

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات تکمیلی

ویره مدارس استعدادهای درخشان
پایه هفتم دوره اول متوسطه

۱۳۹۶



این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

نام کتاب: ریاضیات تکمیلی ویژه مدارس استعدادهای درخشان

پایه هفتم دوره اول متوسطه – ۱۰۳/۱

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

مصطفی امامی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری (اعضای شورای برنامه‌ریزی) محمد حسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع‌شحنه، سعید صدری و علی قصاب (اعضای گروه تألیف)

واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری (نظرارت) – عاطفه کشاورزی زفرنندی (ویراستار علمی) – سید اکبر میرجعفری (ویراستار ادبی)

شناسه افزوده آماده‌سازی:

لیدا نیکروش (مدیر امور فنی و چاپ) – حامد مشقق آرانی (نگاشتارگر (طراح گرافیک)، طراح جلد و صفحه آرا)

نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی – ساختمان شماره ۴ آموزش و پژوهش (شهید موسوی)

تلفن: ۰۹۱۶۱۱۸۸۳۱، دورنگار: ۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

ناشر:

شرکت افست: تهران – کیلومتر ۴ جاده آبعلی، پلاک ۸، تلفن: ۰۹۳۳۹۰۹۳

دورنگهار: ۰۹۰۹۷۷۳۳۶، صندوق پستی: ۰۹۷۹ - ۱۱۱۵۵

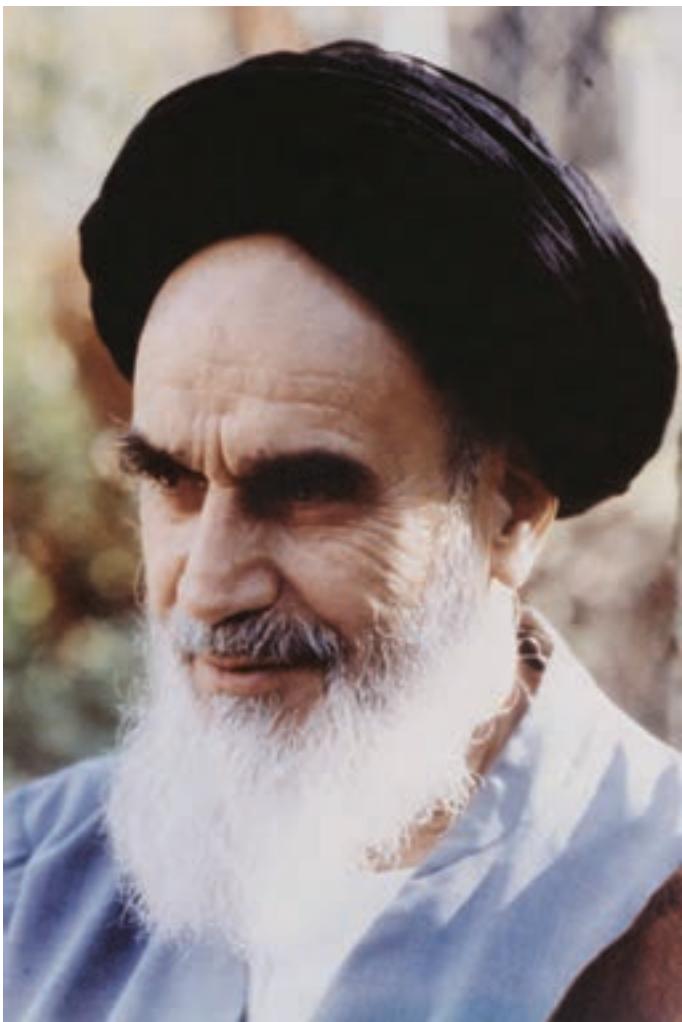
چاپخانه: شرکت افست «سهامی عام» (www.Offset.ir)

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ چهارم ۱۳۹۶

حق چاپ محفوظ است.

ISBN 978-964-05-2404-6

شابک ۶-۰۵-۲۴۰۴-۹۶۴-۹۷۸



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رهنماهله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم. ان شاء الله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم. مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

به نام خداوند جان آفرین

سخنی با معلم

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «إنگارش» خوانده می‌شد) را بیشتر دانش بررسی کمیتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می‌کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی‌رود، ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی‌دانان می‌پژوهند بیشتر از دانش‌های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه (مجرد) گسترش پیدا می‌کنند، به طوری‌که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پژوهشی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی‌دانان گاه به دلایل صرف‌آرایی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.

* * * *

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی‌سازی برنامه درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش‌هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هفتم می‌پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب‌نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی‌نقصی این کتاب هیچ‌گاه در تصور نبوده است!

فصل‌های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه‌های بخش‌های کتاب به صورت فهرست‌وار بدین شرح است:

۱. تمرین‌های این کتاب با پیش‌فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می‌تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین‌ها به چالش مفهومی

بکشد. تفکر درباره همهٔ تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می‌شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقولهٔ کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته‌اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آئینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدھا مسئلهٔ مهارتی، با حل چند مسئلهٔ چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ سبز مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهندهٔ یک برنامهٔ مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئلهٔ ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه قطعه شده تشییه کنیم، انجام یک پروژه به مثابهٔ کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که آحاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حل مسئله را به خوبی انجام دهند، در حالی که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

فهرست مطالب

۱	فصل صفر- سرآغاز
۲	ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات
۵	کارگاه بازی- مثلث همنگ
۵	جایزه نوبل و جایزه فیلدر
۷	فصل ۱- راهبردهای حل مسئله
۸	گفت و گو
۱۲	مسئله‌ها
۲۳	فصل ۲- عددهای صحیح
۲۴	معرفی عددهای علامت‌دار
۲۶	جمع و تفریق اعداد صحیح
۳۱	کارگاه بازی- دوز با اعداد صحیح
۳۲	ضرب و تقسیم اعداد صحیح
۳۴	گفت و گو
۳۷	فصل ۳- جبر و معادله
۳۸	الگوهای عددی

۴۰	جانگهدار
۴۱	عبارة جبرى
۴۴	مقدار عددی یک عبارت جبرى
۴۵	معادله
۵۱	فصل ۴ – هندسه و استدلال
۵۲	روابط بین پاره خطها
۵۳	روابط بین زاویه ها
۵۸	تبديل های هندسی و همنهشتی
۶۳	فصل ۵ – شمارنده ها و اعداد اول
۶۴	گفت و گو
۶۴	عدد اول
۶۶	کارگاه بازی – شمارنده و هُپ
۶۷	شمارنده
۷۰	مسابقه تیراندازی
۷۱	شمارنده اول
۷۳	بزرگ ترین شمارنده مشترک
۷۵	کوچک ترین مضرب مشترک
۷۸	کارگاه بازی – نقطه بذار – شلیک کن!
۸۱	ارتباط ب.م.م و ک.م.م
۸۲	تمرین های تکمیلی
۸۷	فصل ۶ – سطح و حجم
۸۸	ریاضیات سیب زمینی!

۸۹	مکعب
۹۳	چهار وجهی منتظم
۹۴	شهود فضایی
۹۵	محاسبه حجم‌های منشوری
۹۸	مساحت جانبی و کل
۹۹	حجم و سطح
۱۰۴	کارگاه ساخت حجم-دوازده وجهی منتظم
۱۰۵	فصل ۷- توان و جذر
۱۰۶	تعريف توان
۱۰۸	محاسبه یک عبارت تواندار
۱۰۹	ساده کردن عبارت‌های تواندار
۱۱۰	کاربردهایی از توان
۱۱۴	جذر و ریشه
۱۱۷	فصل ۸- بردار و مختصات
۱۱۸	کارگاه بازی-نبرد دریایی
۱۲۱	دریچه‌ای به روبوکاپ
۱۲۶	مختصات و تبدیل‌های هندسی
۱۲۹	فصل ۹- آمار و احتمال
۱۳۰	نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها
۱۳۴	احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۳۸	احتمال و تجربه
۱۴۱	پیوست

کتاب نامه

درباره طرح روی جلد

۱۴۷

۱۴۹



ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات

یک عبارت ریاضی، شامل اعداد و نمادهایی از جمله پرانتز و چهار عمل اصلی است. برای محاسبه عبارت‌های ریاضی، نمادها را به ترتیب زیر به کار می‌بریم.

- ## ۱. پرانتز ۲. ضرب یا تقسیم ۳. جمع یا تفریق

اگر در یک عبارت، دو نماد دارای ترتیب مساوی بودند (مثلاً ضرب یا تقسیم)، ابتدا نمادی را به کار می‌بریم که در سمت چپ قرار دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\bullet \quad 12 - \overbrace{6 \div 2}^3 = 12 - 3 = 9$$

$$\bullet \quad 7 - \underbrace{1 \times 2}_{1} + 3 - 0 = \underbrace{7 - 2}_{5} + 3 - 0 = \underbrace{5 + 3}_{8} - 0 = 8 - 0 = 8$$

$$\bullet 2 + \underbrace{6 \div 3}_{2} (\underline{18} + \underbrace{3 \times 2}_{6}) = 2 + 2(18 + 6) = 2 + 2 \times 24 = 2 + 48 = 50.$$

$$\bullet 3 \times (13 + 7) \div (8 - 2) = 3 \times 20 \div 6 = 60 \div 6 = 10$$

۱. عبارت‌های برابر دو ستون را بهم وصل کنید (یک مورد اضافی است).

$$\bullet \quad 6 \div 2(1 + 2)$$

• 19

$$\bullet \quad 3(4 + 8) \div 3$$

9

$$\bullet \quad 12 \div 4 + 2(3 + 5)$$

9

$$\bullet \quad 4 + 2 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$$

1

$$\bullet \quad 28^\circ - 4^\circ \times (12 - 1^\circ \div 2)$$

۱۲

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $34 - 18 + 2$

(ج) $12 - 8 \div 2 + 1$

(ه) $7 + 9 \times (3 + 8)$

(ز) $12 \times 6 \div 3 - 2 \times 4$

(ط) $55 \div 11 + 7 \times (2 + 14)$

(ب) $8 \div 4 \div 2$

(د) $10 - 4 \times 2 + 3$

(و) $63 \div (10 - 3) \times 3$

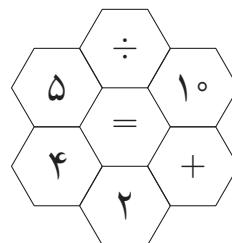
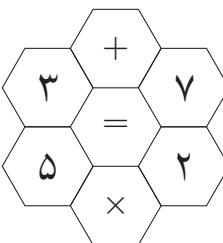
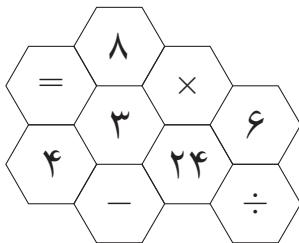
(ح) $21 \div (3 + 4) \times 3 - 8$

(ی) $27 \div (3 + 6) \times 5 - 12$

۳. در شکل رو به رو، از عدد ۲ شروع به حرکت کرده‌ایم و در هر گام به یکی از خانه‌های همسایه رفته‌ایم. توجه کنید که می‌خواهیم به هر خانه فقط یک بار وارد شویم. اگر به ترتیب ورود به هر خانه، عده‌ها و عمل‌ها را پشت سرهم بنویسیم، یک رابطهٔ تساوی به دست می‌آید:

$$2 \times 3 + 1 = 7.$$

(الف) در هر یک از شکل‌های زیر، مسیری بیابید تا یک رابطهٔ تساوی به دست آید.



(ب) در مثال بالا، مسیر سبز رنگ خاصیت عجیبی دارد!

روی مسیر سبز رنگ اعداد و نمادها به ترتیب «۲»، «×»، «۳»، «+»، «۱»، «×»، «=» رفته‌اند.

و «۷» هستند. اگر در جهت عکس مسیر سبز رنگ اعداد و نمادها را به ترتیب

بنویسیم («۷»، «=»، «۱»، «+»، «۳»، «×» و «۲»)، دوباره یک رابطهٔ تساوی

خواهیم داشت ($7 = 1 + 3 \times 2$).

آیا مسیرهایی که در شکل‌های بالا پیدا کرده‌اید، این خاصیت عجیب را دارند؟

۴. در زیر، عبارت $1 + 3 \times 2$ را طوری پرانتزگذاری کرده‌ایم که حاصل عبارت برابر ۸ شود.

$$2 \times (3 + 1) = 8.$$

هریک از عبارت‌های زیر را طوری پرانتزگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

(الف) $28 \div 2 \times 3 + 1 = 4$

(ب) $24 + 6 \div 3 + 2 = 6$

(ج) $18 + 3 \times 25 \div 15 - 3 = 20$

(د) $3 \times 40 \div 8 + 12 \div 6 = 1$

۵. جدول زیر را با اعداد قرمزنگ طوری پر کرده‌ایم که در هر سطر و ستون تساوی‌ها برقرار باشند. معنای خانه‌های خاکستری‌رنگ این است که اعداد و نمادهای داخل این خانه‌ها در پرانتز قرار دارند.

۵	\times	۲	$-$	۶	$=$	۴
+		+		\times		+
۲	\times	۸	\div	۴	$=$	۴
-		\div		\div		\div
۳	$+ \text{ } ۵$	$- \text{ } ۶$			$=$	۲
=		=		=		=
۴	\times	۲	$-$	۴	$=$	۴

برای مثال، در جدول بالا، در ستون سوم (از سمت چپ)، رابطه این‌گونه است:

$$(2 + 8) \div 5 = 2.$$

با قانون گفته شده، هریک از جدول‌های زیر را با اعداد یک رقمی پر کنید.

	\div		\times		$=$	۶
+		-	\times		+	
	+	-	۴		=	
\div		+	-	-	\div	
\times	۳	-		=		
=		=	=	=		=
	\div	+		=		

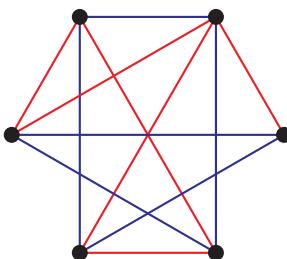
	\times		$-$		$=$	۹
+		+		-		-
	-		\times	۴		
-		-		\times		\times
-	۵	+		=		
=		=	=	=		=
۱	\times		\div		=	

^۱P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 8.

کارگاه بازی – مثلث همنگ

شش نقطه روی یک صفحه قرار داده شده است. دو نفر با دو خودکار، با رنگ‌های آبی و قرمز بازی را شروع می‌کنند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره خط این دو نقطه را بهم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و بهم وصل می‌کند. هر کس که اولین مثلث همنگ را بسازد باخته است. مثلث همنگ مثلثی است که سه ضلعش یک رنگ دارد و رأس‌های آن یکی از شش نقطه داده شده باشد.

برای مثال، در شکل زیر هنوز هیچ مثلث همنگی ساخته نشده است. آیا اگر نوبت آبی باشد، بازنده است؟ اگر نوبت قرمز باشد چطور؟



با یکی از دوستان یا اعضای خانواده این بازی را انجام دهید و سعی کنید روشی پیدا کنید که همیشه برنده باشید.

جایزه نوبل و جایزه فیلدز

هر ساله یکی از خبرهای مهم علمی مربوط به اهدای جایزه‌های نوبل است. شش جایزه که چهار جایزه آن مربوط به علوم فیزیک، شیمی، پزشکی و اقتصاد است و دو جایزه دیگر برای صلح و ادبیات. آلفرد نوبل (Alfred Nobel)، شیمی‌دان سوئدی، با اختراع دینامیت ثروت زیادی به دست آورد که البته بیشتر از راه فروش اسلحه به دست آمده بود. نوبل وصیت کرد که ثروتش وقف جایزه‌هایی شود که وقف صلح شوند. با شروع قرن بیستم، اهدای جایزه

نوبل شروع شد؛ ولی با نگاهی به قرن بیستم و جنگ‌های جهانی می‌توان نتیجه گرفت که مبلغی که بنیاد نوبل خرج صلح کرد خیلی کمتر از مخارج جنگ است.

شاید سؤال کنید: چرا جایزه نوبل به ریاضیات اختصاص نمی‌یابد؟ این سوال پایه داستان‌ها و روایت‌های فراوانی شده است که معروف‌ترین آنها روایتی عاشقانه است! می‌گویند آلفرد نوبل عاشق دختری می‌شود، ولی ازدواج آن دختر با یک ریاضی‌دان، کیهانی‌ای بزرگ نسبت به ریاضیات در دل نوبل پدید می‌آورد! البته بیشتر موّرخان این داستان را یک شایعه بی‌اساس می‌دانند و به نظر آنها تنها دلیلی که نوبل جایزه‌ای به ریاضیات اختصاص نداده، این است که در زمان او ریاضیات نقش مستقیمی در علم شیمی نداشته و شیمی علمی بوده کاملاً تجربی و بیگانه با فرمول‌های ریاضیات.

فلیکس کلاین (Felix Klein) و جرج کانتور (George Cantor) ریاضی‌دانان بزرگ آلمانی طرحی ریختند تا هر چند وقت یک‌بار ریاضی‌دانان سراسر جهان گرد هم آیند و به تبادل نظر بپردازنند. اولین این گردهمایی در اوخر قرن نوزدهم برگزار شد و پس از آن از سال ۱۹۰۰ هر چهار سال یک‌بار (به‌جز در زمان جنگ‌های جهانی) این گردهمایی که «کنگره بین‌المللی ریاضی» نام دارد برگزار می‌شود و بزرگ‌ترین و مهم‌ترین گردهمایی ریاضی‌دانان سراسر جهان است.

در سال ۱۹۲۴ کنگره بین‌المللی ریاضی در تورنتو کانادا برگزار شد. در این کنگره ریاضی‌دانان تصمیم گرفتند به دستاوردهای برجسته ریاضیات دو مدال طلا اهدا شود. دبیر این کنگره جان فیلدز (John Fields). بودجه لازم را برای بنیان نهادن این جایزه اهدا کرد و برای نخستین‌بار در سال ۱۹۳۶ این جایزه به دو ریاضی‌دان داده شد.

دو جایزه نوبل و فیلدز تفاوت‌های زیادی باهم دارند. مبلغ مادی جایزه فیلدز اصلاً قابل مقایسه با جایزه بیش از یک میلیون دلاری نوبل نیست و شرط سنی زیر چهل سال، رسیدن به جایزه فیلدز را خیلی دشوار می‌سازد.

مریم میرزاخانی، ریاضی‌دان معروف ایرانی که دانش‌آموز مرکز استعدادهای درخشان بوده است، اولین زنی است که موفق به دریافت جایزه فیلدز شده است.

راهبردهای
حل
مسئله



Save Water ... Save Life

کمبود آب از مهم‌ترین چالش‌ها و مسئله‌های حال حاضر ایران و جهان است. برخی این مسئله را یک بحران نامیده‌اند. برای حل این مسئله راهبردهای گوناگونی پیشنهاد شده است، اما این راهبردها تا به حال نتوانسته‌اند بحران کم‌آبی را برطرف کنند. آیا شما برای حل این مسئله راهبردی در نظر دارید؟

گفت و گو

معلم ۱: واقعاً اینجا مدرسه تیزهوشان است؟!

معلم ۲: اتفاقی افتاده است؟

معلم ۱: خیلی از بچه‌ها با هوش هستند ولی با بچه‌هایی که ریاضی نمی‌فهمند، چه کنم؟

معلم ۲: مدارا!

معلم ۱: من اصلاً شوخی نمی‌کنم. می‌خواهم همه دانش‌آموزانم ریاضی دان شوند؟! نمی‌دانم می‌توانم از پس این کار برآیم یا نه؟

معلم ۳: [در حالی که از جا برمی‌خاست و جمع را ترک می‌کرد] آقا مگر ما ریاضی دانیم که بتوانیم ریاضی دان تربیت کنیم؟! ریاضی دان خودش ساخته می‌شود. مثل گیاه وحشی! نهایت هنر ما پرورش گیاهانِ گلخانه‌ای است!

معلم ۲: مشکل چیست؟ درس ریاضی را نمی‌فهمند؟

معلم ۱: بعضی از دانش‌آموزان بلد نیستند مسئله‌ها را حل کنند. وقتی مسئله را می‌بینند، انگار هیپنوتیزم می‌شوند؛ زل می‌زنند و هیچ حرکتی نمی‌کنند!

معلم ۲: به نظر شما چه کار باید بکنند؟

معلم ۱: باید از روش‌های حل مسئله فصل اوّل استفاده کنند.

معلم ۲: پس نظر شما این است که اگر فصل اوّل خوب درس داده شود، همه بچه‌ها می‌توانند به خوبی مسائل ریاضی را حل کنند.

● راهبردهای حل مسئله

معلم ۱: بله. دقیقاً.

معلم ۲: درست است که خیلی از مسئله‌ها با این روش‌ها حل می‌شوند؛ ولی اگر منظور شما این است که دانش‌آموز باید این روش‌ها را بیاموزد تا حدّاً قابل روش فکر کردن را یاد بگیرد، بنده با شما موافقم؛ نمی‌خواهم از بعچه‌های کم‌کار کلاس دفاع کنم، ولی سؤالی دارم.

معلم ۱: بفرمایید!

معلم ۲: می‌دانید هدف از آموزش «روش حل مسئله» چیست؟

معلم ۱: اینکه به بچه‌ها فکر کردن را آموزش دهیم.

معلم ۲: این مطلب را فرموده بودید؛ بنده نیز قبول دارم؛ دیگر چه؟

معلم ۱: اینکه دانش‌آموزان بیاموزند همهٔ مسائل را حل کنند.

معلم ۲: در این موضوع با شما موافق نیستم!

معلم ۱: چرا؟

معلم ۲: نمی‌توان همهٔ روش‌های حل مسئله را یاد داد!

معلم ۱: چرا؟ هر مسئله جواب دارد. جوابش را می‌توان یاد داد. البته اگر مخاطب عاقل باشد!

معلم ۲: بله. اگر بتوان مسئله را حل کرد و مخاطب باهوس باشد، می‌توان گفت آن مسئله چگونه حل شده است؛ ولی آیا می‌توان روش‌هایی را معرفی کرد تا به کمک آنها همهٔ مسائل حل شوند؟

معلم ۱: بله... به نظر بنده می‌توان این کار را انجام داد.

معلم ۲: به نظر من نه! به نظر همهٔ ریاضی‌دان‌ها هم نه!

معلم ۱: چرا؟ پس فصل اول کتاب درسی کلاً ناکارآمد است؟

علم ۲: اشتباه شما اینجاست که از این فصل استفاده نادرست می‌کنید. فصل اوّل روش فکر کردن به بعضی از مسائل را یاد می‌دهد؛ نه همه مسائل را. این فصل مناسب دانشآموزان نخبه نیست. دانشآموز نخبه خودش می‌تواند روش حل مسئله را پیدا کند. اما دیگر دانشآموزان می‌توانند از روش‌های گفته شده در این فصل کمک بگیرند. آنها حتی می‌توانند در حل مسائل از دانشآموزان نخبه تقلید کنند.

علم ۱: تقلید؟!

علم ۲: مثل خیلی از کارهای دیگر بشر. مثلاً وقتی کسی خوب فوتبال بازی می‌کند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب فوتبال بازی کنند. وقتی کسی خوب حرف می‌زند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب حرف بزنند. انسان‌ها علاقه‌مندند که از کارهای خوب دیگران، تقلید کنند. مانند آنها حرف بزنند، مانند آنها زندگی کنند و مانند آنها فکر کنند.

علم ۱: این حرف شما را قبول دارم؛ اما شما یک اشتباه کوچک دارید. درست است که انسان‌های باهوش راحل‌های جالب ریاضی را کشف کرده‌اند؛ اما الان بقیه انسان‌ها آموخته‌اند که با آن راحل‌ها مسائل ریاضی را حل کنند. بنده هم به عنوان یک معلم ریاضی، وظیفه دارم آن روش‌ها را به دانشآموزانم یاد بدهم. وظیفه دارم که شاگردانم را ریاضی‌دان کنم.

علم ۲: البته وظیفه یک معلم ریاضی، یاد دادن مفاهیم ریاضی و روش‌های حل مسائل ریاضی است؛ اما یک معلم نمی‌تواند همه روش‌های حل مسائل را یاد بدهد.

علم ۱: منظور شما چیست؟ یک ماه زمان صرف می‌کنیم و همه روش‌ها را یاد می‌دهیم. اگر نشد، دو ماه. اگر نشد یک سال!

علم ۲: نه، درست نیست! هیچ وقت نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم. چون هیچ وقت همه روش‌های حل مسئله کشف نمی‌شوند. همیشه یک ریاضی‌دان جدید پیدا

● راهبردهای حل مسئله

می‌شود که روش جدیدی را خلق می‌کند. روش‌های زیادی هستند که هنوز کشف نشده‌اند!

معلم ۱: از کجا می‌دانید؟

معلم ۲: از آنجایی که هنوز مسائل حل نشدهٔ زیادی در ریاضیات وجود دارد.
معلم ۱: واقعاً؟

معلم ۲: یعنی شما به عنوان یک معلم ریاضی که می‌خواهید ریاضی‌دان تربیت کنید،
نمی‌دانید چه مسائل جالبی هنوز حل نشده‌اند؟! کافی است در اینترنت جست‌و‌جو
کنید: «Unsolved problem in math».

معلم ۱: [با تعجب] ! ! چه راه حل خوبی!

هر مسئله، ضرب‌آهنگ خاص خودش را دارد،
درست مثل یک قطعهٔ موسیقی.
هر وقت آن ضرب‌آهنگ را بگیری،
کلیّت مفهوم آن مسئله را می‌فهمی.

یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفسور، ترجمة کیهان بهمنی.

مسئله‌ها

۱. مسئله و راه حل زیر از کتاب «خلاقیت ریاضی»^۱ انتخاب شده است.

مسئله: دهقانی چند مرغ و چند خرگوش خانگی دارد. این مرغ‌ها و خرگوش‌ها روی هم، ۵۰ سر و ۱۴۰ پا دارند.^۲ این دهقان چند مرغ و چند خرگوش دارد؟



راه حل: دهقان، جانوران خود را مجبور می‌کند، در وضع غریبی قرار بگیرند: هر مرغ روی یک پا ایستاده است و هر خرگوش روی دوپای عقبی خود. با این تصور غریب، درست نصف همه پاهای، یعنی ۷۰ عدد، شرکت خواهند داشت. عدد ۷۰ را می‌توان به عنوان سرها در نظر گرفت، به شرطی که هر مرغ یکبار و هر خرگوش را دوبار به حساب بیاوریم. بنابراین، اگر از عدد ۷۰ تعداد کل مرغ‌ها و خرگوش‌ها، یعنی ۵۰ را کم کنیم، تعداد خرگوش‌ها به دست می‌آید؛ یعنی تعداد خرگوش‌ها، برابر است با:

$$۷۰ - ۵۰ = ۲۰$$

و البته، ۳۰ مرغ.

بعد از خواندن راه حل بالا، سعی کنید راه حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

^۱ جرج پولیا، خلاقیت ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، صفحه ۶۰ .

^۲ دقت کنید در این مسئله دستهای خرگوش به عنوان پا در نظر گرفته شده است.

۲. به چهار روش می‌توان عدد ۴ را به صورت مجموع اعداد طبیعی کوچک‌تر از آن نوشت:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 2 + 2.$$

هریک از اعداد ۳، ۵ و ۶ را به چند روش می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودشان نوشت؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

۳. قانونی برای الگوی زیر کشف کنید.

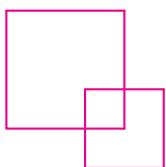
$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, \dots$$

اگر موفق به کشف این قانون نشدید، نگران نشوید!



ریاضی‌دان معروف انگلیسی معاصر (تصویر روبرو)، به نام جان کانوی (John Conway)، وقتی برای اولین بار با این الگو بخورد کرد، بعد از ساعت‌ها تفکر نتوانست آن را حل کند؛ اما بعد از اینکه یکی از دوستانش قانون الگو را به او گفت، کانوی پی برد اطلاعات لازم برای کشف قانون الگو این است که: «یک نفر فقط بلد باشد تا عدد ۳ بشمارد!»

پروژه. با ۲ مربع، حداقل ۳ مربع می‌توان ساخت. شکل زیر را ببینید.



الف) با ۳ مربع، حداقل چند مربع می‌توان ساخت؟ شکل مربوطه را رسم کنید.

ب) با ۴ یا ۵ مربع چطور؟ با مراجعه به www.webmath.ir نتایج خود را ارسال کنید.

