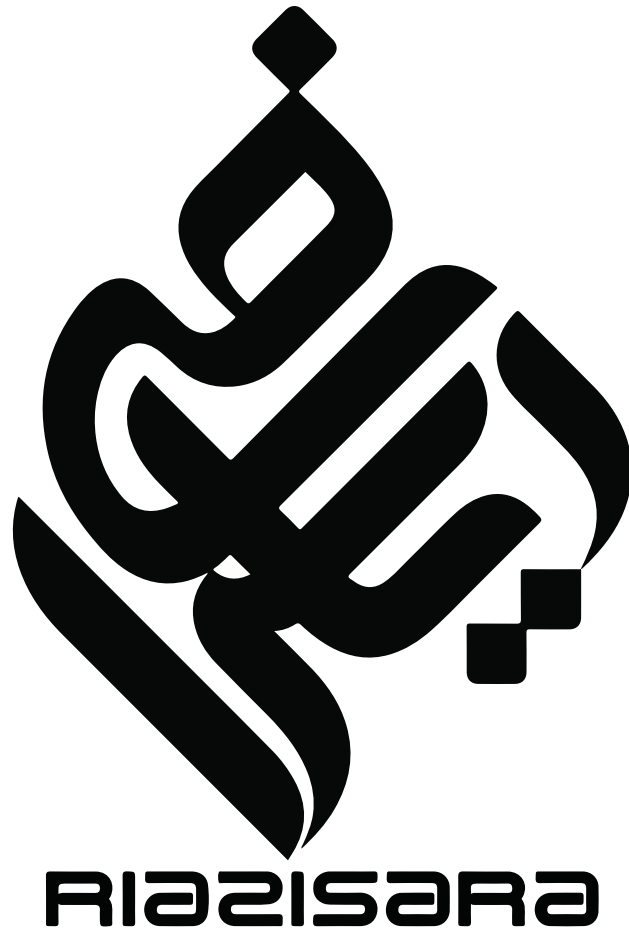




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فصل دوم مجموعه ها

تمام ریاضیات را می توان با مجموعه ها توصیف کرد. هر چه بیشتر در ریاضیات غور کنیم، این موضوع بیشتر آشکار می شود. تئوری مجموعه ها، یک زبان است که می توان تمام ساختار ریاضیات را توصیف کرد.

۲.۱ - آشنایی با مجموعه ها Introduction to sets

یک مجموعه یک کلکسیون از اشیاء است. اشیاء داخل مجموعه را **عناصر Elements** و یا **اعضای Members** آن مجموعه می نامند. ما در اینجا با مجموعه هایی کار می کنیم که ماهیت ریاضی دارند، مانند اعداد، نقاط، توابع و غیره. یک مجموعه را معمولاً با ردیف کردن اعضای آن داخل **آکولاد Braces** نشان می دهیم، بطوری که هر یک از اعضا بوسیله یک ویرگول از هم جدا باشند. مثلاً کلکسیون $\{2, 4, 6, 8\}$ یک مجموعه است با چهار عنصر، یعنی اعداد ۲، ۴، ۶، ۸. بعضی مجموعه ها دارای بی نهایت عضو هستند. مثلاً $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ چند نقطه نشانه این است که اعضا، در هر دو طرف، تا بی نهایت ادامه دارد. اگر یک مجموعه دارای بی نهایت عضو باشد، به آن می گویند مجموعه **بی کران Infinite Set** در غیر این صورت، به آن می گویند مجموعه **کران دار Finite Set**.

دو مجموعه با هم مساوی هستند، اگر دقیقاً دارای عناصر مانند باشند. مثلاً

$$\{2, 4, 6, 8\} = \{6, 2, 8, 4\}$$

دو مجموعه بالا با هم مساوی هستند، گر چه ترتیب آنها با هم فرق می کند، اما عناصر عیناً مثل هم هستند. اما $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$

معمولاً برای نامیدن یک مجموعه از حروف بزرگ لاتین استفاده می کنیم. مثلاً می نویسیم

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

برای این که بگوییم ۲ یک عضو مجموعه A است، می نویسیم $2 \in A$ و می خوانیم ۲ یک عضو A است. و یا ۲ داخل A است اگر بخواهیم بگوییم ۵ یک عضو A نیست، می نویسیم $5 \notin A$ و می خوانیم ۵ یک عضو A نیست و یا ۵ در A نیست. اگر بخواهیم بگوییم چند چیز عضو یک مجموعه است، می نویسیم $2, 4, 6 \in A$ و می خوانیم ۲، ۴، ۶ اعضای A هستند. و یا داخل A هستند.

بعضی مجموعه ها بقدری مهم هستند که یک نماد مخصوص برای آنها در نظر گرفته می شود. مثلاً

مجموعه اعداد طبیعی Natural Numbers و یا **اعداد شمارشی Counting Numbers**

با نماد $\mathbb{N}$ نشان داده می شوند.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح Integers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

نماد $\mathbb{R}$ برای **اعداد حقیقی Real Numbers** بکار می رود.

سیاق عبارت ، می تواند در تفسیر مجموعه ها کمک کند. اگر مثلاً علامت های اعداد دو تائی را برای اعداد صحیح بکاربریم ، پس $\mathbb{N} = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$ است. لذا $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$ زیرا هر دو مجموعه یک چیز را نشان می دهند. یعنی مجموعه اعداد طبیعی. نمادی که برای یک عدد مخصوص بکار می رود ، مثل خود عدد نیست. عیناً مانند اسم شما که مثل خود شما نیست. برای مثال هنگامی که می نویسیم $101_2 = 5$ پس 5 و 101 یک چیز را نشان می دهند ، یعنی عدد پینج. اما اگر فقط با عدد د پایه ۱۰ سر و کار داریم ، پس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \neq \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$ زیرا این دو مجموعه ، شامل اعضای متفاوت هستند.

لزومی ندارد که عناصر یک مجموعه ، اعداد باشند. مجموعه $B = \{T, F\}$ شامل دو حرف است ، مجموعه $C = \{a, e, i, o, u\}$ شامل حروف کوچک صدا دار زبان انگلیسی است. مجموعه $D = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ شامل چهار گوشه یک مربع در صفحه مختصات xy است. پس $(0,0) \in D, (1,0) \in D$ و الی آخر. اما ، $(1,2) \notin D$

ممکن است اعضای یک مجموعه ، خود مجموعه باشند. مثلاً $E = \{1, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ دارای سه عضو است. یعنی عدد ۱ و مجموعه $\{2, 3\}$ و مجموعه $\{2, 4\}$ لذا $1 \in E$ و $\{2, 3\} \in E$ و $\{2, 4\} \in E$ است ، اما ، $2 \notin E$ و $3 \notin E$ و $4 \notin E$

مجموعه $M = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ شامل سه ماتریس دو در دو است. پس داریم $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \notin M$ اما $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in M$

حروف را می توان به عنوان نمادی جهت نمایش اعضای یک مجموعه بکار برد. اگر $a = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ و $b = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ و $c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ باشد ، پس $M = \{a, b, c\}$ است.

اگر X یک مجموعه کران دار باشد ، پس اندازه Cardinality آن ، عبارت است از تعداد اعضای آن و این عدد را با نماد $|X|$ نشان می دهیم. پس برای مجموعه های بالا داریم. $|A| = 4$ ، $|B| = 2$ ، $|C| = 5$ ، $|D| = 4$ ، $|E| = 3$ و $|M| = 3$ است.

یک مجموعه مخصوصی هم داریم ، که گر چه کوچک ، ولی نقش مهمی دارد. این مجموعه بنام Empty Set می شود. این مجموعه شامل هیچ عضوی نیست. خالی است. این مجموعه با نماد $\emptyset$ و یا $\{\}$ نشان داده می شود. مجموعه تهی ، تنها مجموعه ای است که اندازه آن صفر است ، یعنی داریم $|\emptyset| = 0$

هنگام نوشتن مجموعه تهی، دقت کنید. مثلاً اگر منظور شما مجموعه تهی است ننویسید $\{\emptyset\}$ زیرا $\emptyset$ و $\{\}$ دارای هیچ عضوی نیست. اما $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو است و آن $\emptyset$ است. اگر این برای شما قابل فهم نیست، در نظر بگیرید $\emptyset = \{\}$ دارای هیچ عضو یا عنصری نیست، به عبارت دیگر یک جعبه خالی است. اما $\{\emptyset\}$ یک جعبه است که درون آن یک جعبه خالی است. پس $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ و $|\emptyset| = 0$ اما $|\{\emptyset\}| = 1$ است.

این کلمه، جعبه، که برای مجموعه بکار بردیم، مفهوم مجموعه را بهتر آشکار می کند. مجموعه زیر ممکن است به نظر شما عجیب بیاید.

$$F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

مجموعه F را یک جعبه تصور کنید. داخل این جعبه سه چیز است. یک جعبه خالی، یک جعبه که داخل آن یک جعبه خالی است، و یک جعبه که درون آن یک جعبه دیگر است که خالی است. پس $|F| = 3$ است. در تصویر ۱.۲.۱ تصاویر های سه جعبه را ملاحظه می کنید.

تصویر ۱.۲.۱



یک مثال دیگر، مجموعه $I = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ یک جعبه است که شامل دو جعبه است. درون یک جعبه اعداد طبیعی است و درون جعبه دیگر اعداد صحیح است. پس $|I| = 2$ است.

یک نماد دیگر هم داریم بنام **نماد مجموعه ساز Set-Builder Notation** این نماد برای توصیف نماد هایی بکار می رود که تعداد اعضای آن آنقدر زیاد است که نمی توان آنها را داخل آکولاد ردیف کنیم. مثلاً مجموعه اعداد صحیح زوج را در نظر بگیرید.

$$E = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

برای نوشتن مجموعه بالا، با نماد مجموعه ساز، مطابق زیر می نویسیم.

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعه بالا را چنین می خوانیم.

E مساوی است با مجموعه اشیاء به شکل $2n$

بطوری که n یک عضو $\mathbb{Z}$ باشد.

بطور کلی نماد مجموعه ساز شکل زیر را دارد.

$$X = \{ \text{قانون یا قاعده: عبارت} \}$$

یعنی X شامل تمام مقادیر عبارت داده شده است بطوری که مطابق قانون داده شده باشد. مثلاً مجموعه E بالا، عبارت است از مجموعه تمام عبارت های به شکل $2n$ بشرطی که $n \in \mathbb{Z}$ باشد. این مجموعه به صورت های دیگر هم نوشته می شود. مثلاً

$$E = \{2n: n \in \mathbb{Z}\} = \{n: n \text{ یک عدد صحیح زوج است}\} = \{n: n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

و یا

$$E = \{n \in \mathbb{Z}: n \text{ زوج است}\}$$

مجموعه بالا چنین خوانده می شود.

E مجموعه تمام n ها در $\mathbb{Z}$ است بطوری که n زوج باشد در بعضی کتب ریاضی بجای : از نماد | استفاده می کنند. مانند $E = \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ زوج است}\}$ این هر دو علامت در نماد مجموعه ساز خوانده می شود، **بطوری که**،

مثال ۲.۱ در ذیل چند مثال دیگر برای نماد مجموعه ساز ملاحظه می کنید.

- ۱) $\{n: n \text{ یک عدد اول است}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
- ۲) $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ یک عدد اول است}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
- ۳) $\{n^2: n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
- ۴) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- ۵) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$

به تفاوت بین شماره ۴ و ۵ توجه کنید. آیا متوجه شدید؟ زیرا $\sqrt{2}$ را نمی توان به صورت کسر دو عدد صحیح نوشت.

- ۶) $\{x \in \mathbb{Z}: |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- ۷) $\{2x: x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
- ۸) $\{x \in \mathbb{Z}: |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

لازم است به شماره های ۸ - ۶ هم توجه کنید $\{x \in \mathbb{Z}: |x| < 4\}$ در شماره ۶ می گوید $x \in \mathbb{Z}$ پس x یک عدد است و نه یک مجموعه. پس $|x|$ یعنی قدر مطلق x و نه اندازه Cardinality x

مثال ۲.۲ مجموعه $A = \{7a + 3b: a, b \in \mathbb{Z}\}$ را توصیف کنید.

پاسخ

این مجموعه شامل کلیه اعدادی است به شکل $7a + 3b$ به شرطی که a و b اعداد صحیح باشند. پس $7a + 3b$ یک عدد صحیح است. و لذا A فقط شامل اعداد صحیح است. اما کدام اعداد صحیح؟ اگر فرض کنیم n یک عدد صحیح باشد، پس $n = 7n + 3(-2n)$ است. لذا $n = 7a + 3b$

است. بطوری که $a = n$ و $b = -2n$ است. پس $n \in A$ است. و در نهایت نتیجه می گیریم

$$A = \mathbb{Z}$$

 است.

در پایان این بخش ، خلاصه ای از مجموعه های مهم را باز گو می کنیم. این مجموعه ها بقدری مهم هستند که به آنها نام مخصوصی داده شده است.

مجموعه تهی $\emptyset = \{ \}$ Empty Set

اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Natural Numbers

اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Integers
 اعداد گویا

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، همان طور که در ابتدای فصل ۱ گفتیم ، اعداد حقیقی را می توان به صورت یک خط اعداد بی نهایت طویل تصور کرد. همچنین ، گفتیم که اعداد حقیقی یک سیستم گسسته نیست ، اما یک مجموعه اساسی است که در ریاضیات گسسته هم مهم است.

همان طور که می دانید اعداد گویا عبارتند از آن اعداد حقیقی که بتوان آنها را به صورت کسر دو عدد

صحیح نوشت. اما باید توجه داشت که $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ زیرا $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، اما $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

در حسابان با بازه ها روی خط اعداد آشنا شده اید ، این بازه ها هم مانند اعداد حقیقی ، مجموعه بی کران اعداد هستند. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$ باشد ، چندین بازه ممکن است داشته باشیم. معمولا این بازه ها را با یک پاره خط سیاه رنگ بین a و b نشان می دهیم. یک دایره تو پریا [و] در یک انتها نشانه این است که آن نقطه داخل بازه است. یک دایره تو خالی (و) در یک انتها نشانه این است که آن نقطه داخل بازه نیست. تصویر ۱.۲.۲ حالت های مختلف را نشان می دهد. هر کدام از این بازه ها یک مجموعه است که شامل تعداد بی نهایت عضو است. مثلا بازه کوتاه (0.1,0.2) شامل بی نهایت عدد است.

بازه باز Open Interval

بازه نیمه باز Half Open Interval

بازه بسته Closed Interval

تمام اعداد حقیقی All Real Numbers

تصویر ۱.۲.۲

Type of Interval	Set	Interval Notation	Graph
Open interval	$\{x x > a\}$	(a, ∞)	
	$\{x a < x < b\}$	(a, b)	
	$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	
Half-open interval	$\{x x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
	$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
	$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
Closed interval	$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
All real numbers	$\{x x \text{ is real}\}$	$(-\infty, \infty)$	

تمرینات ۲.۱

لیست اعضای مجموعه های زیر را داخل آکولاد بنویسید.

- ۱) $\{5x - 1 : x \in \mathbb{Z}\}$
- ۲) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\}$
- ۳) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$
- ۴) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$
- ۵) $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$
- ۶) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$
- ۷) $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$
- ۸) $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

هر یک از مجموعه های زیر به صورت نماد مجموعه ساز بنویسید.

- ۹) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$
 ۱۰) $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
 ۱۱) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$
 ۱۲) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 ۱۳) $\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
 ۱۴) $\{\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$

اندازه مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- ۱۵) $\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \emptyset\}$
 ۱۶) $\{\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \emptyset\}\}$
 ۱۷) $\{x \in \mathbb{Z}: |x| < 10\}$
 ۱۸) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 < 10\}$
 ۱۹) $\{x \in \mathbb{N}: x^2 < 10\}$

مجموعه نقاط زیر را در صفحه مختصات xy رسم کنید.

- ۲۰) $\{(x, y): x \in [1, 2], y \in [1, 2]\}$
 ۲۱) $\{(x, y): x \in [-1, 1], y = 1\}$
 ۲۲) $\{(x, y): |x| = 2, y \in [0, 1]\}$
 ۲۳) $\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$
 ۲۴) $\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, y \geq x^2 - 1\}$
 ۲۵) $\{(x, x + y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}\}$
 ۲۶) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (y - x)(y + x) = 0\}$

مسائل زیر مربوط است به سیستم اعداد پایه ۲ و یا پایه ۱۶

- ۲۷) $\{x \in \mathbb{N}: 100 \leq x \leq 1011\}$
 اعضای مجموعه شماره ۲۷ در پایه ۲ بیان شده، لیست اعضای این مجموعه را بنویسید.
 ۲۸) $\{x \in \mathbb{N}: A \leq x \leq 20\}$
 اعضای مجموعه شماره ۲۸ در پایه ۱۶ بیان شده، لیست اعضای این مجموعه را بنویسید.

پاسخ تمرینات ۲.۱

لیست اعضای مجموعه های زیر را داخل آکولاد بنویسید.

$$۱) \{5x - 1 : x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, 29, \dots\}$$

$$۲) \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 7\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$۳) \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$$۴) \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\} = \{-2, -3\}$$

$$۵) \{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{Z}$$

$$۶) \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$۷) \{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\} = \{0\}$$

$$۸) \{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}$$

هر یک از مجموعه های زیر به صورت نماد مجموعه ساز بنویسید.

$$۹) \{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\} = \{2^x : x \in \mathbb{N}\}$$

$$۱۰) \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\} = \{3x : x \in \mathbb{Z}\}$$

$$۱۱) \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x^2 : x \in \mathbb{Z} \geq 0\}$$

ملاحظه می کنید که x باید مجموعه اعداد حسابی باشد، و چون نماد مشخصی برای این مجموعه تا کنون پیشنهاد نشده، ما $\mathbb{Z} \geq 0$ بکار برده ایم.

$$۱۲) \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \leq x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$$

$$۱۳) \left\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\right\} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$۱۴) \left\{\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \dots\right\} = \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

اندازه مجموعه های زیر را پیدا کنید.

$$۱۵) \left|\left\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \emptyset\right\}\right| = 3$$

$$۱۶) \left|\left\{\left\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \emptyset\right\}\right\}\right| = 1$$

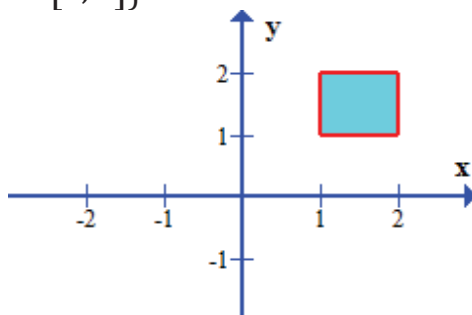
$$۱۷) |\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 10\}| = 19$$

$$۱۸) |\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 10\}| = 7$$

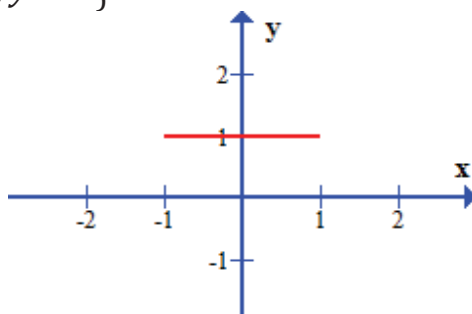
$$۱۹) |\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 0\}| = 0$$

مجموعه نقاط زیر را در صفحه مختصات xy رسم کنید.

