



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فصل سوم

منطق

Logic

بخش اول

گزاره ها

Statements

مقدمه - منطق یک روش منظم فکر کردن است که به ما امکان می دهد تا بر اساس اطلاعات قبلی ، اطلاعات جدیدی استنتاج کنیم.

در حقیقت شما در امور روز مره ، منطق بکار می برید. همچنین هنگامی که مسائل ریاضی حل می کنید از منطق استفاده می کنید.

مثلا ، شما هر روز مشاهده کرده اید که خورشید از مشرق طلوع می کند و در مغرب غروب می کند. پس بر اساس این تجربه و دانش نتیجه می گیرید که فردا هم خورشید از مشرق طلوع می کند و در مغرب غروب می کند. حال اگر کسی به شما گفت فردا خورشید از مغرب طلوع می کند ، می گوئید این حرف غیر منطقی است ، لذا صحت ندارد.

یا مثلا در ریاضیات یاد گرفته اید که برای پیدا کردن مساحت یک دایره به شعاع r از فرمول $A = \pi r^2$ استفاده کنید. پس اگر به دایره به شعاع ۳ سانتی متر به شما داده شد و خواسته شد مساحت آن دایره را پیدا کنید ، می گوئید مساحت آن 9π سانتی متر مربع است.

توجه داشته باشید که هم منطق و هم اطلاعات ما باید صحیح باشد تا بتوانیم نتیجه صحیح بدست آوریم. مثلا این نتیجه گیری صحیح نیست

دیوار موش دارد

موش گوش دارد

پس

دیوار گوش دارد.

اطلاعات داده شده صحیح هستند ، اما نتیجه گیری و یا منطق ما غلط است ، زیرا دیوار نمی تواند گوش داشته باشد.

۳.۱ - گزاره ها Statements

یک گزاره عبارت است از یک جمله و یا یک عبارت ریاضی که یا صحیح و یا غلط باشد. به عبارت دیگر، گزاره ها، اطلاعاتی هستند که یا صحیح هستند و یا غلط. پس گزاره ها اطلاعاتی هستند که باید منطبق بر آنها اعمال شود تا اطلاعات دیگری بدست آید.

مثال ۳.۱.۱ - چند مثال برای گزاره ها که صحیح هستند.

اگر یک دایره دارای شعاع r باشد، پس مساحت آن πr^2 واحد مربع است. هر عدد زوج بر ۲ بخش پذیر است.

$$2 \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

مجموعه $\{0, 1, 2\}$ دارای سه عضو است.

بعضی از مثلث های قائم الزویه، متساوی الساقین هستند.

مثال ۳.۱.۲ - چند مثال برای گزاره ها که صحیح نیستند.

تمام مثلث های قائم الزویه، متساوی الساقین هستند.

$$5 = 2$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$$

مثال ۳.۱.۳ - چند عبارت که گزاره نیستند.

به هر دو طرف ۵ اضافه کنید.

$$\mathbb{Z}$$

$$42$$

ریشه $2x = 84$ چیست؟

مثال ۳.۱.۴ - گاهی اوقات از حروف P, Q, R, S برای جانشینی یک گزاره استفاده می کنیم. مانند

P : اگر یک عدد صحیح ضریب ۶ باشد، پس آن عدد زوج است.

Q : هر چند جمله ای درجه n حد اکثر n ریشه دارد.

R : تابع $f(x) = x^2$ پیوسته است.

بکار بردن حروف برای جانشینی گزاره ها، کار مفیدی است. مثلاً هنگامی که می خواهیم در مورد

پیوسته بودن تابع $f(x) = x^2$ بحث کنیم، بجای تکرار این جمله فقط حرف R را بکار می بریم.

یک گزاره ممکن است شامل یک متغیر باشد. مثلاً

P : اگر یک عدد صحیح x یک ضریب ۶ باشد، پس x زوج است.

چون جمله بالا مسلماً صحیح است، پس یک گزاره است. هنگامی که یک گزاره شامل یک متغیر مانند x باشد، هنگامی که می‌خواهیم از آن نام ببریم، معمولاً می‌گوییم $P(x)$ که نشان دهم چیزی در مورد x بیان می‌کنیم. پس گزاره بالا را مطابق زیر بیان می‌کنیم.

$P(x)$: اگر یک عدد صحیح x یک ضریب ۶ باشد، پس x زوج است.

اگر یک گزاره شامل دو متغیر باشد، می‌نویسیم $P(x, y)$ و به همین ترتیب اگر بیش از دو متغیر داشته باشیم.

به مثال زیر توجه کنید.

$Q(x)$: عدد x زوج است

آیا عبارت بالا، یک گزاره است؟ صحیح یا غلط بودن این عبارت، بستگی به انتخاب x دارد. اگر $x = ۴$ باشد، عبارت صحیح است و اگر $x = ۷$ باشد، عبارت غلط است. اما بدون مشخص کردن مقدار x تشخیص صحیح یا غلط بودن آن امکان ندارد. چون دقیقاً نمی‌توانیم بگوییم این عبارت صحیح است و یا غلط، پس $Q(x)$ یک گزاره نیست.

یک جمله مانند جمله بالا، که صحیح بودن آن بستگی به مقدار یک یا چند متغیر دارد، را گزاره باز و یا گزاره نما Open Sentence می‌نامند

متغیرهای یک گزاره باز، می‌توانند هر نوعی باشند. لزومی ندارد که این متغیرها عدد باشند، حتی می‌توانند تابع هم باشند. مثلاً

$R(f, g)$: تابع f مشتق تابع g است.

گزاره نمای بالا صحیح است اگر $f(x) = ۲x$ و $g(x) = x^۲$ باشد. اگر $f(x) = x^۳$ و $g(x) = x^۲$ باشد، گزاره نمای بالا غلط است. در مورد گزاره نماها بعداً بیشتر صحبت خواهیم کرد.

گزاره‌ها سر تا سر ریاضیات وجود دارند. هر نتیجه و یا قضیه‌ای که صحت آن اثبات شده است، یک گزاره است. فرمول معادله درجه دو و قضیه فیثاغورث هر دو، گزاره هستند.

P : ریشه‌های معادله $ax^۲ + bx + c = 0$ از فرمول $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$ بدست می‌آیند

Q : اگر یک مثلث قائم الزاویه دارای اضلاع a و b و وتر c باشد، پس $a^2 + b^2 = c^2$ است.

بعضی از گزاره ها هستند که بخاطر معروف بودن، دارای یک نام هستند.

یکی از این گزاره های معروف، قضیه آخرین فرمات است **Fermat's Last Theorem**

R : برای تمام اعداد $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ داریم $a^n + b^n \neq c^n$

فرمات این قضیه را ثابت نکرد. در سال ۱۹۹۳ استاد دانشگاه پرینستون بنام اندرو وایلز آنرا ثابت کرد.

اندرو وایلز Andrew Wiles

دانشگاه پرینستون Princeton University

گزاره معروف دیگر حدس گولد باخ **Goldbach Conjecture** است.

S : هر عدد صحیح زوج بزرگ تر از ۲ عبارت است از مجموع دو عدد اول.

اما تا کنون که ۲۶۰ سال می گذرد، کسی نتوانسته صحت آنرا ثابت کند. پس چون S یا صحیح است و یا غلط، پس یک گزاره است.

در این کتاب، روش هایی را ارائه می دهیم که با بکار بردن آنها صحیح یا غلط بودن گزاره ها را می توان ثابت کرد. برای این که ثابت کنیم یک گزاره صحیح است با گزاره هایی که صحت آنها مسلم است و یا ثابت شده که صحیح هستند، شروع می کنیم و با بکار بردن منطق نتیجه می گیریم که آن گزاره صحیح است. البته اثبات بعضی ساده است و بعضی خیلی مشکل. ما بیشتر روی گزاره هایی تمرکز می کنیم که اثبات آنها ساده تر هستند.

تمرینات ۳.۱

در تمرینات زیر ، مشخص کنید که آیا عبارتها ، گزاره هستند یا نه. اگر گزاره هستند بگویید آن گزاره صحیح است یا غلط.

- ۱ - هر عدد حقیقی ، یک عدد صحیح زوج است.
- ۲ - اگر x و y اعداد حقیقی باشند و $5x = 5y$ باشد ، پس $x = y$ است.
- ۳ - مجموعه های \mathbb{Z} و \mathbb{N} بی کران هستند.
- ۴ - مشتق هر چند جمله ای درجه ۵ یک چند جمله ای درجه ۶ است.
- ۵ $\cos x = -1$
- ۶ - عدد صحیح x یک مضرب ۷ است.
- ۷ - یا x یک مضرب ۷ است و یا نیست.

پاسخ تمرینات ۳.۱

در تمرینات زیر ، مشخص کنید که آیا عبارتها ، گزاره هستند یا نه. اگر گزاره هستند بگویید آن گزاره صحیح است یا غلط.

