



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بنام خدا
ریاضیات گسسته آنیسا
Anisa Discrete Mathematics

By
Richard Hammack
Virginia Commonwealth University

تألیف و ترجمه
انوشیروان صراف
دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز
(سال های ۱۳۴۲-۱۳۶۵)
مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری
(سال های ۱۹۹۶-۲۰۰۹)
آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

بنام خدا

فصل اول

مقدمه

Introduction

بخش اول

ریاضیات گسسته و کار برد آن

Discrete Mathematics and its applications

۱.۱ ریاضیات گسسته شاخه مهمی از ریاضیات است که با مقادیر مجزا و قابل شمارش سرو کار دارد. مانند اعداد صحیح، گراف ها و ترکیبیات Combinations بر خلاف حسابان، ریاضیات گسسته با عناصر قابل شمارش و قابل طبقه بندی سرو کار دارد. در حقیقت ریاضیات گسسته اولین رشته ریاضی است که انسان بسط داد. شمارش و حساب، بخشی از ریاضیات گسسته هستند.

موضوع ریاضیات گسسته عبارت است از اشیایی که متمایز، قابل شمارش و جدا از یکدیگر هستند. عناصر گسسته را می توان شمرد، مرتب کرد، آنها را در مجموعه ها جا داد و به صورت کسر نوشت.

ریاضیات گسسته شامل موضوعات زیر است.

جایگشت ها، ترکیبیات، مجموعه ها، احتمالات، گراف ها، آمار، و منطق

Permutations, Combinations, Sets, Probability, Graphs, Statistics, Logic

از زمانی که اسحق نیوتن کتاب معروف خود را بنام اصول ریاضی فلسفه طبیعی یا اصول Principles منتشر کرد، تاکید عمده ریاضیات کاربردی، بر روی ریاضیات پیوسته و بکار گیری روش های حسابان دیفرانسیل و انتگرال بوده است.

اما از اواخر نیمه دوم قرن بیستم، با شروع عصر کامپیوتر، ریاضیات گسسته مجددا مورد توجه قرار گرفت زیرا کار کرد کامپیوتر های دیجیتال از طریق مراحل جدا از هم است و اطلاعات را به صورت

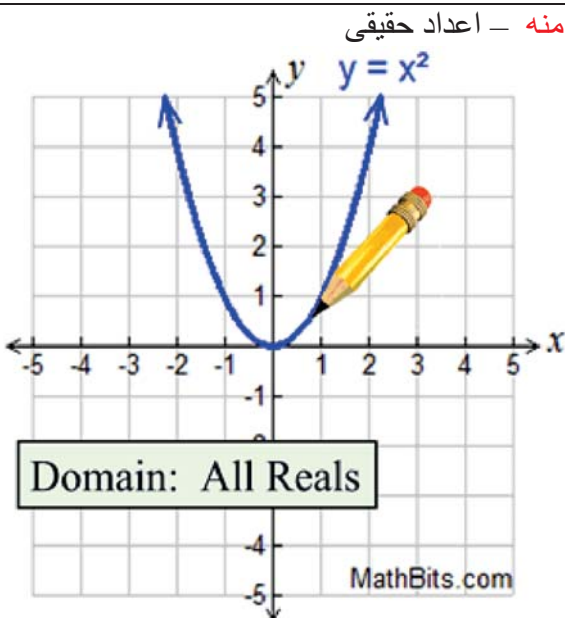
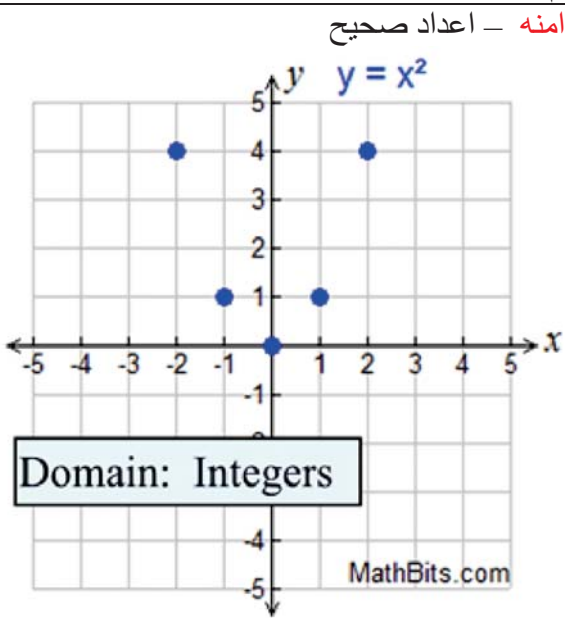
بیت های گسسته ذخیره می کنند. توجه: در زبان کامپیوتری یک بیت عبارت است از 0 و 1
مثلا 1000 شامل چهار بیت bit است و این چهار بیت را روی هم می گویند بایت bite

پس مفاهیم و تئوری های ریاضیات گسسته برای مطالعه و حل مسائل در زمینه علوم کامپیوتری بسیار مفید است.