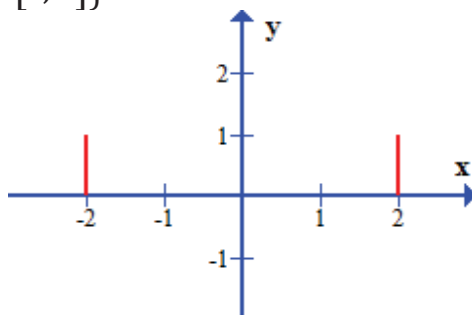
۲۰) $\{(x, y): x \in [1, 2], y \in [1, 2]\}$



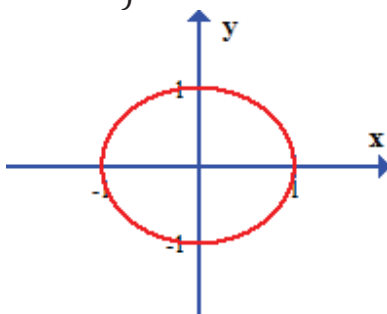
۲۱) $\{(x, y): x \in [-1, 1], y = 1\}$



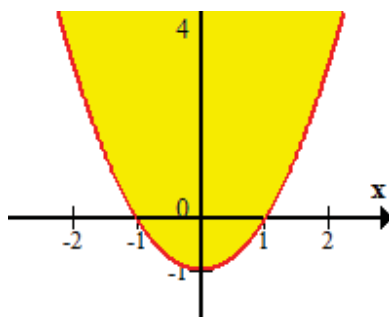
۲۲) $\{(x, y): |x| = 2, y \in [0, 1]\}$



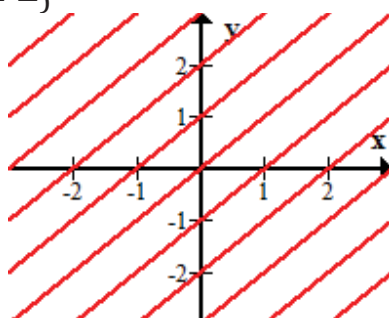
۲۳) $\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$



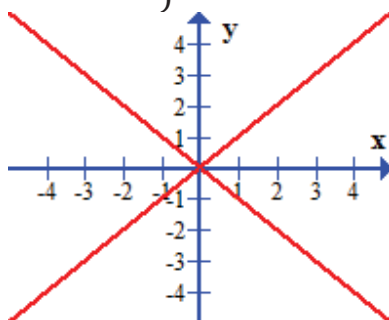
۲۴) $\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, y \geq x^2 - 1\}$



$$۲۵) \{(x, x+y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}\}$$



$$۲۶) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (y-x)(y+x) = 0\}$$



مسائل زیر مربوط است به سیستم اعداد پایه ۲ و یا پایه ۱۶

$$۲۷) \{x \in \mathbb{N}: 100 \leq x \leq 1011\} = \{100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011\}$$

اعضای مجموعه شماره ۲۷ در پایه ۲ بیان شده، لیست اعضای این مجموعه را بنویسید.

$$۲۸) \{x \in \mathbb{N}: A \leq x \leq 20\} =$$

$$\{A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F, 20\}$$

اعضای مجموعه شماره ۲۸ در پایه ۱۶ بیان شده، لیست اعضای این مجموعه را بنویسید.

۲.۲ ضرب دکارتی The Cartesian Product

اگر دو مجموعه A و B داشته باشیم، می توانیم آنها را ضرب کنیم، و یک مجموعه جدید ایجاد کنیم بنام $A \times B$. این عمل را ضرب دکارتی The Cartesian Product می نامند. اما قبل از پرداختن به این موضوع، باید مفهوم زوج مرتب Ordered Pair را توضیح دهیم.

۲.۲.۱ یک زوج مرتب عبارت است از یک لیست (x, y) که شامل دو چیز x و y است داخل پرانتز که توسط یک گیومه از هم جدا هستند.

مثلا $(2, 4)$ و $(4, 2)$ دو زوج مرتب هستند. اما، با هم فرق می کنند، زیرا اگر چه هر دو شامل اعداد ۲ و ۴ هستند، ولی ترتیب آنها متفاوت است. پس می نویسیم $(4, 2) \neq (2, 4)$ همان طور که در جبر و حسابان دیده دیده اید، این دو زوج مرتب نقاط در صفحه xy را نشان می دهند. اما، اشیاء در یک زوج مرتب لزوما اعداد نیستند. می توان زوج های مرتب حروف هم داشت، مانند (m, l) و یا زوج های مرتب زوج های مرتب داشت مانند $((2, 4), (4, 2))$ در ذیل هم سه زوج مرتب ملاحظه می کنید.

$$\begin{aligned} &(\{2, 5\}, \{3, 2\}) \\ &(2, \{1, 2, 3\}) \\ &(\mathbb{R}, (0, 0)) \end{aligned}$$

هر دو چیزی که داخل پرانتز باشند و بین آنها یک گیومه، یک زوج مرتب را تشکیل می دهند. حالا می توانیم ضرب دکارتی را تعریف کنیم.

۲.۲.۱ تعریف ضرب دکارتی

ضرب دکارتی دو مجموعه A و B ، یک مجموعه دیگری است که با نماد $A \times B$ نشان داده می شود و چنین تعریف می شود.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

پس $A \times B$ مجموعه ای است از زوج های مرتب که تشکیل شده از عناصر A و B .

مثال ۲.۲.۱ اگر $A = \{k, l, m\}$ و $B = \{q, r\}$ باشد، مطلوب است $A \times B$ پاسخ

$$A \times B = \{(k, q), (k, r), (l, q), (l, r), (m, q), (m, r)\}$$

تصویر ۲.۲.۱ نشان می دهد که چگونه ضرب دکارتی بسازیم. عناصر A را افقی و عناصر B را عمودی بنویسید، مثل این که می خواهید A و B تشکیل محور های xy بدهند. سپس زوج های مرتب را بنویسید، بطوری که در هر ستون ابتدا x باشد و سپس y .

تصویر ۲.۲.۱

$A \times B$			
r	(k, r)	(l, r)	(m, r)
q	(k, q)	(l, q)	(m, q)
	k	l	m

مثال ۲.۲.۲ مطلوب است $\{0,1\} \times \{2,1\}$

پاسخ

$$\{0,1\} \times \{2,1\} = \{(0,2), (0,1), (1,2), (1,1)\}$$

1	(0,1)	(1,1)
2	(0,2)	(1,2)
	0	1

مثال ۲.۲.۳

مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ باید برای شما آشنا باشد. این مجموعه شامل کلیه نقاط در

صفحه مختصات دکارتی است. تصویر ۲.۲.۲.a

مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}\}$ می توان مجموعه کلیه نقاط در صفحه مختصاتدکارتی تصور کرد که مختص دوم آن یک عدد طبیعی است. تصویر ۲.۲.۲.b این تصویر شامل بی نهایت خط است بالای محور x هر کدام به فاصله یک عدد صحیح.مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ می توان مجموعه کلیه نقاط در صفحه مختصات دکارتی تصور کرد که مختصات آنها

هر دو اعداد طبیعی هستند، که همه در ربع صفحه اول قرار دارند. تصویر ۲.۲.۲.c

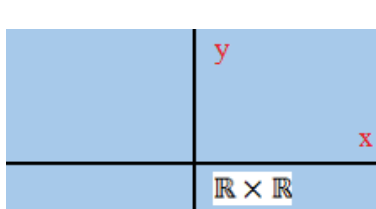


Figure 2.2.2.a

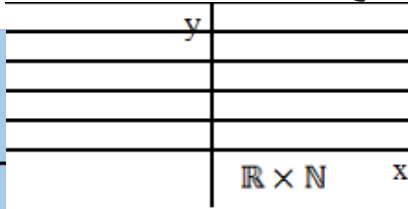


Figure 2.2.2.b

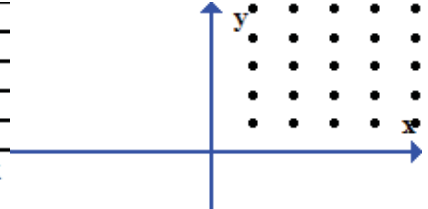


Figure 2.2.2.c

تعمیم ضرب دکارتی: می توان ضرب دکارتی در ضرب دکارتی انجام داد. مثلاً

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \{(x, (y, z)) : x \in \mathbb{R}, (y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$

همچنین می توان ضرب دکارتی سه مجموعه انجام داد. در این صورت دیگر زوج مرتب نداریم. بلکه سه

گانه مرتب **Ordered Triple** داریم. لیست (x, y, z) را سه گانه مرتب می نامند. ضرب دکارتی سهمجموعه $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ به صورت $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$

دلیلی نداریم به ضرب دکارتی سه مجموعه اکتفا کنیم. بطور کلی می توان داشته باشیم

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

اما خیلی مواظب پرائنترها باشد. $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ با $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ متفاوت است، اولی ضرب دکارتی

دو مجموعه است و دومی ضرب دکارتی سه مجموعه

توجه دارید که $(x, (y, z))$ و (x, y, z) با هم متفاوت هستند. اولی زوج مرتب است بطوری که عنصر دوم آن خود، یک زوج مرتب است. اما، دومی سه گانه مرتب است.

مثال ۲.۲.۴ اگر $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{0,1,2\}$ باشد، مطلوب است $A \times B \times C$ پاسخ

$$A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$$

همچنین توان های دکارتی مجموعه ها **Cartesian Powers of Sets** هم داریم.

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in A\}$$

پس $\mathbb{R}^2$ سیستم دو بعدی دکارتی و $\mathbb{R}^3$ سیستم سه بعدی است.

تمرینات ۲.۲

۱ - فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{a, c\}$ باشد. لیست عناصر هر مجموعه را داخل اکولاد بنویسید.

- (a) $A \times B$
- (b) $B \times A$
- (c) $A \times A$
- (d) $B \times B$
- (e) $\emptyset \times B$
- (f) $(A \times B) \times B$
- (g) $A \times (B \times B)$
- (h) B^3

لیست عناصر هر مجموعه را داخل اکولاد بنویسید.

- ۲) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{a, c, e\}$
- ۳) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\}$
- ۴) $\{\emptyset\} \times \{0, \emptyset\} \times \{0, 1\}$

در تمرینات زیر نمودار ضرب دکارتی را در $\mathbb{R}^2$ و شماره ۱ را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید.

- ۵) $\{1, 2, 3\} \times \{-1, 0, 1\}$
- ۶) $[0, 1] \times [0, 1]$
- ۷) $\{1, 1.5, 2\} \times [1, 2]$
- ۸) $\{1\} \times [0, 1]$
- ۹) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

$$۱ \circ [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

پاسخ تمرینات ۲.۲

۱ - فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{a, c\}$ باشد.

لیست عناصر هر مجموعه را داخل اکولاد بنویسید.

$$(a) A \times B = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c), (4, a), (4, c)\}$$

$$(b) B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$$

$$(c) A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$(d) B \times B = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$$

$$(e) \emptyset \times B = \{(a, b) : a \in \emptyset, b \in B\} = \emptyset$$

$$(f) (A \times B) \times B = \{((1, a), a), ((1, c), a), ((2, a), a), ((2, c), a), ((3, a), a), ((3, c), a), ((4, a), a), ((4, c), a), ((1, a), c), ((1, c), c), ((2, a), c), ((2, c), c), ((3, a), c), ((3, c), c), ((4, a), c), ((4, c), c)\}$$

$$(g) A \times (B \times B) = \{(1, (a, a)), (1, (a, c)), (1, (c, a)), (1, (c, c)), (2, (a, a)), (2, (a, c)), (2, (c, a)), (2, (c, c)), (3, (a, a)), (3, (a, c)), (3, (c, a)), (3, (c, c)), (4, (a, a)), (4, (a, c)), (4, (c, a)), (4, (c, c))\}$$

$$(h) B^3 = \{(a, a, a), (a, a, c), (a, c, a), (a, c, c), (c, a, a), (c, a, c), (c, c, a), (c, c, c)\}$$

لیست عناصر هر مجموعه را داخل اکولاد بنویسید.

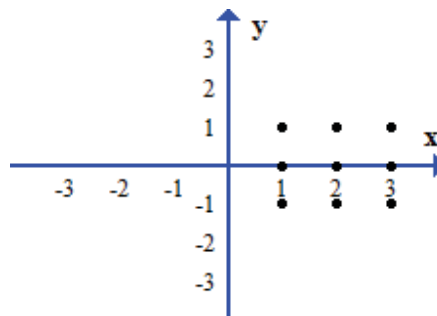
$$۲) \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{a, c, e\} = \{(-\sqrt{2}, a), (\sqrt{2}, a), (-\sqrt{2}, c), (\sqrt{2}, c), (-\sqrt{2}, e), (\sqrt{2}, e)\}$$

$$۳) \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\} = \{(-\sqrt{2}, -2), (\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, -2)\}$$

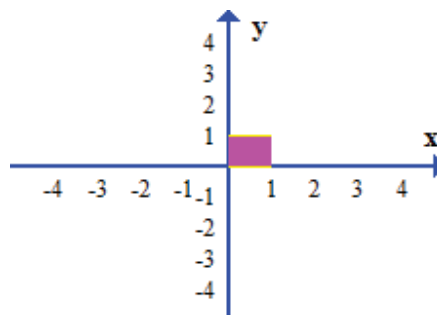
$$۴) \{\emptyset\} \times \{0, \emptyset\} \times \{0, 1\} = \{(\emptyset, 0, 0), (\emptyset, 0, 1), (\emptyset, \emptyset, 0), (\emptyset, \emptyset, 1)\}$$

در تمرینات زیر نمودار ضرب دکارتی را در $\mathbb{R}^2$ و شماره ۱ را در $\mathbb{R}^2$ رسم کنید.

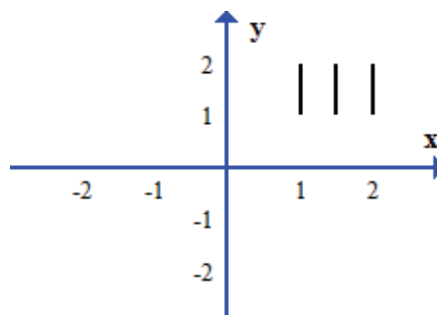
۵) $\{1,2,3\} \times \{-1,0,1\}$



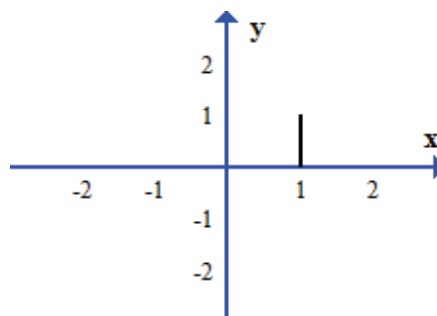
۶) $[0,1] \times [0,1]$

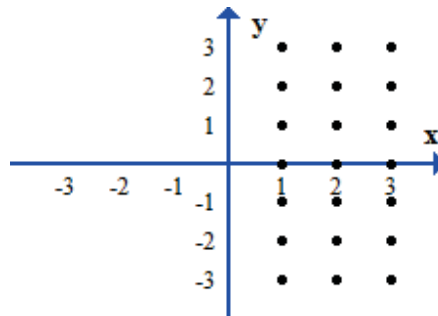


۷) $\{1,1.5,2\} \times [1,2]$



۸) $\{1\} \times [0,1]$



۹) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ 

$$۱ \circ) [0,1] \times [0,1] \times [0,1] = [0,0,0], [0,0,1], [0,1,0], [0,1,1], [1,0,0], [1,0,1], [1,1,0], [1,1,1]$$

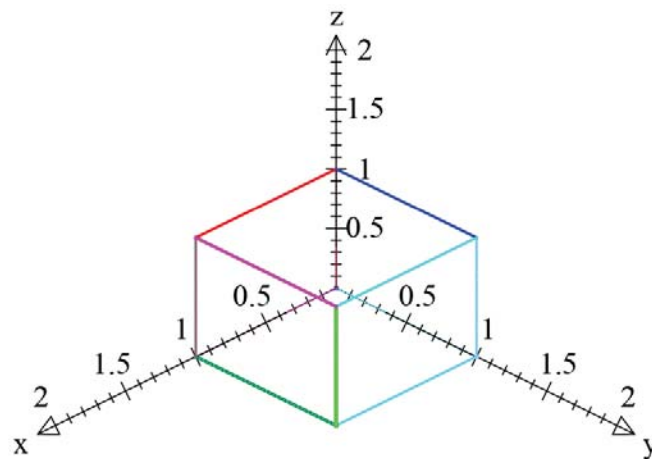


Figure M

همان طور که در بالا ملاحظه کردید ، مکعب دارای هشت راس است ، که مختصات راس های هشت گانه در بالا آمده است.