- ۱ - هر عدد حقیقی ، یک عدد صحیح زوج است. گزاره ، غلط
- ۲ - اگر x و y اعداد حقیقی باشند و $5x = 5y$ باشد ، پس $x = y$ است. گزاره ، صحیح
- ۳ - مجموعه های \mathbb{Z} و \mathbb{N} بی کران هستند. گزاره ، صحیح
- ۴ - مشتق هر چند جمله ای درجه ۵ یک چند جمله ای درجه ۶ است. گزاره ، غلط
- ۵ $\cos x = -1$
- گزاره نیست. یک گزاره نما است. چون صحیح یا غلط بودن آن بستگی به x دارد.
- ۶ - عدد صحیح x یک مضرب ۷ است. یک گزاره نما است.
- ۷ - یا x یک مضرب ۷ است و یا نیست. یک گزاره است. زیرا صحت جمله بستگی به مقدار x ندارد. x هر مقدار که باشد ، جمله صحیح است.

۳.۲ – عملگرهای منطقی **Logical Operators** یا **رابطه های منطقی Logical Connectives** نماد هایی هستند که برای ربط دادن دو جمله و یا بیشتر بکار می روند. این عملگر ها را عملگر های “دو دویی” می نامند.

حرف ربط “و AND”

را می توان برای متصل کردن دو گزاره بکار برد و یک گزاره جدید بدست آورد. مثلا دو گزاره زیر را داریم.

P : عدد ۲ زوج است.

Q : عدد ۳ فرد است.

حال این دو گزاره را با حرف ربط “و” به یکدیگر متصل می کنیم تا یک گزاره مرکب R_1 بدست آوریم.

R_1 : عدد ۲ زوج است و عدد ۳ فرد است.

چون گزاره های P و Q هر دو صحیح هستند، پس گزاره R_1 هم صحیح است، البته با توجه به درک ما از مفهوم “و”

اگر یکی و یا هر دو گزاره های P و Q غلط بودند، پس R_1 هم غلط می بود. مثلا گزاره های زیر غلط هستند.

R_2 : عدد ۱ زوج است و عدد ۳ فرد است.

R_3 : عدد ۲ زوج است و عدد ۴ فرد است.

R_4 : عدد ۳ زوج است و عدد ۲ فرد است.

از این مثال ها ملاحظه می کنید که هر دو گزاره ئی P و Q را می توان با هم ترکیب کرد و یک گزاره جدید “ P و Q ” بدست آورد.

حالا یک نماد مخصوص برای کلمه “و” معرفی می کنیم. این نماد \wedge است. پس اگر P و Q گزاره باشند، پس $P \wedge Q$ بجای “ P و Q ” بکار می بریم. گزاره $P \wedge Q$ صحیح است اگر هر دو P و Q صحیح باشند. در غیر اینصورت غلط است.

این موضوع را در جدول زیر خلاصه می کنیم، که بنام **جدول درستی Truth Table** نامیده می شود

توجه داشته باشید که حرف T را برای *True* یعنی صحیح بکار می بریم و حرف F را برای *False* یعنی غلط بکار می بریم. شما می توانید به ترتیب حروف “ص” و “غ” و یا هر حرف یا کلمه ای که مفاهیم صحیح و غلط را برسانند، بکار برید.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

در جدول بالا، T و F را مقادیر درستی **Truth Values** می نامند و اگر "ص" و "غ" بکار برده باشید، به همین نام نامیده می شوند. هر خط، یکی از چهار حالت ممکن مقادیر درستی P و Q را نشان می دهد. و ستون با تیترا $P \wedge Q$ می گوید که آیا در هر حالت، $P \wedge Q$ صحیح است و یا غلط. به حرف ربط "و" عملگرای عطفی هم می گویند.

گزاره ها را هم می توان با استفاده از کلمه "یا" **OR** با هم ترکیب کرد. که به آن عملگر فصلی هم می گویند. گزاره های زیر را ملاحظه کنید.

S_1 : عدد ۲ زوج است یا عدد ۳ فرد است.

S_2 : عدد ۱ زوج است یا عدد ۳ فرد است.

S_3 : عدد ۲ زوج است یا عدد ۴ فرد است.

S_4 : عدد ۳ زوج است یا عدد ۲ فرد است.

در ریاضیات، هنگامی که می گوئیم " P یا Q " همیشه این طور استنباط می شود که یکی و یا هر دو P و Q صحیح است. بنا بر این گزاره های S_1 و S_2 و S_3 هر سه صحیح هستند. اما S_4 غلط است. نماد V را بجای "یا" بکار می بریم. پس اگر P و Q گزاره باشند، پس $P \vee Q$ یعنی

" P یا Q "

در زیر، جدول درستی را ملاحظه می کنید.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

لازم است یاد آوری کنیم، معنی "یا" که در جدول بالا بکار رفته، با مفهوم "یا" در مکالمات روزمره تفاوت دارد. مثلا اگر از طرف مسئولین دانشگاه جمله زیر را به شما بگویند

باید شهریه خود را بپردازید یا از دانشگاه اخراج می شود.

شما می فهمید که این اخطار یعنی یا باید شهریه را بپردازید یا در غیر این صورت اخراج می شوید. اما

"نه هر دو"

در ریاضیات هرگز "یا" را با مفهوم "هر دو" بکار نمی بریم.

در خاتمه این بخش، عملگر **نقض** را ذکر می‌کنیم. اگر یک گزاره P داشته باشیم که صحیح است، عملگر **نقیض**، آنرا به نا درست تبدیل می‌کند. آن عملگر را با نماد $\sim P$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم "نه P " و یا "چنین نیست که P " اگر گزاره غلط باشد، عملگر **نقیض**، آنرا به صحیح تبدیل می‌کند. این نماد بر روی یک گزاره عمل می‌کند. اگر داشته باشیم

P : عدد ۲ زوج است.

به چند طریق می‌توانیم گزاره بالا را نقض کنیم.

$\sim P$: صحیح نیست که عدد ۲ زوج است.

$\sim P$: غلط است که بگوییم عدد ۲ زوج است.

$\sim P$: عدد ۲ زوج نیست.

در ذیل هم جدول درستی عمل گر نقض را می‌آوریم.

P	$\sim P$
T	F
F	T

تمرینات ۳.۲

هر کدام از گزاره‌ها و یا گزاره‌های زیر را به صورت $P \wedge Q$ یا $P \vee Q$ یا $\sim P$ بنویسید.

۱ - عدد ۸ هم زوج است و هم یک توانی از ۲

۲ - $x \neq y$

۳ - $y \geq x$

۴ - عدد x مساوی صفر است، اما عدد y مساوی صفر نیست.

۵ - $x \in A - B$

۶ - $A \in \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |\bar{X}| < \infty\}$

پاسخ تمرینات ۳.۲

هر کدام از گزاره‌ها و یا گزاره‌های زیر را به صورت $P \wedge Q$ یا $P \vee Q$ یا $\sim P$ بنویسید.

۱ - عدد ۸ هم زوج است و هم یک توانی از ۲

پاسخ

P : عدد ۸ زوج است.

Q : عدد ۸ یک توانی از ۲ است.

$P \wedge Q$

$x \neq y$ - ۲
پاسخ

$\sim (x = y)$

$y \geq x$ - ۳
پاسخ

$\sim (y < x)$

۴ - عدد x مساوی صفر است ، اما عدد y مساوی صفر نیست.
پاسخ

$P: x = 0$

$Q: y = 0$

$P \wedge \sim Q$

$x \in A - B$ - ۵
پاسخ

$(x \in A) \wedge \sim (x \in B)$

$A \in \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |\overline{X}| < \infty\}$ - ۶
پاسخ

$(A \subseteq \mathbb{N}) \wedge (|\overline{X}| < \infty)$

۳.۳ - گزاره های شرطی Conditional Statements

طریق دیگری هم برای متصل کردن دو گزاره وجود دارد. فرض کنید که یک عدد صحیح a داریم. گزاره زیر را در رابطه با a در نظر بگیرید.

R : اگر عدد صحیح a یک مضرب ۶ باشد، پس a بر ۲ بخش پذیر است.

فورا، با در نظر گرفتن اطلاعات ما در مورد اعداد صحیح و مفاهیم "اگر" و "پس"، نتیجه می گیریم که این یک گزاره صحیح است. ملاحظه می کنید که R از دو گزاره ساده تر تشکیل شده است.

P : عدد صحیح a مضربی از ۶ است.

Q : عدد صحیح a بر ۲ بخش پذیر است.

R : اگر P پس Q

بطور کلی، اگر دو گزاره P و Q داشته باشیم، می توانیم یک گزاره جدید به صورت زیر بسازیم.

اگر P پس Q

یا

اگر P آنگاه Q

نماد \Rightarrow را برای گزاره شرطی بالا بکار می بریم. پس داریم.

$P \Rightarrow Q$

و می خوانیم "اگر P پس Q " یا "اگر P آنگاه Q "

هنگامی که می نویسیم $P \Rightarrow Q$ منظور این است که اگر P صحیح باشد، پس لاجرم Q باید صحیح باشد. گزاره مانند $P \Rightarrow Q$ را گزاره شرطی می نامند. زیرا منظور این است که Q صحیح است به شرطی که P صحیح باشد.