● راهبردهای حل مسئله ●

۵. مسابقات سهگانه از سه بخش شنا، دوچرخه‌سواری

و دو تشكیل شده است. در المپیک ورزشکاران

این رشت، ابتدا $\frac{3}{10}$ مسیر را شنا می‌کنند. سپس

$\frac{4}{5}$ باقی‌مانده راه را رکاب می‌زنند و بعد 10° کیلومتر

می‌دونند تا به خط پایان برسند. طول مسیر مسابقات

سه‌گانه در المپیک چند کیلومتر است؟

۶. گلی شنبه شب $\frac{1}{4}$ کتاب قصه را برای عروسک‌هایش

خواند. یکشنبه شب نیز $\frac{1}{3}$ از باقی‌مانده کتاب

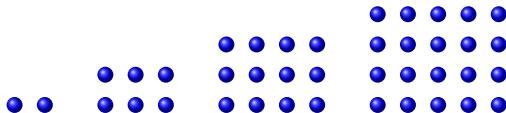
را خواند و دوشنبه شب $\frac{1}{4}$ از باقی‌مانده کتاب را

برای عروسک‌ها خواند. سه‌شنبه شب $\frac{1}{5}$ باقی‌مانده

را خواند. گلی چه کسری از کتاب را برای

عروسک‌هایش نخوانده است؟

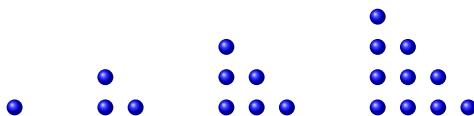
۷. به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو رارسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند گلوله وجود دارد؟

۸. به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو رارسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند گلوله وجود دارد؟ این تعداد با عددی که در

قسمت «ب» مسئله قبل به دست آوردید، چه رابطه‌ای دارد؟

ج) با توجه به شکل‌های صفحه قبل و شکل‌های مسئله قبل، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 51$$

۹. می‌دانیم که سن مونا برابر با تعداد شمع‌هایی است که در آخرین جشن تولدش روی کیک قرار داده است. اگر او مجموعاً به ۶۶ شمع روی کیک‌های تولدش فوت کرده باشد، اکنون چند سال سن دارد؟



۱۰. در هندوستان، رانندگان عاشق بوق زدن هستند! فرض کنید پشت چراغ قرمز، رسم بر این باشد که نفر اول ۱ بار بوق بزند. بعد نفر دوم هر چند بار که خواست بوق بزند. نفر سوم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم بوق بزند. نفر چهارم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم و سوم بوق بزند و نفر پنجم به تعداد مجموع بوق‌های چهار نفر قبلی بوق بزند و

الف) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۲ بار بوق بزند و ۵ نفر بعدی با قانون بالا بوق بزند، نفر آخر چند بار بوق زده است؟

ب) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۶ بار بوق زده باشد و در مجموع ۵۶ بار صدای بوق شنیده شده باشد، چند راننده بوق زده‌اند؟

ج) ۶ نفر مجموعاً ۱۶ بار بوق زده‌اند. نفر دوم چند بار بوق زده است؟



۱۱. الف) در جام جهانی ۲۰۱۴، ۳۲ تیم حاضر بودند. این تیم‌ها در مرحله اول به ۸ گروه ۴ تیم تقسیم شدند و در هر گروه هر تیم یک بازی با سه تیم دیگر انجام داد. در مرحله اول جام جهانی ۲۰۱۴، چند بازی انجام شد؟

ب) در سال ۱۳۹۳، ۱۶ تیم در لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) حاضرند. هر تیم باید دو بازی با تیم‌های دیگر انجام دهد. در این لیگ چند بازی انجام می‌شود؟

ج) چه ارتباطی بین قسمت‌های «الف» و «ب» وجود دارد؟

د) کشوری ۲۰ شهر دارد که میان هر دو شهر یک خط هوایی دایر است. چند خط هوایی در این کشور وجود دارد؟



۱۲. در بازی «مثلث همنگ» که در فصل قبل با آن آشنا شدید،

الف) اگر هر نقطه را به پنج نقطه دیگر وصل کنیم، چند پاره خط رسم کرده ایم؟

ب) چرا همیشه یک نفر بازنده است؟ به عبارت دیگر چرا این بازی نمی‌تواند نتیجه مساوی داشته باشد؟

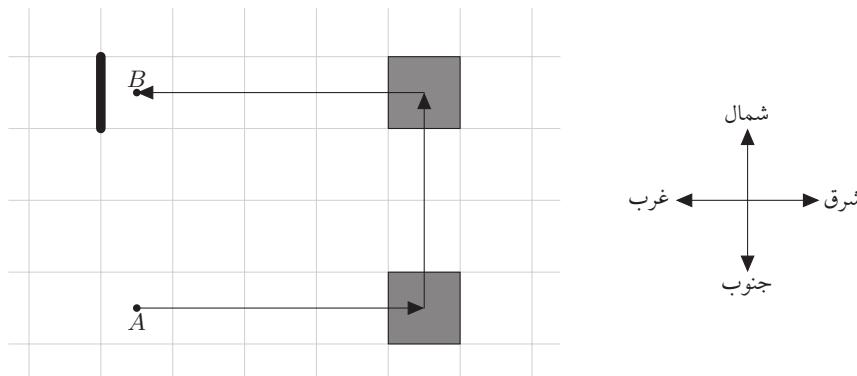
۱۳. تعدادی کبوتر و هشت پا روی هم ۶۰ سر و ۲۱۰ پا دارند. چند هشت پا داریم؟



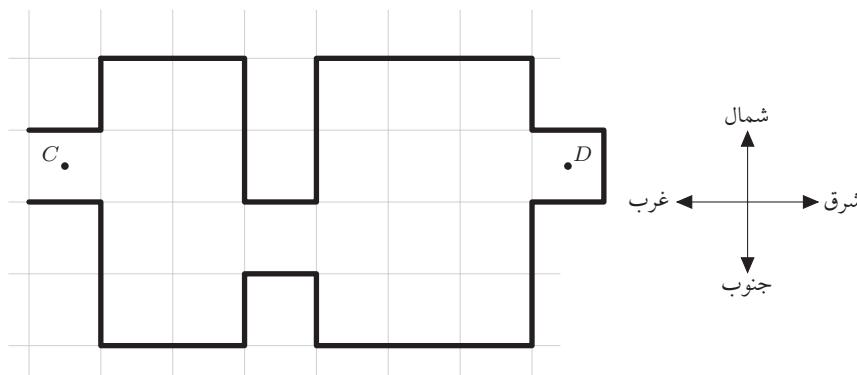
۱۴. در جعبه‌ای ۱۰۰ مهره به رنگ‌های سفید، قرمز و آبی وجود دارد. در تاریکی، چند مهره از جعبه بیرون بیاوریم که در بین آنها حداقل ۱۰ مهره همنگ وجود داشته باشد؟

۱۵. نرگس تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد $3 \times 2 \times 1$ دارد. او می‌خواهد با چسباندن تعدادی از این مکعب مستطیل‌ها بهم، یک مکعب توپر بسازد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که نیاز دارد، چندتاست؟

۱۶. روباتی داریم که فقط به سمت جلو حرکت می‌کند و هنگامی که به یک کاشی تیره می‌رسد، 90° به سمت چپ خودش می‌چرخد. برای مثال، اگر روبات را در زمینی به‌شکل زیر در نقطه A رو به سمت شرق بگذاریم، به نقطه B می‌رسد. چون در نقطه B به دیوار برخورد کرده است، دیگر نمی‌تواند جلو برود و متوقف می‌شود.



در زمینی به‌شکل زیر روبات را در نقطه C رو به سمت شرق گذاشته‌ایم. می‌خواهیم روبات به نقطه D برسد. کدامیک از کاشی‌ها را باید تیره کنیم؟



۱۷. ۲۴ پرنده روی دو کابل برق نشسته بودند. وقتی

۶ پرنده از کابل دوم به کابل اول و ۹ پرنده از کابل اول به کابل دوم پریدند، تعداد پرنده‌های کابل اول نصف پرنده‌های کابل دوم شد. در ابتدا چند پرنده روی کابل دوم نشسته بودند؟



۱۸. دهکده‌ای ۱۰۰ خانه دارد. روی هر ۳ خانه حداقل ۲ آنتن وجود دارد و روی هر ۲ آنتن

حداقل ۳ کلاغ نشسته است. این دهکده حداقل چند کلاغ آنتن نشین دارد؟



۱۹. در یک مهد کودک تعدادی نیمکت وجود دارد. وقتی روی هر نیمکت یک نفر می‌نشیند، یک نفر مجبور است روی زمین بنشیند! اما اگر روی هر نیمکت ۲ نفر بنشینند، ۱ نیمکت خالی می‌ماند. این مهد کودک چند نیمکت دارد؟



۲۰. قیمت یک گلابی ۲۰۰ تومان، قیمت یک پرتقال ۳۰۰ تومان، و قیمت یک توت فرنگی

۴۰۰ تومان است. اگر ۸ عدد از این میوه‌ها را ۲۳۰۰ تومان خریده باشیم، بیشترین

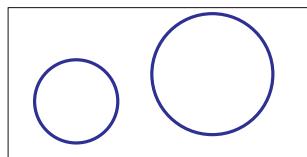
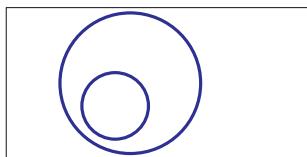
تعداد توت فرنگی که ممکن است خریده باشیم، چندتاست؟



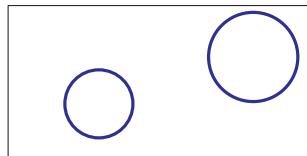
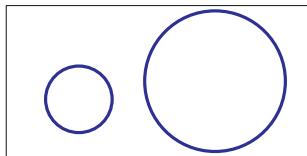


۲۱. عاطفه تعدادی پسته داشت که نتوانست آنها را به طور مساوی بین ۶ نفر از دوستانش تقسیم کند. او سراغ بهمن آقا پسته‌چی رفت و ماجرا را برای او توضیح داد. بهمن آقا پسته‌چی گفت: «اگه ۸ تا پسته از من بخری مشکلت حل می‌شه». هر پسته 100 تومان بود، ولی عاطفه فقط 300 تومان پول داشت. آیا می‌توانید به عاطفه کمک کنید؟

۲۲. پروژه. می‌خواهیم چند دایره بکشیم که همدیگر را قطع نکنند. برای مثال، با کمک دو دایره فقط به دو شیوه می‌توانیم این کار را انجام دهیم. هر کدام از این دو راه، در شکل‌های زیر رسم شده است.



توجه کنید که دو حالت زیر با آنکه ظاهراً متفاوت‌اند، ولی آنها را یکی در نظر می‌گیریم.



اگر چهار دایره داشته باشیم، به چند شیوه گوناگون می‌توانیم آنها را رسم کنیم به‌گونه‌ای که همدیگر را قطع نکنند؟ همهٔ حالت‌ها را رسم کنید.

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۲۳. در کنار جاده‌ای، تیرهای سیمانی به فاصله‌های برابر قرار دارند. حامد از تیر اول آغاز به حرکت کرد و بعد از ۶ دقیقه از کنار تیر ششم گذشت. اگر حامد با همین سرعت ادامه دهد، پس از چند دقیقه از کنار تیر بیست و ششم می‌گذرد؟

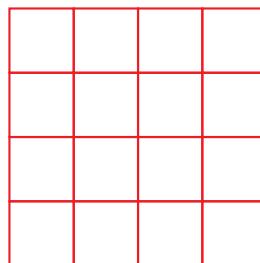
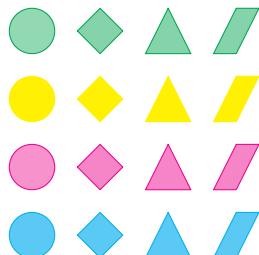
۲۴ Notices که انجمن ریاضی آمریکا آن را چاپ می‌کند، در یکی از شماره‌هایش، یک الگوی عددی معروف را به عنوان تصویر روی جلد انتخاب کرده است.



الف) ابتدا الگوی عددی بالا را به دقت مشاهده و قانون آن را کشف کنید. سپس
باتوجه به قانون الگو، سه ستون به سمت چپ آن اضافه کنید.

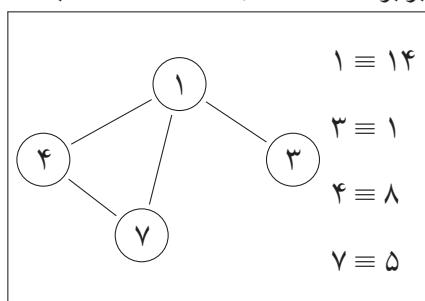
ب) با مراجعه به www.webmath.ir بگویید که نام چه ریاضی‌دان‌هایی را روی این الگوی عددی گذاشته‌اند؟

۲۵. شکل‌ها را طوری در جدول 4×4 زیر بچینید که در هر سطر و هر ستون، هر رنگ و هر شکل یک‌بار دیده شود.



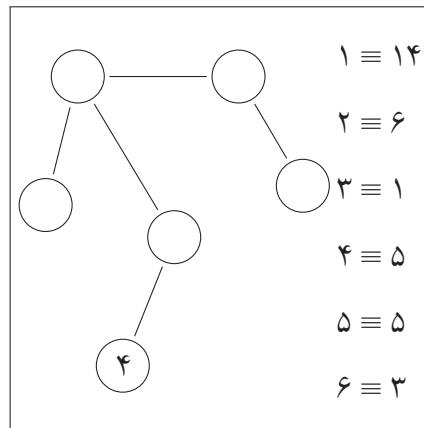
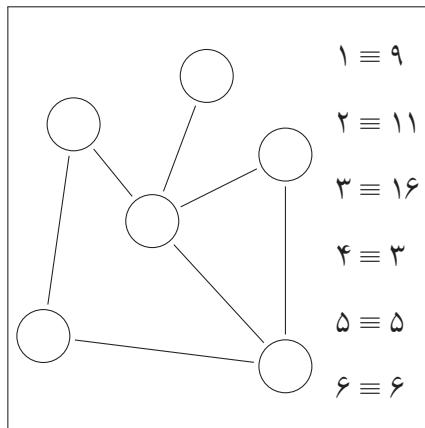
بعدا در حل یکی از مسائل سخت این کتاب از پاسخ این مسئله می‌توانید کمک بگیرید.

۲۶. در کادر زیر، اعداد سمت چپ علامت \equiv را طوری داخل دایره‌ها قرار داده‌ایم که مجموع عددهایی که به هر دایره متصل‌اند، برابر عدد سمت راست علامت \equiv باشد.

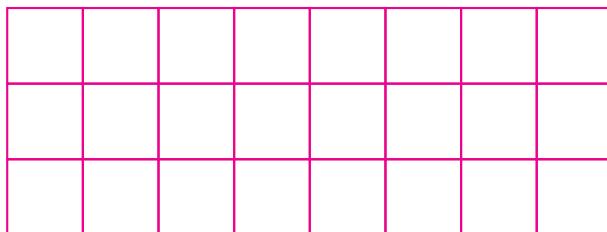


برای مثال، عدد 1 به عددهای 4، 7 و 3 متصل است. پس $(4 + 7 + 3) \equiv 1$ یا $14 \equiv 1$. عدد 3 فقط به 1 متصل است. بنابراین $1 \equiv 3$. عدد 4 به 1 و 7 متصل شده، پس $(1 + 7) \equiv 4$ یا $8 \equiv 4$ و

باتوجه‌به قانون گفته شده، دایره‌های خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



۲۷. می خواهیم برخی از خانه های جدول زیر را رنگ کنیم به طوری که هر خانه یا خودش رنگ شده باشد یا همسایه اش رنگی باشد. حداقل چند خانه رنگی می شوند؟ آنها را رنگ کنید. (دو خانه همسایه اند هرگاه یک ضلع مشترک داشته باشند).



۲۸. الف) دستمزد سالانه یک بازیکن فوتبال در سال ۱۳۶۸ حدود سیصد هزار تومان بود. در سال ۱۳۹۲ هر «فوتبالیست» تقریباً یک میلیارد تومان درآمد سالانه داشته است. در این مدت دستمزد سالانه فوتبالیست ها چند درصد افزایش یافته است؟



ب) شبیه به همین مسئله را برای «حقوق یک استاد دانشگاه» طرح و سپس حل کنید.

عددهای صحیح

تقریب عدد پی توسط ارشمیدس

هجرت رسول اکرم از مکه به مدینه



مبدأ تاریخ در کشور ما هجرت رسول اکرم از مکه به مدینه است. در شکل بالا تاریخ برخی از رویدادهای مختلف را مشاهده می‌کنید. برخی از این واقعه‌ها پیش از هجرت و برخی دیگر پس از هجرت پیامبر روی داده‌اند. شما هم با جستجو می‌توانید نمودارهای مشابهی را پیدا کنید که تاریخ رویدادهای مختلف را به ترتیب وقوع نشان داده است.

معرفی عددهای علامت‌دار

۱. از یک روزنامه فقط یک برگ آن در دست است که شماره صفحه‌های ۱۱، ۱۲ و ۳۰ روی آن دیده می‌شود. این روزنامه چند صفحه دارد؟

۲. اگر روی ساعت ویندوز کلیک کنید و «Change date and time settings...» را انتخاب کنید، پنجره «Date and Time» ظاهر می‌شود. با انتخاب گزینه «Additional Clocks» می‌توانید اختلاف ساعت شهرهای مهم جهان را با ساعت مبدأ (گرینویچ) ببینید.



برای پاسخ دادن به پرسش‌های زیر از رایانه خود کمک بگیرید.

الف) تفاوت ساعت چه شهرهایی با گرینویچ / ۳:۳۰ است؟

ب) در آمریکا چند ساعت رسمی وجود دارد؟

ج) یک تاجر فرش در ایران می‌خواهد با شریک تجاری‌اش در پاریس گفت‌وگو کند. اگر زمان گفت‌وگو ساعت ۱۰ صبح به وقت پاریس باشد، او چه ساعتی به وقت تهران باید به او تلفن بزند؟

۳. نصرت آقا نقاش روی پله وسط نرdbانش ایستاده است. او سه پله بالا می‌رود و سپس هشت پله پایین می‌آید. بعد چهار پله بالا می‌رود. اکنون اگر نصرت آقا هفت پله بالا برود، روی آخرین پله نرdbانش می‌ایستد. نرdbان نصرت آقا چند پله دارد؟

۴. الف) روی محور اعداد صحیح، بین $1\frac{1}{2}$ و $11\frac{1}{6}$ – چند عدد صحیح وجود دارد؟
ب) روی محور اعداد صحیح، بین $12\frac{1}{9}$ و $34\frac{1}{8}$ – چند عدد حسابی و چند عدد صحیح وجود دارد؟

۵. متن زیر را از کتاب تاریخ ریاضیات^۱ انتخاب کرده‌ایم.

روایت می‌کنند، وقتی ارشمیدس (۲۸۷–۲۱۲ پیش از میلاد) به ریاضیات می‌پرداخت، حتی گرسنگی را از یاد می‌برد. در این باره، همیشه مستخدم به او یادآوری می‌کرد. برای نمونه، یکبار در وان حمام نشسته بود و بی توجه به زمان و مکان با رسم شکل‌های هندسی به کمک آب صابون، روی مسئله‌ای می‌اندیشید. ناگهان مستخدم آمد و همه شکل‌های هندسی را از بین برداشت.

الف) با توجه به متن بالا، سال تولد ارشمیدس چه سالی است؟
ب) مریم میرزاخانی (تصویر زیر)، ریاضی‌دان ایرانی و برنده مدال فیلدز^۲ سال ۲۰۱۴ میلادی است. او در سیزدهم اردیبهشت ۱۳۵۶ هجری شمسی در تهران به دنیا آمد. مریم میرزاخانی چند سال بعد از فوت ارشمیدس به دنیا آمده است؟



^۱ پرویز شهریاری، تاریخ ریاضیات، انتشارات مدرسه، تهران، چاپ پنجم، ۱۳۸۷، صفحه ۷۲.
^۲ رجوع شود به آخر فصل صفرم.

جمع و تفریق اعداد صحیح

۱. یک محور اعداد صحیح رسم کنید و یک پرگار در دست بگیرید!

الف) سوزن پرگار را روی نقطه ۲ بگذارید و دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنید. این دایره

در چه نقاطی، محور اعداد را قطع می‌کند؟

ب) ابتدا سوزن پرگار را روی نقطه ۳ - قرار دهید و دایره‌ای به شعاع ۲ رسم کنید.

دایره در دو نقطه محور را قطع می‌کند؛ نقطه سمت چپ را A و نقطه سمت

راست را B بنامید. سپس سوزن پرگار را روی نقطه A قرار دهید و به شعاع ۴

دایره‌ای رسم کنید؛ نقطه سمت راست محل تقاطع دایره با محور را C بنامید.

اکنون سوزن پرگار را روی نقطه C بگذارید و دهانه پرگار را به اندازه فاصله A

تا B ، باز کرده، دایره‌ای رسم کنید. نقطه سمت چپ محل تقاطع این دایره با

محور چه عددی است؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$2 - 3 + 4 - 5 + 3 - 4 \quad (\text{الف})$$

$$-12 + 18 - 15 - 17 + 11 \quad (\text{ب})$$

$$-23 + 10 - 14 + 7 - 92 + 23 \quad (\text{ج})$$

$$11 - 12 + 35 - 9 - 25 \quad (\text{د})$$

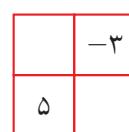
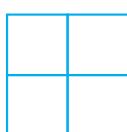
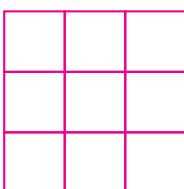
$$1234 - 5678 + 9132 - 4591 + 1203 - 974 \quad (\text{ه})$$

$$37824 - 51245 + 103 - 98461 + 75341 - 27549 + 4908 \quad (\text{و})$$

۳. برای هر یک از قانون‌های زیر، یک الگوی عددی بسازید.

الف) از ۱۱ - شروع کنید و هر عدد را با اضافه کردن عدد ۴ به عدد قبلی بسازید.

- ب) از ۵ شروع کنید و در هر مرحله ۲ را از عدد قبلی کم کنید.
- ج) با ۲ - به عنوان اولین عدد و ۴ - به عنوان دومین عدد شروع کنید. در ادامه هر عدد مجموع دو عدد قبل از آن است.
۴. جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که حاصل $158 \bigcirc (-1418) \bigcirc 127 \bigcirc (-983)$
- الف) کمترین مقدار ممکن باشد.
- ب) بیشترین مقدار ممکن باشد.
۵. عبارت زیر را طوری پرانتز گذاری کنید تا تساوی برقرار شود.
- $$18 + (-13) - (-3) - 7 + 4 = 11$$
۶. الف) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول سمت راست را با عددهای طبیعی طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر صفر شود؟ با عددهای صحیح چطور؟
- ب) آیا می‌توانید جدول میانی را با چهار عدد صحیح متفاوت طوری پر کنید که مجموع هر سطر و هر ستون برابر صفر شود؟
- ج) آیا می‌توانید جدول سمت چپ را با اعداد $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ طوری پر کنید که مجموع سطرها و ستون‌ها برابر باشند؟ (تکرار اعداد مجاز نیست).
- (د) آیا می‌توانید جدول سمت چپ را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر ۱ و مجموع هر ستون برابر ۱ - شود؟



۷. فرض کنید در آسانسور ساختمانی که 5° طبقه دارد، ایستاده‌اید. روی کلیدهای این آسانسور اعداد 1 تا 40 ، صفر و -1 تا -9 نوشته شده است.

الف) بیشترین مسافتی که این آسانسور طی می‌کند، چند طبقه است؟

ب) اگر در طبقه 23 باشد و کلید طبقه -9 را فشار دهید، چند طبقه پایین می‌آید؟

ج) اگر در طبقه -5 باشد و طبقه بالا بروید، به طبقه چندم می‌رسید؟

د) اگر 39 طبقه پایین آمده باشد و در طبقه -7 متوقف شوید، ابتدا در طبقه چندم بوده‌اید؟

ه) فرض کنید ابتدا 29 طبقه بالا رفته و سپس 20 طبقه پایین آمده و بعد از آن 12 طبقه بالا رفته اید و در طبقه 28 متوقف شده‌اید. ابتدا در کدام طبقه بوده‌اید؟

۸. الف) جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که حاصل عبارت زیر برابر 1 باشد.

$$1 \text{ } 0 \text{ } 2 \text{ } 0 \text{ } 3 \text{ } 0 \text{ } 4 \text{ } 0 \text{ } 5 \text{ } 0 \text{ } 6 \text{ } 0 \text{ } 7 \text{ } 0 \text{ } 8 \text{ } 0 \text{ } 9 \text{ } 0 \text{ } 10$$

(ب) چرا نمی‌توان جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کرد که حاصل عبارت بالا برابر صفر باشد؟

۹. در فصل اول با یک مثلث عددی مشهور آشنا شدیم. اگر اعداد هر سطر این مثلث را یکی در میان قرینه کنیم، الگوی زیر ساخته می‌شود.

الف) سطر پنجم و ششم مثلث روبرو را بنویسید.

ب) مجموع اعداد سطر ششم و سپس سطر هفتم این مثلث را به دست آورید.

ج) آیا می‌توانید مجموع اعداد سطر هزارم این مثلث را حدس بزنید؟ سطر هزار و یکم را چطور؟

-1	1
-1	2
-1	3
-1	4

۱۰. جدول زیر، ردهبندی تیم‌های لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) در پایان نیم‌فصل سال ۱۳۹۱ است.

رتبه	تیم‌ها	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	سپاهان	۲۸	۱۸	۱۰	۳۱
۲	استقلال	۱۸		۷	۳۱
۳	فولاد	۲۹	۱۹	۱۰	۲۹
۴	ملوان	۲۰	۱۷	۳	۲۹
۵	راه آهن	۱۷	۱۴	۳	۲۹
۶	تراکتورسازی	۲۷	۱۷	۱۰	۲۸
۷	ساپیا	۱۸	۱۴	۴	۲۶
۸	فجرسپاسی	۲۱	۱۳	۸	۲۴
۹	مس	۱۲	۱۱	۱	۲۴
۱۰	نفت تهران	۲۰	۱۸	۲	۲۲
۱۱	داماش گیلان	۱۷	۲۲		۲۲
۱۲	پرسپولیس		۱۷	۳	۲۱
۱۳	صبای قم	۱۷	۱۶	۱	۲۱
۱۴	پیکان	۱۶		-۱۶	۲۰
۱۵	آلومینیوم		۱۵	-۳	۱۷
۱۶	ذوب آهن	۱۶	۲۷	-۱۱	۱۳
۱۷	نفت آبادان	۱۶	۲۸		۱۱
۱۸	گهر دورود		۲۶	-۱۵	۹

الف) خانه‌های خالی جدول بالا را با اعداد مناسب پر کنید.

ب) مجموع تفاضل گل همه تیم‌ها را بیابید.

۱۱. جای خالی را طوری پر کنید که مجموع اعداد دو سطر با هم برابر شوند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۹۷۰
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	

۱۲. الف) در جدول زیر، در سطر اول عدد صفر را در خانه وسط قرار داده‌ایم و اعداد صحیح دیگر را به ترتیب قبل و بعد از آن نوشته‌ایم. در سطر دوم عدد ۲ را در خانه وسط قرار داده‌ایم. اعداد صحیح را به ترتیب قبل و بعد از ۲ قرار دهید. عددی که در خانه پایین عدد -۳ نوشته‌اید، چیست؟

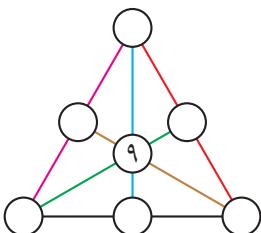
-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
			۲			

ب) اگر جدول بالا را از چپ و راست با قانون گفته شده ادامه دهیم، عددی که در خانه پایین ۱۰۰ قرار می‌گیرد چیست؟ چه عددی در خانه بالای ۸۸ - قرار خواهد داشت؟

ج) خانه‌های خالی جدول زیر را با قانون قسمت «الف» پر کنید.

			...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...		۹۱	
				-۹	

د) در جدول بالا در هر ستون دو عدد وجود دارد. تفاضل هر دو عدد را در زیر آن دو عدد بنویسید. اعدادی که در ردیف سوم نوشته‌اید، چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند؟



در شکل رو به رو، شش پاره خط (با رنگ‌های متفاوت) ۱۳

رسم کرده‌ایم و سپس روی هریک سه دایره قرار داده‌ایم. آیا می‌توانید دایره‌های خالی را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع سه عدد روی هر پاره خط برابر صفر شود؟

کارگاه بازی – دوز با اعداد صحیح

در جدول زیر، دسته‌های سه‌تایی عددها را به صورت افقي، عمودی یا مورب در نظر بگیرید. می‌توان بین برخی از این دسته‌های سه‌تایی با استفاده از علامت‌های «+» یا «-»، یک رابطهٔ تساوی برقرار کرد.

-3	-1	-3	2	6	-4	3	1	5	1
-3	2	-4	-1	5	-3	4	2	-1	3
-2	2	-4	3	1	0	-5	7	0	4
4	-1	-2	6	7	0	-3	3	-4	-2
-1	-3	-5	2	3	-1	1	1	0	3
-2	7	-5	1	0	-4	4	-2	-3	1
-3	1	3	4	5	6	-6	0	5	7
-7	-1	6	-8	1	-6	-5	2	2	6
2	-5	-6	-3	-1	1	3	2	-5	2
-1	-4	3	0	-3	-1	-2	5	-2	-3

برای مثال در جدول بالا، سه‌تایی ۳، ۱ و -۲ باهم این تساوی را می‌سازند:

$$1 - 3 = -2$$

و سه‌تایی -۵، ۲، ۷ این تساوی را:

$$7 + (-5) = 2.$$

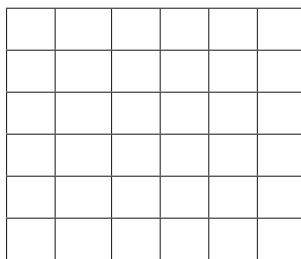
مرحلهٔ اول. با یکی از دوستان خود بازی کنید و در هر نوبت یک تساوی بنویسید. هر کس نتواند در کمتر از ۳۰ ثانیه یک تساوی بیابد، نوبتش را از دست می‌دهد. امتیاز هر بازیکن تعداد تساوی‌های درستی است که نوشته است.

مرحلهٔ دوم. هر بازیکن باید یک جدول 6×6 را با عدددهای -۵، -۴، -۳، -۲، -۱، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در مدت چهار دقیقه پر کند به‌گونه‌ای که عدددهای خانه‌های همسایه‌های هر خانه متفاوت باشند.

برای مثال، در جدول زیر، عددهای خانه‌های همسایه خانه ۱ متفاوت‌اند. دو خانه همسایه‌اند هرگاه یک ضلع مشترک داشته باشند.

-۳	-۱	-۲
۲	۱	-۵
۴	۳	۵

بعد از اینکه هر بازیکن جدول 6×6 زیر را با قانون گفته شده پر کرد، آن را به حریفش بدهد تا او مانند مرحله اول تساوی‌ها را پیدا کند و پایین جدول بنویسد. بازیکنی که در جدول حریفش تساوی‌های بیشتری پیدا کند، برنده است.



این بازی را به صورت لیگ حذفی در کلاس برگزار کنید. نفرات اول، دوم و سوم به ترتیب افزایش $1/5$ ، $1/5$ و $1/5$ نمره میان ترم ریاضی جایزه خواهند گرفت.

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

۱. الف) جاهای خالی را با دو عدد صحیح پر کنید به‌طوری‌که تساوی برقرار باشد.

$$(○ \times ۳) - (○ \times (-۲)) = ۸$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۲. تمام جفت عددهای صحیحی را پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۱۸ باشد.

۳. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $(-21 \div 3) \times (-42 \div 6) \times (-63 \div (-9)) + 7$

(ب) $(-8 + 4) \times (-8) \times 4 \times (-8 \div 4) + (-8 - 4)$

(ج) $5 - 2 + (5 \times (-2)) - (5 - (-2)) \div (2 - (-5))$

(د) $-(16 \times 2) \div (-24 \times 2) - (12 \times (-5)) \div 15 - (-18)$

(ه) $-16 \div 3 \times (3 \div 16) \times (-16 \times 3) - (16 - (-3)) \div (-3 - 16)$

(و) $18 \times 7 \times (21 \div (-3)) \div 42 + (-91) \div 13 - (3 \times (-17))$

(ز) $512 \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$

(ح) $8 \times (-3) \div (-6) \times (-2) \div (-4) + 11$

۴. ابتدا جدول ضرب زیر را کامل کنید. سپس اعداد روی مسیر قرمزرنگ را به ترتیب

جمع بزنید. حاصل جمع چه خواهد شد؟

\times	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0							
1							
2							
3							

۵. اختلاف دمای دو جسم ۸ درجه است. اگر مجموع دمای این دو جسم 20° درجه

باشد، دمای هریک چند درجه است؟

۶. هریک از عبارت‌های زیر را طوری پرانتزگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

$$(الف) \quad 6 - 5 \times 1 - 2 \times 3 - 4 = -9$$

$$(ب) \quad 200 \div 2 \times 5 - (-10) \div (-3) \times 17 = -10$$

$$(ج) \quad 18 \div (-9) \times (-20) \times 20 \div (-10) - (-30) \div 5 = -28$$

۷. در یک آزمون تستی، برای هر پاسخ درست ۴ نمره مثبت و برای هر پاسخ نادرست، ۲ نمره منفی در نظر می‌گیرند. دانشآموزی از ۷۰ پرسش آزمون، به ۵۶ پرسش پاسخ درست داده و به ۵ پرسش جواب نداده است. نمره نهایی این دانشآموز چند می‌شود؟
این نمره چقدر از نمره کامل کمتر است؟

گفت و گو

علم ۱: من فکر می‌کنم این جلسه، آخرین جلسه تدریس این فصل است.

علم ۱: چه فایده‌ای دارد که این قدر زود این فصل را تمام می‌کنید؟!

علم ۲: نه! زود نیست! ترجیح می‌دهم وقت کلاس را ذخیره کنم تا در فصل بعدی چند مسئله چالش‌برانگیز مطرح کنم.

علم ۱: تمرین بیشتر! راز موفقیت دانشآموزان من، تمرین بیشتر است!

علم ۲: شما واقعاً در این تمرین‌های بیشتر، مفهوم جدیدی را به دانشآموزان یاد می‌دهید؟

علم ۱: نه! مفهوم جدیدی در کار نیست! من برخلاف شما که بیست تا تمرین می‌دهید، معتقدم باید دویست تا تمرین داد!