۲.۳ زیر مجموعه ها یا مجموعه های فرعی Subsets

ممکن است کلیه اعضای یک مجموعه A اعضای مجموعه دیگری مانند B باشد. مثلاً اگر داشته باشیم $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ پس تمام اعضای A همچنین اعضای B هم است. می‌گوییم A زیر مجموعه B است. و یا A مجموعه فرعی B است.

۲.۳- تعریف - فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. اگر تمام اعضای A اعضای B هم باشند، می‌گوییم A زیر مجموعه یا مجموعه فرعی B است. و می‌نویسیم $A \subseteq B$ و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ اگر A زیر مجموعه B نباشد. یعنی اگر کلیه اعضای A اعضای B هم نباشد. پس $A \not\subseteq B$ یعنی حد اقل یک عضو A یک عضو B نیست.

۲.۳.۱ مثال عبارات زیر صحیح هستند. سعی کنید دلیل آنها را درک کنید.

- ۱) $\{2, 3, 7\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ۲) $\{2, 3, 7\} \not\subseteq \{2, 4, 5, 6, 7\}$
- ۳) $\{2, 3, 7\} \subseteq \{2, 3, 7\}$
- ۴) $\{2n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$
- ۵) $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- ۶) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \subseteq \mathbb{N}$
- ۷) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- ۸) $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

پس به این حقیقت مهم می‌رسیم که اگر B هر مجموعه ای باشد، پس $\emptyset \subseteq B$ است. چرا؟ زیرا $\emptyset$ دارای هیچ عضوی نیست و خالی است، پس باید زیر مجموعه هر مجموعه ای باشد. به تعریف بالا خوب توجه کنید.

۲.۳.۱- حقیقت - مجموعه تهی، یک زیر مجموعه هر مجموعه ای است. یعنی $\emptyset \subseteq B$ است. B هر مجموعه ای می‌تواند باشد.

توضیح بیشتری می‌دهیم. فرض کنید داریم $B = \{a, b, c\}$ ، حال می‌خواهیم یک زیر مجموعه برای B بسازیم، با $\{\}$ شروع می‌کنیم. و سپس a و b را داخل $\{\}$ می‌گذاریم. تا $\{a, b\}$ بدست آید. پس $\{\}$ هم عضوی از B است.

۲.۳.۲- حقیقت - اگر یک مجموعه k را داشته باشیم، دارای n عضو باشد، پس آن مجموعه دارای 2^n زیر مجموعه است.

مثلاً اگر داشته باشیم $B = \{a, b, c\}$ پس زیر مجموعه آن مطابق زیر است.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

حالا فرض کنید $B = \{1, 2, \{1, 3\}\}$ باشد. زیر مجموعه آن مطابق زیر است.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 3\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 3\}\}, \{2, \{1, 3\}\}, \{1, 2, \{1, 3\}\}$$

خوب دقت کنید $\{1, 3\}$ زیر مجموعه B نیست. اما، $\{\{1, 3\}\}$ زیر مجموعه B است. پس داریم.

$$\{1, 3\} \notin B$$

$$\{\{1, 3\}\} \in B$$

اما

$$\{\{1, 3\}\} \subseteq B$$

۲.۳.۲ مثال – عبارت های زیر صحیح هستند. سعی کنید، دلیل آنرا خوب درک کنید.

۱: $1 \in \{1, \{1\}\}$ زیرا ۱ اولین عضو مجموعه $\{1, \{1\}\}$ است.

۲: $1 \notin \{1, \{1\}\}$ زیرا ۱ مجموعه نیست.

۳: $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ زیرا $\{1\}$ دومین عضو مجموعه $\{1, \{1\}\}$ است.

۴: $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ زیرا یک عضو مجموعه $\{1, \{1\}\}$ است که می تواند زیر مجموعه باشد.

۵: $\{\{1\}\} \notin \{1, \{1\}\}$ زیرا $\{1, \{1\}\}$ شامل $\{1\}$ و ۱ است، اما شامل $\{\{1\}\}$ نیست.

۶: $\{\{1\}\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ زیرا اگر $\{1\}$ را انتخاب کنیم، آنوقت $\{\{1\}\}$ یک زیر مجموعه.

۷: $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ زیرا $\mathbb{N}$ یک مجموعه است، نه یک عدد و $\mathbb{N}$ شامل اعداد است نه مجموعه ها.

۸: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ زیرا یک مجموعه در حقیقت زیر مجموعه خودش هم است. طبق تعریف

۹: $\emptyset \notin \mathbb{N}$ زیرا $\mathbb{N}$ یک مجموعه است که شامل اعداد است، اما، شامل مجموعه نیست و $\emptyset$ یک مجموعه است.

۱۰: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ زیرا مجموعه تهی $\emptyset$ زیر مجموعه تمام مجموعه ها است.

۱۱: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ زیرا $\{\mathbb{N}\}$ فقط شامل یک عضو است و آن مجموعه $\mathbb{N}$ است.

۱۲: $\mathbb{N} \notin \{\mathbb{N}\}$ زیرا مثلا $1 \in \mathbb{N}$ است، اما $1 \notin \{\mathbb{N}\}$

۱۳: $\emptyset \notin \{\mathbb{N}\}$ زیرا تنها عضو $\{\mathbb{N}\}$ فقط $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N} \neq \emptyset$

۱۴: $\emptyset \subseteq \{\mathbb{N}\}$ زیرا $\emptyset$ زیر مجموعه تمام مجموعه ها است.

۱۵: $\emptyset \in \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ زیرا $\emptyset$ اولین عضو مجموعه $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ است.

۱۶: $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ زیرا $\emptyset$ زیر مجموعه تمام مجموعه ها است.

۱۷: $\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ می توان یک زیر مجموعه $\{\mathbb{N}\}$ از $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ ساخت

۱۸: $\{\mathbb{N}\} \notin \{\emptyset, \{\mathbb{N}\}\}$ زیرا $\mathbb{N} \notin \{\emptyset, \{\mathbb{N}\}\}$

تمرینات ۲.۳

لیست تمام زیرمجموعه ، مجموعه های زیر را بنویسید.

- ۱) $\{1, 2, 3, 4\}$
- ۲) $\{\mathbb{R}\}$
- ۳) $\{\emptyset\}$
- ۴) $\{\mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{N}\}\}$

لیست عناصر مجموعه های زیر را داخل گیومه بنویسید.

- ۴) $\{X: X \subseteq \{3, 2, a\} \text{ و } |X| = 2\}$
- ۵) $\{X: X \subseteq \{3, 2, a\} \text{ و } |X| = 4\}$

مشخص کنید آیا عبارت زیر صحیح است یا نه. توضیح دهید.

- ۶) $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

پاسخ تمرینات ۲.۳

لیست تمام زیر مجموعه ، مجموعه های زیر را بنویسید.

۱) $\{1, 2, 3, 4\}$

زیر مجموعه ها عبارتند از

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

۲) $\{\mathbb{R}\}$

زیر مجموعه ها عبارتند از

$$\emptyset, \{\mathbb{R}\}$$

۳) $\{\emptyset\}$

زیر مجموعه ها عبارتند از

$$\emptyset, \{\emptyset\}$$

۴) $\{\mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{N}\}\}$

زیر مجموعه ها عبارتند از

$$\emptyset, \{\mathbb{R}\}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{N}\}, \{\mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{N}\}\}$$

لیست عناصر مجموعه های زیر را داخل گیومه بنویسید.

۴) $\{X: X \subseteq \{3, 2, a\} \text{ و } |X| = 2\} = \{3, 2\}, \{3, a\}, \{2, a\}$

۵) $\{X: X \subseteq \{3, 2, a\} \text{ و } |X| = 4\} = \emptyset$

مشخص کنید آیا عبارت زیر صحیح است یا نه. توضیح دهید.

۶) $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

صحیح است زیرا ، هر مجموعه ، زیر مجموعه خودش است.

۲.۴ مجموعه های توانی Power Sets

تعریف - اگر A یک مجموعه باشد، پس مجموعه توانی A که با نماد $p(A)$ نشان می دهیم عبارت است از مجموعه کلیه زیر مجموعه های A و می نویسیم $p(A) = \{X: X \subseteq A\}$

نماد p حرف اول کلمه Power است که به معنی توان است.

مثال ۲.۴.۱ اگر $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، مجموعه توانی A را پیدا کنید.

پاسخ

در بخش قبل دیدیم که زیر مجموعه های A عبارتند از

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

پس داریم.

$$p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

در بخش قبل دیدیم که اگر یک مجموعه کران دار شامل n عضو باشد، پس این مجموعه دارای 2^n زیر مجموعه است. و لذا مجموعه توانی آن دارای 2^n عضو است.

حقیقت ۲.۴.۱ اگر A یک مجموعه کران دار باشد، پس $|p(A)| = 2^{|A|}$

مثال ۲.۴.۲ درستی عبارت های زیر را به خاطر بسپارید.

$$۱) p(\{0, 1, 3\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}\}$$

$$۲) p(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$۳) p(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$۴) p(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$۵) p(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$۶) p(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$۷) p(\{a\}) \times p(\{\emptyset\}) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{\emptyset\})\}$$

$$۸) p(p(\{\emptyset\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$۹) p(\{1, \{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$$

$$۱۰) p(\{\mathbb{Z}, \mathbb{N}\}) = \{\emptyset, \{\mathbb{Z}\}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{Z}, \mathbb{N}\}\}$$

اما عبارت های زیر صحیح نیستند.

$$۱۱) p(1) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

شماره ۱۱ صحیح نیست زیرا ۱ یک مجموعه نیست.

$$۱۲) p(\{1, \{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$$

شماره ۱۲ صحیح نیست زیرا $\{1, 2\} \notin \{1, \{1, 2\}\}$

$$۱۳) p(\{1, \{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}\}$$

شماره ۱۳ صحیح نیست زیرا $\{\{1\}\} \notin \{1, \{1, 2\}\}$

اگر A یک مجموعه کران دار باشد، امکان دارد اعضای $p(A)$ به صورت یک لیست ردیف کنیم. اما اگر A تعداد زیادی عضو داشته باشد این کار عملی نیست، اگر A یک مجموعه بی کران باشد، لیست $p(A)$ را ردیف کردن امکان ندارد. مثلاً $\mathbb{N}$ دارای بی نهایت زیر مجموعه است، پس امکان ندارد لیست $p(\mathbb{N})$ را ردیف کنیم.

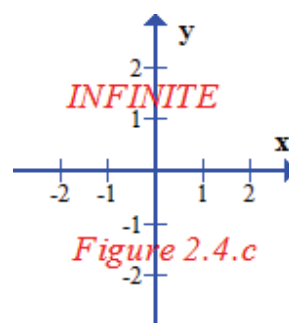
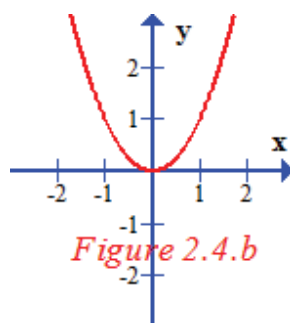
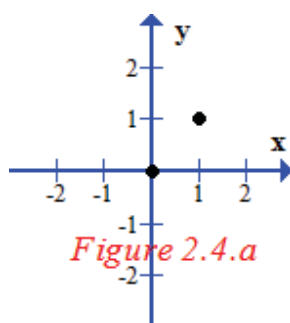
حال به $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ توجه کنید. این مجموعه، عبارت است تمام نقاط در صفحه مختصات دکارتی. یک زیر مجموعه $\mathbb{R}^2$ عبارت است از یک مجموعه نقاط روی صفحه. به چند نمونه از این مجموعه ها توجه کنید. مثلاً $\{(0, 0), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ است و می دانیم

$$\{(0, 0), (1, 1)\} \in p(\mathbb{R}^2)$$

است. حتی می توانیم تصویر این زیر مجموعه را هم راسم کنیم. تصویر ۲.۴. a. مثال دیگر، نمودار $y = x^2$ عبارت است از مجموعه نقاط $G = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ و این هم یک

زیر مجموعه $\mathbb{R}^2$ است، و لذا $G \in p(\mathbb{R}^2)$ است. تصویر ۲.۴. b.

این کار را می توان برای تمام تابع ها انجام داد. پس نمودار هر تابع قابل تصویری $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عضو $p(\mathbb{R}^2)$ است. تصویر ۲.۴. c. نمایش بی نهایت تابع است.



تمرینات ۲.۴

مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- ۱) $p(\{\{a, b\}, \{c\}\})$
- ۲) $p(\{\{\emptyset, \Delta\}\})$
- ۳) $p(p(\{\{2\}\}))$
- ۴) $p(\{a, b\}) \times p(\{0, 1\})$
- ۵) $p(\{a, b\} \times \{0\})$
- ۶) $\{X \subseteq p(\{1, 2, 3\}) : |X| \leq 1\}$

فرض کنید $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد. مطلوب است اندازه یا کاردینالیتهی های زیر.

- ۷) $|p(p(p(A)))|$
- ۸) $|p(A \times B)|$
- ۹) $|\{X \in p(A) : |X| \leq 1\}|$
- ۱۰) $|p(p(A \times \emptyset))|$

پاسخ تمرینات ۲.۴

مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- ۱) $p(\{\{a, b\}, \{c\}\}) = \{\emptyset, \{\{a, b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}\}$
- ۲) $p(\{\{\emptyset, \Delta\}\}) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\Delta\}, \{\{\emptyset, \Delta\}\}\}$
- ۳) $p(p(\{\{2\}\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$
- ۴) $p(\{a, b\}) \times p(\{0, 1\}) = (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{0, 1\}),$
 $(\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{0\}), (\{a\}, \{1\}), (\{a\}, \{0, 1\}),$
 $(\{b\}, \emptyset), (\{b\}, \{0\}), (\{b\}, \{1\}), (\{b\}, \{0, 1\}),$
 $(\{a, b\}, \emptyset), (\{a, b\}, \{0\}), (\{a, b\}, \{1\}), (\{a, b\}, \{0, 1\})$
- ۵) $p(\{a, b\} \times \{0\}) = \{\emptyset, \{(a, 0)\}, \{(b, 0)\}, \{(a, 0), (b, 0)\}\}$
- ۶) $\{X \subseteq p(\{1, 2, 3\}) : |X| \leq 1\}$
 $= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$

فرض کنید $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد. مطلوب است اندازه یا کاردینالیتی های زیر.

$$۷) \quad |p(p(p(A)))| = ۲^{\left(۲^{\left(۲^m\right)}\right)}$$

$$۸) \quad |p(A \times B)| = ۲^{mn}$$

$$۹) \quad |\{X \in p(A) : |X| \leq ۱\}| = m + ۱$$

$$۱۰) \quad |p(p(p(A \times \emptyset)))| = |p(p(p(\emptyset)))| = ۴$$

۲.۵ اجتماع ، اشتراک و تفاضل مجموعه ها - همان طور که با عملیات جمع ، تفریق و ضرب اعداد را با هم ترکیب می کنیم ، عملیات متعددی هم وجود دارند که می توان آنها را برای مجموعه ها بکار برد. ضرب دکارتی که در بخش ۲.۲ دیدیم ، یکی از این عملیات است. حالا به سه عملیات دیگر می پردازیم.

۲.۵.۱ تعریف - فرض می کنیم A و B دو مجموعه باشند.

اجتماع Union A و B عبارت است از $A \cup B = \{x: x \in A \text{ یا } x \in B\}$

اشتراک Intersection A و B عبارت است از $A \cap B = \{x: x \in A \text{ و } x \in B\}$

تفاضل Difference A و B عبارت است از $A - B = \{x: x \in A \text{ و } x \notin B\}$

اگر بخواهیم تعریف بالا را به صورت کلمات بیان کنیم چنین خواهیم داشت.

اجتماع A و B عبارت است مجموعه تمام چیز هایی که در A یا B و یا هر دو هستند.

اشتراک A و B عبارت است از مجموعه تمام چیز هایی که هم در A و هم در B هستند.

تفاضل $A - B$ عبارت است از مجموعه تمام چیز هایی که در A است اما در B نیست.

توجه : $A - B \neq B - A$

مثال ۲.۵.۱ فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{d, e, f\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد.

- ۱) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$
- ۲) $A \cap B = \{d, e\}$
- ۳) $A - B = \{a, b, c\}$
- ۴) $B - A = \{f\}$
- ۵) $(A - B) \cup (B - A) = \{a, b, c, f\}$
- ۶) $A \cup C = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}$
- ۷) $A \cap C = \emptyset$
- ۸) $A - C = \{a, b, c, d, e\}$
- ۹) $(A \cap C) \cup (A - C) = \{a, b, c, d, e\}$
- ۱۰) $(A \cap B) \times B = \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f)\}$
- ۱۱) $(A \times C) \cap (B \times C) = \{(d, 1), (d, 2), (d, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3)\}$

توجه : برای هر مجموعه X و Y داریم.

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

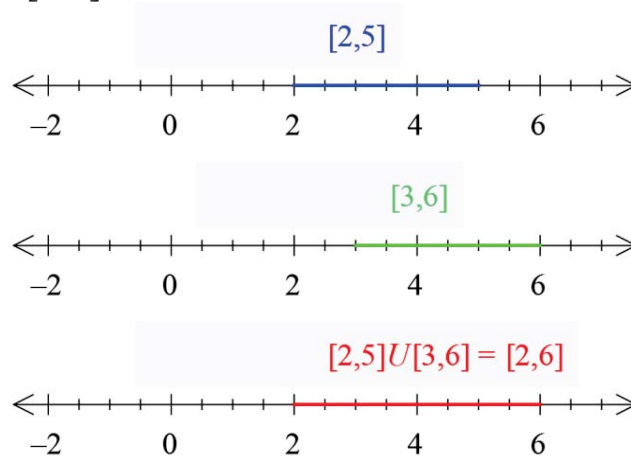
اما

$$X - Y \neq Y - X$$

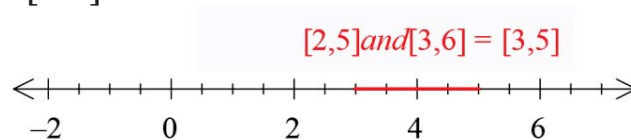
مثال ۲.۵.۲ در تمرینات زیر از نماد بازه استفاده کنید پس $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$ رسم آنها روی محور اعداد به فهم آنها کمک می کند.

