فصل چهارم
شمارش
Counting
بخش اول
لیست
List

۴.۱ - لیست List

لیست عبارت است از یک سلسله مرتب از اشیاء. یک لیست با دو پرانتزمشخص می کنیم که داخل آن ، اعضای آن لیست نوشته شده است و هر یک از اعضا با ویرگول از هم جدا هستند.مثلا
(a, b, c, d, e) یک لیست است که شامل پنج حرف اول الفبای انگلیسی ، بطور مرتب است.
a, b, c, d, e را **عناصر** یا **اجزای Entries** لیست می نامند. عنصر اول a است ، عنصر دوم b الی آخر.
اگر ترتیب عناصرعوض شود ، یک لیست دیگر داریم. مثلا

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) \neq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$$

به تفاوت لیست و مجموعه توجه کنید. در مجموعه ، ترتیب قرار گرفتن اعضای مجموعه مهم نیست. مثلا دو مجموعه زیر با هم مساوی هستند.

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$$

بر خلاف مجموعه ها ، لیست ها میتوانند عناصر مکرر داشته باشند. مثلا $(۵, ۳, ۵, ۴, ۳, ۳)$ یک لیست قابل قبول است. **طول Length** یک لیست ، عبارت است از تعداد عناصر آن ، مثلا
(S, O, S) دارای طول سه است و $(۵, ۳, ۵, ۴, ۳, ۳)$ دارای طول شش است.
مثال دیگر ، $(a, ۱۵)$ یک لیست دارای طول دو است ، و $\left(0, \left(0, ۱, ۱\right)\right)$ یک لیست دارای طول دو که عنصر دوم آن یک لیست است به طول سه.
دو لیست با هم مساوی هستند ، اگر هر دو دقیقا دارای همان اجزا و به همان ترتیب باشند. اگر دو لیست دارای طول متفاوت باشند ، نمی توانند با هم مساوی باشند. مثلا

$$(0,0,0,0,0,0) \neq (0,0,0,0,0)$$

یک لیست مخصوص هم داریم که اصلا عنصری ندارد ، و به آن **لیست خالی Empty List** می گویند. وبا نماد ( ) نشان داده می شود. این تنها لیستی است که طول آن صفر است.
گاهی اوقات ، جهت خلاصه کردن ، لیست ها را بدون پرانتز و ویرگول می نویسیم. مثلا (S, O, S) را می نویسیم SOS در صورتی که ایجاد ابهام نکند. اما باید مواظب باشید که سبب ابهام و تناقض نشوید. مثلا اگر بجای $(۹, ۱0, ۱۱)$ بنویسید ۱۱ ۱0 ۹ ممکن است با $(۹, ۱, 0, ۱, ۱)$ اشتباه شود.
در چنین مواردی ، بهتر است پرانتز ها و ویرگول ها را بکار بریم. یک لیست نماد ها که بدون پرانتز ها و ویرگول باشد ، **زنجیره** یا **رشته String** نامیده می شود.
اگر یک سکه را ده مرتبه بالا بیندازیم و فرض کنیم هنگام فرود آمدن یکی از حالت H یا T یعنی شیر یا خط بیاید ، پس زنجیره زیر را ممکن است داشته باشیم.

$HHTHHTHTHH$

اگر سکه را دو مرتبه بالا بیندازیم ، نتیجه یکی از حالت های زیر خواهد بود.

HH, TT, TH, HT

اگر سکه را اصلا بالا نیندازیم ، زنجیره خالی ( ) خواهیم داشت.

اگر یک طاس را پنج مرتبه بریزیم و نتیجه ها را یاد داشت کنیم ، ممکن است نتیجه زیر را بدست آوریم.

$(۳, ۵, ۳, ۱, ۶)$

یعنی مرتبه اول شماره سه ، سپس پنج ، سپس سه ، سپس یک , و مرتبه آخر شش بیاید.

چرا مطالعه لیست های مختلف لازم است؟ زیرا بسیاری از حوادث و کار های زندگی ما بستگی به لیست ها دارند. شماره تلفن شما یک لیست از ده رقم یا عدد است. تغییرجای ارقام ، شماره تلفن جدیدی بدست می آید. پس ترتیب قرار گرفتن این ارقام مهم است.

یک بایت $Byte$ مثال دیگری از لیست است. در کامپیوتر یک بایت عبارت است از یک لیست از 0 ها و 1 ها. دنیای تکنولوژی اطلاعات با بایت ها کار می کند. چند مثال برای بایت می آوریم ، در این مثال ها یک بایت شامل هشت بیت است. درکامپیوتر های بزرگ و پیشرفته یک بایت ممکن است شامل ۱۶ یا ۳۲ و یا ۶۴ بیت باشد. اینجا برای هر نماد هم عدد پایه ده آورده شده و هم پایه دو. پایه ده را بخاطر این آورده ایم تا شما اگر به اعداد پایه دواشنا نیستد ، مشکلی نداشته باشید. اما در هر حال کامپیوتر اعداد پایه دو را می فهمد.

y	121	01111001
z	122	01111010
{	1`23	01111011
}	125	01111101
~	126	01111110

۴.۲ - اصل ضرب Multiplication Principle

بسیاری از مسائل ، مستلزم شمارش تعداد لیست های ممکن است ، که دارای یک شرط و یا چند شرط باشند.

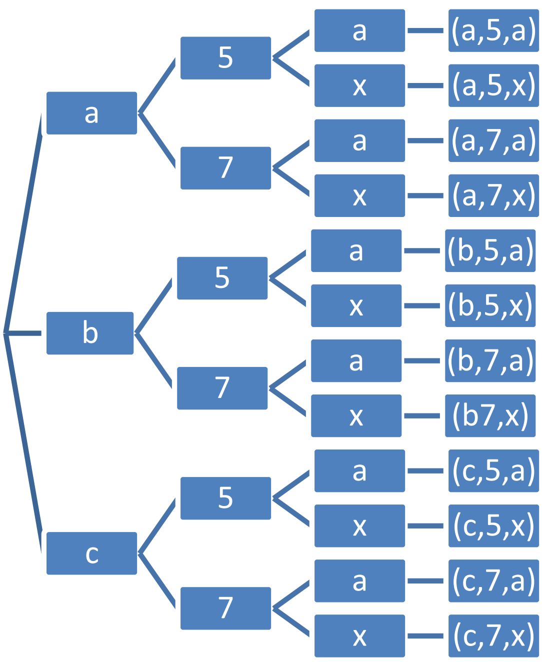
مثلا ، فرض کنید می خواهیم یک لیست بسازیم که دارای سه عضو باشد ، بشرطی که اولین عضو آن یکی از اعضای مجموعه $\{a,b,c\}$ باشد و عضو دوم آن باید در $\{۵,۷\}$ باشد و عضو سوم آن باید در $\{a,x\}$ باشد. پس $(a,۵,a)$ و $(b,۵,a)$ می تواند دو نمونه از چنین لیستی باشد. سئوال اینجا است که چند نمونه از چنین لیستی وجود دارد ؟ برای پاسخ به این سئوال ، می گوییم برای ساختن این لیست باید اولین عضو را انتخاب کنیم و سپس دومین و در نهایت آخرین عضو را انتخاب کنیم.

اولین انتخاب یکی از a یا b و یا c است. پس سه اانتخاب داریم. پس از انتخاب اول دو انتخاب داریم یعنی ۵ یا ۷ پس از انتخاب دوم ، باز هم دو انتخاب داریم ، یعنی a یا x

$$۳ * ۲ * ۲ = ۱۲$$

پس ۱۲ لیست ممکن وجود دارد. تصویر A

تصویر A



در مثال بالا ، سه انتخاب برای عنصر اول ، دو انتخاب برای عنصر دوم و دو انتخاب برای عنصر سوم وجود دارد. پس تعداد لیست های ممکن $۱۲ = ۲ * ۲ * ۳$ است. این نوع استدلال مثالی است برای آنچه ما آنرا **اصل ضرب Multiplication Principle** می نامیم.

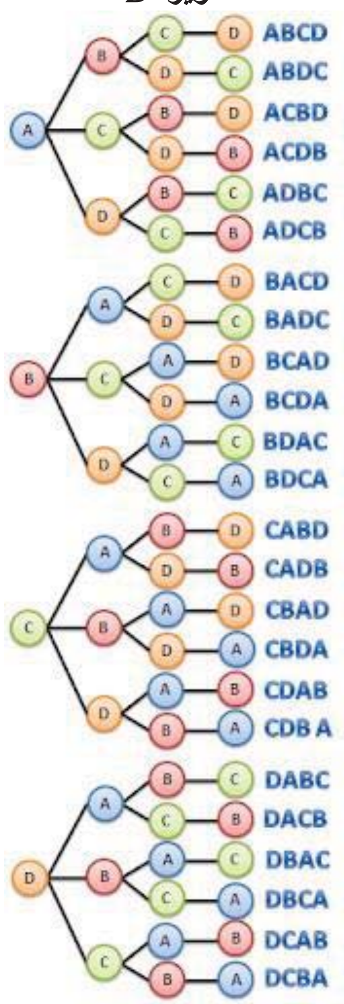
مثال دیگری

می خواهیم یک لیست به طول چهار ، از چهار حروف $\{A,B,C,D\}$ بسازیم ، بطوری که حروف تکرار نشوند. مثلا $ABCD$ و $ACBD$ جایز است اما $AABC$ و $CACB$ جایز نیست. چند نوع از این لیست وجود دارد؟

با عضو اول شروع می کنیم. برای اولین عضو چهار انتخاب داریم. یعنی A یا B یا C و یا D

پس شاخه های سمت چپ درخت به هر یک از این انتخاب ها متصل می شوند. اما وقتی که یک حرف برای عنصراول انتخاب کردیم ، نمی توانیم آنرا تکرار کنیم.
پس سه انتخاب برای عنصر دوم داریم. وقتی به عنصر چهارم رسیدیم ، مجبور هستیم هر چه مانده انتخاب کنیم ، یعنی فقط یک حرف. پس می بینیم تعداد لیست ها $۲۴ = ۱ * ۲ * ۳ * ۴$ است.
تصویر B

تصویر B



با توجه به دو مثال بالا ، قانون زیر نتیجه می شود.

اصل ضرب Multiplication Principle
فرض کنید می خواهیم یک لیست به طول n بنویسیم ، بطوری که برای عنصر اول $a_۱$ انتخاب ، برای عنصر دوم $a_۲$ انتخاب ، و برای عنصر سوم $a_۳$ انتخاب ، و الی آخر ، داشته باشیم. مجموع لیست های ممکن عبارت است از حاصل ضرب

$$a_۱ * a_۲ * a_۳ * \cdots * a_n$$

برای بکار بردن اصل ضرب **لازم نیست** درخت با شاخه های $a_۱ * a_۲ * a_۳ * \cdots * a_n$ ترسیم کنید. کافی است فقط اعداد را ضرب کنید.

مثال ۴.۲.۱ اگر پلاک اتومبیل ها باید شامل سه حرف الفبای فارسی باشد و چهار عدد به دنبال آن بیاید ، چند نوع پلاک اتومبیل ممکن است بسازیم؟ یک نمونه از این پلاک اتومبیل مطابق زیر است.

ف ر ج – ۵۸۳۹

پاسخ - می دانیم که الفبای فارسی شامل ۳۲ حرف است و همچنین می دانیم که ده نماد برای اعداد داریم.

طول لیست ۷ است ، پس داریم

$$a_۱ = ۳۲ \quad , a_۲ = ۳۲ \quad , a_۳ = ۳۲ \quad , a_۴ = a_۵ = a_۶ = a_۷ = ۱۰$$

پس داریم

$$۳۲ * ۳۲ * ۳۲ * ۱۰ * ۱۰ * ۱۰ * ۱۰ = ۳۲۷,۶۸۰,۰۰۰$$

مثال ۴.۲.۲ –می خواهید یک فنجان قهوه سفارش دهید. سه انتخاب برای شیر پر چربی ، شیر کم چربی و شیربدون چربی ، سه انتخاب برای اندازه فنجان بزرگ ، متوسط ، و کوچک ، دو انتخاب برای مقدار قهوه یک قاشق و یا دو قاشق قهوه , دارید. چند نوع انتخاب برای سفارش یک فنجان قهوه دارید ؟

پاسخ

سفارش می تواند به شکل (شیر ، اندازه ، مقدار) خلاصه کرد. سه انتخاب برای شیر ، سه انتخاب برای اندازه و دو انتخاب برای مقدار. پس بر اساس اصل ضرب داریم.

$$۳ * ۳ * ۲ = ۱۸$$

دو نوع مساله برای شمارش لیست داریم. یک نوع هنگامی که عناصر می توانند تکرار شوند ، مانند پلاک اتومبیل. پس ۴۴۲۱ – م م ج می تواند یک پلاک قابل قبول باشد.

نوع دیگر هنگامی است که تکرار عناصر جایز نیست و یا عملی نیست. مانند سفارش یک فنجان قهوه. شما نمی توانید هم فنجان بزرگ سفارش دهید و هم متوسط. مگر این که دو فنجان سفارش دهید. نه یک فنجان.

پس در مثال پلاک اتومبیل می گوییم **تکرار جایز است** و در مثال سفارش فنجان قهوه می گوییم **تکرار جایز نیست.**

مثال ۴.۲.۳ – اگر بخواهیم یک لیست به طول ۴ از نماد های A, B, C, D, E, F, G بسازیم

الف – چند نوع از چنین لیستی ممکن است ، اگر تکرار جایزباشد؟

ب - چند نوع از چنین لیستی ممکن است ، اگر تکرار جایزنباشد؟

ج – چند نوع از چنین لیستی ممکن است ، اگر تکرار جایز نباشد و لیست دارای یک E باشد ؟

د - چند نوع از چنین لیستی ممکن است ، اگر تکرار جایز باشد و لیست دارای یک E باشد ؟

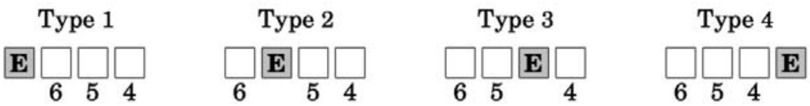
پاسخ
الف - می توان لیست را شامل چهار جعبه تصور کرد که هر جعبه را می توانیم با تعدادی از حروف A, B, C, D, E, F, G پر کنیم. برای جعبه اول هفت انتخاب داریم. برای جعبه دوم ، سوم وچهارم هم هفت انتخاب داریم. پس

$$۷ * ۷ * ۷ * ۷ = ۲,۴۰۱$$

ب –مساله مانند قسمت الف است ، ولی تکرار جایز نیست. برای اولین جعبه هفت انتخاب داریم. اما هنگامی که یکی از این حروف را انتخاب کردیم ، دیگر نمی توانیم آنرا برای جعبه دوم بکار بریم. پس برای جعبه دوم ، فقط شش انتخاب داریم. به همین ترتیب برای جعبه سوم پنج انتخاب ، و در نهایت برای جعبه چهارم ، چهار انتخاب داریم. پس

$$۷ * ۶ * ۵ * ۴ = ۸۴۰$$

ج – گفته شده تکرار جایز نیست و حرف E باید یک جایی در لیست قرار داشته باشد. پس E فقط یک مرتبه می تواند در هر لیست باشد. این لیست ها را به چهار گروه تقسیم می کنیم،به این طریق که آیا E اولین یا دومین یا سومین و یا چهارمین عضو آن گروه است .
این چهار نوع لیست را ذیل نمایش می دهیم.



لیست نوع اول را در نظر بگیرید ، که در آن ، E اولین عضو است. پس شش انتخاب دیگر برای عضو دوم باقی است ، برای عضو سوم ، پنج حرف داریم و برای عضو چهارم ، چهار حرف داریم.
پس اگر E اولین عضو باشد ، $۶ * ۵ * ۴ = ۱۲۰$ لیست خواهیم داشت. به همین ترتیب اگر E دومین عضو باشد ، ۱۲۰ لیست داریم. اگر E سومین و یا چهارمین عضو باشد باز برای هر کدام ۱۲۰ لیست داریم. پس در نهایت

$$۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۴۸۰$$

لیست داریم.

د – در این حالت تکرار جایز است ولیست باید یک E داشته باشد. بر اساس قسمت الف ، اگر تکرار جایز باشد ،

$$۷ * ۷ * ۷ * ۷ = ۷^{۴} = ۲,۴۰۱$$

پس اگر تکرار جایز باشد ، ۲۴۰۱ لیست داریم. اما این پاسخ صحیح برای این قسمت نیست. زیرا ممکن است در بعضی از لیست ها E نباشد. مثلا (A, B, C, D) و (A, B, B, C) و (A, B, C, C) لیست های قابل قبول هستند .آمار در هیچ کدام E وجود ندارد. در صورتی که از ما خواسته شده که در هر لیست باید E وجود داشته باشد. پس از ۲۴۰۱ باید تعداد لیست هایی که در آنها E نیست ، کسر کنیم. برای ساختن یک لیست که شامل E نباشد ، شش انتخاب برای هر عضو لیست داریم. پس $۶ * ۶ * ۶ * ۶ = ۶^{۴} = ۱,۲۹۶$ لیست داریم که در آنها E وجود ندارد. پس پاسخ ما به مساله این است که $۲,۴۰۱ - ۱,۲۹۶ = ۱,۱۰۵$ لیست داریم که در آنها تکرار جایز است و در آنها حد اقل یک E وجود دارد.

مثال ۴.۲.۴– می خواهیم یک لیست بطول ۵ از حروف A, B, C, D, E, F, G بسازیم به شرطی که تکرار جایز نباشد ، و اولین عضو آن باید یا B یا C و یا D باشد و آخرین عضو باید یا A و یا E باشد ، معین کنید چند نوع از چنین لیستی می توان ساخت ؟

پاسخ

یک لیست که شامل پنج جعبه است می سازیم.

اولین جعبه باید شامل یا B یا C یا D باشد. پس سه انتخاب برای این جعبه داریم. آخرین جعبه هم باید شامل یا A باشد و یا E پس دو انتخاب هم برای جعبه آخر داریم. حالا سه جعبه وسط را پر می کنیم. چون دو حرف برای جعبه اول و آخر بکار بردیم ، پس پنج حرف باقی است. لذا برای جعبه دوم ، پنج انتخاب داریم. برای جعبه سوم ، چهار انتخاب داریم. و برای جعبه چهارم ، سه انتخاب. بر اساس اصل ضرب داریم.

$$۳ * ۵ * ۴ * ۳ * ۲ = ۳۶۰$$

تعداد ۳۶۰ لیست خواهیم داشت.

تمرینات ۴.۲

۱ - می خواهیم یک لیست با حروف T, H, E, O, R, Y بسازیم و تکرار هم جایز است.

الف – چند لیست به طول چهار وجود دارد ؟

ب – چند لیست به طول چهار وجود دارد که با T شروع شود؟

ج - چند لیست به طول چهار وجود دارد که با T شروع نشود؟

۲ - چند لیست به طول سه می توان از حروف A, B, C, D, E, F ساخت اگر

الف - تکرار جایز باشد.

ب - تکرار جایز نیست.

ج - تکرار جایز نیست و لیست باید شامل حرف A باشد.

د - تکرار جایز است و لیست باید شامل حرف A باشد.

۳ - می خواهیم چندین سلسله از اعداد دو تائی هشت رقمی مانند 10010001 و 00011110 بسازیم.

الف - چند نوع از این سلسله ها وجود دارد ؟

ب - چند تا از این سلسله ها به صفر ختم می شوند؟

ج - چند تا از این سلسله هاارقام دوم و چهارم آنها 1 است؟

د - چند تا ازاین سلسله ها ارقام دوم یا چهارم آنها 1 است؟

۴ - میخواهیم چند کلمه رمز چهار حرفی با حروف $A, B, C, D, \cdots, Z$ بسازیم.

الف - چند تا از این کلمات رمز می توان ساخت ؟

ب - چند تا از این کلمات ، دو حرف متوالی آنها یکسان نیست؟

پاسخ تمرینات ۴.۲

۱ - می خواهیم یک لیست با حروف T, H, E, O, R, Y بسازیم و تکرار هم جایز است.

الف – چند لیست به طول چهار وجود دارد ؟

پاسخ

$$۶ * ۶ * ۶ * ۶ = ۴^{۴} = ۱,۲۹۶$$

ب – چند لیست به طول چهار وجود دارد که با T شروع شود؟

پاسخ

$$۱ * ۶ * ۶ * ۶ = ۲۱۶$$

ج - چند لیست به طول چهار وجود دارد که با T شروع نشود؟

پاسخ

$$۵ * ۶ * ۶ * ۶ = ۱,۰۸۰$$

۲ - چند لیست به طول سه می توان از حروف A, B, C, D, E, F ساخت اگر

الف - تکرار جایز باشد.

پاسخ

$$۶ * ۶ * ۶ = ۲۱۶$$

ب - تکرار جایز نیست.

پاسخ

$$۶ * ۵ * ۴ = ۱۲۰$$

ج - تکرار جایز نیست و لیست باید شامل حرف A باشد.

پاسخ

$$۵ * ۴ + ۵ * ۴ + ۵ * ۴ = ۶۰$$

د - تکرار جایز است و لیست باید شامل حرف A باشد.

پاسخ

$$۶ * ۶ * ۶ - ۵ * ۵ * ۵ = ۹۱$$

۳ - می خواهیم چندین سلسله از اعداد دو تائی هشت رقمی مانند 10010001 و 00011110 بسازیم.

الف - چند نوع از این سلسله ها وجود دارد ؟

پاسخ

$$۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ = ۲^{۸} = ۲۵۶$$

ب - چند تا از این سلسله ها به صفر ختم می شوند؟

پاسخ

$$۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ * ۱ = ۱۲۸$$

ج - چند تا از این سلسله ها ارقام دوم و چهارم آنها 1 است؟

پاسخ

$$۲ * ۱ * ۲ * ۱ * ۲ * ۲ * ۲ * ۲ = ۶۴$$

د - چند تا از این سلسله ها ارقام دوم یا چهارم آنها 1 است؟

پاسخ

این سلسله ها را می توان به سه نوع تقسیم کرد.
نوع اول آنهایی که رقم دوم آنها یک است. $* 1 * 0 ****$
نوع دوم آنهایی که رقم چهارم آنها یک است. $* 0 * 1 ****$
نوع سوم آنهایی که هم رقم دوم و هم رقم چهارم آنها یک است. $* 1 * 1 ****$
لازم به یاد آوری است که بجای ستاره ها صفر یا یک خواهد بود.