- معلم ۲: چرا؟
تا مطلب برای دانشآموزانم به طور کامل جا بیفتند.
- معلم ۱:
یعنی شما معتقدید که دویست تا تمرین لازم است تا یک مهارت جا بیفتند؟
- معلم ۲:
بله؛ دویست تا؛ حتی بیشتر، سیصد تا.
- معلم ۲:
بنده شنیده‌ام هر آدمی که بخواهد یک توانایی جدید به دست بیاورد، در ابتدا نیاز به تمرین دارد. هم نیاز به تمرین دارد و هم نیاز به راهنمایی. بعدش کم‌کم آن مهارت را می‌آموزد. بعد می‌فهمد که می‌تواند آن کار را انجام دهد؛ اما هنوز شک دارد. بعد شکش بر طرف می‌شود و می‌فهمد که یاد گرفته است. ذهنش می‌گوید: «تو دیگر یاد گرفته‌ای». انگار مغزش هشدار می‌دهد که یاد گرفته‌ای. آن وقت است که اگر به او بگوییم باز هم تمرین کن، مغزش جواب می‌دهد: «دیگر کافی است! بس است!»
- معلم ۱:
شما فکر می‌کنید با بیست تا تمرین یاد می‌گیرند؟
- معلم ۲:
اصلاً چنین فکری نمی‌کنم. من چند تا تمرین مطرح می‌کنم. اگر یاد گرفتند، می‌گوییم کافی است. اگر نه، باید بیشتر تمرین حل کنند. معمولاً دانشآموزان با هوش‌تر به تمرینات مهارتی کمتری نیاز دارند؛ البته باید به ضعیف‌ها نیز توجه داشت. باید به آنها تمرین‌های بیشتری داد؛ ولی در کنار این تمرین‌های اضافه باید به آنها اشتباهات گذشته‌شان را نیز یادآوری کرد تا دیگر اشتباه قبلی را تکرار نکنند.
- معلم ۱:
اما وقتی من تمرین زیاد می‌دهم، اطمینان بیشتری دارم که دانشآموزانم یاد بگیرند.
- معلم ۲:
خدمت شما عرض کردم. اگر کسی مهارتی را یاد گرفته باشد و از او دوباره و دوباره و دوباره، همان مهارت را بخواهند تمرین کند، فریاد اعتراضش

بلند می‌شود.

معلم ۱: من که تا به حال چیزی به نام اعتراض در کلاسم نشنیده‌ام.

معلم ۲: شاید آنها در مغزشان اعتراض می‌کنند.

معلم ۱: حتّی اگر این طور باشد، من بازهم کوتاه نمی‌آیم. ریاضی یعنی تمرین زیاد؛ آنقدر که من معلم مطمئن باشم همه یاد گرفته‌اند.

معلم ۲: به نظرم تمرین‌های تکراری و بیهوده برای بعضی‌ها مُخرب خلاقیت است.
متوجه می‌شوید؟!

معلم ۱: [در حالی که سرش را می‌خاراند] بالاخره من معلم باید با زور هم که شده به دانش‌آموزانم مهارت‌های لازم را یاد بدهم.

یکی از ویژگی‌های پروفسور که باعث می‌شد معلّمی نمونه باشد، این بود که هیچ وقت از گفتن «نمی‌دانم» ابایی نداشت. برای پروفسور پذیرش اینکه سؤالی را نمی‌داند، به هیچ‌وجه مایهٔ شرم‌ساری نبود و در عوض این موضوع گامی به سوی رسیدن به حقیقت بود. برای پروفسور یاد دادن اینکه چه چیزهایی هنوز معلوم نبود یا ناشناخته بود، همان قدر ضروری می‌نمود که آموزش مطالب معلوم و ثابت شده. یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفسور، ترجمهٔ کیهان بهمنی.

فصل ۳

ALGÈBRE
جبر و
Chapitres ۱۷
معادله

N. BOURBAKI
ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

MASSON

Г. КУРОШ

ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕЙ
АЛГЕБРЕ

Introduction to
Commutative Algebra

M. F. Atiyah
I. G. MacDonald

محمد خوارزمی را در همه جای دنیا بعنوان پدر جبر می‌شناستند. خوارزمی کتابی تالیف کرد با عنوان «جبر و المقابلة» که واژه جبر یا algebra نیز از آن برداشت شده است. ترجمه این کتاب در اروپا باعث شد اروپائیان شیوه نوشتمن عدددها را که رومی بود کنار بگذارند و به شیوه فعلی که هندی-عربی نامیده می‌شود روی بیاورند. خوارزمی با متمایز ساختن جبر از حساب گام بزرگی را در تجرید ریاضیات برداشت.

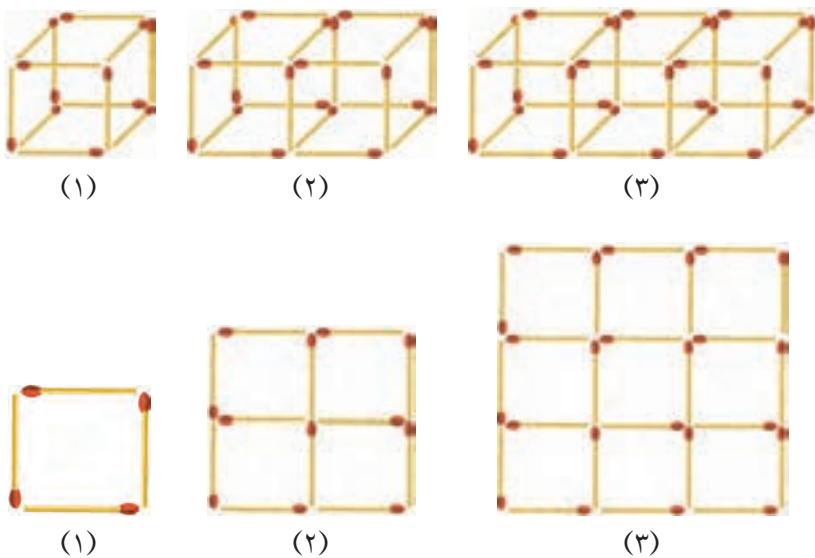
L'ALGEBRA
OPERA
DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.
Con la quale ci siamo da se potrà venire in perfetta
cognizione della teoria dell'Aritmetica.

Con una Taqua copiosa delle materie, che
sono necessarie per l'uso
Pella hora in luce à beneficio degli studi di
delle scienze.

IN BOLOGNA.

الگوهای عددی

۱. شکل‌های زیر، دو الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهند. الگوی اول را مکعبی و الگوی دوم را مربعی می‌نامیم.



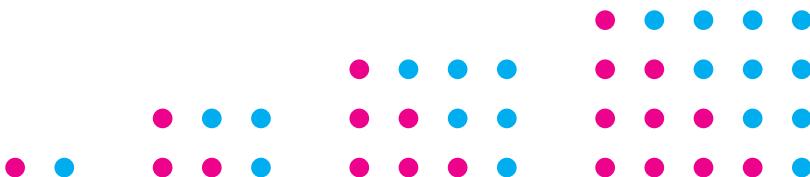
الف) برای هریک از دو الگوی بالا، باتوجه به چوب‌کبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) رارسم کنید.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n^3 هر الگو را برحسب n بیابید.

ج) باتوجه به رابطه‌هایی که در قسمت قبل به دست آوردید، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل (۲۰) هریک از الگوها را پیدا کنید.

د) آیا می‌توانید شکلی از الگوی مکعبی بیابید که تعداد چوب‌کبریت‌های آن با تعداد چوب‌کبریت‌های یک شکل از الگوی مربعی برابر باشد؟

۲. در زیر، چهار شکل از یک الگو را مشاهده می‌کنید.



الف) شکل پنجم و ششم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل n ام این الگو چند دایره توپر قرمز وجود دارد؟

۳. حدس بزنید که جمله هزارم هریک از الگوهای زیر چیست. دلیل حدس خود را بنویسید.

الف) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

(ب) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$

(ج) $3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots$

(د) $-7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots$

(ه) $2, -5, -10, 16, -26, -37, \dots$

(و) $1, 4, 9, 16, \dots$

(ز) $7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, \dots$

(ح) $2, 4, 8, \dots$

(ط) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

۴. جدول‌های زیر را به دقت ببینید. همه عددهای نوشته شده جدول سمت راست نتیجه قانونی است که روی عددهای جدول سمت چپ اعمال شده است.

-5	-8	7	4	9
6	3	4	-7	0

30	24	-28	28	0
11	11	-3	-11	-9

با کشف و اعمال این قانون روی عددهای جدول سمت چپ زیر، خانه‌های خالی را پر کنید.

1	2	-3	5	-8
2	-2	2	4	-1

جانگهدار

می‌خواهیم مفهومی را تعریف کنیم به نام «جانگهدار».

جانگهدار موجودی است که جا نگه می‌دارد!! این تعریف ساده‌تر از آن است که بخواهیم آن را شرح دهیم. در ادامه یک مثال از جانگهدار می‌آوریم.

داریوش کاپیتان تیم فوتسال کلاس، باید یک تیم برای شرکت در مسابقات فوتسال به مسئولان مدرسه معرفی کند. ولی او در انتخاب دروازه‌بان دچار مشکل شده است. داریوش برای پست دروازه‌بانی باید یک نفر را معرفی کند؛ ولی تعداد کسانی که می‌توانند دروازه‌بان باشند زیاد است. او باید از بین سهند، هونمن، سروش و محمد یکی را انتخاب کند. مسئولان مدرسه هم گفته‌اند داریوش سریع‌تر تیم خود را معرفی کند. بنابراین داریوش تیم را بدون دروازه‌بان معرفی کرد و از مسئولان مدرسه درخواست کرد که بعداً دروازه‌بان را معرفی کند.

دروازه‌بان	داریوش	بردیا	احسان	علیرضا	فرشاد	محسن	ذخیره	ذخیره	مهاجم	هاfibک	هاfibک	مدافع	دروازه‌بان
X													

در اینجا X جانگهدار است. کسانی که می‌توانند در جای X قرار بگیرند، عبارت‌اند از سهند، هونمن، سروش و محمد؛ بنابراین X یک جانگهدار اسمی است؛ یعنی موجوداتی که می‌توانند به جای X قرار بگیرند اسمی دانش‌آموزان هستند.

در ریاضیات معمولاً جانگهدارها با حروف انگلیسی نشان داده می‌شوند. به این جانگهدارها «متغیر» می‌گویند.



عبارت جبری

۱. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(الف) ۱۸x + ۱۰y - ۸x + y - ۳x \quad (ب) ۸(a - ۲y) + ۴(۴y - ۲a)$$

$$(ج) ۳(x - ۲z) - (۸x - ۴z) - ۳(x - ۲z)$$

۲. جاهای خالی را با عبارت‌های جبری مناسب پر کنید.

$$(الف) ۱۲m + \dots - ۳k + \dots = ۳m + ۳k$$

$$(ب) ۶(۲x + \dots) - ۲(\dots + ۳y) = ۶x + ۶y$$

۳. از مدرسهٔ حلی تا شهرک بهار ۱۲۰۰ متر، از مدرسهٔ علامه تا شهرک بهار ۹۰۰ متر و از

مدرسهٔ حلی تا مدرسهٔ علامه ۶۰۰ متر است.

الف) اگر صحیح‌ها a دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسهٔ حلی و b دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسهٔ علامه بروند، در مجموع در یک صحیح چند متر پیاده‌روی توسط همهٔ دانش‌آموزان صورت می‌گیرد؟

ب) اگر در عصر $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان حلی به سمت علامه بروند و از آنجا به شهرک برگردند و بقیهٔ دانش‌آموزان حلی به شهرک برگردند و همچنین تمام دانش‌آموزان علامه به شهرک برگردند، در مجموع همهٔ دانش‌آموزان در یک بعدازظهر چند متر پیاده‌روی انجام می‌دهند؟

۴. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد. با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۵. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد. با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

۶. در شهر عجایب قیمت هر میوه x ، هر غذا y و هر نوشیدنی z است. جدول زیر نشان می‌دهد که آفای شکمو در سه روز گذشته چه خوراکی‌هایی خورده است. ابتدا جدول را کامل کنید و سپس بگویید که آفای شکمو در این ۳ روز چقدر پول بابت شکم خرج خود کرده است.^۱

نوع خوراکی	تعداد دفعات مصرف	قیمت
سیب	۴ بار	
چلوکباب	۲ بار	
شربت	۶ بار	
نوشابه	۹ بار	
پیتزا	۱۳ بار	
گلابی	۱ بار	
خیار	۱۸ بار	
آب پرتقال	۳ بار	
موز	۵ بار	
أُملت	۱۵ بار	

۷. در پارکینگ لاله، تعداد دوچرخه‌ها را x ، تعداد سه‌چرخه‌ها را y و تعداد ماشین‌ها را z در نظر می‌گیرند.

الف) تعداد وسائل نقلیه‌ای که در پارکینگ لاله موجود است را با یک عبارت جبری نشان دهید.

^۱ حکایت آخر این فصل را بخوانید!

ب) اگر در پارکینگ لادن ۳ برابر پارکینگ لاله دوچرخه، ۲ برابر پارکینگ لاله سهچرخه و نصف پارکینگ لاله ماشین موجود باشد، تعداد وسایل نقلیه‌ای را که در هر دو پارکینگ موجود است، با یک عبارت جبری نشان دهید.

ج) در هر دو پارکینگ چند چرخ موجود است؟



۸. می‌خواهیم با استفاده از خاصیت پخشی بررسی کنیم که چرا حاصل ضرب هر دو عدد منفی، عددی مثبت است. ابتدا با یک مثال، حاصل ضرب یک عدد مثبت در عددی منفی را بررسی می‌کنیم.

الف) با پر کردن جاهای خالی با عدهای مناسب نشان دهید: $-12 = -6 \times 2$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots + 2 \times \dots \\ 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times \dots + 2 \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 2 \times (-6) = -12.$$

ب) با پر کردن جاهای خالی با عدهای مناسب نشان دهید: $12 = -6 \times -2$

$$\left. \begin{array}{l} -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots + (-2) \times \dots \\ -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \times \dots + (-2) \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow -2 \times (-6) = 12.$$

ج) اگر a و b دو عدد مثبت باشند، نشان دهید $ab = (-a)(-b)$.

مقدار عددی پک عبارت جبری

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، با توجه به ستون اول، جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. نماد «...» یعنی روند هر سطر با همان الگو ادامه دارد.

الف)

x	0	1	2	3	4	...	12	13
$2x - 1$...		

(ب)

x	۳	۴	۵	۶	۷	...	۲۳	۲۴
$x(x - 1)$...		

(ج)

x	1	2	3	4	5	...	9	10
$\varphi x.x + \gamma$...		

(ج)

x	2	3	4	5	6	...	12	13
$x \cdot x + x$...		

۲. در هریک از قسمت‌های زیر مشخص کنید مساحت هر شکل بر حسب چه متغیرهایی نوشته شده است و هر متغیر نشان‌دهنده چیست؟

xy : مساحت مستطيل (الف)

مساحت متوازى الاضلاع (بـ ah

مساحت لوزی (ج $\frac{ab}{2}$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{1}{2}(a + b)h$$

۳. برای مقادیر داده شده در هر قسمت، مساحت خواسته شده را به دست آورید.

الف) مساحت مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی با طول قاعده ۲ و ارتفاع ۵.

ج) مساحت یک لوزی با طول قطرهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{6}$.

د) مساحت ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۱۲ و ۴، و ارتفاع ۳.

معادله^۱

۱. عبارت‌های سمت راست چه تفاوتی با عبارت‌های سمت چپ دارند؟

- $2x + 2y$

- $2x + 6 = 24$

- $\frac{1}{4}ah$

- $S = \frac{5}{4}h$

- \sqrt{S}

- $S = \frac{\sqrt{2}}{4}d$

- xy^{-1}

- $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

۲. ابتدا هر یک از مسائل زیر را حل کنید. سپس مشخص کنید که پاسخ شما در هر

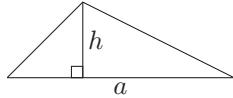
قسمت با کدامیک از عبارت‌های پرسش ۱ برابر یا معادل است.

الف) اگر طول و عرض مستطیلی را به ترتیب با نمادهای x و y نشان دهیم، محیط این مستطیل را بر حسب x و y بنویسید.

ب) طول مستطیلی را با نماد x نشان می‌دهیم. اگر عرض و محیط این مستطیل به ترتیب ۳ و ۲۴ واحد باشند، معادله‌ای بنویسید که با حل آن بتوان طول مستطیل را حساب کرد.

^۱ مسائل این بخش تمرين‌هایی در جهت نوشتن و حل معادله است. ممکن است این مسائل از روش‌های مستقیم (ابتداًی و یا هوشمندانه) حل شوند. ولی به هیچ وجه گمان نکنید استفاده از روش‌های مستقیم همیشه در ریاضیات راهگشا و آسان خواهد بود.

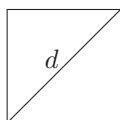
ج) اگر قاعده و ارتفاع مثلث را به ترتیب با نمادهای a و h نشان دهیم، مساحت این مثلث را برحسب a و h بنویسید.



د) مساحت و ارتفاع مثلث متساوی الساقین را به ترتیب با نمادهای S و h نشان می‌دهیم. اگر قاعده این مثلث ۵ واحد باشد، رابطه بین مساحت و ارتفاع این مثلث چیست؟

ه) اگر مساحت مربعی را با S نشان دهیم، طول ضلع این مربع را برحسب S بنویسید.

و) مساحت مربعی را با S و طول قطر آن را با d نشان می‌دهیم. رابطه‌ای بین مساحت و طول قطر این مربع باید.



ز) اگر پول حسن را با x و پول حسین را با y نشان دهیم، نسبت پول حسن به پول حسین را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ح) اگر پول حسن را با x و پول حسین را با y نشان دهیم و بدانیم نسبت پول حسن به پول حسین ۲ به ۱ است، رابطه‌ای بین x و y بنویسید.

۳. هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $5t - 4 = 16$

(ب) $-3m - 2 = 13$

(ج) $12x + 13 = 1$

(د) $12 = 6 - 2x$

(ه) $2b = 8b - 18$

(و) $5z + 2 = 3z - 5$

(ز) $3g + 4 - g + 1 = 3 - 4g$

۴. سگی به دنبال خرگوشی که با آن 15° متر فاصله دارد، شروع به دویدن می‌کند. خرگوش در هر ثانیه ۲ متر و سگ در هر ثانیه ۴ متر می‌دود. بعد از چند ثانیه سگ به خرگوش می‌رسد؟

۵. اگر عدد ۷۲ به سه قسمت متناسب با عدهای ۲، ۴ و ۶ تقسیم شود، کوچکترین قسمت برابر چه عددی خواهد شد؟

۶. در یک بازی، جریمه هر خطای سه برابر جریمه خطای قبلی است. اگر یک بازیکن چهار بار خطای کند و در کل 40000 تومان جریمه شود، جریمه اولین خطای چقدر بوده است؟

۷. نینا، مینا و مینو سه خواهرند که یک بسته شکلات را تا آخر خورده‌اند. تعداد شکلات‌هایی که نینا خورده است، یکی بیشتر از دو برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. تعداد شکلات‌هایی که مینو خورده است، پنج عدد کمتر از سه برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. اگر مینو و نینا به تعداد مساوی شکلات خورده باشند، مینا چند شکلات خورده است؟ مینو و نینا چند شکلات خورده‌اند؟

۸. دو خودرو همزمان از تهران به سمت زاهدان حرکت کردند. اگر خودرو اول با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت و خودرو دوم با سرعت 115 کیلومتر بر ساعت حرکت کنند، بعد از چند ساعت فاصله این دو خودرو از هم 135 کیلومتر خواهد شد؟



۹. علی و رضا در مغازه پدرشان سبدهای حصیری درست می‌کنند. علی پسر بزرگ‌تر، روزی ۵ سبد بیشتر از رضا می‌بافد. اگر علی ۳ روز و رضا ۶ روز کار کند، روزی هم 6 عدد سبد می‌بافند. تعیین کنید هر کدام روزی چند سبد می‌بافند.

۱۰. یک نفر تعدادی جعبه دارد و در آن جعبه‌ها می‌خواهد کتاب‌هایش را قرار دهد. اگر در هر جعبه 40 کتاب قرار دهد، 180 کتاب روی زمین می‌ماند. اگر در هر جعبه 60 کتاب قرار دهد، 3 جعبه خالی برایش باقی می‌ماند. او چند جعبه و چند کتاب دارد؟
۱۱. این مسئله را ببینید.

چادر ملی

فاطمه قصد دارد با جمع کردن پول خود یک چادر ملی که آن را بنیاد ملی مُد و لباس اسلامی-ایرانی معرفی کرده است، خریداری کند. قیمت این چادر $s + 5d$ است که در آن d قیمت یک متر چادر و s هزینه دوخت چادر است. اگر (پارچه) چادر را متری 10000 تومان خریده باشد و هزینه دوخت آن 20000 تومان باشد، پول چادر فاطمه چقدر می‌شود؟

در این مسئله قیمت چادر این طور محاسبه می‌شود: پنج برابر قیمت یک متر پارچه به علاوه هزینه دوخت چادر.

فاطمه می‌توانست هر جنس پارچه‌ای را که دوست داشت، سفارش دهد. در این صورت قیمت پارچه ممکن بود گران‌تر یا ارزان‌تر شود. هزینه دوخت را هم خیاط تعیین می‌کرد. خیاط می‌توانست هر مقدار ثابتی که می‌خواست اعلام کند.

الف) عدد 5 در این مسئله نشان‌دهنده چیست؟

ب) هزینه دوخت چادر با بالا رفتن d زیاد می‌شود یا با بالا رفتن s ؟

ج) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $s + 5d$ محاسبه شود، به نظر شما نشان‌گر چیست؟

(د) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $cd + s$ محاسبه شود، به نظر شما نشان‌گر چیست؟

(ه) قیمت یک چادر در یک تولیدی چادر به صورت $t - \frac{1}{10}(5d + s)$ محاسبه

می‌شود. به نظر شما در این رابطه t بیانگر چیست؟ علامت «-» نشان از چه اتفاقی در محاسبه قیمت چادر می‌دهد؟

و) به عنوان یک خیاط خلاق، رابطه‌ای برای قیمت چادر ارائه دهید که هم شما و هم مشتری‌هایتان راضی باشند.

۱۲. دختر دانشجوی ۱۸ ساله‌ای از من پرسید: دیروز، در جشن تولد چهلمین سال شما، سه دختر پیرامون شما را گرفته بودند، آنان چه کسانی بودند؟
گفتم: آنان دختران من بودند.
گفت: آنان چند ساله‌اند؟

گفتم: بگذار آن را به صورت یک مسئله در بیاورم؛ حاصل ضرب سن آنها برابر است با حاصل ضرب سن من و شما، و مجموع عمر شان به اندازه تفاوت سن من با سن خواهر کوچک شماست.

دختر دانشجو، در حالی که به مسئله می‌اندیشید، رفت و پرسش‌کنن بازگشت.
گفتم: آرام باش، من می‌دانم شما میان دو پاسخ سرگردان و حیران هستید، ولی بدان در میان دخترانم دوقلو نیستند.

گفت: بنابراین، در میان دختران شما کسی همسن و سال من نیست.
خب، حالا بگویید سن دختران من چقدر است؟ و سن خواهر کوچک دختر دانشجو چقدر است؟^۱

^۱ احمد سلیم سعدان، لذت اندیشه ریاضی، ترجمه ستار عودی، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۳،

حکایتی از گلستان سعدی

یکی از ملوک عجم طبیبی حاذق به خدمت حضرت محمد مصطفی (ص) فرستاد. سالی در دیار عرب بود و کسی تجربه پیش او نیاورد و معالجه ازوی در نخواست. پیش پیغمبر آمد و گله کرد که مرین بنع را معالجت اصحاب فرستاده‌اند و در این مدت کسی التفاوت نکرد تا خدمتی که بر بنع معین است به جای آورد. رسول علیه السلام گفت: این طایفه را طریقی است که تا اشتها غالب نشود نخورند و هنوز اشتها باقی بود که دست از طعام بدارند. حکیم گفت: این است موجب تندرسی زمین بیوسید و برفت.

سخن آن‌گه کند حکیم آغاز	یاسران گشت سوی لقمه دراز
که ز ناگفتنش خلل زاید	یا ز ناخوردنش بجان آید
لا جرم حکمتش بود گفتار	خوردنش تندرسی آرد بار



طبیعت بهترین کتاب برای مطالعه و دیدن شکل‌های مختلف هندسی است. آیا تا به حال به تارهای عنکبوت دقت کرده‌اید؟ چه شکل‌های هندسی را در تار عنکبوت می‌توانید نام ببرید؟ آیا به این اندیشیده‌اید که عنکبوت چگونه می‌تواند تارهایش را با این نظم و دقت درست کند؟

روابط بین پاره خطها

۱. همه پاره خطهای موجود در شکل زیر را نام ببرید.



۲. چند مثلث با محیط ۷ واحد می‌توان رسم کرد به طوری‌که طول ضلعهای آنها عده‌های صحیح باشند؟ هریک از مثلث‌ها را رسم کنید.

۳. روی محور زیر، چند نقطه، مانند D ، وجود دارد به طوری‌که $\overline{AB} = \overline{CD}$



۴. با توجه به اعداد و نمادهای به کار رفته در شکل‌های زیر، چرا در هر شکل آیا استدلالی وجود دارد که برای هر سه شکل درست باشد؟



۵. نقاط P ، Q ، R و S روی یک خط قرار دارند به طوری‌که S بین R و Q ، و Q بین P و S قرار دارد.

الف) با توجه به توضیحات بالا، شکل مناسبی رسم کنید.

ب) اگر $\overline{RS} = \overline{PQ}$ ، $\overline{PS} = \overline{RQ}$ ، چرا

۶. نقاط A ، B ، C و D روی یک خط قرار دارند به طوری‌که $\overline{AC} = \overline{BD} = y$ و $\overline{AB} = x$ در هریک از قسمت‌های زیر، ابتدا شکل مناسبی رسم کنید و سپس عبارت جبری خواسته شده را به دست آورید.

الف) اگر نقطه C بین دو نقطه A و D ، و نقطه D بین دو نقطه B و C باشد، آنگاه \overline{CD} را برحسب متغیرهای x و y بنویسید.

ب) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D ، و نقطه D بین دو نقطه A و B باشد، آنگاه \overline{CD} را به صورت یک عبارت جبری با متغیرهای x و y بنویسید.

ج) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D ، و نقطه B بین دو نقطه A و D باشد، آنگاه را برحسب x و y بهدست آورید.

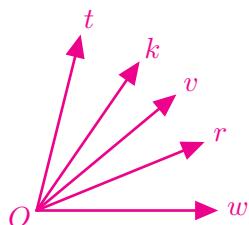
۷. دو پاره خط AB و CD روی یک خط راست قرار دارند و نقطه O وسط هر دو پاره خط است. ابتدا شکل (شکل‌های) مناسبی رسم کنید. سپس،

الف) ثابت کنید $\overline{AC} = \overline{BD}$.

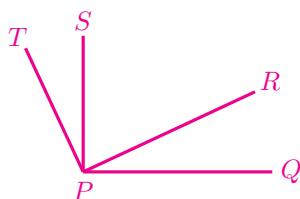
ب) ثابت کنید $\overline{AD} = \overline{BC}$.

روابط بین زاویه‌ها

۱. همه زاویه‌های حاده موجود در شکل زیر را نام ببرید.



۲. در شکل زیر، $.T\hat{P}S = R\hat{P}Q = 90^\circ$. ثابت کنید $T\hat{P}R = S\hat{P}Q = 90^\circ$



۳. الف) متمم زاویه ۲۸ درجه را بهدست آورید.

ب) اختلاف مکمل و متمم زاویه ۲۸ درجه چقدر است؟

ج) اختلاف مکمل و متمم زاویه ۷۷ درجه را بهدست آورید.

د) آیا اختلاف مکمل و متمم هر زاویه عددی ثابت است؟ چرا؟

۴. الف) دو پاره خط AB و CD یکدیگر را در O قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $\angle AOC = 70^\circ$

هریک از زاویه‌های $A\hat{O}D$ ، $B\hat{O}C$ و $B\hat{O}D$ چند درجه است؟

ب) دو پاره خط AB و CD یکدیگر را در O قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $\angle AOC = x$

هریک از زاویه‌های $A\hat{O}D$ ، $B\hat{O}C$ و $B\hat{O}D$ را برحسب x به‌دست آوردید.

۵. الف) اگر زاویه‌ای 45° درجه باشد، زاویه مکمل آن چند درجه است؟

ب) اگر زاویه‌ای x درجه باشد، زاویه مکمل آن برحسب x چقدر است؟

ج) مجموع دو زاویه (به اندازه‌های a و b) 75° درجه است. مجموع مکمل‌های این

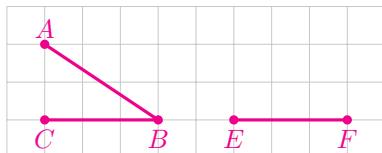
دو زاویه چند درجه است؟

۶. در طول شباهنگ روز، چند بار زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار 90° درجه

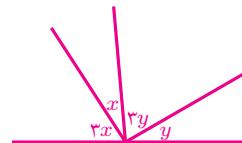
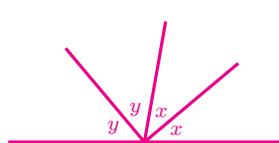
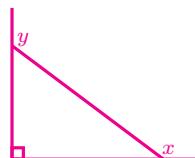
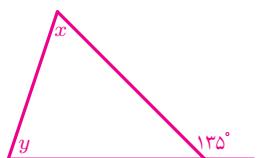
می‌شود؟

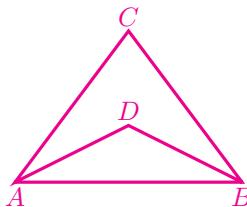
۷. در شکل زیر، نقطه D را چنان بیابید که $\overline{AB} = \overline{ED}$ و دو زاویه ABC و

مکمل باشند.



۸. در هریک از شکل‌های زیر، $x + y$ چقدر است؟





۹. در شکل روبرو، $D\hat{A}B = D\hat{B}A$ و $C\hat{A}B = C\hat{B}A$ و

چرا آیا می‌توان نتیجه گرفت $AD = BD$ و $B\hat{C}D = C\hat{A}D$ به ترتیب نیمساز زاویه‌های A و B هستند؟

۱۰. دو زاویه AOB و BOC مکمل‌اند. اگر Ox نیمساز زاویه AOB و Oy نیمساز زاویه BOC باشد، ثابت کنید $x\hat{O}y = 90^\circ$ است.

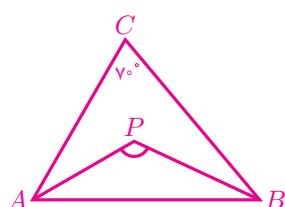
۱۱. سه پاره خط ZW ، LK و XY در نقطه O هم‌مرس‌اند. نیم خط OK نیمساز $Z\hat{O}Y$ و $L\hat{O}W$ است.

الف) با توجه به اطلاعات داده شده، شکل مناسبی رسم کنید.

ب) در شکلی که رسم کرده‌اید، چند زاویه متقابل به رأس وجود دارد. هریک از آنها را نام ببرید.

ج) اندازه زاویه‌های XOL ، ZOX و ZOY را به دست آورید.

۱۲. اندازه یک زاویه مثلثی از زاویه دوم 25° درجه بیشتر و اندازه زاویه سوم 9 واحد کمتر از دو برابر زاویه دوم است. اندازه هریک از سه زاویه این مثلث را بیابید.

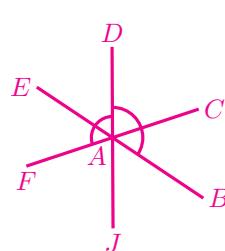


۱۳. در شکل روبرو، $\hat{C} = 70^\circ$ ، AP نیمساز زاویه A و BP نیمساز زاویه B است.

