بنام خدا

انتگرال آوا

Ava Integral

تألیف و ترجمه

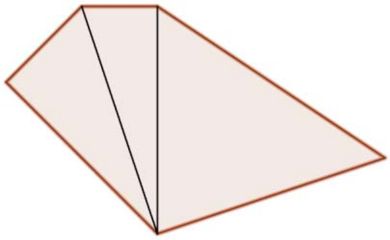
انوشیروان صراف
دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز
(سال های ۱۳۴۲ ـ ۱۳۶۵)
مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری
(سال های ۱۹۹۶ـ۲۰۰۹)
آدرس ایمیل
John_Sarraf@yahoo.com

بنام خدا

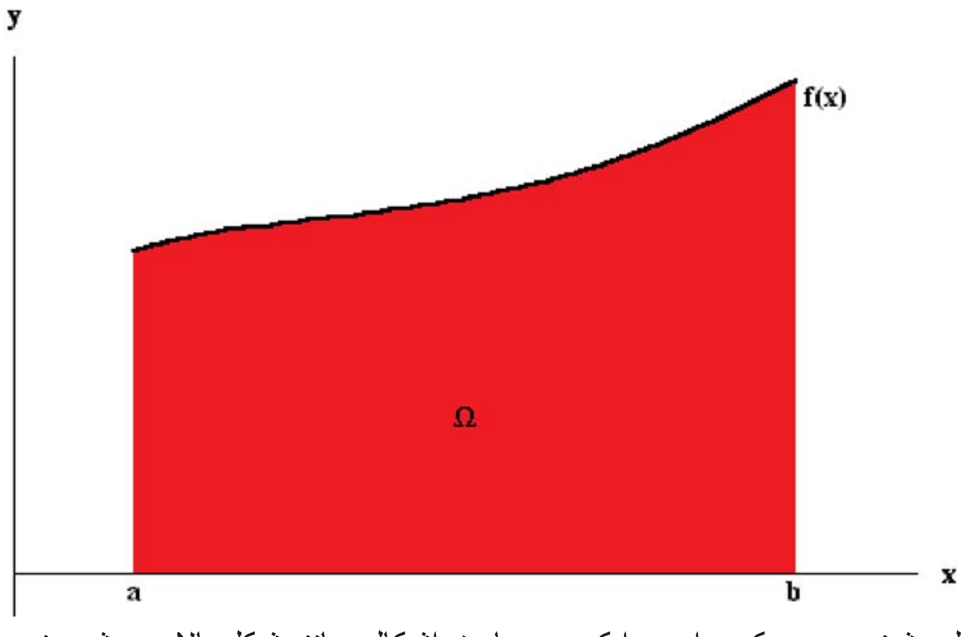
فصل اول مقدمات انتگرال

۱.۱ - مقدمه

از زمان قدیم ریاضی دانان سعی کرده اند مساحت اشکال مسطحه را حساب کنند. ساده ترین شکل مسطحه ، مستطیل است که مساحت آن حاصل ضرب طول در عرض مستطیل است. همچنین با استفاده از هندسه اقلیدسی نتیجه گرفتند که می توان مساحت متوازی الضلاع و مثلث را هم پیدا کرد. همچنین توانستند مساحت چند ضلعی را هم با تقسیم آن به چند مثلث ، پیدا کنند.



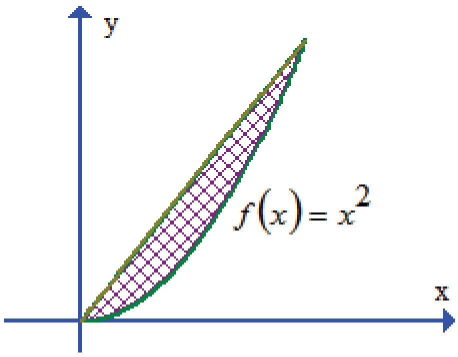
اما برای اشکالی که دارای حدود منحنی یا قوسی هستند ، کار مشکل می شود. شکل زیر



ارشمیدس اولین شخصی بود که برای پیدا کردن مساحت اشکالی مانند شکل بالا ، روش جز به جز را بکار برد.

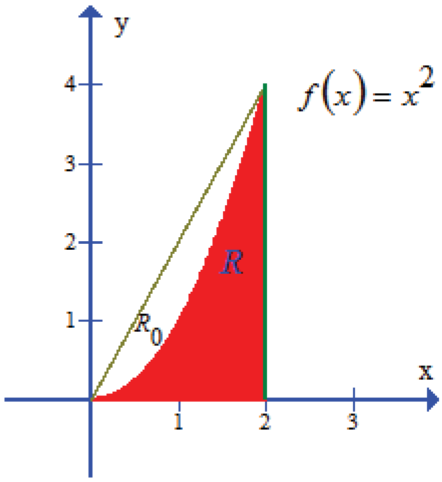
روش جز به جز: Method of Exhaustion

او با محاط کردن هرچه بیشتر چند ضلعی هایی که مساحت آنها را می دانست در داخل یک شکل پیچیده مساحت آنرا بدست آورد.مساحت آن شکل در نهایت " **حد Limit" مساحت اشکا ل محاط شده بود.** اما ارشمیدس اطلاعی از ایده حد ، نداشت. مثلا برای پیدا کردن مساحت شکل زیر ، تعداد زیادی مربع داخل آن شکل گذاشت تا بالا خره توانست تمام آن قسمت را پر کند و مساحت آنرا بدست آورد.

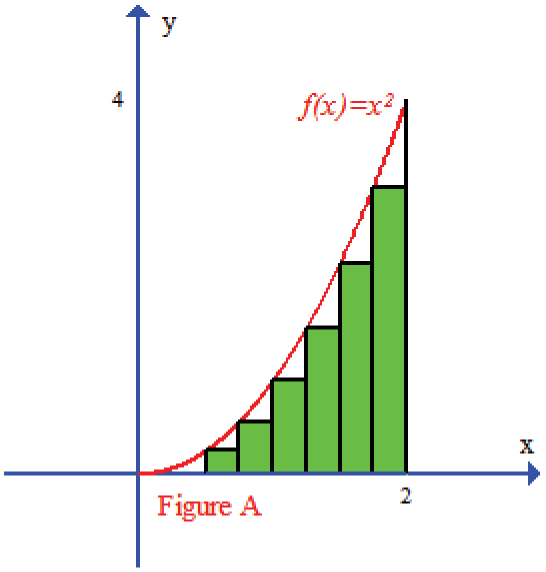


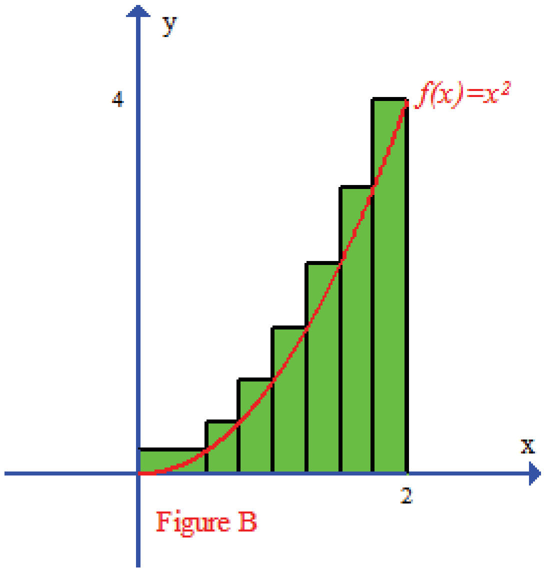
آماده سازی برای انتگرال معین. Preparation for Definite Integral

فرض کنید می خواهیم مساحت ناحیه R_0 یعنی قسمت سفید رنگ را پیدا کنیم. شکل زیر.



به نظر می رسد برای این کار ، آسان تر است که روی ناحیه R یعنی قسمت قرمز رنگ کار کنیم. این ناحیه Region محدود شده است به $f(x) = x^2$ و محور x و خط $x = ۲$. چون R و R_0 تشکیل یک مثلث می دهند که مساحت آن ۴ است ، پس اگر مساحت R را پیدا کنیم ، می توانیم مساحت R_0 را پیدا کنیم. حالا اگر مانند شکل A ، مستطیل هایی Inscribe محاط کنیم ، مجموع مساحت های مستطیل ها کمتر از مساحت R است. اما اگر مانند شکل B مستطیل هایی محیط Circumscribeکنیم ، مجموع مساحت های مستطیل ها بیشتر از مساحت R است. مسلم است که می توانیم مساحت مستطیل ها را به اسانی پیدا کنیم.





حالا اگر قاعده مستطیل ها را کوچک تر و کوچک تر کنیم ،یعنی تعداد مستطیل ها را زیاد کنیم , مجموع مساحت های این مستطیل ها به مساحت R نزدیک تر و نزدیک تر می شود.

این موضوع ما را به این ایده سوق می دهد که مساحت R عبارت است از حد مجموع مساحت های مستطیل های محاط و یا محیط شده است.

تا کنون اظهارت ما در مورد مساحت R روی سه خاصیت اصلی قرار دارد.

خاصیت مستطیل :The Rectangle Property مساحت مستطیل مساوی است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع.

خاصیت جمع : The Sum Property مساحت یک ناحیه ، که شامل چندین اجزائ کوچک تر و لب به لب است ، عبارت است از جمع مساحت های این اجزای کوچک تر.

خاصیت مقایسه : The Comparison Property مساحت یک ناحیه ، که شامل یک ناحیه دوم است ، حد اقل به بزرگی مساحت ناحیه دوم است.

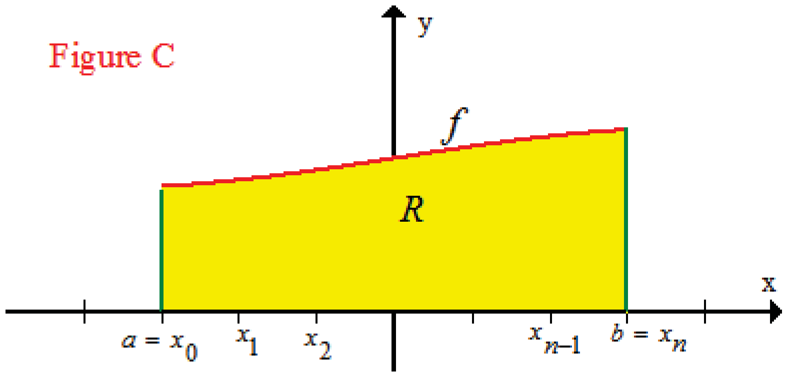
این خواص نقش مهمی در تعریفی که در مورد مساحت خواهیم کرد ، دارند.

کلمه Partition به معنی تقسیم بندی کردن - افراز با فتح الف - پارش . و ما کلمه فارسی پارش را بکار می بریم. نماد $\wp$ که همان حرف p است برای کلمه Partition و یا پارش بکار می بریم. پارش یک بازه مثل این است که یک سالن بزرگ داریم و با دیوارکشی ، آنرا به چند اتاق کوچک تر تقسیم می کنیم. در پارش هم یک بازه را به بازه های کوچک تر که آنرا بازه های فرعی می نامیم ، تقسیم می کنیم.

پارش : Partitions : فرض کنید یک ناحیه Region بنام R محدود است به نمودار یک تابع غیر منفی و پیوسته در بازه $[a,b]$ و محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$. همچنین فرض کنید

$a < b$است , شکل C. با استفاده از سه خاصیتی که در بالا ذکر کردیم ، مساحت ناحیه R را تعریف می کنیم.

بازه $[a,b]$ را به n بازه فرعی تقسیم می کنیم. n یک عدد صحیح مثبت است. این بازه ها را با نقاط فرعی $x_0, x_1, \cdots, x_n$ مشخص می کنیم.



تعریف ۱.۱ - یک پارش Partition $[a,b]$ عبارت است از یک مجموعه محدود نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$
بطوری که $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ باشد. پارش را با نماد $\wp$ نشان می دهیم و می نویسیم،

$$\wp = \{x_0, x_1, \cdots . x_n\}$$

طبق تعریف ، هر پارش از بازه $[a,b]$ باید شامل هم a و هم b باشد. بجز a و b تعداد نقاط و جای آنها در $[a,b]$ اختیاری است.مثلا $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ یک پارش برای $[0,2]$ است.
همچنین $\{0,2\}$ خود یک پارش می تواند باشد. و یا $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, 2\}$ هم یک پارش $[0,2]$ است. اما $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, 2\}$ یک پارش $[0,2]$ نیست زیرا شامل 0 نیست.
این n بازه های فرعی که پارش $\wp = \{x_0, x_1 \dots, x_n\}$ در $[a,b]$ ایجاد می کنند ، عبارتند از $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots [x_{n-1}, x_n]$ و طول آنها عبارتند از

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$$

پس

$$\boxed{\Delta x_k = x_k - x_{k-1}}$$

مثلا برای پارش $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ برای بازه $[0, 2]$ داریم

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$$

و

$$\Delta x_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}, \quad \Delta x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad \Delta x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \Delta x_4\ 2 - 1 = 1$$

توجه دارید که طول $[0, 2]$ را می توان برحسب طول بازه های فرعی نوشت ، یعنی

$$b - a = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

مجموع پایین و بالا Lower and Upper Sums

شکل زیر را ملاحظه کنید. *Lower Sum* یک پارش $\wp$ در بازه $[a, b]$ انتخاب می‌کنیم. در هر یک از بازه های فرعی پارش $\wp$ بزرگ ترین مستطیلی را که می توان داخل ناحیه R قرار داد ، محاط می کنیم. همان طور که در شکل *Lower Sum* می بینید ، چون فرض کرده ایم f در بازه $[a, b]$ پیوسته است , پس بر اساس قضیه ماکسیمم و مینیمم , می دانیم که برای هر k بین یک و n یک مقدار کوچک ترین m_k در بازه فرعی کی ام یعنی $[x_{k-1}, x_k]$ وجود دارد. اگر m_k را ارتفاع مستطیل کی ام یعنی R_k فرض کنیم , پس R_k بزرگ ترین مستطیلی است که می تواند در بازه فرعی $[x_{k-1}, x_k]$ در ناحیه R محاط شود. اگر این کار را برای هر یک از بازه های فرعی انجام دهیم . انوقت n مستطیل محاط در ناحیه R خواهیم داشت , یعنی $R_1, R_2, \cdots, R_n$

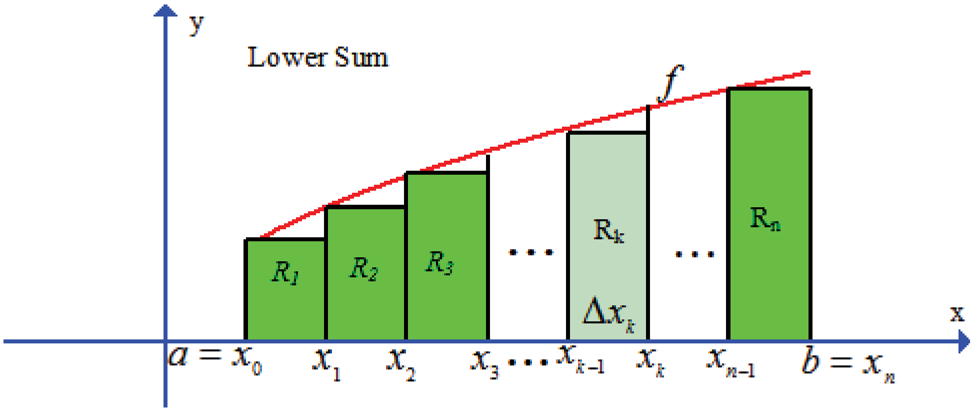
برای هر k بین یک و n ،مستطیل R_k دارای قاعده $[x_{k-1}, x_k]$ با طول Δx_k و ارتفاع m_k است. لذا مساحت R_k عبارت است از حا صل ضرب $m_k * \Delta x_k$

همان طور که در شکل A دیدیم , مجموع زیر , که مجموع مساحت های تمام مستطیل های محاط شده است نباید بیشتر از مساحت R بیشتر باشد.

$$m_1 * \Delta x_1 + m_2 * \Delta x_2 + \cdots + m_n * \Delta x_n$$

ما مجموع بالا را با نماد $L_f(\wp)$ نشان می دهیم و آنرا **مجموع پائین** ***Lower Sum*** تابع f در رابطه با پارش $\wp$ می نامیم.

$$L_f(\wp) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n \qquad (1)$$



مثال ۱ـفرض کنید داشته باشیم $f(x) = x^{۲}$ برای $0 \le x \le ۲$

مطلوب است $L_f(\wp)$

$$\wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$$

پاسخ – بازه های فرعی مربوط به پارش $\wp$ عبارت است از $\left[0,\frac{۱}{۲}\right], \left[\frac{۱}{۲}, ۱\right], \left[۱,\frac{۳}{۲}\right], \left[\frac{۳}{۲}, ۲\right]$

مقدار مینیمم f در هر کدام از این بازه های فرعی را حساب می کنیم.

$$m_۱ = f(0) = 0، \quad m_۲ = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}، \quad m_۳ = f(۱) = ۱، \quad m_۴ = f\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۹}{۴}$$

همچنین طول هر بازه فرعی را پیدا می کنیم.

$$\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲} - 0 = \frac{۱}{۲} \qquad \Delta x_۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Delta x_۳ = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲} \qquad \Delta x_۴ = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

شکل D

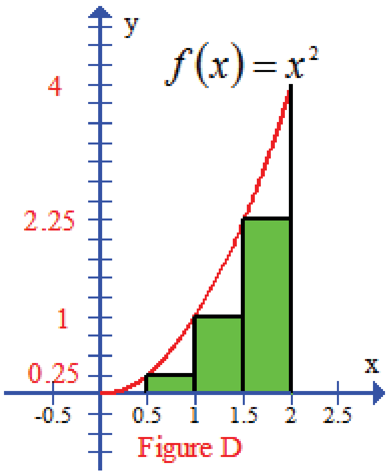


Figure D

پس طبق فرمول شماره (۱) داریم.