پس برای هر نوع $۶۴ = ۲^۶$ سلسله داریم و روی هم رفته $۱۹۲ = ۶۴ * ۳$ سلسله اعداد دو تائی هشت رقمی داریم که رقم دوم یا چهارم آنها 1 است.

۴ - میخواهیم چند کلمه رمز چهار حرفی با حروف $A, B, C, D, \cdots, Z$ بسازیم.

الف - چند تا از این کلمات رمز می توان ساخت ؟

پاسخ

$$۲۶ * ۲۶ * ۲۶ * ۲۶ = ۴۵۶,۹۷۶$$

ب - چند تا از این کلمات ، دو حرف متوالی آنها یکسان نیست؟

پاسخ

برای اولین حرف ، ۲۶ انتخاب داریم. دومین حرف نباید مثل حرف اول باشد ، پس ۲۵ انتخاب داریم. حرف سوم نباید مثل حرف دوم باشد ، پس ۲۵ انتخاب داریم. چهارمین حرف نباید مثل حرف سوم باشد ، پس ۲۵ انتخاب داریم. لذا

$$۲۶ * ۲۵ * ۲۵ * ۲۵ = ۴۰۶,۲۵۰$$

کلمات رمز داریم که دو حرف متوالی آنها مثل هم نیستند.

۴.۳ - اصل جمع و تفریق The Addition and Subtraction

ابتدا برای آسان کردن این مبحث ، اصل جمع را در مورد مجموعه ها مورد بر رسی قرار می دهیم.
اصل جمع می گوید اگر یک مجموعه را بتوانیم به قطعات تقسیم کنیم ، پس اندازه آن مجموعه عبارت است از مجموع اندازه های قطعات .

اصل جمع – فرض کنید یک مجموعه کراندار X را می توانیم به تعدای مجموعه ها تقسیم کنیم بطوری که داشته باشیم

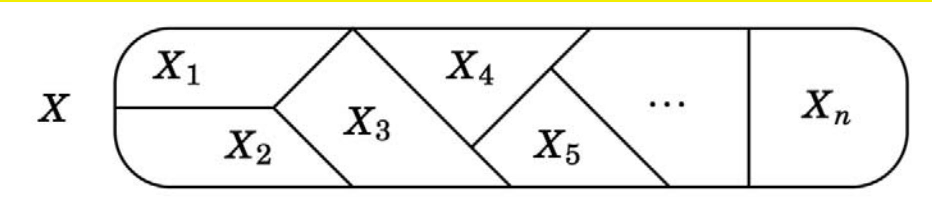
$$X = X_۱ \cup X_۲ \cup \cdots \cup X_n$$

و

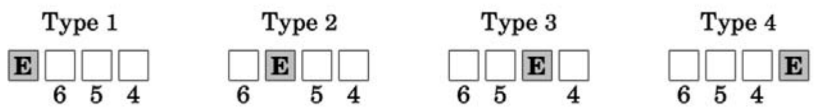
$$X_i \cap X_j = \emptyset \quad \text{،} \quad i \neq j$$

پس

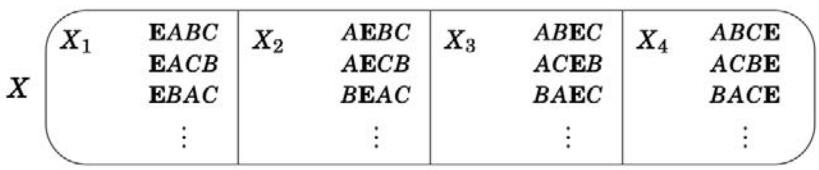
$$|X| = |X_۱| + |X_۲| + \cdots + |X_n|$$



مثال ۴.۳.۱
چند لیست بطول چهار و بدون تکرار می توان از حروف A, B, C, D, E, F, G ساخت ، اگر آن لیست باید شامل E باشد؟
پاسخ
در بخش ۴.۲ تمرین ۴.۲.۳ قسمت ج لیست را به چهار نوع تقسیم کردیم. به این صورت که آیا E در جای اول یا دوم یا سوم یا چهارم قرار گیرد.



سپس اصل ضرب را بکار بردیم تا تعداد لیست های نوع اول را محاسبه کنیم . مسلم است که برای عنصر اول فقط یک انتخاب داریم ، برای عنصر دوم شش انتخاب ، برای عنصر سوم پنج انتخاب ، برای عنصر چهارم هم چهارانتخاب داریم. این موضوع در شکل بالا مشخص شده است. بر اساس اصل ضرب ، $۱۲۰ = ۴ * ۵ * ۶$ لیست از نوع اول داریم. به همین طریق برای نوع دوم .سوم و چهارم تعداد $۱۲۰ = ۴ * ۵ * ۶$ لیست داریم.



و سپس لیست ها را به عنوان اعضای مجموعه X فرض کردیم که به قسمت های $X_۱, X_۲, X_۳, X_۴$ تقسیم شده است و در نهایت اصل جمع را برای لیست ها ی نوع اول تا چهارم بکار بردیم.
پس اصل جمع می گوید ، تعداد لیست ها یی که شامل یک E باشد ، مطابق زیر بدست می آید.

$$|\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{X}_۱| + |\boldsymbol{X}_۲| + |\boldsymbol{X}_۳| + |\boldsymbol{X}_۴| = ۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۴۸۰$$

اصل جمع را هنگامی بکار می بریم که لازم باشد اشیاء را در یک مجموعه X بشماریم. اگر بتوانیم X را به صورت $X = X_۱ \cup X_۲ \cup \cdots \cup X_n$ بشکنیم ، پس اصل جمع پاسخ زیر را به ما می دهد.

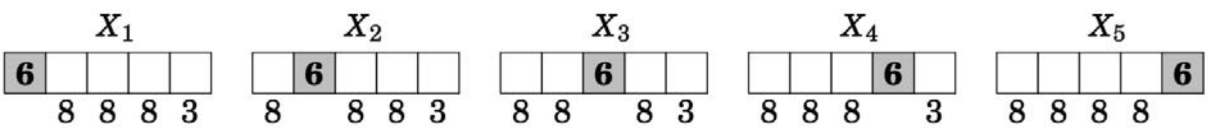
$$|X| = |X_۱| + |X_۲| + \cdots + |X_n|$$

اما برای این که این روش کار کند ، اشتراک هر دو قطعه X_i باید $\emptyset$ باشد. مثلا اگر $X_۱$ و $X_۲$ دارای یک عضو مشترک باشند ، آن عضو باید یک مرتبه در $|X_۱|$ و یک مرتبه در $|X_۲|$ محاسبه شود و لذا داریم

$$|X| < |X_۱| + |X_۲| + \cdots + |X_n|$$

این همان مساله شمارش مضاعف است که در مثال ۴.۲.۳ ذکر کردیم.

مثال ۴.۳.۲
می خواهیم یک سری اعداد پنج رقمی **زوج** بسازیم بطوری صفر در آن عدد ها وجود نداشته باشد ورقم ۶ هم فقط یک مرتبه بکار رفته باشد.مثلا ۵۵۶۳۴ و ۱۶۱۱۸ عدد های قابل قبول هستند ، اما ۶۳۳۰۴ و ۶۳۳۶۴ قابل قبول نیستند. چند نمونه از چنین اعدادی وجود دارد ؟
پاسخ
فرض می کنیم X مجموعه تمام چنین اعدادی باشد. پاسخ $|X|$ است. پس باید $|X|$ را پیدا کنیم. فرض می کنیم $X = X_۱ \cup X_۲ \cup X_۳ \cup X_۴ \cup X_۵$ باشد ، بطوری که رقم i ام آن ۶ باشد. همانطور که در تصویر زیر ملاحظه می کنید. توجه دارید که $X_i \cap X_j = \emptyset$ است زیرا ۶ در جاهای متفاوت است.



اولین رقم $X_۱$ شش است ، سه رقم بعدی می تواند هر رقمی بجز شش و صفر باشد ، لذا هشت انتخاب برای سه رقم بعدی داریم. برای خانه آخرکه باید یک رقم زوج باشد ، فقط ارقام ۲, ۴, ۸ باقی است ، لذا برای خانه آخر فقط سه انتخاب داریم. بر اساس اصل ضرب داریم.

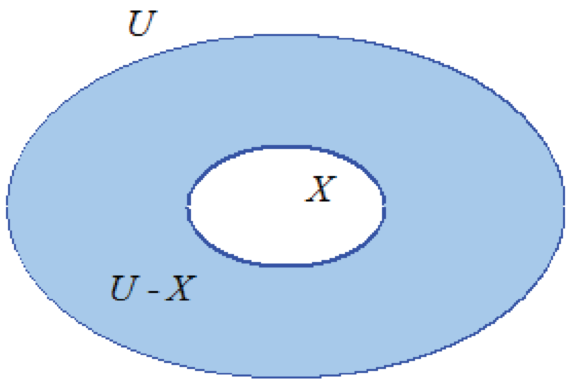
$$|\boldsymbol{X}_۱| = ۸ * ۸ * ۸ * ۳ = ۱,۵۳۶$$

به همین طریق داریم $|\boldsymbol{X}_۲| = |\boldsymbol{X}_۳| = |\boldsymbol{X}_۴| = ۸ * ۸ * ۸ * ۳ = ۱,۵۳۶$

اما $X_۵$ کمی فرق دارد. چون هنوز شش را بکار نبرده ایم ، پس آخرین رقم باید شش باشد. لذا برای چهار خانه قبلی هر کدام هشت انتخاب داریم. یعنی $\left|X_۵\right| = ۸ * ۸ * ۸ * ۸ = ۴,۰۹۶$ و در نهایت بر اساس اصل جمع داریم.

$$|X| = |X_۱| + |X_۲| + |X_۳| + |X_۴| + |X_۵| = ۱۵۳۶ + ۱۵۳۶ + ۱۵۳۶ + ۱۵۳۶ + ۴۰۹۶ = ۱۰,۲۴۰$$

حالا روش دیگری برای شمارش معرفی می کنیم ، بنام اصل تفریق. فرض می کنیم X یک زیر مجموعه از مجموعه مرجع U باشد. متمم $\overline{X} = U - X$ در تصویر زیر سایه دار نشان داده شده است.



فرض کنید می خواهیم اشیاء در این قسمت سایه دار را شمارش کنیم. مسلم است که تعداد این اشیاء عبارت است از تعداد اشیاء داخل U منهای اشیاء داخل X پس داریم $|U - X| = |U| - |X|$ این اصل تفریق است.

اصل تفریق Subtraction Principle

اگر X یک زیر مجموعه از مجموعه کراندار U باشد ، پس $|\overline{X}| = |U| - |X|$ است. به عبارت دیگر اگر $X \subseteq U$ باشد ، پس $|U - X| = |U| - |X|$ است.

مثال ۴.۳.۳

چند لیست به طول چهار می توان از نماد های A, B, C, D, E, F, G ساخت ، اگر آن لیست حد اقل یک E داشته باشد و تکرار هم مجاز است.

پاسخ

چنین لیستی ممکن است شامل یک یا دو یا سه و یا چهار E باشد ، که در مکان های مختلف می تواند قرار داشته باشد. این موضوع پیچیده ای است.

برای آسان شدن کار ، ابتدا کلیه لیست های به طول چهارمتشکل از حروف داده شده داخل مجموعه U را شمارش می کنیم ، بدون توجه که آن لیست ها شامل E است یا نه. اصل ضرب می گوید

$$|U| = ۷ * ۷ * ۷ * ۷ = ۲,۴۰۱$$

پس ۲۴۰۱ لیست در U وجود دارد. این لیست ها ممکن است شامل E باشند و یا نباشند.
حالا لیست های مجموعه X را شمارش می کنیم که شامل هیچ E نباشد. اصل ضرب می گوید

$$|X| = ۶ * ۶ * ۶ * ۶ = ۱,۲۹۶$$

اما می خواهیم لیست هایی را شمارش کنیم که حد اقل یک E داشته باشند.

$$|\boldsymbol{U} - \boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{U}| - |\boldsymbol{X}| = ۲,۴۰۱ - ۱,۲۹۶ = ۱,۱۰۵$$

پس تعداد ۱,۱۰۵ لیست حد اقل شامل یک E است.

تمرینات ۴.۳

۱ - بین ۱ و ۹۹۹۹ چند عدد صحیح وجود دارد که ارقام تکرار نشده باشند ؟ چند عدد صحیح حد اقل یک رقم مکرر دارد ؟

۲ - در زبان انگلیسی ۲۶ حرف وجود دارد. حروف $a, b, c, \cdots, z$ را حروف کوچک می نامند و حروف $A, B, C, \cdots, Z$ را حروف بزرگ می نامند.
یک کلمه رمز با پنج حرف الفبای انگلیسی می خواهیم بسازیم بطوری که حد اقل یک حرف آن بزرگ باشد. چند نوع از چنین کلمه رمز ممکن است؟
اگر کلمه رمز مخلوطی از حروف بزرگ و کوچک باشد ، چند نوع ؟

۳ - می خواهیم لیست های شش حرفی با حروف A, B, C, D, E, F, G, H بسازیم ، بطوری که تکرار مجاز نباشد و لیست شامل دو حرف متوالی صدا دار باشد. چند نوع از چنین لیست هایی ممکن است؟
توجه در این لیست A و E صدا دار هستند.

۴ - چند عدد صحیح بین ۱ و ۱۰۰۰ بر ۵ بخش پذیر است؟ چند عدد صحیح بر ۵ بخش پذیر نیست؟

پاسخ تمرینات ۴.۳

۱ ـ بین ۱ و ۹۹۹۹ چند عدد صحیح وجود دارد که ارقام تکرار نشده باشند ؟ چند عدد صحیح حد اقل یک رقم مکرر دارد ؟

پاسخ

اعداد صحیح یک رقمی ، دو رقمی ، سه رقمی و چهار رقمی را جداگانهٔ بر رسی می کنیم.

تعداد اعداد صحیح یک رقمی که ارقام مکرر نداشته باشند ۹ است. یعنی ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱ همگی اعداد صحیح یک رقمی هستند.

تعداد اعداد صحیح دو رقمی که ارقام مکرر نداشته باشند $۸۱ = ۹ * ۹$ است. یعنی

$$۱۰, ۱۲, \dots ۱۸, ۱۹$$
$$۲۰, ۲۱, ۲۳, \dots, ۲۹$$
$$\vdots$$
$$۹۰, ۹۱, \dots, ۹۸$$

تعداد اعداد صحیح سه رقمی بدون تکرار $۶۴۸ = ۸ * ۹ * ۹$ است.

تعداد اعداد صحیح چهار رقمی بدون تکرار $۴,۵۳۶ = ۷ * ۸ * ۹ * ۹$ است.

پس بر اساس اصل جمع پاسخ مطابق زیر است.

$$۹ + ۸۱ + ۶۴۸ + ۴,۵۳۶ = ۵,۲۷۴$$

حالا پاسخ قسمت دوم

چند عدد صحیح بین ۱ و ۹۹۹۹ وجود دارد که حد اقل یک رقم تکراری داشته باشد ؟

پاسخ – تعداد اعداد صحیح بین ۱ و ۹۹۹۹ مجموعا ۹۹۹۹ عدد است. حالا اصل تفریق را بکار می بریم. از این عدد ، اعداد صحیحی که ارقام تکراری ندارند کسر می کنیم. پس داریم.

$$۹,۹۹۹ - ۵,۲۴۷ = ۴,۷۲۵$$

۲ ـ در زبان انگلیسی ۲۶ حرف وجود دارد. حروف $a, b, c, \cdots, z$ را حروف کوچک می نامند و حروف $A, B, C, \cdots, Z$ را حروف بزرگ می نامند.

یک کلمه رمز با پنج حرف الفبای انگلیسی می خواهیم بسازیم بطوری که حد اقل یک حرف آن بزرگ باشد. چند نوع از چنین کلمه رمز ممکن است؟

پاسخ

فرض می کنیم U مجموعه تمام کلمات رمز ممکن باشد که از حروف بزرک و کوچک درست شده اند. فرض می کنیم X مجموعه تمام کلمات رمز ممکن باشد که از حروف کوچک درست شده اند.

پس $U - X$ عبارت است از مجموعه تمام کلمات رمز ممکن که حد اقل یک حرف کوچک دارد.

بر اساس اصل تفریق ،پاسخ ما $|U - X| = |U| - |X|$ است.

روی هم رفته $۵۲ = ۲۶ + ۲۶$ حروف بزرگ و کوچک وجود دارد. پس بر اساس اصل ضرب

$$|\boldsymbol{U}| = ۵۲ * ۵۲ * ۵۲ * ۵۲ * ۵۲ = ۵۲^{۵} = ۳۸۰,۲۰۴,۰۳۲$$

به همین طریق $|\boldsymbol{X}| = ۲۶ * ۲۶ * ۲۶ * ۲۶ * ۲۶ = ۲۶^{۵} = ۱۱,۸۸۱,۳۷۶$

لذا پاسخ $|\boldsymbol{U}| - |\boldsymbol{X}| = ۳۸۰,۲۰۴,۰۳۲ - ۱۱,۸۸۱,۳۷۶ = ۳۶۸,۳۲۲,۶۵۶$ است.

اگر کلمه رمز مخلوطی از حروف بزرگ و کوچک باشد ، چند نوع ؟

پاسخ

تعداد کلمات رمز با حروف کوچک $۲۶^۵ = ۱۱,۸۸۱,۳۷۶$ است ، همین تعداد هم برای کلمات رمز با حروف بزرگ داریم. بر اساس اصل جمع ، تعداد کلمات رمز که فقط حروف کوچک یا فقط حروف بزرگ بکار می برند مساوی است با $۱۱,۸۸۱,۳۷۶ + ۱۱,۸۸۱,۳۷۶ = ۲۳,۷۶۲,۷۵۲$
پس بر اساس اصل تفریق تعداد کلمات رمزی که مخلوطی از حروف بزرگ و کوچک بکار می برند مساوی است با تعداد کل کلمات رمز ممکن منهای تعداد کلمات رمزی که یا حروف کوچک بکار می برند و یا حروف بزرگ. پس ،

$$۳۸۰,۲۰۴,۰۳۲ - ۲۳,۷۶۲,۷۵۲ = ۳۵۶,۴۴۱,۲۸۰$$

۳ - می خواهیم لیست های شش حرفی با حروف A, B, C, D, E, F, G, H بسازیم ، بطوری که تکرار مجاز نباشد و لیست شامل دو حرف متوالی صدا دار باشد. چند نوع از چنین لیست هایی ممکن است؟ توجه در این لیست A و E صدا دار هستند.

پاسخ

برای پاسخ به این مساله V برای حرف صدا دار یعنی Vowel و $*$ برای حروف بی‌صدا بکار می بریم.
این لیست ها را می توان به پنج نوع تقسیم کنیم. پس یکی از فرم های زیر را خواهیم داشت.

$VV****, *VV***$ ، $**VV**$ ، $***VV*, ****VV$

بر اساس اصل ضرب ، برای نوع اول داریم $۲ * ۱ * ۶ * ۵ * ۴ * ۳ = ۷۲۰$ به همین طریق برای فرم ها دیگر هم ۷۲۰ نوع داریم. پس بر اساس اصل جمع

$$۷۲۰ + ۷۲۰ + ۷۲۰ + ۷۲۰ + ۷۲۰ = ۳۶۰۰$$

نوع از چنین لیستی داریم.

۴ - چند عدد صحیح بین ۱ و ۱۰۰۰ بر ۵ بخش پذیر است؟ چند عدد صحیح بر ۵ بخش پذیر نیست؟

پاسخ

اعداد صحیحی که بر پنج بخش پذیر هستند عبارتند از $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, \dots ۹۹۵, ۱۰۰۰$
پس $\frac{۱۰۰۰}{۵} = ۲۰۰$ عدد صحیح وجود دارد که بر پنج بخش پذیر هستند. بر اساس اصل تفریق اعداد صحیحی که بر پنج بخش پذیر نیستند عبارت است از

$$۱۰۰۰ - ۲۰۰ = ۸۰۰$$

۴.۴ - فاکتوریال و جایگشت Factorial and Permutation

در دو بخش قبل ، با توجه به مثال های مطرح شده ، ممکن است متوجه شده باشید که اغلب لازم است تعداد لیست های دارای n عضو ، و بدون تکرار ، از n نماد می توان ساخت، را پیدا کنیم.
به این نوع مساله زیاد بر خورد می کنیم ، لذا برای پرداختن به آن از ایده **فاکتوریال Factorial** استفاده می کنیم.

جدول زیر مفهوم فکتوریال را روشن می کند. هنگامی که $n = 0$ فقط یک لیست وجود دارد که از هیچ نماد و یا صفر نماد ، می توان ساخت ، یعنی لیست خالی $(\,)$

$n!$	لیست های بدون تکرار مشتمل بر n عضو ساخته شده از n نماد	نماد ها	n
۱	$(\,)$	$\{\,\}$	0
۱	a	$\{a\}$	۱
۲	ab, ba	$\{a, b\}$	۲
۶	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$	$\{a, b, c\}$	۳
۲۴	$abcd, acbd, bacd, bcad, cabd, cbad,$ $abdc, acdb, badc, bcda, cadb, cbda,$ $adbc, adcb, bdac, bdca, cdab, cdba,$ $dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$	$\{a, b, c, d\}$	۴
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

تعداد لیست های بدون تکرار مشتمل بر n عضو ساخته شده از n نمادعبارت است از

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots ۳*۲*۱$$

پس اگر $n = ۴$ باشد ، $n! = ۴! = ۴*۳*۲*۱ = ۲۴$
نماد $n!$ را می خوانیم n فاکتوریال.

تعریف – اگر n یک عدد صحیح نا منفی باشد ، پس $n!$ عبارت است ازتعداد لیست های دارای n عضو که می توان از n نماد ، ساخت بدون تکرار. پس $0! = ۱$ و $۱! = ۱$ و اگر $n > ۱$ باشد پس $n! = n(n-۱)(n-۲)\cdots ۳*۲*۱$

در نتجه داریم.

$$0! = ۱$$
$$۱! = ۱$$
$$۲! = ۲*۱ = ۲$$
$$۳! = ۳*۲*۱ = ۶$$
$$۴! = ۴*۳*۲*۱ = ۲۴$$
$$۵! = ۵*۴*۳*۲*۱ = ۱۲۰$$
$$۶! = ۶*۵*۴*۳*۲*۱ = ۷۲۰$$

و به همین ترتیب.