الف) مقدار $P\hat{A}B + P\hat{B}A$ چقدر است؟

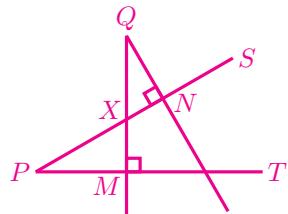
ب) زاویه APB چند درجه است؟

۱۴. در شکل زیر سه پاره خط BE ، CF و DJ در نقطه A هم‌مرس‌اند. اگر $B\hat{A}D = 124^\circ$ باشد، اندازه زاویه $E\hat{A}F$ چقدر است؟



و $D\hat{A}F = 108^\circ$ باشد، اندازه زاویه $E\hat{A}F$ چقدر است؟

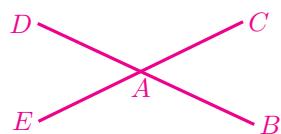
۱۵. در شکل زیر، QN بر PS و QM بر PT عمود است. چرا زاویه‌های P و Q همانند اند؟



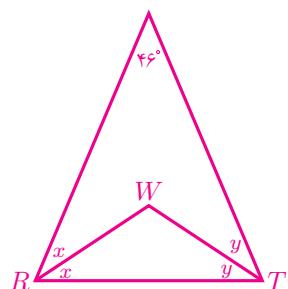
۱۶. اگر زاویه‌های مثلثی به صورت زیر باشند، اندازه زاویه سوم چقدر است؟
- (الف) 134° و 26°
 (ب) 90° و n .
 (ج) $a + a - 60^\circ$ و u .
 (د) v و 60° .
۱۷. در مثلث ABC ، اندازه زاویه A سه برابر اندازه زاویه B و نصف اندازه زاویه C است.

اندازه زاویه A چقدر است؟

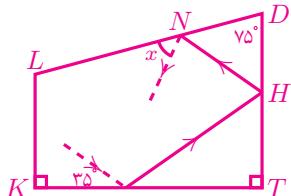
۱۸. در شکل زیر، آنگاه اندازه زاویه $CAD = 2x + 5^\circ$ و $E\hat{A}D = 3x - 15^\circ$ ، اگر چقدر است؟



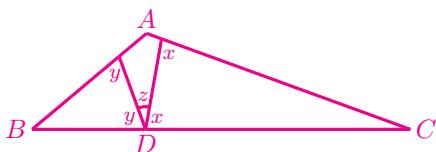
۱۹. در شکل زیر، \widehat{RWT} چند درجه است؟



۲۰. در شکل، مسیر توب بیلیارد را نشان داده‌ایم که با زاویه 35° به یکی از دیواره‌های میز بیلیارد می‌خورد و مسیرش را ادامه می‌دهد. اگر زاویه برخورد توب به میز با زاویه دور شدن توب از میز برابر باشد، x را بیابید.



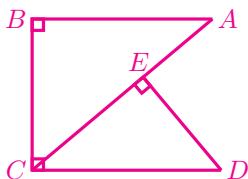
دور شدن توب از میز برابر باشد، x را بیابید.



۲۱. در شکل رو به رو، $\hat{A} = 110^\circ$.

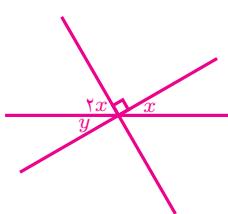
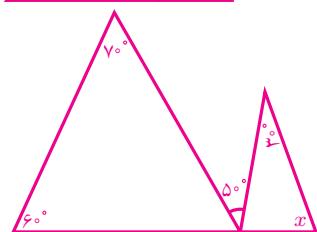
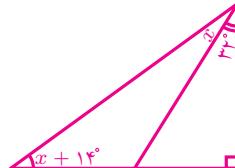
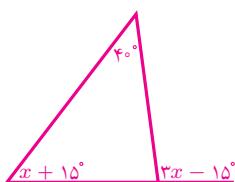
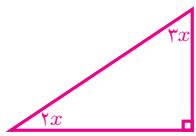
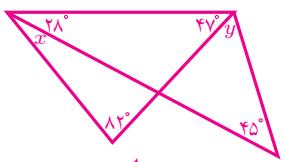
الف) مقدار $y + z$ را بیابید.

ب) مقدار z چقدر است؟



۲۲. در شکل زیر، $.A\hat{C}B = E\hat{D}C = \hat{B} = B\hat{C}D = D\hat{E}C = 90^\circ$.

ثابت کنید $.x = y$. در هر یک از شکل‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.



تبديل‌های هندسی و همنهشتی

نکته. دو نام‌گذاری $ABCD$ و $CADB$ شکل‌های یکسانی را نشان نمی‌دهند! در چهارضلعی $ABCD$ ، دو رأس A و C روی یک ضلع نیستند درحالی‌که در چهارضلعی $CADB$ دو رأس A و C روی یک ضلع قرار دارند. شکل‌های زیر این مطلب را روشن می‌کنند.



در نام چندضلعی‌ها هر دو حرف کنارهم نشان‌دهنده دو رأس روی یک ضلع‌اند. توجه کنید که شکل سمت راست بالا را می‌توان به صورت‌های $DBCA$ ، $ADBC$ یا $CBDA$ نیز نام‌گذاری کرد.

۱. در کدام قسمت‌ها، دو چهارضلعی داده شده یکسان نیستند؟

ب) $BADC$ و $BCDA$

الف) $CDAB$ و $ABCD$

۲. در کدام قسمت، دو پنجضلعی داده شده یکسان نیستند؟

ب) $DEABC$ و $CDEAB$

الف) $ABCDE$ و $ABCDE$

د) $ECDBA$ و $CADBE$

ج) $DBCAE$ و $CAEDB$

۳. در چهارضلعی $ABCD$ دو مثلث ABD و BCD همنهشت‌اند.

الف) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

● $B\hat{A}D = B\hat{C}D$

● $A\hat{B}D = C\hat{D}B$

● $\overline{AB} = \overline{CD}$

ب) اگر $\hat{A}BD = \hat{C}BD$ ، آنگاه کدام‌یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

● $\overline{AB} = \overline{CD}$

● $\overline{AB} = \overline{BC}$

● $\overline{AD} = \overline{BC}$

ج) اگر $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، آنگاه کدام‌یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

● $A\hat{D}B = C\hat{B}D$

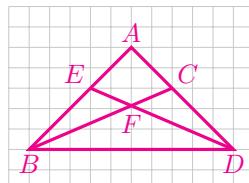
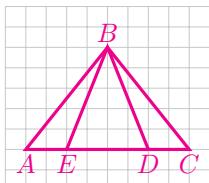
● $A\hat{B}D = C\hat{B}D$

۴. در چهارضلعی $IRAN$ دو مثلث IRA و INA هم نهشت‌اند.

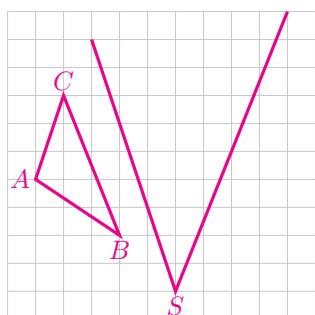
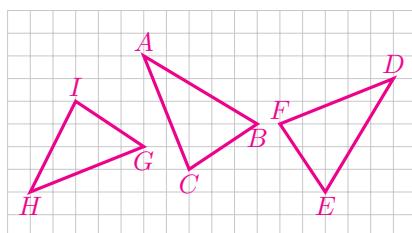
الف) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{AN}$, آنگاه چه تبدیل‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

ب) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{IN}$, آنگاه چه تبدیل‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

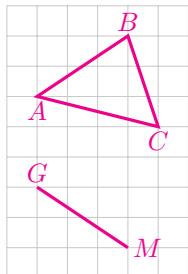
۵. در هریک از شکل‌های زیر، دو جفت مثلث هم نهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و مشخص کنید با چه تبدیل‌هایی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. سپس اجزای برابر آنها را مشخص کنید.



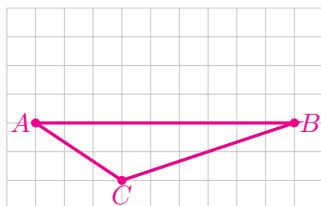
۶. در شکل زیر کدام مثلث‌ها هم نهشت‌اند؟ تبدیل‌هایی که آنها را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید. سپس اجزای برابر دو مثلث هم نهشت را مشخص کنید.



۷. در شکل رو به رو، دو نقطه P و Q را روی اضلاع S طوری بیابید که دو مثلث PQS و ABC هم نهشت شوند. تبدیل‌هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.

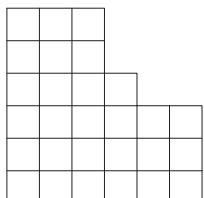


۸. در شکل رو به رو، نقطه N را طوری بیابید که دو مثلث ABC و GMN برابر باشند. تبدیل هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می کند، بباید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.

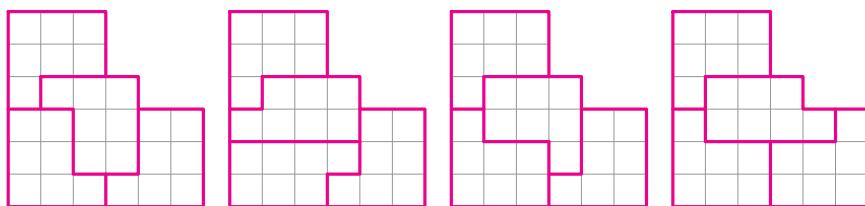


۹. در شکل رو به رو، چند نقطه مانند D می توان یافت به طوری که دو مثلث ABD و ABC همنهشت باشند؟ در هر حالت تبدیل ها را مشخص کنید و اجزای برابر را بباید.

۱۰. در یک آزمون مسئله زیر مطرح شده بود.
شکل زیر را به چهار شکل همنهشت تقسیم کنید.

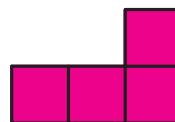
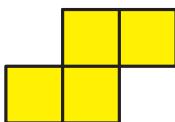


شکل های زیر، پاسخ چهار نفر از دانش آموزان را نشان می دهد.

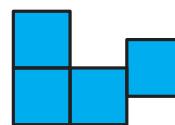
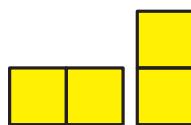
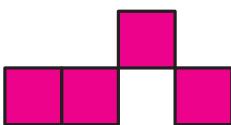


کدام پاسخ درست و کدام نادرست است؟ درباره پاسخ های درست، مشخص کنید.
چه تبدیل هایی شکل های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می کنند.

۱۱. به شکل‌هایی در صفحه که از بهم چسباندن یک (یا چند) ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخانه‌ای می‌گویند. برای مثال، سه شکل زیر، چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) هستند.



ولی سه شکل زیر چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) نیستند.



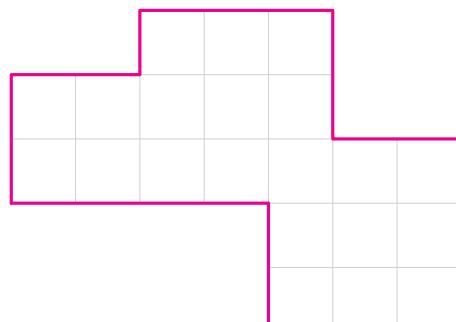
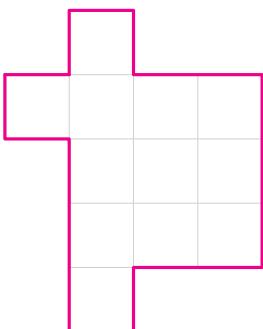
الف) چند ۴-خانه‌ای غیر همنهشت وجود دارد؟

ب) چند ۵-خانه‌ای غیر همنهشت وجود دارد؟

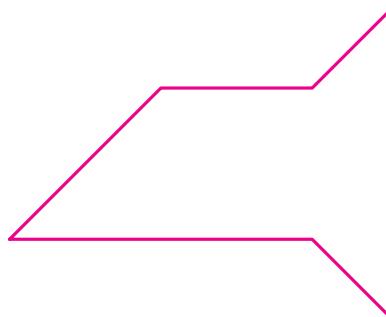
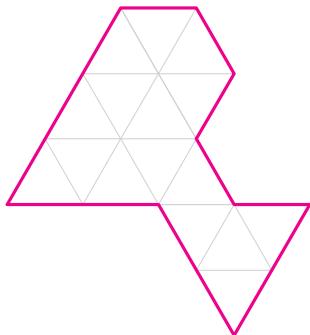
ج) سی و پنج ۶-خانه‌ای غیر همنهشت وجود دارد. حداقل ده ۶-خانه‌ای غیر همنهشت رسم کنید و آنها را با پنج نفر از همکلاسی‌هایتان به اشتراک بگذارید.

آیا از این جواب‌ها، سی و پنج ۶-خانه‌ای غیر همنهشت حاصل می‌شود؟

۱۲. هریک از شکل‌های زیر را به سه چندضلعی همنهشت تقسیم کنید. (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



۱۳. با یک برش، هریک از چندضلعی‌های زیر را به دو چندضلعی همنهشت تقسیم کنید.
 (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد
 مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



۱۴. پروژه. با ایده گرفتن از دو مسئله ۱۲ و ۱۳ بالا، دو پروژه تعریف کنید و درباره آن فکر کنید.

صورت پروژه و پاسخ خود را با مراجعه به «www.webmath.ir» ارسال کنید.

^۱P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 70.



گفت و گو

معلم ریاضی: هههههه!

معلم ورزش: چی شده؟ جک می‌خونی؟ ما رو هم بی‌نصیب ندار.

معلم ریاضی: نه! مطلبی درباره «الکساندر گروتندیگ» می‌خونم. اینجا نوشته که یه روز در حال سخنرانی گفته: «یه عدد اول در نظر بگیرید، مثل ۵۱!»



الکساندر گروتندیک

معلم ورزش: الکساندر چی؟

معلم ریاضی: گروتندیک. یه ریاضی‌دان بزرگه!

معلم ورزش: حالا چرا خندیدی؟

معلم ریاضی: چون ۵۱ عدد اول نیست!

معلم ورزش: این خیلی سخته که تشخیص بدن ۵۱ عدد اوله یا نه؟

معلم ریاضی: نه!! خیلی هم آسونه. همینه که خنده‌داره!

معلم ورزش: خب بیخشید؛ اینکه اصلاً خنده نداره. یه نفر که ادعا می‌کنه ریاضی‌دانه یه چیز آسون رو نتوانسته تشخیص بده؛ حتماً یارو متقلب بوده!

معلم ریاضی: نه! همه ریاضی‌دان‌ها می‌دونن که گروتندیک یه ریاضی‌دان تراز اوله. وسط یه بحث خیلی سنگین، یه دفعه حواسش پرت می‌شه و این اشتباه ازش سر می‌زنه. ریاضی‌دان‌های بزرگ هم گاهی اشتباههای کوچیک می‌کنن.

عدد اول

1. با توجه به گفت و گوی بالا، به نظر شما چرا ریاضی‌دان بزرگی مانند گروتندیگ گفته ۵۱ عدد اول است؟

۱	۲۲	۱۵		۲۱
۱۸				
	۱۲	۷		
	۵			
۲۳	۱۴		۶	۲۵

۱۰. عددهای ۱ تا ۲۵ (و هر کدام یک بار) را در ۲۵ خانه جدول رو به رو طوری قرار دهید که مجموع هر دو عدد همسایه، عدد اول شود.
- به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.
۱۱. الگوی عددی زیر، ۳ عضو دارد.

۳, ۵, ۷.

همهٔ اعضای این دنباله، عدد اول اند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان است.

الف) یک الگوی عددی با ۵ عضو بیابید که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد.

(ب) یک الگوی عددی با ۶ عضو بیابید که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد.

(ج) آیا یک الگوی عددی با ۱۰ عضو وجود دارد که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد؟



یکی از مشهورترین ریاضی دانان معاصر، به نام ترنس تاؤ (Trence Tao)، در سال ۲۰۰۴ میلادی ثابت کرد که برای هر n داده شده می‌توان یک الگوی عددی با n عضو یافت به‌طوری‌که همهٔ اعضای آن عدد اول و اختلاف هر دو عضو متوالی مقداری ثابت باشد.

۱۲. قانون الگوی عددی زیر را کشف کنید و ۱۰ عدد بعدی آن را بنویسید.

۰, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۷, ۷,

راهنمایی: تعداد اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی هر عدد طبیعی را بشمارید.

کارگاه بازی-شمارنده و هُپ

۱. بازی شمارنده‌ها

این بازی، یک بازی دو نفره است. نفر اول، از جدول زیر یک عدد انتخاب می‌کند و همه شمارنده‌های آن عدد را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز کسب می‌کند. نفر دوم عددی خط نخورده را انتخاب می‌کند و همه شمارنده‌های خط نخورده آن را خط می‌زنند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز می‌گیرد. این کار به نوبت ادامه پیدا می‌کند تا همه عده‌های جدول خط بخورند. در پایان کسی که امتیاز بیشتری دارد، برنده است. توجه. اگر بازیکنی عددی انتخاب کند و شمارنده‌های آن عدد را به اشتباه خط بزند، رقیب او می‌تواند در نوبت خود دو عدد انتخاب کند!

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

۲. هُپ عدد اول

همه دانشآموزان داوطلب می‌توانند در این بازی شرکت کنند. معلم عددی طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کند و بازی هُپ از این عدد شروع می‌شود. هر دانشآموز در نوبتش (بدون

مکث) عدد طبیعی بعدی را می‌گوید اما باید به جای اعداد اول بگوید: «هُپ»! هر کسی عددی اول را به زبان آورد، بازنده است و معلم پس از خارج شدن دانش‌آموز بازنده از بازی، دوباره بازی را با یک عدد بین ۱ تا ۱۰۰ شروع خواهد کرد. برای اینکه شرکت‌کنندگان در این مسابقه شرایط برابری داشته باشند، معلم می‌تواند هر چند وقت یکبار عددی جدید را برای ادامه مسابقه اعلام کند. این بازی تا باقی ماندن تنها یک دانش‌آموز ادامه می‌یابد. پاداش برنده افزایش یک نمره امتحان میان‌ترم ریاضی است.

شمارنده

۱. در بازی شمارنده‌ها،

الف) بهترین انتخاب برای کسی که بازی را شروع می‌کند، چه عددی است؟

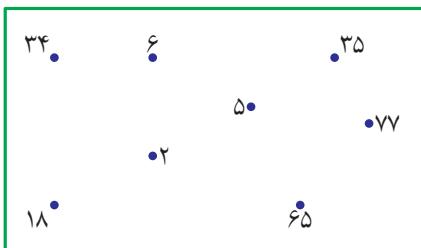
ب) اگر نفر اول با بهترین انتخاب بازی را شروع کند، بهترین انتخاب برای نفر دوم چه عددی است؟

۲. در شکل زیر دو فلش می‌بینید. از فلش بالایی وارد جدول می‌شویم و از فلش پایینی خارج. در هر مرحله به خانه همسایه می‌رویم با این شرط که عدد خانه همسایه شمارنده عدد خانه‌ای که داخل آن هستیم باشد یا برعکس. مسیری پیدا کنید که از فلش بالایی وارد شویم و از فلش پایینی خارج. دو خانه همسایه‌اند هرگاه در یک ضلع مشترک باشند.

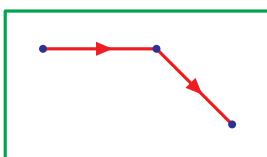
18	3	12	4	20	100	
9	39	3	21	40	8	
63	7	28	56	30	12	
45	91	13	16	10	2	
15	6	78	68	4	46	
3	102	51	17	92	23	

۳. تعدادی عدد طبیعی متفاوت روی کاغذ می‌نویسیم. دو عدد a و b از آنها را در نظر می‌گیریم. اگر a شمارنده b باشد، پیکانی از a به b رسم می‌کنیم. اگر تمام پیکان‌های موجود بین اعداد روی کاغذ را رسم کنیم، از آن به عنوان «نمودار کشیدن» یاد می‌کنیم.

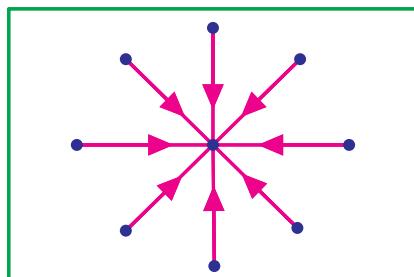
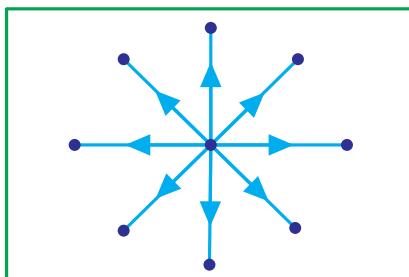
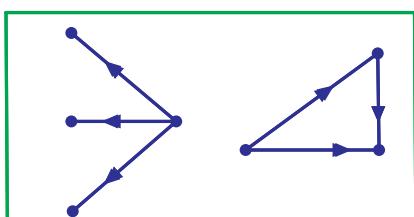
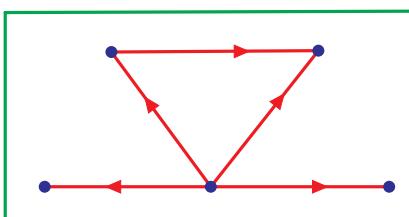
الف) برای عددهای زیر، نمودار بکشید.



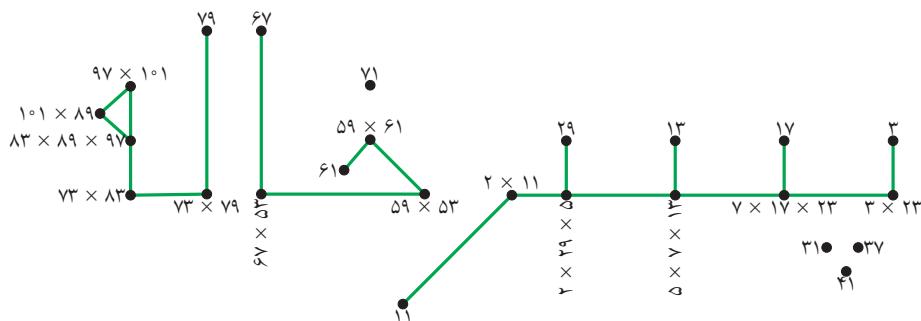
ب) بیژن نمودار زیر را رسم کرد. بعد هر چه تلاش کرد سه عدد پیدا کند که این نمودار برای آن سه عدد درست باشد، نتوانست. چرا تلاش بیژن بی‌فایده بود؟



ج) هریک از نمودارهای زیر را با عددهای طبیعی مناسب پر کنید.



۴. پسرباله،^۱ نام خود را به شکل زیر نوشته و سپس با قانونی، روی هر نقطه عددی مناسب قرار داد.



الف) قانون پسر خاله را کشف کند.

ب) آیا پسرخاله، همه عددهای اول دورقمی را برای نوشتن «پسرخاله» به کار برد
است؟

ج) شما هم نام خود را با قانون پسرخاله بنویسید.

۵. اگر p عددی اول باشد، آنگاه عبارت جبری $1 \times 2 \times 3 \times \cdots (p-1) + 1$ بر عدد p بخشی بذل است.

برای مثال، اگر $p = 5$ باشد، آنگاه $1 + 2 \times 3 \times 4 \times 1$; یعنی 25 بر 5 بخش پذیر است.

ای، هر یک از اعداد زیر نیز درسته، عبارت فوق را بودسه کنند.

(الف) $p = \gamma$

с) $p = 11$

ج) $p = 13$

برگرفته از مجموعه تلویزیونی کلاه قرمزی به کارگردانی ایرج طهماسب.

مسابقه تیراندازی

ستاره و سپیده یک سیبل و تعدادی دارت دارند. داخل سیبل، عده‌های ۵، ۳، ۲ و ۷ نوشته شده است. ستاره و سپیده با قانون‌های زیر شروع به بازی می‌کنند.

- هر نفر ۵ دارت پرتاپ می‌کند.
- امتیاز نهایی هر نفر حاصل ضرب امتیاز ۵ پرتاپش است.
- امتیاز دارتی که به عده‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ برخورد نکند، ۱ است.
- امتیاز نهایی نباید بیشتر از ۶۹ شود! اگر بیشتر از ۶۹ شد، امتیاز نهایی صفر است!



باتوجه به قانون‌های بالا به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

١. اگر دارت‌های ستاره امتیاز‌های ۱، ۲، ۳، ۲ و ۵ گرفته باشند، امتیاز نهایی ستاره چقدر است؟
 ٢. اگر امتیاز نهایی سپیده ۵۰ باشد، امتیاز هر پرتاپ سپیده را از کوچک به بزرگ بنویسید.
 ٣. کدامیک از عده‌های زیر می‌توانند امتیاز نهایی باشند؟ برای هر کدام دلیل بیاورید.
- | | | | |
|-----|-----|-----|----|
| الف | ب | ج | د |
| ۱۶ | ۲۷ | ۲۹ | ۳۲ |
| ۵۴ | ۴۸ | ۶۴ | ۷۲ |
| (و) | (ز) | (ح) | |

٤. پرتاپ اول ستاره به سیبل نخورد! حال اگر ستاره بخواهد (و بتواند!) به هر عدد داخل سیبل، حداکثر یک دارت برخورد کند، امتیاز نهایی او حداکثر چیست؟

۵. سپیده بعد از ۴ پرتاب، امتیازی کمتر از 4° به دست آورد و فهمید که اگر دارت بعدی اش را خارج از سیل نزند، امتیاز نهایی اش صفر می‌شود. ۴ دارت سپیده را روی سیل نقاشی کنید.

۶. سپیده بعد از ۵ پرتاب، امتیازش ۶۳ شد. آیا ستاره می‌توانست امتیاز بیشتری بگیرد؟

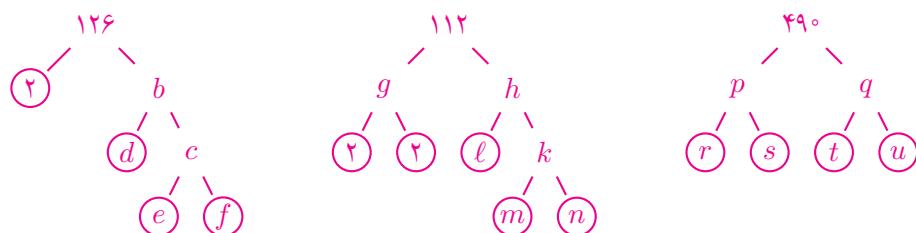
۷. اگر ستاره از پرتاب اول امتیاز ۲ گرفته باشد، آیا ممکن است امتیاز نهایی اش عددی فرد شود؟ چرا؟

۸. کدام عده‌های فرد نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؛ چرا؟

۹. کدام عده‌های زوج نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؛ چرا؟

شمارنده اول

۱. در زیر، نمودارهای تجزیه اعداد 112 ، 126 و 490 رسم شده است. ابتدا به جای هر متغیر اعداد مناسب قرار دهید. سپس هریک از این عدها را به صورت حاصل ضرب عده‌های اول بنویسید.



۲. علی با مکعب‌های کوچک هماندازه یک مکعب مستطیل ساخت. خواهش یک ردیف از وجه بالای مکعب مستطیل برداشت که از ۷۷ مکعب تشکیل شده بود. برادر بزرگترش یک ردیف از وجه جلوی مکعب مستطیل باقی‌مانده برداشت که از ۵۵ مکعب تشکیل شده بود. برادر کوچکترش یک ردیف از وجه سمت راستِ شکل



باقی مانده برداشت. در پایان چند مکعب باقی مانده بود؟
۳. هر عدد مرکب، از حاصل ضرب اعدادهای اول به دست می‌آید. اعداد اولی را که از حاصل ضرب آنها یک عدد مرکب ساخته می‌شود، بچه‌های آن عدد مرکب می‌نامیم.
برای مثال، عدد ۱۲ سه بچه دارد. ۲، ۲ و ۳؛ یعنی یک بچه بزرگ (۳) و یک دوقلو (۲ و ۲). چون $2 \times 2 \times 3 = 12$.

الف) تعداد بچه‌های هریک از اعداد زیر را به دست آورید.

- ۱۸
- ۳۲
- ۴۴
- ۵۱
- ۵۶
- ۶۸
- ۸۴
- ۸۷
- ۹۱
- ۹۵
- ۱۱۵
- ۱۴۴

ب) چند عدد دو رقمی با چهار بچه وجود دارد به‌طوری‌که این چهار بچه، دو جفت دوقلو باشند؟

ج) همه اعدادهای دو رقمی را بنویسید که حداقل چهار بچه چهار قلو داشته باشند.

د) من کوچکترین عدد فردی هستم که ۵ فرزند دارم. یک دوقلو و یک سه‌قلو!
من کی‌ام؟

۵) همه اعدادهای فرد دو رقمی را بنویسید که یکی از بچه‌هایشان ۱۳ باشد.

۴. الف) حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر 500 شده است. اگر هیچ‌کدام از این دو عدد برابر 10 بخش‌پذیر نباشند، این دو عدد را بیابید.

ب) آیا امکان دارد $x \times y = 600$ ، به‌طوری‌که x و y اعدادهایی طبیعی باشند و هیچ‌یک برابر 6 ، 10 و 15 بخش‌پذیر نباشند؟

ج) آیا امکان دارد $m \times n \times p = 900$ ، به‌طوری‌که m ، n و p اعدادهایی طبیعی باشند و هیچ‌یک برابر 9 ، 10 و 15 بخش‌پذیر نباشند؟

۱۵	۳۹	۴۹	۵۱	
	۳۶	۶۶	۹۱	

۵. خانه‌های خالی جدول روبه‌رو را طوری پر کنید که:
 اولاً حاصل ضرب عددهای دو سطر یکسان باشند؛
 ثانیاً عددها از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند.

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک

۱. حاصل ب.م.م‌های زیر را به دست آورید.

- (الف) $(2 \times 15, 2 \times 6)$
 (ج) $(4 \times 6, 12 \times 8)$
 (ه) $(91 \times 31, 39 \times 93)$
 (ز) $(202, 78)$

- (ب) $(2 \times 5, 3 \times 7)$
 (د) $(3 \times 15, 5 \times 9)$
 (و) $(18 \times 12, 24 \times 51)$
 (ح) $(105, 77)$

۲. منظور از $(2, 4, 6)$ ب.م.م سه عدد $4, 2$ و 6 است. حاصل $(2, 4, 6)$ و $(45, 63, 90)$ را به دست آورید.

دو عدد a و b را «نسبت بهم اول» می‌نامند هرگاه $1 = (a, b)$. برای مثال 91 و 51 نسبت بهم اول‌اند ولی 39 و 65 نسبت بهم اول نیستند.

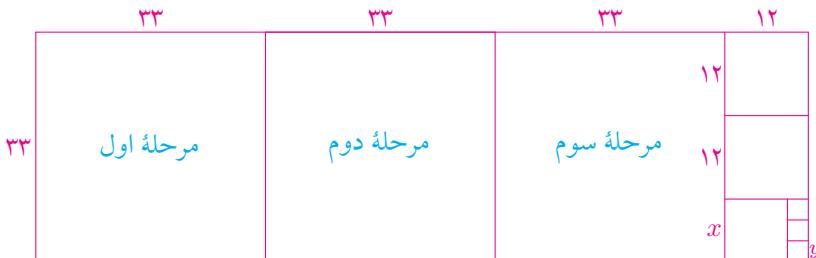
۳. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

- الف) ب.م.م دو عدد زوج، عددی زوج است.
 ب) ب.م.م دو عدد فرد، عددی فرد است.
 ج) ب.م.م یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

۴. شکل زیر مستطیلی به ابعاد 33 و 111 را نشان می‌دهد. در هر مرحله، بزرگ‌ترین مربع ممکن را از آن جدا می‌کنیم.

در مرحله اول مربعی به طول ضلع 33 از آن جدا می‌کنیم و یک مستطیل به ابعاد 78 و 33 باقی می‌ماند. در مرحله دوم و سوم نیز مربعی به طول ضلع 33 از باقی مانده شکل

برمی داریم. در مرحله چهارم طول ضلع بزرگ‌ترین مربع ممکن ۱۲ است. این کار را ادامه می‌دهیم تا تمام مستطیل با مربع‌های مختلف پوشیده شود.



الف) مقدار x و y را بیابید.