در بعضی کتب ریاضی از نماد \rightarrow و در بعضی دیگر از نماد \supset استفاده می کنند. اما، ما در این کتاب از نماد \Rightarrow استفاده می کنیم. زیرا این نماد هم در جبر و در حسابان به معنی "دلالت داشتن" بکار می رود. مثلا

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -3$$

مجددا در مورد $P \Rightarrow Q$ فکر کنید. این یعنی اگر P صحیح باشد، پس قول می دهیم Q هم صحیح است. اما در یک مورد این قول ممکن است شکسته شود و آن همگامی است که P صحیح است، اما Q غلط است. جدول درستی $P \Rightarrow Q$ مطابق زیر است.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

شاید دو خط آخر برای شما قابل درک نباشد. و بگویید چرا دو خط آخر صحیح هستند. مثالی می زنیم تا متقاعد شوید که جدول بالا صحیح است. فرض کنید استاد به شما بگوید.

اگر در امتحان آخر ترم قبول شوید ، **پس** آن رشته درسی را گذرانده اید.

تحت چه شرایطی ممکن است استاد به شما دروغ گفته باشد؟

در امتحان قبول شوید	آن رشته را گذرانده اید	(ان رشته را گذرانده اید) \Rightarrow (در امتحان قبول شوید)
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۱ - خط اول شما در امتحان قبول می شوید و آن رشته را می گذارانیید. استاد به قول خود وفا کرده است. حرف T در ستون سوم این خط اول نشان می دهد که استاد راست گفته است.

۲ - در خط دوم ، شما در امتحان قبول شده اید ، اما استاد به شما نمره مردودی داده است. در این صورت استاد قول خود را شکسته است ، و حرف F در ستون سوم این خط نشان می دهد که آنچه استاد گفته ، صحیح نبوده است.

۳ - حالا خط سوم را ملاحظه کنید. شما در امتحان قبول نشده اید ، اما آن رشته را گذرانده اید . استاد به شما دروغ نگفته است. او تنها شرط گذراندن آن رشته را موقوف به قبولی در امتحان نکرده است.

۴ - حالا به خط چهارم توجه کنید. شما در امتحان قبول نشده اید ، آن رشته را هم نگذرانده اید. استاد همان کاری کرده که گفته بوده است. پس در ستون سوم این خط حرف T گذاشته شده است.

مثال دیگری می آوریم که نشان دهیم چرا $P \Rightarrow Q$ صحیح است ، هنگامی که P غلط است.

می دانید که اول فروردین، ساعات شب و روز با هم مساوی هستند. به این روز می گویند اعتدالین. همچنین اول مهر هم اعتدالین است. اول فروردین در ماه مارچ است و اول مهر در ماه سپتامبر. پس دو روز در سال ، ساعات شب و روز با هم مساوی هستند. یعنی اعتدالین داریم. حالا به مثال زیر توجه کنید.

P : این ماه سپتامبر است

Q : یک اعتدالین در این ماه وجود دارد

اگر این ماه سپتامبر باشد ، **پس** در این ماه یک اعتدالین وجود دارد.

(یک اعتدالین در این ماه وجود دارد) \Rightarrow (این ماه سپتامبر است)

$$P \Rightarrow Q$$

سه گزاره های بالا که به رنگ قرمز هستند ، بدون تردید صحیح هستند. مهم نیست که در چه ماهی آنها را بگوییم. این گزاره ها مسلماً صحیح هستند ، اگر آنها را در ماه سپتامبر ، یا مارچ ، یا می ، یا آوریل و یا هر ماه دیگری بگوییم.

اما گزاره های جدا گانه زیر راه ملاحظه کنید.

P : این ماه سپتامبر است

Q : یک اعتدالین در این ماه وجود دارد

درستی و نادرستی گزاره های جدا گانه P و Q بستگی به این دارد ، که در کدام ماه گفته شوند. اما $P \Rightarrow Q$ همیشه صحیح است، حتی موقعی که P غلط است.

	این ماه سپتامبر است	یک اعتدالین در این ماه وجود دارد	(یک اعتدالین در این ماه وجود دارد) \Rightarrow (این ماه سپتامبر است)
سپتامبر	T	T	T
اکتبر	F	F	T
نوامبر	F	F	T
دسامبر	F	F	T
ژانویه	F	F	T
فوریه	F	F	T
مارچ	F	T	T

در ذیل آنچه تا کنون گفته شده است ، خلاصه می کنیم.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P را مقدم **Antecedent** و Q را تالی **Consequent** می نامند. همچنین به ترتیب ، می توان آنها را جمله شرط و جواب شرط نامید.

ملاحظه می کنید هنگامی $P \Rightarrow Q$ می تواند غلط باشد که P صحیح باشد ، اما Q غلط باشد. در موارد دیگر $P \Rightarrow Q$ همیشه صحیح است.

گزاره شرطی $P \Rightarrow Q$ را می توان به طرق زیر هم به فارسی بیان کرد.

اگر P پس Q

Q اگر P

Q هر وقت P

Q ، در صورتی که P

هر گاه P ، پس Q

P یک شرط کافی برای Q است

برای Q ، کافی است که P

Q یک شرط لازم است برای P

تمرینات ۳.۳

بدون تغییر مفاهیم، جملات زیر را به صورت "اگر P ، پس Q " بنویسید.

۱ - یک ماتریس معکوس شدنی است اگر دترمینان آن صفر نباشد.

۲ - برای این که یک تابع انتگرال پذیر باشد، لازم است که پیوسته باشد.

۳ - یک عدد صحیح بر ۸ بخش پذیر است فقط اگر بر ۴ بخش پذیر باشد.

۴ - یک سری همگرا است هر گاه مطلقا همگرا باشد.

۵ - یک تابع انتگرال پذیر است در صورتی که پیوسته باشد.

برای تمرین زیر جدول درستی بسازید.

۶ - اگر در درس ریاضی نمره ۲۰ بگیری، یک ماشین حساب برای شما می خرم.

پاسخ تمرینات ۳.۳

بدون تغییر مفاهیم، جملات زیر را به صورت "اگر P ، پس Q " بنویسید.

۱ - یک ماتریس معکوس شدنی است اگر دترمینان آن صفر نباشد.

پاسخ

اگر یک ماتریس دارای دترمینانی باشد که صفر نباشد، پس آن ماتریس معکوس شدنی است.

۲ - برای این که یک تابع انتگرال پذیر باشد، لازم است که پیوسته باشد.

پاسخ

اگر یک تابع انتگرال پذیر باشد، پس آن تابع پیوسته است.

۳ - یک عدد صحیح بر ۸ بخش پذیر است فقط اگر بر ۴ بخش پذیر باشد.

پاسخ

اگر یک عدد صحیح بر ۸ بخش پذیر باشد، پس آن عدد بر ۴ بخش پذیر است.

۴ - یک سری همگرا است هر گاه مطلقا همگرا باشد.

پاسخ

اگر یک سری مطلقا همگرا باشد ، پس آن سری همگرا است.

۵ - یک تابع انتگرال پذیر است در صورتی که پیوسته باشد.

پاسخ

اگر یک تابع پیوسته باشد ، پس آن تابع انتگرال پذیر است.

برای تمرین زیر جدول درستی بسازید.

۶ - اگر در درس ریاضی نمره ۲۰ بگیرید ، یک ماشین حساب برای شما می خرم .

P : در درس ریاضی نمره ۲۰ بگیرید

Q : یک ماشین حساب برای شما می خرم

$$P \Rightarrow Q$$

حالت اول : شما در درس ریاضی نمره ۲۰ می گیرید ، من یک ماشین حساب برای شما می خرم .
ما هر دو طبق توافق عمل کردیم . گزاره شرطی صحیح است.

حالت دوم : شما در درس ریاضی نمره ۲۰ می گیرید ، من یک ماشین حساب برای شما نمی خرم .
من بد قولی کردم . گزاره شرطی غلط است.

حالت سوم : شما در درس ریاضی نمره ۲۰ نمی گیرید ، من یک ماشین حساب برای شما می خرم .
شاید شما نمره ۱۹ گرفته باشید و من برای تشویق شما باز هم ماشین حساب
برای شما خریدم . من نگفتم تنها شرط ما این است که شما نمره ۲۰ بگیرید .
من بد قولی نکردم . گزاره شرطی صحیح است.

حالت چهارم : شما در درس ریاضی نمره ۲۰ نمی گیرید و من هم یک ماشین حساب برای شما نمی خرم
طبق قرار عمل کردم . گزاره شرطی صحیح است.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۳.۴ - گزاره های شرطی دو سویه یا دو طرفه Bi-conditional Statements

ترکیب دو شرطی هم گفته می شود.