در بسیاری از کتب ریاضی بجای نماد $\cup$ از کلمه **یا** OR و بجای نماد $\cap$ از کلمه **و** AND استفاده می کنند.

۱) $[2, 5] \cup [3, 6] = [2, 6]$

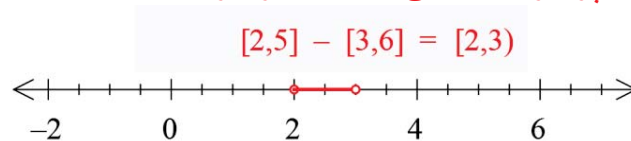


۲) $[2, 5] \cap [3, 6] = [3, 5]$



۳) $[2, 5] - [3, 6] = [2, 3)$

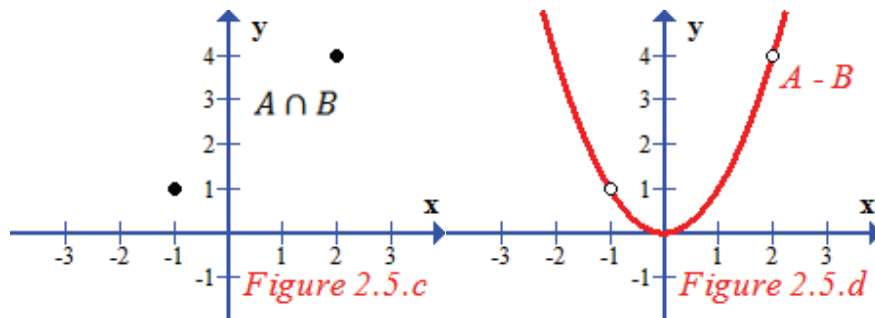
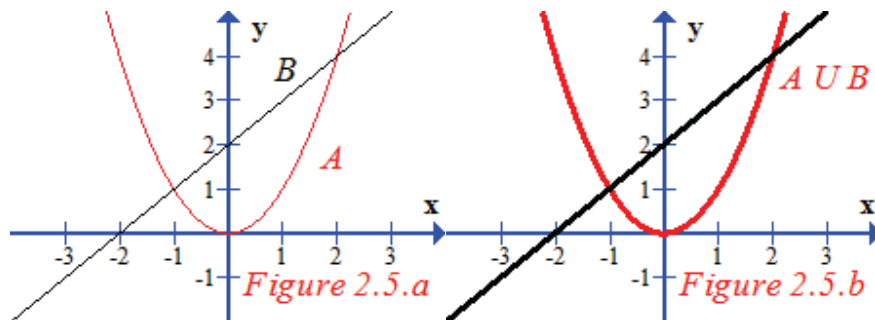
در تساوی بالا سمت راست ، پرانتز است یعنی عدد ۳ در بازه نیست



در تصویر بالا ملاحظه می کنید که سمت راست نمودار دایره تو خالی و سمت چپ دایره پر است.

۴) $[0, 3] - [1, 2] = [0, 1) \cup (2, 3]$

مثال ۲.۵.۳ فرض می کنیم $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ نمودار معادله $y = x^2$ و فرض می کنیم $B = \{(x, x + 2) : x \in \mathbb{R}\}$ نمودار معادله $y = x + 2$ باشد. این مجموعه ها، زیر مجموعه های $\mathbb{R}^2$ هستند. نمودار هر دو در تصویر ۲.۵.a ملاحظه می کنید.



تصویر ۲.۵.b نمودار $A \cup B$ را نشان می دهد. یعنی مجموعه تمام نقاطی که در هر یک و یا هر دو نمودار است.

تصویر ۲.۵.c نمودار $A \cap B$ را نشان می دهد. ملاحظه می کنید که این نمودار شامل فقط دو نقطه است، یعنی محل تلاقی خط و سهمی. یا به عبارت دیگر $A \cap B = \{(-1, 1), (2, 4)\}$

تصویر ۲.۵.d نمودار $A - B$ را نشان می دهد. یعنی نمودار A با دو دایره تو خالی روی آن که محل برخورد خط با سهمی است.

تمرینات ۲.۵

فرض کنید $A = \{۴, ۳, ۶, ۷, ۱, ۹\}$ و $B = \{۵, ۶, ۸, ۴\}$ و $C = \{۵, ۸, ۴\}$ باشد. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- ۱) $A \cup B$
- ۲) $A \cap B$
- ۳) $A - B$
- ۴) $A - C$
- ۵) $B - A$
- ۶) $A \cap C$
- ۷) $B \cap C$
- ۸) $B \cup C$
- ۹) $C - B$

فرض کنید $A = \{0, ۱\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ باشد. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- ۱۰) $(A \times B) \cap (B \times B)$
- ۱۱) $(A \times B) \cup (B \times B)$
- ۱۲) $(A \times B) - (B \times B)$
- ۱۳) $(A \cap B) \times A$
- ۱۴) $(A \times B) \cap B$
- ۱۵) $p(A) \cap p(B)$
- ۱۶) $p(A) - p(B)$
- ۱۷) $p(A \cap B)$

۱۸ - مجموعه $X = [۱, ۳] \times [۱, ۳]$ و $Y = [۲, ۴] \times [۲, ۴]$ در صفحه مختصات $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در یک صفحه دیگر مجموعه های زیر را سایه دار کنید.

$$X \cup Y, X \cap Y, X - Y, Y - X$$

راهنمایی - X و Y ضرب دکارتی بازه ها هستند.

۱۹ - مجموعه های $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ۱\}$ و $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در یک صفحه دیگر مجموعه های زیر را سایه دار کنید.

$$X \cup Y, X \cap Y, X - Y, Y - X$$

۲۰ - آیا عبارت $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ صحیح است یا غلط؟ در باره عبارت زیر چه نظری دارید؟ $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

پاسخ تمرینات ۲.۵

فرض کنید $A = \{۴, ۳, ۶, ۷, ۱, ۹\}$ و $B = \{۵, ۶, ۸, ۴\}$ و $C = \{۵, ۸, ۴\}$ باشد. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

۱) $A \cup B = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

۲) $A \cap B = \{۴, ۶\}$

۳) $A - B = \{۳, ۷, ۱, ۹\}$

۴) $A - C = \{۳, ۶, ۷, ۱, ۹\}$

۵) $B - A = \{۵, ۸\}$

۶) $A \cap C = \{۴\}$

۷) $B \cap C = \{۵, ۸, ۴\}$

۸) $B \cup C = \{۵, ۶, ۸, ۴\}$

۹) $C - B = \emptyset$

فرض کنید $A = \{0, ۱\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ باشد. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

۱۰) $(A \times B) \cap (B \times B) = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$

۱۱) $(A \times B) \cup (B \times B) = \{(0, ۱), (0, ۲), (۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲)\}$

۱۲) $(A \times B) - (B \times B) = \{(0, ۱), (0, ۲)\}$

۱۳) $(A \cap B) \times A = \{(۱, 0), (۱, ۱)\}$

۱۴) $(A \times B) \cap B = \emptyset$

۱۵) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{۱\}\}$

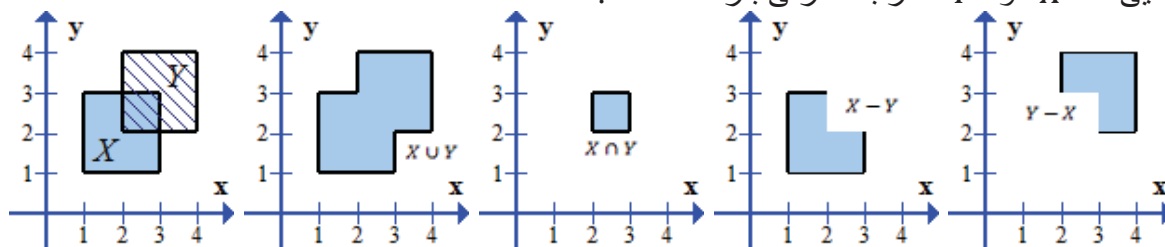
۱۶) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{0\}, \{0, ۱\}\}$

۱۷) $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{۱\}\}$

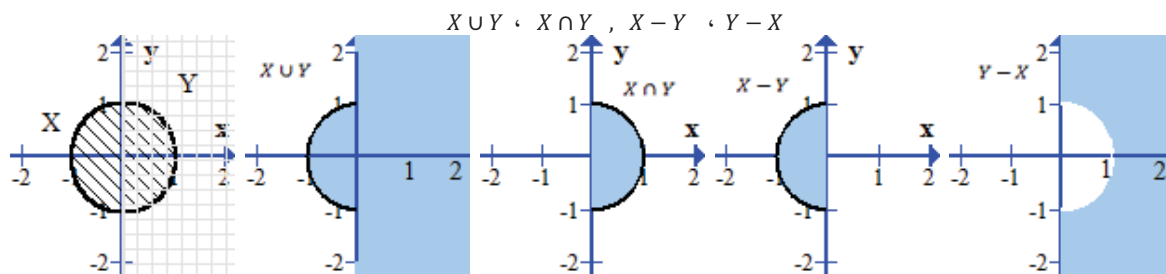
۱۸ - مجموعه $X = [۱, ۳] \times [۱, ۳]$ و $Y = [۲, ۴] \times [۲, ۴]$ در صفحه مختصات $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در یک صفحه دیگر مجموعه های زیر را سایه دار کنید.

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$, $Y - X$

راهنمایی - X و Y ضرب دکارتی بازه ها هستند.



۱۹ - مجموعه های $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ و $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در یک صفحه دیگر مجموعه های زیر را سایه دار کنید.



۲۰ - آیا عبارت $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ صحیح است یا غلط؟ در باره عبارت زیر چه نظری دارید؟ $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

پاسخ

عبارت اول صحیح است

اثبات

فرض می کنیم $(a, b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ باشد، پس $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ است و لذا b یک عدد صحیح است. به همین ترتیب $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ یعنی a یک عدد صحیح است. پس داریم $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است. پس نتیجه می گیریم که

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

از طرف دیگر، اگر $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشد، پس $a \in \mathbb{R}$ است، و لذا $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ است، به همین ترتیب $b \in \mathbb{R}$ یعنی $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ است. لذا $(a, b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ است پس $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ است. صحت هر دو طرف را ثابت کردیم، پس

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

اما عبارت دوم صحیح نیست. زیرا، اگر فرض کنیم $(\pi, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشد، مسلم است که $(\pi, \pi) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ و $(\pi, \pi) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ و در نهایت نتیجه می گیریم $(\pi, \pi) \notin (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$

۲.۶ - متمم مجموعه Set Complement

برای تعریف متمم مجموعه، لازم است مجموعه مرجع **Universal Set** را بشناسیم. هنگامی که در مورد یک مجموعه صحبت می کنیم، تقریباً همیشه، آنرا به عنوان یک زیر مجموعه یک مجموعه بزرگ تر، به حساب می آوریم. مثلاً، مجموعه اعداد اول $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ را در نظر بگیرید. اگر از ما خواسته شود نام چند چیز که در P نباشد، ذکر کنیم، ممکن است چند عدد مرکب مانند ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۲، ... را ذکر کنیم. مسلم است که نخواهیم گفت، ایرج در P نیست. مسلم است که ایرج در P نیست. اما ایرج ربطی به عدد اول یا غیر اول ندارد. می توانیم تصور کنیم که $P \subseteq \mathbb{N}$ است. زیرا اعداد اول، خود جزئی از اعداد طبیعی هستند. پس اگر بخواهیم بگوییم، چیزی که در P نباشد، باز آن چیز در $\mathbb{N}$ است. لذا این مجموعه بزرگ $\mathbb{N}$ را مجموعه مرجع برای P می نامیم. تقریباً، تمام مجموعه های مفید در ریاضیات، یک مجموعه مرجع دارند. مثلاً، دایره واحد، مجموعه زیر است.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

و چون این نقاط در صفحه $\mathbb{R}^2$ است، پس طبیعی است اگر بگوییم $\mathbb{R}^2$ مجموعه مرجع C است. اگر نوع یک مجموعه مشخص نشده باشد، مثلاً فقط داشته باشیم مجموعه A ، آنگاه مجموعه مرجع را با نماد U نشان می دهیم.

۲.۶.۱ - تعریف

فرض می کنیم A یک مجموعه باشد، و مجموعه مرجع آن U متمم مجموعه A که با نماد $\bar{A}$ نشان داده می شود، عبارت است از مجموعه $\bar{A} = U - A$

مثال ۲.۶.۱

اگر P مجموعه اعداد اول باشد، پس

$$\bar{P} = \mathbb{N} - P = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$$

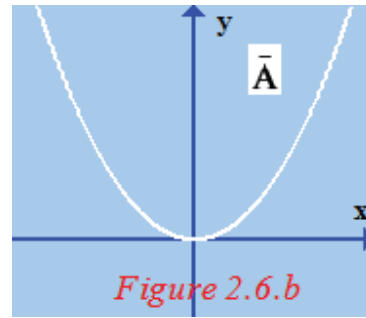
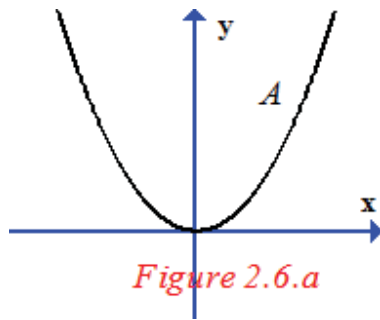
بنا بر این $\bar{P}$ عبارت است از مجموعه اعداد غیر اول.

مثال ۲.۶.۲

فرض کنید $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ نمودار معادله $y = x^2$ باشد. تصویر ۲.۶.۱.۱ نمایش A در مجموعه مرجع $\mathbb{R}^2$ است. مطابق زیر است.

$$\bar{A} = \mathbb{R}^2 - A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$$

که در تصویر ۲.۶.۲.۱ قسمت سایه دار نمایش داده شده است.



تمرینات ۲.۶

۱ - فرض کنید $A = \{۴, ۳, ۶, ۷, ۱, ۹\}$ و $B = \{۵, ۶, ۸, ۴\}$ دارای مجموعه مرجع $U = \{0, ۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ باشند. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

- a) $\bar{A}$
- b) $\bar{B}$
- c) $A \cap \bar{A}$
- d) $A \cup \bar{A}$
- e) $A - \bar{A}$
- f) $A - \bar{B}$
- g) $\bar{A} - \bar{B}$
- h) $\bar{A} \cap B$
- i) $\overline{\bar{A} \cap B}$

۲ - نمودار مجموعه $X = [۱, ۳] \times [۱, ۲]$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در نمودار های جدا گانه، مجموعه های $\bar{X}$ و $\bar{X} \cap ([0, ۲] \times [0, ۳])$ را سایه دار کنید.

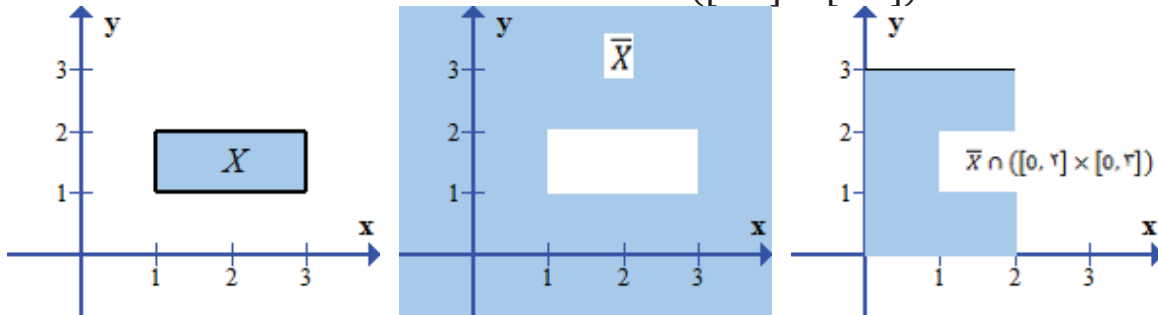
۳ - نمودار مجموعه $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ۱ \leq x^2 + y^2 \leq ۴\}$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید و در نمودار جدا گانه مجموعه $\bar{X}$ را سایه دار کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۶

۱ - فرض کنید $A = \{۴, ۳, ۶, ۷, ۱, ۹\}$ و $B = \{۵, ۶, ۸, ۴\}$ دارای مجموعه مرجع $U = \{0, ۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ باشند. مجموعه های زیر را پیدا کنید.

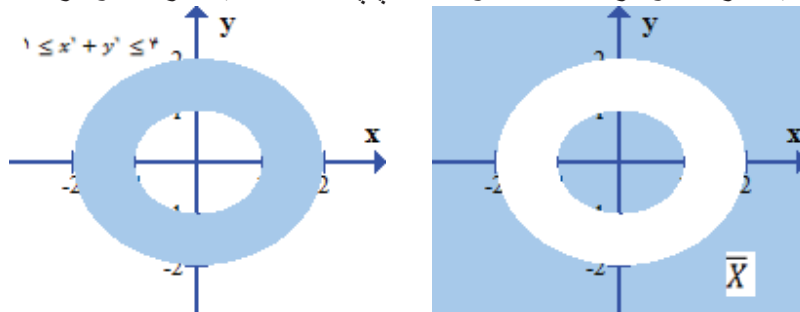
- a) $\bar{A} = \{0, ۲, ۵, ۸, ۱۰\}$
- b) $\bar{B} = \{0, ۱, ۲, ۳, ۷, ۹, ۱۰\}$
- c) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- d) $A \cup \bar{A} = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\} = U$
- e) $A - \bar{A} = A$
- f) $A - \bar{B} = \{۴, ۶\}$
- g) $\bar{A} - \bar{B} = \{۵, ۸\}$
- h) $\bar{A} \cap B = \{۵, ۸\}$
- i) $\overline{\bar{A} \cap B} = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۹, ۱۰\}$

۲ - نمودار مجموعه $X = [۱, ۳] \times [۱, ۲]$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید. و سپس در نمودار های جدا گانه، مجموعه های $\bar{X}$ و $\bar{X} \cap ([0, ۲] \times [0, ۳])$ را سایه دار کنید.