ب) طول ضلع مربع آخرین مرحله چه نسبتی با ب.م.م دو عدد ۱۱۱ و ۳۳ دارد؟

۵. در شکل رو به رو، مستطیلی به ابعاد ۶۶ و

۴۸ را با نقطه‌چین به مربع‌های برابر تقسیم کرده‌ایم. با روشنی که در مسئله قبل گفته شد، هر بار بزرگ‌ترین مربع ممکن را از مستطیل شبکه‌بندی شده بالا جدا کنید. طول ضلع مربع آخرین مرحله چقدر است؟

۶. سه حوض داریم که می‌خواهیم در یکی ۸۷۰ لیتر، در دومی ۸۹۹ لیتر و در سومی ۹۲۸ لیتر آب بربیزیم. می‌خواهیم فقط با یک نوع سطل این کار را انجام دهیم به شرطی که همه محتوای سطل را هر بار در حوض‌ها خالی کنیم. بزرگ‌ترین سطلی که می‌توانیم با آن این کار را انجام دهیم چند لیتری است؟

۷. جدول رو به رو را با دقت ببینید. در سطر اول عده‌های ۱۰ و ۱۲، و در ستون اول عده‌های ۱۵ و ۴ را قرار داده‌ایم. سپس در محل تقاطع هر عدد از سطر اول با عددی از ستون اول، ب.م.م آن دو عدد را نوشت‌ایم.

	۱۲	۱۰
۱۵	۳	۵
۴	۴	۲

باتوجه به سه جدول زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.

الف) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با قانون بالا پر کنید.

ب) در جدول میانی، باتوجه به قانون گفته شده و ب.م.های داخل جدول، برای هریک از متغیرها کوچکترین عدد طبیعی ممکن چیست؟

ج) آیا می‌توانید جدول سمت چپ را با کوچکترین عدهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که قانون بالا برقرار باشد؟

		۶۶	
	۵۲		۸۴
۴۸			
	۹۸		۷۲

	t	k	v
x	۱	۵	۷۷
y	۱۸	۹	۱
z	۴	۱	۹۱

	۵۱	۱۰۵	۳۹
۸۵			
۹۱			
۶۵			

کوچکترین مضرب مشترک

۱. چند عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که هم بر ۶ بخش‌پذیر است و هم بر ۹؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

(الف) $[۳۹, ۶۵]$

(ب) $[۹۱, ۱۴]$

(ج) $[۵۱, ۱۷]$

(د) $[۱۶, ۲۰]$

(ه) $[۳۳, ۲۲]$

(و) $[۴۰, ۶۰]$

(ز) $[۲۷, ۱۲, ۴۵]$

(ح) $[۱۵, ۲۵, ۷۵]$

(ط) $[۹, ۱۲, ۱۵]$

۳. در هر قسمت x را طوری بیابید که کوچکترین عدد طبیعی ممکن باشد:

(الف) $[۶, x] = ۲۴$

(ب) $[۳۶, x] = ۷۲$

(ج) $[۶, x] = ۱۲$

(د) $[۱۵, x] = ۲۵$

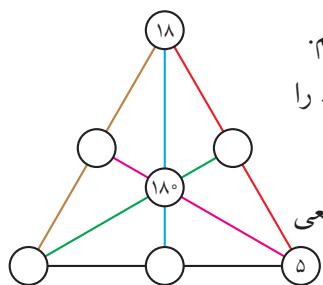
(ه) $[۱۸, x] = ۵۴$

(و) $[۹, x] = ۵۴$

(ز) $[۵۱, x] = ۱۵۳$

(ح) $[۳۵, x] = ۱۰۵$

(ط) $[۸, x] = ۱۶$



۴. در شکل رو به رو، شش پاره خط (با رنگ های متفاوت)

رسم کرده ایم و سپس روی هریک سه دایره قرار داده ایم.

ک.م.م عدد های داخل دایره های ابتدا و انتهای هر خط را

در دایره میانی می نویسیم.

هریک از دایره های خالی را با کوچک ترین عدد طبیعی

ممکن پر کنید.

۵. مادر بزرگه دو خروس به نام های «حنایی» و «نوک سیاه» دارد. آنها از ساعت ۴ تا عصیج

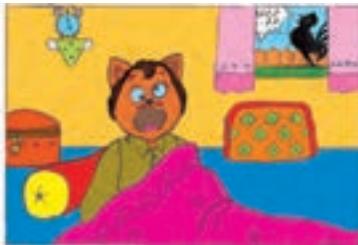
قوقولی قوقو می کنند. حنایی هر ۸ دقیقه یکبار قوقولی قوقو می کند و نوک سیاه هر ۱۴

دقیقه یکبار. وقتی که آنها با هم می خوانند، مَحمل، گربه مادر بزرگه، از خواب می پرد؛

کمی غُرْغُر می کند و دوباره می خوابد. اگر خروس ها از ساعت ۴ صبح، همزمان با هم

شروع به خواندن کنند، تا ساعت ۶ صبح محمل چند بار از خواب ناز می پرد؟ در چه

ساعت هایی؟^۱



۶. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که هم بر ۱۸ بخش پذیر است و هم بر ۸۱؟

۷. راه زنان «گرگ دره» تعدادی گوسفند دزدیدند. دزدها ۱۸ نفر بودند. سر دسته آنها

«حسام بیگ»، گوسفندها را به طور مساوی بین همه اعضای گروه تقسیم کرد و ۵

گوسفند باقی ماند که آنها را هم برای خودش برداشت. سه نفر از دزدها به این

روش تقسیم او اعتراض کردند. حسام بیگ عصبانی شد و گفت: «چه معنی می ده

دزد اعتراض کنه! اصلاً به شما سه تا گوسفند، گوسفند نمی دم». حسام بیگ این بار

^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی «خونه مادر بزرگه»، اثر مرضیه برومند.

گوسفندها را بین ۱۵ نفر به طور مساوی تقسیم کرد و باز هم ۵ گوسفند باقی ماند، که آنها را هم برای خودش برداشت. اگر تعداد گوسفندها کمتر از ۱۰۰ رأس باشد، راهزنان چند گوسفند دزدیده‌اند؟^۱



حکایتی از گلستان سعدی

لقمان را گفتادب از که آموختی؟
گفت از بی ادبان؛ هر چه از ایشان در نظرم ناپسند آمد، از آن پرهیز کردم.
نگویند از سر بازیچه حرف کزان پندی نگیر صاحب هوش
و گر صد باب حکمت پیش نادان بخوانند، آیدش بازیچه در گوش

۸. محمود تعدادی تیله دارد. می‌دانیم تعداد تیله‌ها بر عدهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر است. اگر تیله‌های محمود کمتر از صدتا باشد، محمود چند تیله دارد؟

۹. الف) می‌دانیم x عددی دورقمری و $7 - x$ و $8 - x$ به ترتیب بر ۷ و ۸ بخش‌پذیرند.
 x چه عددی است؟

ب) می‌دانیم y عددی دورقمری و $12 - y$ و $16 - y$ به ترتیب بر ۱۲ و ۱۶ بخش‌پذیرند.
 y چه عددی است؟

ج) کوچک‌ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی مانده تقسیم آن بر هر دو عدد ۲۴ و ۱۸ برابر ۷ باشد.

^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی «روزی روزگاری» اثر امرا.. احمدجو.

کارگاه بازی - نقطه بذار-شلیک کن!

تعداد نفرات هر تیم و وسایل مورد نیاز: این بازی که بین دو تیم دو نفره انجام می‌شود، به دو برگه «جدول نقطه بذار-شلیک کن» و دو «دایره امتیاز» نیاز دارد.

کار هر بازیکن: هر بازیکن، نقطه‌ای در زیر خط‌چین برگه جدول «نقطه بذار-شلیک کن» می‌گذارد؛ برگه را دقیقاً از وسط طول آن (نقطه‌چین)، تا می‌کند و پشت اثر نقطه، نقطه‌ای پرنگ می‌کشد تا اثر آن نقطه روی عددی از جدول بیفتد. عددی که بازیکن به آن شلیک کرده، باید در دایره امتیاز، در ناحیه همان عدد با ضربدر علامت زده شود. هر بازیکن ۵ شلیک نقطه‌ای می‌کند.

امتیاز هر تیم و چگونگی محاسبه آن: امتیاز هر بازیکن حاصل ضرب عددهای ناحیه علامت‌دارشده در دایره امتیاز است. امتیاز نهایی هر تیم، ک.م.م امتیاز بازیکن‌های آن تیم است.

برنده: هر تیمی که امتیاز نهایی اش بیشتر باشد، برنده است.

جایزه: پس از برگزاری لیگ، به هر یک از اعضای تیم برنده، افزایش یک نمره میان‌ترم ریاضی جایزه داده خواهد شد.

در تصویر رو به رو، یک دایره امتیاز نشان داده شده است.



به نکته‌های زیر توجه کنید:

• ابتدا نفر اول هر تیم ۵ شلیک خود را انجام می‌دهد و سپس هم‌تیمی او وارد عمل می‌شود.

- در هر تیم باید رنگ خودکار اعضای تیم متفاوت باشد و امتیاز هر نفر با خودکار خودش در دایرة امتیاز ثبت شود.
 - بعد از اینکه کار یک تیم تمام شد و امتیازهای دو نفر (با دو رنگ متفاوت) در دایرة امتیاز ثبت شد، دایرة امتیاز به تیم حریف داده می‌شود تا آنها ک.م.م را محاسبه کنند.
اگر تیم حریف ک.م.م را اشتباه حساب کند، هر بازیکن تیم مقابل یک شلیک جایزه می‌گیرد و بعد از شلیک و ثبت امتیاز، دوباره دایرة امتیاز به تیم حریف داده می‌شود.
 - اگر شلیک نقطه‌ای به خانه‌های خالی یا اطراف جدول برخورد کند، امتیاز ۱ محسوب می‌شود. توجه کنید که در دایرة امتیاز، عدد ۱ وجود ندارد و واضح است که نیازی به ثبت شدن آن نیست.
 - اگر اثر نقطه دقیقاً روی خط جدول افتاد، شلیک تکرار می‌شود.
 - خانه‌ای که به آن شلیک می‌شود و همه خانه‌های همسایه آن منفجر می‌شوند. خانه‌هایی که منفجر می‌شوند، هیچ تفاوتی با خانه‌های خالی «جدول نقطه بذار-شلیک کن» ندارند.
- در جدول زیر، خانه‌های همسایه یک خانه خالی مشخص شده‌اند.

همسایه شمال غربی	همسایه شمالي	همسایه شمال شرقی
همسایه غربی		همسایه شرقی
همسایه جنوب غربی	همسایه جنوبی	همسایه جنوب شرقی



• شمارنده‌ها و اعداد اول

۵	۲	۲	۳	۷	۲	۳	۵	۳	۵	۳	۲	۷	۲	۲	۳	۷
۰	۳	۲	۳	۰	۳	۲	۰	۳		۰	۳	۲	۲	۷	۳	۰
۳	۲	۲		۲	۲	۷	۳	۲	۲	۵	۲		۵	۳	۲	۳
۳	۳	۲	۳	۳	۵	۲	۳	۰	۲	۳	۷		۰	۳	۵	۷
۲	۳	۲	۳		۰	۳	۳	۰	۷	۳	۷	۰	۳	۲	۷	
۷	۲	۳	۲	۰	۳	۲		۲	۲	۷	۲		۰	۷	۰	۲
۲	۳	۰	۲	۳	۷	۰	۳	۰	۲	۳		۰	۲	۷	۳	۳
۳	۰	۷		۲	۳	۲	۰	۲	۳	۵	۷	۳	۲	۲	۳	۰
	۲	۳	۲	۷		۳	۲	۳	۲	۲	۳	۵		۰	۲	۳
۲	۰	۳	۲	۳	۲	۳	۷	۳	۲	۲	۵	۳	۰	۳	۲	۳
۲	۷	۳		۲	۳	۲	۳		۰	۳	۲	۳		۰	۳	۲
۰	۲	۲	۳	۰	۳		۲	۳	۳	۰	۳	۲	۲	۰	۳	۲



ارتباط ب.م.م و ک.م.م

۱. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۹۸ امتیاز گرفته است.

الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.

ب) همتیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شلیک کند؟ چرا؟

۲. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۶۳ امتیاز گرفته است.

الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.

ب) همتیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شکلیک کند؟ چرا؟

ج) اگر شلیک اول نفر دوم به عدد ۷ برخورد کند، او تیرهای بعدی اش را باید به سمت چه عددی نشانه روی چر؟

۳. در مسابقه‌های جهانی «نقطه بذار-شلیک کن»، ستاره ۲۵۲ امتیاز و سپیده، هم‌تیمی ستاره، ۷۵ امتیاز گرفته است.

الف) در دایرۀ امتیاز، نقاٹی را که ستاره به آنها شلیک کرده، با خودکار آبی و نقاٹ سیله را با خودکار قرمز مشخص کند.

ب) ب.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمزی که گذاشته‌اید، سدا کنند.

ج) ک.م. دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمز به صورت حاصل‌ضرب عددهای اول بنویسید. کدام عدد یا عددهایی را که علامت زده شده‌اند، ننوشته‌اید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. هر جفت از اعدادهای زیر، امتیاز دو هم‌تیمی را در بازی «نقشه بذار-شلیک کن» نشان می‌دهد.

● ۶۰, ۹۰

● ۵۷, ۹۸

● ۱۴۰, ۲۷۰

● ۸۰, ۵۴۰

● ۱۰۸, ۱۷۵

● ۸۴, ۱۰۵

● ۳۴۳, ۲۴۳

● ۱۰۸, ۱۱۲

الف) برای هر جفت از اعدادهای بالا، یک دایره امتیاز رسم کنید و شلیک‌های دو نفر را با رنگ‌های متفاوت روی آن مشخص کنید.

ب) ب.م.م و ک.م.م هر دو عدد را (با استفاده از دایره امتیاز) به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

۵. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

(الف) $\frac{28 \times 39}{(28, 39)}$

(ب) $\frac{105 \times 35}{(105, 35)}$

(ج) $\frac{84 \times 102}{[84, 102]}$

(د) $\frac{155 \times 93}{(155, 93)}$

(ه) $\frac{106 \times 85}{[106, 85]}$

(و) $\frac{182 \times 54}{[182, 54]}$

ز) $[85, 51] \times (85, 51)$

ح) $(39, 91) \times [39, 91]$

۶. x و y چه اعدادی باشند تا تساوی‌های زیر برقرار شوند؟

(الف) $(54, x) \times [54, x] = 1836$

(ب) $(45, y) \times [45, y] = 810$

تمرین‌های تکمیلی

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، به جای هر متغیر، عددی یک رقمی بگذارید به‌طوری‌که حاصل هر عبارت بیشترین مقدار ممکن شود.

(الف) (x, y, z)

(ب) $[t, k, v]$

(ج) $[a, b, c, d]$

۲. به کسری که ب.م.م صورت و مخرج آن برابر ۱ باشد، کسر ساده‌نشدنی می‌گویند.
کدامیک از کسرهای زیر ساده‌نشدنی‌اند؟

الف) $\frac{39}{89}$

(ب) $\frac{26}{57}$

(ج) $\frac{98}{35}$

(د) $\frac{51}{91}$

(ه) $\frac{95}{34}$

(و) $\frac{121}{1001}$

(ز) $\frac{343}{243}$

(ح) $\frac{221}{289}$

کسرهای $\frac{2}{39}$ و $\frac{3}{26}$ را در نظر بگیرید.

الف) کوچک‌ترین کسر ساده‌نشدنی را بباید که اگر آن را بر هریک از این دو کسر تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

ب) بزرگ‌ترین کسر ساده‌نشدنی را بباید که اگر هریک از این دو کسر را بر آن تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

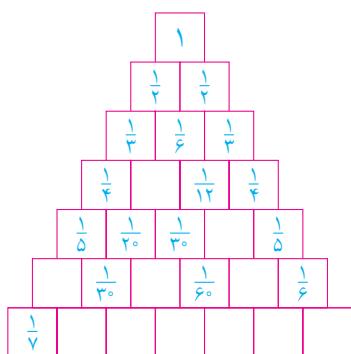
۴. همه عددهای سه رقمی را که باقی‌مانده تقسیم آنها بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد، بباید.

۵. بین حاصل ضرب و حاصل جمع $\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{3}$ تفاوتی نیست.

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}, \quad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15}{6} + \frac{10}{6} = \frac{25}{6}.$$

پنج جفت کسر دیگر با این خاصیت بباید.

۶. در جدول رو به رو، مجموع دو کسر کنار هم را بالای آن دو نوشته‌ایم.



الف) خانه‌های خالی را با همین قانون پر کنید.

ب) اگر تا سطر بیستم این جدول را ادامه دهیم و هر کسر را به صورت یک کسر ساده‌نشدنی بنویسیم، آنگاه صورت همه کسرها ۱ می‌شود؟

۷. با استفاده از جدول مسئله قبل،

- الف) عدد $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ را به صورت مجموع دو کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.
- ب) عدد $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ را به صورت مجموع سه کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.
- ج) عدد $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ را به صورت مجموع پنج کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.
- د) عدد $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ را به صورت حاصل تفاضل دو کسر با صورت ۱ بنویسید.

۸. در هریک از قسمت‌های زیر x و y اعداد طبیعی‌اند. در هر قسمت x و y جانگهدار

چه عددهایی هستند؟

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{7}{x} + \frac{5}{y}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1393}{x} + \frac{2014}{y}$$

۹. صد لامپ داریم که آنها را از ۱ تا ۱۰۰ شماره‌گذاری کردہ‌ایم. هر لامپ یک کلید

دارد که با فشار دادن آن لامپ روشن یا خاموش می‌شود. فرض کنید همه لامپ‌ها خاموش‌اند. در ابتدا کلید همه لامپ‌های مضرب ۱ را فشار می‌دهیم. سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۲ را فشار می‌دهیم. بعد کلید همه لامپ‌های مضرب ۳، سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۴ و ...، بعد کلید لامپ ۱۰۰ فشار می‌دهیم. در پایان کدام لامپ‌ها روشن‌اند؟

۱۰. می‌دانیم a عددی زوج و b مضرب ۶۳ است. اگر $(a, b) = 15$ و $ab = 18900$ ، آنگاه a و b چه اعدادی هستند؟

۱۱. دو دونده تصمیم دارند با یکدیگر در پیاده‌روی مسابقه بدهند. دونده اول دور میدان دو را در ۷ دقیقه و دونده دوم این مسافت را در ۵ دقیقه طی می‌کند. اگر این دو دونده در یک زمان و یک مکان مسابقه را آغاز کنند و هریک هشت بار میدان را دور بزنند، پس از چند دقیقه برای اولین بار بعد از حرکت، کنار یکدیگر قرار خواهند گرفت؟

۱۲. شنگول و منگول و حبّه انگور هر روز کنار جاده‌ای دوچرخه‌سواری می‌کنند. کنار این جاده دکل‌های برق با فاصله‌های یکسان قرار دارند.

یک روز، شنگول کنار دکل اول، منگول کنار دکل هجدهم و حبّه انگور کنار دکل سی و ششم ایستاده بودند. آنها هم‌زمان شروع به حرکت کردند. وقتی شنگول به دکل ششم رسید، منگول به دکل نوزدهم و حبّه انگور به دکل سی و چهارم رسید. اگر هریک از آنها با سرعت ثابت حرکت خود را ادامه دهند، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) منگول و حبّه انگور کجا بهم می‌رسند؟

ب) شنگول و حبّه انگور کجا بهم می‌رسند؟

ج) کجا شنگول از منگول جلو می‌زند؟

۱۳. به هر عدد طبیعی که بتوان آن را به صورت حاصل‌ضرب یک عدد طبیعی در خودش نوشت، عدد مربعی می‌گویند. برای مثال $121 = 11 \times 11$.

الف) همهٔ عده‌های مربعی یک رقمی، دورقمی و سه‌رقمی را به‌دست آورید.

ب) چند عدد مربعی پنج رقمی وجود دارد؟

۱۴. الف) هفت عدد دو رقمی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

ب) ده عدد طبیعی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

ج) هزار عدد طبیعی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

شاید حل مسئله زیر، ایده‌ای به شما بدهد تا بتوانید قسمت «ج» مسئله قبل را حل کنید!

۱۵. برای هریک از عده‌های زیر، شمارنده‌ای به غیر از ۱ و خود عدد پیدا کنید.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 2 \quad \text{(الف)}$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 27 + 11 \quad \text{(ب)}$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 + 61 \quad \text{(ج)}$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 + 89 \quad \text{(د)}$$

۱۶. در جدول‌های رو به رو، به دو عدد همسایه

می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع
مشترک باشند.

باتوجه به جدول‌های رو به رو به پرسش‌های
زیر پاسخ دهید.

۱۲		۶۳
۴۵		۷۵

۳۴	
	۷۸

الف) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با کوچک‌ترین عده‌های طبیعی ممکن طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه نصف حاصل ضرب آن دو عدد باشد. (تکرار مجاز نیست).

ب) خانه‌های خالی جدول سمت چپ را با عده‌های مربعی دو رقمی متفاوت طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه با حاصل ضرب آن دو عدد برابر باشد.

۱۷. روبات‌های جهنده خرگوشی و ملخی طوری برنامه‌ریزی شده‌اند که خرگوشی ۱۵ متر و ملخی ۱۲ متر می‌جهد. اگر جهنده خرگوشی از نقطه ۴ و جهنده ملخی از نقطه ۱ شروع به جهش کند، اولین بار روی چه عددی جای پای هر دو حک می‌شود؟ دومین بار چطور؟ چهارمین بار چطور؟



خواندنی

یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ در نظر بگیرید. آیا می‌توانید این عدد را به صورت حاصل جمع دو عدد اول بنویسید؟

برای مثال، می‌توان عدد ۱۲ را به صورت مجموع دو عدد اول نوشت: $۱۲ = ۵ + ۷$. یکی از مشهورترین مسئله‌های ریاضی که (از قرن هجدهم میلادی تاکنون) حل نشده است، به «حدس گلدباخ» معروف است:

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.»

فصل ۶

سطح و حجم



منشورهای با قاعدة شش ضلعی، محل ذخیره عسل زنبورها هستند. عسل یکی از شگفت‌انگیزترین خوراکی‌های است. در قرآن کریم سوره‌ای به نام زنبور (نحل) وجود دارد. مضمون یکی از آیه‌های این سوره چنین است: «انسان‌های زیادی هستند که سال‌ها عسل می‌خورند، ولی حاضر نیستند ساعتی در باره شگفتی‌های موجود در عسل فکر کنند».

ریاضیات سیب زمینی!

برای کمک به یافتن پاسخ سوالات، هر جا لازم بود از سیب زمینی و چاقو در کنار خطکش و پرگار کمک بگیرید. شاید بعد از حل مسائل، درست کردن چیپس برای رفع خستگی خیلی خوب باشد!



۱. الف) چطور با یک سیب زمینی، یک مکعب می‌توان ساخت؟ روش ساخت خود را شرح دهید.

ب) برای ساختن یک مکعب سیب زمینی حداقل به چند برش نیاز است؟
۲. چهار مکعب سیب زمینی بسازید!

الف) یکی از سیب زمینی‌ها را طوری برش دهید که مقطع آن مثلث باشد.

ب) روی سیب زمینی دوم یک مقطع چهارضلعی بسازید.

ج) سیب زمینی دیگر را طوری برش دهید که مقطع آن پنج ضلعی شود.

د) روی سیب زمینی چهارم یک برش بزنید به طوری که مقطع آن شش ضلعی باشد.

۳. الف) با سیب زمینی یک حجم منشوری بسازید که بیش از ۴ وجه جانبی داشته باشد.

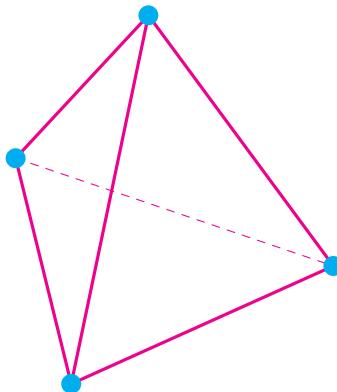
ب) با یک سیب زمینی یک حجم هرمی بسازید.

۴. الف) از یک سیب زمینی یک حجم هندسی بسازید که فقط چهار وجه داشته باشد و هر وجه آن مثلثی شکل باشد.

ب) حجم هندسی قسمت «الف» را چنان اصلاح کنید که هر یک از چهار وجه آن مثلث متساوی‌الاضلاع شود (به این حجم هندسی، چهاروجهی منتظم می‌گویند).

ج) آیا می‌توانید تنها با چهار برش سه‌بعدی یک چهاروجهی منتظم بسازید؟

۵. شکل زیر یک چهاروجهی منتظم را نشان می‌دهد (یالی که دیده نمی‌شود با خط‌چین مشخص شده است). با استفاده از ۶ خلال دندان (یا چوب‌کبریت) یک چهاروجهی منتظم بسازید. برای هریک از چهار رأس می‌توانید از تکه‌ای چوب‌پنه استفاده کنید.

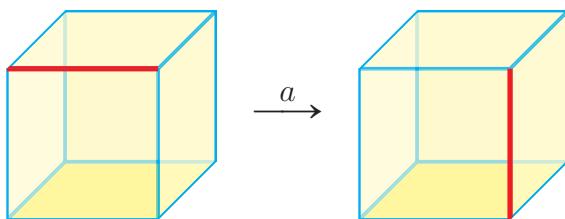


مکعب

یک مکعب در نظر بگیرید. دستورهای a , b , c و d به ترتیب این مکعب را به سمت راست، سمت چپ، جلو و پشت می‌غلتانند.

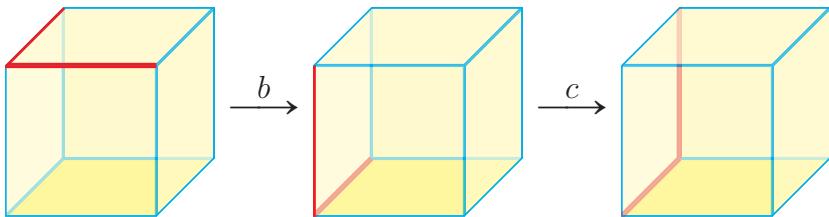
چند مثال

● دستور a ، مکعب سمت چپ (شکل زیر) را به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند.

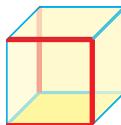


• سطح و حجم

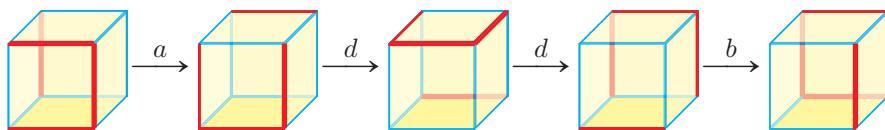
- دستور ترکیبی bc مکعب سمت چپ (شکل زیر) را در دو مرحله به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند. توجه کنید که دستورهای ترکیبی به ترتیب از چپ به راست عمل می‌کنند.



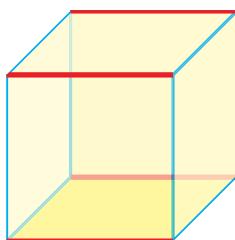
- مکعب زیر را در نظر بگیرید.



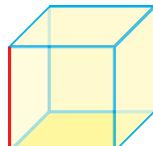
دستور $addb$ مکعب بالا را چهار بار حرکت می‌دهد:



1. در مکعب زیر، دستورات $abcadb$ را اجرا و مکعب هر مرحله را رسم کنید.

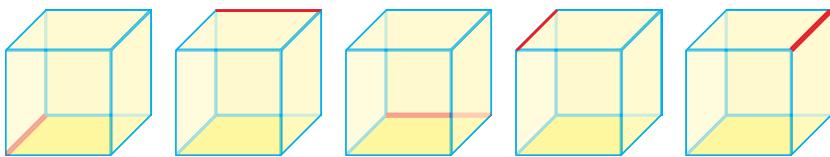


2. مکعب زیر را در نظر بگیرید.

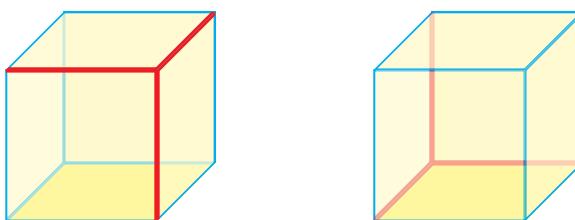


• سطح و حجم •

الف) برای تبدیل این مکعب به هریک از مکعب‌های زیر، دستوری برحسب a , b , c و d بباید.

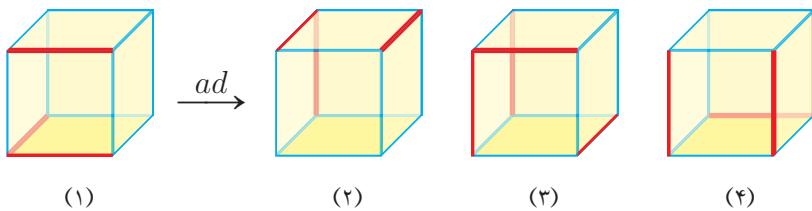


ب) آیا پاسخی که برای هر قسمت یافته‌اید، حداقل دستورهای ممکن است؟
۳. در شکل زیر، سعی کنید با کمترین دستورهای ممکن، مکعب سمت چپ را به مکعب سمت راست تبدیل کنید.



دو مکعب داریم که در هریک تعدادی یال قرمز وجود دارد. اگر بتوانیم با دستورهای c , b , a و d یا ترکیبی از آنها مکعب اولی را به مکعب دومی تبدیل کنیم، آنگاه می‌گوییم «یال‌های قرمز مکعب اول» با «یال‌های قرمز مکعب دوم» مشابه‌اند.

برای مثال، در شکل‌های زیر، یال‌های قرمز مکعب (۱) با یال‌های قرمز مکعب (۲) مشابه است؛ اما یال‌های قرمز مکعب (۳) با یال‌های قرمز مکعب (۴) مشابه نیست.

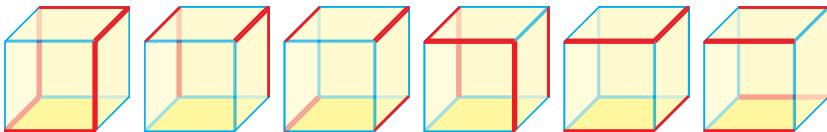


توجه کنید که یال‌های دو مکعب زیر نیز (بدون اجرای هیچ دستوری)، باهم مشابه‌اند.

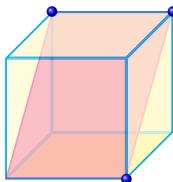


• سطح و حجم •

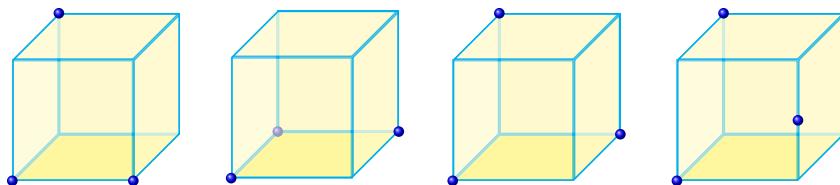
۴. در شکل زیر، جفت مکعب‌هایی را که یال‌های قرمز آنها مشابه یکدیگرند، مشخص کنید و دستور تبدیل آنها بهم را بیابید.



۵. در شکل زیر سه نقطهٔ آبی روی مکعب، یک سطح مقطع را مشخص کرده‌اند.



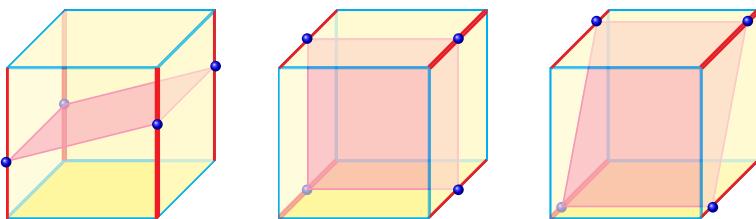
- در هریک از شکل‌های زیر سه نقطهٔ از یک سطح مقطع داده شده است. آن سطح مقطع را مشخص کنید. آیا شکلی وجود دارد که بیش از یک جواب داشته باشد؟



۶. سطح مقطع یک مکعب می‌تواند سه‌ضلعی، چهارضلعی، پنج‌ضلعی یا شش‌ضلعی باشد. برای هریک از سطح مقطع‌های مذکور، یک شکل رسم کنید.