از تعریف بالا می توان نتیجه گرفت $4! * 5 = (1 * 2 * 3 * 4) * 5 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 5!$
و $3! * 4 = (1 * 2 * 3) * 4 = 1 * 2 * 3 * 4 = 4!$ پس بطور کلی ، فرمول زیر بدست می آید.

$$n! = n(n-1)! \qquad (4.4.1)$$

پس اگر $n = 1$ باشد ، داریم $1! = 1 * (1-1)! = 1 * 0! = 1 * 1 = 1$

مثال ۴.۴.۱
می خواهیم لیست هایی که شامل هفت عضو است ، با حروف a, b, c, d, e, f, g بسازیم.
الف - چند نوع از چنین لیستی وجود دارد ، اگر تکرار جایز نباشد؟

ب - چند نوع از چنین لیستی وجود دارد ، اگر تکرار جایز نباشد و دو عضو اول لیست باید حرف صدا دارباشد ؟ یاد آوری : a و e حروف صدا دار هستند.

ج - چند نوع از چنین لیستی وجود دارد ، اگر تکرار جایز باشد ، و لیست باید حد اقل یک حرف مکرر داشته باشد؟

پاسخ
الف - ملاحظه می کنید که هفت حرف وجود دارد ، پس $7! = 5040$ لیست وجود دارد.
ب - دو حرف اول باید صدا دار باشد ، یعنی a ، e باید دو حرف اول باشد. پنج حرف دیگر باقی است پس ، بر اساس اصل ضرب

$$2 * 1 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 2 * 5! = 2 * 120 = 240$$

لیست داریم.
ج – برای پاسخ به این قسمت ،از اصل تفریق استفاده می کنیم. فرض می کنیم U مجموعه تمام لیست هایی باشد که از حروف a, b, c, d, e, f, g ساخته شده و تکرار مجاز است. بر اساس اصل ضرب داریم.

$$|\boldsymbol{U}| = 7 * 7 * 7 * 7 * 7 * 7 * 7 = 7^7 = 823,543$$

توجه دارید که U هم شامل لیست های بدون تکرار است ، مانند (a, g, f, b, d, c, e) و هم لیست هایی که چند حرف مکرر دارند ، مانند (f, g, b, g, a, a, a)
می خواهیم تعداد لیست هایی را پیدا کنیم که حد اقل داری یک حرف مکرر باشند. پس از U تعداد لیست هایی که در آنها مطلقا حروف مکرروجود ندارد ، کسر می کنیم. فرض می کنیم $X \subseteq U$ آن لیست هایی باشد که در آنها حروف مکرر وجود ندارد. پس $|X| = 7!$ است. لذا پاسخ به سئوال مطابق زیر است.

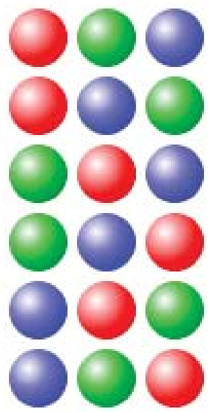
$$|\boldsymbol{U} - \boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{U}| - |\boldsymbol{X}| = 7^7 - 7! = 823,543 - 5,040 = 818,503$$

در مثال ۴.۴.۱ قسمت الف ، تعداد لیست های بدون تکرار از هفت نماد در مجموعه $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ پیدا کردیم ، یعنی $7! = 5040$ از چنین لیست هایی وجود دارد. لیست

هایی مانند $abcdefg, gfedcba, bcedagf$ یک آرایش از اعضای X در یک ردیف است.
برای این آرایش یک نام وجود دارد. به آن یک **جایگشت** X می گویند.
یک **جایگشت** **Permutation** از یک مجموعه عبارت است از یک آرایش از تمام اعضای آن مجموعه در یک ردیف ، یعنی یک لیست بدون تکرار که تمام اعضای مجموعه را بکار برد. مثلا جایگشت مجموعه $X = \{۱, ۲, ۳\}$ عبارت است از شش لیست مطابق زیر.

۳۲۱،۳۱۲،۲۳۱،۲۱۳،۱۳۲،۱۲۳

طبق تعریف جایگشت $۶ = ۱ * ۲ * ۳ = !۳$ تعداد شش لیست بدون تکرار می توان از سه نماد موجود در X ساخت.
یا فرض کنید سه کتاب مختلف داریم و می خواهیم آنها را دریک قفسه جای دهیم. شش طریق برای جا دادن آنها در یک قفسه وجود دارد. جایگشت سه توپ با رنگ های مختلف را در نظر بگیرید.



بطور کلی ، یک مجموعه با n جزء ، دارای $n!$ جایگشت مختلف دارد.

اینک به انواع جایگشت یک مجموعه X می پردازیم. فرض کنید ، یک مجموعه X که دارای پنج عضو یا جزء است داریم و می خواهیم سه عضو آنرا ، بدون تکرار در یک ردیف آرایش دهیم چند نوع از چنین ردیف هایی وجود دارد ؟ یا به عبارت دیگر اگر $|X| = n$ باشد ، و یک عدد صحیح نا منفی k داشته باشیم ، بطوری که $k \le n$ باشد، می خواهیم جایگشت k تائی X را پیدا کنیم.
پس دو حالت زیر خواهیم داشت.

جایگشت X عبارت است از یک لیست بدون تکرار مشتمل از کلیه اجزاءX

جایگشت k تائی X عبارت است از یک لیست بدون تکرار k عضو X .

مثلا فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ باشد. جایگشت یک تائی X عبارت است از لیست هایی که فقط از یک عضو از اعضای X درست شده باشد. چهارچنین لیست هایی داریم. یعنی

$a \quad b \quad c \quad d$

جایگشت دو تائی X عبارت است از لیست های بدون تکرار که می توانیم از دو عضو X بسازیم. ۱۲ لیست داریم.

$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc$

مسلم است که قبل از نوشتن تمام لیست ها ، می دانیم که ۱۲ لیست داریم. زیرا برای اولین عضو ، چهار انتخاب داریم. و برای دومین عضو، سه انتخاب داریم . پس بر اساس اصل ضرب تعداد جایگشت دو تائی بدون تکرار از X عبارت است از $۱۲ = ۳ * ۴$
حالا تعداد جایگشت سه تائی X را می شماریم. این لیست ها دارای سه عضو بدون تکرار از عناصر X هستند. بر اساس اصل ضرب $۲۴ = ۲ * ۳ * ۴$ لیست داریم. مطابق زیر

$$
\begin{array}{cccccc}
abc & acb & bac & bca & cab & cba \\
abd & adb & bad & bda & dab & dba \\
acd & adc & cad & cda & dac & dca \\
bcd & bdc & cbd & cdb & dcb & dcb
\end{array}
$$

جایگست چهار تائی X عبارت است از لیست های بدون تکرار که از تمام ۴ عضو X ساخته شده است.
پس $۲۴ = ۱ * ۲ * ۳ * ۴ = !۴$ جایگشت X داریم.

حالا یک نماد جدید معرفی می کنیم. عبارت $P(n,k)$ نمایش تعداد جایگشت k تائی از یک مجموعه دارای n عنصر. پس بر اساس مثال های بالا داریم.

$$P(۴,0) = ۱, P(۴,۱) = ۴, P(۴,۲) = ۱۲, P(۴,۳) = ۲۴, P(۴,۴) = ۲۴$$

اما ؟= $P(۴,۵)$ این یعنی جایگشت پنج تائی از یک مجموعه چهار عضوی. چنین لیستی وجود ندارد.
پس $P(۴,۵) = 0$

حرف P که در نماد بالا بکار برده شده است ، حرف اول کلمه Permutation است ، به معنی جایگشت.

هنگام ساختن یک لیست بدون تکرار با k عضو از n نماد ، برای عضو اول n انتخاب ، برای عضو دوم $n-۱$ انتخاب ، برای عضو سوم $n-۲$ انتخاب ، برای عضو چهارم $n-۳$ انتخاب داریم.

عضواول	عضو دوم	عضو سوم	عضو چهارم	عضو پنجم	...	عضو k ام
n	$(n-۱)$	$(n-۲)$	$(n-۳)$	$(n-۴)$	$\cdots$	$(n-k+۱)$

ملاحظه می کنید که تعداد انتخاب ها برای عضو i ام مساوی است با $n-i+۱$
مثلا برای عضو پنجم $n-۵+۱ = n-۴$ انتخاب داریم. در نتیجه فرمول زیر را داریم.

$$\boxed{P(n,k) = n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱) \qquad (۴.۴.۲)}$$

پس روی هم رفته k فاکتور یا عامل داریم. لذا برای محاسبه $P(n,k)$ تنها لازم است تعداد k فاکتور را در هم ضرب کنید. مثلا

$$P(۱۰,۱)=۱۰=۱۰$$
$$P(۱۰,۲)=۱۰*۹=۹۰$$
$$P(۱۰,۳)=۱۰*۹*۸=۷۲۰$$
$$P=۱۰*۹*۸*۷=۵۰۴۰$$
$$\vdots$$
$$P(۱۰,۱۰)=۱۰*۹*۸*۷*۶*۵*۴*۳*۲*۱=۳,۶۲۸,۸۰۰$$
$$P(۱۰,۱۱)=۱۰*۹*۸*۷*۶*۵*۴*۳*۲*۱*۰=۰$$

همچنین ملاحظه می کنید که $P(۱۰,۱۰)=۱۰\,!$ است ، پس بطور کلی $P(n,n)=n!$ است.

فرمول دیگری برای محاسبه $P(n,k)$ بدست می آوریم.

$$P(n,k)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)$$
$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)(n-k)(n-k-۱)\cdots۳*۲*۱}{(n-k)(n-k-۱)\cdots۳*۲*۱}=\frac{n۱}{(n-k)!}$$

مثلا برای محاسبه $P(۸,۵)$ دو راه داریم. بر اساس فرمول ۴.۴.۲

$$P(۸,۵)=۸*۷*۶*۵*۴=۶,۷۲۰$$

بر اساس فرمول بالا داریم.

$$P(۸,۵)=\frac{۸!}{۳!}=\frac{۸*۷*۶*۵*۴*۳!}{۳!}=۷۲،۶۰$$

امر مسلم Fact

یک جایگشت k تائی از یک مجموعه n عنصری عبارت است از یک لیست بدون تکرار مشتمل بر k عضو ازآن مجموعه و با نماد $P(n,k)$ نمایش می دهیم. و داریم.

$$P(n,k)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال ۴.۴.۲

ده نفر در مسابقه دوی استقامت شرکت می کنند. چند نوع رده بندی برای نفرهای اول ، دوم و سوم ممکن است وجود داشته باشد؟ در صورتی که هیچ دو دونده مساوی نکرده باشند.

پاسخ

فرض می کنیم نام شرکت کنندگان A,B,C,D,E,F,G,H,I,J باشد ، یک لیست می تواند مثلا ECH

باشد. یعنی E نفر اول ، C نفر دوم و H نفر سوم. تعداد رده بندی ها ۷۲۰ نوع است. مطابق زیر.

$$P(۱۰,۳) = ۱۰* ۹ ۰ ۸ = ۷۲۰$$

تمرینات ۴.۴

۱ - کوچک ترین عدد n را پیدا کنید که $n!$ بیش از ۱۰ رقم داشته باشد.

۲ - چند عدد صحیح مثبت پنج رقمی وجود دارد که هیچ رقم مکرر نداشته باشد و تمام ارقام هم فرد باشند؟

۳ - بدون استفاده از ماشین حساب و یا کامپیوتر ، مقدار $\frac{۱۲۰!}{۱۱۸!}$ را محاسبه کنید.

۴ - چند عدد ۹ رقمی را می توان از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ ساخت ، اگر تکرار مجاز نباشد و تمام ارقام فرد اول ، یعنی سمت چپ ، قرار گیرند؟

۵ - چند جایگشت می توان از حروف A, B, C, D, E, F, G ساخت ، بطوری که حروف ABC پشت سر هم به همین ترتیب داده شده قرار گیرند؟

۶ - چند لیست شش حرفی از ۲۶ حروف انگلیسی می توان ساخت اگر تکرار مجاز نباشد؟

۷- در یک انجمن ۱۵ نفره ، میخواهیم رئیس ، نایب رئیس ، منشی و صدوق دار انتخاب کنیم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

پاسخ تمرینات ۴.۴

۱ - کوچک ترین عدد n را پیدا کنید که $n!$ بیش از ۱۰ رقم داشته باشد.

پاسخ

$$n = ۱۴$$

۲ - چند عدد صحیح مثبت پنج رقمی وجود دارد که هیچ رقم مکرر نداشته باشد و تمام ارقام هم فرد باشند؟

پاسخ

ارقام ۱۳۵۷۹ تشکیل یک عدد صحیح مثبت پنج رقمی می دهند که هیچ رقم مکرر ندارد و تمام ارقام هم فرد هستند. هر جایگشت از این ارقام ، یک عدد پنج رقمی میدهد که شرایط خواسته شده را دارد است.

پس $۵! = ۱۲۰$ از این اعداد داریم.

۳ - بدون استفاده از ماشین حساب و یا کامپیوتر ، مقدار $\frac{۱۲۰!}{۱۱۸!}$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\frac{۱۲۰!}{۱۱۸!} = \frac{۱۲۰* ۱۱۹ * ۱۱۸!}{۱۱۸!} = ۱۲۰* ۱۱۹ = ۱۴,۲۸۰$$

۴ - چند عدد ۹ رقمی را می توان از ارقام $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$ ساخت ، اگر تکرار مجاز نباشد و تمام ارقام فرد اول ، یعنی سمت چپ ، قرار گیرند؟

پاسخ

پنج رقم فرد داریم یعنی ۱۳۵۷۹ و چهار رقم زوج یعنی ۲۴۶۸ داریم. چون ارقام فرد باید سمت چپ قرار گیرند پس !۵ انتخاب و چون ارقام زوج چهار رقم هستند پس !۴ انتخاب داریم. و در نهایت

$$۵! * ۴! = ۲,۸۸۰$$

عدد داریم که شرایط خواسته شده را دارا هستند. یکی از این اعداد ۱۳۵۷۹۲۴۶۸ می تواند باشد.

۵ - چند جایگشت می توان از حروف A, B, C, D, E, F, G ساخت ، بطوری که حروف ABC پشت سر هم به همین ترتیب داده شده قرار گیرند؟

پاسخ

حروف ABC را به صورت یک نماد فرض می کنیم. یعنی $[ABC]$ پس می خواهیم جایگشت پنج نماد، یعنی $[ABC], D, E, F, G$ را پیدا کنیم. لذا تعداد جایگشت ها مطابق زیر بدست می آید.

$$۵! = ۱۲۰$$

۶ - چند لیست شش حرفی از ۲۶ حروف انگلیسی می توان ساخت اگر تکرار مجاز نباشد؟

پاسخ

$$P(۲۶,۶) = \frac{۲۶!}{(۲۶-۶)!} = \frac{۲۶!}{۲۰!} = \frac{۲۶ * ۲۵ * ۲۴ * ۲۳ * ۲۲ * ۲۱ * (۲۰!)}{۲۰!}$$
$$= ۱۶۵,۷۶۵,۶۰۰$$

۷- در یک انجمن ۱۵ نفره ، میخواهیم رئیس ، نایب رئیس ، منشی و صدوق دار انتخاب کنیم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

پاسخ

$$P(۱۵,۴) = \frac{۱۵!}{(۱۵-۴)!} = \frac{۱۵!}{۱۱!} = \frac{۱۵ * ۱۴ * ۱۳ * ۱۲ * (۱۱!)}{۱۱!} = ۱۵ * ۱۴ * ۱۳ * ۱۲$$
$$= ۳۲,۷۶$$

۴.۵ ـ شمارش زیر مجموعه ها Counting Subsets

در بخش قبل در مورد شمارش لیست هایی صحبت کردیم که با انتخاب k عضو از یک مجموعه n عنصری ساخته می شوند.
حالا سوال دیگری شبیه مطرح می کنیم. چند **زیر مجموعه** می توان با انتخاب k عضو از n عضو یک مجموعه ساخت؟

برای درک تفاوت این دو مساله مثالی می آوریم. فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. حالا در نظر بگیرید ، لیست های بدون تکرار که با انتخاب دو عضو A ساخته می شوند. بر اساس **امر مسلم** بخش ۴.۴ می گوییم $P(۵,۲) = ۵ * ۴ = ۲۰$ نوع از چنین لست هایی داریم. در آن بخش این نوع لیست ها را ، **جایگشت ۲ تائی از مجموعه ۵ عضوی A نامیدیم** ، در ذیل ۲۰ جایگشت دو تائی A را ملاحظه می کنید.

(a, b) (a, c) (a, d) (a, e) (b, c) (b, d) (b, e) (c, d) (c, e) (d, e)
(b, a) (c, a) (d, a) (e, a) (c, b) (d, b) (e, b) (d, c) (e, c) (e, d)

اما فقط ۱۰ زیر مجموعه ۲ عضوی از مجموعه A داریم. مطابق زیر.

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$

چرا تعداد لیست ها بیش از تعداد زیر مجموعه است؟ دلیل این است که تغییر ترتیب عضو های یک لیست ، ایجاد یک لیست متفاوت می کند. اما تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه ، آن مجموعه را تغییر نمی دهد. مثلا $(a, b) \neq (b, a)$ اما $\{a, b\} = \{b, a\}$ است.

در بعضی از کتب ریاضی ، بجای شمارش زیر مجموعه ، کلمه **ترکیب Combination** بکار می برند.

در بخش ۴.۴ گفتیم ، **جایگشت k تائی از یک مجموعه دارای n عضو** عبارت است از یک لیست بدون تکرار k عضو از n عضو.

اما

ترکیب عبارت است از انتخاب k عضو از n عضو در صورتی که تکرار مهم نباشد.

نماد $P(n, k)$ را برای جایگشت k تائی بکار بردیم.
اما
نماد $C(n, k)$ یا C_n^k یا $\binom{n}{k}$ برای ترکیب بکار می بریم , C حرف اول کلمه Combination است.

پس شمارش زیر مجموعه ها و ترکیب k تائی از n یکی هستند و ممکن است بجای یکدیگر در این کتاب و کتب دیگر ریاضی بکار روند.

در این بخش ، کلمه زیر مجموعه را بجای لیست و جایگشت بکار می بریم ، زیرا ترتیب قرار گرفتن اعضای زیر مجموعه مهم نیست.

-تعریف اگر n و k اعداد صحیح باشند ، پس $\binom{n}{k}$ یا C_n^k یا $C(n,k)$ عبارت است از تعداد زیر مجموعه هایی که می‌توان با انتخاب k عضو از یک مجموعه n عضوی ساخت. فراموش نشود هنگامی که کلمه زیر مجموعه بکار می بریم ، یعنی ترتیب قرار گرفتن اعضا ، مهم نیست.
می توان بجای زیر مجموعه ، بگوییم جایگشت k عضو از n عضو در صورتی که ترتیب قرار گرفتن اعضا مهم نباشد.

امر مسلم – اگر $0 \le k \le n$ باشد ، پس

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

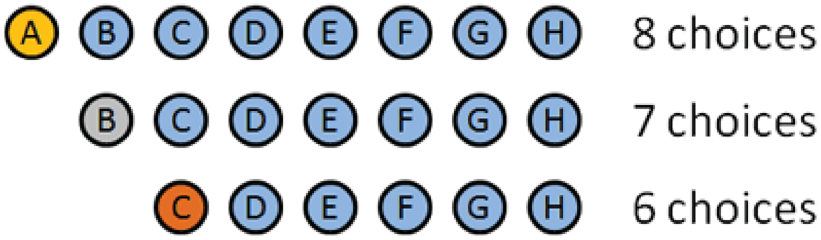
در غیر این صورت

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = C_n^k = 0$$

اثبات
اجازه دهید با جایگشت یا Permutation شروع کنیم. می دانید ، **جایگشت عبارت است تمام راه های ممکن انجام کاری.** فرض کنید ۸ نفر داریم. و فرض می کنیم حرف اول نام آنها مطابق زیر است.

$$A, B, C, D, E, F, G, H$$

می خواهیم سه مدال طلا ، نقره و برنز به سه نفر از این هشت نفر اهدا کنیم. به چند طریق می توانیم این مدال ها را اهدا کنیم؟



اینجا ، عمل جایگشت انجام می دهیم. چون ترتیب اهدا این مدال ها مهم است. پس به طریق زیر عمل می کنیم.

مدال طلا :۸ انتخاب داریم. فرض می کنیم شخص A مدال طلا را می برد.

مدال نقره :۷ انتخاب داریم. فرض می کنیم شخص B مدال نقره را می برد.

مدال برنز :۶ انتخاب داریم.

پس تعداد انتخاب ها $۳۳۶ = ۶ * ۷ * ۸$ است. توضیح بیشتر می دهیم. بین هشت نفر می بایستی سه نفر را انتخاب کنیم. از هشت شروع کردیم و یک نفر را انتخاب کردیم ، سپس بین هفت نفر باقی مانده ، یک نفر را انتخاب کردیم ، و در نهایت از شش نفر باقی مانده یک نفر را انتخاب کردیم. اینجا مدال های ما تمام شد.
می دانیم که

$$۸! = ۸ * ۷ * ۶ * ۵ * ۴ * ۳ * ۲ * ۱$$

اما این خیلی زیاد است. فقط $۶ * ۷ * ۸$ داریم. چگونه می توانیم در $۵!$ متوقف شویم؟ چگونه می توانیم از شر $۱ * ۲ * ۳ * ۴ * ۵$ خلاص شویم؟ نام دیگر این ارقام چیست؟ فاکتوریال ؟ پس اگر $۸!$ را بر $۵!$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت.

$$\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ * ۷ * ۶ * ۵ * ۴ * ۳ * ۲ * ۱}{۵ * ۴ * ۳ * ۲ * ۱} = ۸ * ۷ * ۶$$

اما چرا عدد ۵ را انتخاب کردیم؟ زیرا این عدد باقی مانده بود هنگامی که سه نفر از هشت نفر انتخاب کردیم. یعنی

$$\frac{۸!}{(۸ - ۳)!}$$

پس می گوییم اگر n شئ داشتیم و بخواهیم k شئ آنرا به ترتیب معینی انتخاب کنیم ، فرمول زیر را بکار می بریم.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

اما ، در ترکیب و یا زیر مجموعه ترتیب مهم نیست. فرض کنید بجای مدال های طلا ، نقره و برنز ، بخواهیم به هر یک از آن سه نفر یک قوطی پپسی بدهیم. به چند طریق می توانیم سه قوطی پپسی را به هشت نفر بدهیم؟

خوب ، در این حالت ترتیب انتخاب افراد مهم نیست. یک قوطی به A سپس B و در نهایت به C می دهیم. اگر اول به C بعد به A و در نهایت به B قوطی پپسی بدهیم ، تفاوت نمی کند. یعنی

$$\{A, B, C\} = \{C, A, B\}$$

اینجا یک کمبود داریم.