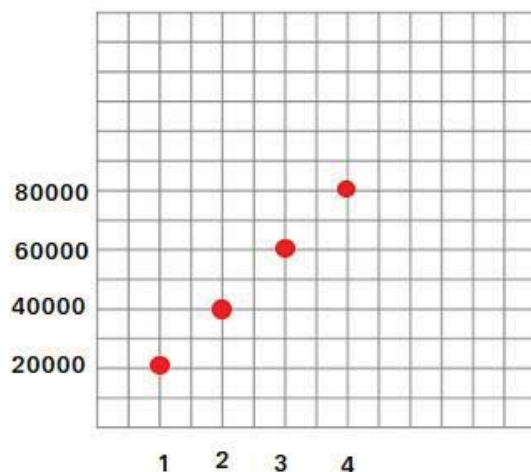
لذا می بینیم که مطالعه ریاضیات گسسته ، یکی از مهم ترین رشته ریاضیات در عصر حاضر است. در حقیقت می توان گفت تصور دنیای مدرن بدون ریاضیات گسسته غیر ممکن است. برای دستیابی به اصول علوم کامپیوتری ، لازم است که در مورد مفاهیم و مهارت های ریاضیات گسسته اطلاعات لازم را داشته باشیم.

ریاضیات گسسته عبارت است از مطالعه آن قسمت از ریاضیات که اساسا گسسته هستند ، نه پیوسته. بر خلاف اعداد حقیقی که بطور هموار تغییر می کنند ، مقادیر مورد مطالعه در ریاضیات گسسته بطور هموار تغییر نمی کنند ، بلکه مقادیری هستند مشخص و جدا از هم. مانند اعداد صحیح.

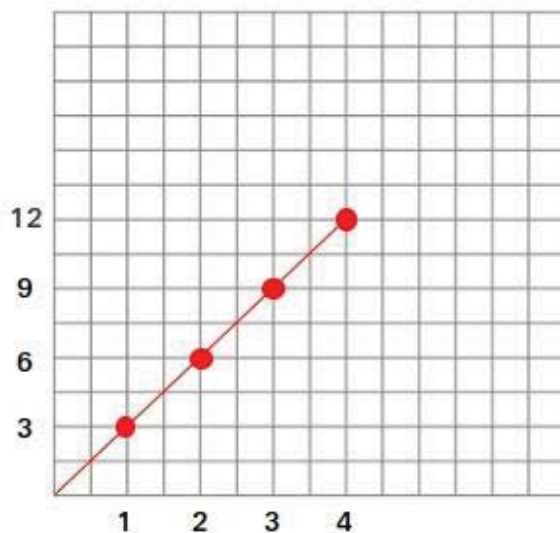
در جدول زیر تفاوت مفاهیم گسسته و پیوسته را نشان می دهیم.

پیوسته	گسسته
تعریف – مجموعه ای را پیوسته می گویند که مقادیر آن در یک بازه کران دار و یا بی کران می توانند هر مقداری به خود بگیرند.	تعریف – مجموعه ای را گسسته می گویند که شامل مقادیری باشد که مجزا و مشخص هستند. یعنی به یکدیگر متصل نباشند.
مثال – قد یک انسان. که می تواند در دامنه قد یک انسان باشد. مثلا می تواند یک متر یا یک متر و نیم و یا یک متر و هفتاد سانتی متر و غیره باشد.	مثال – تعداد دانش آموزان یک کلاس. یا تعداد سئوالات تست ریاضی
نکته – اطلاعات پیوسته معمولا احتیاج به وسیله اندازه گیری دارد. مثلا یک خط کش و یا یک میزان الحرارة و یا کیلومتر شمار.	نکته – اطلاعات گسسته شمرده می شود. و معمولا می گوئیم تعداد
تابع – نمودار یک تابع پیوسته شامل نقاط به هم پیوسته است.	تابع – نمودار یک تابع گسسته شامل نقاط مجزا از هم است.
دامنه – اعداد حقیقی	دامنه – اعداد صحیح
	

در تصویر زیر قیمت تولید یک ، دو ، سه و چهار اتومبیل را نشان می دهد. مسلم است که تولید یک و نیم اتومبیل معنی ندارد. کار خانه یک و نیم اتومبیل تولید نمی کند.



در تصویر زیر قیمت یک ، دو ، سه و چهار کیلو از یک نوع کالا را نشان می دهد. واضح است که می توانیم یک و نیم کیلو و یا فقط نیم کیلو از آن کالا بخریم. اینجا دامنه کلیه اعداد حقیقی است.