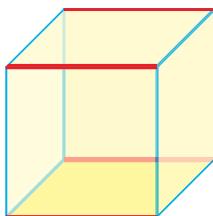
۷. سطح مقطع یک مکعب نمی‌تواند هفت‌ضلعی یا هشت‌ضلعی باشد؛ چرا؟

۸. به سه شکل زیر دقت کنید. در هر سه شکل، سطح مقطعی به شکل چهارضلعی دیده می‌شود. رأس‌های این سطح مقطع‌ها روی یال‌های قرمز هر مکعب قرار دارند. آیا یال‌های قرمز مکعب سمت چپ با یال‌های قرمز دو مکعب مشابه‌اند؟



۹. دو سطح مقطع از دو مکعب را در نظر بگیرید که رئوس این دو سطح مقطع روی رئوس مکعب نباشد. اگر رئوس این دو سطح مقطع روی یال‌های مشابه دو مکعب باشند، این دو سطح مقطع را مشابه می‌نامیم.

الف) روی مکعب زیر، سطح مقطوعی مشابه سه سطح مقطع بالا معرفی کنید که رئوس آن روی چهار یال قرمز باشند.



ب) آیا امکان دارد سطح مقطع یک مکعب (که از هیچ رأس مکعب نمی‌گذرد)، چهارضلعی باشد ولی مشابه «الف» نباشد؟

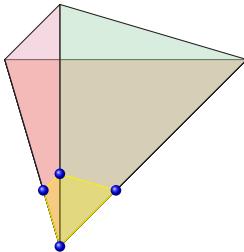
ج) یک مکعب چند نوع سطح مقطع غیرمشابه دارد؟

چهاروجهی منتظم

۱. چرا سطح مقطع یک چهاروجهی منتظم نمی‌تواند یک هفتضلعی باشد؟

۲. آیا سطح مقطع یک چهاروجهی منتظم می‌تواند مربع شکل شود؟ اگر پاسخ تان «بله» است، با یک شکل آن را نشان دهید و اگر پاسخ تان «خیر» است، دلیل خود را توضیح دهید.

- ۳) یک چهار وجهی منتظم داریم. مطابق شکل زیر، نقاط مشخص شده روی یال‌های آن، بیانگر رئوس یک چهار وجهی دیگر شده‌اند.



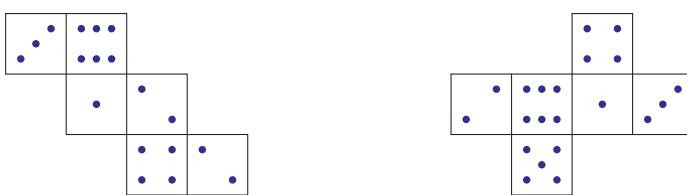
- الف) آیا می‌توانید نقاطی را روی یال‌های یک چهار وجهی منتظم مشخص کنید که (تقریباً) بیانگر رئوس یک مکعب باشند؟
- ب) یک مکعب داریم. نقاطی روی یال‌های آن مشخص کنید که بیانگر رئوس یک چهار وجهی منتظم باشند.

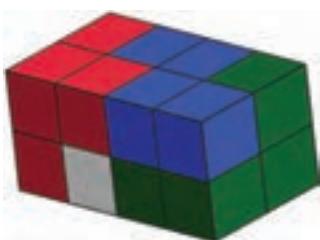
شهود فضایی

۱. هریک از شکل‌های زیر، گستردۀ یک مکعب را نشان می‌دهند. در هر شکل وجههای رو به رو را دو به دو مشخص کنید.



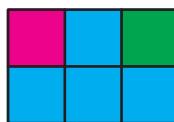
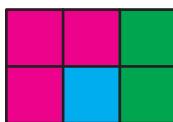
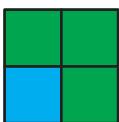
۲. اگر با هریک از شکل‌های زیر یک مکعب بسازیم، بزرگ‌ترین مجموع تعداد نقطه‌های سه وجه با رأس مشترک چقدر می‌شود؟





۳. مکعب مستطیل رو به رو از چهار بلوک تشکیل شده که هر بلوک با چهار مکعب کوچک ساخته شده است. سه تا از این بلوک‌ها را به طور کامل در شکل نشان داده‌ایم. بلوکی که با مکعب‌های سفید ساخته شده را رسم کنید.

۴. یک مکعب مستطیل از سه بلوک به رنگ‌های صورتی، آبی و سبز ساخته شده است. هر کدام از بلوک‌ها از چهار مکعب یکسان تشکیل شده‌اند. شکل‌های زیر، به ترتیب (از راست به چپ) رو به رو، بالا و سمت راست این مکعب مستطیل را نشان می‌دهند. این مکعب از پایین چگونه دیده می‌شود؟



۵. مکعبی چوبی به ابعاد $5 \times 5 \times 5$ را با به هم چسباندن ۱۲۵ مکعب واحد درست کرده‌ایم. از این مکعب طوری عکس گرفته‌ایم که بیشترین مکعب‌های واحد دیده شوند. چند مکعب واحد در عکس دیده می‌شود؟

۶. سعید تعداد زیادی مکعب رنگی $1 \times 1 \times 1$ دارد. او می‌خواهد با استفاده از ۲۷ مکعب کوچک، یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ بسازد به طوری که هر دو مکعبی که حداقل در یک رأس مشترک‌اند، همان‌نگ باشند. سعید حداقل باید چند رنگ مکعب داشته باشد؟

محاسبه حجم‌های منشوری

۱. فرض کنید حجم یک مکعب مستطیل برابر V باشد. با هریک از تغییرات زیر، حجم مکعب مستطیل حاصل را برحسب V بدست آورید.

الف) عرض ۲ برابر و ارتفاع، $\frac{1}{5}$ می‌شود.

ب) عرض ۳ برابر، ارتفاع ۴ برابر و طول $\frac{1}{8}$ برابر شود.

۲. طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل به ترتیب ۱۵، ۱۸ و ۲۱ است. حجم یک منشور با حجم این مکعب مستطیل برابر است. اگر مساحت قاعده این منشور 210 cm^2 باشد، ارتفاع منشور را به دست آورید.

۳. یک قطعه فلز را در ظرف آبی به شکل مکعب مستطیل به قاعده $50 \times 36\text{ cm}^2$ اندخته‌اند و کاملاً به زیر آب رفته است. در نتیجه ارتفاع آب 8 cm بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید.

۴. دو ظرف استوانه‌ای مربای توتفرنگی ساخت یک کارخانه در قفسه‌های یک معازه قرار دارد. ارتفاع ظرف بلندتر دو برابر ارتفاع ظرف کوتاه‌تر شعاع ظرف بلندتر نصف شعاع ظرف کوتاه‌تر است. قیمت ظرف بلندتر 23 هزار تومان و قیمت ظرف کوتاه‌تر 43 هزار تومان است. کدام را می‌خرید؟



۵. کاظم آقا هرچه تلاش کرد نتوانست برای کندن چاه مجوز بگیرد. همچنین او در تقسیم‌بندی آب قنات محل نیز، ثبت نام نکرده بود. کاظم آقا که نمی‌خواست درختان باغش خشک شود، تصمیم گرفت بدون مجوز چاهی در باغش حفر کند. او درباره قیمت کندن چاه چیزی نمی‌دانست؛ بنابراین از چند مُقْنَى^۱ هزینه حفر چاه را پرسید. کمترین قیمتی که شنیده بود، چنین بود:

$10\text{ متر اول، هر متر }100000\text{ تومان، }10\text{ متر بعدی هر متر }150000\text{ تومان، }10\text{ متر بعدی هر متر }200000\text{ تومان و همین‌طور برای هر }10\text{ متر }50000\text{ تومان به دستمزد اضافه}$

^۱ به کسانی که چاه و قنات می‌کنند، مُقْنَى می‌گویند.

می‌شود.

کاظم آقا حدس زد که این چاه در حدود عمق ۶۰ متری به آب می‌رسد. بعد از اینکه دستمزد کنند چاه را با خودش حساب کرد، خوشحال شد و از قنبر آقا مقنی خواست که به باغ بیاید و کار را شروع کند.

مسئله ۱: کاظم آقا فکر می‌کرد قیمت کنند چاه چقدر می‌شود؟

بعد از اینکه قنبر آقا مقنی کارش را شروع کرد، کاظم آقا هزینه حمل خاک بیرون آمده از چاه را، به خارج شهر حساب کرد. او با خود گفت: «قطر دهانه چاه ۹۰ سانتی‌متر است و ارتفاع آن حداً کثر ۶۰ متر. عدد پی هم که برابر ۳ است؛ هر کامیون در هر بار می‌تواند $\frac{3}{5}$ متر مکعب خاک جابه‌جا کند. اجرت راننده برای هر دفعه حمل بار ۷۰ ۰۰۰ تومان است، پس»

مسئله ۲: کاظم آقا فکر می‌کرد هزینه حمل خاک چاه چقدر می‌شود؟

بعد از چند روز کاظم آقا دید که حجم خاک بیرون آمده از چاه از آن چیزی که او محاسبه کرده خیلی بیشتر است. قنبر آقا مقنی برای کاظم آقا توضیح داد که وقتی خاک از زمین بیرون می‌آید، حجمش $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود.

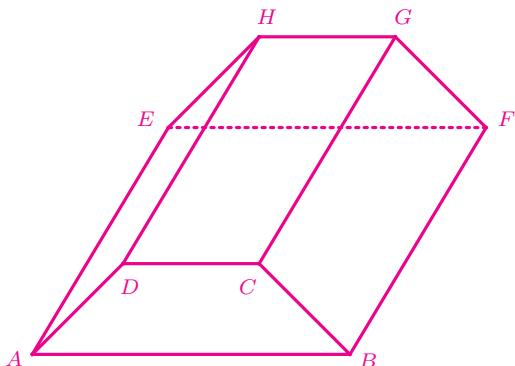
بالاخره قنبر آقا مُقْنَى در عمق ۶۰ متری به آب رسید. او به کاظم آقا گفت که باید حداقل ۲۰ متر بیشتر بکند و گرنّه چاه خیلی زود خشک می‌شود. ولی کاظم آقا قبل نکرد و گفت: «پنج متر دیگه بکن و تموم!». قنبر آقا گفت: «پس انبارش چی؟ چاهی که انبار نداره خیلی کم آبه!» سرانجام بعد از گفت و گوی بسیار، کاظم آقا قبول کرد که چاهش یک انبار مکعب مستطیلی به عرض قطر دهانه چاه، طول ۱۰ متر (موازی با سطح زمین) و ارتفاع $\frac{1}{5}$ متر (عمود بر سطح زمین) داشته باشد. هزینه کنند هر متر مکعب انبار چاه ۷۵۰ ۰۰۰ تومان بود.

مسئله ۳: در نهایت کاظم آقا برای حفر این چاه، چقدر هزینه کرد؟

بد نیست بدانید که این داستان واقعی بود و بعد از دو سال چاه کاظم آقا خشک شد!!

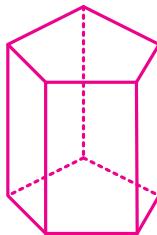
مساحت جانبی و کل

۱. در یک جعبهٔ مکعبی بزرگ، ۸ مکعب کوچک قرار داده‌ایم به‌طوری‌که جعبهٔ بزرگ پر شده است. کف جعبهٔ بزرگ چند مکعب کوچک قرار داده شده است؟
 ۲. یک مکعب به طول ضلع ۱ سانتی‌متر را روی یک مکعب دیگر به طول ضلع ۳ سانتی‌متر چسبانده‌ایم. مساحت کل شکل حاصل، چقدر است؟
 ۳. یک مکعب مستطیل، از هشت مکعب همنازه تشکیل شده است.
- الف) همهٔ حالت‌های ممکن برای این مکعب مستطیل را رسم کنید.
- ب) اگر مساحت جانبی هر مکعب 24 سانتی‌متر مربع باشد، آنگاه مساحت جانبی هریک از مکعب‌مستطیل‌های رسم شده در قسمت «الف» را به‌دست آورید.
۴. شکل زیر یک منشور را نشان می‌دهد که قاعده‌های آن ذوزنقه‌اند. طول قاعده‌های این ذوزنقه 4 و 9 ، و طول ساق‌های آن 5 و 6 است. اگر $BF = 12$ باشد، مساحت جانبی این منشور را به‌دست آورید.



۵. ارتفاع منشوری را بیابید که مساحت جانبی آن 143 و محیط قاعده آن 13 باشد.

۶. شکل زیر یک منشور با قاعدهٔ پنج‌ضلعی است که طول اضلاع قاعدهٔ آن $2, 7, 5$ و $\frac{1}{2} 8$ است. اگر ارتفاع این منشور 8 باشد، مساحت جانبی آن را به دست آورید.



۷. دو غلتک، اولی با محیط 24 و دومی با محیط 36 را در نظر بگیرید. از این دو غلتک برای رنگ کردن استفاده می‌شود. هر دو غلتک در هر دور یک خط باریک را رنگ نشده باقی می‌گذارند.

فرض کنید در غلتک اول، رنگ آبی، و در غلتک دوم رنگ زرد ریخته‌اند؛ ابتدا با غلتک اول مسیری به طول 1800 و سپس با غلتک دوم روی همان مسیر را رنگ زده‌اند. اگر هر بار، هنگام شروع به رنگ کردن، قسمتی از غلتک که رنگ نمی‌کند، روی زمین باشد، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید (می‌دانیم ترکیب رنگ‌های آبی و زرد، رنگ سبز است).

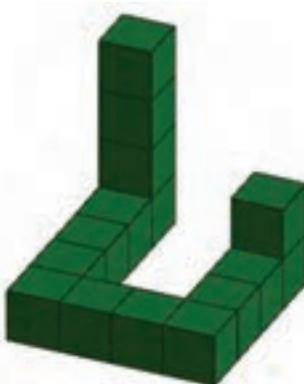
الف) چند خط در مسیر رنگ نشده باقی می‌ماند؟

ب) چند خط در مسیر سبز رنگ نیست؟

حجم و سطح

۱. حسین 42 مکعب یکسان به طول ضلع 1 سانتی‌متر دارد. او با استفاده از همهٔ این مکعب‌ها یک مکعب مستطیل می‌سازد که محیط قاعده‌اش 18 سانتی‌متر است. ارتفاع مکعب مستطیلی که حسین ساخته، چقدر است؟

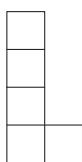
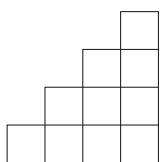
۲. شکل زیر از مکعب‌های به ضلع ۱ درست شده است. حداقل چند مکعب دیگر به شکل اضافه کنیم تا یک مکعب توپر بزرگ به دست آید؟ (مکعب‌های شکل را نمی‌توانید جایه‌جا کنید).



۳. یک ظرف مکعب شکل به ضلع ۳۰ سانتی‌متر پر از آب است. اگر وزن یک لیتر آب یک کیلوگرم باشد، وزن آب درون ظرف چقدر است؟

به جسم‌های سه‌بعدی که از بهم چسباندن یک (یا چند) وجه مکعب‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، «چندحجره‌ای» می‌گوییم.

۴. شکل‌های زیر، به ترتیب از راست به چپ، نمای جلو، نمای بالا و نمای چپ، از یک چندحجره‌ای را نشان می‌دهند. حجم این چندحجره‌ای چقدر است؟

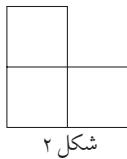


۵. در الگوی صفحه بعد، هر شکل نمایانگر یک چندحجره‌ای است که نمای جلو، بالا و سمت راست آن چندحجره‌ای شبیه هم است. به طور مثال شکل ۲ یک چندحجره‌ای است که نمای جلو، بالا و سمت راست آن به شکل  است. چندحجره‌ای شکل (۱) را ۱-پله، چندحجره‌ای شکل (۲) را ۲-پله، چندحجره‌ای شکل (۳) را ۳-پله، ... و چندحجره‌ای شکل (n) را n -پله می‌نامیم.

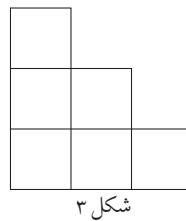
• سطح و حجم •



شكل ۱



شكل ۲



شكل ۳

الف) حجم ۴ – پله را به دست آورید.

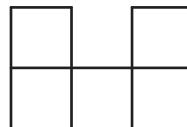
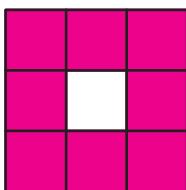
ب) به ۵ – پله حداقل چند مکعب واحد بچسبانیم تا شکل حاصل یک مکعب شود؟

ج) حجم شکل چندم ۵۶ می‌شود؟

د) حجم ۱۰ – پله را به دست آورید.

(ه) حجم n – پله بر حسب n چیست؟

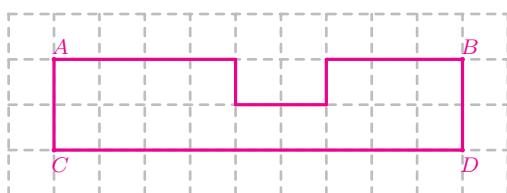
۶. دو چندحجره‌ای با رنگ‌های سفید و صورتی داریم. در زیر، شکل سمت چپ نمای بالا و رو به روی چندحجره‌ای صورتی و شکل سمت راست نمای بالا و رو به روی چندحجره‌ای سفید است.



الف) حجم چندحجره‌ای سفید حداقل چقدر است؟

ب) حجم چندحجره‌ای صورتی حداقل چقدر است؟

۷. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است.



حجم شکل به دست آمده از دوران
چندضلعی رو به رو را یکبار حول
خط AB و بار دیگر حول خط
به دست آورید.

۸. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است. حجم شکل به دست آمده

از دوران مستطیل $:ABCD$

الف) حول AB چقدر است؟

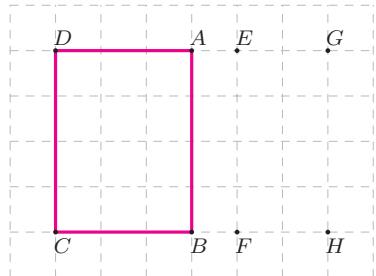
ب) حول EF چقدر است؟

ج) حول GH چقدر است؟

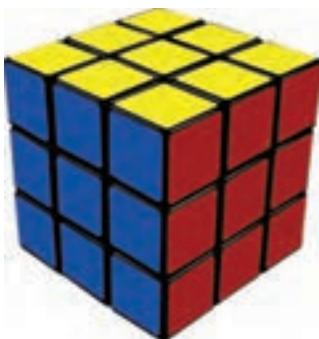
د) اعداد به دست آمده در قسمت های بالا

را با یکدیگر مقایسه کنید. چه نتیجه های

می گیرید؟



۹. شکل زیر یک مکعب روییک $3 \times 3 \times 3$ است.



الف) چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ در مکعب روییک $3 \times 3 \times 3$ وجود دارد؟

ب) در این روییک چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ سه وجه آن رنگی است؟ چند مکعب از آنها دو وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها تنها یک وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها اصلاً رنگی نشده‌اند؟

ج) آیا در روییک بالا مکعبی هست که بیش از سه ضلعش رنگی باشد؟

د) مکعب هایی که رنگی نمی‌شوند، مکعب های پنهانی‌اند که روی سطح ظاهر نمی‌شوند. تعداد این مکعب های پنهانی در یک مکعب روییک به ابعاد $4 \times 4 \times 4$

^۱ این مکعب را «ارنو روییک» (Erno Rubik) در سال ۱۹۷۴ میلادی طراحی کرده است.

• سطح و حجم •

چند عدد است؟

(۵) تعداد مکعبهای پنهانی در یک مکعب (مکعب مستطیل) روییک به ابعاد

$d \times e \times f$ چندتا است؟

(۶) در یک مکعب روییک به ابعاد $a \times b \times c$ ، نصف مکعبها پنهانی هستند. a ،

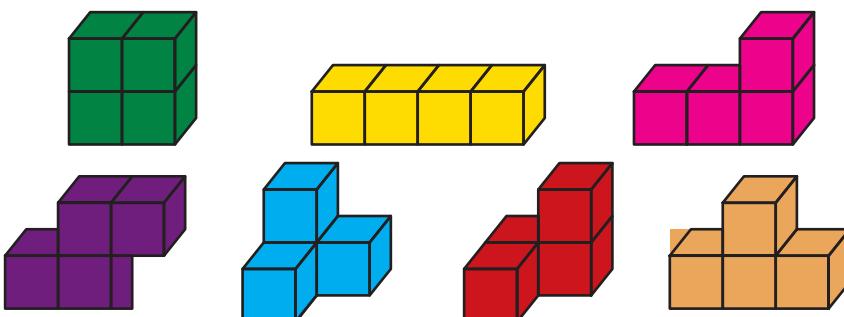
c و b چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۱۰. پنج موجود ۴-خانه‌ای داریم (شکل‌های زیر) که هریک از ۴ مربع واحد تشکیل شده‌اند.



آیا می‌توانید با چسباندن این ۴-خانه‌ای‌ها به یکدیگر مستطیلی 5×4 بسازید؟ (اگر لازم شد می‌توانید ۴-خانه‌ای‌ها را دوران یا بازتاب دهید، ولی مجاز به بریدن آنها نیستید).

(۱۱) هفت ۴-حجره‌ای داریم:

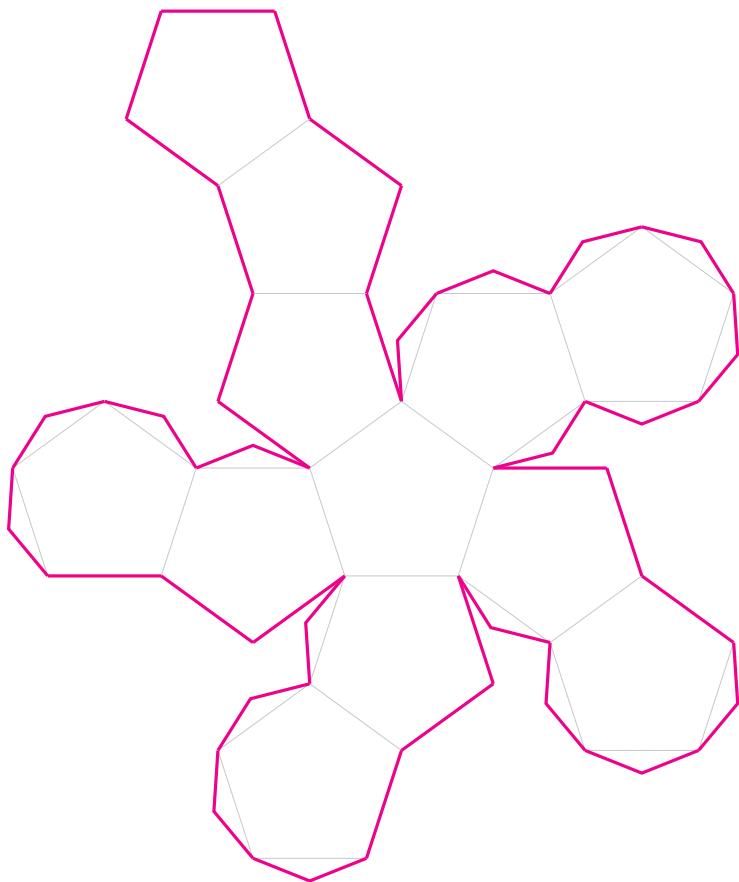


آیا می‌توانید با چسباندن این ۴-حجره‌ای‌ها به یکدیگر یک مکعب مستطیل $7 \times 2 \times 2$ بسازید؟

^۱ M. Erickson, *Aha! Solutions*, Mathematical Association of America, 2008, Page 102.

کارگاه ساخت حجم-دوازده وجهی منتظم

شکل زیر گستردۀ یک دوازده وجهی منتظم را نشان می‌دهد. این گستردۀ را با ابعاد بزرگ‌تر روی یک مقوای A_3 رسم کنید به طوری‌که وقتی اطراف آن را می‌برید، تبدیل به یک دوازده وجهی منتظم با بیشترین حجم ممکن شود. می‌توانید روی هر وجه این حجم، تقویم یک ماه از سال را بنویسید و یک سال از آن استفاده کنید!^۱



^۱دوازده وجهی منتظم یکی از حجم‌های افلاطونی است. برای آشنایی بیشتر با این اجسام، به «مراجعه کنید. www.webmath.ir

فصل ۷

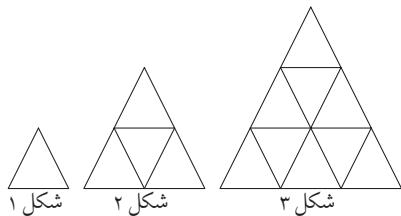
توان و جذر



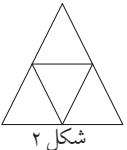
یک دانه گندم،
یک خوشه گندم،
یک مزرعه گندم ...

تعريف توان

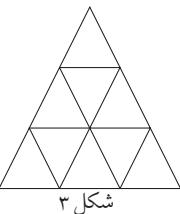
۱. به الگوی زیر توجه کنید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

همان‌طور که می‌بینید، در «شکل ۱» یک مثلث کوچک، در «شکل ۲» چهار مثلث کوچک و در «شکل ۳» نه مثلث کوچک وجود دارد.

الف) تعداد مثلث‌های کوچک «شکل ۴» و «شکل ۵» را بشمارید.

ب) در شکل دهم چند مثلث کوچک وجود دارد؟

۲. الگوی رو به رو را به دقت ببینید.

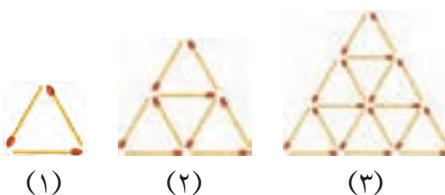
الف) در «شکل ۱»، چند مربع سیاه هست؟

ب) در «شکل ۲»، چند مربع سیاه هست؟

ج) در «شکل ۳»، چند مربع سیاه هست؟

د) در «شکل ۲۰»، چند مربع سیاه هست؟

۳. شکل‌های زیر، یک الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهد.



(۱)

(۲)

(۳)

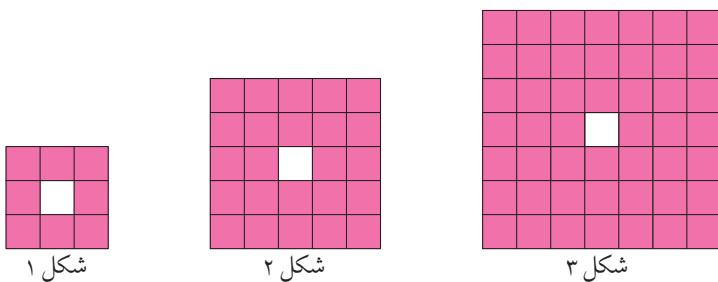
الف) با توجه به چوب‌کبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) را رسم کنید.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل $n^{\text{ام}}$ این الگو را بر حسب n بیابید.

ج) با توجه به رابطه‌ای که در قسمت قبل به دست آوردید، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل (۲۰) را محاسبه کنید.

۴. در یک مدرسه، ۳ پایه وجود دارد. هر پایه ۳ کلاس دارد. در هر کلاس ۳ ردیف نیمکت چیده شده است. در هر ردیف، ۳ نیمکت قرار دارد. روی هر نیمکت ۳ داش آموز می‌نشینند. اگر هر داش آموز، ۳ بار در روز آب بنوشد و هر بار به اندازه ۳ فنجان، آب هدر بدهد، داش آموزان این مدرسه در ۳ روز، چند فنجان آب اسراف می‌کنند؟ در ۲۷ روز چطور؟

۵. در الگوی زیر، هریک از شکل‌ها، نمای جلو، بالا و چپ یک جسم سه‌بعدی است که از مکعب‌های صورتی رنگ به ضلع واحد ساخته شده است.



الف) شکل چهارم حداقل از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

ب) شکل پنجم حداکثر از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

ج) حداکثر حجم شکل $n^{\text{م}}$ را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

۶. کاغذی را هر بار از وسط تا می‌زنیم. اگر مساحت کاغذ اصلی یک متر مربع باشد، مساحت شکل به دست آمده بعد از سومین تا، چقدر است؟

۷. الف) اگر یک کاغذ مربعی شکل به طول ضلع یک متر و ضخامت $1/100$ میلی‌متر داشته باشیم و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنیم، بعد از هشتمن تا، طول ضلع مربع به دست آمده و ضخامت کاغذ تاخورده چقدر می‌شود؟

ب) یک کاغذ بردارید و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنید. آیا می‌توانید از مرحله هفتم جلوتر بروید؟

محاسبه یک عبارت توان دار

۱. در هر یک از قسمت های زیر، ابتدا پایه هر توان را مشخص کنید. سپس حاصل هر عبارت را بیابید:

(الف) $2^6 \times 3^5 \times 7^4$

(ج) -3^4

(ه) 3×10^{12}

(ز) $-4^5 \times (-5)^4$

(ب) 5×3^4

(د) $8 - 3^4 - (4 \times 5)^2$

(و) ${}^{\circ}7 \times {}^{\circ}7 - {}^{\circ}4$

(ح) $11 - 10^3 \times 3^4 + (2^5 + 3)^2$

۲. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید:

(الف) $5^3 + 5^3 + 5^3$

(ج) $3 \times (13 + 7) \div (10 - 4)$

(ه) $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^4 \div 4^2$

(ز) $(5^3 \div 25) \times (2^3 + 2^3) \div 2^2$

(ط) $(-7 \times 2^4) \div 2^4 \times (-4)^2$

(ب) $7^2 + 7^2$

(د) $(-5 \times 4)^2 \div 4^2 \times (-3)^2$

(و) $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 2^0$

(ح) $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

(ی) $(3^5 - 5^3)(2^3 - 3^2) \div 2^2$

۳. داخل هر یک از دایره های زیر، علامت «<»، «=» یا «>» قرار دهید:

(الف) $3^5 \bigcirc 5^3$

(ج) $4^3 + 4^2 \bigcirc 4^5$

(ه) $2^{10} + 2^{10} \bigcirc 2^{11}$

(ز) ${}^{100} \bigcirc 100^0$

(ط) $-3^5 \bigcirc (-3)^5$

(ب) $2 \times 10 \bigcirc 2^{10}$

(د) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \bigcirc \frac{1^3}{3}$

(و) $(-1)^{20} \bigcirc -1^{100}$

(ح) $-3^4 \bigcirc (-3)^4$

(ی) $1 \div 2 \times 2 \times 2 \bigcirc 1 \div 2^3$

ساده کردن عبارت‌های توان‌دار

۱. کدام نمایش را برای عدد $1,000,000,000,000,000$ بیشتر می‌پسندید؟

$$\text{الـ} \underbrace{1^{\circ} \times 1^{\circ} \times \cdots \times 1^{\circ}}_{21 \text{ بار}}$$

١٠٢١

(ج) ١,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠

۲. کدام نمایش را برای تجزیه عدد ۱۹۱۴۴۲۲۳۴۳۷۵ بیشتر می‌پسندید؟

$$(الف) \quad 5^3 \times 3^1 \times 7^3 \times 7^2 \times 3^5 \times 5^3$$

$$\text{c) } 5^6 \times 1 \times 3^6 \times 1 \times 7^5$$

$$(ج) ٥٦ \times ٣٦ \times ٧٥$$

$$d) 10^{\circ} \times \sqrt{a}$$

۳. الف) در رایانه، ۱ بایت ۸ بیت است. 2^{10} بایت، ۱ کیلوبایت، 2^{20} کیلوبایت ۱ مگابایت، 2^{30} مگابایت ۱ گیگابایت و 2^{40} گیگابایت برابر ۱ ترابایت است. اگر بپرسند یک ترابایت چند بیت است، به نظر شما، کدام پاسخ مناسب‌تر است؟

● ۸۷۹۶۰۹۳۰۲۲۲۰۸

۲۴۳

• Answers

۴۳ بار

ب) سه هزار هیلیارد بزرگتر است با تعداد سنتهاي، يك تابايت؟

۴. فروشنده‌ای می‌خواهد عدد ۱۹۲۱۷۸۹۷۵۴۹۲۱۶۳۶۵۲۶۴۹ ۱۲۳۶۰ را بفروشد! به نظر شما کدام نمایش زیر، خوب‌دار است؟ دارای اینکه؟

۳۲۱۰

• 181° x 191°

۵. حاصل اعیارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

الف ١٠٠٠٠ × ١٠٠

$$\text{C) } \left(\frac{1}{8}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{ج) } \left(\frac{v}{z}\right)^5 \times \left(\frac{v}{z}\right)^{11}$$

$$d) \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \times (0.6)^3 \times \frac{12}{20}$$

$$5) 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10}$$

$$9) \quad 3^5 \times 3^6 \times 3^7 \times \cdots \times 3^{20}$$

i) $\gamma^0 + \gamma^0$

$$7) 3^2 + 3^2 + 3^2$$

۶. عدد 5^{18} را به صورت حاصل ضرب

الف) دو عدد توان دار مساوی بنویسید.