$$L_f(\wp) = 0 * \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} * \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \text{۱} * \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۹}}{\text{۴}} * \frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۷}}{\text{۴}}$$

مثال ۲ – فرض کنید $0 \le x \le \text{۲}\,\pi$ برای $f(x) = \text{۱} + \sin x$ باشد. مطلوب است $L_f(\wp)$

$$\wp = \left\{0, \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}, \pi, \frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}\,\text{۲}\pi\right\}$$

پاسخ

بازه های فرعی مربوط به پارش $\wp$ عبارت است از $\left[0, \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}},\right], \left[\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}, \pi\right], \left[\pi, \frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}\right], \left[\frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}, \text{۲}\pi\right]$

مقدار مینیمم f در هر کدام از این بازه های فرعی را حساب می کنیم.

$$m_{\text{۱}} = f(0) = \text{۱} \text{ ، } m_{\text{۲}} = f(\pi) = \text{۱} \text{ ، } m_{\text{۳}} = f\left(\frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}\right) = \text{۱} - \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \text{ ، } m_{\text{۴}} = f\left(\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}\right) = 0$$

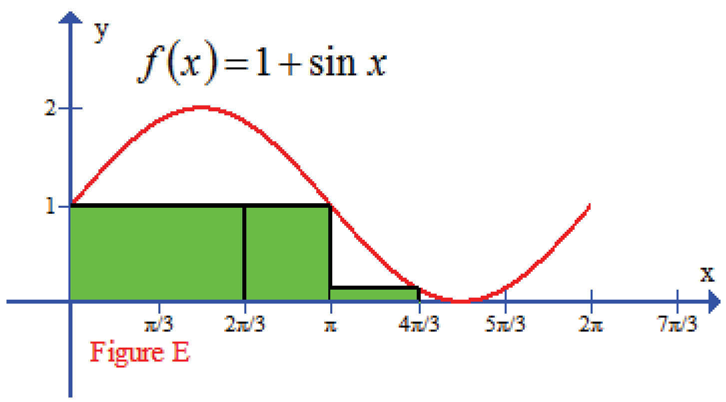
همچنین طول هر بازه فرعی را پیدا می کنیم.

$$\Delta x_{\text{۱}} = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}} \text{ ، } \Delta x_{\text{۲}} = \frac{\pi}{\text{۳}} \text{ ، } \Delta x_{\text{۳}} = \frac{\pi}{\text{۳}} \text{ ، } \Delta x_{\text{۴}} = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}$$

از فرمول شماره (۱) نتیجه می شود.

$$L_f(\wp) = \text{۱}\left(\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\right) + \text{۱}\left(\frac{\pi}{\text{۳}}\right) + \left(\text{۱} - \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\right)\left(\frac{\pi}{\text{۳}}\right) + 0\left(\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\right) = \frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}} - \frac{\pi\sqrt{\text{۳}}}{\text{۶}}$$

شکل E



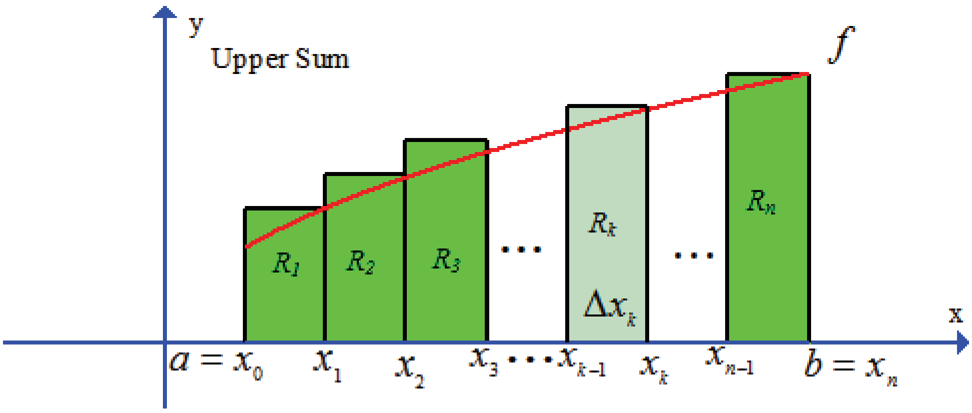
توجه - مشاهده می کنید که m_k ممکن است مقدار f در انتهای چپ $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد ، همان طور که $m_۱$ در مثال ۲ است. یا ممکن است انتهای راست باشد ، همان طور که $m_۲$ و $m_۳$ در مثال ۲ است. و یا ممکن است نقطه ای داخل $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد ، همان طور که $m_۴$ در مثال ۲ است. این بستگی دارد که کجا مقدار مینیمم در آن بازه فرعی وجود دارد.

همان طور که مستطیل هایی را ، محاط کردیم و حاصل جمع پایین را حساب کردیم می توانیم مستطیل هایی را محیط کنیم و حاصل جمع بالا را حساب کنیم. فرض می کنیم

$$\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$$

یک پارش $[a, b]$ باشد ، و فرض می کنیم f یک تابع پیوسته نا منفی در $[a, b]$ باشد. پس طبق قضیه ماکسیمم و مینیمم برای هر k بین یک و n ، یک مقدار ماکسیمم M_k در بازه فرعی کی ام $[x_{k-۱}, x_k]$ وجود دارد. شکل $Upper\ Sum$ ، در نتیجه اگر فرض کنیم M_k ارتفاع مستطیل کی ام یعنی R_k باشد ، پس R_k کوچک ترین مستطیلی است که ممکن است در آن قسمت R محیط شود. مساحت $R_k = M_k * \Delta x_k$ و حاصل جمع زیر که شامل مجموع مساحت های مستطیل های محیط شده است ، کمتر از مساحت R نخواهد بود.

$$M_۱\Delta x_۱ + M_۲\Delta x_۲ + \cdots + M_n\Delta x_n$$



این حاصل جمع را با نماد $U_f(\wp)$ نشان می دهیم و آنرا **مجموع بالای** f در رابطه با پارش $\wp$ می نامیم. پس

$$U_f(\wp) = M_۱\Delta x_۱ + M_۲\Delta x_۲ + \cdots + M_n\Delta x_n \qquad (۲)$$

مثال ۳ – فرض کنید $0 \le x \le ۲$ برای $f(x) = x^۲$ باشد. مطلوب است $U_f(\wp)$

$$\wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$$

پاسخ

برای $\wp$ داریم.

$$M_۱ = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴} ، \quad M_۲ = f(۱) = ۱ ، \quad M_۳ = f\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۹}{۴} ، \quad M_۴ = f(۲) = ۴$$

چون در مثال ۱ پیدا کردیم که

$$\Delta x_۱ = \Delta x_۲ = \Delta x_۳ = \Delta x_۴ = \frac{۱}{۲}$$

پس داریم

$$U_f(\wp) = \frac{۱}{۴} * \frac{۱}{۲} + ۱ * \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۴} * \frac{۱}{۲} + ۴ * \frac{۱}{۲} = \frac{۱۵}{۴}$$

شکل F

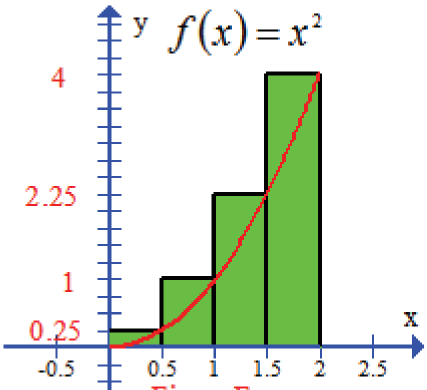


Figure F

مثال ۴ – فرض کنید $0 \le x \le ۲\pi$ برای $f(x) = ۱ + \sin x$ باشد. مطلوب است $U_f(\wp)$ برای پارش زیر

$$\wp = \left\{0, \frac{۲\pi}{۳}, \pi, \frac{۴\pi}{۳}, ۲\pi\right\}$$

پاسخ – در مثال ۲ بازه های فرعی مربوط به $\wp$ را بدست آوردیم. مقدار ماکسیمم f در هر یک از بازه های فرعی حساب می کنیم. ، پس داریم.

$$M_۱ = f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲ ، \qquad M_۲ = f\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$M_۳ = f(\pi) = ۱ ، \qquad M_۴ = f(۲\pi) = ۱$$

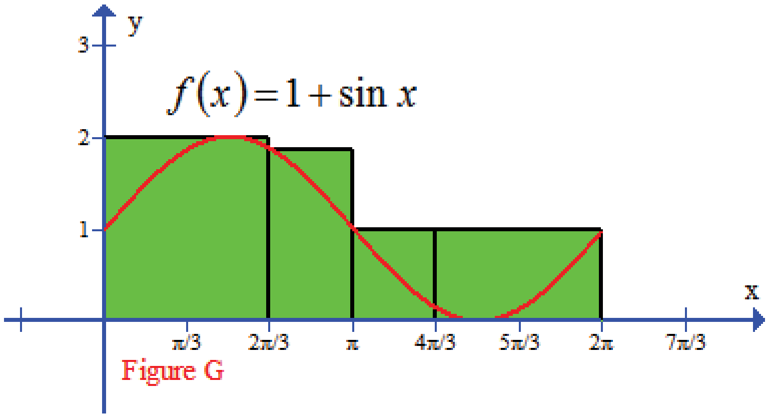
چون

$$\Delta x_{۱} = \frac{۲\pi}{۳} \quad ، \quad \Delta x_{۲} = \frac{\pi}{۳} \quad ، \quad \Delta x_{۳} = \frac{\pi}{۳} \quad ، \quad \Delta x_{۴} = \frac{۲\pi}{۳}$$

پس خواهیم داشت

$$U_f(\wp) = ۲\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) + \left(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{\pi}{۳}\right) + ۱\left(\frac{\pi}{۳}\right) + ۱\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = \frac{۸\pi}{۳} + \frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$$

شکل G



اگر f یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a,b]$ باشد ، و اگر $\wp = \{x_0, x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n\}$ یک پارش اختیاری بازه $[a,b]$ باشد ، پس m_k و M_k مقادیر مینیمم و ماکسیمم f در بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ است ، برای $k = ۱, ۲, \cdots, n$ بطوری که

$$m_k \leq M_k$$

است و لذا

$$L_f(\wp) \leq U_f(\wp) \qquad (۳)$$

است. به علاوه ، آن گونه که $L(\wp)$ و $U_f(\wp)$ تعریف کردیم ، فرقی ندارد که چه پارش $\wp$ انتخاب کردیم ، در هر حالتی مساحت R باید عددی بین $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ باشد. یعنی

$$L_f(\wp) \leq R \text{ مساحت } \leq U_f(\wp) \qquad (۴)$$

مثلا ، همان طور که در مثال های ۱ و ۳ دیدیم ، اگر $f(x) = x^{۲}$ در بازه $[0,۲]$ و

$$\wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$$

باشد ، پس

$$L_f(\wp) = \frac{۷}{۴} \quad \text{و} \quad U_f(\wp) = \frac{۱۵}{۴}$$

است.

تمرینات ۱.۱

در تمرینات ۶ ــ ۱ مطلوب است $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$

۱) $f(x) = ۷; \wp = \left\{-۳, -\frac{۵}{۲}, -\frac{۳}{۲}, 0\right\}$

۲) $f(x) = x + ۲; \wp = \left\{-۱, -\frac{۱}{۲}, 0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$

۳) $f(x) = x^۴; \wp = \left\{-۱, -\frac{۱}{۲}, 0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$

۴) $f(x) = \sin x\,; \wp = \left\{0, \frac{\pi}{۴}. \frac{\pi}{۲}\right\}$

۵) $f(x) = \cos x\,; \wp = \left\{-\frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۶}, 0, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۳}\right\}$

۶) $f(x) = x^۳ + ۳x + ۳; \wp = \{0, ۱, ۲\}$

در تمرینات ۹ ــ ۷ مطلوب است $L_f(\wp)$ **و** $U_f(\wp)$

۷) $f(x) = ۱ + x; \wp = \{-۱, 0, ۲\}$

۸) $f(x) = \sin x\,; \wp = \left\{0, \frac{\pi}{۲}, \pi\right\}$

۹) $f(x) = x + \sin x; \wp = \left\{0, \frac{\pi}{۲}, \pi\right\}$

۱۰
فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ برای $۱ \le x \le ۳$ باشد و فرض کنید $\wp = \left\{۱, \frac{۳}{۲}, ۲, \frac{۵}{۲}, ۳\right\}$ باشد. با پیدا کردن $L_f(\wp)$ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x از $x = ۱$ تا $x = ۳$ را تخمین بزنید.

پاسخ تمرینات ۱.۱

در تمرینات ۱ – ۶ مطلوب است $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$

۱) $$f(x) = ۷; \wp = \left\{-۳, -\frac{۵}{۲}, -\frac{۳}{۲}, 0\right\}$$

$$L_f(\wp) = ۷\left(-\frac{۵}{۲} - (-۳)\right) + ۷\left(-\frac{۳}{۲} - \left(-\frac{۵}{۲}\right)\right) + ۷\left(0 - \left(-\frac{۳}{۲}\right)\right) = ۲۱$$

$$U_f(\wp) = ۷\left(-\frac{۵}{۲} - (-۳)\right) + ۷\left(-\frac{۳}{۲} - \left(-\frac{۵}{۲}\right)\right) + ۷\left(0 - \left(-\frac{۳}{۲}\right)\right) = ۲۱$$

۲) $$f(x) = x + ۲; \wp = \left\{-۱, -\frac{۱}{۲}, 0, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$$

$$L_f(\wp) = ۱\left(-\frac{۱}{۲} - (-۱)\right) + \frac{۳}{۲}\left(0 - \left(-\frac{۱}{۲}\right)\right) + ۲\left(\frac{۱}{۲} - 0\right) + \frac{۵}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)$$
$$+۳\left(\frac{۳}{۲} - ۱\right) + \frac{۷}{۲}\left(۲ - \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۲۷}{۴}$$

$$U_f(\wp) = \frac{۳}{۲}\left(-\frac{۱}{۲} - (-۱)\right) + ۲\left(0 - \left(-\frac{۱}{۲}\right)\right) + \frac{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - 0\right) + ۳\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)$$
$$+\frac{۷}{۲}\left(\frac{۳}{۲} - ۱\right) + ۴\left(۲ - \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳۳}{۴}$$

۳)　$f(x)=x^{۴};\wp=\left\{-۱,-\frac{۱}{۲},0,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲\right\}$

$$L_f(\wp)=\frac{۱}{۱۶}\left(-\frac{۱}{۲}-(-۱)\right)+0\left(0-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)+0\left(\frac{۱}{۲}-0\right)+\frac{۱}{۱۶}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)$$
$$+۱\left(\frac{۳}{۲}-۱\right)+\frac{۸۱}{۱۶}\left(۲-\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۹۹}{۳۲}$$
$$U_f(\wp)=۱\left(-\frac{۱}{۲}-(-۱)\right)+\frac{۱}{۱۶}\left(0-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)+\frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۱}{۲}-0\right)+۱\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)$$
$$+\frac{۸۱}{۱۶}\left(\frac{۳}{۲}-۱\right)+۱۶\left(۲-\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳۷۱}{۳۲}$$

۴)　$f(x)=\sin x;\wp=\left\{0,\frac{\pi}{۴}.\frac{\pi}{۲}\right\}$

$$L_f(\wp)=0\left(\frac{\pi}{۴}-0\right)+\frac{\sqrt{۷}}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۸}$$
$$U_f(\wp)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-0\right)+۱\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\pi}{۴}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱\right)$$

۵)　$f(x)=\cos x;\wp=\left\{-\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۶},0,\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}\right\}$

$$L_f(\wp)=\frac{۱}{۲}\left(-\frac{\pi}{۶}-\left(-\frac{\pi}{۳}\right)\right)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(0-\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\right)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-0\right)$$
$$+\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\pi}{۶}\left(۱+\sqrt{۳}\right)$$
$$U_f(\wp)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(-\frac{\pi}{۶}-\left(-\frac{\pi}{۳}\right)\right)+۱\left(0-\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\right)+۱\left(\frac{\pi}{۶}-0\right)$$

$$+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\pi}{۶}\left(\sqrt{۳}+۲\right)$$

۶) $f(x)=x^{۳}+۳x+۳;\wp=\{0,۱,۲\}$

$$L_f(\wp)=۳(۱-0)+۷(۲-۱)=۱۰$$
$$U_f(\wp)=۷(۱-0)+۱۷(۲-۱)=۲۴$$

در تمرینات ۹ – ۷ مطلوب است $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$

۷) $f(x)=۱+x;\wp=\{-۱,0,۲\}$

$$L_f(\wp)=0\left(0-(-۱)\right)+۱(۲-0)=۲$$
$$U_f(\wp)=۱\left(0-(-۱)\right)+۳(۲-0)=۷$$

۸) $f(x)=\sin x\,;\wp=\left\{0,\frac{\pi}{۲},\pi\right\}$

$$L_f(\wp)=0\left(\frac{\pi}{۲}-0\right)+0\left(\pi-\frac{\pi}{۲}\right)=0$$
$$U_f(\wp)=۱\left(\frac{\pi}{۲}-0\right)+۱\left(\pi-\frac{\pi}{۲}\right)=\pi$$

۹) $f(x)=x+\sin x;\wp=\left\{0,\frac{\pi}{۲},\pi\right\}$

$$L_f(\wp)=0\left(\frac{\pi}{۲}-0\right)+\left(\frac{\pi}{۲}+۱\right)\left(\pi-\frac{\pi}{۲}\right)=\left(\frac{\pi}{۲}+۱\right)\frac{\pi}{۲}$$
$$U_f(\wp)\left(\frac{\pi}{۲}+۱\right)\left(\frac{\pi}{۲}-0\right)+\pi\left(\pi-\frac{\pi}{۲}\right)=\left(\frac{۳\pi}{۲}+۱\right)\frac{\pi}{۲}$$

۱۰

فرض کنید $\wp = \left\{۱, \frac{۳}{۲}, ۲, \frac{۵}{۲}, ۳\right\}$ باشد و فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$ برای $۱ \leq x \leq ۳$ باشد. با پیدا کردن $L_f(\wp)$ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x از $x = ۱$ تا $x = ۳$ را تخمین بزنید.

$$L_f(\wp) = \frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۴}{۲۵}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۸۶۹}{۱۸۰۰}$$

۱.۲ -انتگرال معین The Definite Integral

در بخش ۱.۱ فرض کردیم f یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a,b]$ باشد. حالا فرض نا منفی بودن تابع را کنار می گذاریم و فقط فرض می کنیم تابع در $[a,b]$ پیوسته باشد و $a<b$. هنوز هم مجموع پایین و مجموع بالا را برای یک پارش $\wp$ از بازه $[a,b]$ مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$L_f(\wp)=m_۱\Delta x_۱+m_۲\Delta x_۲+\cdots+m_n\Delta x_n$$

و

$$U_f(\wp)=M_۱\Delta x_۱+M_۲\Delta x_۲+\cdots+M_n\Delta x_n$$

برای هر عدد صحیح مثبت بین یک و n مقدار m_k مقدار مینیمم و مقدار M_k مقدار ماکسیمم f در بازه فرعی کی ام هستند

تعریف انتگرال معین ـ تعریف شماره ۱.۲

فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. **انتگرال معین f از a تا b** عبارت است از عدد منحصر به فرد I بطوری که نا مساوی زیر برای هر پارش $\wp$ از بازه $[a,b]$ بر قرار باشد.

$$L_f(\wp)\le I\le U_f(\wp)$$

این انتگرال را با نماد زیر نشان می دهیم.

$$\int_a^b f(x)dx$$

نماد $\int$ را علامت انتگرال می نامیم. اعداد a و b را حدود انتگرال می نامند. تابع f را هم انتگرند می گویند.