۳ - نمودار مجموعه $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ۱ \leq x^2 + y^2 \leq ۴\}$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید و در نمودار جدا گانه مجموعه $\bar{X}$ را سایه دار کنید.

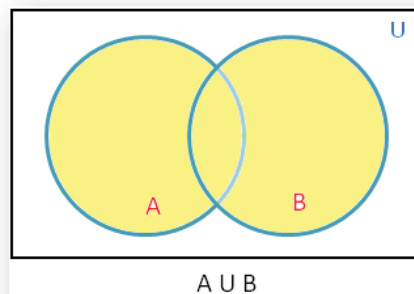
سمت چپ قسمت سایه دار، نمودار X است و سمت چپ قسمت سایه دار، نمودار $\bar{X}$ است.



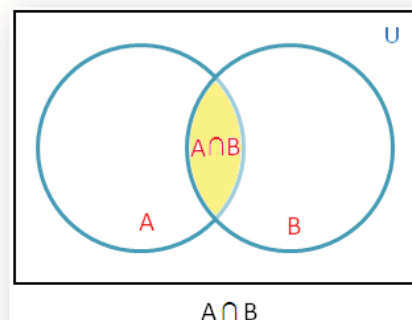
۲.۷ - نمودارهای ون Venn Diagrams

هنگام کار با مجموعه ها ، اغلب اگر نمودار های آنها را رسم کنیم ، کمکی به درک آنها می شود. برای این کار ، یک مجموعه را با یک دایره یا بیضی نشان می دهیم. این دایره تمام عناصر آن مجموعه را در بر می گیرد. این نمودار ها می توانند نشان دهند که مجموعه ها چگونه با هم ترکیب شده اند. تصاویر ۲.۷.a و ۲.۷.b و ۲.۷.c به ترتیب $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A - B$ را نشان می دهند.

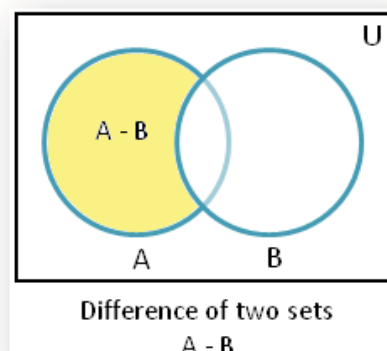
تصویر ۲.۷.a



تصویر ۲.۷.b

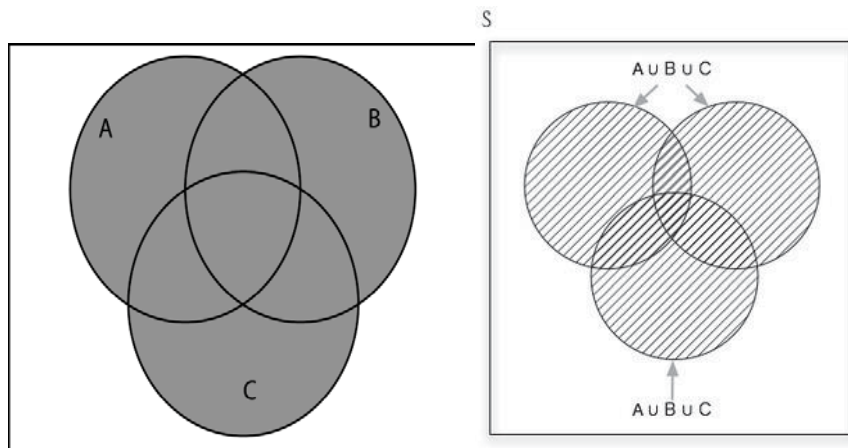


تصویر ۲.۷.c



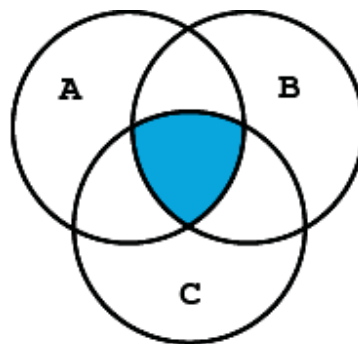
حالا ، می خواهیم ببینیم ، سه مجموعه چگونه با هم ترکیب می شوند.
 با $A \cup B \cup C$ شروع می کنیم. طبق تعریف می دانید که این مجموعه باید شامل عناصری باشد که در هر یک از مجموعه های A یا B یا C و یا هر سه وجود دارد. تصویر ۲.۷.d مجموعه $A \cup B \cup C$ را نشان می دهد.

تصویر ۲.۷.d



به همین ترتیب ، می دانید که $A \cap B \cap C$ مجموعه ای است که شامل عناصری باشد که هم در A و هم در B و هم در C باشد. تصویر ۲.۷.e مجموعه $A \cap B \cap C$ را نشان می دهد.

تصویر ۲.۷.e

**A AND B AND C**

ابتدا $A \cap B$ را پیدا می کنیم و سپس مجموعه بدست آمده را با C تلاقی می دهیم. می توان عبارت زیر را نوشت.

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$

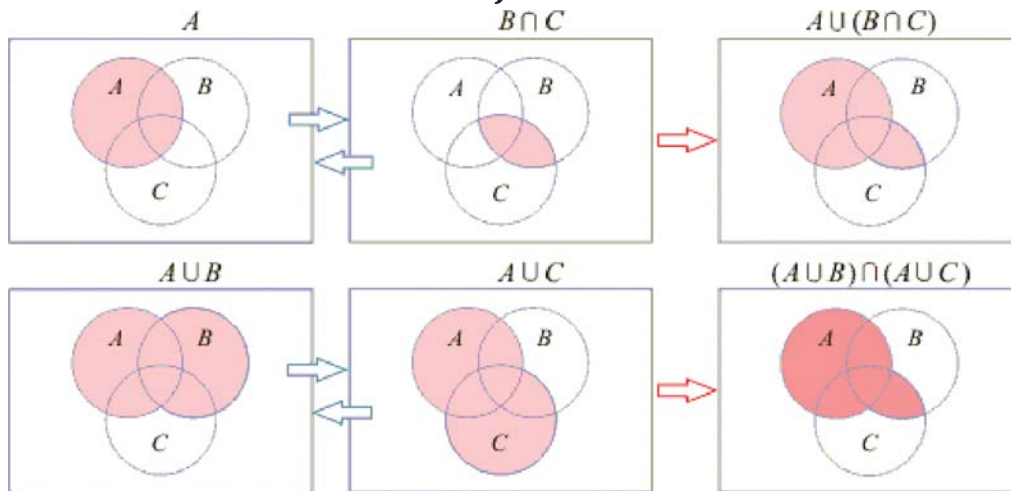
و یا

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$$

البته اگر بین مجموعه ها فقط نماد $\cup$ و یا $\cap$ داشته باشیم ، می توانیم پرانتز ها را حذف کنیم. همانطور که در جبر می نویسیم $(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$

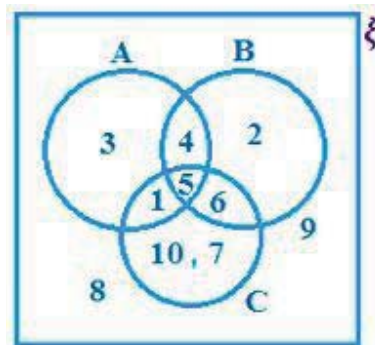
اما توجه دارید که $(a + b) * c \neq a + (b * c)$ در تصویر ۲.۷.f مجموعه های $A \cup (B \cap C)$ و $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ را ملاحظه می کنید.

تصویر ۲.۷.f



تمرینات ۲.۷

- ۱ - یک نمودار ون برای $\overline{A}$ رسم کنید.
- ۲ - یک نمودار ون برای $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ رسم کنید.
- ۳ - آیا فکر می کنید $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ است؟
- ۴ - یک نمودار ون برای $\overline{A \cap B}$ و یک نمودار ون برای $\overline{(A \cap B \cap C)}$ رسم کنید.
- ۵ - یک نمودار ون برای $(A \cup B) \cap C$ رسم کنید.
- ۶ - یک نمودار ون برای $B - A$ رسم کنید.
- ۷ - با توجه به تصویر زیر، مجموعه های (i) تا (xv) را پیدا کنید. **توجه نماد ξ برای مجموعه مرجع بکار می رود.**

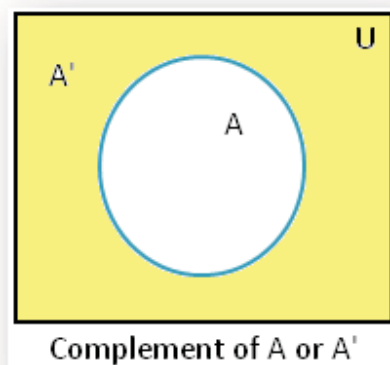


- (i) A (ii) B (iii) ξ (iv) $\overline{A}$ (v) $\overline{B}$ (vi) $\overline{C}$ (vii) $C - A$
- (viii) $B - C$ (ix) $B - A$ (x) $A \cup B$ (xi) $B \cup C$ (xii) $\overline{(B \cup C)}$
- (xiii) $\overline{(A \cap B)}$ (xiv) $(A \cup B) \cap C$ (xv) $A \cap (B \cap C)$
- ۸ - یک نمودار ون برای نشان دادن $\overline{A} \cap (B \cup C)$ رسم کنید.

- ۹ - در یک دانشکده، ۱۵۰ دانشجو برای سال اول ثبت نام کرده اند. ۸۵ نفر در یک کلاس ریاضی، ۷۰ نفر در یک کلاس انگلیسی، ۵۰ نفر هم در کلاس ریاضی و هم در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند. به سئوال های زیر پاسخ دهید.
- الف - چند نفر، فقط در کلاس ریاضی ثبت نام کرده اند؟
- ب - چند نفر، فقط در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند؟
- ج - چند نفر در کلاس ریاضی یا در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند؟
- د - چند نفر نه در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند و نه در کلاس ریاضی؟

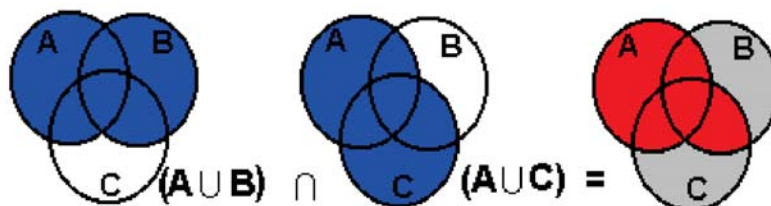
پاسخ تمرینات ۲.۷

۱ - یک نمودار ون برای $\overline{A}$ رسم کنید.



توجه: در بعضی از کتب ریاضی برای متمم A از نماد A' استفاده می کنند. پس $A' = \overline{A}$ است.

۲ - یک نمودار ون برای $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ رسم کنید.

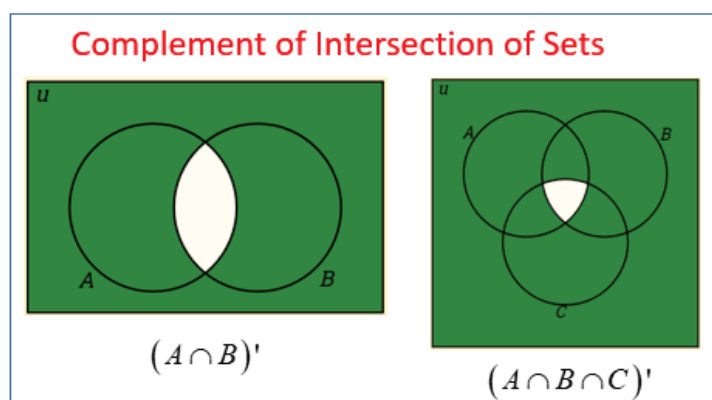


۳ - آیا فکر می کنید $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ است؟

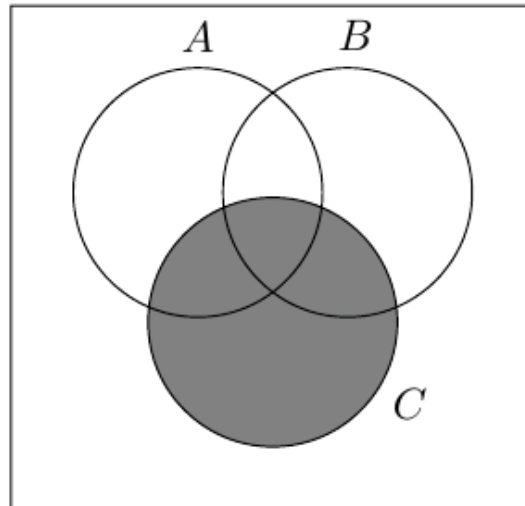
پاسخ

بر اساس تصویر ۲.۷.۲ پاسخ خیر می باشد.

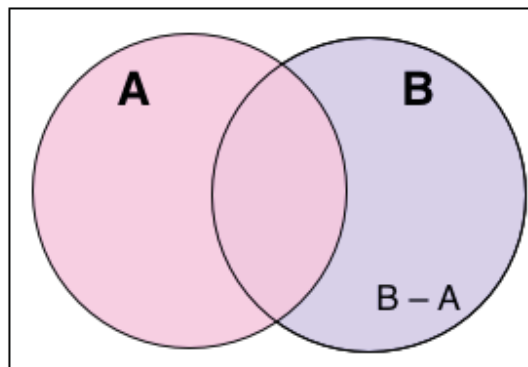
۴ - یک نمودار ون برای $\overline{A \cap B}$ و یک نمودار ون برای $\overline{(A \cap B \cap C)}$ رسم کنید.



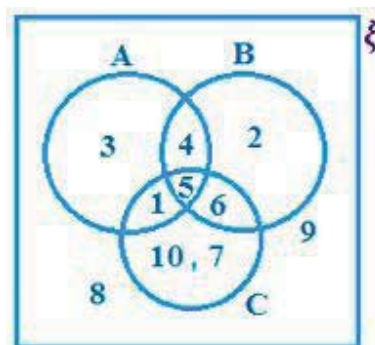
۵ - یک نمودار ون برای $(A \cup B) \cap C$ رسم کنید.



۶ - یک نمودار ون برای $B - A$ رسم کنید.



۷ - با توجه به تصویر زیر ، مجموعه های (i) تا (xv) را پیدا کنید. توجه نماد ξ برای مجموعه مرجع بکار می رود.



$$(i) A = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$(ii) B = \{4, 5, 6, 2\}$$

$$(iii) \xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(iv) \bar{A} = \{2, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

تمام اعضای مجموعه مرجع، بجز آنها که در A هستند.

$$(v) \bar{B} = \{1, 3, 7, 8, 9, 10\}$$

تمام اعضای مجموعه مرجع، بجز آنها که در B هستند.

$$(vi) \bar{C}$$

ملاحظه می کنید که $C = \{1, 5, 6, 7, 10\}$ است. پس $\bar{C} = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ است.

$$(vii) C - A$$

اینجا $C = \{1, 5, 6, 7, 10\}$ است و $A = \{1, 3, 4, 5\}$ است. پس تمام عناصری که در A است، از C جدا می کنیم. لذا داریم $C - A = \{6, 7, 10\}$

$$(viii) B - C$$

اینجا $B = \{4, 5, 6, 2\}$ است و $C = \{1, 5, 6, 7, 10\}$ است. پس تمام عناصری که در C است، از B جدا می کنیم. لذا داریم $B - C = \{4, 2\}$

$$(ix) B - A = \{6, 2\}$$

$$(x) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(xi) B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10\}$$

$$(xii) \overline{(B \cup C)} = \{3, 8, 9\}$$

$$(xiii) \overline{(A \cap B)} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

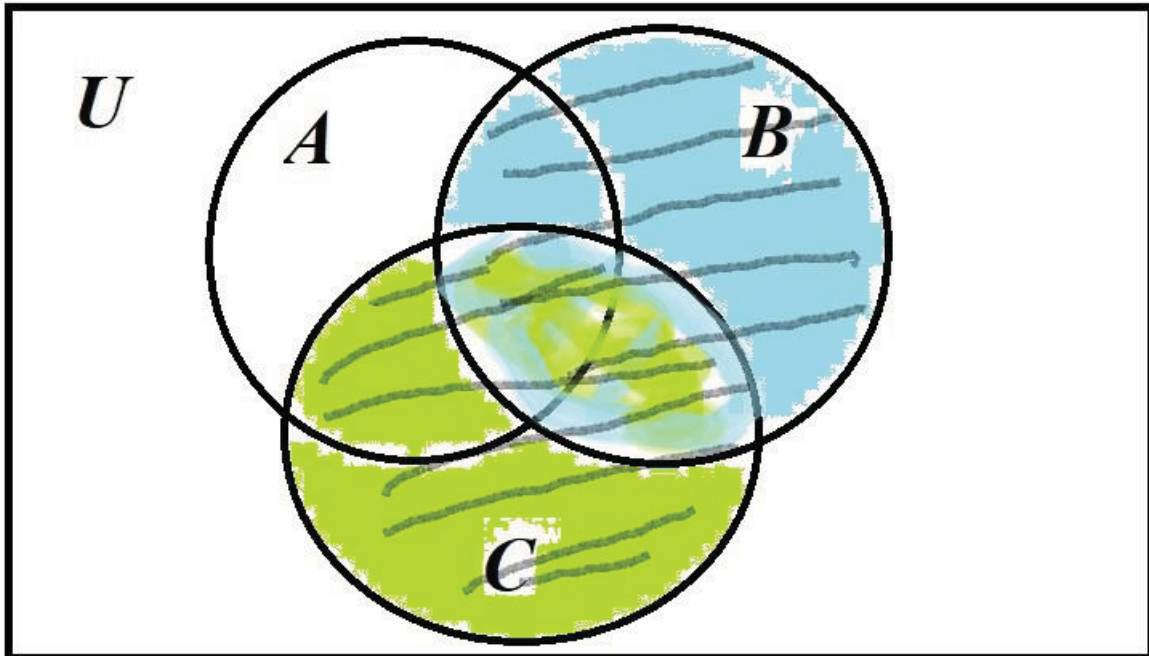
$$(xiv) (A \cup B) \cap C = \{1, 5, 6\}$$

$$(xv) A \cap (B \cap C) = \{5\}$$

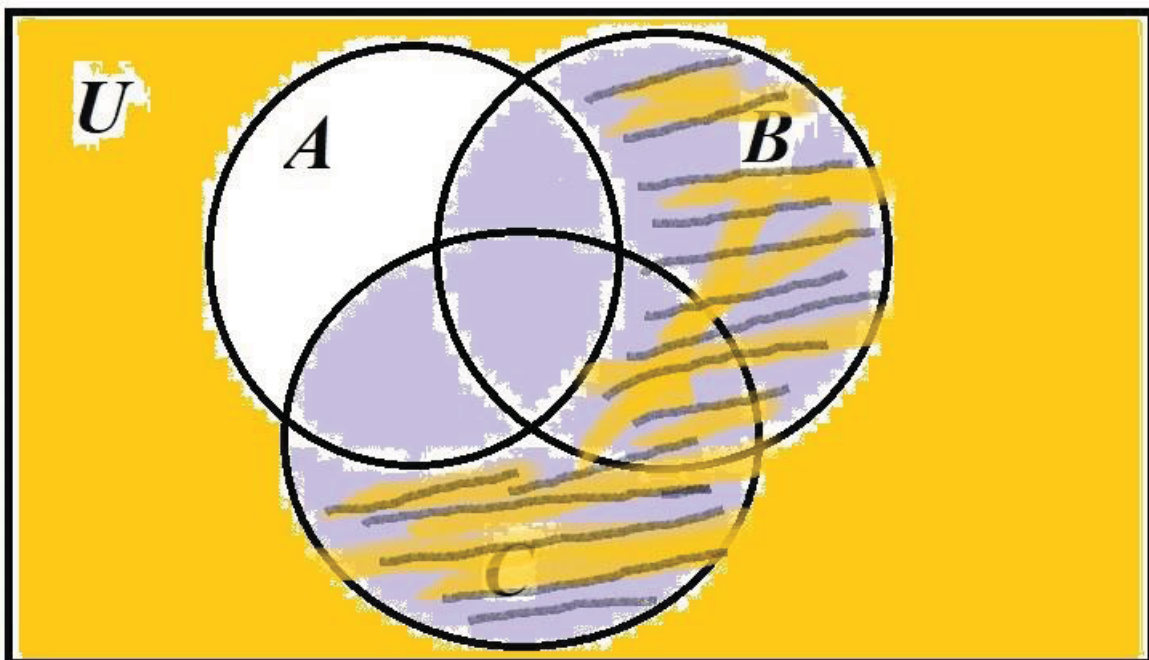
۸ - یک نمودار ون برای نشان دادن $\bar{A} \cap (B \cup C)$ رسم کنید.