لازم است که بدانید $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ با هم فرق دارند و یکی نیستند. برای این که بدانید چرا، فرض کنید a یک عدد صحیح باشد. حال به گزاره های زیر توجه کنید.

$$(a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است}) \Rightarrow (a \text{ یک مضرب } 6 \text{ است})$$

$$(a \text{ یک مضرب } 6 \text{ است}) \Rightarrow (a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است})$$

گزاره اول می گوید اگر a یک مضرب ۶ باشد، پس a بر ۲ بخش پذیر است. این مسلماً صحیح است. زیر هر مضربی از ۶ زوج است و مسلماً بر ۲ بخش پذیر است. اما، گزاره دوم می گوید اگر a بر ۲ بخش پذیر باشد، پس آن عدد مضربی از ۶ است. این جمله لزوماً صحیح نیست. مثلاً اگر $a = 4$ باشد، این عدد بر ۲ بخش پذیر است، اما مضربی از ۶ نیست.

پیشوند bi در انگلیسی به معنی دو است. مانند

Bicycle دوچرخه

Binomial دو جمله ای

Bisector منصف

پس مفهوم $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ بطور کلی متفاوت است. گزاره شرطی $Q \Rightarrow P$ را معکوس یا وارونه **Converse** گزاره $P \Rightarrow Q$ می نامند.

اما گاهی اوقات P و Q گزاره های صحیح هستند. به دو گزاره زیر توجه کنید.

$$(a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است}) \Rightarrow (a \text{ زوج است})$$

$$(a \text{ زوج است}) \Rightarrow (a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است})$$

بدون در نظر گرفتن مقدار a هر دو گزاره بالا صحیح هستند. چون هم $P \Rightarrow Q$ صحیح است و هم $Q \Rightarrow P$ ، پس $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ صحیح است.

قضیه معروف فیثاغورث را بخاطر دارید.

اگر مثلث ABC قائم الزاویه باشد، پس مربع یک ضلع "وتر" برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر.

عکس عبارت بالا هم صحیح است.

اگر در مثلث ABC مربع یک ضلع مساوی مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

در هندسه در مورد قضیه های مانند قضیه فیثاغورث عبارت زیر را بکار می بردیم.

شرط لازم و کافی

حالا یک نماد جدید \Leftrightarrow را معرفی می کنیم. این نماد برای بیان مفهوم $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ بکار می رود. بر اساس بخش قبل $P \Rightarrow Q$ خوانده می شود "اگر P پس Q " و $Q \Rightarrow P$ را می توانیم بخوانیم "فقط اگر P " پس $P \Leftrightarrow Q$ را می خوانیم "اگر و فقط اگر P پس Q " یا "اگر و فقط اگر P آنگاه Q " یا
 " Q شرط لازم و کافی است برای P "

مثلا اگر یک عدد صحیح a داشته باشیم، گزاره صحیح زیر را خواهیم داشت.
 $(a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است}) \Leftrightarrow (a \text{ زوج است})$
 که می توان آنرا مطابق زیر خواند.
 عدد صحیح a زوج است اگر و فقط اگر a بر ۲ بخش پذیر باشد.

در ذیل جدول درستی \Leftrightarrow را ملاحظه می کنید. می بینید که ردیف های اول و آخر، یعنی هم $P \Rightarrow Q$ و هم $Q \Rightarrow P$ صحیح هستند. بر اساس جدول درستی \Rightarrow پس $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ صحیح است و لذا $P \Leftrightarrow Q$ صحیح است. اما، دو ردیف وسط، یکی از $P \Rightarrow Q$ یا $Q \Rightarrow P$ غلط است، پس $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ غلط است، لذا $P \Leftrightarrow Q$ را غلط می سازد.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

گزاره زیر را

$$R: (a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است}) \Leftrightarrow (a \text{ زوج است})$$

با جدول درستی بالا مقایسه کنید. اگر a زوج باشد، دو گزاره های طرفین \Leftrightarrow صحیح هستند و لذا بر اساس جدول درستی، R صحیح است. اگر a فرد باشد، پس دو گزاره های طرفین \Leftrightarrow غلط هستند، و باز هم بر اساس جدول درستی، R صحیح است.

پس نتیجه می گیریم که $P \Leftrightarrow Q$ هنگامی صحیح است که هر دو P و Q یا صحیح باشند و یا هر دو غلط.

$P \Leftrightarrow Q$ را می توان به طرق زیر هم بیان کرد.

P اگر و فقط اگر Q
 P شرط لازم و کافی است برای Q
 برای این که P صحیح باشد، لازم و کافی است که Q صحیح باشد.
 اگر P آنگاه Q و بر عکس

تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر معکوس جمله شرطی داده شده را بنویسید و سپس با ترکیب آن دو، یک گزاره دو شرطی بسازید.

- ۱ - اگر یک عدد مضربی از ۵ باشد، پس آخرین رقم آن یا یک صفر است و یا یک پنج.
- ۲ - اگر دو خط بر هم عمود باشند، پس از تلاقی آنها زاویه های قائمه ایجاد می شود.
- ۳ - اگر شما در تهران زندگی می کنید، پس شما در بزرگ ترین شهر ایران زندگی می کنید.

۴ - نشان دهید $P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$

۵ - ثابت کنید $P \Leftrightarrow Q$ معادل $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ است.

پاسخ تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر معکوس جمله شرطی داده شده را بنویسید و سپس با ترکیب آن دو، یک گزاره دو شرطی بسازید.

- ۱ - اگر یک عدد مضربی از ۵ باشد، پس آخرین رقم آن یا یک صفر است و یا یک پنج.
اگر آخرین رقم یک عدد یک صفر و یا یک پنج باشد، پس آن عدد یک مضربی از پنج است.
یک عدد حسابی یک ضریبی از پنج است اگر و فقط اگر آخرین رقم آن یک صفر و یا یک پنج باشد.
شرط لازم و کافی برای این که یک عدد حسابی ضریبی از پنج باشد این است که آخرین رقم آن یا یک صفر باشد و یا یک پنج.

- ۲ - اگر دو خط بر هم عمود باشند، پس از تلاقی آنها زاویه های قائمه ایجاد می شود.
اگر از تلاقی دو خط زاویه های قائمه ایجاد شود، پس آن دو خط بر هم عمود هستند.
دو خط بر هم عمود هستند اگر و فقط اگر از تلاقی آنها زاویه های قائمه ایجاد شود.
شرط لازم و کافی برای این که دو خط بر هم عمود باشند این است که از تلاقی آنها زاویه های قائمه ایجاد شود.

- ۳ - اگر شما در تهران زندگی می کنید، پس شما در بزرگ ترین شهر ایران زندگی می کنید.
اگر شما در بزرگ ترین شهر ایران زندگی می کنید، پس در تهران زندگی می کنید.
شما در بزرگ ترین شهر ایران زندگی می کنید اگر و فقط اگر در تهران زندگی می کند.
شرط لازم و کافی برای این که در بزرگترین شهر ایران زندگی کنید این است که در تهران زندگی می کنید.

۴ - نشان دهید $P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$

پاسخ

جدول درستی می سازیم.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim P$	$(\sim p) \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

۵ - ثابت کنید $P \Leftrightarrow Q$ معادل $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ است.

پاسخ

جدول درستی می سازیم.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

۳.۵ - گزاره های مختلط Complex Statements

تا کنون به مفهوم گزاره ساده آشنا شده اید. مانند، ایرج یک پسر است. پس گزاره ساده، گزاره ای است که شامل هیچ گزاره دیگری به عنوان مولفه نیست. همچنین دیدیم که گزاره های ساده را با نماد های $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ترکیب کردیم و یک گزاره مرکب بدست آوردیم. مثلا اگر داشته باشیم

$$P : \text{عدد چهار یک عدد زوج است.}$$

$$Q : \text{عدد چهار بر دو بخش پذیر است.}$$

$$P \wedge Q$$

یعنی

عدد چهار یک عدد زوج است و بر دو بخش پذیر است.

همچنین با جدول درستی برای $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \sim, \vee, \wedge$ آشنا شده اید. بایستی آنها را خوب بخاطر بسپارید. حالا این گزاره های مرکب را با هم تلفیق می کنیم تا گزاره های پیچیده تر و مختلط بسازیم.

مثلا فرض کنید می خواهیم بگوییم P یا Q صحیح است ولی نه هر دوی آنها. یک نماد واحد برای بیان این مقصود، وجود ندارد. اما می توان آنها را مطابق زیر با هم ترکیب کرد.

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

گزاره بالا یعنی P یا Q صحیح است، اما هر دو با هم صحیح نیستند.

گزاره مختلط بالا، یا صحیح است و یا غلط، بستگی به صحت و سقم مقدار P و Q دارد. برای گزاره مختلط بالا می توانیم جدول درستی بسازیم.