۲.۱ کاربرد های ریاضیات گسسته را می توان مطابق زیر بر شمرد.
 کامپیوتر ها نرم افزار را بکار می اندازند و فایل ها را ذخیره می کنند. نرم افزار ها و فایل ها هر دو به صورت زنجیره های بسیار بزرگی از 0 ها و 1 ها ذخیره می شوند. اعداد دو تائی خود ، ریاضیات گسسته هستند.
 شبکه های کامپیوتری Networks اساسا ترکیبات گسسته هستند. جستجو گر های اینترنتی توسط کابل های طویل با یکدیگر متصل می شوند. اشخاص توسط شبکه های اجتماعی با هم ارتباط بر قرار می کنند.

وب گردی Web Searches

نقشه های گوگل Google Maps

زمان بندی Scheduling مثلا برنامه ریزی برای پرستاران در شیفت های مختلف.

رمز نگاری Cryptography

کد تلفن Area Code

این لیست ادامه دارد. کلیه کار هایی که با تلفن های هوشمند ، تبلت ها ، و کامپیوتر ها انجام می دهیم ، همه کار برد های ریاضیات گسسته هستند.

ریاضیات گسسته مطالعه تکنیک ها ، طرح ها و شیوه هایی است که در زمینه ها و دانش های کاربردی مانند علوم کامپیوتری و تکنولوژی اطلاعات ، ضروری هستند.
 برای درک دامنه فعالیت ریاضیات گسسته ، لازم است مفهوم سیستم های پیوسته Analog و گسسته یعنی Discrete را بفهمیم و تفاوت آنها را تشخیص دهیم.

بخش دوم

سیستم های گسسته

Discrete Systems

گفتیم ریاضیات گسسته مطالعه تکنیک ها ، طرح ها و شیوه هایی است که در زمینه ها و دانش های کاربردی مانند علوم کامپیوتری و تکنولوژی اطلاعات ، ضروری هستند. برای درک دامنه فعالیت ریاضیات گسسته ، لازم است مفهوم سیستم های پیوسته Analog و گسسته یعنی Discrete را بفهمیم و تفاوت آنها را تشخیص دهیم.

۱.۱ - سیستم های پیوسته و گسسته Analog Versus Discrete Systems
سیستم های پیوسته شامل عناصر ، اعمال و ساختار های هموار ، پیوسته ، و ناگسسته هستند. در صورتی که سیستم های گسسته شامل اجزای جدا و یا حالت های کاملاً مجزا از هم هستند. برای مثال به تفاوت بین ساعت های قدیمی و ساعت های دیجیتال و کامپیوتری توجه کنید. در تصویر ۱۰۱۰۱ سمت راست ، ساعت دیجیتال است و سمت چپ ساعت قدیمی را ملاحظه می کنید.

تصویر ۱.۱.۱



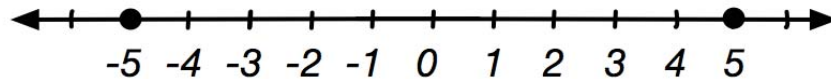
عقربه های ساعت قدیمی، بطور روان و پیوسته حرکت می کنند. به عبارت دیگر سیستم پیوسته یا آنالوگ دارد. در طول یک دقیقه بین 10:07 و 10:08 عقربه دقیقه شمار، روان ، پیوسته و ناگسسته لحظه های بین این دو زمان را طی می کند. در طول یک ساعت ، عقربه دقیقه شمار بطور یکنواخت و پیوسته لحظه های بی شماری را نشان می دهد. این یک سیستم پیوسته و یا آنالوگ است. اما یک ساعت دیجیتال از 12:34 به 12:35 می جهد. در طول یک ساعت فقط 60 مرتبه تغییر می کند. این یک سیستم گسسته است. دیجیتال Digital یعنی عددی در فصل های آینده ، خواهیم دید که چرا به این نوع ساعت و یا کامپیوتر ، و یا تلفن های هوشمند و یا دور بین های عکاسی جدید و تلویزیون های جدید ، می گویند دستگاه های دیجیتال.

حسابان بر اساس اعداد حقیقی است. اعداد حقیقی پیوسته و آنالوگ هستند. اعداد حقیقی را به صورت یک خط بی نهایت طولی ، پیوسته و ناگسسته تصور می کنیم. شما می توانید انگشت خود را روی صفر بگذارید و روان و پیوسته به طرف راست حرکت کنید تا مثلاً به عدد ۳ برسید و متوقف شوید. با این

کار انگشت شما از بی نهایت اعداد عبور کرده است. زیرا بین عدد یک و دو ، بی نهایت عدد گویا وجود دارد. این یک سیستم پیوسته یا آنالوگ است. تصویر ۱.۱.۰۲