ب) سه عدد توان دار مساوی بنویسید.

۷. عدد 7^{77} را به صورت حاصل ضرب ۷ عدد توان دار مساوی بنویسید.

۸. هر دسته از عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $2^4, 3^4, 4^3, 5^3, 9^2$

ج) $2^2 \times 3^5, 5 \times 3^5, 5^2 \times 3^4$

ه) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$

ز) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$

ط) $5^{21}, 5^{23} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{11}, 5^{23} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$

ب) $2^3, 3^3, 4^2, 5^2, 6^2$

د) $2^5 \times 17, 3^5 \times 17, 5^3 \times 17$

و) $\left(\frac{2}{3}\right)^8, \frac{2^8}{3^8}$

ح) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}, \left(\frac{2}{5}\right)^{10}, \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

ی) $3^{20}, 2^3 \times 3^{18}, 5^3 \times 3^{16}$

کاربردهایی از توان

۱. هریک از عددهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول توان دار بنویسید:

الف) 808

ب) 105000

ج) 1001

د) 51×34

ه) 39×91

و) 66×121

ز) 234×343

ح) 78×81

۲. در هر قسمت x چه عددی است؟

الف) $2^2 \times (x) \times 11 = 660$

ب) $3 \times 2^4 \times (x) = 1200$

ج) $2^2 \times (x) \times 3 = 1500$

د) $2 \times (x) \times 5^2 = 450$

ه) $2 \times 41 \times (x) = 1394$

و) $5 \times 13 \times (x) = 2015$

۳. ب.م.م و ک.م.م هر جفت از اعداد زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول توان دار

بنویسید:

$$100 \times 7^4 \times 3^5, 5^7 \times 2^5 \times 18 \quad (\text{الف})$$

$$14 \times 18 \times 21, 15 \times 51 \times 72 \quad (\text{ج})$$

$$91 \times 39 \times 45, 65 \times 49 \times 85 \quad (\text{ه})$$

$$5^7 \times 7^5, 5^3 \times 3^5 \quad (\text{ب})$$

$$3^2 \times 7 \times 11, 2^5 \times 3 \times 7^2 \quad (\text{د})$$

$$35 \times 77, 12 \times 18 \quad (\text{و})$$

۴. هر دسته از عدهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 4 \times 11, 2^4 \times 3^7 \times 5^3, 2^2 \times 3^6 \times 5^4 \quad (\text{الف})$$

$$2^6 \times 3^2 \times 5^5, 2^2 \times 3^7 \times 5^4 \quad (\text{ب})$$

$$2^6 \times 5^5 \times 13^7, 2^3 \times 3 \times 5^4 \times 13^8 \quad (\text{ج})$$

$$13^{18}, 13^{21} \times \left(\frac{1}{13}\right)^4, 13^{21} \times \left(\frac{2}{13}\right)^4 \quad (\text{د})$$

۵. مساحت یک مستطیل 5^{1393} است. اگر طول ضلع مستطیل ۵ برابر عرض مستطیل باشد،

الف) طول و عرض این مستطیل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ب) محیط این مستطیل چند برابر عرضش است؟

۶. الف) آیا 4 شمارنده 3×2^7 است؟ چرا؟

ب) آیا 18 شمارنده 3×2^7 است؟ چرا؟

ج) آیا 5 شمارنده 3×2^7 است؟ چرا؟

۷. الف) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۷۲ بنویسید.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9 \times 12 \times 18 \times 24 \times 36 \times 72$$

ب) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با توان بزرگتر از 10 بنویسید.

$$2^3 \times 3^3 \times 6^3 \times 9^3 \times 18^3 \times 27^3 \times 54^3$$

۸. عدد $18 \times 17 \times \dots \times 1 = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times A$ را در نظر بگیرید.

الف) عدد A را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

ب) ابتدا هر یک از عدهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

سپس با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک شمارنده عدد A هستند.

● ۱۲۸

● 49×28

● ۲۲۱

● ۱۰۰۰۰

● ۲۹۰

● 220×230

● 128×128

● 51×91

ج) شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته‌ایم. نوزدهمین

شمارنده چیست؟

د) اگر شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسیم، بیست و سومین شمارنده چیست؟

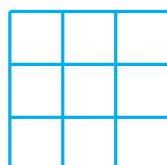
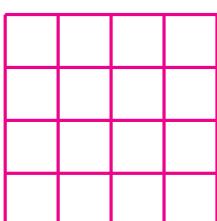
۹. الف) می‌دانیم x و y دو عدد طبیعی هستند و $1000 = x \cdot y$. اگر 10° شمارنده x و y

نباشد، x و y چه اعدادی هستند؟

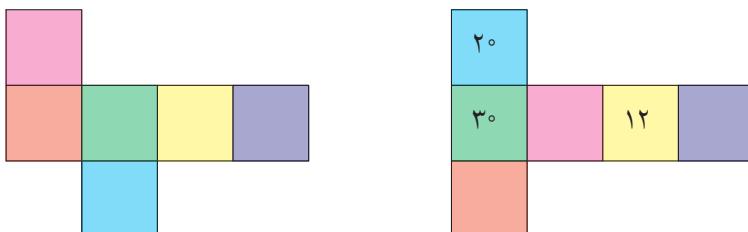
ب) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با عدهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عدهای هر سطر برابر 10° شود.

(ج) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول سمت راست را با عدهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عدهای هر سطر و هر ستون برابر 1000 شود؟

(د) خانه‌های خالی جدول سمت چپ را با عدهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عدهای هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر 10^6 شود.



۱۰. هریک از شکل‌های زیر گستردۀ یک مکعب را نشان می‌دهند. ابتدا در هر شکل وجهه‌های رو به رو را دو به دو مشخص کنید؛ سپس به پرسش‌ها پاسخ دهید.



الف) خانه‌های خالی مکعب سمت راست را با اعداد طبیعی کمتر از ۴۰ طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد رو به روی هم مقداری یکسان شود (تکرار اعداد مجاز نیست).

ب) آیا می‌توانید خانه‌های خالی مکعب سمت چپ را با اعداد طبیعی کمتر از ۴۰ که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند، طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد رو به روی هم مقداری یکسان شود؟ (تکرار اعداد مجاز نیست).

۱۱. عددی را که فقط سه شمارنده دارد، عدد دوم می‌نامیم. برای مثال ۴ یک عدد دوم است؛ زیرا سه شمارنده دارد: ۱، ۲ و ۴.

الف) کدام‌یک از عددهای زیر، عدد دوم هستند؟

- ۶
- ۴۹
- ۸۱
- ۱۶۹
- ۵۱۲
- ۳۶
- ۱۲۱
- ۱۴۴

ب) کدام‌یک از عددهای زیر را می‌توان به صورت حاصل ضربی از عددهای دوم نوشت؟

- ۵۰
- ۶۴
- ۱۰۰
- ۳۹×۲۶

ج) درست یا نادرست؟

«هر عدد دوم، توان دوم یک عدد اول است.».

۱۲. قانونی برای دنباله‌های عددی زیر بیابید؛ و جمله $n^{\text{م}}$ این دنباله‌ها را با آن قانون بنویسید.

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \quad (\text{الف})$$

$$1, -4, 9, -16, 25, -36, \dots \quad (\text{ب})$$

$$5, 8, 17, 24, 37, \dots \quad (\text{ج})$$

۱۳. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو باکتری تقسیم می‌شود؛ یک ثانیه بعد از آن هریک از باکتری‌های حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شوند و همین طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چند ثانیه طول کشیده تا نصف ظرف پر شده است؟



جذر و ریشه

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{5^2} \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{15 \times 35 \times 21} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}} \quad (\text{د})$$

$$\sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}} \quad (\text{ه})$$

$$\sqrt{(-25) \times (-4)} \quad (\text{و})$$

$$\sqrt{10^2 \times 81} \quad (\text{ز})$$

$$\sqrt{4 \times 25 \times 9} \quad (\text{ح})$$

$$\sqrt{3^3 \times 2^4 \times 12} \quad (\text{ط})$$

$$\sqrt{7^2 \times 6^3} \quad (\text{ی})$$

۲. در هر قسمت، x چه عددی باشد تا تساوی برقرار شود؟

$$3 \times \sqrt{x} = 21 \quad (\text{الف})$$

$$3 \times 4 \times \sqrt{x} = \frac{120}{2} \quad (\text{ب})$$

۳. برای هریک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

د) جذر عددی مثبت نباشد.

۴. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{0/27}$$

$$\sqrt{78}$$

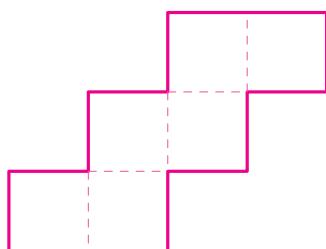
$$\sqrt{47/3}$$

$$\sqrt{35/5}$$

$$\sqrt{740}$$

$$\sqrt{0/074}$$

۵. شکل رو به رو از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل 21600 سانتی‌متر مربع است.



الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را به دست آورید.

ج) محیط تمام شکل را بحسب سانتی‌متر بیابید.

۶. $2\sqrt{3}$ یعنی $\sqrt{3} \times 2$. مقدار تقریبی هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{6} \times \sqrt{3}$$

$$3\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$$

$$\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$$

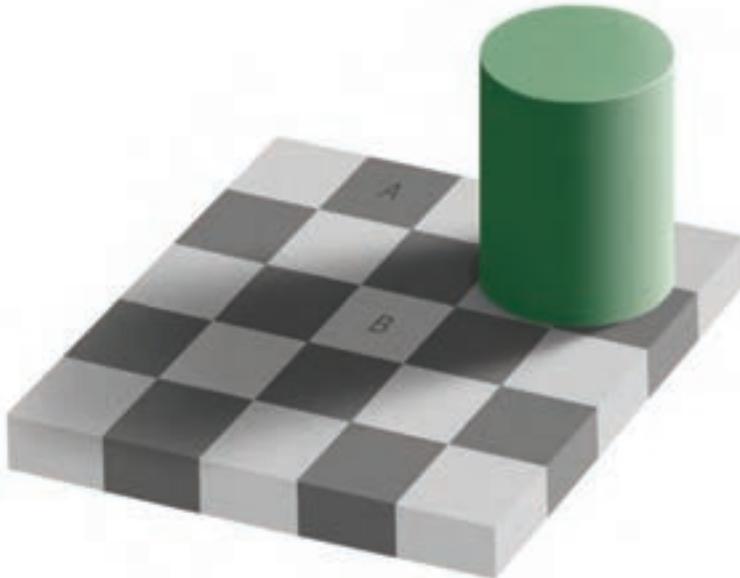
$$\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$$

۷. جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۸. اگر هریک از حروف نشان‌دهنده یک رقم ناصلفر باشد، کدامیک از عبارت‌های زیر حتماً نادرست است؟

$$\sqrt{ab} = c \quad \sqrt{^0/ab} = ^0/c \quad \sqrt{abc} = def \quad \sqrt{abcd} = ef \quad \text{(الف)}$$

در تصویر زیر خانه‌های A و B هم رنگ‌اند! اگر باور نمی‌کنید از این صفحه کپی بگیرید و خانه‌های A و B را با قیچی ببرید و کنار یکدیگر بگذارید.



فصل ۸

بردار و مختصات



امروزه استفاده از ابزارهای جدید مسافرت و یافتن نقشه جاهای مختلف را برای ما آسان کرده است. این ابزارها با استفاده از مختصات هر نقطه‌ای که به دنبال آن می‌گردید، می‌توانند آن را برای شما پیدا کند و راه رسیدن به آن را نیز به شما نشان دهد.

کارگاه بازی-نبرد دریایی

بازی «نبرد دریایی»، یک جنگ دریایی است! باید تلاش کنید در این جنگ شکست نخورید. این بازی، دو نفره است. قبل از شروع بازی باید ناوگان خود را مستقر کنید. این کار می‌تواند با فکر و ظرافت خاصی انجام شود. اگر خوش اقبال باشید، ناوگان شما از شلیک‌های حریف جان سالم بهدر خواهد برد. هر نفر قبل از شروع بازی باید در صفحه «ناوگان نیروهای خودی»، ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی خود را به صورت عمودی یا افقی بچیند. هرکس در ناوگان خود، یک ناو هوایپیمابر به طول ۵ خانه، یک کشتی جنگی به طول ۴ خانه، یک رزم‌ناو به طول ۳ خانه، یک زیردریایی به طول ۲ خانه و یک ناوشکن به طول ۲ خانه دارد. بنابراین ناو هوایپیمابر را با پنج «ه»، کشتی جنگی را با چهار «ج»، رزم‌ناو را با سه «ر»، زیردریایی را با سه «ز» و ناوشکن را با دو «ن» نشان می‌دهیم.

در زیر نمونه‌ای از این چیدمان را می‌توانید بینید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج				ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه
د			ز							
هـ		ز					ج			
و		ز					ج			
ز							ج			
حـ							ج			
طـ							ن	ن		
یـ							ر	ر	ر	

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
حـ										
طـ										
یـ										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

واضح است حریف شما نباید از شیوه چیدمان ناوگان شما مطلع شود. هر بازیکن در دست خود دو صفحه دارد. یک صفحه مربوط به «ناوگان نیروهای خودی» و یک صفحه مربوط به «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» است. بعد از اینکه شما و حریفتان ناوگان‌هایتان را مستقر کردید، می‌توانید بازی را شروع کنید.

هر کس در نوبت خود باید یک شلیک به سمت ناوگان حریف انجام دهد. برای این منظور باید مختصات یک خانه را انتخاب و به حریف اعلام کنید؛ مثلاً به او بگویید «من به خانه الف-۴ شلیک می‌کنم». سپس حریف شما باید اعلام کند که آیا شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده است یا خیر. اگر شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده باشد، شما در خانه «الف-۴» در صفحه «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» علامت «✓» بزنید. در غیر این صورت علامت «✗» بزنید. برنده کسی است که زودتر بتواند ناوگان حریف را از بین ببرد. یعنی بتواند تمام ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی‌های حریف را غرق کند.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج				ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه
د	ز									
ه	ز	ز				ج				
و	ز	ز				ج				
ز						ج				
ح						ج				
ط						ن	ن			
ر	ر	ر	ر							
ای										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف	✓									
ب	✓									✗
ج		✓								
د			✓							
ه				✗						
و					✗					
ز						✗				
ح							✗			
ط								✓		✗
ر										✗
ای										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

اما قوانین مسابقه:

۱. برای غرق کردن یک کشتی باید به تمام خانه‌های اشغال شده توسط آن کشتی، شلیک شود. برای مثال اگر می‌خواهید ناو هوایپامبر را غرق کنید، باید به تمام پنج خانه آن شلیک کنید.

۲. اگر یک شلیک به یک هدف برخورد کرد، یک شلیک دیگر جایزه می‌گیرید.

این مسابقه را به صورت لیگ حذفی در کلاس برگزار کنید. بازی در مرحله یک‌چهارم نهایی می‌تواند روی تخته کلاس و در حضور بقیه دانش‌آموزان به اوج هیجان برسد. نفرات اول، دوم و سوم به ترتیب افزایش $1/5$ ، $1/5$ و $1/5$ نمره امتحان میان‌ترم ریاضی پاداش خواهند گرفت. در «www.webmath.ir» نسخه‌ای از این بازی قرار داده شده است. دانش‌آموزی که بیشترین امتیاز را کسب کند، افزایش ۲ نمره امتحان میان‌ترم ریاضی پاداش خواهد گرفت.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
حـ										
طـ										
یـ										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الفـ										
بـ										
جـ										
دـ										
هــ										
وـ										
زـ										
حــ										
طــ										
یــ										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الفــ										
بــ										
جــ										
دــ										
هـــ										
وــ										
زــ										
حـــ										
طـــ										
یـــ										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الفـــ										
بـــ										
جـــ										
دـــ										
هــــ										
وــــ										
زــــ										
حـــــ										
طـــــ										
یـــــ										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الفـــــ										
بـــــ										
جـــــ										
دـــــ										
هــــــ										
وــــــ										
زــــــ										
حـــــــ										
طـــــــ										
یـــــــ										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الفـــــــ										
بـــــــ										
جـــــــ										
دـــــــ										
هــــــــ										
وــــــــ										
زــــــــ										
حـــــــــ										
طـــــــــ										
یـــــــــ										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

دریچه‌ای به روبوکاپ

روبوکاپ «RoboCup» یک رقابت روباتی سالانه

بین‌المللی است. روبوکاپ از سال ۱۳۷۶ برگزار می‌شود، و از همان سال ایران حضور پُررنگ و افتخارآمیزی در این رقابت مهیج داشته است. هدف این مسابقه، ارتقای دانش «روباتیک» و پژوهش در زمینه «هوش مصنوعی»، در قالب رقابتی چالش برانگیز است. روبوکاپ به صورت «RoboCup» نوشته می‌شود که برگرفته از «Robot Soccer» به معنای فوتبال روباتی و «World Cup» به معنای جام جهانی است. هدف این مسابقات، برگزاری مسابقه فوتبالی در نیمه قرن حاضر است که در آن تیم روبات‌های انسان‌نما بتواند بهترین تیم فوتبال جهان را شکست دهد!



۱. در روبوکاپ لیگ‌های متنوعی برگزار می‌شود و هر ساله نمایندگان منتخبی از دانش آموzan مدارس استعدادهای درخشان در آن شرکت می‌کنند. با ترجمه لیگ‌های این مسابقه، حدس می‌زنید این دانش آموzan در کدام لیگ(ها) شرکت می‌کنند؟

- RoboCup Soccer
- RoboCup Rescue
- RoboCup@Home
- RoboCup Logistics League
- RoboCupJunior

برای ساخت یک روبات چندین فن و دانش از جمله مکانیک و الکترونیک به کار گرفته می‌شود و در شیوه هدایت یک روبات چندین دانش از جمله برنامه‌نویسی رایانه‌ای و ریاضیات کاربرد دارد. در طی چندین سال شما با کاربرهایی از ریاضیات در روبوکاپ آشنا خواهید

شد.

در اولین قدم، سه نفر از دانش آموزان تصمیم گرفتند که یک روبات بسازند. پس از گذراندن چندین ماه کلاس روباتیک در زمینه های مکانیک و الکترونیک، روبات دست سازی ساختند که شبیه ماشین کنترلی به جلو-عقب و چپ-راست حرکت می کرد. آنها در گام بعدی توانستند با نصب یک قطب نمای الکترونیکی، روباتی بسازند که می توانست به شمال-جنوب و شرق-غرب حرکت کند. آنها به شرایطی رسیده بودند که ریاضیاتی را که خوانده بودند به کار برند؛ اما چگونه؟ آنها روبات را طوری ارتقا دادند که بتواند به جای کنترل دستی با یک برنامه رایانه ای کنترل شود. برنامه ای که آنها نوشتند بودند، می توانست با دریافت حروف خاصی، در یک جهت خاص روبات را به مسافت یک واحد (که برای آنها ده سانتی متر بود) حرکت دهد.

N : حرکت رو به سوی شمال

E : حرکت رو به سوی شرق

اکنون روباتی که ساخته بودند، دیگر یک اسباب بازی بچگانه نبود. آنها برای اینکه یادشان نرود هدف شان چیست، به سبک نامگذاری روبوکاپ، از ترکیب دو اسم روبات و سمپاد، نام جدیدی ساختند: «روپاد».

برای اینکه بتوانند بدانند روپاد دقیقاً کجاست، از دستگاه مختصات استفاده کردند که روی هریک از محورهای آن بر اساس دسی متر (که برابر ده سانتی متر است) مدرج شده بودند. این برای آنها بسیار لذت بخش بود که همزمان با یادگیری بهتر مختصات در درس ریاضی، به هدایت روپاد بیشتر مسلط می شدند.

با این همه وارد کردن تک تک حروف به طور جداگانه از سرعت حرکت روپاد می کاست. برای همین آنها برنامه ای رایانه ای نوشتند که یک رشته حروف را می گرفت و آن را تبدیل به حروفی جداگانه می کرد. با ترکیب این دو برنامه، آنها می توانستند دستورهای پیچیده تری به نام دستورهای ترکیبی را (که حاصل ترکیب چندین حرکت است)، به روپاد بدهند. توجه کنید که دستورات از چپ به راست خوانده می شوند. برای مثال با ورود دستور ترکیبی NE

روپاد اول یک واحد به سمت شمال و سپس یک واحد به سمت شرق خواهد رفت.

۲. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. اگر دستور

NNNNNEEEENEESSSSSWNW

را به روپاد بدهیم، آنگاه روپاد،

الف) چه مسیری را طی می‌کند؟
ب) در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

برای دقت بیشتر حرکت روبات، تیم سازنده تصمیم گرفت دقت هر حرکت را افزایش دهد؛ بنابراین از نظر الکترونیکی مدارها را تغییر داد. آنها حتی مجبور شدند موتورهای خاصی بخوند که دقت حرکت آنها بالاتر بود. به این ترتیب اکنون با دریافت هر حرکت، روبات به جای ۱۰ سانتی‌متر، یک میلی‌متر حرکت می‌کرد.

اکنون مشکل دیگری پیدا شده بود. برای اینکه روپاد بتواند جابه‌جا شود، به دستورات بسیار زیادی نیاز بود. برای مثال با ۲۰ بار نوشتن *S*، روپاد تنها دو سانتی‌متر جابه‌جا می‌شد. در اینجا بود که یکی از دانش‌آموزان از جبری که امسال آموخته بود، ایده گرفت. او از راهی شبیه روش ضرایب متغیرها برای ساده کردن کار استفاده کرد؛ به این ترتیب که به جای مثلاً *EEEEEEEEEE* از *(۱۲E)* استفاده کرد. سپس برنامه رایانه‌ای را طوری تغییر داد که این نمادگذاری را بفهمد؛ بنابراین اکنون می‌توانستند دستوری مثلاً به صورت

$(5E)W(4E)N(30S)N(8W)$

را به روپاد بدهند. با اجرای این دستور روپاد در ابتدا ۵ واحد به سمت شرق و سپس یک واحد به سمت غرب و ... خواهد رفت.

۳. دستور $(5E)WWW(4E)(5E)N(3N)N(2S)NSSS$ را به ساده‌ترین صورت ممکن که در آن از تعداد کمتری حروف *E*، *W*، *N* و *S* استفاده شود بنویسید.

۴. چرا ساده‌سازی دستور $(5E)S(4E)$ به صورت $(9E)$ درست نیست؟

۵. دستور $(3S)(3N)(2E)SE(2N)(2W)$ را اجرا کرده ایم.

الف) اگر روپاد با دستور فوق از مبدأ شروع به حرکت کند، آیا به مبدأ برمی‌گردد؟

ب) اگر روپاد از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ -12 \end{bmatrix}$ شروع به حرکت کند، آیا به آن نقطه بازمی‌گردد؟

ج) این روپاد چند بار مسیر حرکتش را قطع خواهد کرد؟

۶. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. با صد بار اجرای دستور $E(2N)E(3S)EN$

آیا عرض نقطه توقف روپاد صفر خواهد بود؟ طول آن چطور؟

۷. دستور $(32N)(32E)(2N)(2E)(4S)(2E)NE(2S)EN(2N)(2E)$ را پنج بار اجرا کرده‌ایم.

الف) روپاد جمعاً چند حرکت انجام داده است؟

ب) در سیصدمین حرکت، روپاد به چه سمتی حرکت کرده است؟

یک روبات باید بتواند (سریع) به نقطه‌ای خاص دست یابد؛ مثلاً فرض کنیم روپاد در نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ است و می‌خواهیم به نقطه‌ای مثل $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ برویم. راه ساده و سریع این است از دستور ENE یا EEN و یا NEE استفاده کنیم. حتی دستورهایی چون $NESSEENWN$ ، با اینکه مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند، روپاد را به همان نقطه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ خواهد رساند. پس عملکرد همه این دستورات یکی است: در مجموع دو واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت شمال. در این حالت می‌نویسیم: $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. به عملکرد یک دستور ترکیبی، «بردار انتقال» می‌گوییم.

۸. می‌دانیم که $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{CB} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$. حاصل \overrightarrow{AB} را به دست آورید.

برنامه‌نویس گروه روپاد برای ساده‌تر شدن کار، با تغییراتی در برنامه رایانه‌ای توانست معنای «دستور ترکیبی در دستور ترکیبی» را به روپاد بفهماند. او دستورهای ترکیبی را با حروف کوچک نشان می‌داد، و برای مثال می‌توانست در برنامه بنویسد:

$x = WN(5S)$: این یک دستور ترکیبی است، که نام آن را x گذاشته‌ایم.

$y = WNx$: این یک دستور ترکیبی است که در آن از x استفاده شده است و نام آن را y

گذاشته ایم.

$Nx(2y)$: این دستوری است که به روپاد داده می شود و در آن از x و y استفاده شده است.

۹. با توجه به متن بالا به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف) دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ به چه معنا هستند؟

ب) عملکرد دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ چیست؟

۱۰. روپاد با دستور $N(ENESE(2x)(2W)(3N)(2N))$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ شروع به حرکت می کند.

الف) دستور ترکیبی x را به گونه ای تعریف کنید که نقطه انتهای مسیر $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 11 \end{smallmatrix}\right]$ باشد.
بردار این دستور ترکیبی را بیابید.

ب) دستور ترکیبی x را به گونه ای تعریف کنید که روپاد در همانجا که شروع به حرکت کرده، پس از طی مسیر، متوقف شود. بردار انتقال این دستور ترکیبی را بیابید.

۱۱. در هریک از حالات داده شده، بردار انتقال روپاد را بیابید.

الف) نقطه شروع از $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ و نقطه انتها در $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.
ب) نقطه شروع از $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -11 \end{smallmatrix}\right]$ و نقطه انتها در $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

۱۲. می دانیم اگر دو روپاد با هم برخورد کنند، متوقف می شوند. دو روپاد داریم که به طور همزمان شروع به حرکت می کنند: روپاد اول با دستور $(4N)(3E)(2N)(3S)(3E)(4E)$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ ، و روپاد دوم با دستور $N(3W)(5S)(2E)(2N)E(2S)(2E)(N)(5S)(2E)$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$.

الف) این دو روپاد در چه نقطه ای متوقف می شوند؟

ب) اگر روپاد دوم از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \end{smallmatrix}\right]$ شروع به حرکت کند، در چه نقطه ای متوقف می شود؟

ج) روپاد دوم باید از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در سیزدهمین حرکت متوقف شود؟

د) آیا امکان دارد که روپاد دوم در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ از حرکت بازایستد؟ چرا؟

ه) روپاد دوم از کجا شروع به حرکت کند تا در نقطه $\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ متوقف شود؟

مختصات و تبدیل‌های هندسی

۱. در مثلث ABC ، $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. تصویر مثلث ABC را تحت هریک از دوران‌های زیر حول نقطه A بیابید و مختصات رئوس مثلث به دست آمده را بنویسید.

الف) 90°

ب) -90°

ج) 180°

۲. ابتدا نقاط زیر را در صفحه مختصات مشخص کنید:

$$S = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی پنج ضلعی $SMILE$ را به پنج ضلعی $L'AUGH$ تبدیل می‌کند.

۳. الف) نقاط زیر را در صفحه مختصات مشخص کنید:

$$W = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب) آیا دو پنج ضلعی $WHITE$ و $BLACK$ همنهشت‌اند؟ چرا؟

ج) مختصات کدامیک از رئوس $BLACK$ را تغییر دهیم تا پنج ضلعی حاصل با پنج ضلعی $BLACK$ همنهشت شود؟

۴. نقطه‌های $D = \begin{bmatrix} 17 \\ -18 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.
چند نقطه، مانند E و F ، می‌توان یافت به‌طوری‌که مثلث ABC با یک بردار انتقال به مثلث EFD تبدیل شود؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید و در هر حالت اجزای برابر دو مثلث را مشخص کنید.

۵. فرض کنید a ، b و c سه عدد منفی باشند به‌طوری‌که سه نقطه $B = \begin{bmatrix} b \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} c \\ 4 \end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث در صفحهٔ مختصات باشند؛

الف) مثلث ABC در کدام ناحیه است؟

ب) فرض کنید y . $E = \begin{bmatrix} c \\ y \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$ و چه عددی باشد تا دو مثلث ADE و ABC همنهشت شوند؟ با چه تبدیلی ABC به ADE تبدیل می‌شود؟ اجزای متناظر این دو مثلث را بنویسید.

۶. نقطه‌های $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر $M = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $G = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، چند نقطه مانند N ، وجود دارد به‌طوری‌که دو مثلث GMN و ABC همنهشت باشند؟ در هر حالت تبدیل‌هایی که مثلث ABC را به مثلث GMN تبدیل می‌کند، بنویسید.

۷. نقطه‌های $C = \begin{bmatrix} 19 \\ -15 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث هستند.
چند نقطه، مانند D ، می‌توان یافت که دو مثلث ABC و ABD همنهشت باشند. در هریک از حالت‌های تساوی، اجزای متناظر را بنویسید.

۸. دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

a : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

b_1 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_2 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_3 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

c : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

d : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

شکل ABCDE را با مختصات $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

• هریک از جملات زیر کدامیک از دستورات بالا را مشخص می‌کند؟

الف) هر نقطه نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

ب) هر نقطه نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

ج) هر نقطه نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود.

د) هر نقطه ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

ه) هر نقطه ۴ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) دربارهٔ

شکل ABCDE اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به‌دست

آورید (در هر مورد، انتقال، دوران و بازتاب شکل را مشخص کنید).

الف) $ab_1b_2b_3a$

ب) cd

ج) ac

د) ad

ه) cab_1

و) $cb_1ab_2db_3$

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) دربارهٔ

شکل ABCDE اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به‌دست

آورید. سپس مشخص کنید در کدام قسمت‌ها نتیجهٔ یکسانی به‌دست می‌آید؟

الف) b_1b_3

ب) b_2b_1

ج) cd

د) dc

ه) ad

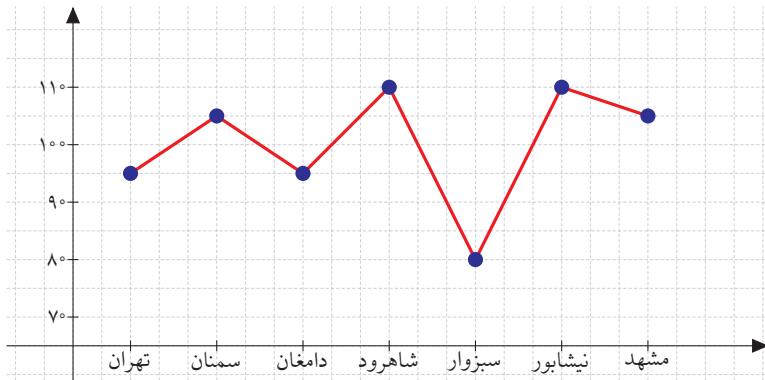
و) da



گربه‌ای که در تصویر می‌بینید «گربه پالاس» نام دارد. به احتمال زیاد چنین گربه‌ای به چشم شما نا آشناست، اما این گربه در ایران هم زندگی می‌کند ولی متاسفانه از گونه‌های در حال انقراض است. یعنی تعداد کمی از این گربه‌ها باقی مانده‌اند و البته آماری هم از تعداد آنها در ایران وجود ندارد. برای همین شما وقتی می‌شوید این جانور در ایران هم زندگی می‌کند تعجب می‌کنید.

نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها

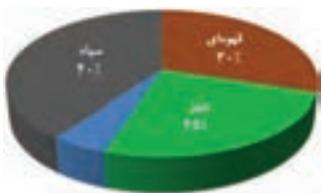
۱. خانواده محترم رجبی با خودروی شخصی‌شان از تهران عازم مشهد شدند. مهران رجبی، فرزند دوم خانواده، همیار پلیس است. او سرعت خودرو را در نزدیکی شهرهای تهران، سمنان، دامغان، شهرود، سبزوار، نیشابور و مشهد یادداشت کرد.
- سپس نمودار زیر را کشید.



- با توجه به نمودار بالا درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را بررسی کنید:
- الف) در این سفر هیچ‌گاه سرعت خودرو از 110° بیشتر نبوده است.
- ب) میانگین سرعت خودرو خانواده رجبی در جاده شهرود-سبزوار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{110 + 80}{2} = 95.$$

۲. نمودار زیر، تعداد انسان‌ها با رنگ چشم‌های مختلف را در یک شهر نشان می‌دهد.
- الف) چند درصد از مردم این شهر چشم‌های آبی دارند؟
- ب) اگر جمعیت این شهر 285200° باشد، رنگ چشم چند نفر سبز است؟



۳. تصویر زیر که از وبگاه رسمی فیفا انتخاب شده است، اطلاعاتی از بازی دو تیم در جام جهانی ۲۰۱۴ را ارائه می‌کند. دو مستطیل سبز و دایره‌های داخل آن وضعیت قرار گرفتن بازیکنان هر تیم را نشان می‌دهد.



الف) به جدول میان دو مستطیل سبز دقت کنید. ردیف اول تعداد حملات خطرناک دو تیم را نشان می‌دهد. در ردیف دوم تعداد شوت‌های به سمت دروازه هر تیم را می‌بینید. ردیف آخر نشان می‌دهد که تیم سبز ۵۶۶ پاس سالم و تیم قرمز ۳۱۸ پاس سالم داشته است. دایره‌ای که با دو رنگ سبز و قرمز مشاهده می‌کنید، درصد مالکیت توب را در هر تیم نشان می‌دهد. آیا با این اطلاعات می‌توانید نتیجه بازی را حدس بزنید؟

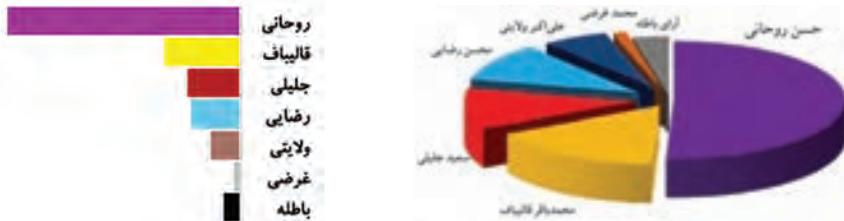
ب) با مراجعه به «www.webmath.ir» نتیجه این بازی را بینید. سپس در کلاس، درباره ارتباط اطلاعات آماری و نتیجه بازی‌های فوتبال بحث کنید.

۴. قانون انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران، فصل دوم، ماده ۱۳ به شرح زیر است:

چنانچه در مرحله اول برای همچ یک از داوطلبان اکثریت مطلق حاصل نگردد، انتخابات دو مرحله‌ای خواهد شد بین معنی که دونامزدی که یشترین آراء در مرحله اول داشته‌اند، در انتخابات مرحله دوم شرکت می‌کنند.

در اینجا منظور از اکثریت مطلق، کسب حداقل نصف به علاوه یک رأی، از کل آراء مأخوذه است.

دو وبگاه، نتیجه انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران در سال ۱۳۹۲ را به صورت زیر نمایش دادند.



کدام وبگاه از نمودار مناسب‌تری استفاده کرده است؟ چرا؟

۵. یک روز آقای شکمو روی ترازویش ایستاد و دید که وزنش ۱۳۵ کیلوگرم شده است. همان روز آقای شکمو تصمیم گرفت وزنش را کم کند. او چند هفته رژیم غذایی سختی را اجرا کرد. آقای شکمو هر هفته، صبح شنبه وزنش را اندازه گرفت و آنها را این‌گونه یادداشت کرد:

هفتة اول: ۱۳۵ کیلوگرم، هفتة دوم: ۱۳۰ کیلوگرم، هفتة سوم: ۱۲۶ کیلوگرم، هفتة چهارم: ۱۲۲ کیلوگرم، هفتة پنجم: ۱۱۸ کیلوگرم، هفتة ششم: ۱۱۵ کیلوگرم، هفتة هفتم: ۱۱۲ کیلوگرم، هفتة هشتم: ۱۱۰ کیلوگرم، هفتة نهم: ۱۰۸ کیلوگرم، هفتة دهم: ۱۰۶ کیلوگرم، هفتة یازدهم: ۱۰۴ کیلوگرم، هفتة دوازدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفتة سیزدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفتة چهاردهم: ۱۰۷ کیلوگرم، هفتة پانزدهم: ۱۱۱ کیلوگرم، هفتة شانزدهم: ۱۱۳ کیلوگرم.

الف) چه نموداری برای نشان دادن وزن آقای شکمو در این ۱۶ هفته مناسب است؟ آن نمودار را رسم کنید.

ب) یک نفر نموداری که شما رسم کرده‌اید را دیده و نتیجه گرفته:

«میانگین وزن آقای شکمو در روزهای هفتة یازدهم تقریباً ۱۰۳ کیلو بوده است.»

آیا این نتیجه‌گیری درست است؟

ج) به نظر شما آقای شکمو در هفته چندم از آن رژیم طاقت‌فرسا دست کشیده است؟

۶. فیلم «آتش بس» را اولین فیلم میلیاردی سینمای ایران نامیده‌اند. این فیلم در سال ۱۳۸۵، حدود یک میلیارد و پانصد میلیون تومان فروش داشته است. فیلم «کلاه قرمزی و پسرخاله» در سال ۱۳۷۳، حدود چهارصد میلیون تومان فروش داشته است.

الف) به نظر شما آیا فقط با دانستن میزان فروش این دو فیلم می‌توان محبوبیت هریک را در زمان خودشان با یکدیگر مقایسه کرد؟

ب) میانگین قیمت بلیت در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۷۳ به ترتیب ۱۲۰۰ و ۷۰ تومان بوده است. فیلم کلاه قرمزی و پسرخاله تقریباً چند بلیت بیشتر از فیلم آتش بس فروخته است؟

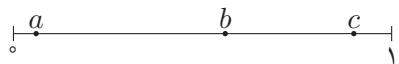
ج) در سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۳۸۵ جمعیت ایران، به ترتیب در حدود ۶۰ و ۷۰ میلیون نفر بوده است. چند درصد مردم برای دیدن این دو فیلم به سینما رفته‌اند؟

د) به نظر شما برای مقایسه میزان فروش و محبوبیت فیلم‌ها چه شاخص‌هایی را باید در نظر گرفت؟



احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودن احتمال پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بین صفر و یک است، درباره نزدیک بودن آن به عده‌های a ، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



- (الف) انتخاب شدن شما برای درس جواب دادن در کلاستان!
- (ب) برنده شدن یک نفر در قرعه‌کشی برنامه نود!
- (ج) سبز شدن یک گل در باغچه، بدون کاشتن بذر!
- (د) آقای گل شدن شخصی که در هیچ تیم فوتبالی حضور ندارد!
- (ه) ایرانی بودن فیلم سینمایی تلویزیون در عصر جمعه هفته آینده
- (و) بارش برف در ماه ژانویه در سیبری
- (ز) احتمال پیدا کردن رمز یک کارت بانکی در سومین آزمایش تصادفی!
- (ح) همنگ شدن تمام وجههای یک مکعب روییک بهم ریخته با دهار چرخاندن وجههای مکعب به طور تصادفی
- (ط) دختر بودن فرزند خانمی باردار
- (ی) پرواز یک مگس در یخچال نزدیک‌ترین شیرینی فروشی به خانه شما!
- (ک) پخش شدن اذان ظهر از بلندگوی مسجد محله شما در ظهر شرعی
- (ل) یک دانش آموز در برگه امتحانش، عدد ۹۱ را عددی اول در نظر بگیرد!
- (م) یک ریاضی‌دان در سخنرانی مهمی بگوید: ۵۱ عددی اول است!

۲. تاسی را می اندازیم. آیا احتمال اینکه «عدد بزرگتر از چهار ظاهر شود» از احتمال اینکه «عدد اول ظاهر شود» بیشتر است؟

۳. با توجه به بازی نبرد دریایی که در فصل قبل با آن آشنا شدید، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) چقدر احتمال دارد که شلیک اول شما به هدف برخورد کند؟

ب) اگر شلیک اول شما به هدف برخورد نکند، چقدر احتمال دارد که شلیک دوم به هدف برخورد کند؟

ج) فرض کنید شلیک اول شما به هدف برخورد کرده باشد. آیا ممکن است احتمال برخورد شلیک دوم شما به هدف بیش از $\frac{1}{3}$ باشد؟

۴. الف) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۵۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد؟

ب) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد یا فقط دو شمارنده اول داشته باشد؟

ج) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۲۰۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد دقیقاً سه شمارنده داشته باشد؟

د) از بین اعداد طبیعی دو رقمی، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مجموع رقم‌های این عدد زوج باشد؟

۵. در کیسه‌ای تعدادی مهره سیاه، سفید و آبی هست. احتمال بیرون آمدن مهره سیاه $\frac{2}{5}$ و احتمال بیرون آمدن مهره سفید $\frac{2}{7}$ است، احتمال بیرون آمدن مهره آبی چقدر است؟

۶. مهدی سه کتاب داستان خارجی، چهار کتاب داستان ایرانی، سه کتاب شعر و پنج کتاب معما دارد. مهدی یکی از این کتاب‌ها را با چشم بسته انتخاب می‌کند. احتمال اینکه، این کتاب، کتاب داستان باشد چقدر است؟

۷. شکل زیر، گستردۀ یک جسم فضایی را نشان می‌دهد. این جسم فضایی را مانند یک تاس می‌اندازیم. هریک از احتمال‌های زیر را به دست آورید:

الف) وجه بالا شمارنده ۷۲ باشد.

ب) وجه بالا مضرب ۱۲ شود.

ج) وجه بالا شمارنده ۳۶ نباشد.

د) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۷۲ نشود.

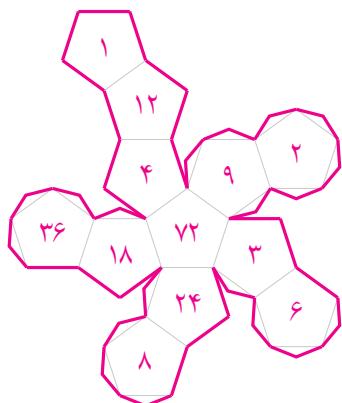
ه) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۵۶ شود.

و) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۲۸۸ باشد.

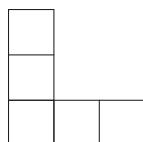
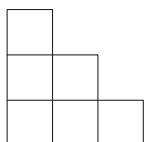
ز) حاصل ضرب همه وجه‌ها به‌غیر از وجه بالا و پایین برابر $31^{\circ} \times 21^{\circ}$ باشد.

ح) وجه بالا مضرب ۶ باشد ولی مضرب ۴ نباشد.

ط) وجه بالا بر هر دو عدد ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد.



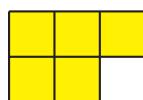
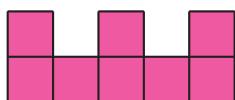
۸. در زیر، شکل سمت چپ و شکل سمت راست به ترتیب یک چندحجره‌ای را از بالا و رو به رو نشان می‌دهند.



الف) احتمال اینکه حجم این چندحجره‌ای برابر ۷ باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه حجم این چندحجره‌ای برابر ۱۱ باشد، چقدر است؟

۹. دو چندحجره‌ای با رنگ‌های زرد و صورتی داریم. در زیر، شکل سمت چپ، نمای بالا و رو به روی چندحجره‌ای صورتی، و شکل سمت راست، نمای بالا و رو به روی چندحجره‌ای زرد است.



الف) چقدر احتمال دارد که حجم چندحجره‌ای صورتی برابر 1° باشد؟

- ب) چقدر احتمال دارد که حجم چند حجره‌ای زرد برابر ۹ نباشد؟
- ج) چقدر احتمال دارد که مجموع حجم این دو چند حجره‌ای برابر ۲۰ باشد؟
۱۰. در کلاه یک شعبده باز ۶ موش و چند خرگوش وجود دارد. اگر احتمال بیرون آوردن یک خرگوش از این کلاه $\frac{4}{7}$ باشد، تعداد خرگوش‌ها چقدر است؟



۱۱. پنج جفت جوراب در یک کیسه وجود دارد. دو لنگه به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه این جوراب‌ها لنگه به لنگه باشند، چقدر است؟



احتمال و تجربه

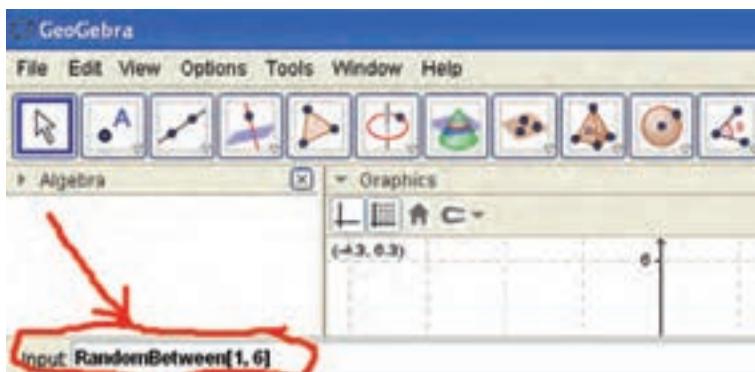
با مراجعه به «www.webmath.ir» نرم افزار جئو جبرا را دانلود کنید.

۱. الف) با سیب زمینی یک تاس بسازید و آن را صدبار بیندازید. تعداد ۶ های آمده را یادداشت کنید.

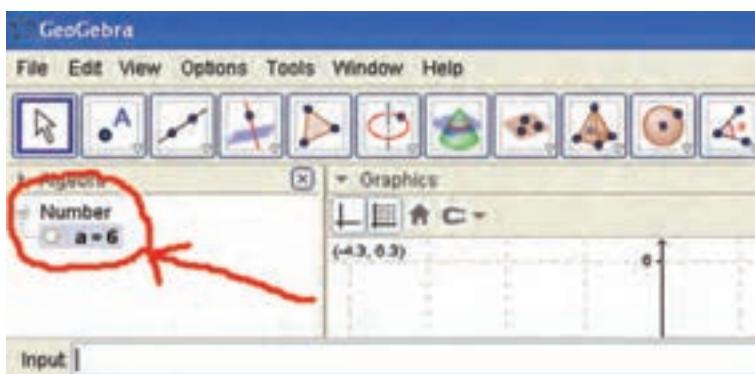
ب) نرم افزار جئو جبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت

`RandomBetween[1, 6]`

را وارد کنید (تصویر زیر را ببینید).



سپس کلید Enter را فشار دهید. جئو جبرا یک عدد تصادفی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می کند (تصویر زیر را ببینید).



با هر بار فشار دادن کلید F9، جئو جبرا یک عدد تصادفی دیگر (بین ۱ تا ۶) را مقابل حرف a چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد «۶»‌های ظاهر شده مقابل حرف a را یادداشت کنید.

ج) اگر پانصدبار تاس سیب زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۶ ظاهر شود؟

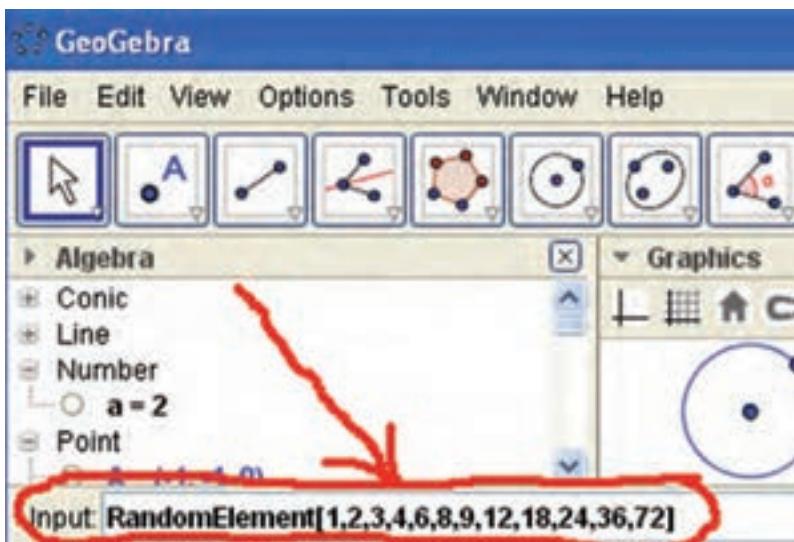
د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیکتر است: تعداد «۶»‌های آمده در پرتاب تاس سیب زمینی یا تعداد «۶»‌های ظاهر شده در جئو جبرا؟

۲. الف) سعی کنید با سیب زمینی یک دوازدهوجهی منتظم بسازید. روی هر وجه آن یکی از شمارندهای عدد ۷۲ حک کنید. دوازدهوجهی را صدبار بیندازید و تعداد ۲۴ های آمده را یادداشت کنید.

ب) نرم افزار جئو جبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت

`RandomElement[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]`

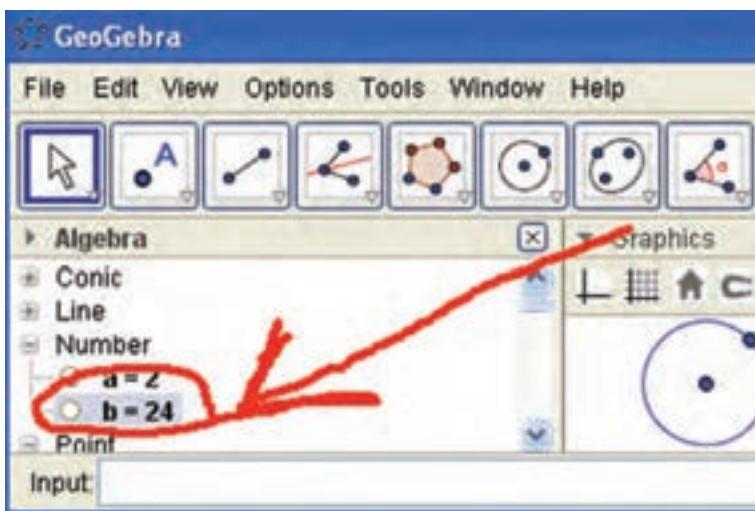
را وارد کنید (تصویر زیر را بینید).



سپس کلید Enter را فشار دهید. جئوجبرا یک عدد تصادفی از اعداد شمارنده‌های عدد ۷۲ انتخاب می‌کند و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می‌کند (تصویر صفحهٔ بعد را بینید).

با هربار فشار دادن کلید F9، جئوجبرا یک عدد تصادفی دیگر (از شمارنده‌های ۷۲) را مقابل حرف b چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد ۲۴‌های ظاهر شده مقابل حرف b را یادداشت کنید.

- ج) اگر پانصدبار دوازده‌وجهی سیب‌زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۲۴ ظاهر شود؟
- د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیک‌تر است: تعداد ۲۴‌های آمده در پرتاب دوازده‌وجهی سیب‌زمینی یا تعداد ۲۴‌های ظاهر شده در جئوجبرا؟



معادله

هرگاه یک عبارت جبری مساوی یک عبارت جبری دیگر یا یک عدد شود، معادله تشکیل می‌شود. هریک از تساوی‌های زیر یک معادله است.

$$15x - 4 = 5 \quad (\text{الف})$$

$$18x \cdot x - 3x \cdot y = 12x - 4y \cdot x \quad (\text{ب})$$

$$z = 18x \cdot x \cdot x - 4t \quad (\text{ج})$$

$$v = 2k + t \quad (\text{د})$$

معادله یعنی «معادل شدن» یک عبارت جبری با یک عبارت جبری دیگر (و یا یک عدد)

در قسمت «الف»، عبارت جبری $4 - 15x$ معادل است با 5 . این معادله دارای یک متغیر x است. در قسمت «ب»، عبارت جبری $3x \cdot y - 18x \cdot x$ معادل است با عبارت جبری $12x - 4y \cdot x$. این معادله دارای دو متغیر x و y است.

حل معادله

از اینجا به بعد درباره معادله‌هایی سخن می‌گوییم که فقط یک متغیر دارند.

تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$2x \cdot x + 5x = x \cdot x \cdot x - 12$$

می‌دانیم این تساوی یک معادله است. در این معادله عبارت جبری $2x \cdot x + 5x$ معادل شده است با عبارت جبری $x \cdot x \cdot x - 12$. در این معادله x یک متغیر عددی است. یعنی به جای x باید یک عدد قرار بگیرد. به نظر شما آیا در تساوی یا معادله بالا به جای x می‌توان هر عددی را قرار داد؟ به عنوان نمونه در معادله بالا مقدار x را برابر 2 قرار می‌دهیم. در این صورت آیا

تساوی بین دو عبارت جبری $x.x.x + 5x - 12$ و $2x.x + 5x$ برقرار می‌ماند؟

$$\begin{aligned} 2x.x + 5x &= x.x.x - 12 \stackrel{x=2}{\implies} 2 \times 2 \times 2 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 2 \times 2 \times 2 - 12 \\ &\implies 8 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 8 - 12 \\ &\implies 18 \stackrel{?}{=} -4. \end{aligned}$$

آیا تساوی به دست آمده برقرار خواهد بود؟!

واضح است که $-4 \neq 18$ ؛ یعنی 18 مساوی -4 نیست. پس ما مجاز نیستیم به جای x مقدار 2 را قرار دهیم؛ یعنی عدد 2 نمی‌تواند به جای x قرار بگیرد. حال این پرسش مطرح می‌شود:

به جای x چه عدد (یا اعدادی) را می‌توانیم قرار دهیم؟

تمرین. همانند نمونه حل شده بالا ($x = 2$)، به جای x در معادله

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12$$

هریک از مقدارهای زیر را قرار دهید و بررسی کنید: آیا تساوی به دست آمده درست است یا نه؟

(الف) $x = 0$

(ب) $x = 1$

(ج) $x = 3$

(د) $x = \frac{1}{2}$

(ه) $x = -2$

(و) $x = 4$

اگر تمرین قبل را کامل انجام دهید، ملاحظه خواهید کرد که تساوی

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12$$

برای $x = 4$ برقرار خواهد بود. یعنی اگر به جای x عدد 4 را قرار دهیم، توانسته‌ایم بین دو عبارت $x.x.x - 12$ و $2x.x + 5x$ ایجاد تعادل کنیم.

حل معادله یعنی «ایجاد تعادل». ایجاد تعادل بین سمت چپ و سمت راست تساوی.

مثال. می‌خواهیم معادله $11x - 6x.x = 6 - x.x.x$ را حل کنیم؛ یعنی باید عددهایی را پیدا کنیم که اگر آن عددها را به جای x قرار دهیم، تساوی بین دو عبارت جبری $(x.x.x - 6x.x)$ و $(11x - 6)$ برقرار بماند.

ابتدا به جای x مقدار ۱ – قرار می‌دهیم.

$$x = -1 \implies (-1)(-1)(-1) - 6 \times (-1)(-1) \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times (-1) \implies -7 \neq 17$$

بنابراین $x = -1$ بین دو عبارت جبری $x.x.x - 6x.x$ و $11x - 6$ ایجاد تعادل نمی‌کند؛

بنابراین $x = -1$ نمی‌تواند جواب معادله $11x - 6x.x = 6 - 6$ باشد.

به جای x مقدار ۰ را قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \implies 0 \times 0 \times 0 - 6 \times 0 \times 0 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 0 \implies 0 \neq 6$$

هم نمی‌تواند جواب معادله باشد.

به جای x ، مقدار ۱ قرار می‌دهیم.

$$x = 1 \implies 1 \times 1 \times 1 - 6 \times 1 \times 1 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 1 \implies -5 = -5$$

اگر $x = 1$ باشد، بین دو عبارت جبری $x.x.x - 6x.x$ و $11x - 6$ تعادل ایجاد شده است.

پس $x = 1$ یک جواب برای معادله $11x - 6x.x = 6 - 6$ است.

به جای x مقدار ۲ قرار می‌دهیم.

$$x = 2 \implies 2 \times 2 \times 2 - 6 \times 2 \times 2 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 2 \implies -16 = -16$$

هم یک جواب برای معادله $11x - 6x.x = 6 - 6$ است.

آیا می‌توانید باز هم برای این معادله جواب پیدا کنید؟ به نظر شما معادله $11x - 6x.x = 6 - 6$ چند جواب دارد؟

تعداد جواب‌های یک معادله

برای بعضی از معادله‌ها نمی‌توان جواب پیدا کرد. برای مثال معادله زیر از این نوع است.

$$x + 4 = x - 2$$

بعضی از معادله‌ها فقط یک جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع‌اند.

$$\bullet -2x - 4 = x + 6$$

$$\bullet 3x - 2 = 7$$

$$\bullet x \cdot x + 6x - 4 = x \cdot x + 5x + 6$$

$$\bullet (x - 1)(x - 1) = 0$$

بعضی از معادله‌ها فقط دو جواب دارند:

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

بعضی از معادله‌ها فقط سه جواب دارند. بعضی از معادله‌ها فقط چهار جواب دارند و

....

بعضی از معادله‌ها بی‌نهایت جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع‌اند:

$$\bullet x(x - 1) + x = x \cdot x$$

$$\bullet 3x + 4 - x = 5x - 2 - 3x + 6$$

پس تکلیف ما چیست؟ از کجا بفهمیم که یک معادله چند جواب دارد؟ جواب‌های یک معادله را چگونه باید پیدا کنیم؟ اینها سؤالاتی است که به همه آنها نمی‌توان امسال پاسخ داد. چند سال برای جواب دادن به این پرسش‌ها وقت لازم است. کمی صبور باشید!

معادله‌هایی که امسال باید با آنها آشنا شوید و راه حل آنها را بیاموزید، معادله‌هایی‌اند که فقط یک متغیر دارند. در زیر، چند نمونه از این معادله‌ها را مشاهده می‌کنید.

$$\bullet 3x = 18$$

$$\bullet 6x + 5x = 11$$

$$\bullet 2x - 6 = 5$$

$$\bullet 12y - 9 = 3y - 6$$

آیا می‌توانید چند نمونه از این معادله‌ها را خودتان بسازید؟

روش حل معادله

برای حل یک معادله ابتدا باید عبارت‌های جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کرد. سپس از خواص تساوی باید به‌گونه‌ای استفاده شود تا پس از به‌کار بردن آن، در یک طرف تساوی فقط عدد داشته باشیم و در سمت دیگر یک جمله که دارای متغیر است. در نهایت باز هم با استفاده از خاصیت تساوی می‌توانیم به جواب معادله برسیم. با این همه در این بخش تنها به روش حل معادلاتی که پس از ساده شدن در آنها تنها یک نماد متغیر ظاهر می‌شوند، توضیح داده می‌شود. همچنین خواهید دید که این معادلات تنها یک جواب دارند.

$$5x + 2 = 3x + 14 - x.$$

مثال.

باید به دنبال عددی باشیم که اگر آن عدد را به جای متغیر x قرار دهیم، تعادل بین سمت و چپ و سمت راست تساوی برقرار بماند. اولین کاری که باید انجام دهیم، این است که عبارات جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کنیم.

$5x + 2 = 2x + 14$.

در تساوی بالا می‌خواهیم عدد ۲ را از سمت چپ حذف کنیم. پس دو طرف تساوی را منهاج ۲ می‌کنیم.

$$5x + 2 = 2x + 14 \implies 5x + 2 - 2 = 2x + 14 - 2$$

$$\implies 5x = 2x + 12.$$

حال می‌خواهیم جمله $2x$ را از سمت راست حذف کنیم. برای این کار دو طرف تساوی را منهاج $2x$ می‌کنیم.

$$5x = 2x + 12 \implies 5x - 2x = 2x + 12 - 2x$$

$$\implies 3x = 12.$$

حالا به یک تساوی رسیده‌ایم که در یک طرف آن فقط عدد داریم و در طرف دیگر یک جمله که دارای یک متغیر است. اکنون اگر دو طرف تساوی را به عدد ۳ تقسیم کنیم، جواب معادله

به دست می‌آید. جواب معادله، یعنی عددی که مجازیم در معادله به جای متغیر قرار دهیم.

$$3x = 12 \implies \frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\implies x = 4.$$

پس در معادله $x - 4 = 3x + 14 - 4$ اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$5 \times 4 + 2 \stackrel{?}{=} 3 \times 4 + 14 - 4 \implies 22 + 2 \stackrel{?}{=} 12 + 14 - 4$$

$$\implies 22 = 22.$$

کتاب‌نامه

- [۱] آیزاك آسیموف، عدد، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۲] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، خودآموز هنسه ۱، جلد اول، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.
- [۳] ریاضیات کانگورو ۷ و ۸، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۴] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علیرضا تاج‌بخش، ریاضی تكمیلی سال اول دوره راهنمایی، سازمان ملی پژوهش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۵] شهپان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.
- [۶] اویستن اور، گزیده‌هایی از نظریه اعداد، ترجمه منوچهر وصال، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۷] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۸] دیوید برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.
- [۹] اریک تمپل بل، ریاضی‌دانان نامی، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۲.
- [۱۰] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۱۱] ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.
- [۱۲] خسرو داودی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، تهران، ۱۳۷۷.

- [۱۳] عبدالرضا زارع شحنه، ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی، سازمان ملی پژوهش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۴] پرویز شهریاری، ۹۹ مسئله ریاضی، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.
- [۱۵] دمیری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، مخالف ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۱۶] بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی، اندیشه ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.
- [۱۷] سرژ لانگ و جین مورو، هنسه، ترجمه محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۷.
- [۱۸] مارتین گاردنر، معماهای ابوالهول، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.
- [۱۹] ادوین مویز و فلوید دائز، هنسه، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۰] راجر نلسن، اثبات بدون کلام، ترجمه سپیده چمن آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۱] تارل هاف، چگونه با آمار دروغ می‌گویند، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.



درباره طرح روی جلد

گلیم یا پلاس یکی از انواع صنایع دستی، زیراندازی و پوششی است که از ابریشم، موی بز، پشم گوسفند و یا دیگر چارپایان اهلی بافته می‌شود. گلیم به شکل سنتی اش، معمولاً برای پوشاندن زمین، دیوار و یا رو اندازی برای حیوانات باربر استفاده می‌شود ولی امروزه به عنوان یک پوشش مدرن برای خانه‌های شهری نیز خریداری می‌شود.

طرح روی جلد این کتاب، قسمتی از نقشه یک گلیم است که می‌توانید در www.webmath.ir اصل تصویر را مشاهده کنید. در زیر، طرح کامل این گلیم زیبا را می‌بینید.



محلان محترم صاحب نظران دانش آموزان غریز و اولیا می آنان می گویند
نظر صلاحی خود را درباره مطالبات این کتاب از طبق ناسنیت نی تهران
خیابان پسند قرنی هنری هشتاد و هشت آموزش مرپوش ساختمان
مرحوم علاقه دان؛ طبعه همهم، کد پستی ۱۵۹۹۹-۵۸۱۱۱ و یا بیانی رایانه
ارسال نمایند.

مرکز علمی پژوهش استعدادهای ذهنی دانشگاه پرتوان جوان



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)