ابتدا، در ستون های اول و دوم مقادیر ممکن برای P و Q را وارد می کنیم. سپس ملاحظه می کنید که دو گزاره مرکب $(P \vee Q)$ و $(P \wedge Q)$ داریم آنها را به ترتیب در ستون های سوم و چهارم وارد می کنیم. ستون پنجم شامل $\sim (P \wedge Q)$ است و در نهایت ستون های سوم و پنجم را با \wedge ترکیب می کنیم، تا مقادیر $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ در ستون ششم بدست آید.

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$\sim (P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

جدول درستی بالا به ما می گوید $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ هنگامی صحیح است که یا P و یا Q صحیح باشد و نه هر دو با هم. و این همان مقصود ما است.

گزاره آشنای زیر در مورد دو عدد حقیقی x و y را ملاحظه کنید.

حاصلضرب xy مساوی صفر است، اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد و یا $y = 0$ گزاره بالا را می توان مطابق زیر نوشت.

$$(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$

اگر P برای $xy = 0$ و Q برای $x = 0$ و R برای $y = 0$ بکار ببریم، پس داریم

$$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$$

توجه داشته باشید که پرانتزها لازم هستند، زیرا در غیر این صورت نمیدانیم گزاره را به صورت

$$(P \Leftrightarrow (Q \vee R)) \vee R$$

چون سه گزاره P, Q, R داریم، و هر گزاره دو حالت ممکن صحیح و غلط دارد، پس هشت صورت ممکن برای سه ستون اول خواهیم داشت.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	T

ستون چهارم را با اطلاعی که از مفهوم \vee داریم، پر می کنیم و ستون پنجم را با اطلاعی که از مفهوم \Leftrightarrow داریم، پر می کنیم.

لازم به یاد آوری است که نماد \sim بر روی عبارتی عمل می کند که بعد از این نماد قرار دارد، پس $\sim (P \vee Q)$ یعنی $(\sim P) \vee Q$ نه $(\sim P) \vee Q$

عمل گراها هم مطابق زیر به ترتیب عمل می کنند. یعنی اولویت عمل گراها به ترتیب زیر است.

$$\sim$$

$$\wedge$$

$$\vee$$

$$\Rightarrow, \Leftrightarrow$$

تمرینات ۳.۵

جدول درستی گزاره های منطقی زیر را بنویسید.

- ۱) $P \vee (Q \Rightarrow R)$
- ۲) $\sim (P \Rightarrow Q)$
- ۳) $(P \wedge \sim P) \vee Q$
- ۴) $(P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$
- ۵) $\sim (\sim P \vee \sim Q)$

۶ - فرض کنید P غلط است و گزاره $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (R \Rightarrow S)$ صحیح است. مقادیر R و S را پیدا کنید. می توانید این کار را بدون جدول درستی انجام دهید. اگر نتوانستد، جدول درستی بسازید.

پاسخ تمرینات ۳.۵

جدول درستی گزاره های منطقی زیر را بنویسید.

۱) $P \vee (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \vee (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

۲) $\sim (P \Rightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim (P \Rightarrow Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

۳) $(P \wedge \sim P) \vee Q$

P	Q	$(P \wedge \sim P)$	$(P \wedge \sim P) \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	F

۴) $(P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$

P	Q	$(P \wedge \sim P)$	$(P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$$۵) \sim (\sim P \vee \sim Q)$$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim (\sim P \vee \sim Q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

۶ - فرض کنید P غلط است و گزاره $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (R \Rightarrow S)$ صحیح است. مقادیر R و S را پیدا کنید. می توانید این کار را بدون جدول درستی انجام دهید. اگر نتوانستد، جدول درستی بسازید.

پاسخ

چون P غلط است، پس $(P \wedge Q)$ هم غلط است. اما، برای این که $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ صحیح باشد، باید $(R \Rightarrow S)$ هم غلط باشد. تنها راهی که ممکن است $(R \Rightarrow S)$ غلط باشد، این است که R صحیح باشد و S غلط.

۳.۶ - هم ارزی منطقی Logical Equivalence

در بخش ۳.۴ هنگام بررسی جدول درستی $P \Leftrightarrow Q$ مشاهده کردید که $P \Leftrightarrow Q$ صحیح است دقیقا وقتی که P و Q هر دو صحیح باشند و یا هر دو غلط. به عبارت دیگر، $P \Leftrightarrow Q$ صحیح است فقط وقتی که حداقل یکی از گزاره های $P \wedge Q$ و $\sim P \wedge \sim Q$ صحیح باشد. پس می توانیم بگوییم $P \Leftrightarrow Q$ همان معنی و مفهوم دارد که $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

برای این که ببینیم این موضوع حقیقتا درست است، جدول درستی $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ و $P \Leftrightarrow Q$ را می نویسیم.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(P \wedge Q)$	$(\sim P \wedge \sim Q)$	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T

جدول بالا نشان می دهد که $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ و $P \Leftrightarrow Q$ مقادیر درستی یکسان دارند، و بستگی به مقادیر P و Q ندارد. در این حالت می نویسیم

$$P \Leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

و یا

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

و می گوییم $P \Leftrightarrow Q$ و $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ **منطقا هم ارز** هستند. بطور کلی، دو گزاره **منطقا هم ارز** هستند اگر مقادیر درستی آنها در جدول درستی، خط به خط همانند هستند. هم ارزی منطقی، مهم است، زیرا طرق مختلفی برای نگاه کردن به یک چیز به ما نشان می دهد. مثلا جدول زیر نشان می دهد که $P \Rightarrow Q$ منطقا هم ارز $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ است.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

این حقیقت که $P \Rightarrow Q \equiv (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ است، مفید است، زیرا بسیاری از قضیه ها شکل $P \Rightarrow Q$ دارند. در فصل های بعدی، ملاحظه خواهید کرد که اثبات یک قضیه آسان تر است اگر آنرا به شکل منطقا هم ارز $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ بیان کنیم.

دو جفت گزاره های منطقا هم ارز وجود دارد که در این کتاب مکررا با آنها برخورد می کنیم. به آنها **De Morgan's Laws** می گویند **قوانین دو مورگان**

قوانین دو مورگان De Morgan's Laws

$$۱) \sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$$

$$۲) \sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

در ذیل قانون اول را ثابت می کنیم و اثبات قانون دوم را در تمرینات خواهیم دید.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

در ذیل چند گزاره هم ارز منطقی دیگر را ذکر می کنیم که بسیار مهم هستند.

- ۱) قانون عکس نقیض $P \Rightarrow Q \equiv (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$
- ۲) قانون جابجایی $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
- ۳) قانون جابجایی $P \vee Q \equiv Q \vee P$
- ۴) قانون پخش پذیری $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- ۵) قانون پخش پذیری $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- ۶) قانون شرکت پذیری $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
- ۷) قانون شرکت پذیری $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

ملاحظه می کنید که قانون پخش پذیری گزاره ها ، عینا مانند پخش پذیری اعداد حقیقی است که در جبر دیده ایم. در مورد قانون شرکت پذیری هم بکار بردن پرانتز ها لزومی ندارد. اما ، اگر \wedge و \vee داشته باشیم ، وجود پرانتز ها لازم است. مانند $P \vee (Q \wedge R)$ و $(P \vee Q) \wedge R$ منطقا هم ارز نیستند.

در خاتمه چند عملگر ثانویه را ذکر می کنیم.

۱ - عملگر (XOR)

قبلا در مورد عملگر OR که با نماد \vee نشان داده می شود صحبت کردیم. گفتیم اگر داشته باشیم $P \vee Q$ یعنی یا P یا Q یا هر دو. اما در ترکیب XOR ارزش دو گزاره درست است ، اگر و فقط اگر یکی از اجزای آن درست باشد ، و نه هر دوی آنها . نماد \oplus را برای نشان دادن XOR بکار می بریم. جدول درستی XOR در ذیل می آوریم.

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

۲ - عملگر NAND

در مورد عملگر AND که با نماد \wedge نشان داده می شود، گفتیم اگر داشته باشیم $P \wedge Q$ باید هر دو گزاره صحیح باشد، یعنی هم P و هم Q باید صحیح باشد تا ارزش $P \wedge Q$ صحیح باشد. اما در مورد NAND که با نماد \uparrow نشان داده می شود، فقط در حالتی غلط است که هر دو گزاره صحیح باشند.

P	Q	$P \uparrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

۳ - عملگر NOR

در این حالت ارزش گزاره مرکب هنگامی صحیح است که دو مولفه غلط باشند، با نماد \downarrow نشان داده می شود.

P	Q	$P \downarrow Q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تمرینات ۳.۶

با استفاده از جدول درستی، نشان دهید که گزاره های زیر منطقی هم ارز هستند.

$$۱) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$۲) P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$$

$$۳) \sim (P \vee Q \vee R) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$$

$$۴) P \Rightarrow Q \equiv (P \wedge \sim Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$$

آیا گزاره های زیر منطقی هم ارز هستند؟

$$۵) P \wedge Q \text{ و } \sim (\sim P \vee \sim Q)$$

$$۶) (\sim P) \wedge (P \Rightarrow Q) \text{ و } \sim (Q \Rightarrow P)$$

۷ - قانون دوم دو مورگان را ثابت کنید.