پاسخ

تصویر زیر، قسمت های رنگی، مجموعه $B \cup C$ را نشان می دهد.



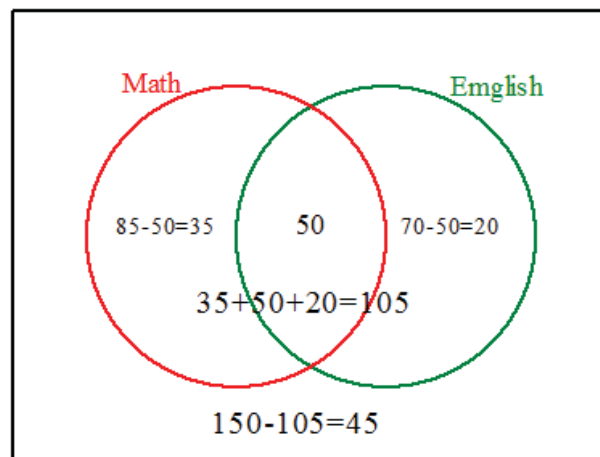
تصویر زیر، $\bar{A} \cap (B \cup C)$ را نشان می دهد. تمام قسمت های رنگی



۹ - در یک دانشکده ، ۱۵۰ دانشجو برای سال اول ثبت نام کرده اند. ۸۵ نفر در یک کلاس ریاضی ، ۷۰ نفر در یک کلاس انگلیسی ، ۵۰ نفر هم در کلاس ریاضی و هم در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند. به سؤال های زیر پاسخ دهید.

پاسخ

ابتدا نمودار ون رسم می کنیم. دایره قرمز کلاس ریاضی و دایره سبز کلاس انگلیسی است. گفته شده است که ۵۰ نفر هم در کلاس ریاضی و هم در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند. پس اشتراک این دو کلاس ۵۰ است. این عدد را در محل تقاطع دو دایره می نویسیم و بقیه را با یک محاسبه ساده پیدا می کنیم.



الف - چند نفر ، فقط در کلاس ریاضی ثبت نام کرده اند؟

$$85 - 50 = 35$$

ب - چند نفر ، فقط در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند؟

$$70 - 50 = 20$$

ج - چند نفر در کلاس ریاضی یا در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند؟

$$35 + 50 + 20 = 105$$

د - چند نفر نه در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده اند و نه در کلاس ریاضی ؟

$$150 - 105 = 45$$

امتحان می کنیم

$$U = 35 + 50 + 20 + 45 = 150$$

۲.۸ - مجموعه های اندیس دار Indexed Sets

هنگامی که یک مساله ریاضی شامل تعداد زیادی مجموعه باشد، معمولاً از زیر نویس Index استفاده می کنیم. مثلاً بجای نوشتن سه مجموعه A, B, C می نویسیم A_1, A_2, A_3 به این مجموعه ها می

گوییم مجموعه های اندیس دار Indexed Sets

اندیس Index , Subscript

اندیس دار Indexed

اندیس ها Indices , Subscripts

۲.۸.۱ - تعریف

مجموعه های اندیس دار یا خانواده مجموعه های اندیس دار مجموعه ای است که اعضای آن خود، مجموعه هستند.

فرض کنید I یک مجموعه باشد، که آنرا مجموعه اندیس Index Set می نامیم، و برای هر $i \in I$ یک مجموعه A_i ترتیب می دهیم. مجموعه $\{A_i : i \in I\}$ را یک خانواده مجموعه های اندیس دار می نامیم.

در بخش های قبل در مورد اجتماع و اشتراک مجموعه ها صحبت کردیم و نمودار ون هم برای آنها رسم کردیم.

حال فرض کنید مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ داشته باشیم، پس مجموعه $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ عبارت است از مجموعه ای که شامل تمام چیز هایی باشد که حد اقل در یکی از مجموعه های A_i وجود داشته باشد. به همین ترتیب $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ عبارت است از مجموعه ای که شامل تمام چیز هایی باشد که در تمام مجموعه های A_i مشترک است. پس تعریف زیر را داریم.

۲.۸.۲ - تعریف - فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه باشند. پس

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \in A_i \text{ ها } A_i \text{ از مجموعه}\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x : x \in A_i \text{ ها } A_i \text{ تمام}\}$$

بخاطر دارید که اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ پس

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

و اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ پس

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

به همین سیاق اگر مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ داشته باشیم، پس

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{و} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

مثال ۲.۸.۱ فرض می کنیم داشته باشیم $A_1 = \{0, 2, 5\}$ و $A_2 = \{1, 2, 5\}$ و $A_3 = \{2, 5, 7\}$ پس داریم.

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{0, 1, 2, 5, 7\} \quad \text{و} \quad \bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2, 5\}$$

اگر تعداد مجموعه ها بی نهایت باشد، باز هم می توان تعریف بالا را بکار برد.

۲.۸.۳ - تعریف - فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots$ مجموعه باشند. پس

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = \{x: x \text{ حداقل در یکی از } A_i \text{ ها باشد}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \{x: x \text{ در تمام } A_i \text{ ها باشد}\}$$

مثال ۲.۸.۲ - فرض کنید داشته باشیم

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}, A_2 = \{-2, 0, 2\}, A_3 = \{-3, 0, 3\}, \dots, A_i = \{-i, 0, i\}, \dots$$

ملاحظه می کنید که

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

یک ترنند مفید هم می توان بکار برد. مثلاً

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = \bigcup_{i \in \{1, 2, 3\}} A_i$$

همچنین

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = \bigcap_{i \in \{1, 2, 3\}} A_i$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

قبلا گفتیم اگر I مجموعه اندیس های ممکن باشد ، می توان نوشت $i \in I$ در این صورت I را **مجموعه اندیس** می نامند. اما ، نمی گوییم مجموعه های اندیس دار. اشتباه نشود.

لزومی هم ندارد که I فقط شامل اعداد صحیح باشد. مجموعه اندیس می تواند شامل حروف و یا حتی اعداد حقیقی باشد.

چون تا کنون i را عدد صحیح تصور می کردیم ، برای رفع ابهام بجای i حرف a را بکار می بریم. یعنی تصور می کنیم a یک عضو I باشد ، پس در این صورت با یک خانواده مجموعه های A_a سروکار داریم. اینجا $a \in I$ است ، بطوری که a می تواند یک عدد حقیقی باشد. در این صورت تعریف زیر را خواهیم داشت.

۲.۸.۴-تعریف اگر A_a یک مجموعه برای هر a در یک مجموعه اندیس I باشد ، پس

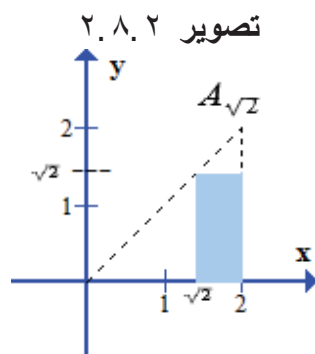
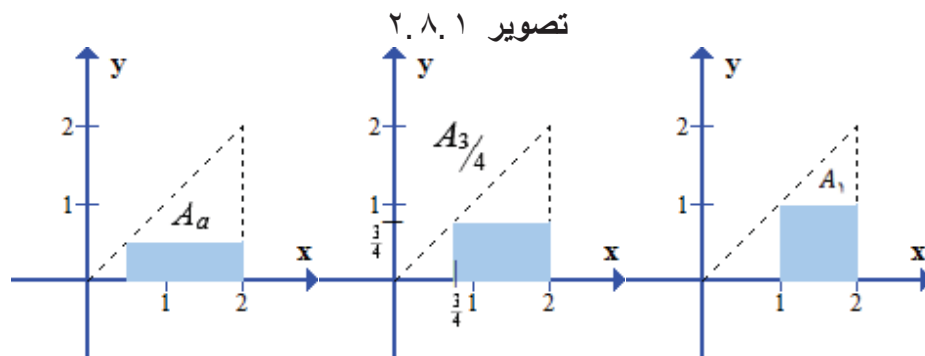
$$\bigcup_{a \in I} A_a = \{x: x \in A_a, A_a \text{ مجموعه}\}$$

$$\bigcap_{a \in I} A_a = \{x: x \in A_a, A_a \text{ مجموعه}\}$$

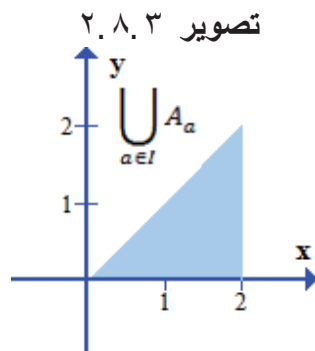
مثال ۲.۸.۳- در این مثال ، کلیه مجموعه های A_a همگی زیر مجموعه های صفحه $\mathbb{R}^2$ هستند. هر کدام از a ها متعلق به مجموعه اندیس $I = [0, 2] = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 2\}$ هستند ، یعنی مجموعه کلیه اعداد حقیقی بین صفر و ۲ است.

برای هر عدد $a \in I$ ، مجموعه A_a عبارت است از $A_a = [a, 2] \times [0, a]$ پس A_a یک مستطیل در صفحه xy است ، که قاعده آن از a تا ۲ روی محور x است و ارتفاع آن a است. چند نمونه از این مستطیل ها در تصویر ۲.۸.۱ سایه دار رسم شده اند. ملاحظه می کنید که

اندیس این مجموعه ها فقط اعداد صحیح نیستند. مثلا تصویر ۲.۸.۲ اندیس $\sqrt{2}$ است. خطوط نقطه چین ، جز مجموعه ها نیست ، فقط برای وضوح رسم شده اند.



به اتحاد بی کران $\bigcup_{a \in I} A_a$ توجه کنید. این اتحاد در تصویر ۲.۸.۳ سایه در نشان داده شده است. زیرا هر نقطه ای (x, y) روی این مثلث، متعلق به مجموعه A_x است و لذا یک اتحاد است.



حالا روی اشتراک $\bigcap_{a \in I} A_a$ کار می کنیم. می دانید که نقطه $(2, 0)$ روی محور x گوشه انتهایی پائینی هر کدام از مجموعه های A_a است، لذا $(2, 0) \in A_a$ است. بنا بر این نقطه $(2, 0)$ محل تلاقی تمام A_a ها است. اما هر نقطه دیگری $(x, y) \neq (2, 0)$ روی مثلث، متعلق به تمام مجموعه های A_a نیست.

دلیل آن هم این است که اگر $x < 2$ باشد، پس $(x, y) \notin A_a$ است برای هر $x < a \leq 2$ و اگر $x = 2$ باشد، پس $(x, y) \notin A_a$ است در نتیجه داریم.

$$\bigcap_{a \in I} A_a = \{(2, 0)\}$$

لذا اشتراک، شامل فقط یک عضو است، نقطه $(2, 0)$

تمرینات ۲.۸

۱ - فرض کنید $A_1 = \{a, b, d, e, f, g\}$ و $A_2 = \{a, b, c, d\}$ و $A_3 = \{a, b, d\}$ و $A_4 = \{a, b, h\}$ باشد. مطلوب است مجموعه های زیر

$$a) \bigcup_{i=1}^4 A_i$$

$$b) \bigcap_{i=1}^4 A_i$$

۲ - برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $A_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ باشد. مطلوب است مجموعه های زیر.

$$a) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$b) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

۳ - مطلوب است مجموعه های زیر.

$$a) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [i, i + 1]$$

$$b) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [i, i + 1]$$

$$c) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i + 1]$$

$$d) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i + 1]$$

پاسخ تمرینات ۲.۸

۱ - فرض کنید $A_1 = \{a, b, d, e, f, g\}$ و $A_2 = \{a, b, c, d\}$ و $A_3 = \{a, b, d\}$ و $A_4 = \{a, b, h\}$ باشد. مطلوب است مجموعه های زیر

$$a) \bigcup_{i=1}^4 A_i = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$b) \bigcap_{i=1}^4 A_i = \{a, b\}$$

۲ - برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $A_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ باشد. مطلوب است مجموعه های زیر.

$$a) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$b) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0, 1\}$$

۳ - مطلوب است مجموعه های زیر.

$$a) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [i, i+1] = [1, \infty)$$

$$b) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [i, i+1] = \emptyset$$

$$c) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 1\}$$

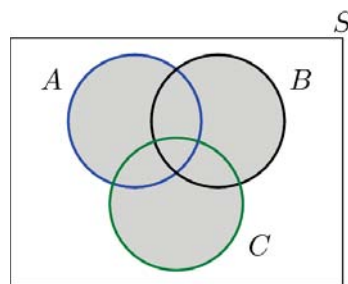
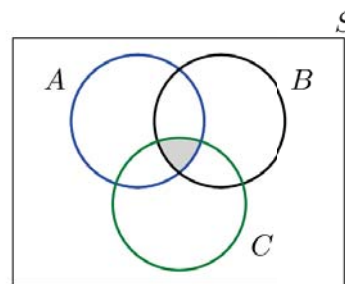
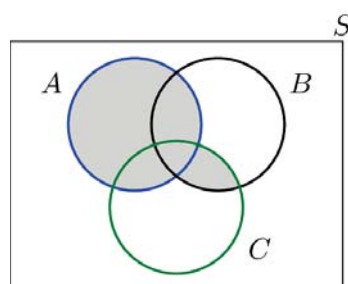
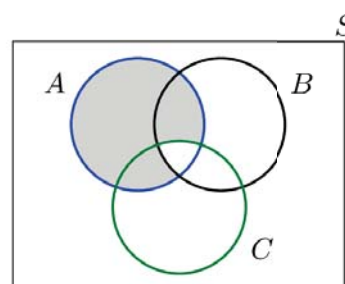
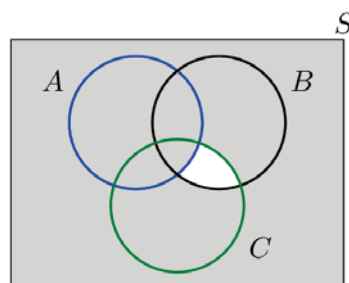
$$d) \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] = \emptyset$$

۲.۹- تمرینات دوره ای مجموعه ها

۱- فرض کنید A, B, C مجموعه باشند. برای هر یک از مجموعه های زیر، دیاگرام ون رسم کنید و ناحیه ای را که آن مجموعه نشان می دهد، سایه دار کنید.