تصویر ۱.۱.۰۲

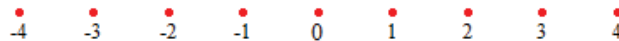
سیستم اعداد حقیقی ، سیستم آنالوگ



ریاضیات گسسته بیشتر با سیستم اعداد صحیح $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$ کار می کند. عناصر این سیستم گسسته هستند. اگر انگشت خور را روی صفر بگذارید، و بطرف راست حرکت دهید، از صفر به یک ، به دو ، به سه می جهید. تصویر ۱.۱.۰۳

تصویر ۱.۱.۰۳

سیستم اعداد صحیح ، سیستم گسسته



اما، ریاضیات گسسته تنها با اعداد صحیح سر و کار ندارد ، بلکه با ترکیباتی که دارای قسمت های جدا از هم هستند کار می کنند.

می توانید چنین تصور کنید که ریاضیات گسسته با عناصری کار می کند که شما می توانید آنها را از طریق صفحه کلید کامپیوتر وارد کنید.

مثلا اعداد گویا هم یک سیستم گسسته هستند ، زیرا برای وارد کردن مثلا عدد $\frac{235}{749}$ - شما اول نماد - را تایپ می کنید سپس به ترتیب اعداد $2, 3, 5$ را تایپ می کنید ، سپس نماد کسر ، در نهایت اعداد $7, 4, 9$

اما ، اعداد حقیقی ، سیستم گسسته نیستند زیرا مثلا

$$\pi = 3.1415926539\dots$$

را نمی توان تایپ کرد ، زیرا شامل بی نهایت ارقام اعشاری است.

نمونه دیگر سیستم گسسته ، نمودار یا Graph است. اما نه آن نوع نمودار ها که در حسابان داریم. در حسابان ، نمودار ، وصف تصویری یک تابع است که روی محور های مختصات رسم می شود.

در ریاضیات گسسته منظور از نمودار ، یک شبکه از گره ها است مانند تصویر ۱.۱.۰۴

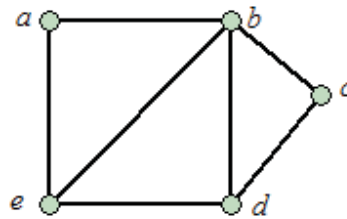


Figure 1.1.4

در تصویر ۱۰۱۰۴، دایره های کوچک را گره یا راس Node می نامند. و تمام تصویر را شبکه گره ها می گویند. Network of Nodes. برای این که نمودار های جبری و حسابان با نمودار در ریاضیات گسسته اشتباه نشود، ما در این کتاب از کلمه **گراف** استفاده می کنیم.

در تصویر ۱۰۱۰۴ گره ها با مجموعه گسسته $\{a, b, c, d, e\}$ نشان داده شده و ارتباط آنها که لبه یا یال Edge نامیده می شوند، با مجموعه گسسته $\{ab, bc, cd, de, ea, eb, bd\}$ مشخص شده اند. پس این گراف را با تایپ اطلاعات زیر مشخص می کنیم.

$$(\{a, b, c, d\}, \{ab, bc, cd, de, ea, eb, bd\})$$

تئوری گراف ها، یک بخش مهمی در ریاضیات گسسته است. گراف ها، کار برد های وسیعی دارند. مثلا، اینترنت Internet یک گراف بسیار بسیار بزرگی است که گره های آن، همان سایت ها یا صفحه های شبکه Web Pages هستند و لبه های آن، ارتباط بین آنها است. هنگامی که شما در گوگل سرچ یا جستجو می کنید، در حقیقت از همین بخش ریاضیات گسسته یعنی گراف ها استفاده می کنید. فراموش نکنید که نمودار در ریاضیات گسسته با نمودار در جبر و حسابان فرق اساسی دارد. این حقیقت که یک گراف را می توان بوسیله مجموعه ای از راس ها و اضلاع نشان داد، نشانه اهمیت مجموعه است، که در فصل دوم به آنها خواهیم پرداخت.

۱.۲ - سیستم اعداد دو تایی The Binary Number System

در زندگی روز مره، ما از سیستم اعداد پایه ۱۰ یا Base-10 استفاده می کنیم. این سیستم به سیستم اعداد هندی عربی Hindu-Arabic هم معروف است، همچنین به آن سیستم اعداد اعشاری هم گفته می شود. این سیستم، دارای ۱۰ نماد 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 است. این نمادها، مقادیر صفر تا ۹ را نشان می دهند. هیچ نمادی برای نشان دادن مقدار ده، وجود ندارد. بجای آن، از ترکیب یک و صفر استفاده می شود و نوشته می شود 10

بقیه اعداد صحیح به صورت زنجیره ای از نماد های 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 نمایش داده می شود.