این نماد انتگرال همان حرف اول کلمه Sum است که کشیده شده است. و میدانید که Sum یعنی مجموع یا حاصل جمع.

مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ یک عدد است که فقط بستگی به f ، b ، a دارد. متغیر x یک متغیر ساختگی است و می تواند هر متقیر دیگری هم باشد. می توان بجای x حروف t یا u گذاشت. مثلا

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

برای مثال ، اگر $f(x)=x^۲$ و $a=0$ و $b=۳$ باشد ، خواهیم داشت

$$\int_0^۳ x^۲dx=\int_0^۳ t^۲dt=\int_0^۳ u^۲du$$

توجه –عبارت dx مفهوم مستقلی در $\int_a^b f(x)dx$ ندارد. در اصل از مشتق آمده است که بعداً در مورد آن صحبت می کنیم.

اینک مساحت را بر حسب انتگرال ، تعریف می کنیم.

تعریف شماره ۱.۳ – فرض می کنیم f یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a,b]$ باشد. و فرض می کنیم R ناحیه ای محصور از بالا به نمودار f از پایین به محور x از سمت چپ به خط $x=a$ و از سمت راست به خط $x=b$ باشد. پس **R ناحیه ای است بین نمودار f و محور x در بازه $[a,b]$** و **مساحت R مطابق زیر تعریف می شود.** شکل A

$$\int_a^b f(x)dx$$

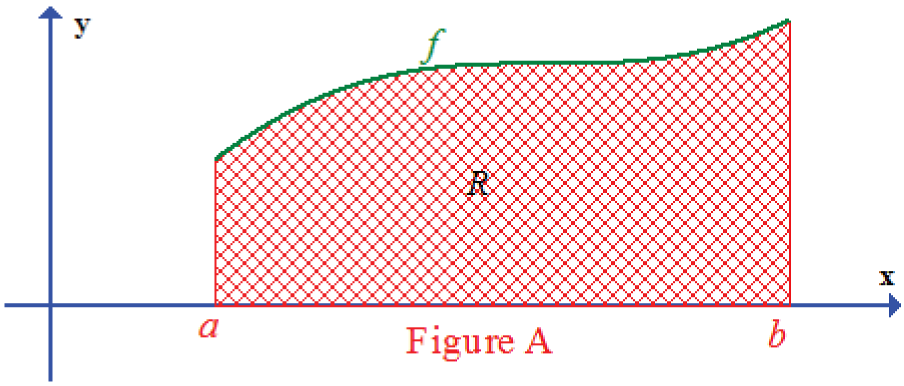


Figure A

مثال ۱ – فرض کنید $a \le x \le b$ برای $f(x)=c$ باشد. نشان دهید $\int_a^b cdx = c(b-a)$ است.

پاسخ

چون برای هر مقدار از x ، مقدار $f(x)=c$ است ، پس f یک تابع ثابت است. و لذا برای هر پارش $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ در بازه $[a,b]$ و برای هر k بین یک و n خواهیم داشت

$$m_k = c = M_k$$

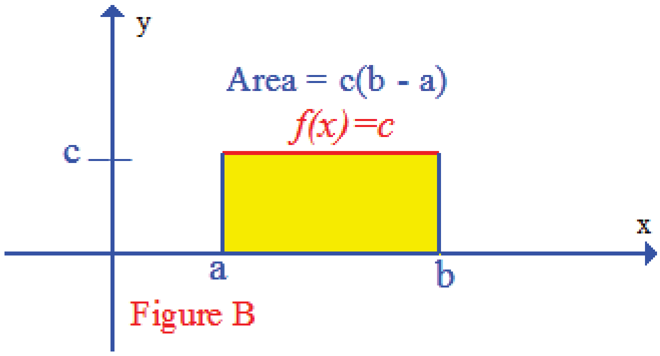
پس

$$L_f(\wp) = U_f(\wp) = c\Delta x_۱ + c\Delta x_۲ + \cdots + c\Delta x_n$$
$$= c(\Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \cdots + \Delta x_n) = c(b-a)$$

است. پس طبق تعریف انتگرال معین یعنی تعریف شماره ۱.۲ داریم.

$$\boxed{\int_a^b cdx = c(b-a)}$$

اگر $c \ge 0$ باشد ، پس طبق تعریف شماره ۱.۳ مساحت ناحیه مربوطه عبارت است از $c(b-a)$ شکل B



مثال ۲ــ نشان دهید که

$$\int_a^b x dx = \frac{۱}{۲}\left(b^۲ - a^۲\right)$$

است.

پاسخ

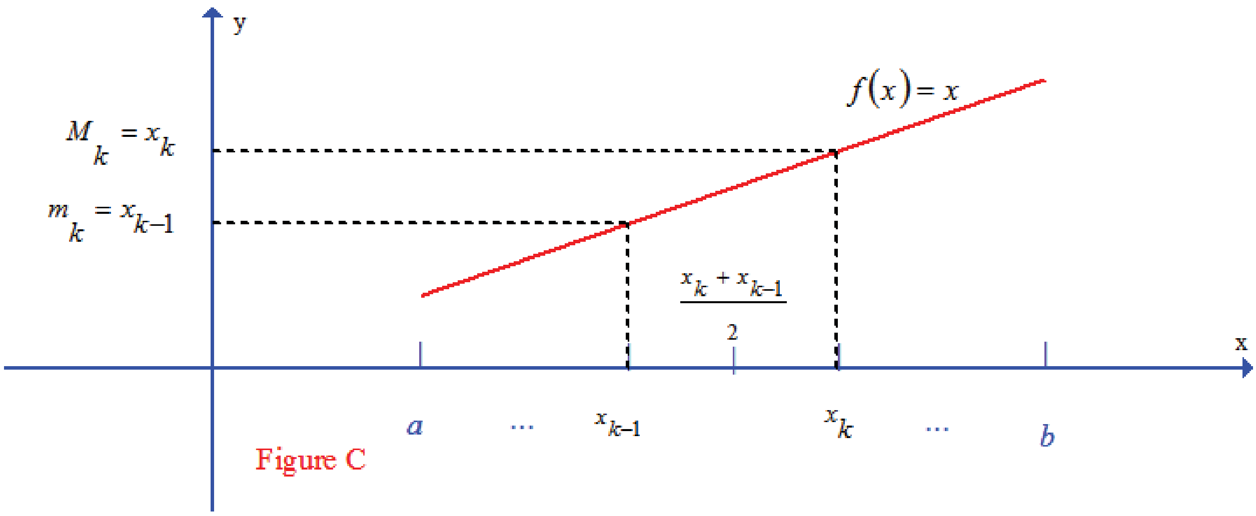
فرض می کنیم $\wp = \left\{x_0, x_۱, \cdots, x_n\right\}$ یک پارش اختیاری $[a, b]$ باشد. پس برای هر k بین یک و n خواهیم داشت.

$$m_k = x_{k-۱} \quad \text{و} \quad M_k = x_k$$

و

$$x_{k-۱} < \frac{۱}{۲}(x_k + x_{k-۱}) < x_k$$

است. شکل C



با استفاده از اطلاعات بالا ، خواهیم داشت.

$$L_f(\wp) = m_۱ \Delta x_۱ + m_۲ \Delta x_۲ + \cdots + m_n \Delta x_n$$

$$= x_0(x_۱ - x_0) + x_۱(x_۲ - x_۱) + \cdots + x_{n-۱}(x_n - x_{n-۱})$$
$$< \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_0)(x_۱ - x_0) + \frac{۱}{۲}(x_۲ + x_۱)(x_۲ - x_۱) + \cdots$$
$$+ \frac{۱}{۲}(x_n + x_{n-۱})(x_n - x_{n-۱})$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(x_۱^۲ - x_0^۲\right) + \frac{۱}{۲}\left(x_۲^۲ - x_۱^۲\right) + \cdots + \frac{۱}{۲}\left(x_n^۲ - x_{n-۱}^۲\right) = \frac{۱}{۲}\left(x_n^۲ - x_0^۲\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(b^۲ - a^۲\right)$$

همچنین

$$M_f(\wp) = M_۱\Delta x_۱ + M_۲\Delta x_۲ + \cdots + M_n\Delta x_n$$
$$= x_۱(x_۱ - x_0) + x_۲(x_۲ - x_۱) + \cdots + x_n(x_n - x_{n-۱})$$
$$> \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_0)(x_۱ - x_0) + \frac{۱}{۲}(x_۲ + x_۱)(x_۲ - x_۱) + \cdots$$
$$+ \frac{۱}{۲}(x_n + x_{n-۱})(x_n - x_{n-۱})$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(x_۱^۲ - x_0^۲\right) + \frac{۱}{۲}\left(x_۲^۲ - x_۱^۲\right) + \cdots + \frac{۱}{۲}\left(x_n^۲ - x_{n-۱}^۲\right) = \frac{۱}{۲}\left(x_n^۲ - x_0^۲\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(b^۲ - a^۲\right)$$

از این محاسبات نتیجه می گیریم که

$$L_f(\wp) \le \frac{۱}{۲}\left(b^۲ - a^۲\right) \le U_f(\wp)$$

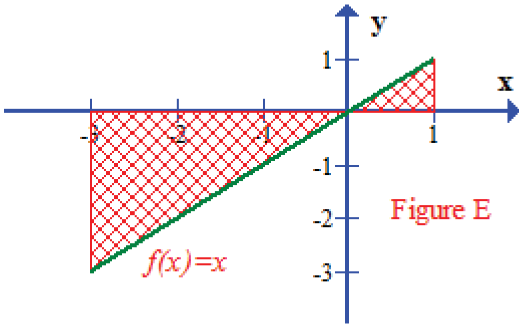
لذا طبق تعریف ۱.۲ داریم

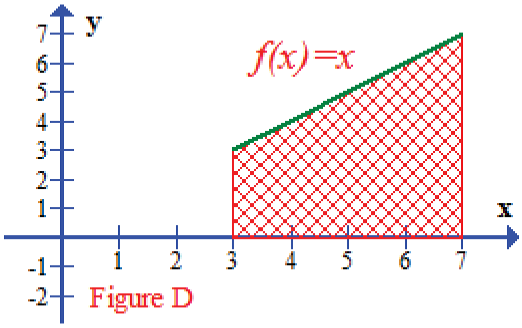
$$\boxed{\int_a^b x dx = \frac{۱}{۲}\left(b^۲ - a^۲\right)}$$

مثلا اگر $a = ۳$ و $b = ۷$ باشد ، خواهیم داشت.

$$\int_۳^۷ x dx = \frac{۱}{۲}\left(۷^۲ - ۳^۲\right) = ۲۰$$

و براساس تعریف ۱.۳ مساحت ناحیه ذوزنقه در شکل D مساوی با ۲۰ است.





اگر $a = -۳$ و $b = ۱$ باشد ، خواهیم داشت.

$$\int_{-۳}^{۱} xdx = \frac{۱}{۲}\left(۱^{۲} - (-۳)^{۲}\right) = -۴$$

که مسلما مساحت ناحیه هاشور زده در شکل E نیست , زیرا مساحت نمی تواند منفی باشد. در بخش ۱.۵ ثابت می کنیم که با کمی تغییر می توان داشت

$$\int_{a}^{b} -xda = -\frac{۱}{۲}\left(b^{۲} - a^{۲}\right) = -\int_{a}^{b} xdx \qquad (۱)$$

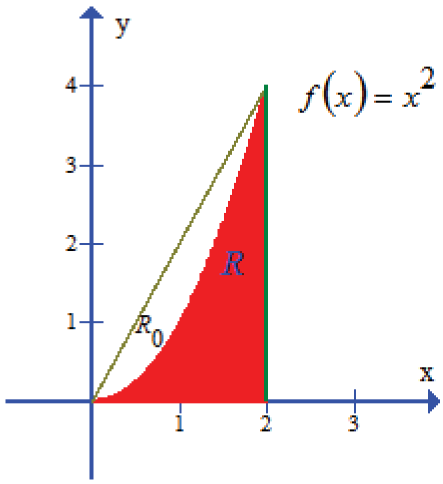
همان طریق که در مثال ۲ عمل کردیم ، می توان نشان داد که

$$\boxed{\int_{a}^{b} x^{۲}dx = \frac{۱}{۳}\left(b^{۳} - a^{۳}\right) \qquad (۲)}$$

مثلا اگر $a = 0$ و $b = ۲$ باشد ، طبق شماره (۲) داریم

$$\int_{0}^{۲} x^{۲}dx = \frac{۱}{۳}\left(۲^{۳} - 0^{۳}\right) = \frac{۸}{۳}$$

نمودار زیر که همان نمودار بخش ۱.۱ است ملاحظه کنید.



پس مساحت ناحیه R مساوی با $\frac{۸}{۳}$ است.

چون مساحت R و R_0 روی هم مساوی است با ۴ پس مساحت R_0 مساوی است با $۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$ این مطابقت دارد با نتیجه ای که ارشمیدس بیش از ۲۰۰۰ سال قبل بدست آورد. بدست آوردن مقدار انتگرالی مانند $\int_a^b x^۲dx$ از طریق مجموع پایین و مجموع بالا مشکل است.

تعریف شماره ۱.۴

فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، پس

$$\int_a^a f(x)dx=0 \qquad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

تعریف $\int_a^a f(x)dx=0$ به این مفهوم است که مساحت یک پاره خط صفر است. همچنین

$$\int_\pi^\pi \sin x^۲dx=0$$

مثال ۳ - مقدارنتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_۴^۱ x^۲dx$$

پاسخ

$$\int_۴^۱ x^۲dx=-\int_۱^۴ x^۲dx=-\frac{۱}{۳}\left(۴^۳-۱^۳\right)=-۲۱$$

مجموع ریمان Riemann Sums

در تعریف ۱.۲ گفتیم که انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ یک عدد منحصر به فرد است بطوری که برای هر پارش $\wp=\{x_0,x_۱,\cdots,x_n\}$ در بازه $[a,b]$ داریم

$$L_f(\wp)\leq\int_a^b f(x)dx\leq U_f(\wp)$$

فرمول دیگری هم برای انتگرال معین وجود دارد بنام مجموع ریمان. این فرمول بستگی به مقدار مینیمم m_k و یا مقدار ماکسیمم M_k تابع f در بازه $[x_{k-۱},x_k]$ ندارد. برای شروع کار فرض کنید t_k یک عدد اختیاری در بازه $[x_{k-۱},x_k]$ باشد. پس داریم

$$m_k\leq f(t_k)\leq M_k \quad \text{برای} \quad k=۱,۲,\cdots,n$$

بطوری که

$$\begin{aligned} L_f(\wp) &= m_۱\Delta x_۱ + m_۲\Delta x_۲ + \cdots + m_n\Delta x_n \\ &\le f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n \\ &\le M_۱\Delta x_۱ + M_۲\Delta x_۲ + \cdots + M_n\Delta x_n \\ &= U_f(\wp) \end{aligned}$$

شکل F

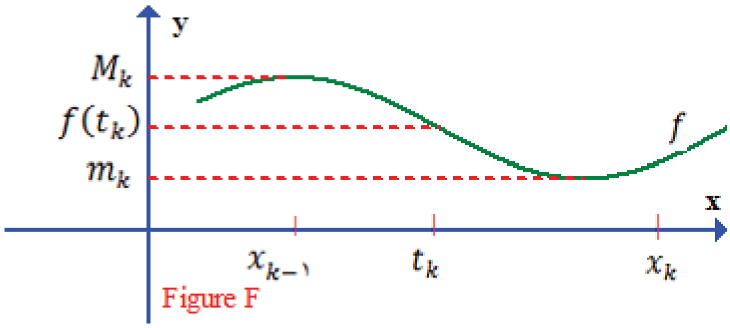


Figure F

و یا بطور خلاصه می توان نوشت.

$$L_f(\wp) \le f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n \le U_f(\wp) \qquad (۳)$$

چون هم $\int_a^b f(x)dx$ و هم $f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n$ بین $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ قرار دارد ، پس $f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n$ می تواند به عنوان مقدار تقریبی $\int_a^b f(x)dx$ بکار رود. این تقریب تا چه اندازه صحیح است ، بستگی به انتخاب $\wp$ و $t_۱, t_۲, \cdots, t_n$ دارد. مجموع $f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n$ را مجموع ریمان می نامند.