پاسخ تمرینات ۳.۶

با استفاده از جدول درستی، نشان دهید که گزاره های زیر منطقا هم ارز هستند.

$$۱) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$$۲) P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$$

P	Q	$\sim P$	$(\sim P) \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$$۳) \sim (P \vee Q \vee R) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$$

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim R$	$\sim (P \vee Q \vee R)$	$(\sim P) \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$
T	T	T	T	F	F	F	F	F
T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T	T	T

$$۴) P \Rightarrow Q \equiv (P \wedge \sim Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$Q \wedge \sim Q$	$(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T

آیا گزاره های زیر منطقا هم ارز هستند؟

$$۵) P \wedge Q \text{ و } \sim (\sim P \vee \sim Q)$$

بر اساس قانون دو مورگان داریم.

$$\sim (\sim P \vee \sim Q) \equiv \sim \sim P \wedge \sim \sim Q \equiv P \wedge Q$$

پس دو گزاره منطقا هم ارز هستند.

۶) $(\sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$ و $\sim (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(\sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$	$\sim (Q \Rightarrow P)$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F

ستون های دو گزاره کاملا با هم یکی نیستند ، پس هم ارز نیستند.

۷ - قانون دوم دو مورگان را ثابت کنید.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ممکن است ، تا کنون از خود سؤال کرده اید ، منطق و مطالبی که در این فصل از نظر شما گذشت ، چه کار برد هایی دارد. یکی از کاربردهای منطق در استدلال های ریاضی است که در فصل های بعدی به آن خواهیم پرداخت.

کاربرد مهم و بسیار مفید منطق و مطالب مطرح شده این فصل ، در کامپیوتر است. که اینک به طور خلاصه به آن می پردازیم. مطالب مطرح شده زیر کمتر در کتب ریاضی به زبان فارسی آمده است. و برای اطلاعات بیشتر باید به کتب کامپیوتر مراجعه کنید. اما ، امید است مطالب زیر تا حدودی برای شما مفید واقع شود. و کنجکاوای شما هم ارضا شود.

۳.۷ - مدار های منطقی Logic Circuits

همه ما به کلید های برق آشنا هستیم که می توانیم با آنها لوازم برقی را خاموش و روشن کنیم. مثلا ، کلیدی که سبب می شود تلفن ما زنگ بزند ، توسط تلفن شخص دیگری ، زده می شود. مکانیزم تعویض کانال ها در دستگاه کنترل از راه دور ، تلویزیون هم مثال دیگری است. این ایده که یک سیگنال الکتریکی ، می تواند یک کلید را قطع و وصل کند ، به ما کمک می کند که تصور کنیم ، کامپیوتر ها چگونه کار می کنند.

همان طور که در فصل اول گفتیم ، کامپیوتر ها بر اساس اعداد دو تایی کار می کنند. عدد 1 برای وجود جریان برق و 0 برای عدم جریان برق و یا قطع برق. در بخش های قبل ، هنگام ایجاد جدول حقیقی ، از T برای صحیح بودن و یا به عبارت دیگر یعنی وجود جریان برق. و برای غلط بودن از F استفاده می کردیم. در ذیل جدول درستی $P \wedge Q$ را مجددا راسم می کنیم ولی بجای T و F از 1 و 0 استفاده می کنیم.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

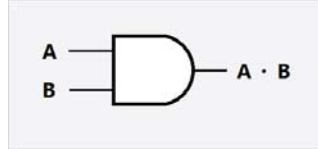
در کامپیوتر ادواتی بنام **دروازه منطقی** یا **گیت منطقی Logic Gate** وجود دارد ، که روی یک یا دو ورودی منطقی ، عملیات منطقی انجام می دهد و یک خروجی منطقی تولید می کند. مدار های کامپیوتر از تعداد زیادی گیت ها تشکیل شده است. هنگامی که برنامه نویس ، یک برنامه می نویسد ، یک مترجم کامپیوتری بنام **کامپایلر Compiler** آن برنامه را به زبان کامپیوتر یعنی همان 0 و 1 تبدیل می کند و در نتیجه کاری که هدف برنامه نویس است ، انجام می دهد.

گیت های منطقی از ادوات الکتریکی مانند ترانزیستور ها و یا قطعات الکترو مغناطیسی ساخته شده اند. عملیات گیت ها بر اساس اعداد دو تایی است.

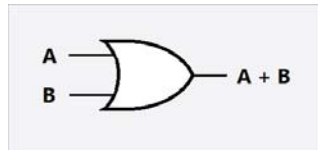
در ذیل تصویر این گیت ها را می آوریم.

۱ - گیت AND یا همان \wedge

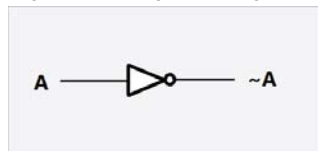
اگر ورودی های A و B هر دو دارای ولتاژ باشد ، خروجی هم دارای ولتاژ است ، در غیر این صورت خروجی دارای ولتاژ و یا برق نیست. جدول درستی هم در بالا آوردیم.

۲ - گیت OR یا همان \vee

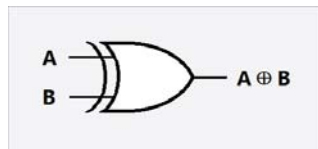
اگر یکی از ورودی های A یا B و یا هر دو دارای ولتاژ باشد ، خروجی هم دارای ولتاژ است.



P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

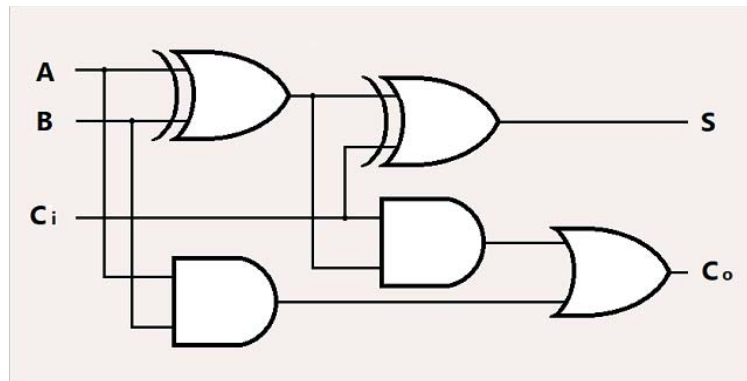
۳ - گیت NOT یا همان \sim اگر ورودی دارای ولتاژ باشد ، خروجی بدون ولتاژ و یا همان صفر است.

P	$\sim P$
1	0
0	1

۴ - گیت XOR یا همان \oplus 

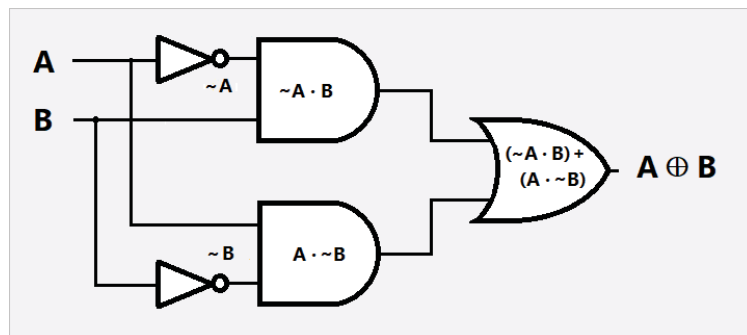
P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

یک مدار شامل چندین گیت است که کار ترکیب چند گزاره را انجام می دهد ، مانند دو تصویر زیر



تصویر زیر دو گزاره هم ارز را نشان می دهد. یعنی

$$A \oplus B \equiv (\sim A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$$



با مدار ها و گیت های کامپیوتر آشنا شدید. حالا بد نیشبت بدانید که هر کدام از حروف و علائمی که روی صفحه کلید کامپیوتر می بینید ، طبق قرار داد یک عدد را نمایندگی می کنند. مثلا حرف A عدد ۶۵ حرف B عدد ۶۶ را نمایندگی می کند. در ذیل چند نمونه از حروف و اعداد مربوط به آنها در سیستم ده دهی و دو تائی ملاحظه می کنید.

A.....65.....01000001

B.....66.....01000010

C.....67.....01000011

حالا بد نیست یک برنامه کامپیوتر خیلی ساده را هم مثال بیاوریم. همانطور که گفتیم. هنگامی که برنامه نویس برنامه را وارد کامپیوتر کرد ، باید توسط برنامه دیگری بنام Compiler به زبان قابل فهم کامپیوتر یعنی به اعداد 11001001 تبدیل شود تا کامپیوتر کاری را که از او خواسته اند انجام دهد.

در ذیل الگاریتم یک برنامه کامپیوتری را برای شما می نویسیم. این الگاریتم معادله درجه دوم

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

را حل می کند. کلمه ROOT که بکار رفته به معنی ریشه و یا جواب معادله است.

کلمه DISC همان $B^2 - 4AC$ است.