$$10^0 = 1 \text{ فرض می شود}$$

مثلا

$$7406 = 7 * 10^3 + 4 * 10^2 + 0 * 10^1 + 6 * 10^0$$

$$= 7 * 1000 + 4 * 100 + 0 * 10 + 6 * 1$$

پس عدد هفت هزار چهار صد شش به صورت 7406 نوشته می شود ، با یک 7 در مکان هزار ، یک 4 در مکان صد ، یک 0 در مکان ده و یک 6 در مکان یک . عجیب نیست که ما ، سیستم پایه ده و یا اعداد اعشاری را بکار می برد . اساس این ایده ، به انسان های اولیه بر می گردد . انسان های اولیه برای شمارش اشیایی که داشتند ، از انگشتان دهگانه خود استفاده می کردند . اگر انسان هشت انگشت داشت ، شاید امروز اعداد بر پایه هشت داشتیم . به تدریج که تمدن پیشرفت کرد ، صفر و اعداد منفی هم اختراع شد . بد نیست بدانید که کلمه دیجیت *Digit* هم به معنی انگشت است و هم به معنی رقم و عدد . مثلاً می گویند عدد 235 دارای سه رقم یا سه دیجیت است .

سیستم اعداد پایه دو **base-2** و یا سیستم اعداد دو تائی **Binary Number** فقط دو رقم یا **Digit** بکار می برد 0 و 1 ، هیچ نمادی برای عدد دو در این سیستم وجود ندارد . بجای عدد دو از ترکیب 10 استفاده می شود . مانند سیستم پایه ۱۰ ، این جا هم $2^0 = 1$ فرض می شود . پس در سیستم اعداد دو تائی از صفر تا چهار به ترتیب زیر است .

$$0,1,10,11,100$$

مثلاً اگر بخواهیم عدد 10011 که در پایه ۲ است به یک عدد در پایه ۱۰ تبدیل کنیم ، بصورت زیر عمل می کنیم .

$$\begin{aligned} 10011 &= 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 \\ &= 1 * 16 + 0 * 8 + 0 * 4 + 1 * 2 + 1 * 1 = 19 \end{aligned}$$

برای این که نشان دهیم یک عدد در کدام پایه است ، پایه آن عدد را به صورت اندیس نشان می دهیم . پس اعداد بالا به صورت زیر می نویسیم .

$$10011_2 = 19_{10}$$

هنگام تبدیل اعداد پایه ۲ به پایه ۱۰ و بلعکس ، دانستن توان های مختلف ۲ به ما کمک می کند . در جدول ۱۰۱ توان های مختلف ۲ را ملاحظه می کنید .

جدول ۱۰۱

...	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
...	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

در جدول ۱۰۲ ، ستون سمت چپ ، اولین شانزده عدد پایه ۲ و در ستون سمت راست ، معادل آنها در پایه ۱۰ نشان داده شده است .

Decimal Number عدد پایه ۱۰

Binary Number عدد پایه ۲

جدول ۱.۲

binary number	powers of 2					decimal number	
	16	8	4	2	1		
0	=				0.1	=	0
1	=				1.1	=	1
10	=				1.2+0.1	=	2
11	=				1.2+1.1	=	3
100	=				1.4+0.2+0.1	=	4
101	=				1.4+0.2+1.1	=	5
110	=				1.4+1.2+0.1	=	6
111	=				1.4+1.2+1.1	=	7
1000	=				1.8+0.4+0.2+0.1	=	8
1001	=				1.8+0.4+0.2+1.1	=	9
1010	=				1.8+0.4+1.2+0.1	=	10
1011	=				1.8+0.4+1.2+1.1	=	11
1100	=				1.8+1.4+0.2+0.1	=	12
1101	=				1.8+1.4+0.2+1.1	=	13
1110	=				1.8+1.4+1.2+0.1	=	14
1111	=				1.8+1.4+1.2+1.1	=	15
10000	=				1.16+0.8+0.4+0.2+0.1	=	16

جدول ۱.۲ نشان می دهد، برای تبدیل یک عدد در پایه ۲ به یک عدد در پایه ۱۰، به ترتیب از چپ به راست، آن رقم را در عدد ۲ به توان مرتبه ای که آن رقم است ضرب کرده و بطرف راست حرکت کنید تا به آخرین رقم برسید. سپس آنها را با هم جمع کنید. مثلاً

$$\begin{aligned} 1110 &= 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 \\ &= 1 * 8 + 1 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 = 14 \end{aligned}$$

مثال ۱ - عدد 110101 که در پایه ۲ است به عدد در پایه ۱۰ تبدیل کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} 110101 &= 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 \\ &= 1 * 32 + 1 * 16 + 0 * 8 + 1 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 53 \end{aligned}$$

پس $110101_2 = 53_{10}$ است.

برای تبدیل پایه ۱۰ به پایه ۲ مراحل بالا را بر عکس می کنیم.