تعریف شماره ۱.۵ یا مجموع ریمان

فرض می کنیم f یک تابع پیوسته در بازه $[a,b]$ باشد. و فرض می کنیم

$$\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$$

یک پارش اختیاری بازه $[a,b]$ باشد. برای هر k بین یک و n فرض می کنیم t_k یک عدد اختیاری در بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد ، پس

$$f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n$$

یک **مجموع ریمان** برای f در بازه $[a,b]$ نامیده می شود و با نماد $\sum_{k=۱}^n f(t_k)\Delta x_k$ نشان داده می شود. پس

$$\sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta x_k = f(t_۱)\Delta x_۱ + f(t_۲)\Delta x_۲ + \cdots + f(t_n)\Delta x_n$$

نماد $\sum$ خوانده می شود "سیگما"

مثال ۴– فرض کنید $-۱ \leq x \leq ۲$, $f(x) = x^۲$ باشد و فرض کنید $\wp = \left\{-۱, 0, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲\right\}$ باشد. مطلوب است مجموع ریمان برای سه انتخاب زیر برای t_k

$a)\ \ t_k = x_{k-۱}$

$b)\ \ t_k = x_k$

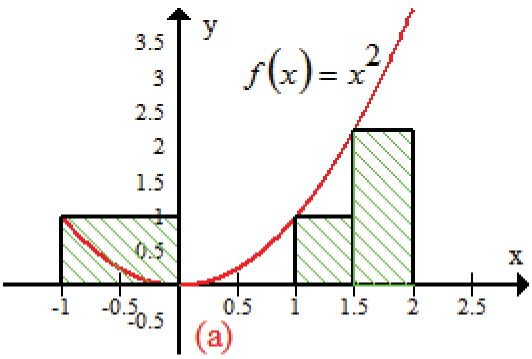
$c)\ \ t_k = \dfrac{x_{k-۱} + x_k}{۲}$

پاسخ

همان طور که ملاحظه می کنید ، انتخاب اول برای t_k نقطه انتهایی سمت چپ بازه فرعی است.
انتخاب دوم برای t_k نقطه انتهایی سمت راست بازه فرعی است.
انتخاب سوم برای t_k نقطه میانی بازه فرعی است.
مجموع ریمان برای (a) مطابق زیر است.

$$\sum_{k=۱}^{۴} f(t_k)\Delta x_k = f(-۱) * ۱ + f(0) * ۱ + f(۱) * \frac{۱}{۲} + f\left(\frac{۳}{۲}\right) * \frac{۱}{۲}$$

$$= ۱ * ۱ + 0 * ۱ + ۱ * \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۴} * \frac{۱}{۲} = \frac{۲۱}{۸}$$

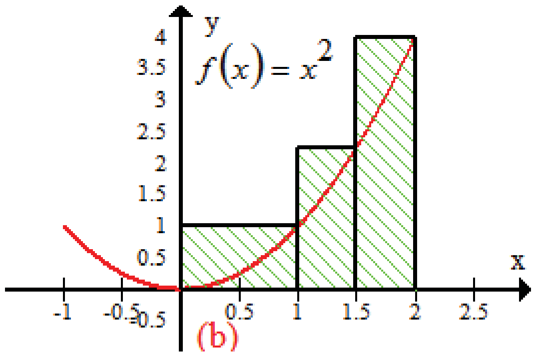


(a)

برای (b)

$$\sum_{k=۱}^{۴} f(t_k)\Delta x_k = f(0)*۱+f(۱)*۱+f\left(\frac{۳}{۲}\right)*\frac{۱}{۲}+f(۲)*\frac{۱}{۲}$$

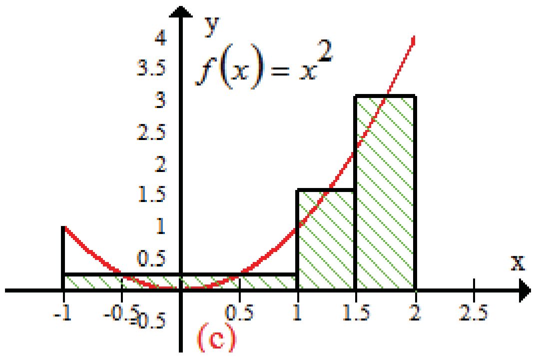
$$=0*۱+۱*۱+\frac{۹}{۴}*\frac{۱}{۲}+۴*\frac{۱}{۲}=\frac{۳۳}{۸}$$



برای (c)

$$\sum_{k=۱}^{۴} f(t_k)\Delta x_k = f\left(-\frac{۱}{۲}\right)*۱+f\left(\frac{۱}{۲}\right)*۱+f\left(\frac{۵}{۴}\right)*\frac{۱}{۲}+f\left(\frac{۷}{۴}\right)*\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{۱}{۴}*۱+\frac{۱}{۴}*۱+\frac{۲۵}{۱۶}*\frac{۱}{۲}+\frac{۴۹}{۱۶}*\frac{۱}{۲}=\frac{۴۵}{۶۱}$$



همان طور که در مثال ۴ ملاحظه کردید ، مجموع ریمان در ارتباط با انتخاب های مختلف $t_۱, t_۲, \cdots, t_n$ می توانند با یک دیگر تفاوت داشته باشند ، پس نام های مخصوصی به مجموع ریمان می دهیم. اگر t_k انتهای چپ بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ پس مجموع ریمان مربوطه را **مجموع سمت چپ** می نامیم. به همین طریق **مجموع راست و نقطه میانی** هم نام گذاری می کنیم. در هر حال با توجه

به این موضوع که $m_k \le f(t_k) \le M_k$ است ، پس کلیه مجموع های ریمان باید بین $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ قرار گیرند.

نکته مهم در مورد مجموع ریمان این است که $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ مقدار تقریبی انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه می کند. پس می نویسیم

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

قضیه ۱.۶ فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد بطوری که گفتمان زیر صحیح است.
اگر $\wp = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ یک پارش بازه $[a,b]$ باشد و هر یک از بازه های فرعی $[a,b]$ طولی کمتر از δ داشته باشد و اگر برای هر k بین یک و n داشته باشیم $x_{k-1} \le t_k \le x_k$ پس مجموع ریمان $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ نا معادله زیر را بر قرار می کند.

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k\right| < \varepsilon \qquad (4)$$

قضیه شماره ۱.۶ را هم می توان چنین بیان کرد
انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ عبارت است از حد مجموع ریمانی هنگامی که طول های تمام بازه های فرعی $[a,b]$ به صفر نزدیک می شوند. و می نویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \qquad (5)$$

نماد $\|\wp\|$ یعنی بزرگ ترین طول های بازه های فرعی مربوط به $\wp$ و آنرا **نورم** **Norm** $\wp$ می نامیم.

مثال ۵ ــ فرض کنید $\wp_1, \wp_2, \wp_3$ سه پارش مختاف از بازه $[a,b]$ باشند که به ترتیب بازه $[a,b]$ را به ۳ و ۵ و ۱۰ بازه فرعی تقسیم می کنند. انتگرال زیر را برای مجموع سمت چپ آن بازه های فرعی تخمین بزنید.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

پاسخ ــفرض می کنیم $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد. مجموع سمت چپ مربوط به $\wp_1$ داریم.

$$\sum_{k=۱}^{۳} f(x_{k-۱})\Delta x_k = f(۱)*\frac{۱}{۳}+f\left(\frac{۴}{۳}\right)*\frac{۱}{۳}+f\left(\frac{۵}{۳}\right)*\frac{۱}{۳}$$
$$=\frac{۱}{۳}\left(۱+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۵}\right)\approx ۰/۷۸۳۳۳$$

برای مجموع سمت چپ مربوط به $\wp_۲$ داریم.

$$\sum_{k=۱}^{۵} f(x_{k-۱})\Delta x_k = f(۱)*\frac{۱}{۵}+f\left(\frac{۶}{۵}\right)*\frac{۱}{۵}+f\left(\frac{۷}{۵}\right)*\frac{۱}{۵}+f\left(\frac{۸}{۵}\right)*\frac{۱}{۵}$$
$$+f\left(\frac{۹}{۵}\right)*\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۵}\left(۱+\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۸}+\frac{۵}{۹}\right)\approx ۰/۷۴۵۶۳۵$$

برای مجموع سمت چپ مربوط به $\wp_۳$ داریم.

$$\sum_{k=۱}^{۱۰} f(x_{k-۱})\,\Delta x_k = f(۱)*\frac{۱}{۱۰}+f\left(\frac{۱۱}{۱۰}\right)*\frac{۱}{۱۰}+f\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right)*\frac{۱}{۱۰}+\cdots+f\left(\frac{۱۹}{۱۰}\right)*\frac{۱}{۱۰}$$
$$=\frac{۱}{۱۰}\left(۱+\frac{۱۰}{۱۱}+\frac{۱۰}{۱۲}+\cdots+\frac{۱۰}{۱۹}\right)<\approx ۰/۷۱۸۷۷۱$$

بعد از درک بخش ۱.۶ خواهیم توانست نشان دهیم مقدار صحیح $\int_۱^۲\left(\frac{۱}{x}\right)dx$ با شش رقم اعشاری می شود ۰/ ۶۹۳۱۴۷

لذا از مثال ۵ نتیجه می گیریم که هرچه طول بازه های فرعی کاهش بیابد ، دقت محاسبه بیشتر می شود.

تمرینات ۱.۲

در تمرینات ۳ – ۱ مقادیر تقریبی انتگرال ها را با محاسبه $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ بدست آورید.

۱) $\int_{-۱}^{۳} ۲x\,dx;\ \wp=\{-۱,0,۱,۲,۳\}$

۲) $\int_{-۱}^{۳} |x|\,dx;\ \wp=\left\{-۱,-\frac{۱}{۲},0,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},۳\right\}$

۳) $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} ۳\sin x\, dx; \wp = \left\{-\frac{\pi}{۴}, 0, \frac{\pi}{۴}\right\}$

در تمرینات ۱۱ – ۴ با استفاده از تعریف انتگرال و نتایج این بخش ، انتگرال های معین را حساب کنید.

۴) $\int_{-۲}^{۳} ۴dx$

۵) $\int_{-۱}^{۱} -\frac{۱}{۳}dx$

۶) $\int_{۲}^{0} \pi dx$

۷) $\int_{-۳}^{۳} xdx$

۸) $\int_{\frac{۱}{۳}}^{-\frac{۱}{۳}} xdx$

۹) $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{-\frac{۷}{۲}} -xdx$

۱۰) $\int_{-۵}^{-۵} x^۲dx$

۱۱) $\int_{۲}^{-۳} x^۲dx$

در تمرینات ۱۴ – ۱۲ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.
مساحت ناحیه را با حرف A نشان دهید.

۱۲) $f(x)=\frac{۵}{۲};[-۲,۳]$

۱۳) $f(x)=x;[۱,۴]$

۱۴) $f(x)=x^{۲};[-۳,-۱]$

در تمرینات ۱۷ – ۱۵ مقدار تقریبی انتگرال را از طریق مجموع ریمان با پارش داده شده را پیدا کنید.
ابتدا مجموع سمت چپ ، سپس سمت راست و در نهایت نقطه میانی.

۱۵) $\int_{۱}^{۳}\left(x^{۲}-x\right)dx;\wp=\{۱,۲,۳\}$

۱۶) $\int_{0}^{۲}\sin\pi x dx;\wp=\left\{0,\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$

۱۷) $\int_{۱}^{۵}\frac{۱}{x}dx;\wp=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

در تمرینات ۱۹ – ۱۸ مقدار تقریبی انتگرال را با استفاده از مجموع ریمان و پارش داده شده پیدا کنید.
ابتدا مجموع سمت چپ و سپس سمت راست.

۱۸) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x}{x}dx;\wp=\left\{\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۴}\right\}$

۱۹) $\int_{0}^{۱}\sin\pi x^{۲}dx;\wp=\left\{0,\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲},۱\right\}$

در تمرینات ۲۱− ۲۰ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه $[a,b]$ با استفاده از مجموع سمت چپ و پارش داده شده را پیدا کنید.

۲۰) $f(x)=۲x^۲+۳x, a=0, b=۱; \wp=\left\{0,\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱\right\}$

۲۱) $f(x)=\frac{x}{x+۱}, a=0, b=۲; \wp=\left\{0,\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$

پاسخ تمرینات ۱.۲

در تمرینات ۳ − ۱ مقادیر تقریبی انتگرال ها را با محاسبه $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ بدست آورید.

۱) $\int_{-۱}^{۳}۲x\,dx; \wp=\{-۱,0,۱,۲,۳\}$

$$L_f(\wp)=-۲(۱)+0(۱)+۲(۱)+۴(۱)=۴$$
$$U_f(\wp)=0(۱)+۲(۱)+۴(۱)+۶(۱)=۱۲$$

۲) $\int_{-۱}^{۳}|x|dx; \wp=\left\{-۱,-\frac{۱}{۲},0,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},۳\right\}$

$$L_f(\wp)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+0\left(\frac{۱}{۲}\right)+0\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۱\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)=۴$$

$$U_f(\wp)=۱\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۱\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=۶$$

۳) $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}۳\sin x\,dx; \wp=\left\{-\frac{\pi}{۴},0,\frac{\pi}{۴}\right\}$

$$L_f(\wp)=\left(\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\pi}{۴}\right)+0\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{-۳\pi\sqrt{۳}}{۸}$$

$$U_f(\wp)=0\left(\frac{\pi}{۴}\right)+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۸}$$

در تمرینات ۱۱ – ۴ با استفاده از تعریف انتگرال و نتایج این بخش ، انتگرال های معین را حساب کنید.

۴) $\int_{-۲}^{۳} ۴dx = ۴\left(۳-(-۲)\right) = ۲۰$

۵) $\int_{-۱}^{۱} -\frac{۱}{۳}dx = -\frac{۱}{۳}\left(۱-(-۱)\right) = -\frac{۲}{۳}$

۶) $\int_{۲}^{0} \pi dx = -\int_{0}^{۲} \pi dx = -\pi(۲-0) = -۲\pi$

۷) $\int_{-۳}^{۳} xdx = \frac{۱}{۲}\left(۳^{۲}-(-۳)^{۲}\right) = 0$

۸) $\int_{\frac{۱}{۳}}^{-\frac{۱}{۳}} xdx = -\int_{-\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{۳}} xdx = -\frac{۱}{۲}\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}-\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}\right) = 0$

۹) $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{-\frac{۷}{۲}} -xdx = -\int_{-\frac{۷}{۲}}^{-\frac{۱}{۲}} -xdx = -\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\left(-\frac{۷}{۲}\right)^{۲}\right) = -۶$

۱۰) $\int_{-۵}^{-۵} x^{۲}dx = 0$

۱۱) $\int_{۲}^{-۳} x^{۲}dx = -\int_{-۳}^{۲} x^{۲}dx = -\frac{۱}{۳}\left(۲^{۳}-(-۳)^{۳}\right) = -\frac{۳۵}{۳}$

در تمرینات ۱۴ — ۱۲ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید. مساحت ناحیه را با حرف A نشان دهید.

۱۲) $f(x)=\frac{۵}{۲};[-۲,۳]$

$$A=\int_{-۲}^{۳}\frac{۵}{۲}dx=\frac{۵}{۲}\left(۳-(-۲)\right)=\frac{۲۵}{۲}$$

۱۳) $f(x)=x;[۱,۴]$

$$A=\int_{۱}^{۴}xdx=\frac{۱}{۲}\left(۴^{۲}-۱^{۲}\right)=\frac{۱۵}{۲}$$

۱۴) $f(x)=x^{۲};[-۳,-۱]$

$$A=\int_{-۳}^{-۱}x^{۲}dx=\frac{۱}{۳}\left((-۱)^{۳}-(-۳)^{۳}\right)=\frac{۲۶}{۳}$$

در تمرینات ۱۷ — ۱۵ مقدار تقریبی انتگرال را از طریق مجموع ریمان با پارش داده شده را پیدا کنید. ابتدا مجموع سمت چپ ، سپس سمت راست و در نهایت نقطه میانی.

۱۵) $\int_{۱}^{۳}\left(x^{۲}-x\right)dx;\wp=\{۱,۲,۳\}$

فرض می کنیم $۱\le x\le ۳$ ، $f(x)=x^{۲}-x$ باشد.