به چند طریق می توانیم این سه نفر را انتخاب کنیم؟ معلوم است برای شخص اول ۳ انتخاب داریم ، برای شخص دوم ۲ انتخاب و برای شخص سوم ۱ انتخاب داریم. پس $۶ = ۱ * ۲ * ۳$ طریق می توانیم این سه نفر را انتخاب کنیم. پس اگر سه قوطی پپسی داشته باشیم و بخواهیم آنها را به سه نفر بدهیم ، $۳! = ۶$ نوع انتخاب داریم. اگر بخواهیم تعداد ترکیبات حساب کنیم باید **تمام جایگشت ها را پیدا کنیم و بر تمام کمبود ها یعنی $۳! = ۶$ تقسیم کنیم.** در این مثال تمام جایگشت ها ۳۳۶ بود و کمبود ها $۳! = ۶$ پس داریم

$$\frac{۳۳۶}{۶} = ۵۶$$

یعنی ۵۶ طریق می توانیم سه قوطی پپسی بین هشت نفر تقسیم کنیم. یا بطور کلی

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n - k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n - k)!}$$

مثال ۴.۵.۱
چند زیر مجموعه ۴ عضوی می توان از $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ساخت؟ یا تعداد ترکیبات ۴ تائی از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ را پیدا کنید.
پاسخ

$$\binom{۹}{۴} = \frac{۹!}{۴!\,(۹-۴)!} = \frac{۹!}{۴! * ۵!} = \frac{۹ * ۸ * ۷ * ۶ * ۵!}{۴! * ۵!} = \frac{۹ * ۸ * ۷ * ۶}{۲۴} = \frac{۹ * ۷ * ۶}{۳}$$
$$= ۹ * ۷ * ۲ = ۱۲۶$$

مثال ۴.۵.۲
چند زیر مجموعه ۵ عضوی می توان از $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ساخت که فقط دو عضو زوج داشته باشد ؟
پاسخ
ساختن یک زیر مجموعه ۵ عضوی که فقط ۲ عضو زوج داشته باشد ، شامل دو مرحله است.
مجموعه داده شده دارای ۴ عضو زوج است ، پس از ۴ عضو زوج ۲ تا انتخاب می کنیم. برای این کار $\binom{۴}{۲} = ۶$ طریق برای این کار داریم. حالا ، تعداد $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ طریق وجود دارد که سه عضو از پنج عضو فرد انتخاب کنیم. بر اساس اصل ضرب تعداد $۶۰ = ۶ * ۱۰ = \binom{۵}{۳}\binom{۴}{۲}$ طریق وجود دارد که دو عضو زوج و سه عضو فرد از مجموعه A انتخاب کنیم. لذا ۶۰ زیر مجموعه از مجموعه A وجود دارد که فقط دو عضو زوج دارند.

مثال ۴.۵.۲
چند خط می توانید از سه نقطه غیر هم خط A, B, C روی یک صفحه رسم کنید؟
پاسخ
می دانیم که برای رسم یک خط به دو نقطه احتیاج داریم. ترتیب مهم نیست. خط AB همان خط BA است. پس باید برای رسم یک خط ، دو نقطه از سه نقطه انتخاب کنیم. لذا برای رسم خط ها نقاط زیر را می توانیم انتخاب کنیم.

$$AB, AC, BA, BC, CA, CB$$

اما مشکلی داریم. خط AB و BA یکی هستند. همین طور CA و AC همچنین BC و CB
پس فقط سه خط AB, BC, AC داریم. پس در حقیقت می توانیم ۳ خط و نه ۶ خط رسم کنیم , چون ترتیب مهم نیست. اینجا ترکیب داریم. ترکیب ۲ شئ از ۳ شئ.

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{۳!}{۲!\,(۳-۲)!} = \frac{۶}{۲(۱)} = ۳$$

مثال ۴.۵.۳
می خواهیم یک تیم ۵ نفره از ۱۲ دانش آموز تشکیل دهیم. چند نوع تیم مختلف می توان ساخت؟
پاسخ
در صورت مساله چیزی در مورد ترتیب انتخاب اعضای تیم گفته نشده است. پس ، ترکیب داریم.

$$C(۱۲,۵) = \frac{۱۲!}{۵!\,(۱۲-۵)!} = \frac{۱۲!}{۵! * ۷!} = \frac{۱۲ * ۱۱ * ۱۰ * ۹ * ۸ * ۷!}{۵! * ۷!} = ۱۱ * ۹ * ۸ = ۷۹۲$$

مثال ۴.۵.۴
چند مثلث می توان از ۶ نقطه غیر هم خط رسم کرد؟
پاسخ
برای رسم هر مثلث ۳ نقطه لازم است. پس ترکیب ۳ از ۶ داریم.

$$C(۶,۳) = \frac{۶!}{۳!\,(۶-۳)!} = \frac{۶!}{۳! * ۳!} = \frac{۶ * ۵ * ۴ * ۳!}{۳! * ۳!} = ۵ * ۴ = ۲۰$$

مثال ۴.۵.۵
می خواهیم یک کمیته متشکل از ۳ پسر و ۴ دختر از یک گروه متشکل از ۱۰ پسر و ۱۲ دختر تشکیل دهیم. چند نوع مختلف از این نوع کمیته می توان تشکیل داد؟
پاسخ

$$C_{۱۰}^{۳} * C_{۱۲}^{۴} = ۵۹۴۰۰$$

تمرینات ۴.۵

۱ - فرض کنید مجموعه A دارای ۳۷ عضو است. چند زیر مجموعه A دارای ۱۰ عضو است؟ چند زیر مجموعه دارای ۳۰ عضو است؟ چند زیر مجموعه هیچ عضوی ندارد؟

۲ - مجموعه X دقیقا دارای ۵۶ زیر مجموعه ۳ عضوی دارد. اندازه یا تعداد اعضای X را پیدا کنید.

۳ – چند نوع اعداد دو تائی ۱۶ رقمی دقیقا هفت ۱ دارد؟ مثلا 0111000011110000 یا 0011001100110010 دو نمونه از این نوع اعداد دو تائی است.

۴ - می خواهیم لیست هایی دارای ۶ عضو از حروف A, B, C, D, E, F بدون تکرار بسازیم بطوری که حرف D قبل از حرف A باشد. چند نوع از چنین لیستی وجود دارد ؟

۵ - چند عدد صحیح ۱۰ رقمی وجود دارد ، بطوری که هیچ صفری در آنها نباشد و دقیقا داری سه ۶ باشد؟

۶ - فرض کنید $n,k \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq k \leq n$ باشد. با استفاده از این حقیقت $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ نشان دهید که $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ است.

پاسخ تمرینات ۴.۵

۱ - فرض کنید مجموعه A دارای ۳۷ عضو است. چند زیر مجموعه A دارای ۱۰ عضو است؟ چند زیر مجموعه دارای ۳۰ عضو است؟ چند زیر مجموعه هیچ عضوی ندارد؟

پاسخ

$$\binom{۳۷}{۱۰} = ۳۴۸,۳۳۰,۱۳۶ \ , \binom{۳۷}{۳۰} = ۱۰,۲۹۵,۴۷۲, \binom{۳۷}{۰} = ۱$$

۲ - مجموعه X دقیقا دارای ۵۶ زیر مجموعه ۳ عضوی دارد. اندازه یا تعداد اعضای X را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم پاسخ ما n باشد. پس داریم. $\binom{n}{۳} = ۵۶$ با چند عملیات خواهیم داشت $\binom{۸}{۳} = ۵۶$

پس $|X| = ۸$

۳ – چند نوع اعداد دو تائی ۱۶ رقمی دقیقا هفت ۱ دارد؟ مثلا 0111000011110000 یا 0011001100110010 دو نمونه از این نوع اعداد دو تائی است.

پاسخ

با ۱۶ جعبه خالی شروع می کنیم سپس هفت جعبه را با عدد ۱ پر می کنیم. و سپس دربقیه جاهای خالی 0 می گذاریم. پس داریم. $\binom{۱۶}{۷} = ۱۱,۴۴۰$ نمونه از این نوع اعداد دو تائی داریم. چند نمونه در زیر می آوریم.

0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1

۴ - می خواهیم لیست هایی دارای ۶ عضو از حروف A,B,C,D,E,F بدون تکرار بسازیم بطوری که حرف D قبل از حرف A باشد. چند نوع از چنین لیستی وجود دارد ؟

پاسخ

با شش جعبه خالی شروع می کنیم. دو تا از این جعبه ها را انتخاب می کنیم. حرف D را در جعبه انتخابی اول می گذاریم و A را در جای انتخابی دوم می گذاریم. پس $\binom{6}{2} = 15$ طریق برای این انتخاب داریم. برای هر کدام از این ۱۵ انتخاب ، $4! = 24$ راه برای پر کردن جاهای خالی باقی مانده داریم. لذا پاسخ مساله $15 \times 24 = 360$ است. یعنی ۳۶۰ نوع از چنین لیستی داریم.
چند نمونه را در زیر می آوریم.

		D	**A**			

					D	**A**

D	**A**					

۵ - چند عدد صحیح ۱۰ رقمی وجود دارد ، بطوری که هیچ صفری در آنها نباشد و دقیقا داری سه ۶ باشد؟

پاسخ

با ۱۰ جعبه خالی شروع می کنیم.

حالا داخل سه تا از این جعبه ها عدد ۶ می گذاریم.

۶	۶	۶							

یک نمونه دیگر

			۶		۶		۶		

الی آخر.

پس $\binom{10}{3} = 120$ راه برای این کار داریم. برای هر یک از این ۱۲۰ انتخاب ، هفت جای خالی داریم که می توانیم با اعداد $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ پر کنیم. برای این کار 8^7 طریق در پیش داریم. پس پاسخ مساله $\binom{10}{3} \times 8^7 = 251,658,240$ است.

۶ - فرض کنید $n, k \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq k \leq n$ باشد. با استفاده از این حقیقت $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ نشان دهید که $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ است.

پاسخ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

۴.۶ ـ مثلث پاسکال و قضیه دو جمله ای Pascal's Triangle and the Binomial Theorem

چند نمونه و الگوی زیبا و مهم در مورد اعداد $\binom{n}{k}$ وجود دارد. یک نمونه را اینجا می آوریم

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad (4.6.1)$$

تساوی بالا برای هر عدد صحیح k و n در صورتی که $1 \leq k \leq n$ باشد ، صحیح است.

عبارت بالا به **همانی پاسکال** **Pascal's Identity** و یا اتحاد پاسکال معروف است.

اثبات اتحاد پاسکال

فرض می کنیم n یک عدد صحیح مثبت و $0 \leq k \leq n$ باشد.

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{n! * k}{(k-1)!\,(n-k+1)! * k} + \frac{n! * (n-k+1)}{k!\,(n-k)! * (n-k+1)}$$
$$= \frac{n! * k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n! * (n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{n! * k + n! * (n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$
$$= \binom{n+1}{k}$$

اثبات به روش دیگر

برای نشان دادن صحت عبارت بالا ، ملاحظه می کنید که سمت چپ یعنی $\binom{n+1}{k}$ عبارت است از تعداد زیر مجموعه های k عضوی از مجموعه $A = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$ که دارای $n+1$ عضو است. چنین زیر مجموعه ای یا شامل 0 است و یا شامل 0 نیست. سمت راست عبارت $\binom{n}{k-1}$ است از تعداد زیر مجموعه های A که شامل 0 است ، زیرا برای ساختن چنین زیر مجموعه ای می توانیم با $\{0\}$ شروع کنیم و $k-1$ زیر مجموعه از $\{1, 2, 3, \cdots n\}$ انتخاب و به آن اضافه کنیم. برای این کار $\binom{n}{k-1}$ راه داریم.همچنین ، $\binom{n}{k}$ سمت راست ، عبارت است از تعداد زیر مجموعه

های A که شامل 0 نیست ، زیرا $\binom{n}{k}$ عبارت است از تعداد راه هایی که می توان k عضو از $\{۱, ۲, ۳, \cdots n\}$ انتخاب کرد.

پس با توجه به گفته های بالا، عبارت (۴.۶.۱) این حقیقت را بیان می کند که **تعداد زیر مجموعه های k عضوی A مساوی است با تعداد زیر مجموعه های k عضوی که شامل 0 هستند به اضافه تعداد زیر مجموعه های k عضوی که شامل 0 نیستند.**

حال که صحت عبارت (۴.۶.۱) نشان دادیم ، برای روشن ترشدن آن ، $\binom{n}{k}$ را در یک مثلث نشان می دهیم.

تصویر ۴.۶.۱ اعداد $\binom{n}{k}$ را نشان می دهد که به شکل یک هرم آراسته شده با $\binom{0}{0}$ در راس آن ، درست بالای ردیفی که شامل $\binom{۱}{k}$ است با $k = 0$ و $k = ۱$ در زیر این ردیف ، یک ردیف است که مقادیر $\binom{۲}{k}$ را نشان می دهد با $k = 0, ۱, ۲$ و به همین ترتیب الی آخر.

هر عدد $\binom{n+۱}{k}$ برای $0 < k < n$ در این هرم درست زیر و بین دو عدد $\binom{n}{k-۱}$ و $\binom{n}{n}$ در ردیف قبل از آن قرار دارد. اما ، عبارت (۴.۶.۱) می گوید $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱} = \binom{n+۱}{k}$ است.

لذا هر عددی ، بجز ۱ , در این هرم ، مساوی است با مجموع دو عدد بلا فاصله بالای آن.

این روال ، مخصوصا درتصویر ۴.۶.۲ نمایان است. مثلا در ردیف ششم در تصویر ۴.۶.۲ عدد ۶ مساوی است با ۵ + ۱ درست بالای آن. و ۱۰ + ۵ = ۱۵ و ۱۰ +۱۰ = ۲۰ و الی آخر.

تصویر ۴.۶.۱

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{3}$$

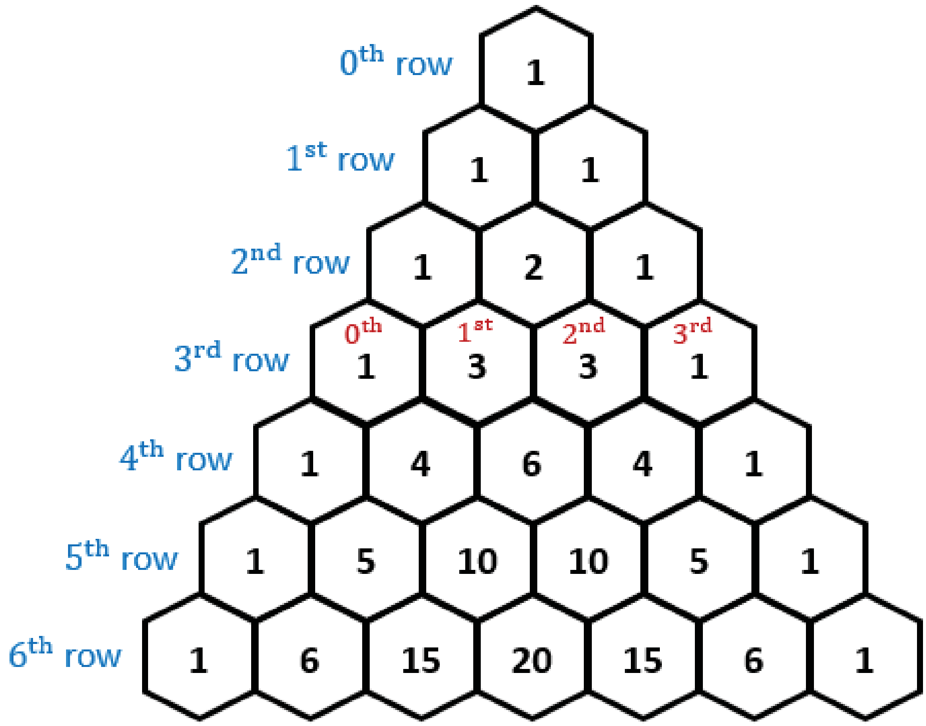
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

تصویر ۴.۶.۲



این مثلث یا هرم را **مثلث پاسکال** **Pascal's Triangle** می نامند. پاسکال ریاضی دان و فیلسوف فرانسوی درسال های ۱۶۲۳-۱۶۶۲می زیست. پاسکال خواص بسیاری برای این مثلث کشف کرد.
این مثلث هم بنام **مثلث خیام – پاسکال** نامیده می شود. گر چه این دو در یک عصر زندگی نمی کردند.
خیام بین سالهای ۱۰۶۰ و ۱۱۳۱ میلادی می زیست. نمی دانم آیا پاسکال از مثلث خیام اطلاع داشته است و یا نه.
در تصاویر بالا فقط شش ردیف را نشان داده ایم. اما مثلث، تا بی نهایت ادامه دارد. می توانیم یک ردیف به آن اضافه کنیم ، به این صورت که یک ۱ به هر دو انتها اضافه کنیم و اعداد باقی مانده را با اضافه کردن دو عدد بالای آن ، بدست آوریم. مثلا برای ردیف هفتم خواهیم داشت.

$$1\ \ 7\ \ 21\ \ 35\ \ 35\ \ 21\ \ 7\ 1$$

و برای ردیف هشتم خواهیم داشت.

$$1\ \ 8\ \ 28\ \ 56\ \ 70\ \ 56\ \ 28\ \ 8\ \ 1$$

ردیف هشت شامل اعداد $\binom{8}{k}$ است با $0 \le k \le 8$ و می توانیم آنها را بدون فرمول

$$\binom{8}{k} = \frac{8!}{k!\,(8-k)!}$$

پیدا کنیم . هر کدام از اعداد $\binom{n}{k}$را از این طریق پیدا کنیم.

اولین و بالا ترین ردیف که فقط شامل 1 است ، ردیف صفر نامیده می شود. ردیف یک ، زیر ردیف صفر است. بعد از آن ردیف ۲ است بعد ردیف ۳ و الی آخر. پس ردیف n اعداد $\binom{n}{k}$ است با $n \le k \le 0$ در تمرین این بخش نشان می دهیم که برای $0 \le k \le n$ داریم.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (۴.۶.۲)$$

توجه :اعداد $\binom{n}{k}$ را ضریب های دو جمله ای می نامند.

تصویر ۴.۶.۳

$$1$$
$$1x + 1y$$
$$1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$
$$1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

تصاویر ۴.۶.۳ و ۴.۶.۲ را با هم مقایسه کنید. به نتیجه جالبی می رسیم. که در مثال زیردر مورد آن صحبت می کنیم.

مثال ۴.۶.۱ ردیف n ام مثلث پاسکال ، ضریب های $(x+y)^n$ را به ترتیب مشخص می کند. مثلا $(x+y)^۲ = ۱x^۲ + ۲xy + ۱y^۲$ و ملاحظه می کنید که ردیف دوم مثلث ، ضریب های ۱ ۲ ۱ را به ترتیب نشان می دهد. همچنین $(x+y)^۳ = ۱x^۳ + ۳x^۲y + ۳xy^۲ + ۱y^۳$ و ردیف سوم ۱ ۳ ۳ ۱ است. و در نهایت نتیجه می گیریم اعداد ردیف n ضریب های $(x+y)^n$ هستند.
این حقیقت بنام **قضیه دو جمله ای Binomial Theorem** معروف است.

قضیه ۴.۶.۱ **قضیه دو جمله ای**
اگر n یک عدد صحیح نا منفی باشد ، پس

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{۳}x^{n-۳}y^۳ + \cdots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n \qquad (۴.۶.۱)$$

و یا

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲ + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + y^n \qquad (۶.۴.۲)$$

و یا

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \qquad (۶.۴.۳)$$

اثبات ، از طریق استقرا Induction

برای اثبات قضیه، به اتحاد پاسکال احتیاج داریم. یعنی

$$\binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k} = \binom{n+۱}{k} \quad ، \qquad 0 < k \leq n$$

می خواهیم ثابت کنیم که

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{۱} x^{n-۱} y + \binom{n}{۲} x^{n-۲} y^۲ + \cdots + \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + \cdots + \binom{n}{n-۱} x y^{n-۱} + y^n$$

است.

واضح است که نتیجه برای $n = ۱$ و $n = ۲$ صحیح است.

$$(x+y)^۱ = x + y$$
$$(x+y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

حال فرض می کنیم برای یک عدد صحیح مثبت $k \geq ۲$ عبارت $(۴.۶.۲)$ صحیح باشد. پس

$$(x+y)^k = x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} y + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 + \cdots + \binom{k}{r} x^{k-r} y^r + \cdots + \binom{k}{k-۱} x y^{k-۱} + y^k \qquad (۶.۴.۴)$$

حال عبارت بسط داده شده زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{k+۱} \\
&= (x+y)(x+y)^k \\
&= (x+y)\left(x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} y + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 + \cdots + \binom{k}{r} x^{k-r} y^r + \cdots + \binom{k}{k-۱} x y^{k-۱} + y^k\right) \\
&= x^{k+۱} + \left[۱ + \binom{k}{۱}\right] x^k y + \left[\binom{k}{۱} + \binom{k}{۲}\right] x^{k-۱} y^۲ + \cdots \\
&\cdots + \left[\binom{k}{r-۱} + \binom{k}{r}\right] x^{k-r+۱} y^r + \cdots + \left[\binom{k}{k-۱} + ۱\right] x y^k + y^{k+۱}
\end{aligned}$$

بر اساس اتحاد پاسکال یا همان عبارت $(۴.۶.۱)$ داریم.

$$(x+y)^{k+۱} = x^{k+۱} + \binom{k+۱}{۱} x^k y + \cdots + \binom{k+۱}{r} x^{k-r+۱} y^r + \cdots + \binom{k+۱}{k} x y^k + y^{k+۱}$$

پس عبارت $(۶.۴.۴)$ برای $k + ۱$ صحیح است و لذا بر اساس استقرا, قضیه ثابت می شود.

حالا عبارت ۴.۶.۳ را ثابت می کنیم. یعنی برای هر عدد حقیقی x و y و عدد صحیح نا منفی n داریم.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

یاد آوری $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ که همان ضریب دو جمله ای است.