مثال ۲ - عدد 347 در پایه ۱۰ را به عدد در پایه ۲ تبدیل کنید.

پاسخ

برای این کار لازم است بدانیم چگونه عدد 347 مجموع توان های ۲ است. جدول شماره ۱.۱ نشان می دهد که بزرگ ترین توان ۲ کمتر از 347 عبارت است از $2^8 = 256$ و

$$347 = 256 + 91 = 2^8 + 91$$

حالا به جدول شماره ۱۰۱ توجه کنید، ملاحظه می کنید بزرگ ترین توان ۲ کمتر از ۹۱ عبارت است از $2^6 = 64$ و داریم $91 = 64 + 27 = 2^6 + 27$ پس

$$347 = 2^8 + 2^6 + 27$$

حالا داریم $27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$ پس داریم

$$347 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

توان های $2^7, 2^5, 2^2$ در تساوی بالا وجود ندارند، آنها را در صفر ضرب می کنیم و در مکان مناسب آنها وارد می کنیم. پس داریم.

$$347 = 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$$

پس داریم.

$$347_{10} = 101011011_2$$

در طول تاریخ، فرهنگ های مختلف، سیستم های مختلفی برای اعداد بکار برده اند. بابلی ها سیستم پایه 60 بکار می بردند و شصت نوع مختلف ارقام digits داشتند. شاید تقسیم هر ساعت به شصت دقیقه و تقسیم دقیقه به شصت ثانیه و تقسیم محیط دایره به 360 درجه از آن یادگار است.

سیستم اعداد پایه دو، اساس مدارهای کامپیوتر است. 0 برای ولتاژ صفر و 1 برای ولتاژ مثبت. به همین جهت می گوئیم کامپیوتر یکدستگاه دیجیتال است، زیرا اساس آن ارقام یا digits است.

چون سیستم اعداد دو تائی فقط دو رقم یا digit دارد، از این نظر برای نشان دادن حتی اعداد کوچک هم تعداد زیادی ارقام یا digit لازم است. در مثال 2 ملاحظه کردید که برای عدد 347 به 9 رقم یا digit احتیاج داشتیم. سیستم پایه 16 این مشکل را حل می کند. این سیستم به سیستم دو تائی نزدیک است، اما کمی پیچیده و غامض است.

۱.۳ - سیستم اعداد پایه شانزده The Hexadecimal Number System

سیستم اعداد پایه 16 بنام سیستم اعداد Hexadecimal موسوم هستند. این سیستم 16 نماد بکار می برد از جمله همان 10 نماد آشنا 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 برای صفر تا 9، به اضافه A, B, C, D, E, F

برای ده تا پانزده

جدول ۱.۳ سیستم اعداد پایه 16 را نشان می دهد. برای این که اعداد پایه 2، همگی دارای چهار رقم باشند، در سمت چپ تعداد لازم صفر اضافه کرده ایم تا همگی، چهار رقمی باشند. مثلا برای صفر در پایه 2، نوشته ایم 0000 برای 1 نوشته ایم 0001
Hexadecimal Number عدد پایه 16

جدول ۱.۳

decimal	binary	hexadecimal
---------	--------	-------------

0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

عدد ۱۶ در سیستم پایه ۱۶ با نماد 10 نشان داده می شود. توجه دارید که

$$16_{10} = 10_{16} = 10000_2$$

همان طور که توان های ۲ برای سیستم اعداد دو تایی اساسی است، توان های ۱۶ هم، برای سیستم اعداد پایه ۱۶ اساسی است. توان های شانزده برای فهم سیستم اعداد پایه ۱۶ لازم است. در جدول ۱.۴ تعدادی از آنها را ملاحظه می کنید.

جدول ۱.۴

...	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
...	1, 048, 576	65, 536	4096	256	16	1

می توانیم اعداد در سیستم های پایه ۱۰ و ۱۶ را به یکدیگر تبدیل کنیم، همانطور که در مورد سیستم های دو تایی عمل کردیم.

مثال ۳ - عدد $1A2C$ را به عدد در سیستم اعشاری تبدیل کنید.

پاسخ

کافی است عدد $1A2C$ به صورت مجموع توان های شانزده در سیستم پایه ۱۶ بنویسیم. و سپس مجموع را به پایه ۱۰ تبدیل کنیم. توجه داشته باشید که $10_{16} = 16_{10}$ است. پس

$$\begin{aligned} 1A2C &= 1 * 10^3 + A * 10^2 + 2 * 10^1 + C * 10^0 && \text{پایه ۱۶} \\ &= 1 * 16^3 + 10 * 16^2 + 2 * 16^1 + 12 * 16^0 && \text{پایه ۱۰} \\ &= 1 * 4096 + 10 * 256 + 2 * 16 + 12 * 1 && \text{پایه ۱۰} \\ &= 6700 && \text{پایه ۱۰} \end{aligned}$$

پس $1A2C_{16} = 6700_{10}$ است.

