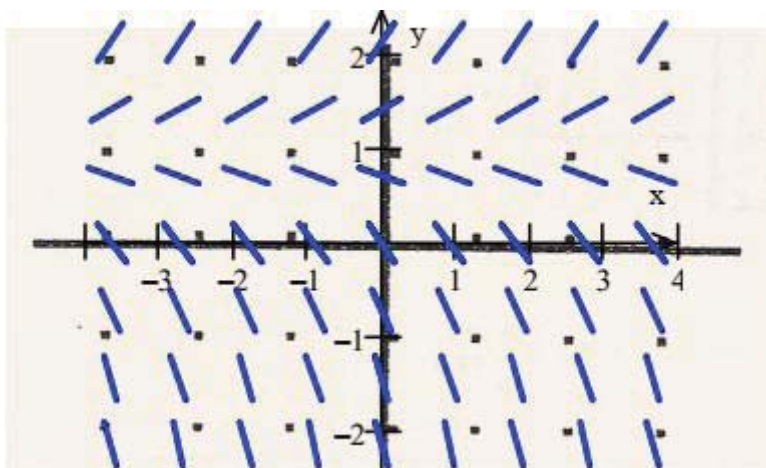
$$۶) \frac{dy}{dx} = 2x$$

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	هر مقدار	0
-۲	هر مقدار	-۴
۲	هر مقدار	۴
۱	هر مقدار	۲
-۱	هر مقدار	-۲



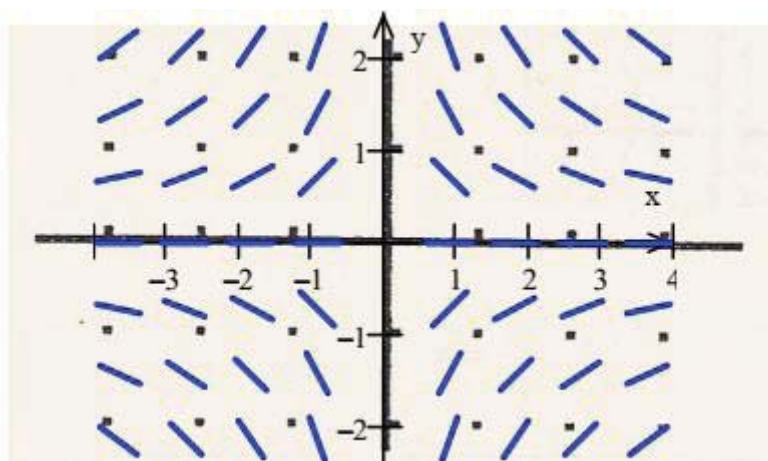
۷) $\frac{dy}{dx} = y - 1$

x	y	$\frac{dy}{dx}$
هر مقدار	-۲	-۳
هر مقدار	-۱	-۲
هر مقدار	۰	-۱
هر مقدار	۱	۰
هر مقدار	۲	۱



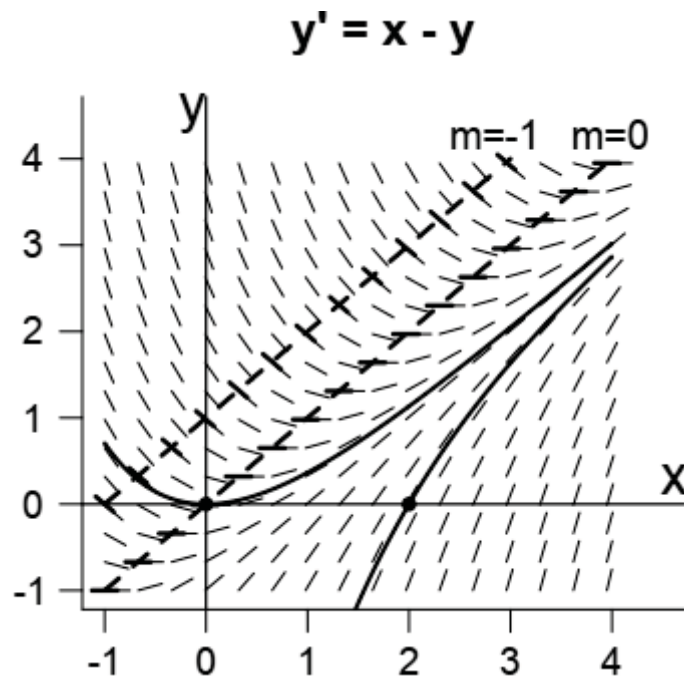
۸) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

x	y	dy/dx
2	-4	2
-4	2	1/2
0	any	0
-1	1	1
2	2	-1



۹ - برای معادله دیفرانسیل زیر ، میدان شیب ، دو خط هم شیب و دو جواب را رسم کنید.

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$



در تصویر بالا دو خط هم شیب $m = 0$ و $m = -1$ رسم شده است. $m = 0$ هنگامی است که شیب صفر است و $m = -1$ هنگامی است که شیب منفی است.

۱۰ - برای معادله دیفرانسیل زیر میدان شیب و خم های انتگرال را رسم کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