مجموع سمت چپ $=f(۱)(۱)+f(۲)(۱)=0(۱)+۲(۱)=۲$

مجموع سمت راست $=\mathrm{f}(۲)(۱)+f(۳)(۱)=۲(۱)+۶(۱)=۸$

مجموع نقطه میانی $=\mathrm{f}\left(\frac{۳}{۲}\right)(۱)+f\left(\frac{۵}{۲}\right)(۱)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱۵}{۴}=\frac{۹}{۲}$

۱۶) $\int_0^{۲} \sin \pi x dx; \wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, ۱, ۲\right\}$

فرض می‌کنیم $0 \le x \le ۲$,$f(x) = \sin \pi x$ باشد.

$$\text{مجموع سمت چپ} = f(0)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱)(۱)$$

$$= (\sin 0)\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (\sin \pi)(۱) = 0\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۱\left(\frac{۱}{۲}\right) + 0(۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مجموع سمت راست} = \mathrm{f}\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۲)(۱)$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (\sin \pi)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (\sin ۲\pi)(۱) = ۱\left(\frac{۱}{۲}\right) + 0\left(\frac{۱}{۲}\right) + 0(۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مجموع نقطه میانی} = f\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f\left(\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\sin\frac{۳\pi}{۲}\right)(۱)$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) + (-۱)(۱) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱ \approx -۰/۲۹۲۸۹۳$$

۱۷) $\int_{۱}^{۵} \frac{۱}{x} dx; \wp = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

فرض می کنیم $۱ \le x \le ۵$ ، $f(x) = \frac{۱}{x}$ باشد.

$$\text{مجموع سمت چپ} = f(۱)(۱) + f(۲)(۱) + f(۳)(۱) + f(۴)(۱)$$

$$= ۱(۱) + \frac{۱}{۲}(۱) + \frac{۱}{۳}(۱) + \frac{۱}{۴}(۱) = \frac{۲۵}{۱۲} \approx ۲/۰۸۳۳۳$$

$$\text{مجموع سمت راست} = f(۲)(۱) + f(۳)(۱) + f(۴)(۱) + f(۵)(۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱) + \frac{۱}{۳}(۱) + \frac{۱}{۴}(۱) + \frac{۱}{۵}(۱) = \frac{۷۷}{۶۰} \approx ۱/۲۸۳۳۳$$

$$\text{مجموع نقطه میانی} = f\left(\frac{۳}{۲}\right)(۱) + f\left(\frac{۵}{۲}\right)(۱) + f\left(\frac{۷}{۲}\right)(۱) + f\left(\frac{۹}{۲}\right)(۱)$$

$$= \frac{۲}{۳}(۱) + \frac{۲}{۵}(۱) + \frac{۲}{۷}(۱) + \frac{۲}{۹}(۱) = \frac{۴۹۶}{۳۱۵} \approx ۱/۵۷۴۶۰$$

در تمرینات ۱۹ – ۱۸ مقدار تقریبی انتگرال را با استفاده از مجموع ریمان و پارش داده شده پیدا کنید. ابتدا مجموع سمت چپ و سپس سمت راست.

۱۸) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\sin x}{x} dx; \wp = \left\{\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۴}\right\}$

$$a)\quad \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\pi}{۴}\right) \approx ۱/۲۰۷۱۱$$

$$b)\quad \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\pi} \approx ۰/۷۳۵۷۰۲$$

۱۹) $\int_0^۱ \sin \pi x^۲ dx; \wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۱\right\}$

$$a)\ \int_0^۱ \sin \pi x^۲\ dx \approx 0\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) + ۱\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\approx ۰/۴۰۰۱۰۰$$

$$b)\ \int_0^۱ \sin \pi x^۲ dx \approx \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۱\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + 0\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\approx ۰/۶۷۳۰۳۳$$

در تمرینات ۲۱– ۲۰ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه $[a,b]$ با استفاده از مجموع سمت چپ و پارش داده شده را پیدا کنید.

۲۰) $f(x) = ۲x^۲ + ۳x, a = 0, b = ۱; \wp = \left\{0, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱\right\}$

$$A \approx f(0)\left(\frac{۱}{۴}\right) + f\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) + f\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) + f\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)$$
$$= 0\left(\frac{۱}{۴}\right) + \frac{۷}{۸}\left(\frac{۱}{۴}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۴}\right) + \frac{۲۷}{۸}\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۲۵}{۱۶}$$

۲۱) $f(x) = \frac{x}{x+۱}, a = 0, b = ۲; \wp = \left\{0, \frac{۱}{۲}, ۱, ۲\right\}$

$$A \approx f(0)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱)(۱) = 0\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}(۱) = \frac{۲}{۳}$$

۱.۳ - خصوصیات مخصوص انتگرال معین

Special Properties of the Definite Integral

در این بخش بر می گردیم به سه خصوصیات اصلی مساحت. تعریف ما از انتگرال از این سه گرفته شده است . و حالا آنها را به زبان انتگرال بیان می کنیم. قضایای این بخش مکررا در این کتاب استفاده خواهد شد.

میدانیم که مساحت مستطیل مساوی است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع.

قضیه شماره ۱.۷ خاصیت مستطیل Theorem 1.7 Rectangle Property

برای هر عدد a, b, c

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

اثبات اگر $a < b$ باشد ، پس نتیجه مستقیما از مثال ۱ بخش ۱.۲ بدست می آید. اگر $a = b$ باشد پس طبق تعریف ۱.۴ داریم

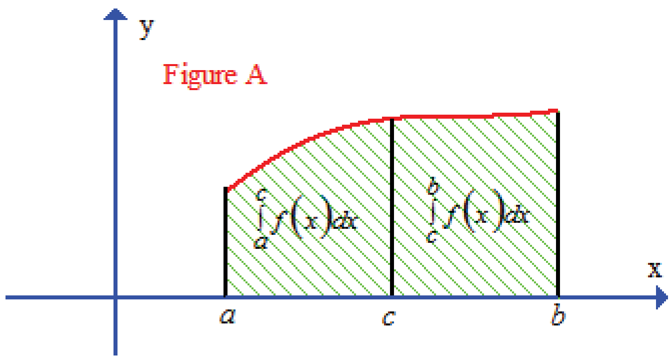
$$\int_a^b c dx = \int_a^a c dx = 0 = c(b-a)$$

اگر $a > b$ باشد ، پس با تلفیق تعریف ۱.۴ و مثال ۱ بخش ۱.۲ خواهیم داشت.

$$\int_a^b c dx = -\int_b^a c dx = -c(a-b) = c(b-a)$$

توجه –در فرمول $\int_a^b c dx = c(b-a)$ ملاحظه می کنید که c ارتفاع مستطیل است و $b-a$ قاعده

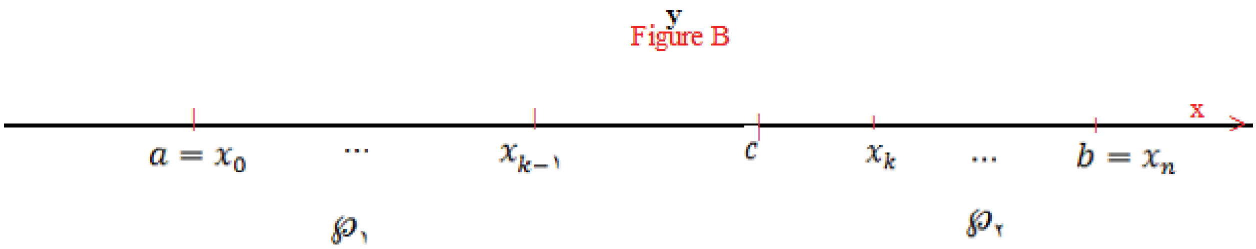
برای خاصیت جمع از این خاصیت استفاده می کنیم که مساحت یک ناحیه که متشکل شده است از دو ناحیه کوچک تر که فقط توسط یک پاره خط روی هم قرار می گیرند ، عبارت است از مجموع مساحت های این دو ناحیه. شکل A



قضیه ۱.۸ خاصیت جمع Theorem 1.8 Addition Property
فرض می کنیم f در بازه ای که شامل a, b, c است ، پیوسته باشد. پس
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

اثبات – ابتدا فرض می کنیم $a < c < b$ باشد. طبق تعریف $\int_a^b f(x)dx$ عدد منحصر به فردی است بطوری که برای هر پارش $\wp$ از بازه $[a, b]$
$$L_f(\wp) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U_f(\wp)$$
است. پس کافی است نشان دهیم که
$$(۱) \quad \text{برای هر } \wp \text{ ،} \quad L_f(\wp) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U_f(\wp)$$
پس فرض می کنیم $\wp$ یک پارش اختیاری در $[a, b]$ باشد. و فرض کنید $\wp'$ شامل تمام نقاط $\wp$ و همچنین c باشد. بر اساس نا مساوی شماره (۵) بخش ۱.۱ داریم.
$$L_f(\wp) \leq L_f(\wp') \leq U_f(\wp') \leq U_f(\wp) \qquad (۲)$$
حالا اگر $\wp_۱$ مجموعه نقاطی در $\wp'$ باشد که در $[a, c]$ هم هست ، و اگر $\wp_۲$ مجموعه نقاطی در $\wp'$ باشد که در $[c, b]$ هم هست ، پس
$$L_f(\wp') = L_f(\wp_۱) + L_f(\wp_۲) \text{ و } U_f(\wp') = U_f(\wp_۱) + U_f(\wp_۲) \qquad (۳)$$
شکل B

Figure B



علاوه بر این ، بر اساس تعریف $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ داریم
$$L_f(\wp_۱) \leq \int_a^c f(x)dx \leq U_f(\wp_۱) \text{ و } L_f(\wp_۲) \leq \int_c^b f(x)dx \leq U_f(\wp_۲) \qquad (۴)$$
دو نا معادله شماره (۴) را با هم جمع می کنیم و با استفاده از معادله های شماره (۳) خواهیم داشت.
$$L_f(\wp') = L_f(\wp_۱) + L_f(\wp_۲)$$

$$\leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U_f(\wp_۱) + U_f(\wp_۲) = U_f(\wp')$$

لذا بر اساس شماره (۲) نتیجه می گیریم که برای هر پارش $\wp$

$$L_f(\wp) \leq L_f(\wp') \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U_f(\wp') \leq U_f(\wp)$$

است. این همان چیزی است که باید ثابت کنیم ، اگر $a < c < b$ باشد.
برای ترتیب های دیگر a, b, c هم همین روش را می توان بکار برد. اینک قضیه را برای حالتی که $b < c < a$ باشد ، ثابت می کنیم.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{تعریف } 1.4}{\cong} -\int_b^a f(x)dx \overset{\text{اثبات قسمت اول}}{\cong} -\left(\int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx\right)$$

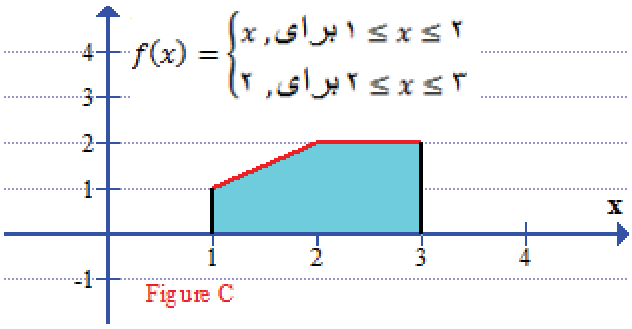
$$= -\int_b^c f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

$$\overset{\text{تعریف } 1.4}{\cong} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال ۱ – مقدار انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_۱^۳ f(x)dx \text{ ،} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{برای} \quad ۱ \leq x \leq ۲ \\ ۲ & \text{برای} \quad ۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

شکل c



پاسخ –با استفاده از خاصیت جمع داریم

$$\int_۱^۳ f(x)dx = \int_۱^۲ f(x)dx + \int_۲^۳ f(x)dx$$

بر اساس مثال های ۱ و ۲ بخش ۱.۲ داریم

$$\int_۱^۲ f(x)dx = \int_۱^۲ xdx = \frac{۱}{۲}\left(۲^۲ - ۱^۲\right) = \frac{۳}{۲}$$

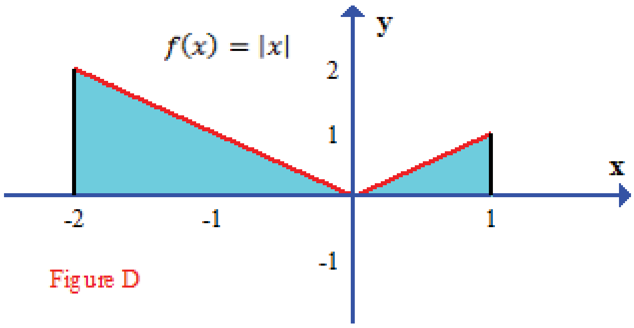
و

$$\int_{۲}^{۳} f(x)dx = \int_{۲}^{۳} ۲dx = ۲(۳-۲) = ۲$$

پس نتیجه می گیریم

$$\int_{۱}^{۳} f(x)dx = \int_{۱}^{۲} f(x)dx + \int_{۲}^{۳} f(x)dx = \frac{۳}{۲} + ۲ = \frac{۷}{۲}$$

مثال ۲- مقدار $\int_{۱}^{-۲}|x|dx$ را حساب کنید. شکل D



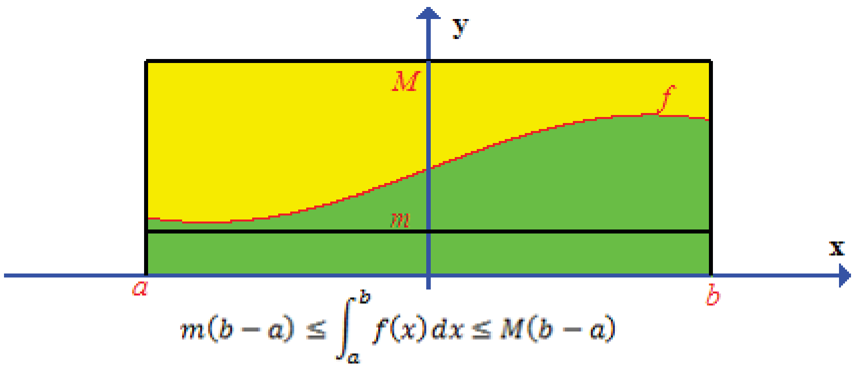
پاسخ - با استفاده از خاصیت جمع داریم

$$\int_{۱}^{-۲}|x|dx = \int_{۱}^{0}|x|dx + \int_{0}^{-۲}|x|dx = \int_{۱}^{0} xdx + \int_{0}^{-۲} -xdx$$

$$= -\int_{0}^{۱} xdx + \int_{-۲}^{0} xdx = -\frac{۱}{۲}\left(۱^{۲} - 0^{۲}\right) + \frac{۱}{۲}\left(0^{۲} - (-۲)^{۲}\right)$$

$$= -\frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۵}{۲}$$

خاصیت سوم مساحت ، خاصیت مقایسه است. در اینجا فقط به یک حالت مخصوص احتیاج داریم. از نقطه نظر هندسی ، مساحت هر ناحیه حد اقل به بزرگی مساحت هر مستطیلی است که در آن محاط شده است ، و بزرگ تر از مساحت مستطیلی که بر آن محیط شده است نیست. شکل D



شکل D

قضیه ۱.۹ خاصیت مقایسه Theorem 1.9 Comparison Property
فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، وبرای تمام x ها در $[a,b]$ داشته باسیم
$m \le f(x) \le M$
پس

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

اثبات ــفرض می کنیم $m_۱$ و $M_۱$ مقادیر مینیمم و ماکسیمم f در $[a,b]$ باشد ، که می دانیم وجود دارند زیرا f در $[a,b]$ پیوسته است. پس $m \le m_۱ \le M_۱ \le M$ است. فرض کنیم $\wp$ یک پارش کوچک در $[a,b]$ باشد که فقط شامل a و b است بطوری که داشته باشیم $x_0 = a$ و $x_n = x_۱ = b$ پس

$$L_f(\wp) = m_۱(b-a) \quad و \quad U_f(\wp) = M_۱(b-a)$$

چون $\int_a^b f(x)dx$ بین $L_f(\wp)$ و $U_f(\wp)$ قرار دارد ، پس

$$m(b-a) \le m_۱(b-a) \le L_f(\wp)$$

$$\le \int_a^b f(x)dx \le U_f(\wp) = M_۱(b-a) \le M(b-a)$$

است.

خاصیت مقایسه مکررا بکار برده می شود ، مخصوصا هنگامی که پیدا کردن مقدار یک انتگرال دقیقا و یا به اسانی ممکن نیست. یک عدد کمتر یا مساوی یک انتگرال را **کران پایین Lower Bound** و یک عدد بزرگ تر یا مساوی یک انتگرال را **کران بالا Upper Bound** آن انتگرال می نامیم.

مثال ۳ ــ با استفاده از خاصیت مقایسه ، کران پایین و بالای انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}\, dx$$

پاسخ می دانیم که $-۱ \le x \le ۱$ برای $۱ \le \sqrt{۱+x^۴} \le \sqrt{۲}$ است. شکل E
با استفاده از خاصیت مقایسه داریم

$$۲ = ۱\left(۱-(-۱)\right) \le \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱+x^۴} \le \sqrt{۲}\left(۱-(-۱)\right) = ۲\sqrt{۲}$$

پس

$$۲ \le \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}dx \le ۲\sqrt{۲}$$

لذا ۲ کران پایین و $۲\sqrt{۲}$ کران بالا برای این انتگرال است.

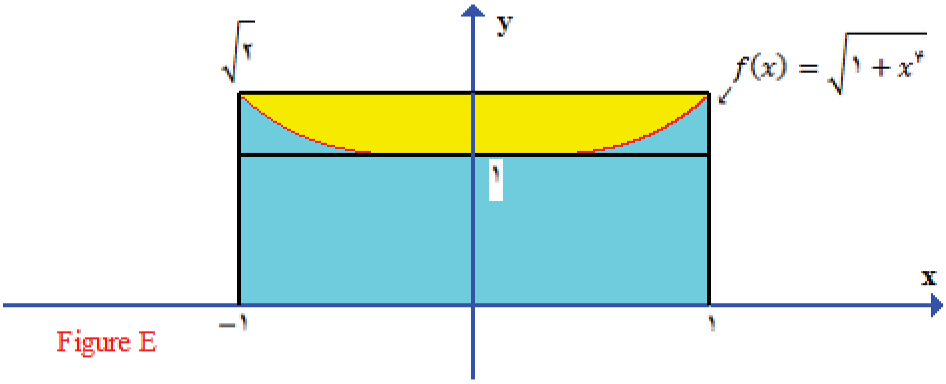


Figure E

نتایج خاصیت مقایسه – قضیه فرعی ۱.۱۰

Consequences of the Comparison Property Corollary 5.10

فرض می کنیم f یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a, b]$ باشد. پس

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

است.