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B \cap C$
- $A \cup (B \cap C)$
- $A - (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C)^c$

توجه: $(B \cap C)^c = \sim(B \cap C) = (\overline{B \cap C}) = (B \cap C)'$ یا همان متمم است، حرف C که بالای پرانتز، نوشته شده است، حرف اول Complement است به معنی متمم پاسخ

 $A \cup B \cup C$  $A \cap B \cap C$  $A \cup (B \cap C)$  $A - (B \cap C)$  $A \cup (B \cap C)^c$

۲ - با استفاده از دیاگرام ون ، درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

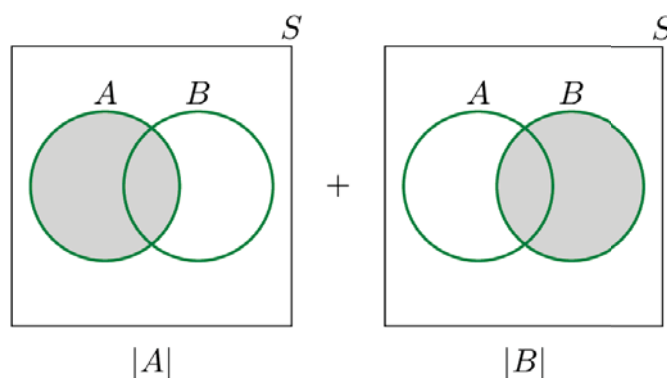
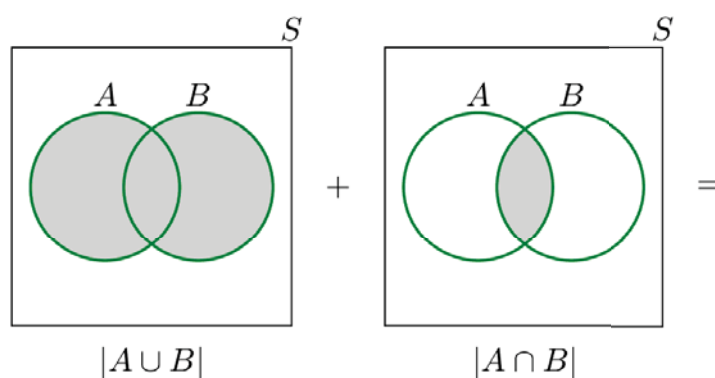
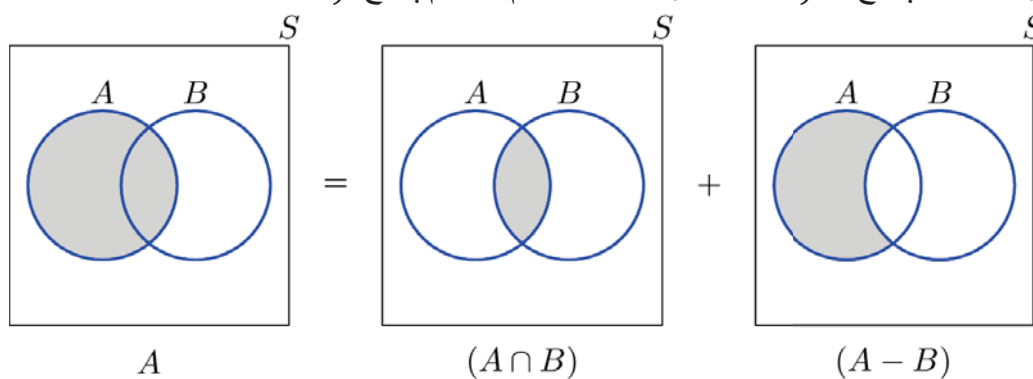
$$a) \quad A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

اگر A و B مجموعه های کران دار باشند ، پس اتحاد زیر را داریم.

$$b) \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

پاسخ

تصاویر ردیف اول پاسخ $a)$ است و ردیف های دوم و سوم پاسخ $b)$ است.



۳ - فرض کنید $S = \{1, 2, 3\}$ باشد. تمام پارش یا افراز **Partition** S را بنویسید.
پاد آوری: پارش و یا افراز S یک کولکسیون مجموعه های نا تهی است که از هم جدا هستند و اجتماع آنها مجموعه S است.

پاسخ

- ۱) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\};$
- ۲) $\{\{1, 2\}, \{3\}\};$
- ۳) $\{\{1, 3\}, \{2\}\};$
- ۴) $\{\{2, 3\}, \{1\}\};$
- ۵) $\{\{1, 2, 3\}\}.$

۴ - مشخص کنید آیا مجموعه های زیر قابل شمارش هستند یا غیر قابل شمارش.

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -100 \leq x \leq 100\}$
- b) $B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\}$
- c) $C = (0, 0.1]$
- d) $D = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

پاسخ

مجموعه A قابل شمارش است، زیرا آن یک زیر مجموعه از یک مجموعه قابل شمارش $\mathbb{Q}$ است.
 مجموعه B قابل شمارش است، زیرا آن ضرب دکارتی دو مجموعه قابل شمارش است، یعنی

$$B = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

مجموعه C غیر قابل شمارش است، زیرا این یک بازه است به شکل $(a, b]$ بطوری که $a < b$ است.

مجموعه D قابل شمارش است، زیرا آن یک ارتباط یک به یک با مجموعه اعداد طبیعی است. می توان عناصر مجموعه D را به صورت یک لیست نوشت.

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

۵ - در یک گروه ۱۰۰ نفره، ۷۲ نفر می توانند انگلیسی صحبت کنند و ۴۳ نفر می توانند فرانسه صحبت کنند. چند نفر می توانند فقط انگلیسی صحبت کنند؟ چند نفر می توانند فقط فرانسه صحبت کنند؟ چند نفر می توانند هم انگلیسی و هم فرانسه صحبت کنند؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه افرادی باشد که انگلیسی صحبت می کنند.

فرض می کنیم B مجموعه افرادی باشد که فرانسه صحبت می کنند.

پس $A - B$ مجموعه افرادی است که انگلیسی صحبت می کنند، اما فرانسه صحبت نمی کنند.

و $B - A$ مجموعه افرادی است که فرانسه صحبت می کنند، اما انگلیسی صحبت نمی کنند.

و $A \cap B$ مجموعه افرادی است که هم انگلیسی و هم فرانسه صحبت می کنند. پس داریم.

$$|A| = 72 \quad |B| = 43 \quad |A \cup B| = 100$$

لذا

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = ۷۲ + ۴۳ - ۱۰۰ = ۱۱۵ - ۱۰۰ = ۱۵$$

پس تعداد افرادی که هم انگلیسی و هم فرانسه صحبت می کنند ، ۱۵ است.
سپس داریم.

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$= ۷۲ - ۱۵ = ۵۷$$

یعنی ۵۷ نفر ، انگلیسی صحبت می کنند ، اما فرانسه صحبت نمی کنند.
همچنین داریم.

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|$$

$$= ۴۳ - ۱۵ = ۲۸$$

یعنی ۲۸ نفر فرانسه صحبت می کنند ، اما انگلیسی صحبت نمی کنند.
در نهایت نتیجه می شود که ۵۷ نفر فقط انگلیسی صحبت می کنند و ۲۸ نفر فقط فرانسه صحبت می کنند.

۶ - در مسابقات ورزشی یک مدرسه ، ۳۶ نفر در والیبال ، ۱۲ نفر در بسکتبال ، ۱۸ نفر در فوتبال مدال بدست آوردند. اگر این مدال ها به ۴۵ رسید و فقط ۴ نفر در هر سه رشته مدال بدست آوردند ، چند نفر دقیقاً در دو رشته مدال بدست آوردند؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموعه افرادی باشد که در والیبال ، مدال بدست آوردند.
فرض می کنیم B مجموعه افرادی باشد که در بسکتبال ، مدال بدست آوردند.
فرض می کنیم C مجموعه افرادی باشد که در فوتبال ، مدال بدست آوردند.
پس داریم.

$$|A| = ۳۶ \quad |B| = ۱۲ \quad |C| = ۱۸$$

$$|A \cup B \cup C| = ۴۵ \quad |A \cap B \cap C| = ۴$$

می دانیم که تعداد افرادی که دقیقاً به دو مجموعه از سه مجموعه A, B, C تعلق دارند به صورت زیر است.

$$= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - ۳|A \cap B \cap C|$$

$$= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - ۳ \times ۴ \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

پس

$$|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cup B \cup C|$$

لذا شماره (۱) عدد لازم را بدست می وارد. یعنی تعداد افرادی که دقیقاً در دو رشته مدال بدست آوردند.

$$\begin{aligned}
 |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3 \times 4 \\
 &= |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cup B \cup C| - 12 \\
 &= 36 + 12 + 18 + 4 - 45 - 12 \\
 &= 70 - 57 = 13
 \end{aligned}$$

یعنی ۱۳ نفر دقیقاً در دو رشته مدال بدست آوردند.

۷ - اگر داشته باشیم.

$$|A - B| = 18 \quad |A \cup B| = 70 \quad |A \cap B| = 25$$

مطلوب است. $|B|$
پاسخ

$$\begin{aligned}
 |A \cup B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| \\
 70 &= 18 + 25 + |B - A| \\
 70 &= 43 + |B - A| \\
 |B - A| &= 70 - 43 = 27
 \end{aligned}$$

پس داریم.

$$|B| = |A \cap B| + |B - A| = 25 + 27 = 52$$

۸ - قانون دو مورگان **De Morgan's Law** را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{یا} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

پاسخ

اثبات حالت اول یعنی $(A \cup B)' = A' \cap B'$

فرض می کنیم A مجموعه اعداد طبیعی کمتر یا مساوی ۱۰ باشد.

و B مجموعه اعداد زوج کمتر یا مساوی ۱۰ باشد.

پس داریم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{و} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(A \cup B)' = \emptyset \quad (1)$$

$$A' = \emptyset \quad B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A' \cap B' = \emptyset \quad (2)$$

پس بر اساس فرمول های (۱) و (۲) داریم.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

اثبات حالت دوم ، یعنی $(A \cap B)' = A' \cup B'$

فرض می کنیم A و B همان مجموعه های حالت اول باشند. پس داریم.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \\ (A \cap B)' &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad (3) \\ A' &= \emptyset \\ B' &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ A' \cup B' &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad (4) \end{aligned}$$

پس بر اساس فرمول های (۳) و (۴) داریم.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

اثبات از طریق دیگر.

یاد آوری گفتیم $A^C = A' = \sim A = \overline{A}$ است و همه به معنی متمم A است.

اثبات حالت اول

فرض می کنیم $x \in (A \cup B)^C$ باشد. پس $x \notin A \cup B$ است. پس $x \notin A$ و $x \notin B$ یعنی

$$x \in A^C \cap B^C \quad \text{لذا} \quad (A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$$

حال فرض می کنیم $x \in A^C \cap B^C$ باشد، پس $x \in A^C$ و $x \in B^C$ است. پس $x \notin A$ و $x \notin B$ یعنی

$$x \notin A \cap B \quad \text{لذا} \quad x \in (A \cap B)^C \quad \text{و لذا} \quad A^C \cap B^C \subseteq (A \cap B)^C \quad \text{است.}$$

چون $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$ و $(A \cup B)^C \supseteq A^C \cap B^C$ است، نتیجه می گیریم

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

اثبات حالت دوم

فرض می کنیم $x \in (A \cap B)^C$ باشد. پس $x \notin A \cap B$ پس $x \notin A$ و $x \notin B$ و لذا $x \in A^C$

یا $x \in B^C$ است. یعنی $x \in A^C \cup B^C$ است. پس $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$ است.

حالا فرض می کنیم $x \in A^C \cup B^C$ باشد. پس $x \in A^C$ است یا $x \in B^C$

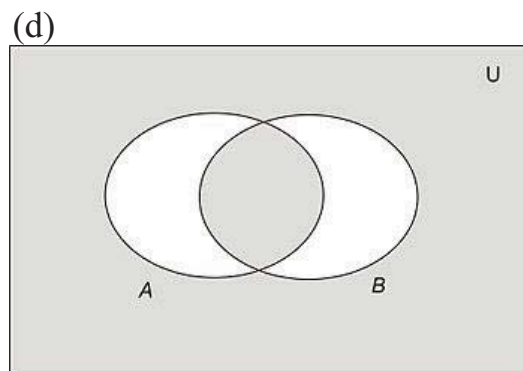
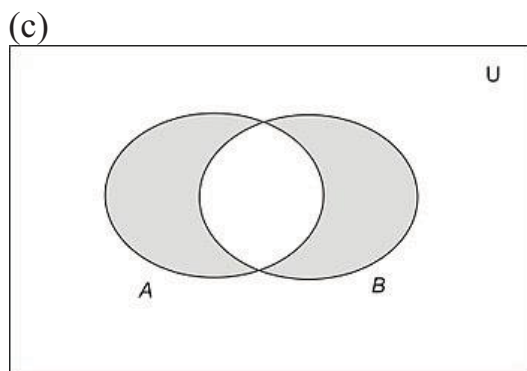
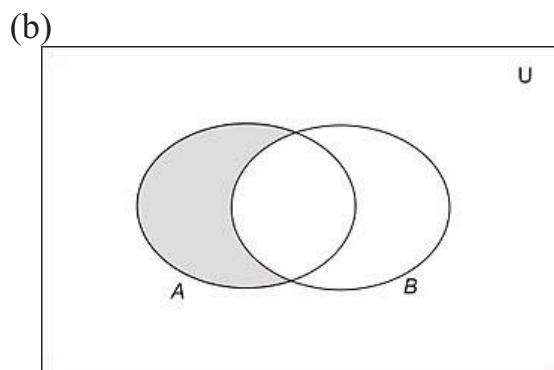
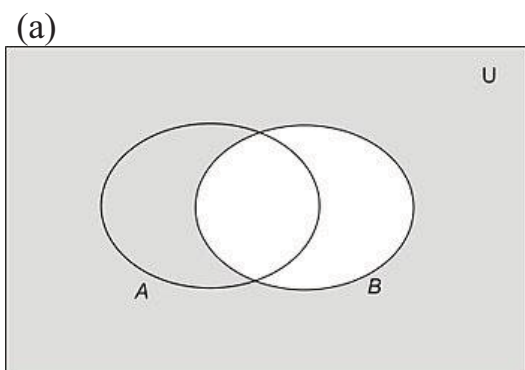
و در نتیجه $x \notin A$ و $x \notin B$ است. یعنی $x \notin A \cap B$ پس $x \in (A \cap B)^C$

و لذا داریم $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$ است. چون $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$ است

و چون $(A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^C$ است، نتیجه می گیریم.

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

۹ - نمودار های زیر را نام ببرید. مثلا بگویید $A \cap B$ یا $A \cup B$ و غیره



پاسخ

(a) $A \cup B'$ (b) $A \cap B'$ (c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cup B'$

۱۰ - سؤال های زیر از ۱۰۰ دانش آموز پرسیده شد.

الف - آیا شما تلفن هوشمند دارید؟

ب - آیا شما کامپیوتر دارید؟

ج - آیا شما تلفن هوشمند و کامپیوتر دارید؟

نتیجه به صورت زیر بود.

	آری	خیر	مجموع
تلفن هوشمند	۷۰	۳۰	۱۰۰
کامپیوتر	۵۰	۵۰	۱۰۰
هر دو	۴۰	۶۰	۱۰۰

حالا به سئوالات زیر پاسخ دهید.

- الف - چند دانش آموز تلفن هوشمند دارند اما کامپیوتر ندارند؟
 ب - چند دانش آموز کامپیوتر دارند اما تلفن هوشمند ندارند؟
 ج - چند دانش آموز تلفن هوشمند یا کامپیوتر دارند؟
 د - چند دانش آموز نه تلفن هوشمند و نه کامپیوتر دارند؟
 ه - چند دانش آموز تلفن هوشمند ندارند؟

پاسخ

فرض می کنیم A مجموع دانش آموزانی باشد که تلفن هوشمند دارند. پس $|A| = ۷۰$
 و B مجموع دانش آموزانی باشد که کامپیوتر دارند. پس $|B| = ۵۰$
 و بر اساس اطلاعات جدول داریم. $|A \cap B| = ۴۰$ و $|S| = ۱۰۰$
 الف

$$| \text{فقط تلفن هوشمند دارند} | = |A| - |A \cap B| = ۷۰ - ۴۰ = ۳۰$$

ب

$$| \text{فقط کامپیوتر دارند} | = |B| - |A \cap B| = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰$$

ج

$$| \text{کامپیوتر یا تلفن هوشمند دارند} | \\ = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۷۰ + ۵۰ - ۴۰ = ۱۲۰ - ۴۰ = ۸۰$$

د

$$| \text{نه تلفن دارند نه کامپیوتر} | = | \overline{A \cap B} | = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰$$

ه

$$| \text{تلفن هوشمند ندارند} | = | \overline{A} | = |S| - |A| = ۱۰۰ - ۷۰ = ۳۰$$

۱۱ - در یک همه پرسی از دانشجویان یک دانشگاه ، ۶۴ دانشجو درس ریاضیات انتخاب کرده بودند ،
 ۹۴ دانشجو درس شیمی انتخاب کرده بودند ، ۵۸ دانشجو درس فیزیک انتخاب کرده بودند ، ۲۸
 دانشجو دروس ریاضیات و فیزیک انتخاب کرده بودند ، ۲۶ دانشجو دروس ریاضیات و شیمی انتخاب
 کرده بودند ، ۲۲ دانشجو دروس شیمی و فیزیک انتخاب کرده بودند ، و ۱۴ دانشجو هر سه درس را
 انتخاب کرده بودند. معین کنید چند دانشجو فقط یک درس انتخاب کرده بودند.

پاسخ

فرض می کنیم M مجموعه دانشجویانی باشد که ریاضیات انتخاب کرده اند.
 فرض می کنیم C مجموعه دانشجویانی باشد که شیمی انتخاب کرده اند.
 فرض می کنیم P مجموعه دانشجویانی باشد که فیزیک انتخاب کرده اند.

ریاضیات : Mathematics

شیمی : Chemistry

فیزیک : Physics

بر اساس اطلاعات داده شده داریم.

$$\begin{aligned} |M| &= 64, & |C| &= 94, & |P| &= 58 \\ |M \cap C| &= 28, & |M \cap P| &= 26, & |C \cap P| &= 22 \\ |M \cap C \cap P| &= 14 \end{aligned}$$

بر اساس اطلاعات بالا، تعداد دانشجویانی که فقط ریاضیات انتخاب کرده اند به صورت زیر بدست می آوریم.