واضح است که $(x+y)^۱ = x + y$

حال فرض می کنیم

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

صحیح باشد. باید ثابت کنیم عبارت بالا برای $n+۱$ هم صحیح است.

$$(x+y)^{n+۱} = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k)(x+y)$$

$$= (\binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{۱} x^{n-۱} y^۱ + \binom{n}{۲} x^{n-۲} y^۲ + \cdots + \binom{n}{n} a^0 y^n)(x+y)$$

$$= (\binom{n}{0} x^{n+۱} y^0 + \binom{n}{۱} x^n y^۱ + \binom{n}{۲} x^{n-۱} y^۲ + \cdots + \binom{n}{n} x^۱ y^n)$$

$$+(\binom{n}{0} x^n y^۱ + \binom{n}{۱} x^{n-۱} y^۲ + \binom{n}{۲} x^{n-۲} y^۳ + \cdots + \binom{n}{n} x^n y^{n+۱})$$

$$= (\binom{n}{0} x^{n+۱} y^0 + (\binom{n}{0} + \binom{n}{۱})(x^n y^۱) + (\binom{n}{۱} + \binom{n}{۲})(x^{n-۱} y^۲)$$

$$+ \cdots + (\binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n})(x^۱ y^n) + \binom{n}{n} x^0 y^{x+۱})$$

$$= \binom{n+۱}{0} x^{n+۱} y^0 + \binom{n+۱}{۱} x^n y^۱ + \binom{n+۱}{۲} x^{n-۱} y^۲ + \cdots + \binom{n+۱}{n} x^۱ y^n$$

$$+ \binom{n+۱}{n+۱} x^0 y^{n+۱}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+۱} \binom{n+۱}{k} x^{(n+۱)-k} y^k$$

مثال ۴.۶.۲

$$(x+y)^۷ = x^۷ + ۷x^۶ y + ۲۱x^۵ y^۲ + ۳۵x^۴ y^۳ + ۳۵x^۳ y^۴ + ۲۱x^۲ y^۵ + ۷xy^۶ + y^۷$$

مثال ۴.۶.۳

$$(۲a-b)^۴ = \left((۲a)+(-b)\right)^۴$$
$$= (۲a)^۴ + ۴(۲a)^۳(-b) + ۶(۲a)^۲(-b)^۲ + ۴(۲a)(-b)^۳ + (-b)^۴$$
$$= ۱۶a^۲ - ۳۲a^۳b + ۲۴a^۲b^۲ - ۸ab^۳ + b^۴$$

تمرینات ۶.۴

۱ - ردیف یازدهم مثلث پاسکال را بنویسید.

۲ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، ضریب $x^۸$ در $(x+۲)^{۱۳}$ را پیدا کنید.

۳ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = ۲^n$

۴ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $\sum_{k=0}^{n} ۳^k\binom{n}{k} = ۴^n$

۵ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\binom{n}{۳}+\binom{n}{۴}-\binom{n}{۵}+\cdots\pm\binom{n}{n}=0$$

۶ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $۹^n = \sum_{k=0}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}۱0^{n-k}$

۷ - نشان دهید $\binom{n}{۳} = \binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\cdots+\binom{n-۱}{۲}$

پاسخ تمرینات ۴.۶

۱ - ردیف یازدهم مثلث پاسکال را بنویسید.

پاسخ ۱ ۱۱ ۵۵ ۱۶۵ ۳۳۰ ۴۶۲ ۴۶۲ ۳۳۰ ۱۶۵ ۵۵ ۱۱ ۱

۲ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، ضریب $x^۸$ در $(x+۲)^{۱۳}$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر به مثال ۴.۶.۲ توجه کنید ، ملاحظه می کنید که مجموع توان های x یا و y ها مساوی با عدد n یعنی ۷ است. پس حالا که توان x مساوی ۸ است ، پس توان $y=۲$ باید $۵ = ۸ - ۱۳$ باشد.

پس در حقیقت باید ضریب $x^۸(۲)^۵$ را در $(x+۲)^{۱۳}$ را پیدا کنیم. یعنی $\binom{۱۳}{۵} = ?$

$$\binom{۱۳}{۵} = \frac{۱۳!}{۵!\,(۱۳-۵)!} = \frac{۱۳!}{۵!\,۸!} = \frac{۱۳*۱۲*۱۱*۱۰*۹*۸!}{۵!\,۸!} = \frac{۱۳*۱۲*۱۱*۱۰*۹}{۵!}$$
$$= \frac{۱۵۴۴۴۰}{۱۲۰} = ۱۲۸۷$$

حال این عدد را در $۳۲ = ۲^۵$ ضرب می کنیم. پس داریم. $۴۱۱۸۴ = ۳۲ * ۱۲۸۷$ و در نهایت $۴۱۱۸۴x^۸$

۳ ـ با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$

پاسخ

می دانید که $۲^n = (۱+۱)^n$ است. پس با استفاده از قضیه دو جمله ای با $x = ۱$ و $y = ۱$ داریم

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n$$

با قرار دادن $x = ۱$ و $y = ۱$ داریم.

$$(۱+۱)^n = \binom{n}{0}۱^n + \binom{n}{۱}۱^{n-۱}*۱ + \binom{n}{۲}۱^{n-۲}*۱^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱}۱*۱^{n-۱} + \binom{n}{n}۱^n$$

پس داریم.

$$۲^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

۴ ـ با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $\sum_{k=0}^{n} ۳^k \binom{n}{k} = ۴^n$

پاسخ

واضح است که $۴^n = (۳+۱)^n$ حالا مطابق تمرین شماره ۳ عمل می کنیم. یعنی $x = ۱$ و $y = ۳$ فرض می کنیم. پس داریم.

$$(۱+۳)^n = \binom{n}{0}۱^n + \binom{n}{۱}۱^{n-۱}*۳ + \binom{n}{۲}۱^{n-۲}*۳^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱}۱*۳^{n-۱} + \binom{n}{n}۳^n$$

$$۴^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{۱}۳ + \binom{n}{۲}۳ + \cdots + \binom{n}{n-۱}۳ + \binom{n}{n}۳ = \sum_{k=0}^{n}۳^k\binom{n}{k}$$

۵ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید

پاسخ

ملاحظه می کنید که $0 = 0^n = \left(۱ + (-۱)\right)^n$

حالا قضیه دو جمله ای را بکار می بریم.

$$\left(۱ + (-۱)\right)^n$$
$$= \binom{n}{0} ۱^n + \binom{n}{۱} ۱^{n-۱} * (-۱) + \binom{n}{۲} ۱^{n-۲} * (-۱)^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱} ۱$$
$$* (-۱)^{n-۱} + \binom{n}{n} (-۱)^n$$

ملاحظه می کنید که در تساوی بالا سمت راست ، جمله اول و جمله آخر یکدیگر را خنثی می کنند زیرا جمله اول یک است و جمله آخر یک منفی است. به همین ترتیب جمله دوم و جمله یکی به آخر یکدیگر را خنثی می کنند. الی آخر.

مثالی می زنیم. فرض کنید $n = ۷$ باشد. پس

$$\left(۱ + (-۱)\right)^۷$$
$$= ۱^۷ + ۷(۱)^۶(-۱) + ۲۱(۱)^۵(-۱)^۲ + ۳۵(۱)^۴(-۱)^۳ + ۳۵(۱)^۳(-۱)^۴$$
$$+ ۲۱(۱)^۲(-۱)^۵ + ۷(۱)^۱(-۱)^۶ + (-۱)^۷$$
$$= ۱ - ۷ + ۲۱ - ۳۵ + ۳۵ - ۲۱ + ۷ - ۱ = 0$$

۶ - با استفاده از قضیه دو جمله ای ، نشان دهید $۹^n = \sum_{k=0}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k} ۱0^{n-k}$

پاسخ

ملاحظه می کنید که $\left((-۱) + ۱۰\right)^n = ۹^n$ است ، با استفاده از قضیه دو جمله ای ، روش تمرین شماره ۵ را تکرار می کنیم.

۷ - نشان دهید

$$\binom{n}{۳} = \binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} + \binom{۵}{۲} + \cdots + \binom{n-۱}{۲}$$

پاسخ

فرض می کنیم $n \geq ۳$ باشد ، پس داریم.

$$\binom{n}{۳} = \binom{n-۱}{۳} + \binom{n-۱}{۲} = \binom{n-۲}{۳} + \binom{n-۲}{۲} + \binom{n-۱}{۲} = \cdots$$
$$= \binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n-۱}{۲}$$

۴.۷ - اصل شمول –عدم شمول The Inclusion-Exclusion Principle

یاد آوری: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ باشد ، می گوییم مجموعه A شامل چهار عنصر است. و برای نشان دادن تعداد عناصر مجموعه A می نویسیم.

$$|A| = ۴$$

و می خوانیم تعداد عناصر مجموعه A چهار است و یا کاردینالیتی Cardinality مجموعه A چهار است.

حالا فرض می کنیم A و B دو مجموعه کران دار باشند. میخواهیم تعداد عناصر اتحاد این دو مجموعه را پیدا کنیم. آیا عبارت زیر صحیح است؟

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

پاسخ منفی است. زیرا اگر A و B دارای عناصر مشترک باشند ، انوقت هر کدام از عناصر $A \cap B$ را ، دو مرتبه حساب کرده ایم. مثلا اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ باشد ، آن وقت داریم.

$$|A| = ۴$$
$$|B| = ۴$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| = ۴ + ۴ = ۸$$

اما می دانیم که

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

است ، زیرا می دانیم که تکرار عناصر در مجموعه جایز نیست. پس در حقیقت تعداد عناصر مجموعه $A \cup B$ مطابق زیر است.

$$|A \cup B| = ۶$$

از مثال بالا نتیجه می گیریم که

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

حقیقت ۴.۷.۱

فرمول شمول –عدم شمول

اگر A و B مجموعه های کران دار باشند ، پس

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (۴.۷.۱)$$

ملاحظه می کنید که اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد ، پس خواهیم داشت $|A \cup B| = |A| + |B|$ و در نتیجه اگر $|A \cup B| = |A| + |B|$ باشد ، پس باید $A \cap B = \emptyset$ باشد.

مثال ۴.۷.۱

از ۱۰ دانشجو ، ۵ نفر ریاضیات و ۶ نفر علوم و ۲ نفر هر دو درس را انتخاب کرده اند. چند نفر از این دانشجویان نه ریاضیات انتخاب کرده اند و نه علوم؟

پاسخ

به تصویر ۴.۷.۱ یا دیاگرام ون توجه کنید. T حرف اول $Total$ است به معنی مجموع ، M حرف اول $Mathematics$ است به معنی ریاضیات ، S حرف اول $Sciences$ است به معنی علوم.

می دانیم که ۲ دانشجو ، هر دو درس را انتخاب کرده اند ، پس عدد ۲ را در فصل مشترک این دو درس قرار داده ایم. ۳ دانشجو فقط ریاضیات انتخاب کرده اند و ۴ دانشجو فقط علوم را انتخاب کرده اند. پس داریم. $۹ = ۴ + ۲ + ۳$ در نتیجه $۱ = ۹ - ۱۰$

پس فقط یک دانشجو، هیچ یک از این دو درس را انتخاب نکرده است.

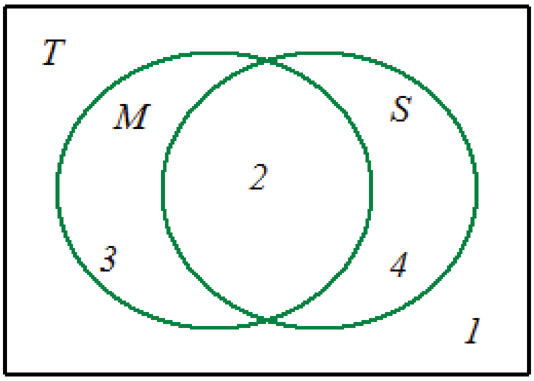


Figure 4.7.1

در نهایت داریم. $|T| = ۱۰, |S| = ۶, |M| = ۵, |M \cap S| = ۲$

مثال ۴.۷.۲

فرض کنید ۱۰ نفر در یک مهمانی شرکت کرده اند. ۴ نفر از این ۱۰ نفر ، کلاه پوشیده اند. چند نفر از این مهمان ها کلاه ، نپوشیده اند؟

پاسخ

فرض می کنیم T تعداد مهمان ها باشد و C تعداد آنها که کلاه پوشیده اند ، باشد. $\sim C$ تعداد مهمان هایی باشد که کلاه نپوشیده اند. پس

$$|\sim C| = |T| - |C| = ۱۰ - ۴ = ۶$$

پس شش نفر از مهمان ها کلاه نپوشیده اند.

مثال ۴.۷.۳

در مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots ۱۰۰\}$ چند عنصر ، بر ۳ بخش پذیر نیست؟

پاسخ

فرض می کنیم D مجموعه مقادیری باشد که بر ۳ بخش پذیر است. پس مقادیری که بر ۳ بخش پذیر نیستند مطابق زیر است.

$$|\sim D| = |S| - |D|$$

میدانیم که $|S| = ۱۰۰$ و $D = \{۳, ۶, ۹, \cdots, ۹۹\}$ و D شامل ۳۳ عضو است. پس

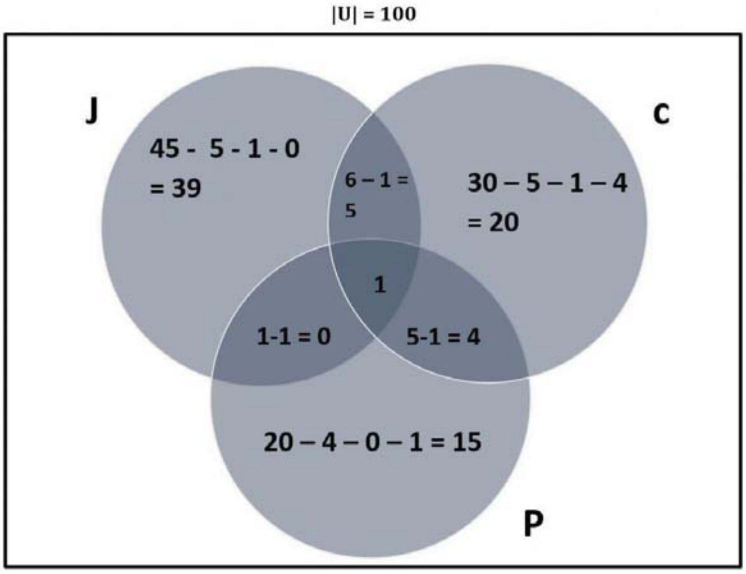
$$|\sim D| = |S| - |D| = ۱۰۰ - ۳۳ = ۶۷$$

لذا ۶۷ عضو از S بر ۳ بخش پذیر نیستند.

مثال ۴.۷.۴

یک شرکت تولید کننده نرم افزار کامپیوتر ، ۱۰۰ برنامه نویس کامپیوتر استخدام کرده است. ۴۵ نفر از آنها متخصص $Java$ و ۳۰ نفر متخصص C^{++} و ۲۰ نفر متخصص $Python$. شش نفر، هم در C^{++} و هم در $Java$ تخصص دارند ، یک نفر، هم در $Java$ و هم در $Python$ تخصص دارد. پنج نفر، هم در C^{++} و هم در $Python$ تخصص دارند. فقط یک نفر در هر سه زبان بالا تخصص دارد. مطلوب است تعداد بر نامه نویس هایی که در هیچ یک از سه زبان بالا ، تخصص ندارند.

پاسخ



فرض می کنیم U تعداد کلیه برنامه نویسان استخدام شده باشد. و فرض می کنیم J، C، P به ترتیب تعداد آنهایی که در $Java, C^{++}, Python$ تخصص دارند ، باشد. پس داریم.

$$|U| = ۱۰۰\,, |J| = ۴۵\,, |C| = ۳۰\,, |P| = ۲۰\,, |J \cap C| = ۶\,, |J \cap P| = ۱\,, |C \cap P| = ۵$$
$$|J \cap C \cap P| = ۱$$

می خواهیم تعداد بر نامه نویس هایی که در هیچ یک از سه زبان بالا ، تخصص ندارند , پیدا کنیم. یعنی می خواهیم متمم $J \cup C \cup P$ را پیدا کنیم. در کتب مختلف از نماد های مختلف استفاده می کنند. مثلا متمم P را به صورت های زیر ممکن است نشان داده شود.

$$P' \,, \overline{P} \,،\, \sim P$$

لذا متمم $J \cup C \cup P$ را می توان به صورت های زیر نوشت

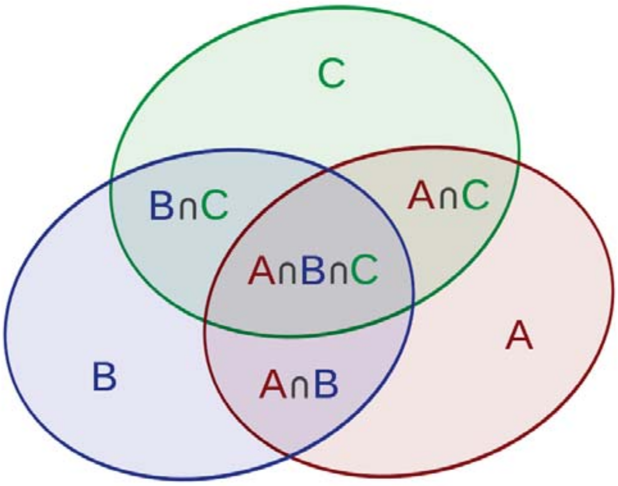
$$(J \cup C \cup P)' \,, \sim (J \cup C \cup P)\,, \left(\overline{J \cup C \cup P}\right)$$

پس داریم.

$$|J \cup C \cup P| = ۳۹ + ۵ + ۲۰ + ۴ + ۱۵ + ۱ = ۸۴$$
$$|(J \cup C \cup P)'| = |U| - |J \cup C \cup P| = ۱۰۰ - ۸۴ = ۱۶$$

یعنی ۱۶ برنامه نویس ، در هیچ کدام از زبانهای یاد شده تخصص ندارند.

اصل شمول-عدم شمول برای سه مجموعه



از دیاگرام بالا نتیجه ای شود که

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (۴.۷.۲)$$

تمرینات ۴.۷

۱ - در یک دانشکده ۵۲۳ دانشجو ، در ریاضی یا تاریخ یا هر دو تحصیل می‌کنند. ۱۰۰ دانشجو در رشته ریاضی و ۳۳ دانشجو هم در رشته ریاضی و هم در رشته تاریخ تحصیل می کنند. چند دانشجو در رشته تاریخ تحصیل می کنند.

۲ - چند عدد صحیح مثبت چهار رقمی وجود دارد که زوج هستند یا هیچ رقم آنها صفر نیست.

۳ - چند نوع عدد پایه دو ، هفت رقمی وجود دارد که با ۱ شروع و یا با ۱ ختم می شود و یا دقیقا چهار ۱ دارد؟

۴ - یک لیست چهار حرفی می خواهیم از حروف L, I, S, T, E, D بسازیم ، با مشخصات زیر. تکرار جایز است ، و دو حرف اول لیست صدا دار باشد و یا لیست به D ختم شود. چند نوع از چنین لیستی ، ممکن است؟ **توجه E , I در بین حروف داده شده ، صدا دار هستند.**

۵ - چند عدد هفت رقمی وجود دارد که زوج هستند و یا دقیقا سه رقم آنها صفر باشد ؟

۶ - چند رشته از اعداد پایه دو ، هشت رقمی وجود دارد که به ۱ ختم می شوند و یا دقیقا چهار ۱ دارند؟

۷ - چند رشته عدد پایه دو ، ده رقمی وجود دارد که با ۱ شروع شود و یا به ۱ ختم شود؟

پاسخ تمرینات ۴.۷

۱ - در یک دانشکده ۵۲۳ دانشجو ، در ریاضی یا تاریخ یا هر دو تحصیل می‌کنند. ۱۰۰ دانشجو در رشته ریاضی و ۳۳ دانشجو هم در رشته ریاضی و هم در رشته تاریخ تحصیل می کنند. چند دانشجو در رشته تاریخ تحصیل می کنند.

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه دانشجویان ریاضی و B مجموعه دانشجویان تاریخ باشد. پس داریم.

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$
$$۵۲۳ = ۱۰۰ + |B| - ۳۳$$
$$|B| = ۵۲۳ + ۳۳ - ۱۰۰ = ۴۵۶$$

پس ۴۵۶ دانشجوی تاریخ هستند.

۲ - چند عدد صحیح مثبت چهار رقمی وجود دارد که زوج هستند یا هیچ رقم آنها صفر نیست.

پاسخ

فرض می‌کنیم A مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج چهار رقمی باشد.و فرض می کنیم B مجموعه اعداد صحیح مثبت چهار رقمی باشد که هیچ رقم آنها صفر نیست. می خواهیم $|A\cup B|$ را پیدا کنیم.
بر اساس اصل ضرب داریم. $|A| = ۹ * ۱۰ * ۱۰ * ۵ = ۴۵۰۰$ زیرا برای رقم اول ۹ انتخاب داریم، به این خاطر که رقم اول نمی تواند صفر باشد. برای ارقام دوم و سوم ۱۰ انتخاب داریم. و در نهایت برای رقم آخر یعنی چهارم ، ۵ انتخاب داریم. یعنی ارقام $۲, ۴, ۶, ۸, 0$
همچنین $|B| = ۹ * ۹ * ۹ * ۹ = ۶۵۶۱$ زیرا بجز صفر بقیه ارقام قابل قبول است.
علاوه بر این ، $A\cap B$ شامل تمام اعداد صحیح زوج چهار رقمی است که هیچ صفری در آن نیست.
لذا $|A\cap B| = ۹ * ۹ * ۹ * ۴ = ۲۹۱۶$ پس پاسخ مساله مطابق زیر است.

$$|\boldsymbol{A}\cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A}\cap \boldsymbol{B}| = ۴۵۰۰ + ۶۵۶۱ - ۲۹۱۶ = ۸۱۴۵$$

۳ - چند نوع عدد پایه دو ، هفت رقمی وجود دارد که با ۱ شروع و یا با ۱ ختم می شود و یا دقیقا چهار ۱ دارد؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه چنین اعدادی باشد که با ۱ شروع می شوند. فرض می کنیم B مجموعه چنین اعدادی باشد که به ۱ ختم می شوند. فرض می کنیم C مجموعه چنین اعدادی باشد که دقیقا چهار ۱ دارند. پس پاسخ سئوال $|A\cup B\cup C|$ است. با استفاده از فرمول ۴.۷.۲ داریم.