تبدیل بین سیستم پایه ۲ و ۱۶ خیلی ساده است. ابتدا روش کار را توضیح می دهیم و سپس می گوئیم چرا این کار فایده دارد. فرض کنید می خواهیم عدد 111111001000001011_2 در پایه ۲ به عدد در پایه ۱۶ تبدیل کنیم. قدم اول این است که ارقام یا دیجیت های عدد دو تائی را به گروه های چهار تائی تقسیم کنیم. از راست به چپ پس داریم.

$$11 \quad 1111 \quad 0010 \quad 0000 \quad 1011$$

اگر لازم باشد، به سمت چپ آخرین گروه سمت چپ، تعدادی صفر اضافه می کنیم تا آن گروه هم چهار رقمی بشود. پس داریم.

$$0011 \quad 1111 \quad 0010 \quad 0000 \quad 1011$$

حالا به جدول شماره ۱.۳ مراجعه کنید، و هر کدام از گروه های چهار رقمی را به رقم مربوطه در پایه ۱۶ تبدیل کنید. پس داریم.

$$\begin{array}{ccccc} 0011 & 1111 & 0010 & 0000 & 1011 \\ 3 & F & 2 & 0 & B \end{array}$$

پس

$$111111001000001011_2 = 3F20B_{16}$$

اگر مراحل بالا را بر عکس کنیم، می توانیم سیستم پایه ۱۶ را به پایه ۲ تبدیل کنیم. مثلا می خواهیم عدد $1A2C_{16}$ را به سیستم دو تائی تبدیل کنیم. با استفاده از جدول شماره ۱.۳ و معکوس کردن مراحل بالا داریم.

$$\begin{array}{cccc} 1 & A & 2 & C \\ 0001 & 1010 & 0010 & 1100 \end{array}$$

صفر های سمت چپ عدد بدست آمده را حذف می کنیم، پس داریم.

$$1A2C_{16} = 1101000101100_2$$

چرا این روش کار می کند؟ دلیل آن ساده است. کافی است روش مثال ۱.۳ را برای تبدیل $1A2C_{16}$ به پایه ۲ بکار ببریم. توجه داشته باشید که $10_{16} = 10000_2$ است. پس داریم.

$$1A2C_{16} = 1 * 10^3 + A * 10^2 + 2 * 10^1 + C * 10^0 \quad \text{پایه ۱۶}$$

$$= 1 * 10000^3 + 1010 * 10000^2 + 10 * 10000^1 + 1100 * 10000^0 \quad \text{پایه ۲}$$

حالا عمل جمع را به صورت ستونی انجام می دهیم.

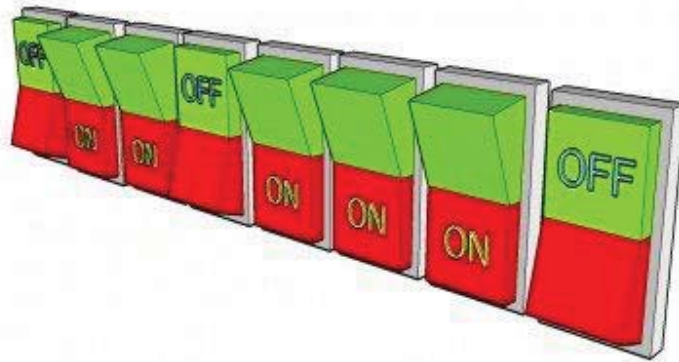
$$\begin{array}{r} 1 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \\ 1010 \ 0000 \ 0000 \\ 10 \ 0000 \\ 1100 \end{array}$$

$$1 \ 1010 \ 0010 \ 1100$$

این همان عددی است که قبلا با آن روش ساده بدست آوردیم. اما لازم نیست این روش را بکار ببرید. همان روش ساده، آسان تر است. آنرا بکار ببرید.

چرا کامپیوتر از اعداد پایه دو استفاده می کند ؟

کامپیوتر از ولتاژ استفاده می کند ، و چون ولتاژ به کرات تغییر می کند ، و هیچ ولتاژ مشخصی برای هر یک از اعداد پایه ده نمی توان قرار داد. به این دلیل ، سیستم اعداد پایه دو به عنوان حالت دو گانه روشن و خاموش بکار می رود. 0 برای حالت خاموش و 1 برای حالت روشن یک سویچ می تواند روشن یا خاموش باشد ، هر کدام از این حالت ها ، یک بیت اطلاعات را ذخیره می کند. حالا تعداد زیاد تری از سویچ ها را می توان کنار هم گذاشت و اطلاعات بیشتری ذخیره کرد. به تصویر زیر نگاه کنید. این یک بایت هشت بیتی است که نمایش عدد 01101110 است. این عدد در پایه ده ، عدد ۱۱۰ است و طبق قرار داد بین المللی نمایش حرف n انگلیسی است. طبق قرار داد ، هر کدام از حروف یا اعداد در هر زبانی با یک عدد مخصوص مشخص می شود. مثلا حرف A با عدد ۶۵ در پایه ده و 01000001 در پایه دو مشخص می شود.