اثبات – بر اساس فرض قضیه $a \le x \le b$ برای $f(x) \ge 0$ است. پس مجاز هستیم که فرض کنیم $m = 0$ باشد. پس طبق قضیه ۱.۹ داریم

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0(b - a) = 0$$

بر اساس قضیه فرعی بالا نتجه می گیریم که ناحیه ای که دارای شرایط تعریف ۱.۳ باشد ، یک عدد نا منفی است. نتیجه دیگر خاصیت مقایسه ، قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها است.

قضیه ۱.۱۱ مقدار میانگین برای انتگرال ها

Theorem 1.11 Mean Value Theorem for Integrals

فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. پس یک عدد مانند c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

اثبات – فرض می کنیم m و M مقادیر مینیمم و ماکسیمم f در بازه $[a,b]$ باشند. بر اساس خاصیت مقایسه ، می دانیم که

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

است. چون $a<b$ است ، به این معنی است که

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

چون f در بازه $[a,b]$ پیوسته است ، قضیه مقدار میانی می گوید که یک عدد مانند c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

یا به عبارت دیگر

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

مقدار

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

مقدار متوسط یا مقدار میانگین f در بازه $[a,b]$ می نامند. Average (Mean) Value of f

مثال ۴- فرض کنید $0 \le x \le ۲$ برای $f(x)=x^۲$ باشد. مقدار متوسط f در بازه $[0,۲]$ را پیدا کنید.

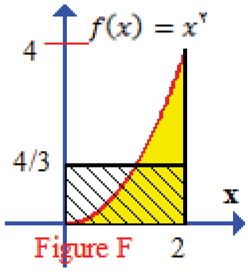
پاسخ

طبق تعریف مقدار متوسط f

$$\frac{۱}{۲-0}\int_0^۲ x^۲ dx$$

است. و بر اساس فرمول شماره ۲ بخش ۱.۲ داریم. شکل F

$$\frac{۱}{۲-0}\int_0^{۲} x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۳}\left(۲^{۳}-0^{۳}\right)\right]=\frac{۴}{۳}$$



تمرینات ۱.۳

در تمرینات ۳ – ۱ با استفاده از خاصیت مستطیل ، مقدار انتگرال را حساب کنید.

۱) $\int_{۳}^{۵} ۷dx$

۲) $\int_{۱۷}^{۱۰۰} ۱dr$

۳) $\int_{۲}^{-۱} -۱۰\, du$

در تمرینات ۵ – ۴ با استفاده از خاصیت جمع ، مقدار انتگرال را حساب کنید.

۴) $\int_0^{۱} xdx+\int_{۱}^{۲} xdx=\int_0^{۲} xdx$

۵) $\int_{۱}^{0} y^{۲}dy+\int_0^{۲} y^{۲}dy=\int_{۱}^{۲} y^{۲}dy$

در تمرینات ۷ – ۶ فرض کنید f در $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد. با استفاده از خاصیت جمع مقدار a و b را طوری پیدا کنید که تساوی داده شده بر قرار باشد.

۶) $\int_0^{۲} f(x)dx+\int_{۳}^{0} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

۷) $$\int_a^b f(t)dt - \int_۵^۳ f(t)dt = \int_۳^۱ f(t)dt$$

در تمرینات ۱۲ – ۸ مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع داده شده در بازه داده شده را پیدا کنید. و سپس با استفاده از خاصیت مقایسه ،کران پایین و کران بالای مساحت ناحیه بین نمودار تابع و محور x را پیدا کنید.

۸) $$f(x) = ۱۳; [-۳, 0]$$

۹) $$f(x) = x^۲; [-۱, ۳]$$

۱۰) $$f(x) = \frac{۱}{x}; [۲, ۳]$$

۱۱) $$g(x) = \cos x; \left[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}\right]$$

۱۲) $$h(t) = \tan t; \left[0, \frac{\pi}{۳}\right]$$

۱۳ - مساحت ناحیه بین نمودار تابع زیر و محور x را در بازه $[-۱, ۱]$ پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{برای} \quad x < 0 \\ x^۲ & \text{برای} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

پاسخ تمرینات ۱.۳

در تمرینات ۳ – ۱ با استفاده از خاصیت مستطیل ، مقدار انتگرال را حساب کنید.

۱) $$\int_۳^۵ ۷dx = ۷(۵ - ۳) = ۱۴$$

۲) $$\int_{۱۷}^{۱۰۰} ۱dr = ۱(۱۰۰ - ۱۷) = ۸۳$$

۳) $\int_{۲}^{-۱} -۱۰\, du = -۱۰(-۱-۲) = ۳۰$

در تمرینات ۵ – ۴ با استفاده از خاصیت جمع ، مقدار انتگرال را حساب کنید.

۴) $\int_0^{۱} xdx + \int_{۱}^{۲} xdx = \int_0^{۲} xdx$

$$\int_0^{۱} xdx = \frac{۱}{۲}\left(۱^{۲} - 0^{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \quad ، \quad \int_{۱}^{۲} xdx = \frac{۱}{۲}\left(۲^{۲} - ۱^{۲}\right) = \frac{۳}{۲}$$

$$\int_0^{۱} xdx + \int_{۱}^{۲} xdx = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۲; \int_0^{۲} xdx = \frac{۱}{۲}\left(۲^{۲} - 0^{۲}\right) = ۲$$

۵) $\int_{۱}^{0} y^{۲}dy + \int_0^{۲} y^{۲}dy = \int_{۱}^{۲} y^{۲}dy$

$$\int_{۱}^{0} y^{۲}dy = -\int_0^{۱} y^{۲}dy = -\frac{۱}{۳}\left(۱^{۳} - 0^{۳}\right) = -\frac{۱}{۳}$$

$$\int_0^{۲} y^{۲}dy = \frac{۱}{۳}\left(۲^{۳} - 0^{۳}\right) = \frac{۸}{۳}$$

$$\int_{۱}^{0} y^{۲}dy + \int_0^{۲} y^{۲}dy = -\frac{۱}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\int_{۱}^{۲} y^{۲}dy = \frac{۱}{۳}\left(۲^{۳} - ۱^{۳}\right) = \frac{۷}{۳}$$

در تمرینات ۷ – ۶ فرض کنید f در $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد. با استفاده از خاصیت جمع مقدار a و b را طوری پیدا کنید که تساوی داده شده بر قرار باشد.

۶) $\int_0^{۲} f(x)dx + \int_{۳}^{0} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

$$\int_0^{۲} f(x)dx + \int_{۳}^{0} f(x)dx = \int_{۳}^{0} f(x)dx + \int_0^{۲} f(x)dx = \int_{۳}^{۲} f(x)dx$$

پس $a = ۳$ و $b = ۲$ است.

۷) $$\int_a^b f(t)dt - \int_۵^۳ f(t)dt = \int_۳^۱ f(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_۵^۳ f(t)dt + \int_۳^۱ f(t)dt = \int_۵^۱ f(t)dt$$

پس $a = ۵$ و $b = ۱$ است.

در تمرینات ۱۲ – ۸ مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع داده شده در بازه داده شده را پیدا کنید. و سپس با استفاده از خاصیت مقایسه ،کران پایین و کران بالای مساحت ناحیه بین نمودار تابع و محور x را پیدا کنید.

۸) $f(x) = ۱۳; [-۳, 0]$

$$m = M = ۱۳$$

$$۳۹ = ۱۳\left(0 - (-۳)\right) \leq \int_{-۳}^{0} ۱۳dx \leq ۱۳\left(0 - (-۳)\right) = ۳۹$$

۹) $f(x) = x^۲; [-۱, ۳]$

$$m = 0, M = ۹$$

$$0 = 0\left(۳ - (-۱)\right) \leq \int_{-۱}^{۳} x^۲dx \leq ۹\left(۳ - (-۱)\right) = ۳۶$$

۱۰) $f(x) = \frac{۱}{x}; [۲, ۳]$

$$m = \frac{۱}{۳}, M = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}(۳ - ۲) \leq \int_۲^۳ \frac{۱}{x}dx \leq \frac{۱}{۲}(۳ - ۲) = \frac{۱}{۲}$$

۱۱) $g(x) = \cos x; \left[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}\right]$

$$m = \frac{۱}{۲}, M = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{\pi}{۲۴} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}\right) \le \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \cos x dx \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۲۴}$$

۱۲)　$h(t) = \tan t; \left[0, \frac{\pi}{۳}\right]$

$$m = 0, M = \sqrt{۳}$$

$$0 = 0\left(\frac{\pi}{۳} - 0\right) \le \int_0^{\frac{\pi}{۳}} \tan t dt \le \sqrt{۳}\left(\frac{\pi}{۳} - 0\right) = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۳ ـ مساحت ناحیه بین نمودار تابع زیر و محور x را در بازه $[-۱, ۱]$ پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ ،} & x < 0 \\ x^{۲} \text{ ،} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \int_{-۱}^{0} -x dx + \int_0^{۱} x^{۲} dx = -\frac{۱}{۲}\left(0^{۲} - (-۱)^{۲}\right) + \frac{۱}{۳}\left(۱^{۳} - 0^{۳}\right)$$

$$= \frac{۵}{۶}$$

۱.۴– قضیه اساسی حسابان The Fundamental Theorem of Calculus

هدف این بخش این است که روشی برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ پیدا کنیم بطوری که احتیاج به جمع زدن ارقام متعدد نباشیم. این روش به ما کمک می کند تا بتوانیم بسیاری از انتگرال ها را محاسبه کنیم.

در بخش ۱.۲ تعریف ۱.۳ گفتیم که اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد ، پس $\int_a^b f(x)dx$ تعریف شده است. فعلا فرض می کنیم $a < b$ باشد.

برای این که بتوانیم x را به عنوان متغیر بکاربریم ، $\int_a^b f(t)dt$ را جانشین $\int_a^b f(x)dx$ می کنیم. به خاطر بیاورید که گفتیم $\int_a^b f(t)dt$ یک عدد است. اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و c یک عدد ثابت در $[a,b]$ باشد ، پس برای هر عددی مانند x در $[a,b]$ تابع f حتما در بازه بسته ای با نقاط انتهایی a و x ،پیوسته است. در نتیجه می توانیم این عدد x را با عدد دیگری مانند $\int_c^x f(t)dt$ ارتباط دهیم و یک تابع G را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$G(x) = \int_c^x f(t)dt \text{ ، } a \le x \le b \qquad (۱)$$

مثلا ، اگر $0 \le x <\le ۱۰$ ، $f(x) = x$ و اگر $c = ۱$ باشد ، پس

$$G(0) = \int_۱^0 tdt = -\int_0^۱ tdt = -\frac{۱}{۲}\left(۱^۲ - 0^۲\right) = -\frac{۱}{۲}$$

$$G(۱) = \int_۱^۱ tdt = 0$$

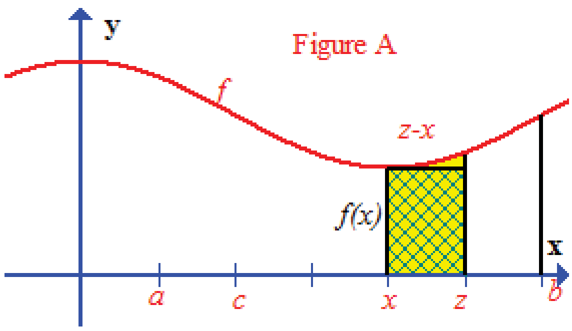
$$G(۲) = \int_۱^۲ tdt = \frac{۱}{۲}\left(۲^۲ - ۱^۲\right) = \frac{۳}{۲}$$

در حقیقت برای هر x بین 0 و ۱۰ داریم

$$G(x) = \int_۱^x tdt = \frac{۱}{۲}\left(x^۲ - ۱\right)$$

ثابت خواهیم کرد که اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر G مانند فرمول شماره (۱) تعریف شده باشد ، پس $G' = f$ یا به عبارت دیگر G ضد مشتق f است. **ضد مشتق Antiderivative**

برای این که از نظر تصویری نشان دهیم که چرا $G' = f$ است ، فرض کنید f در بازه $[a,b]$



پیوسته و نا منفی باشد. شکل A و فرض کنید $a \leq c < x < z < b$ باشد. چون $f \geq 0$ است پس طبق تعریف G در فرمول (۱) داریم $G(z)$ عبارت است از مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در $[c, z]$ و $G(x)$ عبارت است از مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در $[c, x]$
لذا $G(z) - G(x)$ مساحت تمام ناحیه سایه دار در شکل A است. و اگر z به x نزدیک باشد ، این مساحت به مساحت $f(x)(z-x)$ یعنی به قسمت مستطیل زردهاشور زده نزدیک است. نتیجه می گیریم که اگر $x < z$ و z به x نزدیک باشد ، پس $G(z) - G(x)$ باید به $f(x)(z-x)$ نزدیک باشد و لذا

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} \qquad (۲)$$

باید نزدیک $f(x)$ باشد. به همین طریق می توان نشان داد که تخمین شماره (۲) صادق است اگر $z < x$ باشد و z نزدیک x باشد ، در نهایت نتیجه می گیریم که

$$\lim_{z \to x} \frac{G(z) - G(x)}{z - x} = f(x)$$

یا به عبارت دیگر

$$G'(x) = f(x)$$

حالا نتیجه بالا را در قضیه زیر بیان می کنیم و آنرا بوسیله قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها ثابت می کنیم.

قضیه ۱.۱۲
فرض می کنیم f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و فرض می کنیم $a \leq c \leq b$ باشد. G را هم مطابق تساوی زیر تعریف می کنیم.

$$G(x) = \int_c^x f(t)dt \text{ ، } a \leq x \leq b$$

پس G در $[a, b]$ مشتق پذیر است ، و

$$G'(x) = f(x) \text{ ، } \quad a \leq x \leq b$$

اثبات
مقدار x را در (a, b) ثابت نگه می داریم و فرض می کنیم $a \leq z \leq b$ و فرض می کنیم $x \neq z$ باشد. پس خاصیت جمع می گوید که

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \frac{\int_c^z f(t)dt - \int_c^x f(t)dt}{z - x} = \frac{\int_x^z f(t)dt}{z - x}$$

بر اساس قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها ، یک عدد $c(z)$ بین x و z وجود دارد بطوری که

$$\frac{\int_x^z f(t)dt}{z - x} = f\big(c(z)\big)$$

چون $c(z)$ بین x و z است ، پس می دانیم که $\lim_{z \to x} c(z) = x$ است. چون بر اساس فرض مساله ، f در x پیوسته است ، پس بر اساس قضیه جانشینی با جانشین کردن $y = c(z)$ داریم

$$\lim_{z\to x}\frac{G(z)-G(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}f\big(c(z)\big)=\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$$

یا به عبارت دیگر

$$G'(x)=f(x)$$

تا کنون فرض ما بر این بوده است که f در بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده باشد. اما تنها حقیقتی که در مورد $[a,b]$ در اثبات قضیه ۱.۱۲ بکار بردیم این بود که برای هر نقطه x و z در $[a,b]$ با $x<z$ ، بازه $[x,z]$ کاملا در $[a,b]$ قرار می گیرد. اما این موضوع باز هم صادق است اگر بجای بازه بسته $[a,b]$ هر بازه دیگری مانند I قرار دهیم. حتی یک بازه بی کران مانند (a,∞) و یا $[a,\infty)$ هم می تواند باشد. پس در حقیقت قضیه فرعی زیر را که کلی‌تراست ثابت کرده ایم. این قضیه فرعی از قضیه ۱.۱۲ نتیجه می شود ، اگر بجای $[a,b]$ بازه I بکار بریم و c هم a را جا نشین کنیم.

قضیه فرعی ۱.۱۳ Corollary 1.13

فرض می کنیم f در یک بازه مانند I که شامل بیش از یک نقطه است ، پیوسته باشد. و فرض می کنیم a یک نقطه اختیاری در I باشد. G را در I مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt \text{ ، } x\in I$$

پس G در I مشتق پذیر است ، و

$$G'(x)=f(x) \text{ ، } x\in I \qquad (۳)$$

قضیه فرعی ۱.۱۳ را در بعضی کتب بنام **قضیه اساسی اول حسابان** و در بعضی از کتب بنام **قضیه اساسی دوم حسابان** نام گذاری کرده اند. هر نامی که می خواهید آنرا بنامید.

مثال ۱ ـ فرض کنید $x>0$ ، $G(x)=\int_۱^x\left(\frac{۱}{t}\right)dt$ باشد. مطلوب است $G'(x)$

پاسخ

بر اساس قضیه فرعی ۱.۱۳ و $I=(0,\infty)$ و $a=۱$ داریم.

$$G'(x)=\frac{۱}{x} \text{ ، } x>0$$

مثال ۲ – فرض کنید $G(x)=\int_0^x t\sin t^۳dt$ باشد برای تمام x ها. مطلوب است $G'(x)$

پاسخ

بر اساس قضیه فرعی ۱.۱۳ داریم.

$$G'(x)=x\sin x^۳$$

مثال ۳ – فرض کنید $F(x)=\int_0^{x^۲} t\sin t^۳dt$ باشد برای تمام x ها. مطلوب است $F'(x)$

پاسخ

اگر G را بوسیله $G(x)=\int_0^x t\sin t^۳dt$ تعریف کنیم ، پس $F(x)=G\left(x^۲\right)$ است ، لذا با استفاده از قاعده زنجیره ای

$$F'(x)=\left[G'\left(x^۲\right)\right]۲x$$

و چون $G'(x) = x\sin x^{3}$ است ، پس $G'\left(x^{2}\right) = x^{2}\sin x^{6}$ و در نهایت

$$F'(x) = \left[x^{2}\sin x^{6}\right](2x) = 2x^{3}\sin x^{6}$$

در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به قلم نگارنده قضیه ای آمده است که آنرا برای یاد آوری در ذیل می آوریم.