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$
$$= ۲^۶ + ۲^۶ + \binom{۷}{۴} - ۲^۵ - \binom{۶}{۳} - \binom{۶}{۳} + \binom{۵}{۲}$$
$$= ۶۴ + ۶۴ + ۳۵ - ۳۲ - ۲۰ - ۲۰ + ۱۰$$
$$= ۱۰۱$$

۴ - یک لیست چهار حرفی می خواهیم از حروف L, I, S, T, E, D بسازیم ، با مشخصات زیر.
تکرار جایز است ، و دو حرف اول لیست صدا دار باشد و یا لیست به D ختم شود. چند نوع از چنین لیستی ، ممکن است؟ **توجه $E\ ,I$ در بین حروف داده شده صدا دار هستند.**

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه چنین لیستی باشد که دو حرف اول آنها حروف صدا دار است. و فرض می کنیم B مجموعه چنین لیستی باشد که با D ختم می شود. پس

$$|A| = ۲*۲*۶*۶ = ۱۴۴ \quad ، \quad |B| = ۶*۶*۶*۱ = ۲۱۶$$

پس $A \cap B$ مجموعه چنین لیستی است که دو حرف اول آنها حروف صدا دار است و لیست به D ختم می شود. لذا $|A \cap B| = ۲*۲*۶*۱ = ۲۴$ و در نهایت پاسخ مساله مطابق زیر است.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۱۴۴ + ۲۱۶ - ۲۴ = ۳۳۶$$

۵ - چند عدد هفت رقمی وجود دارد که زوج هستند و یا دقیقا سه رقم آنها صفر باشد ؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه اعداد هفت رقمی زوج باشد. بر اساس اصل ضرب داریم.

$$|A| = ۹*۱۰*۱۰*۱۰*۱۰*۱۰*۵ = ۴,۵۰۰,۰۰۰$$

فرض می کنیم B مجموعه اعداد هفت رقمی باشد که دقیقا سه رقم آنها صفر است. پس

$$|B| = ۹*\binom{۶}{۳}*۹*۹*۹$$

چرا؟ زیرا اولین رقم ، هر رقمی جز صفرمی تواند باشد. سپس سه انتخاب از شش مکان باقی مانده ، برای هر صفر و در نهایت سه رقم باقی مانده هر رقمی می تواند بجز صفر باشد.

حال می توانیم $|A \cap B|$ را بر اساس اصل جمع محاسبه کنیم. به این طریق که $A \cap B$ را به دو قسمت تقسیم کنیم :

یکی ، اعداد هفت رقمی زوج بطوری که سه رقم آنها صفر باشد و **رقم آخر صفر نباشد.**

دیگری ، اعداد هفت رقمی زوج بطوری که سه رقم آنها صفر باشد و **رقم آخر صفر باشد.**

قسمت اول $۴*۹*۹*\binom{۵}{۳}*۹$ عضو دارد، قسمت دوم $۱*۹*۹*۹*\binom{۵}{۲}*۹$ عضو دارد ، پس

$$|A \cap B| = ۹*\binom{۵}{۳}*۹*۹*۴ + ۹*\binom{۵}{۲}*۹*۹*۹$$

و در نهایت بر اساس اصل شمول –عدم شمول پاسخ مساله مطابق زیر است.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۴,۵۰۰,۰۰۰ + ۹^{۴}\binom{۶}{۳} - ۹^{۳}\binom{۵}{۳}*۴ - ۹^{۴}\binom{۵}{۲}$$
$$= ۴,۵۳۶,۴۵۰$$

۶ - چند رشته از اعداد پایه دو، هشت رقمی وجود دارد که به ۱ ختم می شوند و یا دقیقا چهار ۱ دارند ؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه رشته اعداد پایه دو هشت رقمی باشد که به ۱ ختم می شوند. بر اساس اصل ضرب $|A| = ۲^{۷}$ است. فرض می کنیم B مجموعه اعداد پایه دو هشت رقمی باشد که دقیقا چهار ۱ دارند.پس داریم $|B| = \binom{۸}{۴}$ زیرا می توانیم چنین رشته ای را با انتخاب چهار ۱ از هشت رقم در جا های خالی بگذاریم و بقیه را با صفر ها پر کنیم. مانند چند تصویر زیر.

1	0	1	0	1	0	0	1

0	0	0	0	1	1	1	1

1	1	1	1	0	0	0	0

پس $A \cap B$ مجموعه لیست هایی است که به ۱ ختم می شوند و دقیقا دارای چهار ۱ هستند. ملاحظه می کنید که $|A \cap B| = \binom{۷}{۴}$ است. چرا؟ یک ۱ در آخرین جای خالی می گذاریم ، و سه ۱ دیگر در هفت جای خالی باقی مانده می گذاریم.

بر اساس اصل شمول –عدم شمول، پاسخ مساله مطابق زیر است.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۲^{۷} + \binom{۸}{۴} - \binom{۷}{۳} = ۱۶۳$$

۷ - چند رشته عدد پایه دو ، ده رقمی وجود دارد که با ۱ شروع شود و یا به ۱ ختم شود؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه رشته های ده رقمی باشد که با ۱ شروع می شوند. پس بر اساس اصل ضرب داریم. $|A| = ۲^{۹}$ و فرض می کنیم B مجموعه رشته های ده رقمی باشد که به ۱ ختم می شوند. پس بر اساس همان اصل داریم. $|B| = ۲^{۹}$

پس $A \cap B$ تعداد رشته هایی است که به ۱ ختم و با ۱ شروع می شوند. بر اساس اصل ضرب داریم. $|A \cap B| = ۲^{۸}$ لذا پاسخ مساله مطابق زیر است.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۲^{۹} + ۲^{۹} - ۲^{۸} = ۷۶۸$$

۴.۸- اصول تقسیم و لانه کبوتری Division and Pigeonhole Principles

یاد آوری : اگر یک عدد مانند x داشته باشیم ، **کف یا حد اقل Floor** آن عدد که با نماد $\lfloor x \rfloor$ نشان داده می شود ، عبارت است از گرد کردن نقصانی آن به نزدیک ترین عدد صحیح. مثلا

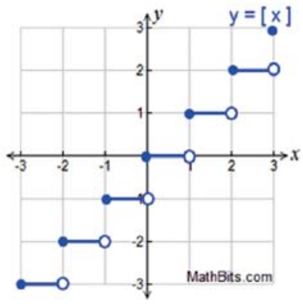
$$\left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2 \ , \lfloor 9.31 \rfloor = 9 \ , \lfloor 7 \rfloor = 7$$

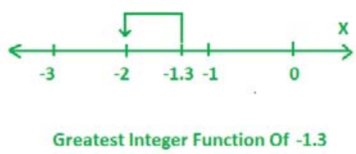
اعداد را به لاتین نمایش داده ایم تا نماد ممیز با نماد تقسیم اشتباه نشود. در لاتین نماد ممیز یا اعشاری یک نقطه است. پس 9.31 خوانده می شود نه و سی و یک صدم.

نماد $\lfloor x \rfloor$ را به این صورت هم بیان می کنند . ***بزرگ ترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x***

به تصویر شماره ۴.۸.۱ توجه کنید. در تصویر سمت چت نمودار $y = \lfloor x \rfloor$ را ملاحظه می کنید. دائره های تو خالی ، یعنی آن عدد منظور نیست. اما دائره های تو پر یعنی آن عدد منظور است. تصویر وسط $-2 = \lfloor -1.3 \rfloor$ را نشان می دهد. زیرا بزرگ ترین عدد صحیح کمتر یا مساوی -1.3 عدد صحیح -2 است. به همین ترتیب $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$ است.

تصویر ۴.۸.۱



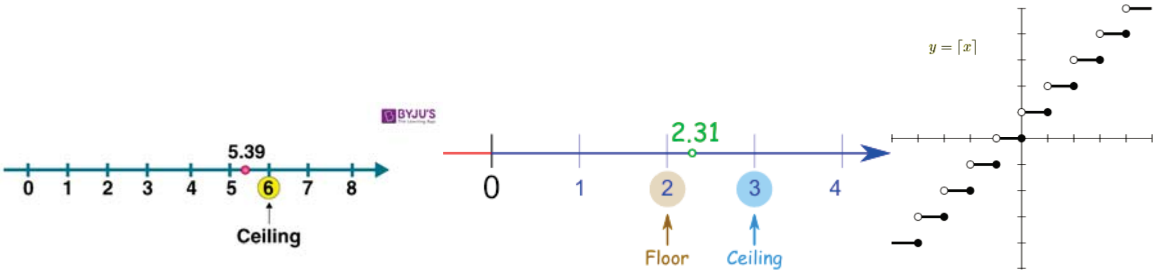


بر عکس **سقف یا حد اکثر Ceiling** آن عدد ، که با نماد $\lceil x \rceil$ نشان داده می شود ، عبارت است از گرد کردن اضافی به نزدیک ترین عدد صحیح. مثلا

$$\left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3 \ , \lceil 9.31 \rceil = 10, \ \ \lceil 7 \rceil = 7$$

نماد $\lceil x \rceil$ را کوچک ترین عدد صحیح، بزرگ تر یا مساوی x هم نامیده می شود. به تصویر شماره ۴.۸.۲ توجه کنید. سمت چپ $\lceil 5.39 \rceil = 6$ را نشان می دهد. تصویروسط تفاوت $\lfloor 2.31 \rfloor = 2$ و $\lceil 2.31 \rceil = 3$ را نشان می دهد. تصویر سمت راست هم نمودار $y = \lceil x \rceil$ را نشان می دهد.

تصویر ۴.۸.۲



اصل تقسیم .معمولا بوسیله حالتی بنام **لانه کبوتری Pigeonhole** توضیح و بیان می شود. تصور کنید تعداد n کبوتر ، در k لانه زندگی می کنند , احتمالا $n \neq k$، شب هنگام ، تمام کبوتر ها به داخل لانه ها پرواز می کنند. در این صورت ، بعضی از این k لانه ها ممکن است شامل بیش از یک کبوتر باشد ، و بعضی از این لانه ها ممکن است خالی باشند. تصویر ۴.۸.۳

تصویر ۴.۸.۳

مهم نیست کدام حالت ها اتفاق می افتند. میانگین تعداد کبوتر ها در هر لانه $\frac{n}{k}$ است. واضح است که، حد اقل یکی از لانه ها شامل $\frac{n}{k}$ کبوتر و یا بیشتر است، و چون هر لانه باید شامل اعداد صحیحی از کبوتر باشد ، با گرد کردن اضافی ، نتیجه می گیریم که هر لانه باید حد اقل شامل $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ کبوتر و یا بیشتر باشد.

به همین طریق ، حد اقل یک لانه باید شامل $\frac{n}{k}$ کبوتر و یا کمتر باشد. با گرد کردن نقصانی ، حد اقل یک لانه شامل $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$ کبوتر یا کمتر است. این نوع استلال را اصل تقسیم می نامیم.
بعضی کتب آنرا شکل قوی اصل لانه کبوتری می نامند.

حقیقت شماره ۴.۸.۱ یا اصل تقسیم Division Principle
فرض کنید n شئی در k جعبه قرار داده شده اند. پس
حد اقل یک جعبه شامل $\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil$ شئی و یا بیشتر است. و حد اقل یک جعبه شامل $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$ شئی و یا کمتر است.

اگر $n > k$ باشد ، پس $\frac{n}{k} > ۱$ است و لذا $\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil > ۱$ است. یعنی یک جعبه شامل بیش از یک شئی است . از طرف دیگر اگر $n < k$ باشد ، پس $\frac{n}{k} < ۱$ است و لذا $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor < ۱$ است. یعنی حد اقل یک جعبه خالی است. این اصل تقسیم ، نتیجه زیر را دارد ، **اصل لانه کبوتری.**

حقیقت شماره ۴.۸.۲ یا اصل لانه کبوتری Pigeonhole Principle
فرض کنید n شئی در k جعبه قرار داده شده اند.
اگر $n > k$ باشد ، پس حد اقل یک جعبه شامل بیش از یک شئی است.
اگر $n < k$ باشد ، پس حد اقل یک جعبه خالی است.

این اصل را لانه کبوتری می نامند ، برای هنگامی که n کبوتر به k لانه پرواز می کنند. اگر تعداد کبوتر ها بیش از لانه ها باشد $n > k$ در این صورت یک جعبه بیش از یک کبوتر خواهد داشت. و اگر تعداد کبوتر ها کمتر از تعداد لانه ها باشد $n < k$ در این صورت حد اقل یک لانه باید خالی باشد.

همان طور که در اصول ضرب ، جمع و تفریق بیان شد ، مساله این است که آن اصل ها و این اصل لانه کبوتری را چه موقع بکار بریم.

مثال ساده ای می‌زنیم. در یک گروه ۱۳ نفره ، حد اقل دو نفر از آنها در یک ماه متولد شده اند. برای نشان داده دلیل درستی اظهار نظر فوق ، ۱۳ نفر را به عنوان شئی فرض کنید. و هر شخص را در یک جعبه یا همان ماه تولد بگذارید. چون تعداد اشخاص بیش از تعداد جعبه ها است ، پس حد اقل دو نفر در یک ماه متولد شده اند.

مثال دیگر. در هر گروه ۱۰۰ نفره ,اصل تقسیم می گوید ، $\left\lceil\frac{۱۰۰}{۱۲}\right\rceil = ۹$ نفر یا بیشتر در یک ماه متولد شده اند. همچنین می گوید $\left\lfloor\frac{۱۰۰}{۱۲}\right\rfloor = ۸$ نفر یا کمتر در یک ماه متولد شده اند.

مثال ۴.۸.۱
بین اعداد 0 و 9 شش عدد صحیح را انتخاب کنید. نشان دهید مجموع دو تا از این اعداد 9 خواهد بود.

مثلا فرض کنید اعداد $0,1,3,5,7,8$ را انتخاب کردیم. پس $9 = 8 + 1$ است.
اگر $4,5,6,7,8,9$ را انتخاب کنیم , پس $9 = 5 + 4$ است. مساله از ما می خواهد نشان دهیم که اگر شش عدد بین اعداد 0 و 9 انتخاب کنیم، مجموع دو عدد انتخابی ما 9 خواهد بود. مهم نیست کدام شش عدد.

پاسخ

شش عدد بین اعداد $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ انتخاب می کنیم. به این دلیل حاصل جمع دو تا از آنها 9 است.

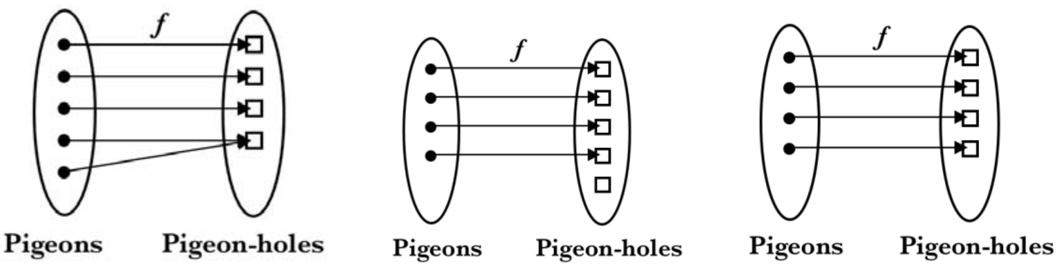
پنج جعبه را در نظر بگیرید، همان طور که در تصویر ۴.۸.۴ ملاحظه می کنید. روی هر جعبه، دو عدد بنویسید، بطوری که مجموع آن دو عدد مساوی 9 باشد، هر عددی که انتخاب می کنید ، آنرا در جعبه ای بگذارید که آن عدد رویش نوشته شده است. مثلا اگر 7 انتخاب کردید ، آنرا در جعبه ای بگذارید که روی آن نوشته شده است $2,7$ اگر عدد 2 را انتخاب کردید ، باز در همان جعبه بگذارید. به این طریق ، شش عدد انتخاب شده را در پنج جعبه قرار داده اید . چون تعداد اعداد بیش از جعبه ها است ، پس اصل لانه کبوتری می گوید یک جعبه بیش از یک عدد ، یعنی دو عدد ، در آن است. مجموع این دو عدد 9 است.

تصویر ۴.۸.۴

ملاحظه می کنید که اگر فقط پنج عدد انتخاب می کردیم ، امکان داشت ، مجموع هیچ دو عددی 9 نشود. مثلا ممکن بود اعداد $0,1,2,3,4$ انتخاب می کردیم. مجموع هیچ دو عددی در این لیست ، 9 نمی شود. اما ، اصل لانه کبوتری تضمین می کند اگر شش عدد انتخاب کنیم ، پس مجموع دو عدد بین اعداد انتخابی 9 است.

تصویر ۴.۸.۵ اصل لانه کبوتری را نشان می دهد.

تصویر ۴.۸.۵



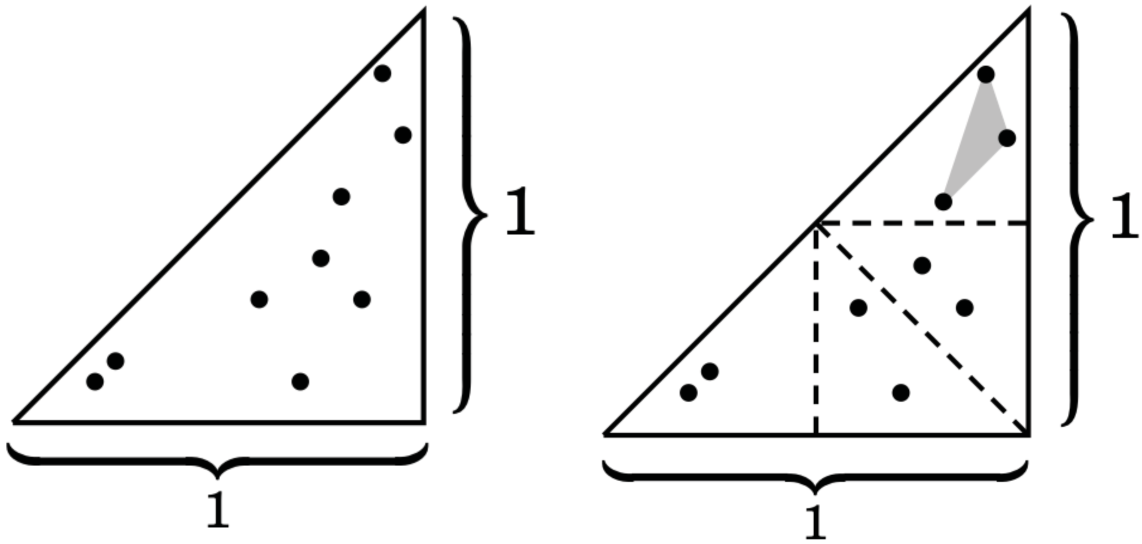
تصویر سمت راست نشان می دهد اگر تعداد کبوتر ها و لانه ها مساوی باشند ، ممکن است هر یک کبوتر در یک لانه جای بگیرد. تصویر وسط نشان می دهد اگر تعداد کبوترها ازتعداد لانه ها کمتر باشد ، حد اقل یک لانه خالی خواهد ماند. تصویر سمت چپ نشان می دهد اگر تعداد کبوترها بیشتراز تعداد لانه ها باشد حد اقل یک لانه شامل دو کبوتر است.

مثال ۴.۸.۲
تعداد ۹ نقطه بطور تصادفی در یک مثلث قائم الزاویه قرار می دهیم. تصویر ۴.۸.۶ سمت چپ، نشان دهید سه تا از این نقاط، ، یک مثلث تشکیل می دهند که مساحت آن $\frac{۱}{۸}$ واحد مربع و یا کمتر است.
با فرض این که اگر مساحت یک مثلث صفر باشد ، پس آن سه نقطه روی یک خط مستقیم قرار دارند.
پاسخ
مثلث را به چهار مثلث کوچک تر تقسیم می کنیم. همان طور که در تصویر ۴.۸.۶ سمت راست با خطوط نقطه چین مشخص شده است. هر کدام از این مثلث ها دارای مساحت

$$\frac{۱}{۲}bh = \frac{۱}{۲} * \frac{۱}{۲} * \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸} \text{ واحد مربع}$$

هر یک از این مثلث های کوچک را ، یک جعبه تصور می کنیم. پس ۹ نقطه را در چهار جعبه قرار داده ایم.

تصویر ۴.۸.۶



اگر یکی از این ۹ نقطه تصادفا روی یک خط نقطه چین قرار گیرد ، مثلا آن نقطه متعلق به جعبه زیرین یا سمت چپ باشد ، اصل تقسیم می گوید یکی از این جعبه ها حد اقل شامل $\left\lceil \frac{۹}{۴} \right\rceil = ۳$ نقطه است. این سه نقطه تشکیل یک مثلث می دهند که مساحت آن بیشتر از جعبه ای که در آن قرار دارد نیست. پس این سه نقطه تشکیل یک مثلث می دهند که مساحت آن $\frac{۱}{۸}$ یا کمتر است.

مثال ۴.۸.۳
فرض کنید ۵ جفت جوراب به رنگ های سفید ، آبی ، قرمز ، سبز و زرد در یک کشو داریم. نشان دهید اگر ۶ لنگه جوراب از کشو بیرون آوریم ، مسلما یک جفت جوراب همرنگ خواهیم داشت.
پاسخ

پنج جعبه انتخاب می کنیم و روی هر یک ، رنگ های ذکر شده را می نویسیم. هر لنگه جوراب را که بیرون می آوریم داخل جعبه با رنگ مربوطه می گذاریم. فرض می کنیم پنج لنگه اول ، پنج رنگ بالا باشند. لنگه ششم را که بیرون می آوریم ، بر اساس اصل لانه کبوتری ، حتما یکی از رنگ های داده شده است ، پس یک جفت همرنگ داریم.

تمرینات ۴.۸
۱ - نشان دهید اگر شش عدد صحیح را بطور تصادفی انتخاب کنیم ، حد اقل دو تا از این اعداد انتخاب شده دارای یک باقی مانده هستند ، هنگامی که آنها را بر ۵ تقسیم می کنیم.

یک تاس ، یک مکعب است مانند تصویر ۴.۸.۷

تصویر ۴.۸.۷

۲ - معین کنید حد اقل چند مرتبه باید یک تاس را بریزیم تا ده مرتبه یا بیشتر ، همان عدد نتیجه شود؟ مثلا ده مرتبه عدد دو و یا ده مرتبه عدد پنج باشد.

۳ - ثابت کنید هر مجموعه از هفت عدد طبیعی نا همسان شامل دو عدد است که مجموع و یا تفاضل آنها بر ۱۰ بخش پذیر است.

۴ - اگر آقای راستگو تعداد بسیار زیادی از جوراب های قرمز ، آبی ، سبز و سفید در کشو لباس داشته باشد ، چند لنگه جوراب باید از کشو بیرون آورد ، تا یک جفت همرنگ داشته باشد؟

۵ - نشان دهید بین هر چهار عدد ، می توانیم دو عدد پیدا کنیم بطوری که تفاضل آنها بر ۳ بخش پذیر است.