کلمه Caculate یعنی محاسبه کن.

کلنه Display یعنی نشان دهید. یعنی کامپیوتر مقدار $B^2 - 4AC$ را روی صفحه کامپیوتر نشان دهد. هر خط را شماره گذاری کرده ایم تا بتوانیم با نام بردن آن خط توضیح دهیم.

- 1) Enter A, B, and C
- 2) Calculate DISC = B**2- 4*A*C
- 3) If DISC < 0 then do the following
 - a. Display DSC.
 - b. Display a massage that there are no real roots.
- 4) Else do the following.

If DISC = 0 then do the following

 - a. Calculate ROOT1= - B / (2 *A)
 - b. Display ROOT1.

Else do the following:

 - a. Calculate DISC = \sqrt{DISC}
 - b. Calculate ROOT1 = (-B +DISC) / (2 * A)
 - c. Calculate ROOT2 = (-B - DIIC) / (2 * A)
 - d. Display ROOT1 and ROOT2.

توضیحات : خط ۳ اگر $B^2 - 4AC < 0$ باشد , پس این پیام را کامپیوتر بدهد که معادله ریشه حقیقی ندارد. خط ۴ اگر $B^2 - 4AC = 0$ باشد , پس معادله یک ریشه دارد آنرا محاسبه کن و نتیجه روی صفحه نشان بده. در غیر این صورت مقدار $\sqrt{B^2 - 4AC}$ محاسبه کن و دو ریشه را پیدا کن و نشان بده.

ملاحظه کردید که چندین مرتبه نماد \Rightarrow تکرار شده است.

۳.۸ - تمرینات دوره ای منطق

یاد آوری

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \sim (p \Rightarrow \sim q)$$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$$

$$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

همچنین برای گزاره های شرطی بجای \rightarrow از نماد \Rightarrow استفاده کردیم و برای شرط دو طرفه بجای \leftrightarrow نماد \Leftrightarrow بکار بردیم.

۱ - ثابت کنید $\sim (p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۲ - ثابت کنید $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

۳ - ثابت کنید $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

۴ - تیم A بیشتر از تیم B امتیاز بدست آورده است، تیم C کمتر از تیم B امتیاز بدست آورده است. تیم A کمتر از تیم C امتیاز بدست آورده است، اگر دو گزاره اول صحیح باشند، پس گزاره سوم

A) T

B) F

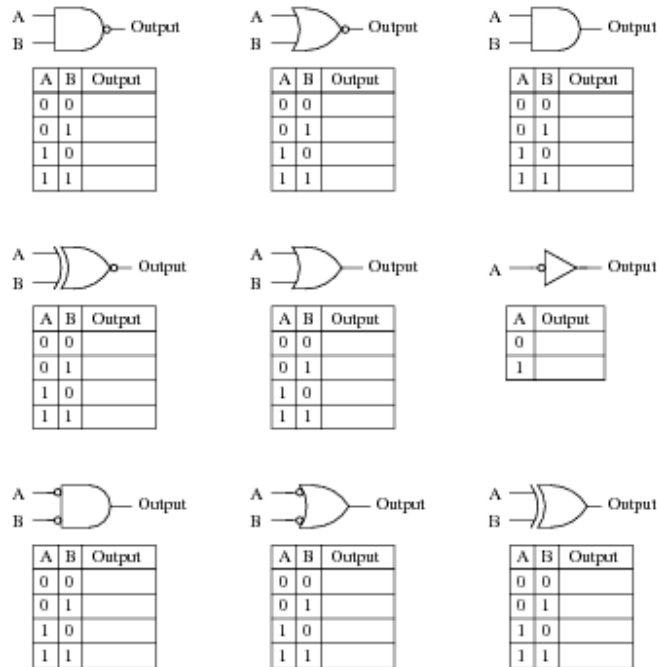
C) نامشخص

۵ - عدد بعدی دنباله را پیدا کنید.

۱۰۴, ۱۰۹, ۱۱۵, ۱۲۲, ۱۳۰, ...

A) ۱۱۹ B) ۱۲۵ C) ۱۳۹ D) ۱۳۴

۶ - مدار های منطقی زیر را نام ببرید و جدول درستی آنها بنویسید.



چند نکته مهم مجموعه عبارت های زیر ، مجموعه کامل جدول ضرب سیستم عددی بولین است.

جدول ضرب سیستم عددی بولین : Boolean Number System

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

با نگاه کردن به جدول ضرب بالا ، چیز غیر معمولی به نظر نمی آید. چون به ظاهر همان عمل ضربی است که در حساب خوانده ایم. اما چیزی که غیر معمول به نظر می رسد این است که چهار جملات بالا تمام قوانین ضرب بولین را تشکیل می دهد.

در ضرب بولین ، دیگر $2 = 1 \times 2$ و یا $6 = 2 \times 3$ نداریم. در سیستم بولین فقط 0 و 1 داریم.

در زیر هم جدول جمع بولین را ملاحظه می کنید.

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

B

فرض کنید یک دانش آموز برای اولین مرتبه جدول بالا را ببیند ، مسلم است که متحیر می شود. چه توضیحی می توانید به او بدهید؟ چگونه می توان گفت $1 + 1 = 1$ قاعده برای $1 + 2$ و یا $2 + 2$ چیست؟

پاسخ

جدول ضرب بولین همان جدول درستی برای \wedge است. که با نماد \wedge نشان می دهیم.
جدول جمع بولین همان جدول درستی برای \vee است. که با نماد \vee نشان می دهیم.

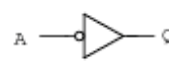
۷ - برای هر یک از مدار های منطقی زیر ، عبارت های بولین بنویسید و نشان دهید چگونه خروجی Q از نظر جبری به ورودی A و B مربوط می شود.



$Q =$



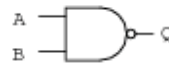
$Q =$



$Q =$



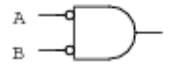
$Q =$



$Q =$



$Q =$



$Q =$

۸ - جدول درستی $(F \vee G) \wedge \sim (F \wedge G)$ را محاسبه کنید.

۹ - با استفاده از جدول درستی، صحت عبارت زیر را نشان دهید

$$p \Rightarrow (q \wedge \sim q) \equiv \sim p$$

۱۰ - عبارت های زیر را ملاحظه کنید.

p یعنی "پاشا خوشحال است"

q یعنی "پاشا نقاشی می کند"

r یعنی "رامین خوشحال است"

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

۱- “اگر پاشا خوشحال باشد و نقاشی کند ، پس رامین خوشحال نیست”

۲- “اگر پاشا خوشحال است ، پس نقاشی می کند”

۳- “پاشا خوشحال است اگر نقاشی می کند”

۱۱ - عبارت های زیر را ملاحظه کنید.

p “یعنی x یک عدد اول است”

q “یعنی x یک عدد فرد است”

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

۱- عدد اول بودن x شرط کافی است برای فرد بودن x

۲- فرد بودن x یک شرط لازم برای عدد اول بودن x است

۱۲ - فرض کنید

$A =$ “آرش شیرازی است”

$B =$ “بهمن تهرانی است”

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

۱- “آرش شیرازی نیست”

۲- “آرش شیرازی است در صورتی که بهمن تهرانی است”

۳- “اگر آرش شیرازی باشد ، پس بهمن تهرانی نیست”

۴- “آرش شیرازی است یا اگر آرش شیرازی نباشد ، پس بهمن تهرانی است”

۵- “یا آرش شیرازی است و بهمن تهرانی ، یا نه آرش شیرازی است و نه بهمن تهرانی”

۱۳ - علاء الدین در یک غار ، دو بشکه پیدا می کند، یکی A و دیگری B . او میداند یکی از آنها شامل یک گنج است و یا یک ماده منفجره.

روی بشکه A نوشته شده است.

حد اقل یکی از این دو بشکه شامل یک گنج است.

روی بشکه B نوشته شده است.

در بشکه A یک ماده منفجره وجود دارد.

علاء الدین می داند یا هر دو نوشته روی بشکه ها صحیح است و یا هر دو غلط.

آیا علاء الدین می تواند یک بشکه را انتخاب کند ، و مطمئن باشد که یک گنج پیدا کرده است؟

پاسخ تمرینات دوره ای منطق

$$۱ - ثابت کنید $\sim (p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim q$$$

پاسخ

$$\begin{aligned} \sim (p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \sim (\sim p \wedge q) && DeMorgan \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) && DeMorgan \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{زیرا } \sim p \wedge p \equiv F \\ &\equiv \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

$$۲ - ثابت کنید $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$$$

پاسخ

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{بجای } \rightarrow \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && DeMorgan \\ &\equiv (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \\ &\equiv T \vee T && \text{زیرا } \sim p \vee p \equiv T \\ &\equiv T \end{aligned}$$

$$۳ - ثابت کنید $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$$$

پاسخ

اگر بجای \Rightarrow بگذاریم \vee پس $\sim p \vee (q \vee r)$ سمت راست

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) && \text{بجای } \Rightarrow \\ &\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \\ &\equiv p \Rightarrow (q \wedge r) \end{aligned}$$

۴ - تیم A بیشتر از تیم B امتیاز بدست آورده است، تیم C کمتر از تیم B امتیاز بدست آورده است. تیم A کمتر از تیم C امتیاز بدست آورده است، اگر دو گزاره اول صحیح باشند، پس گزاره سوم

A) T

B) F

C) نامشخص

پاسخ

از دو گزاره اول، می دانیم که تیم A از همه تیم ها امتیاز بیشتر بدست آورده، پس گزاره سوم غلط است.