قضیه ۳.۳.۱

الف - فرض می کنیم f در یک بازه I پیوسته باشد. اگر برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f'(x) = 0$$

پس f در I یک مقدار ثابت است.

ب - فرض می کنیم f و g در بازه I پیوسته باشند. اگر برای هر نقطه x در I داشته باشیم

$$f'(x) = g'(x)$$

پس $f - g$ یک عدد ثابت است. به عبارت دیگر ، یک عدد ثابت مانند c وجود دارد ، بطوری که برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f(x) = g(x) + C$$

قضیه بالا می گوید تفاوت تمام ضد مشتق های یک تابع f در یک عدد ثابت است. مثلا ضد مشتق های $2x$ همگی دارای شکل $x^{2} + C$ هستند. اینجا C یک عدد ثابت است.

حالا برای مهم ترین قضیه در حسابان آماده هستیم. در بعضی کتب آنرا **قضیه اساسی اول حسابان** ، در بعضی کتب آنرا **قضیه اساسی دوم حسابان** نام گذاری کرده اند. ما این قضیه را **قضیه اساسی حسابان** می نامیم. شما هم با هر نام دیگری که می خواهید آنرا بنامید .

قضیه ۱.۱۴ قضیه اساسی حسابان Theorem 1.14 Fundamental Theorem of Calculus

فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

الف - پس f یک ضد مشتق در $[a,b]$ دارد.

ب – اگر F یک ضد مشتق f در $[a,b]$ باشد ، پس

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

است.

اثبات

برای اثبات قسمت الف ، فرض می کنیم

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ ، } a \le x \le b$$

باشد. پس بر اساس قضیه فرعی ۱.۱۳ اگر $[a,b]$ را I بنامیم ، پس $G' = f$ است. یعنی G' یک ضد مشتق f است.

برای اثبات قسمت ب فرض می کنیم G ضد مشتقی باشد که در قسمت الف پیدا کردیم. پس

$$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \quad \text{و} \quad G(b)=\int_a^b f(t)dt$$

حالا اگر F یک ضد مشتق f باشد ، پس طبق قضیه ای که در بالا از کتاب حساب دیفرانسیل آرمان آوردیم ، می دانیم که $F=G+C$ است. اینجا C یک عدد ثابت است. پس ،

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)=G(b)-G(a)=[F(b)-C]-[F(a)-C]=F(b)-F(a)$$

مثال ۴– انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^۲ x^۲dx$$

پاسخ

میدانیم که اگر $F(x)=\frac{۱}{۳}x^۳$ باشد ، پس F ضد مشتق $x^۲$ است. پس بر اساس قضیه اساسی حسابان داریم.

$$\int_0^۲ x^۲dx=F(۲)-F(0)=\frac{۱}{۳}*۲^۳-\frac{۱}{۳}*0^۳=\frac{۸}{۳}$$

معمولا اگر بجای نماد F که ضد مشتق است مطابق زیر عمل کنیم ، کار ساده تر است. مثلا مثال ۴ را مطابق زیر می نویسیم.

$$\int_0^۲ x^۲dx=\frac{x^۳}{۳}\Big|_0^۲=\frac{۱}{۳}*۲^۳-\frac{۱}{۳}*0^۳=\frac{۸}{۳}$$

مثال ۵– انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_۱^۴ x^{\frac{۱}{۲}}dx$$

پاسخ

چون $\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$ ضد مشتق $x^{\frac{۱}{۲}}$ است ، پس داریم.

$$\int_۱^۴ x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۱^۴=\frac{۲}{۳}\left(۴^{\frac{۳}{۲}}\right)-\frac{۲}{۳}\left(۱^{\frac{۳}{۲}}\right)=\frac{۱۶}{۳}-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

مثال ۶ ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx$$

پاسخ

می دانیم که $\sin x$ ضد مشتق $\cos x$ است. پس داریم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{۲}} = \sin\frac{\pi}{۲} - \sin 0 = ۱ - 0 = ۱$$

مثال ۷ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{-۱}^{۱} (۱ + ۲x)dx$$

پاسخ

می دانیم که $x + x^۲$ ضد مشتق $۱ + ۲x$ است. پس

$$\int_{-۱}^{۱} (۱ + ۲x)dx = \left(x + x^۲\right)\Big|_{-۱}^{۱} = \left(۱ + ۱^۲\right) - \left[-۱ + (-۱)^۲\right] = ۲$$

می توانیم قضیه اساسی حسابان را به انتگرال هایی تعمیم که حد پایینی انتگرال بزرگ تر از حد بالایی انتگرال است.

قضیه فرعی ۱.۱۵

فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. پس اگر F ضد مشتق f باشد ، داریم.

$$\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b)$$

اثبات

بر اساس قضیه اساسی حسابان داریم.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

پس بر اساس تعریف ۱.۴ داریم

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b)$$

پس بر اساس قضیه اساسی حسابان و قضیه فرعی آن ، اگر F ضد مشتق f باشد. پس داریم.

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad (۴)}$$

مثال ۸ – انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{۲}^{۱} ۲t^{۳}dt$$

پاسخ
می دانیم که

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۲}t^{۴}\right) = ۲t^{۳}$$

است ، پس داریم.

$$\int_{۲}^{۱} ۲t^{۳}dt = \frac{۱}{۲}t^{۴}\Big|_{۲}^{۱} = \frac{۱}{۲}*۱^{۴} - \frac{۱}{۲}*۲^{۴} = \frac{۱}{۲} - ۸ = -\frac{۱۵}{۲}$$

مشتق و انتگرال دو عمل معکوس Differentiation and Integration as Inverse Processes

فرمول شماره (۳) را می توانیم مطابق زیر باز گو کنیم.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x) \qquad (۵)}$$

یعنی اگر با یک تابع پیوسته f شروع کنیم , از آن انتگرال بگیریم تا $\int_a^x f(t)dt$ بدست آوریم ، و سپس از آن مشتق بگیریم ، نتیجه تابع اصلی f خواهد بود. بنا بر این مشتق گیری ، انتگرال گیری را خنثی می کند. از طرف دیگر اگر با یک تابع F که مشتق پیوسته دارد شروع کنیم ، ابتدا از آن مشتق بگیریم ، و سپس از آن انتگرال بگیریم ، $\int_a^x F'(t)dt$ بدست می آوریم. بر اساس قضیه اساسی حسابان داریم

$$\boxed{\int_{a}^{x} F'(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (۶)}$$

پس تابع اصلی F را بدست می آوریم که فقط در یک عدد ثابت با تابع اصلی تفاوت دارد. این مرتبه انتگرال گیری ، مشتق گیری را خنثی کرده است. پس مشتق گیری و انتگرال گیری معکوس یک دیگر هستند.

علاوه بر این ، هر وقت که مشتق تابع f یعنی F' را بدانیم ، فرمول شماره (۶) یک فرمول انتگرال گیری به ما می دهد. مثلا می دانیم که

$$\frac{d}{dx}\tan x = sec^{۲}x$$

پس فرمول شماره (۶) به ما می گوید که

$$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{x} sec^{۲} t dt = \tan x - \tan\frac{\pi}{۴} = \tan x - ۱$$

طرح زیر نمایش تصویری از آنچه در بالا گفته شد ، می تواند باشد.

$$2x \xrightarrow{\text{انتگرال}} x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$

فرمول شماره (۶) کار برد های زیادی دارد. مثلا در اقتصاد ، تابع در آمد نهایی m_R عبارت است از مشتق در آمد کل R

در آمد نهایی Marginal Revenue

در آمد کل Total Revenue

پس طبق فرمول شماره (۶)

$$R(x) - R(a) = \int_a^x R'(t)dt = \int_a^x m_R(t)dt \qquad (۷)$$

به همین طریق هزینه نهایی m_C عبارت است از مشتق هزینه کل C

هزینه نهایی Marginal Cost

هزینه کل Total Cost

پس طبق فرمول (۶)

$$C(x) - C(a) = \int_a^x C'(t)dt = \int_a^x m_C(t)dt \qquad (۸)$$

در فیزیک ، سرعت $Velocity$ یک شیئ متحرک در طول یک خط مستقیم عبارت است از مشتق تابع مکان $Position$ است. اگر t را به عنوان متغیر مستقل $Independent\ Variable$ زمان ، و f تابع مکان ، و v سرعت و s متغیر برای انتگرال گیری بکار بریم ، خواهیم داشت.

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(s)ds \qquad (۹)$$

یاد آوری :اگر داشته باشیم $y = x^{۲}$ پس x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.

در فرمول ۹ عدد t_0 یک عدد اختیاری است و نقش آن مثل a در فرمول شماره (۶) است. در عمل t_0 یک لحظه مخصوص زمان است. هنگامی که t_0 به عنوان لحظه شروع حرکت بکار می رود ، آنرا **زمان اولیه Initial Time** می گویند.

شتاب Acceleration که آنرا با حرف a نشان می دهیم ، عبارت است از مشتق سرعت

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \qquad (۱۰)$$

نزدیک سطح زمین در اثر نیروی جاذبه $Geravity$ شتاب ثابت است و تقریبا عبارت است از ۳۲− فوت در ثانیه درثانیه است . اگر فرض کنیم یک شیئ فقط تحت نیروی جاذبه است ، ارتفاع شیئ در زمان t مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$h(t) = -۱۶t^{۲} + v_0 t + h_0 \qquad (۱۱)$$

مثال ۹ - فرض کنید یک شیئ تحت تاثیر یک شتاب ثابت ۳۲− فوت در ثانیه در ثانیه قرار دارد. فرض کنید در زمان $t = 0$ ارتفاع اولیه h_0 و سرعت اولیه v_0 است. نشان دهید که ارتفاع $h(t)$ شیئ در هر زمان $t > 0$ بوسیله فرمول شماره (۱۱) بدست می آید. به عبارت دیگر درستی فرمول شماره (۱۱) را ثابت کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول شماره (۱۰) و $t_0 = 0$ و $a(s) = -۳۲$ خواهیم داشت

$$v(t) - v_0 = v(t) - v(0) = \int_0^t -۳۲ds = -۳۲s\,\Big|_0^t = -۳۲t$$

پس $v(t) = v_0 - ۳۲t$ است. طبق این فرمول و فرمول شماره (۹) با $t_0 = 0$ و h بجای f داریم.

$$h(t) - h_0 = h(t) - h(0) = \int_0^t \left(v_0 - ۳۲s\right)ds = \left(v_0 s - ۱۶t^{۲}\right)\Big|_0^t = v_0 t - ۱۶t^{۲}$$

از رابطه بالا فرمول شماره (۱۱) بدست می آید.

تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۵ − ۱ مشتق هر یک از توابع را پیدا کنید.

۱) $$F(x) = \int_0^x t\left(۱ + t^{۳}\right)^{۲۹} dt$$

۲) $$F(y) = \int_y^{۲} \frac{۱}{t^{۳}} dt$$

۳) $$F(x) = \int_0^{x^{۲}} t \sin t dt$$

۴) $G(y)=\int_{y}^{y^{۲}}\left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}dt$

۵) $F(x)=\frac{d}{dx}\int_{0}^{۴x}\left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۴}{۵}}dt$

در تمرینات ۱۸ ــ ۶ انتگرال را محاسبه کنید.

۶) $\int_{0}^{۱}۴dx$

۷) $\int_{۱}^{۳}-ydy=-\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۳}=\frac{-۹}{۲}-\left(\frac{-۱}{۲}\right)=-۴$

۸) $\int_{۱}^{-۳}۳udu=\frac{۳}{۲}u^{۲}\Big|_{۱}^{-۳}=\frac{۲۷}{۲}-\frac{۳}{۲}=۱۲$

۹) $\int_{0}^{۱}x^{۱۰۰}dx=\frac{۱}{۱۰۱}x^{۱۰۱}\Big|_{0}^{۱}=\frac{۱}{۱۰۱}$

۱۰) $\int_{-۱}^{۱}u^{\frac{۱}{۳}}du=\frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}\Big|_{-۱}^{۱}=\frac{۳}{۳}-\frac{۳}{۴}(-۱)^{\frac{۴}{۳}}=0$

۱۱) $\int_{۱}^{۴}x^{-\frac{۷}{۹}}dx$

۱۲) $\int_{-۱/۵}^{۲\pi}(۵-x)dx$

۱۳) $\int_{-۴}^{-۱}(۵x+۱۴)dx$

۱۴) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{۳}} \cos x dx$

۱۵) $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{-\frac{\pi}{۴}} \sin t dt$

۱۶) $\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{y^{۴}} dy$

۱۷) $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} csc^{۲} t dt$

۱۸) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{d}{dx} sin^{۵} x\right) dx$

در تمرینات ۲۳ – ۱۹ مساحت بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را حساب کنید.

۱۹) $f(x) = x^{۴}; [-۱, ۱]$

۲۰) $f(x) = \sin x; \left[0, \frac{۲\pi}{۳}\right]$

۲۱) $f(x) = x^{\frac{۱}{۲}}; [۱, ۴]$

۲۲) $f(x) = sec^{۲} x; \left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$

۲۳ – ابتدا $\int_0^x f(t)dt$ را برای هر یک از توابع زیر حساب کنید. سپس با مشتق گرفتن از تابع بدست آمده ، درستی فرمول شماره (۵) را ثابت کنید. یعنی درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$a)\ f(x)x$ $\quad b)\ f(x) = -۲x^{۲}$ $\quad c)\ f(x) = -\sin x$ $\quad d)\ f(x) = ۱۰x^{۴}$

۲۴ – فرض کنید هزینه تولید دو پوند اول صابون 10.98 دلار است. و هزینه نهایی از فرمول زیر بدست می آید.

$$m_C(x) = ۳ - 0.1x \quad ,0 \le x \le 30$$

هزینه کل تولید ۳۰ پوند صابون را پیدا کنید.

۲۵ – فرض کنید سرعت یک اتومبیل ، که در زمان $t = 0$ در طول محور x شروع به حرکت می کند از فرمول زیر بدست می آید.

$$v(t) = ۱۰t - t^۲ \;،\; 0 \le t \le ۱۰$$

مکان اتومبیل را در شرایط زیر پیدا کنید.

الف – در هر زمان $0 \le t \le ۱0$

ب – هنگامی که شتاب صفر است.

۲۶ – جریان آب به یک سد به نحوی کنترل می شود که میزان یا آهنگ جریان بر حسب تن در ساعت مطابق تساوی زیر است.

$$F'(t) = ۱۴\,۰۰۰ \sin\frac{\pi t}{۲۴} \;،\; 0 \le t \le ۲۴$$

در یک روز ، چند تن آب وارد سد می شود؟

راهنمایی فرمول شماره (۶) را بکار برید. Ba توجه به حقیقت زیر.

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{۳۳۶\,۰۰۰}{\pi}\cos\frac{\pi t}{۲۴}\right) = F'(t) \;،\; 0 \le t \le ۲۴$$

پاسخ تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۵ – ۱ مشتق هر یک از توابع را پیدا کنید.

۱) $$F(x) = \int_0^x t\left(۱ + t^۳\right)^{۲۹} dt$$

$$F'(x) = x\left(۱ + x^۳\right)^{۲۹}$$

۲) $$F(y) = \int_y^۲ \frac{۱}{t^۳}dt = -\int_۲^y \frac{۱}{t^۳}dt$$

$$F'(y) = -\frac{۱}{x^۳}$$

۳) $$F(x) = \int_0^{x^۲} t \sin t dt$$

فرض می کنیم $G(x) = \int_0^x t\sin t dt$ باشد ،

پس $F(x) = G\left(x^{۲}\right)$ است. چون $G'(x) = x\sin x$ است ، قانون زنجیره ای می گوید

$$F'(x) = \left[G'\left(x^{۲}\right)\right]۲x = \left(x^{۲}\sin x^{۲}\right)(۲x) = ۲x^{۳}\sin x^{۲}$$

۴) $$G(y) = \int_y^{y^{۲}} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt = \int_y^{0} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt + \int_0^{y^{۲}} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt$$

$$= -\int_0^{y} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt + \int_0^{y^{۲}} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt$$

فرض می کنیم

$$H(y) = \int_0^{y} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt \quad \text{و} \quad K(y) = \int_0^{y^{۲}} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} dt$$

باشد. پس $K(y) = H\left(y^{۲}\right)$ و $G(y) = -H(y) + K(y)$ است. بطوری که

$$G'(y) = -H'(y) + K'(y)$$

است. حال $H'(y) = \left(۱+y^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ است ، بر اساس قاعده زنجیره ای

$$K'(y) = \left[H'\left(y^{۲}\right)\right](۲y) = ۲y\left(۱+y^{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

است. لذا

$$G'(y) = -\left(۱+y^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} + ۲y\left(۱+y^{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۵) $$F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{۴x} \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۴}{۵}} dt$$

فرض می کنیم $G(x) = \int_0^x \left(۱+t^{۲}\right)^{\frac{۴}{۵}} dt$ باشد. پس $G'(x) = \left(۱+x^{۲}\right)^{\frac{۴}{۵}}$ است و

$$F(x) = \frac{d}{dx}G(۴x) = \left[G'(۴x)\right](۴) = ۴\left(۱+۱۶x^{۲}\right)^{\frac{۴}{۵}}$$

است ، بطوری که

$$F'(x) = \frac{۱۶}{۵}\left(۱+۱۶x^{۲}\right)^{\frac{-۱}{۵}}(۳۲x) = \frac{۵۱۲}{۵}\left(۱+۱۶x^{۲}\right)^{\frac{-۱}{۵}}$$

در تمرینات ۱۸ – ۶ انتگرال را محاسبه کنید.