۶ – نشان دهید بین $n+۱$ عدد ، می توان دو عدد را پیدا کرد که تفاضل آنها بر n بخش پذیر است. یعنی اگر مثلا ۱۱ عدد داشته باشیم .دو تا از این اعداد بر ۱۰ بخش پذیر هستند.

۷ - فرض کنید $a_۱, \cdots, a_n$ اعداد صحیح باشند. پس یک جمع اعداد متوالی

$$a_k + a_{k+۱} + a_{k+۲} + \cdots + a_{k+m}$$

بر n بخش پذیر است.

یاد آوری : دو عدد را متباین و یا نسبت به هم اول می گویند ، چنانچه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد برابر یک باشد. یا به عبارت دیگر ، هیچ مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند. مانند ۶ و ۳۵

۹ - قضیه باقیمانده چینی

اگر m و n متباین باشند ، و $0 \le a \le m$ و $0 \le b \le n$ باشد ، پس یک عدد صحیح x وجود دارد ، بطوری که $x \bmod m = a$ و $x \bmod n = b$ است.

۱۰ - در یک کیسه ۱۰ مهره قرمز ، ۱۰ مهره سفید و ۱۰ مهره آبی وجود دارد. حد اقل چند مهره باید از کیسه بیرون بیاورید تا مطمئن شوید ۴ مهره همرنگ داشته باشید؟

پاسخ تمرینات ۴.۸

۱ - نشان دهید اگر شش عدد صحیح را بطور تصادفی انتخاب کنیم ، حد اقل دو تا از این اعداد انتخاب شده دارای یک باقی مانده هستند ، هنگامی که آنها را بر ۵ تقسیم می کنیم.

پاسخ

شش عدد صحیح بطور تصادفی انتخاب می کنیم، مثلا $n_۱, n_۲, n_۳, n_۴, n_۵, n_۶$

پنج جعبه انتخاب می کنیم و آنها رامطابق زیر نام گذاری می کنیم.

جعبه ۴	جعبه ۳	جعبه ۲	جعبه ۱	جعبه 0

هر کدام از اعداد صحیح انتخاب شده را اگر بر ۵ تقسیم کنیم ، باقی مانده آن یا 0 یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ است. برای هر n_i فرض کنید r_i باقی مانده آن عدد باشد ، هنگامی که بر ۵ تقسیم می کنیم. آن n_i را در جعبه r_i قرار می دهیم. حالا ما شش عدد را در پنج جعبه گذاشته ایم. پس بر اساس اصل لانه کبوتری ، یکی از این جعبه ها شامل دو عدد یا بیشتر است. آن دو عدد ، اعدادی هستند که هر گاه آنها را بر پنج تقسیم کنیم ، دارای یک باقی مانده هستند.

توضیح

یک تاس ، یک مکعب است بطوری که روی یک وجه آن یک نقطه ، روی وجه دیگر دو نقطه ، الی آخر، مانند تصویر ۴.۸.۷

تصویر ۴.۸.۷

۲ ـ معین کنید حد اقل چند مرتبه باید یک تاس را بریزیم تا ده مرتبه یا بیشتر ، همان عدد نتیجه شود؟ مثلا ده مرتبه عدد دو و یا ده مرتبه عدد پنج باشد.

پاسخ

شش جعبه را در نظر بگیرید و آنها را ۱ تا ۶ نامگذاری کنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶

هر گاه پس از تاس ریختن یک ⚀ بدست آوردید ، یک شئی در جعبه ۱ بیندازید.

هر گاه پس از تاس ریختن یک ⚁ بدست آوردید ، یک شئی در جعبه ۲ بیندازید.

و الی آخر.

بعد از n مرتبه تاس ریختن ، اصل تقسیم می گوید یک جعبه شامل $\left\lceil \frac{n}{۶} \right\rceil$ شئی است. این یعنی شما $\left\lceil \frac{n}{۶} \right\rceil$ مرتبه ، یک عدد آورده اید ، حال در جستجوی کوچک ترین n هستیم ، بطوری که $\left\lceil \frac{n}{۶} \right\rceil \geq ۱۰$ باشد. این کوچک ترین n است ، بطوری که $\frac{n}{۶} > ۹$ است. یعنی $n > ۹ * ۶ = ۵۴$

پس پاسخ مساله $n = ۵۵$ است. یعنی باید ۵۵ مرتبه تاس بریزیم .

۳ ـ ثابت کنید هر مجموعه از هفت عدد طبیعی نا همسان شامل دو عدد است که مجموع و یا تفاضل آنها بر ۱۰ بخش پذیر است.

پاسخ

فرض می کنیم $S = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, a_۷\}$ هر مجموعه ای از هفت عدد طبیعی باشد. و فرض می کنیم $a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < a_۷$ باشد. حال مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \{a_۱ - a_۲, a_۱ - a_۳, a_۱ - a_۴, a_۱ - a_۵, a_۱ - a_۶, a_۱ - a_۷, \\ a_۱ + a_۲, a_۱ + a_۳, a_۱ + a_۴, a_۱ + a_۵, a_۱ + a_۶, a_۱ + a_۷\}$$

پس $|A| = ۱۲$ است. حالا ده جعبه را در نظر بگیرید و آنها را $0, ۱, ۲, \ldots ۹$ نامگذاری کنید.

0	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

حاصل هر عدد $a_۱ \pm a_i \in A$ هر چه هست درجعبه ای بگذارید که شماره $a_۱ \pm a_i$ دارد. مثلا اگر $a_۱ \pm a_i = ۴$ باشد ، آنرا در جعبه شماره ۴ بگذارید. اگر $a_۱ \pm a_i = ۸$ باشد ، آنرا در جعبه شماره ۸ بگذارید. و الی آخر. پس تا کنون ۱۲ عدد از مجموعه A در ۱۰ جعبه قرار داده ایم. لذا اصل لانه کبوتری می گوید ، حد اقل یک جعبه شامل دو عضو $a_۱ \pm a_i$ و $a_۱ \pm a_j$ از مجموعه A است. این یعنی آخرین رقم $a_۱ \pm a_i$ مانند آخرین رقم $a_۱ \pm a_j$ است. لذا آخرین رقم تفاضل

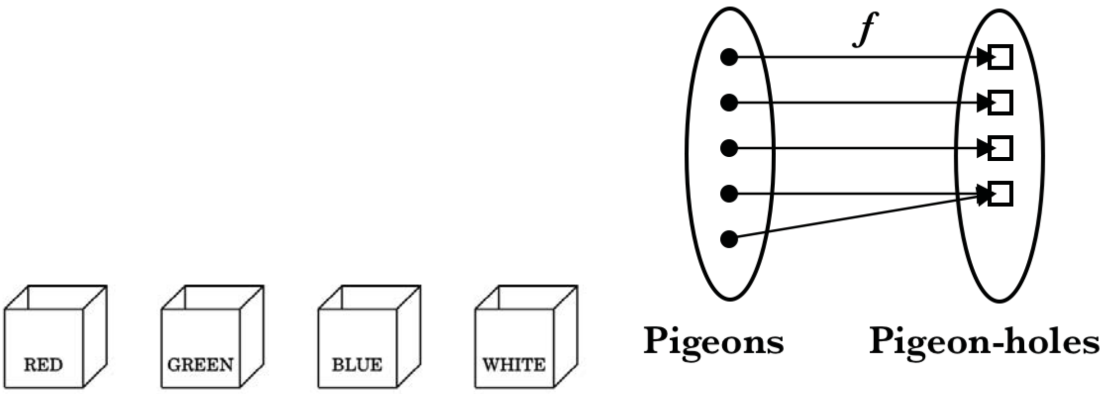
$$(a_۱ \pm a_i) - (a_۱ \pm a_j) = \pm a_i \pm a_j$$

صفر است. و در نهایت نتیجه می گیریم $\pm a_i \pm a_j$ یک مجموع یا تفاضل اعضای S است که بر ۱۰ بخش پذیر است.

۴ ـ اگر آقای راستگو تعداد بسیار زیادی از جوراب های قرمز ، آبی ، سبز و سفید در کشو لباس داشته باشد ، چند لنگه جوراب باید از کشو بیرون آورد ، تا یک جفت همرنگ داشته باشد؟

پاسخ

تصویر ۴.۸.۸



آقای راستگو باید پنج لنگه جوراب از کشو بیرون بیاورد تا یک جفت جوراب همرنگ داشته باشد. اینجا کبوتر ها را لنگه جوراب ها که بیرون کشیده می شود فرض می کنیم و لانه ها را ، رنگ های چهار گانه. پس بر اساس اصل لانه کبوتری ، پنج لنگه جوراب باید بیرون کشیده شود. تصویر ۴.۸.۸

فرض کنید جراب اول سبز باشد ، آنرا در جعبه سبز می اندازد. جوراب دوم سفید باشد ، در جعبه سفید می اندازد. الی آخر تا جوراب چهارم. مرتبه پنجم که یک لنگه جوراب بیرون می آورد ، از این چهار رنگ خارج نیست.

۵ ـ نشان دهید بین هر چهار عدد ، می توانیم دو عدد پیدا کنیم بطوری که تفاضل آنها بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ

یاد آوری: $a \equiv b \ (mod\ n)$ می خوانیم عدد a به پیمانه n با b همنهشت است. به عبارت دیگر $a - b$ بر n بخش پذیر است. مانند $۲۲ \equiv ۱ \ (mod\ ۳)$ زیرا $۲۲ - ۱ = ۲۱$ و می دانیم $۲۱ \div ۳ = ۷$ است.

هر عددی را که بر سه تقسیم کنیم ، باقی مانده آن ، یکی از اعداد $0, ۱, ۲$ است. پس بر اساس اصل لانه کبوتری ، چون چهار عدد داریم ، پس باید باقیمانده دو تا از این اعداد هنگام تقسیم بر سه یکی از اعداد $0, ۱, ۲$ باشد. لذا می توانیم این دو عدد را به صورت زیر بنویسیم.

$$n_۱ = ۳k_۱ + r \qquad n_۲ = ۳k_۲ + r$$

در عبارت بالا r باقیمانده است ، هنگام تقسیم بر ۳. پس تفاضل مطابق زیر است.

$$n_۱ - n_۲ = (۳k_۱ + r) - (۳k_۲ - r)$$

$$= ۳k_۱ + r - ۳k_۲ - r$$
$$= ۳k_۱ - ۳k_۲$$
$$= ۳(k_۱ - k_۲)$$

واضح است که $۳(k_۱ - k_۲)$ بر سه بخش پذیر است.

۶ ـ نشان دهید بین $n + ۱$ عدد ، می توان دو عدد را پیدا کرد که تفاضل آنها بر n بخش پذیر است.
یعنی اگر مثلا ۱۱ عدد داشته باشیم .دو تا از این اعداد بر ۱۰ بخش پذیر هستند.

پاسخ

این مساله حالت کلی مساله شماره ۵ است.

اینجا ، چون فقط n باقیمانده ممکن وجود دارد هنگامی که اعداد را بر n تقسیم می کنیم ، و $n + ۱$ عدد داریم ، پس بر اساس اصل لانه کبوتری . دو تا از این اعداد باقیمانده های همسان دارند ، هنگامی که بر n تقسیم می کنیم. لذا این دو عدد رامی توان به صورت زیر نوشت.

$$n_۱ = nk_۱ + r \qquad n_۲ = nk_۲ + r$$

در عبارت بالا ، r باقیمانده است هنگام تقسیم بر n، پس تفاضل به صورت زیر است.

$$n_۱ - n_۲ = (nk_۱ + r) - (nk_۲ - r)$$
$$= nk_۱ + r - ۳n - r$$
$$= nk_۱ - nk_۲$$
$$= n(k_۱ - k_۲)$$

واضح است که $n(k_۱ - k_۲)$ بر n بخش پذیر است.

۷ ـ فرض کنید $a_۱, \cdots, a_n$ اعداد صحیح باشند. پس یک جمع اعداد متوالی

$$a_k + a_{k+۱} + a_{k+۲} + \cdots + a_{k+m}$$

بر n بخش پذیر است.

پاسخ

به n جمع های زیر توجه کنید. $s_۱$ یعنی جمع اول. s حرف اول کلمه Sum به معنی جمع یا مجموع است. $s_۲$ یعنی جمع دوم و الی آخر.

$$s_۱ = a_۱$$
$$s_۲ = a_۱ + a_۲$$
$$s_۳ = a_۱ + a_۲ + a_۳$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

تمام عبارت های بالاجمع های اعداد صحیح متوالی هستند. اگر یکی از آنها بر n بخش پذیر باشد ، پس مساله اثبات شده است. اگر چنین نباشد ، هر کدام از این جمع ها را بر n تقسیم کنیم یک باقیمانده بجز صفر خواهد داشت. یعنی

$$r_۱ = s_۱ mod\, n$$
$$r_۲ = s_۲\, mod\, n$$

و الی آخر. r حرف اول $Remainder$ به معنی باقیمانده است. مثلا اگر داشته باشیم

$$۲۲ \equiv ۱\ (mod\ ۳)$$

پس داریم.

$$۱ = ۲۲\ mod\ ۳$$

به عبارت دیگر اگر ۲۲ را بر ۳ تقسیم کنیم ، باقیمانده ۱ است.

بر می گردیم به قبل از توضیحات بنفش رنگ.
این باقیمانده ها یکی از اعداد $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n-۱\}$ خواهند بود $n-۱$ جعبه را با این اعداد نامگذاری می کنیم. هر کدام از این جمع ها را در جعبه ای می گذاریم که با عدد باقیمانده مربوطه نامگذاری شده می گذاریم. مثلا $s_۱$ در جعبه با برچسب ۱ می گذاریم. $s_۲$ را در جعبه شماره ۲ می گذاریم. تا میرسیم به جعبه با برچسب $n-۱$
اما s_n را کجا باید گذاشت؟ پس دو جمع در یک جعبه باید بگذاریم. یعنی

$$s_i\ mod\ n = \ s_j\ mod\ n$$

لذا $s_j - s_i$ بر n بخش پذیر است. و در نهایت همان طور که می خواستیم ، داریم.

$$s_j - s_i = a_{i+۱} + a_{i+۲} + \cdots + a_j$$

یاد آوری : دو عدد را متباین و یا نسبت به هم اول می گویند ، چنانچه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد برابر یک باشد. یا به عبارت دیگر ، هیچ مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند. مانند ۶ و ۳۵

۹ ـ قضیه باقیمانده چینی
اگر m و n متباین باشند ، و $0 \le a \le m$ و $0 \le b \le n$ باشد ، پس یک عدد صحیح x وجود دارد ، بطوری که $x\ mod\ m = a$ و $x\ mod\ n = b$ است.
پاسخ
اعداد صحیح $a, a+m, a+۲m, \cdots, a+(n-۱)m$ را در نظر بگیرید ، هر کدام با باقیمانده a هنگامی که بر m تقسیم شود. می خواهیم نشان دهیم یکی از این اعداد صحیح دارای باقیمانده b است هنگامی که بر n تقسیم شود.
برهان خلف
فرض می کنیم چنین نباشد. پس فرض می کنیم باقیمانده ها مطابق زیر باشند.

$$r_0 = a\ mod\ n$$
$$r_۱ = a + m\ mod\ n$$
$$\vdots$$
$$r_{n-۱} = a + (n-۱)m\ mod\ n$$

تعداد $n-۱$ جعبه را با اعداد $0, ۱, ۲, ۳, \cdots, b-۱, b+۱, \cdots, n-۱$ نامگذاری می کنیم. هر r_i را در جعبه با برچسب مربوطه می گذاریم. مثلا r_0 را در جعبه 0 و $r_۱$ را در جعبه ۱ می

گذاریم. و الی آخر. در نهایت دو باقیمانده در یک جعبه قرار خواهند گرفت. مثلا r_i و r_j پس $r_i = r_j = r$ این یعنی

$$a + im = q_۱ n + r \quad \text{و} \quad a + jm = q_۲ n + r$$

لذا

$$a + jm - (a + im) = q_۲ n + r - \left(q_۱ n + r\right)$$
$$(j - i)m = \left(q_۱ - q_۲\right)n$$

چون n نسبت به m اول است ، این یعنی $n|(j-i)$، اما چون i و j متمایز هستند پس

$$n \nmid \left((j - i)\right)$$

این تضاد ، قضیه را ثابت می کند.

نماد $a|b$ یعنی عدد a عدد b را عاد می کند. و یا b بر a بخش پذیر است.

نماد $a \nmid b$ یعنی عدد a عدد b را عاد نمی کند. و یا b بر a بخش پذیر نیست.

۱۰ - در یک کیسه ۱۰ مهره قرمز ، ۱۰ مهره سفید و ۱۰ مهره آبی وجود دارد. حد اقل چند مهره باید از کیسه بیرون بیاورید تا مطمئن شوید ۴ مهره همرنگ داشته باشید؟

پاسخ

اصل لانه کبوتری را بکار می بریم.

تعداد رنگ ها یا لانه ها ، $n = ۳$

تعداد مهره های همرنگ یا کبوتر ها ، $k + ۱ = ۴$

پس تعداد مهره هایی که باید بیرون آوریم $kn + ۱$ است.

ساده می کنیم $kn + ۱ = ۱۰$

چرا؟ زیرا

$$k + ۱ = ۴ \Rightarrow k = ۳$$
$$kn + ۱ = ۳ * ۳ + ۱ = ۱۰$$

۴.۹ - اتحاد های دو جمله ای Binomial Identities

مثال ۴.۹.۱

نشان دهید

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

پاسخ

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\ (n-(n-k)!)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

مثال ۴.۹.۲

نشان دهید

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

پاسخ

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} * \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-m)!\,(m-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} * \frac{(n-k)!}{(n-m)!\,(m-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}\end{aligned}$$

مثال ۴.۹.۳

نشان دهید

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۱}{k}$$

پاسخ

بر اساس تعریف $\binom{n}{k}$ داریم.

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \frac{(n-۱)!}{\big(n-۱-(k-۱)\big)!\,(k-۱)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-k)!\,(k-۱)!}$$

و

$$\binom{n-۱}{k} = \frac{(n-۱)!}{(n-۱-k)!\,k!}$$

پس

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}\\ &= \frac{(n-1)!\,k}{(n-k)!\,k!}+\frac{(n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!}\\ &= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{(n-k)!\,k!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

مثال ۴.۹.۴

توضیح دهید چرا $\binom{n}{0}=1$ و $\binom{n}{n}=1$ است.

پاسخ

$\binom{n}{0}$ تعداد دفعاتی است که 0 شئی ازمجموعه n شئی ، انتخاب می شود. فقط یک راه برای انجام چنین کاری است. پس $\binom{n}{0}=1$

به همین طریق $\binom{n}{n}$ تعداد دفعاتی است که n شئی ازمجموعه n شئی ، انتخاب می شود. فقط یک راه برای انجام چنین کاری است. پس $\binom{n}{n}=1$

مثال ۴.۹.۵

نشان دهید

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

پاسخ

بر اساس ضریب دو جمله ای داریم.

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x*y^n+\binom{n}{n}y^n$$

اگر فرض کنیم $x=1$ و $y=1$ باشد ، پس داریم.

$$\begin{aligned}(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}*1+\binom{n}{2}1^{n-2}*1^2+\cdots+\binom{n}{n-1}1*1^n\\ +\binom{n}{n}1^n\end{aligned}$$

ساده می کنیم.

$$۲^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n}$$

تمرین کنید : فرض کنید $x = ۱$ و $y = ۲$ باشد.

مثال ۴.۹.۶

نشان دهید

قاعده مولد برای مثلث پاسکال را ثابت کنید. یعنی ، نشان دهید برای هر عدد طبیعی $0 < k < n$ فرمول زیر صادق است.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱} = \binom{n+۱}{k}$$

پاسخ

با توجه به تعریف ضریب دو جمله ای ، جمله های سمت چپ را روی یک مخرج مسترک قرار می دهیم.
پس داریم.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-۱)!\,(n-k+)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} * \frac{n-k+۱}{n-k+۱} + \frac{n!}{(k-۱)!\,(n-k+۱)!} * \frac{k}{k}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+۱+k)}{k!\,(n-k+۱)!} = \frac{(n+۱)(n!)}{k!\,(n+۱-k)!}$$

$$= \frac{(n+۱)!}{k!\,(n+۱-k)!} = \binom{n+۱}{k}$$

۴.۱. ـ تمرینات دوره ای شمارش

۱ـ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=1}^{m}\binom{n}{j}=\sum_{n=1}^{m}\left(\binom{n+1}{j+1}-\binom{n}{j+1}\right)$$

۲ ـ با استفاده از تمرین شماره ۱ یک فرمول برای مجموع اولین m به توان ۴ استنتاج کنید. یعنی فرمول زیر را استنتاج کنید.

$$\sum_{n=1}^{m} n^4$$

راهنمائی : $\binom{n}{4}$ یک چند جمله ای درجه چهار بر حسب n است. n^4 بر حسب $\binom{n}{1}$ و $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$ بنویسید.

۳ ـ فرهاد می خواهد یک کامپیوتر بخرد. او از بین ۴ نمایشگر Monitor می تواند یکی را انتخاب کند ، بین ۲ صفحه کلید Keyboard یکی را انتخاب کند و بین ۳ چاپگر Printer یکی را انتخاب کند. تعداد ممکن سیستم هایی که فرهاد می تواند بین آنها انتخاب کند ، پیدا کنید.

۴ ـ در یک شهر شماره های تلفن ، شامل ۹ رقم است. دو رقم اول کد محلی است یعنی (۰۳) ، بقیه هفت ارقام، شماره تفن است که نمی تواند با صفر شروع شود. چند شماره تلفن مختلف در این شهر با کد محلی داده شده ، ممکن است؟

۵ ـ در یک اداره ، کارت شناسایی کارمندان دارای پنج رقم است.
الف ـ چند نوع کارت شناسایی ممکن است ، اگر تکرار مجاز باشد ؟
ب ـ چند نوع کارت شناسایی ممکن است ، اگر تکرار مجاز نباشد ؟

۶ ـ یک سکه را سه مرتبه بالا می اندازیم. مجموع تمام نتایج ممکن را پیدا کنید.