**تمرینات بخش اول**

اعداد زیر در پایه ۱۰ هستند. آنها را به پایه ۲ و ۱۶ تبدیل کنید.

- 1) 347 2) 2039 3) 256 4) 258

اعداد زیر در پایه ۲ هستند. آنها را به پایه ۱۶ و ۱۰ تبدیل کنید.

- 5) 110110011 6) 1111111 7) 101101001 8) 1000001

اعداد زیر در پایه ۱۶ هستند. آنها را به پایه ۱۰ و ۲ تبدیل کنید.

- 9) 123 10) 5A4D 11) BOCA 12) BEEF

پاسخ تمرینات بخش اول.

اعداد زیر در پایه ۱۰ هستند. آنها را به پایه ۲ و ۱۶ تبدیل کنید.

- 1) 347 2) 2039 3) 256 4) 258

پاسخ

$$1) \quad 347 = 256 + 64 + 16 + 8 + 2 + 1 \\ = 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 \\ 347_{10} = 101011011_2 = 0001\ 0101\ 1011_2 = 15B_{16}$$

$$2) \quad 2039 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 \\ = 1 * 2^{10} + 1 * 2^9 + 1 * 2^8 + 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 \\ 2039_{10} = 11111110111_2 = 0111\ 1111\ 0111_2 = 7F7_{16}$$

$$3) \quad 256 = 2^8 \\ = .2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 0 * 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 \\ 256_{10} = 100000000_2 = 0001\ 0000\ 0000_2 = 100_{16}$$

توجه: در زبان انگلیسی نماد ممیز یک نقطه است. پس 2. خوانده می شود، دو دهم، 2.5 خوانده می شود، دو و نیم.

$$4) \quad 258 = 256 + 2 \\ = .2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 0 * 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 \\ 258_{10} = 100000010_2 = 0001\ 0000\ 0010_2 = 102_{16}$$

اعداد زیر در پایه ۲ هستند. آنها را به پایه ۱۶ و ۱۰ تبدیل کنید.

- 5) 110110011 6) 1111111 7) 101101001 8) 1000001

پاسخ

$$5) \quad 110110011_2 = 0001\ 1011\ 0011_2 = 1B3_{16} \\ = 1 * 16^2 + 11 * 16^1 + 3 * 16^0 = 435_{10}$$

$$6) \quad 1111111_2 = 0111\ 1111_2 = 7F_{16} = 7 * 16 + 15 = 127_{10}$$

$$7) \quad 101101001_2 = 0001\ 0110\ 1001_2 = 169_{16} = 1 * 16^2 + 6 * 16^1 + 9 \\ = 361_{10}$$

$$8) \quad 1000001_2 = 0100\ 0001_2 = 41_{16} = 4 * 16 + 1 = 65_{10}$$

اعداد زیر در پایه ۱۶ هستند. آنها را به پایه ۱۰ و ۲ تبدیل کنید.

9) 123 10) 5A4D 11) B0CA 12) BEEF

پاسخ

$$9) \quad 123_{16} = 1 * 16^2 + 2 * 16^1 + 3 * 16^0 = 256 + 32 + 3 = 291_{10}$$

$$123_{16} = 0001\ 0010\ 0011_2 = 100100011_2$$

$$10) \quad 5A4D_{16} = 5 * 16^3 + 10 * 16^2 + 4 * 16^1 + 13 * 16^0$$

$$= 5 * 4096 + 10 * 256 + 4 * 16 + 13 = 23117_{10}$$

$$5A4D_{16} = 0101\ 1010\ 0100\ 1101_2 = 101101001001101_2$$

$$11) \quad B0CA_{16} = 11 * 16^3 + 0 * 16^2 + 12 * 16^1 + 10 * 16^0$$

$$= 11 * 4096 + 0 * 256 + 12 * 16 + 10 = 45258_{10}$$

$$B0CA_{16} = 1011\ 0000\ 1100\ 1010_2 = 1011000011001010_2$$

$$12) \quad BEEF_{16} = 11 * 16^3 + 14 * 16^2 + 14 * 16^1 + 15 * 16^0$$

$$= 11 * 4096 + 14 * 256 + 14 * 16 + 15 = 48879_{10}$$

$$BEEF_{16} = 1011\ 1110\ 1110\ 1111_2 = 1011111011101111_2$$