۵ - عدد بعدی دنباله را پیدا کنید.

۱۰۴, ۱۰۹, ۱۱۵, ۱۲۲, ۱۳۰, ...

A) ۱۱۹ B) ۱۲۵ C) ۱۳۹ D) ۱۳۴

پاسخ

$$104 + 5 = 109$$

$$109 + 6 = 115$$

$$115 + 7 = 122$$

$$122 + 8 = 130$$

$$130 + 9 = 139$$

۶ - مدار های منطقی زیر را نام ببرید و جدول درستی آنرا بنویسید.



A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



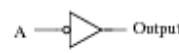
A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



A	Output
0	
1	



A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

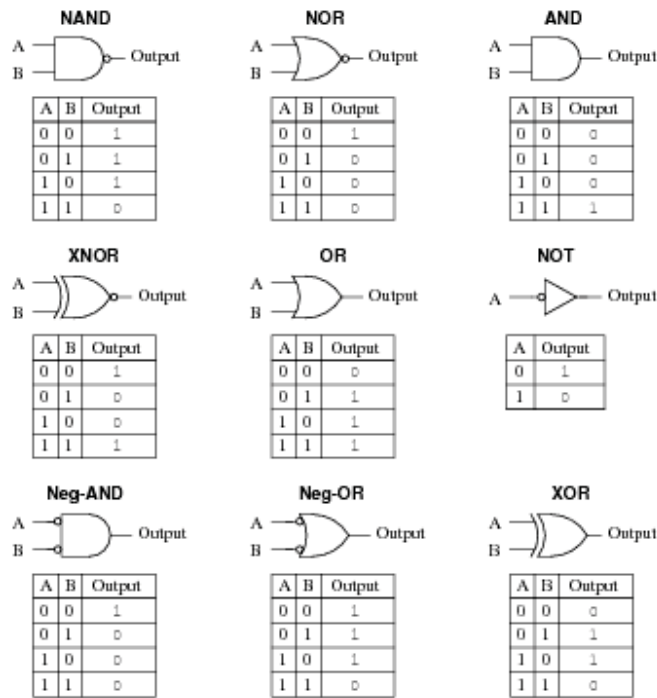


A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



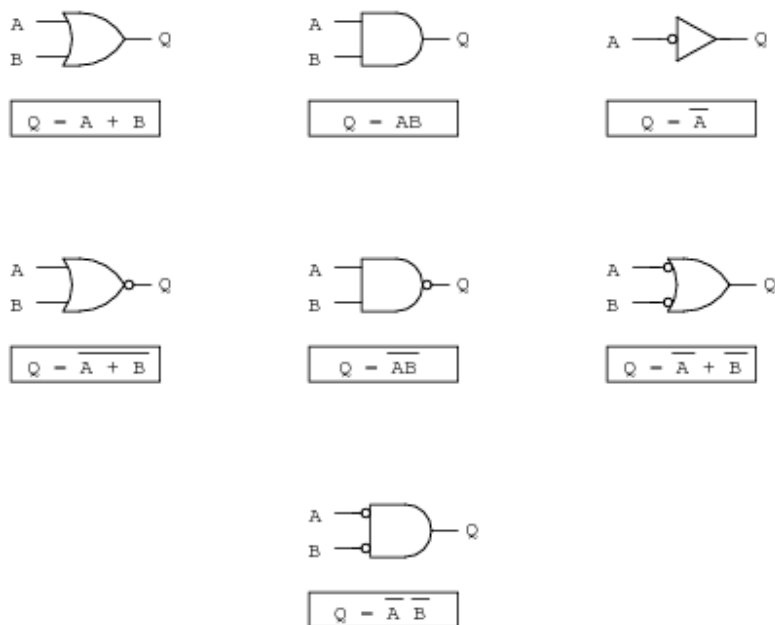
A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

پاسخ



۷ - برای هر یک از مدار های منطقی زیر ، عبارت های بولین بنویسید و نشان دهید چگونه خروجی Q از نظر جبری به ورودی A و B مربوط می شود.

پاسخ



۸ - جدول درستی $(F \vee G) \wedge \sim (F \wedge G)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

F	G	$F \vee G$	$T \wedge G$	$\sim (F \wedge G)$	$(F \vee G) \wedge \sim (F \wedge G)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

۹ - با استفاده از جدول درستی، صحت عبارت زیر را نشان دهید

$$p \Rightarrow (q \wedge \sim q) \equiv \sim p$$

پاسخ

p	q	$q \wedge \sim q$	$p \Rightarrow (q \wedge \sim q)$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

پس عبارت داده شده صحیح است.

۱۰ - عبارت های زیر را ملاحظه کنید.

p یعنی "پاشا خوشحال است"

q یعنی "پاشا نقاشی می کند"

r یعنی "رامین خوشحال است"

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

۱- "اگر پاشا خوشحال باشد و نقاشی کند ، پس رامین خوشحال نیست"

۲- "اگر پاشا خوشحال است ، پس نقاشی می کند"

۳- "پاشا خوشحال است اگر نقاشی می کند"

پاسخ

$$۱) p \wedge q \Rightarrow \sim r$$

$$۲) p \Rightarrow q$$

$$۳) p \Rightarrow q \text{ یا } \sim (p \wedge \sim q)$$

۱۱ - عبارت های زیر را ملاحظه کنید.

p "یعنی x یک عدد اول است"

q "یعنی x یک عدد فرد است"

H

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

- ۱- عدد اول بودن x شرط کافی است برای فرد بودن x
 ۲- فرد بودن x یک شرط لازم برای عدد اول بودن x است

پاسخ

پاسخ هر دو جمله $p \rightarrow q$ است.

۱۲ - فرض کنید

“آرش شیرازی است” $A =$

“بهمن تهرانی است” $B =$

حالا جملات زیر را به صورت فرمول بنویسید.

- ۱- “آرش شیرازی نیست”
 ۲- “آرش شیرازی است در صورتی که بهمن تهرانی است”
 ۳- “اگر آرش شیرازی باشد ، پس بهمن تهرانی نیست”
 ۴- “آرش شیرازی است یا اگر آرش شیرازی نباشد ، پس بهمن تهرانی است”
 ۵- “یا آرش شیرازی است و بهمن تهرانی ، یا نه آرش شیرازی است و نه بهمن تهرانی”

پاسخ

$$۱) \sim A$$

$$۲) A \wedge B$$

$$۳) A \rightarrow \sim B$$

$$۴) A \vee (\sim A \Rightarrow B) \equiv A \vee B$$

$$۵) (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B) \equiv A \Leftrightarrow B$$

۱۳ - علاء الدین در یک غار ، دو بشکه پیدا می کند، یکی A و دیگری B . او میداند یکی از آنها شامل یک گنج است و یا یک ماده منفجره .

روی بشکه A نوشته شده است.

حد اقل یکی از این دو بشکه شامل یک گنج است.

روی بشکه B نوشته شده است.

در بشکه A یک ماده منفجره وجود دارد.

علاء الدین می داند یا هر دو نوشته روی بشکه ها صحیح است و یا هر دو غلط.

آیا علاء الدین می تواند یک بشکه را انتخاب کند ، و مطمئن باشد که یک گنج پیدا کرده است؟

پاسخ

فرض می کنیم

بشکه A شامل گنج باشد $a =$

بشکه B شامل گنج باشد $b =$

مسلم است

بشکه a شامل مواد منفجره است $\sim a =$

بشکه b شامل مواد منفجره است $\sim b =$

چون هر یک از بشکه ها شامل یک گنج است یا یک ماده منفجره XOR پس آنچه علاء الدین می داند ، به صورت زیر می نویسیم.

$a \vee b$ حد اقل یکی از بشکه ها شامل یک گنج است.

$\sim a$ بشکه A شامل یک ماده منفجره است.

دو جمله بالا را به صورت فرمول می نویسیم.

$a \vee b$ حد اقل یکی از این دو بشکه شامل یک گنج است.

$\sim a$ بشکه A شامل یک ماده منفجره است.

یا هر دو جمله های بالا صحیح هستند و یا هر دو غلط.

$$(a \vee b) \Leftrightarrow \sim a$$

آنچه می توانیم انجام دهیم ، این است که مشخص کنیم آیا می توانیم بگوییم فرمول بالا صحیح است. تنها راه نشان دادن صحت فرمول بالا این است

$$v(a) = F \text{ و } v(b) = T$$