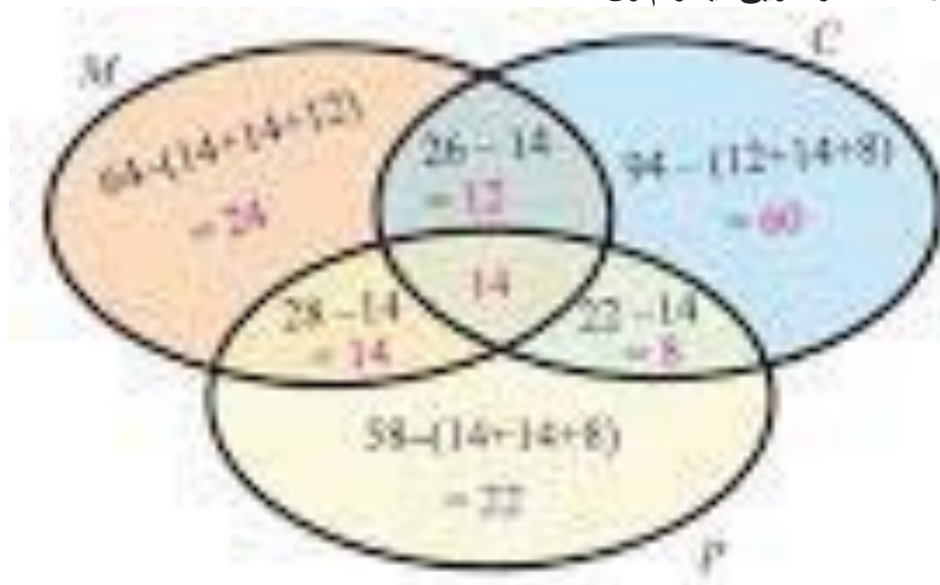
$$\begin{aligned} |\text{فقط ریاضیات انتخاب کرده اند}| &= |M| - [|M \cap P| + |M \cap C| - |M \cap C \cap P|] \\ &= 64 - [26 + 28 - 14] = 64 - 40 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\text{فقط شیمی انتخاب کرده اند}| &= |C| - [|C \cap M| + |C \cap P| - |M \cap C \cap P|] \\ &= 94 - [28 + 22 - 14] = 94 - 36 = 58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\text{فقط فیزیک انتخاب کرده اند}| &= |P| - [|P \cap M| + |P \cap C| - |M \cap C \cap P|] \\ &= 58 - [26 + 22 - 14] = 58 - 34 = 24 \end{aligned}$$

$$|\text{فقط یک درس انتخاب کرده اند}| = 24 + 58 + 22 = 104$$

روش دیگر حل مساله از طریق دیاگرام ون



بر اساس دیاگرام بالا داریم.

$$|\text{فقط ریاضیات انتخاب کرده اند}| = 24$$

$$\begin{aligned}
 | \text{فقط شیمی انتخاب کرده اند} | &= ۶۰ \\
 | \text{فقط فیزیک انتخاب کرده اند} | &= ۲۲ \\
 | \text{فقط یک درس انتخاب کرده اند} | &= ۲۴ + ۶۰ + ۲۲ = ۱۰۶
 \end{aligned}$$

۱۲ - در یک دانشکده ۶۰ دانشجو در شیمی ثبت نام کرد. ۴۰ دانشجو در فیزیک، ۳۰ دانشجو در بیولوژی، ۱۵ دانشجو در شیمی و فیزیک، ۱۰ دانشجو در فیزیک و بیولوژی، ۵ دانشجو در بیولوژی و شیمی. هیچ دانشجویی در هر سه رشته ثبت نام نکردند. محاسبه کنید چند دانشجو حد اقل در یکی از این رشته ها ثبت نام کردند.

پاسخ

فرض می کنیم C, P, B به ترتیب، نمایش دروس شیمی، فیزیک و بیولوژی باشد.

شیمی : Chemistry

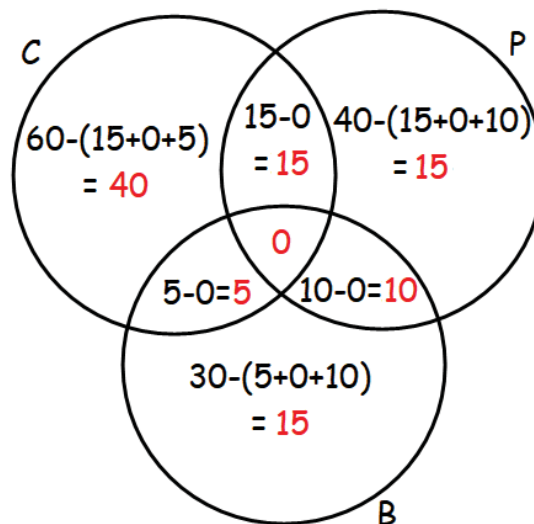
فیزیک : Physics

بیولوژی : Biology

پس داریم.

$$\begin{aligned}
 |C| &= ۶۰, \quad |P| = ۴۰, \quad |B| = ۳۰ \\
 |C \cap P| &= ۱۵, \quad |P \cap B| = ۱۰, \quad |B \cap C| = ۵ \\
 |C \cap P \cap B| &= ۰
 \end{aligned}$$

بر اساس اطلاعات بالا، دیاگرام ون به صورت زیر است.



پس بر اساس دیاگرام بالا تعداد دانشجویانی که حد اقل در یک درس ثبت نام کرده اند بصورت زیر بدست می آید.

$$۴۰ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۵ + ۵ + ۱۰ + ۰ = ۱۰۰$$

۱۳ - در یک شهر در هندوستان ، ۸۵٪ از مردم به زبان تامیل صحبت می کنند ، ۴۰٪ به زبان انگلیسی صحبت می کنند، و ۲۰٪ هم به زبان هندو صحبت می کنند. همچنین ۳۲٪ به زبانهای تامیل و انگلیسی صحبت می کنند ، ۱۳٪ به زبان های تامیل و هندو صحبت می کنند ، و ۱۰٪ به زبان های انگلیسی و هندو صحبت می کنند. مطلوب است درصد افرادی که به هر سه زبان تکلم می کنند.

پاسخ

فرض می کنیم T, E, H به ترتیب نمایش افرادی باشد که به زبان تامیل ، انگلیسی و هندو صحبت می کنند. پس داریم.

در صد اشخاصی که به زبان تامیل صحبت می کنند $|T| = ۸۵$ است.

در صد اشخاصی که به زبان انگلیسی صحبت می کنند $|E| = ۴۰$ است.

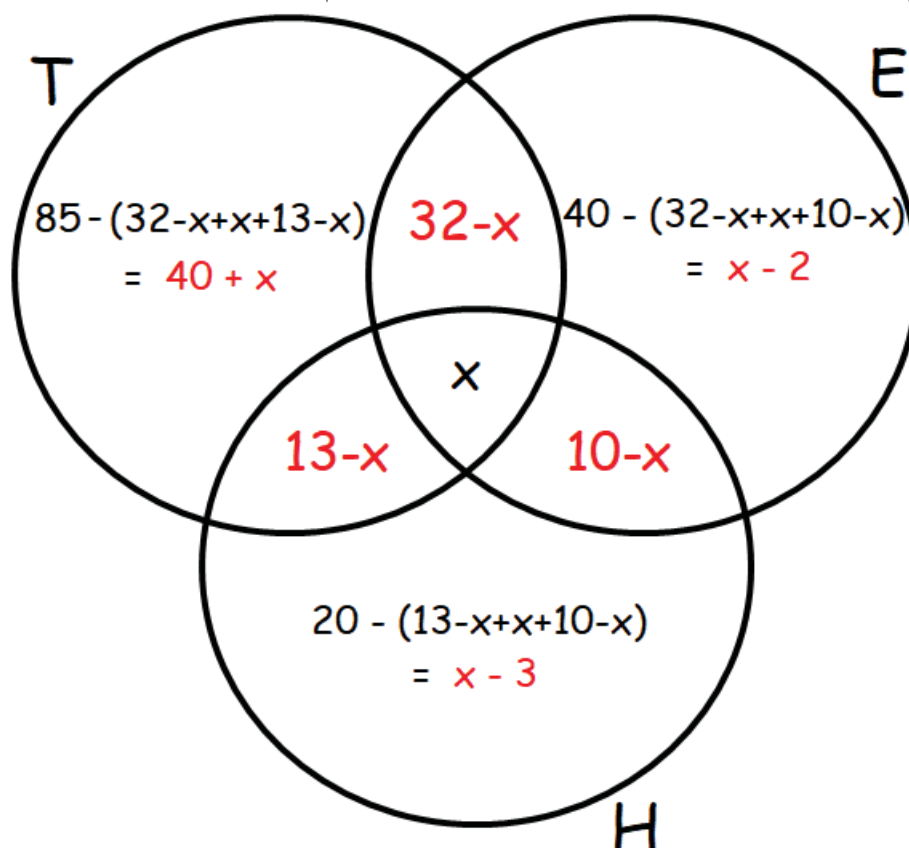
در صد اشخاصی که به زبان هندو صحبت می کنند $|H| = ۲۰$ است.

در صد اشخاصی که به زبان انگلیسی و تامیل صحبت می کنند $|T \cap E| = ۳۲$ است.

در صد اشخاصی که به زبان تامیل و هندو صحبت می کنند $|T \cap H| = ۱۳$ است.

در صد اشخاصی که به زبان انگلیسی و هندو صحبت می کنند $|E \cap H| = ۱۰$ است.

فرض می کنیم x در صد اشخاصی باشد که به هر سه زبان تکلم می کنند.



بر اساس دیاگرام بالا داریم.

$$۱۰۰ = ۴۰ + x + ۳۲ - x + x + ۱۳ - x + ۱۰ - x - ۲ + x - ۳ + x$$

K

$$100 = 40 + 32 + 13 + 10 - 2 - 3 + x$$

$$100 = 95 - 5 + x$$

$$x = 100 - 90$$

$$x = 10\%$$

پس ۱۰٪ از افراد به هر سه زبان تکلم می کنند.

۱۴ - در یک کنفرانس ۱۰۰ نفره ۲۹ زن هندی و ۲۳ مرد هندی شرکت دارند. بین این هندی ها ۴ نفر، دکتر هستند و ۲۴ نفر یا مرد هستند و یا دکتر هستند. هیچ دکتر خارجی هم در این کنفرانس نیست. تعداد زنان دکتر در این کنفرانس را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم M و D به ترتیب مجموعه مردان هندی و دکتر ها باشد. بر اساس اطلاعات داده شده داریم.

$$|M| = 23, |D| = 4, |M \cup D| = 42$$

پس داریم.

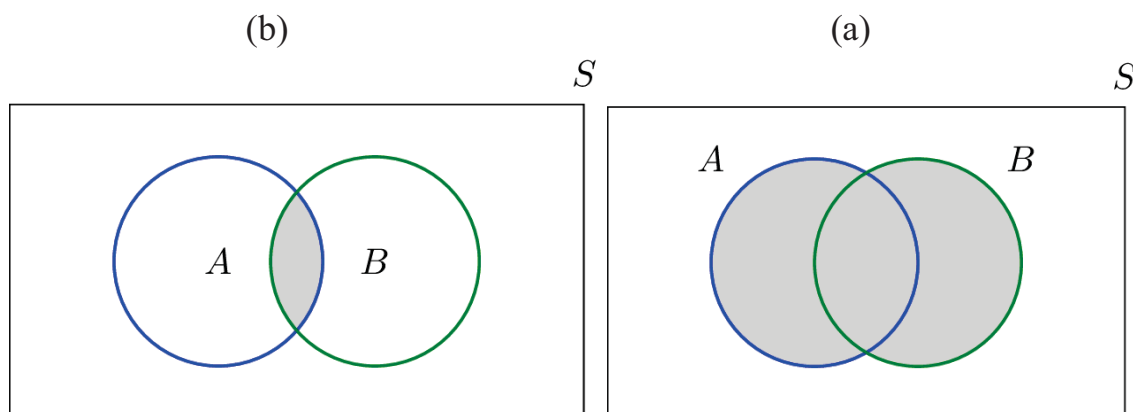
$$|M \cup D| = |M| + |D| - |M \cap D|$$

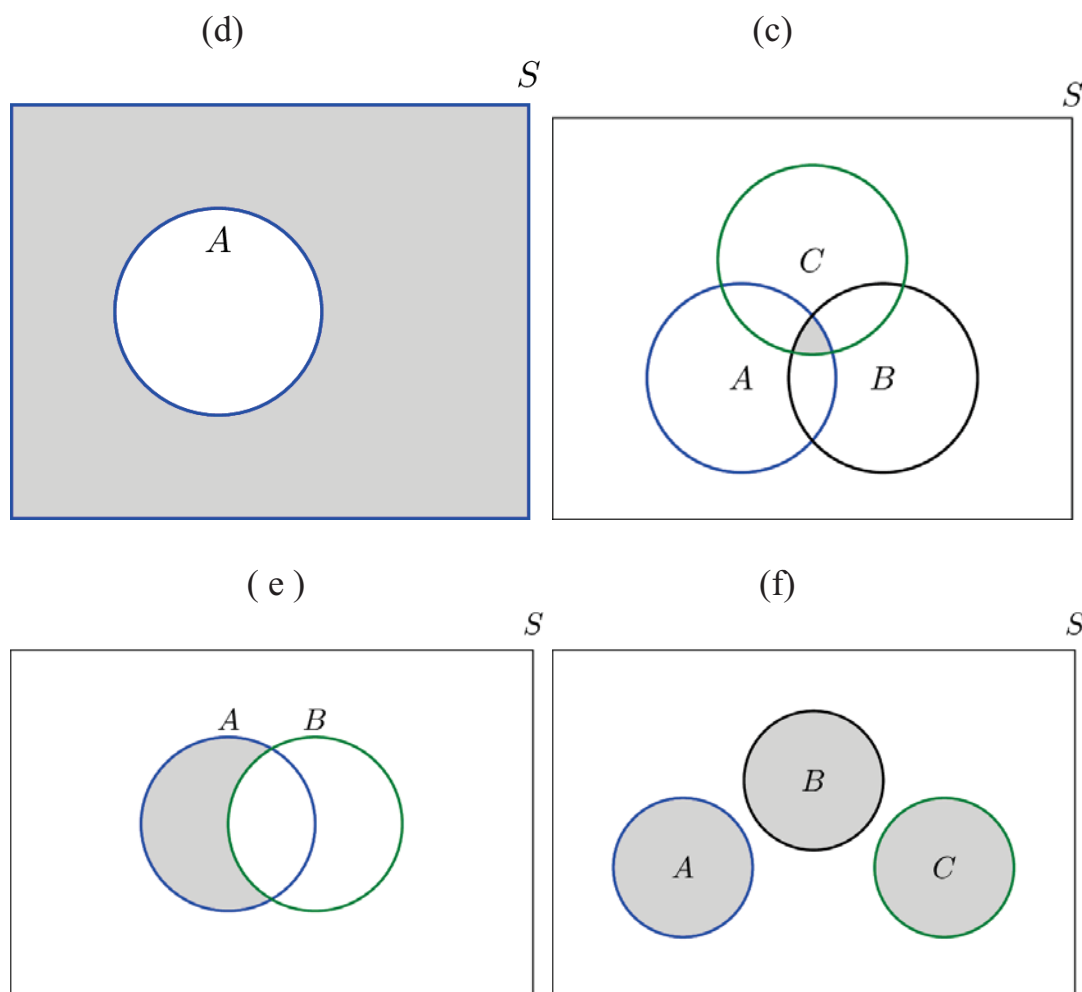
$$24 = 23 + 4 - |M \cap D|$$

$$|M \cap D| = 3$$

پس تعداد سه نفر دکتر و مرد هستند، به عبارت دیگر سه دکتر مرد در این کنفرانس شرکت دارند. و یا سه نفر از چهار نفر دکتر، مرد هستند. پس تعداد زنان دکتر شرکت کننده در این کنفرانس، یک نفر است.

۱۵ - با توجه به دیاگرام ون، نام مجموعه قسمت سایه دار را بنویسید.





پاسخ

- (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap B \cap C$ (d) $\bar{A} = A^c$ (e) $A - B$
 (f) A, B, C ناسازگار هستند

۱۶ - در یک مهمانی

- ۵ پیراهن سفید پوشیده اند و ۸ نفر پیراهن قرمز.
 ۴ نفر کفش سیاه و پیراهن سفید پوشیده اند.
 ۳ نفر کفش سیاه و پیراهن قرمز پوشیده اند.
 مجموع اشخاص با پیراهن سفید یا قرمز یا کفش سیاه ۲۱ نفر است.
 چند نفر کفش سیاه پوشیده اند؟

پاسخ

فرض می کنیم W, R, B به ترتیب تعداد افراد با پیراهن سفید ، پیراهن قرمز و کفش سیاه باشد.

سفید : White

قرمز : Red

سیاه : Black

پس خلاصه اطلاعاتی که داریم ، به صورت زیر است.

$$|W| = ۱۰, |R| = ۸, |W \cap B| = ۴, |R \cap B| = ۳, |W \cup B \cup R| = ۲۱$$

همچنین ، منطقی است اگر فرض کنیم W و R دو بدو ناسازگار هستند. پس $|W \cap R| = 0$

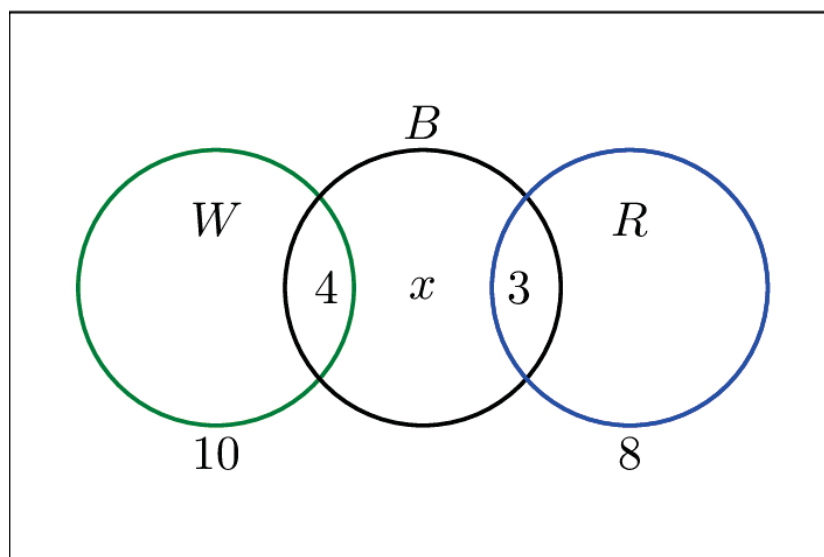
$$\begin{aligned} |W \cup R \cup B| &= ۲۱ \\ &= |W| + |R| + |B| - |W \cap R| - |W \cap B| - |R \cap B| + |W \cap R \cap B| \\ &= ۱۰ + ۸ + |B| - 0 - ۴ - ۳ + 0 \end{aligned}$$

پس

$$|B| = ۱۰$$

طریق دیگر بوسیله دیاگرام ون است.

S



$$21 = 10 + 8 + x \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow |B| = 4 + x + 3 = 10$$