۷ ـ در یک مسابقه شنا ، ۹ نفر با هم رقابت می کنند.
الف ـ به چند طریق ، مقام های اول ، دوم و سوم ، ممکن است بدست اورند؟
ب ـ اگرآرین نفر اول شود ، به چند طریق مقام های دوم و سوم ممکن است بدست اورند؟
ج ـ به چند طریق آنها می توانند برای عکس دسته جمعی ، در یک ردیف قرار بگیرند؟

۸ ـ یک استاد ، تعداد ۱۲ نمونه سئوال امتحانی در دست دارد. به چند طریق این استاد می تواند ۹ سئوال از این ۱۲ نمونه سئوال انتخاب کند؟

۹ ـ تعداد ۷ نفر می خواهند با هم یک عکس یادگار بگیرند
الف ـبه چند طریق این هفت نفر می توانند به یک خط با یستند؟
ب ـبه چند طریق پنج نفر از این هفت نفر می توانند در یک صف بایستند ؟

۱۰ ـ یک رستوران ، پنج نوع خوراک فرعی دارد. به چند طریق می توانید ۲ خوراک فرعی انتخاب کنید؟

۱۱ ـ یک رستوران چهار لایه مختلف برای سیب زمینی پخته ارائه می دهد. به چند طریق می توان یک سیب زمینی سفارش داد؟

۱۲ ـ دو نوع پیش غذای گیاهی و پنج نوع پیش غذای گوشتی در یک رستوران ارائه می شود. مجموع پیش غذاها را حساب کنید.

۱۳ ـ به چند طریق می توان حروف کلمه $DISTINCT$ را کنار هم قرار دهیم؟ نا مفهوم بودن کلمات بدست آمده مهم نیست. مثلا می توان کلمات زیر را داشته باشیم.

DIISTNCT,DTTISINC

۱۴ ـ فرض کنید در یک تشکل دانشجویی ۳۰ دانشجو شامل دانشجویان سال اول ، سال دوم ، سال سوم و سال چهارم شرکت دارند. نشان دهید حد اقل یا ۱۰ دانشجوی سال اولی یا ۸ دانشجوی سال دومی یا ۸ دانشجوی سال سومی یا ۷ دانشجوی سال سومی در این تشکل حضور دارند.

۱۵ ـ سه دانشجو برای ریاست کمیته دانشجویی با هم رقابت می کنند. اگر ۲۰۲ دانشجو در رای گیری شرکت می کنند ، حد اقل رای لازم برای برنده شدن در انتخابات را پیدا کنید.

۱۶ ـ فرض کنید $A \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱\}$ باشد با ۶ عضو. نشان دهید مجموع دو عضو A و یا احتمالا یک عضو آن مساوی ۱۱ است.

۱۷ ـ در یک کیسه ۱۰ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد که همگی شماره گذاری شده اند. چهار مهره از کیسه بیرون می آورم.
الف ـ چند نمونه مختلف ،چهار مهره ای، ممکن است؟
ب ـچند نمونه ، چهار مهره ای ، تماما شامل مهره های قرمز ممکن است؟
ج ـچند نمونه شامل دو مهره قرمز و دو مهره سفید است؟
د ـچند نمونه ، چهار مهره ای ،دقیقا شامل سه مهره قرمز است؟
ه ـچند نمونه ، چهار مهره ای ، حد اقل شامل سه مهره قرمز است؟
و ـچند نمونه ، چهار مهره ای ، شامل حد اقل یک مهره قرمز است؟

۱۸ ـ دوازده اسکی باز در یک مسابقه شرکت می کنند.
الف –به چند طریق این اسکی باز ها می توانند مسابقه را تمام کنند ، به شرطی که هیچ کدام مساوی نشوند.
ب –به چند طریق ، سه اسکی باز می توانند مقام های اول م دوم و سوم بدست اورند؟

۱۹ – مطلوب است جایگشت پنج شئی مختلف.

پاسخ تمرینات دوره ای شمارش

۱- اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{j}=\sum_{n=۱}^{m}(\binom{n+۱}{j+۱}-\binom{n}{j+۱})$$

پاسخ

$$\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{j}=\sum_{n=۱}^{m}(\binom{n+۱}{j+۱}-\binom{n}{j+۱})$$

$$=\sum_{n=۱}^{m}\binom{n+۱}{j+۱}-\sum_{n-۱}^{m}\binom{n}{j+۱}$$

$$=\sum_{n=2}^{m+۱}\binom{n}{j+۱}-\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{j+۱}$$

$$=\binom{m+۱}{j+۱}+\sum_{n=۲}^{m}\binom{n}{j+۱}-\sum_{n=۲}^{m}\binom{n}{j+۱}-\binom{۱}{j+۱}$$

$$=\binom{m+۱}{j+۱}-\binom{۱}{j+۱},$$

واضح است که $\binom{۱}{j+۱}=0$ است هر گاه $j\geq ۱$ باشد. پس هر گاه $k>0$ باشد ، داریم

$$\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{j}=\binom{m+۱}{j+۱}.$$

پس

$$\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{j}=\binom{m+۱}{j+۱}-\binom{۱}{j-۱}$$

۲ - با استفاده از تمرین شماره ۱ یک فرمول برای مجموع اولین m به توان ۴ استنتاج کنید. یعنی فرمول زیر را استنتاج کنید.

$$\sum_{n=۱}^{m} n^۴$$

راهنمائی : $\binom{n}{۴}$ یک چند جمله ای درجه چهار بر حسب n است. $n^۴$ بر حسب $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{۲}, \binom{n}{۳}, \binom{n}{۴}$ بنویسید.

پاسخ

واضح است که $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{۲}, \binom{n}{۳}, \binom{n}{۴}$ به ترتیب ، چند جمله ای درجه ۱ و ۲, ۳ ، ۴ هستند. می توان آنها را به صورت زیر نوشت.

$$\binom{n}{۴} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴!} = \frac{۱}{۲۴}\left(n^۴ - ۶n^۳ + ۱۱n^۲ - ۶n\right)$$

$$\binom{n}{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!} = \frac{۱}{۶}\left(n^۳ - ۳n^۲ + ۲n\right)$$

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲!} = \frac{۱}{۲}\left(n^۲ - n\right)$$

$$\binom{n}{۱} = n$$

پس می توان $n^۴$ را نسبت به $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{۲}, \binom{n}{۳}, \binom{n}{۴}$ نوشت. ابتدا با

$$۲۴\binom{n}{۴} = n^۴ - ۶n^۳ + ۱۱n^۲ - ۶n$$

شروع می کنیم. سپس باید از شر جمله $n^۳$ خلاص شویم. برای این کار ، $۳۶\binom{n}{۳}$ به دوطرف اضافه کنیم.

$$۲۴\binom{n}{۴} + ۳۶\binom{n}{۳} = n^۴ - ۶n^۳ + ۱۱n^۲ - ۶n + ۶n^۳ - ۱۸x^۲ + ۱۲n$$

$$= n^۴ - ۷n^۲ + ۶n$$

به همین طریق از شر $n^۲$ خلاص می شویم.

$$۲۴\binom{n}{۴} + ۳۶\binom{n}{۳} + ۱۴\binom{n}{۲} = n^۴ - ۷n^۲ + ۶n + ۷n^۲ - ۷n = n^۴ - n$$

و در نهایت با اضافه کردن $\binom{n}{۱} = n$ خواهیم داشت.

$$۲۴\binom{n}{۴} + ۳۶\binom{n}{۳} + ۱۴\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱} = n^۴$$

و با توجه به رابطه زیر

$$\binom{n}{۵} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۵!}$$
$$= \frac{۱}{۱۲۰}\left(n^{۵} - ۱۰n^{۴} + ۳۵n^{۳} - ۵۰n^{۲} + ۲۴\right)$$

و با توجه به تمرین شماره ۱ داریم.

$$\sum_{n=۱}^{m} n^{۴} = \sum_{n=۱}^{m}\left(۲۴\binom{n}{۴} + ۳۶\binom{n}{۳} + ۱۴\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱}\right)$$
$$= ۲۴\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{۴} + ۳۶\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{۳} + ۱۴\sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{۲} + \sum_{n=۱}^{m}\binom{n}{۱}$$
$$= ۲۴\binom{m+۱}{۵} + ۳۶\binom{m+۱}{۴} + ۱۴\binom{m+۱}{۳} + \binom{m+۱}{۲}$$
$$= ۲۴\frac{(m+۱)m(m-۱)(m-۲)(m-۳)}{۵!}$$
$$+۳۶\frac{(m+۱)m(m-۱)(m-۲)}{۴!}$$
$$+۱۴\frac{(m+۱)m(m-۱)}{۳!} + \frac{(m+۱)m}{۲!}$$
$$= \frac{۱}{۵}m^{۵} + \frac{۱}{۲}m^{۴} + \frac{۱}{۳}m^{۳} - \frac{۱}{۳۰}m$$

پس داریم.

$$\sum_{n=۱}^{m} n^{۴} = \frac{۱}{۵}m^{۵} + \frac{۱}{۲}m^{۴} + \frac{۱}{۳}m^{۳} - \frac{۱}{۳۰}m$$

۳ ـ فرهاد می خواهد یک کامپیوتر بخرد. او از بین ۴ نمایشگر Monitor می تواند یکی را انتخاب کند ، بین ۲ صفحه کلید Keyboard یکی را انتخاب کند و بین ۳ چاپگر Printer یکی را انتخاب کند. تعداد ممکن سیستم هایی که فرهاد می تواند بین آنها انتخاب کند ، پیدا کنید.

پاسخ

$$N = ۴ \times ۲ \times ۳ = ۳۶$$

۴ ـ در یک شهر شماره های تلفن ، شامل ۹ رقم است. دو رقم اول کد محلی است یعنی (۰۳) ، بقیه هفت ارقام، شماره تفن است که نمی تواند با صفر شروع شود. چند شماره تلفن مختلف در این شهر با کد محلی داده شده ، ممکن است؟

پاسخ

برای دو رقم کد محلی هر کدام فقط یک انتخاب داریم ، یعنی ۰ و ۳

برای شماره اول تلفن که نمی تواند صفر باشد ، فقط ۹ انتخاب و برای شش رقم دیگر هر کدام ۱۰ انتخاب داریم. پس

$$۱ \times ۱ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱ \times ۹ \times ۱۰^{۶} = ۹{,}۰۰۰{,}۰۰۰$$

شماره تلفن ممکن است.

۵ ـ در یک اداره ، کارت شناسایی کارمندان دارای پنج رقم است.

الف ـ چند نوع کارت شناسایی ممکن است ، اگر تکرار مجاز باشد ؟

ب ـ چند نوع کارت شناسایی ممکن است ، اگر تکرار مجاز نباشد ؟

پاسخ

الف

$$۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰^{۵} = ۱۰۰،۰۰۰$$

ب

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۰۲۴۰$$

۶ ـ یک سکه را سه مرتبه بالا می اندازیم. مجموع تمام نتایج ممکن را پیدا کنید.

پاسخ

$$۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۳} = ۸$$

۷ ـ در یک مسابقه شنا ، ۹ نفر با هم رقابت می کنند.

الف ـ به چند طریق ، مقام های اول ، دوم و سوم ، ممکن است بدست اورند؟

ب ـ اگرآرین نفر اول شود ، به چند طریق مقام های دوم و سوم ممکن است بدست اورند؟

ج ـ به چند طریق آنها می توانند برای عکس دسته جمعی ، در یک ردیف قرار بگیرند؟

پاسخ

الف ـ ۹ انتخاب برای مقام اول. هنگامی که یک شنا گر مقام اول کسب کرد ، ۸ شنا گر برای مقام دوم باقی می ماند. هنگامی که مقام های اول و دوم کسب شد ، هفت انتخاب برای مقام سوم باقی می ماند. پس براساس اصل ضرب داریم.

$$۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴$$

طریق ممکن است این شناگر ها مقام های اول ، دوم و سوم بدست آورند .

ب ـ چون آرین مقام اول بدست آورده ، پس برای مقام دوم هشت نفر با هم رقابت دارند و برای مقام سوم ، هفت نفر با هم رقابت دارند.

$$۱ \times ۸ \times ۷ = ۵۶$$

ج ـ برای ایستادن در نقطه اول ، ۹ انتخاب ، برای ایستادن در نقطه دوم ۸ انتخاب و الی آخر

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۸۸،۳۶۲۰$$

به عبارت دیگر تعداد جایگشت های n شئی متمایز از طریق $n!$ بدست می آید.

۸ - یک استاد ، تعداد ۱۲ نمونه سئوال امتحانی در دست دارد. به چند طریق این استاد می تواند ۹ سئوال از این ۱۲ نمونه سئوال انتخاب کند؟

پاسخ

پیدا کردن تعداد جایگشت های n شئی متمایز

n شئی متمایز داریم ، می خواهیم تعداد راه های انتخاب r شئی از مجموعه داده شده n به ترتیب پیدا کنیم. از مساله شماره ۸ پیدا است که تکرار جایز نیست. چون درامتحان ، یک سوال را نمی توان تکرار کرد.

اینجا $n = ۱۲$ و $r = ۹$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{۱۲!}{(۱۲-۹)!} = \frac{۱۲!}{۳!} = ۷۹,۸۳۳,۶۰۰$$

۹ – تعداد ۷ نفر می خواهند با هم یک عکس یادگار بگیرند

الف -به چند طریق این هفت نفر می توانند به یک خط با یستند؟

ب –به چند طریق پنج نفر از این هفت نفر می توانند در یک صف بایستند ؟

پاسخ

الف –جایگشت ترتیب مهم است

$$p(۷,۷) = \frac{n!}{r!} = \frac{۷!}{(۷-۷)!} = ۷! = ۵,۰۴۰$$

ب -انتخاب ۵ شئی از ۷ شئی متمایز. ترتیب مهم است ، تکرار هم جایز نیست.

$$P(n,r) = \frac{n^{۱}}{(n-r)!} = \frac{۷!}{(۷-۵)!} = \frac{۷!}{۲!} = ۲,۵۲۰$$

۱۰ - یک رستوران ، پنج نوع خوراک فرعی دارد. به چند طریق می توانید ۲ خوراک فرعی انتخاب کنید؟

پاسخ

تعداد n شئی متمایز داریم ، می خواهیم تعداد راه های انتخاب r شئی از مجموعه داده شده ، پیدا کنیم.

اینجا ترکیب Combination داریم. ترتیب مهم نیست.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{۵!}{۲!\,(۵-۲)!} = ۱۰$$

۱۱ - یک رستوران چهار لایه مختلف برای سیب زمینی پخته ارائه می دهد. به چند طریق می توان یک سیب زمینی سفارش داد؟

پاسخ

می خواهیم تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه با ۴ شئی پیدا کنیم. اینجا $n = ۴$ است.

یک مجموعه با n عنصر متمایز ، دارای ۲^n زیر مجموعه است. پس

$$۲^n = ۲^۴ = ۱۶$$

شانزده طریق مختلف برای سفارش یک سیب زمینی وجود دارد.

۱۲ - دو نوع پیش غذای گیاهی و پنج نوع پیش غذای گوشتی در یک رستوران ارائه می شود. مجموع پیش غذاها را حساب کنید.

پاسخ

با استفاده از اصل جمع ، تعداد پیش غذا های گیاهی را با تعداد پیش غذا های گوشتی جمع می کنیم.

$$۲ + ۵ = ۷$$

پس هفت نوع پیش غذا در این رستوران وجود دارد.

۱۳ - به چند طریق می توان حروف کلمه $DISTINCT$ را کنار هم قرار دهیم؟ نا مفهوم بودن کلمات بدست آمده مهم نیست. مثلا می توان کلمات زیر را داشته باشیم.

DIISTNCT,DTTISINC

پاسخ

پیدا کردن تعداد جایگشت های n شئی غیر متمایز. اینجا دو حرف I و T دو مرتبه تکرار شده اند. اگر n شئی در یک مجموعه وجود دارند و $r_۱$ مثل هم هستند ، $r_۲$ مثل هم هستند و الی آخر تا r_i پس تعداد جایگشت ها از طریق زیر بدست می آید.

$$\frac{n!}{r_۱!\, r_۲!, \cdots, r_k!}$$

در این مساله ، ۸ حرف وجود دارد و I و T هرکدام دو مرتبه تکرار شده اند. پس داریم.

$$n = ۸, r_۱ = ۲, r_۲ = ۲$$

در فرمول می گذاریم.

$$\frac{۸!}{۲!\,۲!} = ۱۰,۰۸۰$$

پس ۱۰,۰۸۰ نوع کلمه می توان با این هشت حرف ساخت.

۱۴ - فرض کنید در یک تشکل دانشجویی ۳۰ دانشجو شامل دانشجویان سال اول ، سال دوم ، سال سوم و سال چهارم شرکت دارند. نشان دهید حد اقل یا ۱۰ دانشجوی سال اولی یا ۸ دانشجوی سال دومی یا ۸ دانشجوی سال سومی یا ۷ دانشجوی سال سومی در این تشکل حضور دارند.

پاسخ

چون

$$۳۰ > (۱۰ - ۱) + (۸ - ۱) + (۸ - ۱) + (۷ - ۱) = ۲۹$$

است. پس بر اساس اصل کلی لانه کبوتری ، یکی از حالت های گفته شده در صورت مساله باید صحیح باشد.

۱۵ ـ سه دانشجو برای ریاست کمیته دانشجویی با هم رقابت می کنند. اگر ۲۰۲ دانشجو در رای گیری شرکت می کنند ، حد اقل رای لازم برای برنده شدن در انتخابات را پیدا کنید.
پاسخ
بر اساس لانه کبوتری یک نفر هست که حد اقل

$$\left\lceil \frac{۲۰۳}{۳} \right\rceil = ۶۸$$

رای بدست آورده است. پس یک نفر با حد اقل این عدد می تواند برنده باشد.

۱۶ ـ فرض کنید $A \subseteq \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ باشد با ۶ عضو. نشان دهید مجموع دو عضو A و یا احتمالا یک عضو آن مساوی ۱۱ است.
پاسخ
اگر A شامل عدد ۱۱ باشد ، که مساله ثابت شده است. فرض می کنیم چنین نباشد. لانه ها ی کبوتری زیر را ملاحظه کنید.

$$\{۱,۱۰\},\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\}$$

می بینید که مجموع عناصر هر لانه کبوتر ، مساوی ۱۱ است. چون A شش عضو دارد ، پس بر اساس اصل لانه کبوتری یکی از لانه کبوتر ها شامل دو عضو A است ، که مجموع آنها ۱۱ است.

۱۷ ـ در یک کیسه ۱۰ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد که همگی شماره گذاری شده اند. چهار مهره از کیسه بیرون می آورم.
پاسخ
الف ـ چند نمونه مختلف ،چهار مهره ای، ممکن است؟
ترتیب مهم نیست ، اما شماره ها مهم هستند. پس از یک مجموعه $۱۵ = ۵ + ۱۰$ چهار عضو را انتخاب می کنیم.

$$C(۱۵,۴) = \frac{۱۵!}{۴!\,(۱۵-۴)!} = \frac{۱۵!}{۴!\,(۱۱)!} = \frac{۱۲ * ۱۳ * ۱۴ * ۱۵}{۲۴} = ۱۳ * ۷ * ۱۵ = ۱,۳۶۵$$

ب ـ چند نمونه ، چهار مهره ای ، تماما شامل مهره های قرمز ممکن است؟
ترتیب مهم نیست ، اما شماره ها مهم هستند. پس از یک مجموعه ۱۰ عنصری ، چهار عنصر را انتخاب می کنیم.

$$C(۱۰,۴) = \frac{۱۰!}{۴!\,(۶)!} = \frac{۷ * ۸ * ۹ * ۱۰}{۲۴} = ۷ * ۳ * ۱۰ = ۲۱۰$$

ج ـ چند نمونه شامل دو مهره قرمز و دو مهره سفید است؟
می توانیم دو مهره شماره دار قرمز به $C(۱۰,۲)$ طریق و دو مهره سفید شماره دار به $C(۵,۲)$ طریق انتخاب کنیم. هیچ یک از این دو انتخاب بر دیگری اثر ندارد.

$$C(۱۰,۲) * C(۵,۲) = ۴۵ * ۱۰ = ۴۵۰$$

د –چند نمونه ، چهار مهره ای ،دقیقا شامل سه مهره قرمز است؟
می توانیم سه مهره شماره دار قرمز به $C(۱۰,۳)$ طریق و یک مهره سفید شماره دار به $C(۵,۱)$ طریق انتخاب کنیم. هیچ یک از این دو انتخاب بر دیگری اثر ندارد.

$$C(۱۰,۳) * C(۵,۱) = ۱۲۰ * ۵ = ۶۰۰$$

ه –چند نمونه ، چهار مهره ای ، حد اقل شامل سه مهره قرمز است؟
پاسخ ، تعداد نمونه های با سه مهره قرمز به اضافه تعداد نمونه های با چهار مهره قرمز است. می توانیم چهار مهره شماره دار قرمز به $C(۱۰,۴)$ طریق و صفر مهره سفید شماره دار به $C(۵,0)$ طریق انتخاب کنیم. هیچ یک بر دیگری اثر ندارد.

$$C(۱۰,۴) * C(۵,0) = ۲۱۰ * ۱ = ۲۱۰$$

براساس قسمت د، ۶۰۰ طریق می توان نمونه های با دقیقا سه مهره قرمز انتخاب کرد ، پس پاسخ نهایی به صورت زیر است.

$$۶۰۰ + ۲۱۰ = ۸۱۰$$

و –چند نمونه ، چهار مهره ای ، شامل حد اقل یک مهره قرمز است؟
پاسخ عبارت است از تعداد دقیقا ۱ به اضافه دقیقا ۲ به اضافه ... به اضافه دقیقا ۴ یعنی

$$C(۱۰,۱) + C(۵,۳) + C(۱۰,۲) + C(۵,۲) + C(۱۰,۳) + C(۵,۱) + C(۱۰,۴) + C(۵,0)$$

$$= ۱۰ * ۱۰ + ۴۵ * ۱۰ + ۱۲۰ * ۵ + ۲۱۰ * ۱ = ۱۰۰ + ۴۵۰ + ۶۰۰ + ۲۱۰ = ۳۶،۱۰$$

۱۸ - دوازده اسکی باز در یک مسابقه شرکت می کنند.
الف –به چند طریق این اسکی باز ها می توانند مسابقه را تمام کنند ، به شرطی که هیچ کدام مساوی نشوند.
پاسخ

$$۱۲! = ۱۲ * ۱۱ * ۱۰ * ۹ * ۸ * ۷ * ۶ * ۵ * ۴ * ۳ * ۲ * ۱ = ۴۷۹،۰۰۱،۶۰۰$$

ب –به چند طریق ، سه اسکی باز می توانند مقام های اول م دوم و سوم بدست اورند؟
پاسخ

$$۱۲ * ۱۱ * ۱۰ = ۱,۳۲۰$$

۱۹ – مطلوب است جایگشت پنج شئی مختلف.
پاسخ

$$۵! = ۵ * ۴ * ۳ * ۲ * ۱ = ۱۲۰$$