۶) $$\int_0^{۱} ۴dx = ۴x\Big|_0^{۱} = ۴$$

۷) $$\int_{۱}^{۳} -ydy = -\frac{y^2}{2}\Big|_{۱}^{۳} = -\frac{۹}{۲} - \left(-\frac{۱}{۲}\right) = -۴$$

۸) $$\int_{۱}^{-۳} ۳udu = \frac{۳}{۲}u^{۲}\Big|_{۱}^{-۳} = \frac{۲۷}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۱۲$$

۹) $$\int_0^{۱} x^{۱۰۰}dx = \frac{۱}{۱۰۱}x^{۱۰۱}\Big|_0^{۱} = \frac{۱}{۱۰۱}$$

۱۰) $$\int_{-۱}^{۱} u^{\frac{۱}{۳}}du = \frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}\Big|_{-۱}^{۱} = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴}(-۱)^{\frac{۴}{۳}} = 0$$

۱۱) $$\int_{۱}^{۴} x^{-\frac{۷}{۹}}dx = \frac{۹}{۲}x^{\frac{۲}{۹}}\Big|_{۱}^{۴} = \frac{۹}{۲}\left(۴^{\frac{۲}{۹}} - ۱\right)$$

۱۲) $$\int_{-۱/۵}^{۲\pi}(۵-x)dx = \left(۵x - \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big|_{-۱/۵}^{۲\pi} = \left(۱۰\pi - ۲\pi^{۲}\right) - \left(-۷/۵ - \frac{۲/۲۵}{۲}\right) = ۱۰\pi - ۲\pi^{۲} + ۸/۶۲۵$$

۱۳) $$\int_{-۴}^{-۱}(۵x+۱۴)dx = \left(\frac{۵}{۲}x^{۲}+۱۴x\right)\Big|_{-۴}^{-۱} = \left(\frac{۵}{۲}-۱۴\right) - (۴۰-۵۶) = \frac{۹}{۲}$$

۱۴) $$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{۳}}\cos x dx = \sin x\Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - 0 = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۵) $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{-\frac{\pi}{۴}} \sin t dt = -\cos t \Big|_{\frac{\pi}{۳}}^{-\frac{\pi}{۴}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} - \left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۶) $\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{y^۴} dy = \frac{-۱}{۳y^۳}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{-۱}{۲۴} - \left(-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۷}{۲۴}$

۱۷) $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} csc^۲ t dt = -\cot t \Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} = 0 - \left(-\sqrt{۳}\right) = \sqrt{۳}$

۱۸) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{d}{dx} sin^۵ x\right) dx = sin^۵ x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱ - 0 = ۱$

در تمرینات ۲۳ – ۱۹ مساحت بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را حساب کنید.

۱۹) $f(x) = x^۴; [-۱, ۱]$

$$A = \int_{-۱}^{۱} x^۴ dx = \frac{۱}{۵}x^۵ \Big|_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{۵} - \left(-\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۲}{۵}$$

۲۰) $f(x) = \sin\ x; \left[0, \frac{۲\pi}{۳}\right]$

$$A = \int_{0}^{\frac{۲\pi}{۳}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{0}^{\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{۱}{۲} - (-۱) = \frac{۳}{۲}$$

۲۱) $f(x) = x^{\frac{۱}{۲}}; [۱, ۴]$

$$A = \int_{۱}^{۴} x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} \Big|_{۱}^{۴} = \frac{۱۶}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

۲۲) $f(x) = sec^۲x; \left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} sec^۲ x dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{۴}} = ۱$$

۲۳ – ابتدا $\int_0^x f(t)dt$ را برای هر یک از توابع زیر حساب کنید. سپس با مشتق گرفتن از تابع بدست آمده ، درستی فرمول شماره (۵) را ثابت کنید. یعنی درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$a)\ f(x)x \qquad b)\ f(x) = -۲x^۲ \qquad c)\ f(x) = -\sin\ x \qquad d)\ f(x) = ۱۰x^۴$

پاسخ

$$a)\ \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt = \frac{۱}{۲}x^۲; \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۲}x^۲\right) = x = f(x)$$

$$b)\ \int_0^x f(t)dt = \int_0^x -۲t^۲dt = \frac{-۲}{۳}t^۳\Big|_0^x = \frac{-۲}{۳}x^۳; \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-۲}{۳}x^۳\right) = -۲x^۲ = f(x)$$

$$c)\ \int_0^x f(t)dt = \int_0^x -\sin tdt = \cos t\Big|_0^x = \cos x - ۱;$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(\cos x - ۱) = -\sin x = f(x)$$

$$d)\ \int_0^x f(t)dt = \int_0^x ۱۰t^۴dt = ۲t^۵\Big|_0^x = ۲x^۵;$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(۲x^۵\right) = ۱۰x^۴ = f(x)$$

۲۴ – فرض کنید هزینه تولید دو پوند اول صابون 10.98 دلار است. و هزینه نهایی از فرمول زیر بدست می آید.

$$m_C(x) = ۳ - 0.1x \quad ,0 \le x \le 30$$

هزینه کل تولید ۳۰ پوند صابون را پیدا کنید.

پاسخ

$$C(x) - C(۲) = \int_۲^x m_C(t)dt = \int_۲^x (۳ - ۰/۱t)dt = \left(۳t - ۰/۰۵t^۲\right)\Big|_۲^x$$

$$= \left(۳x - ۰/۰۵x^۲\right) - (۶ - ۰/۲) = ۳x - ۰/۰۵x^۲ - ۵/۸$$

چون $C(۲) = ۱۰/۹۸$ است ، پس

$$C(x) = ۱۰/۹۸ + ۳x - ۰/۰۵x^{۲} - ۵/۸$$

بطوری که

$$C(۳۰) = ۱۰/۹۸ + ۳(۳۰) - ۰/۰۵(۳۰)^{۲} - ۵/۸ = ۵۰/۱۸ \text{ دلار}$$

۲۵ – فرض کنید سرعت یک اتومبیل ، که در زمان $t = 0$ در طول محور x شروع به حرکت می کند از فرمول زیر بدست می آید.

$$v(t) = ۱۰t - t^{۲} \;,\; 0 \le t \le ۱۰$$

مکان اتومبیل را در شرایط زیر پیدا کنید.

الف – در هر زمان $0 \le t \le ۱۰$

ب – هنگامی که شتاب صفر است.

پاسخ

الف – برای $0 \le t \le ۱۰$ داریم

$$f(t) - f(0) = \int_0^t v(s)ds = \int_0^t \left(۱۰s - s^{۲}\right)ds = \left(۵s^{۲} - \frac{۱}{۳}s^{۳}\right)\Big|_0^t = ۵t^{۲} - \frac{۱}{۳}t^{۳}$$

ب –

$$a(t) = v'(t) = ۱۰ - ۲t$$

پس $a(t) = 0$ است ، اگر $t = ۵$ باشد. چون $f(0) = 0$ است ، پس بر اساس قسمت الف داریم

$$f(۵) = f(۵) - f(0) = ۵\left(۵^{۲}\right) - \frac{۱}{۳}\left(۵^{۳}\right) = \frac{۲۵۰}{۳}$$

۲۶ – جریان آب به یک سد به نحوی کنترل می شود که میزان یا آهنگ جریان بر حسب تن در ساعت مطابق تساوی زیر است.

$$F'(t) = ۱۴\,۰۰۰ \sin\frac{\pi t}{۲۴} \;,\; 0 \le t \le ۲۴$$

در یک روز ، چند تن آب وارد سد می شود؟

راهنمایی فرمول شماره (۶) را بکار برید. با توجه به حقیقت زیر.

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{۳۳۶\,۰۰۰}{\pi}\cos\frac{\pi t}{۲۴}\right) = F'(t) \;,\; 0 \le t \le ۲۴$$

پاسخ

مقدار جریان آب در یک روز عبارت است از $\int_0^{۲۴} F'(t)dt$ ،پس بر اساس فرمول شماره (۶) و راهنمایی داریم

$$\int_0^{۲۴} F'(t)dt = -\frac{۳۳۶۶\ ۰۰}{\pi}\cos\frac{\pi\, t}{۲۴}\Bigg|_0^{۲۴} = -\frac{۳۳۶\ ۰۰۰}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{۶۲۷\ ۰۰۰}{\pi}$$ تن

۱.۵ -انتگرال های نا معین و قواعد انتگرال گیری
Indefinite Integral and Integration Rules

تعریف ۱.۱۶
فرض کنید f در بازه I پیوسته باشد. هر ضد مشتقی از f در بازه I را نیز **انتگرال نا معین** f در بازه I می نامند و آنرا با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می دهند.

مسلم است ، اگر F یک انتگرال نا معین f باشد ، پس برای هر عدد ثابتی مانند C تابع $F+C$ هم یک انتگرال نا معین f است. زیرا

$$(F+c)' = F' + C' = f$$

در نتیجه هر تابع پیوسته f بی نهایت انتگرال نا معین دارد ، هر کدام برای یک عدد C **مثالی می زنیم. توابع زیر را ملاحظه کنید.**

$$x^۲ ، x^۲ + ۳ ، x^۲ + ۸ , x^۲ + ۱۰۰۰۰$$

مشتق تمام توابع بالا $۲x$ است. پس $۲x$ می تواند ضد مشتق توابع بالا و بی نهایت تابع دیگربا یک عدد ثابت دلخواه باشد. بنا بر این عدد ثابت C را به ضد مشتق اضافه می کنیم.
لذا در ریاضیات نمادی مانند

$$\int f(x) = F(x) + C$$

را بکار می بریم ، هر گاه بخواهیم انتگرال های نا معین را پیدا کنیم.
مثلا

$$\int ۲x dx = x^۲ + C$$

درجدول زیر چند انتگرال نا معین را ذکر می کنیم. توجه داشته باشد که C ثابت است.

$$\int c dx = cx + C ، \int x dx = \frac{۱}{۲}x^۲ + C ، \int x^۲ dx = \frac{۱}{۳}x^۳ + C ،$$

$$\int (px+q)dx = \frac{۱}{۲}px^۲ + qx + C ، \quad p ، q \text{ اعداد هستند}$$

$$\int x^r dx = \frac{۱}{r+۱}x^{r+۱} + C ، \ r \in \mathbb{Q} ، \ r \neq -۱$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C ، \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

قضیه ۱.۱۷
فرض می کنیم f و g در بازه I پیوسته باشد. پس
$$\int [f(x)+g(x)] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

اثبات
فرض می کنیم F و G انتگرال های نا معین f و g باشند. پس داریم
$$(F+G)' = F' + G' = f + g$$
اینجا $F+G$ یک انتگرال نا معین $f+g$ است.

اگر f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند ، پس بر اساس قضیه اساسی حسابان انتگرال های معین مربوطه به شکل زیر خواهد بود.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad (۱)$$

قضیه ۱.۱۷ را می توان به بیش از دو تابع بسط داد.

قضیه ۱.۱۸
فرض می کنیم f در بازه I پیوسته باشد و فرض می کنیم c یک عدد حقیقی. پس
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

اثبات
اگر F یک انتگرال نا معین f باشد ، پس
$$(cF)' = c(F') = cf$$
است ، و لذا cF یک انتگرال نا معین cf است. قضیه ثابت شد.

اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، پس بر اساس قضیه اساسی حسابان این قضیه در مورد انتگرال معین هم صادق است. یعنی

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad (۲)$$

از قضایای ۱.۱۷ و ۱.۱۸ قضیه فرعی زیر نتیجه می شود.

قضیه فرعی ۱.۱۹
اگر f و g در بازه I پیوسته باشد ، پس
$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

اثبات
فرض می کنیم F و G انتگرال های نا معین f و g باشند. پس
$(F - G)' = F' - G' = f - g$
لذا $F - G$ یک انتگرال نا معین $f - g$ است. قضیه ثابت شد.

روش دیگر
$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int [f(x) + (-g(x))]dx = \int f(x)dx + \int -g(x)dx$$
$$= \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

اگر f و g در بازه $[a, b]$ پیوسته باشند ، پس بر اساس قضیه اساسی حسابان داریم.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \qquad (۳)$$

مثال ۱–انتگرا ل زیر را پیدا کنید.
$$\int (۲x - ۳\cos x)dx$$

پاسخ
ابتدا از قضیه فرعی ۱.۱۹ و سپس قضیه ۱.۱۸ استفاده می کنیم.
$$\int (۲x - ۳\cos x)dx = \int ۲xdx - \int ۳\cos xdx$$
$$= ۲\int xdx - ۳\int \cos xdx = ۲\left(\frac{۱}{۲}x^۲\right) - ۳\sin x + C$$
$$= x^۲ - ۳\sin x + C$$

مثال ۲ - انتگرا ل زیر را پیدا کنید.
$$\int_0^۱ \left(۴x^۲ + ۵x^۳\right) dx$$

پاسخ
روش اول - ابتدا با استفاده از قضیه جمع انتگرال ها ، انها را جدا می کنیم و سپس انتگرال می گیریم.

$$\int_0^{۱}\left(۴x^{۲}+۵x^{۳}\right)dx=\int_0^{۱}۴x^{۲}dx+\int_0^{۱}۵x^{۳}dx$$
$$=۴\int_0^{۱}x^{۲}dx+۵\int_0^{۱}x^{۳}dx$$
$$=\left(۴*\frac{۱}{۳}x^{۳}\right)\Big|_0^{۱}+\left(۵*\frac{۱}{۴}x^{۴}\right)\Big|_0^{۱}$$
$$=\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۴}=\frac{۳۱}{۱۲}$$

روش دوم - ابتدا از عبارت $\left(۴x^{۴}+۵x^{۳}\right)$ انتگرال نا معین می گیریم و سپس مقدار آنرا پیدا می کنیم.

$$\int_0^{۱}\left(۴x^{۲}+۵x^{۳}\right)dx=\left(\frac{۴}{۳}x^{۳}+\frac{۵}{۴}x^{۴}\right)\Big|_0^{۱}=\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۴}=\frac{۳۱}{۱۲}$$

با استفاده مکرر قضایای ۱.۱۷ و ۱.۱۸ انتگرال یک چند جمله ای بدست می آوریم.

$$\int\left[C_nx^n+C_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+C_{۱}x+C_0\right]dx$$
$$=\frac{C_n}{n+۱}x^{n+۱}+\frac{c_{n-۱}}{n}x^n+\cdots+\frac{C_{۱}}{۲}x^{۲}+C_0x+C$$

مثال ۳ - انتگرا ل زیر را پیدا کنید.

$$\int_{۱}^{۲}\left(x^{۴}-۳x^{۲}+۴x-۲dx\right)$$

پاسخ

$$\int_{۱}^{۲}\left(x^{۴}-۳x^{۲}+۴x-۲dx\right)=\left[\frac{۱}{۵}x^{۵}-۳\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}\right)+۴\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)-۲x\right]\Big|_{۱}^{۲}$$
$$=\left(\frac{۱}{۵}*۳۲-۸+۸-۴\right)-\left(\frac{۱}{۵}-۱+۲-۲\right)$$
$$=\frac{۱۲}{۵}-\left(-\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۱۶}{۵}$$

با استفاده از فرمول (۳) می توان قضیه ۱.۹ یعنی خاصیت مقایسه بخش ۱.۳ به اسانی ثابت کرد.

قضیه فرعی ۱.۲۰ خاصیت مقایسه
Corollary 1.20 General Comparison Property
فرض می کنیم f و g در $[a,b]$ پیوسته باشند. و $a \le x \le b$ ، $g(x) \le f(x)$ باشد. پس
$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

اثبات
بر اساس فرض قضیه داریم
$$f(x) - g(x) \ge 0 \ , a \le x \le b$$
پس بر اساس فرمول شماره (۳) و قضیه فرعی ۱.۱۰ داریم
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ge 0$$
در نتیجه
$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$
نتیجه دیگر قضیه فرعی ۱.۲۰ این است که اگر $a \le x \le b$ ، $h(x) \le g(x) \le f(x)$ باشد ، پس

$$\int_a^b h(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \qquad (۴)$$

فرمول شماره (۴) را می توان برای پیدا کردن کران پایین و کران بالای انتگرال ها مورد استفاده قرار داد. بدون این فرمول بیشتر اوقات پیدا کردن کران پایین و کران بالای انتگرال ها مشکل است.

مثال ۴ – نشان دهید که $۲ \le \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}dx \le \frac{۸}{۳}$ است.
پاسخ
واضح است که
$$۱ \le ۱ + x^۴ \le ۱ + ۲x^۲ + x^۴ = \left(۱ + x^۲\right)^۲$$
و در نتیجه داریم
$$۱ \le \sqrt{۱ + x^۴} \le \sqrt{\left(۱ + x^۲\right)^۲} = ۱ + x^۲$$
طبق فرمول شماره (۴) نتیجه می گیریم که

$$۲ = \int_{-۱}^{۱} ۱dx \le \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}dx \le \int_{-۱}^{۱} \left(۱ + x^۲\right) dx = \left(x + \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_{-۱}^{۱} = \frac{۸}{۳}$$

چون $\sqrt{۲}\ ۲ < \frac{۸}{۳}$ است ، مثال ۴ یک کران بالای کوچک تری برای انتگرال $\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}dx$ به ما می دهد. در مثال ۳ بخش ۱.۳ مقدارکران بالای انتگرال فوق $۲\sqrt{۲}$ بدست آوردیم. بعداً خواهیم دید که حتی کران بالای کوچک تری می توانیم پیدا کنیم.

چون

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad , \quad a \le x \le b$$

است ، فرمول دیگری ازفرمول شماره (۴) بدست می آوریم.

$$-\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

لذا بر اساس تعریف قدر مطلق داریم.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (۵)$$

تمرینات ۱.۵

در تمرینات شماره ۶ – ۱ انتگرال نا معین را محاسبه کنید.

۱) $\int (۲x - ۷)dx$

۲) $\int \left(۲x^{\frac{۱}{۳}} - ۳x^{\frac{۳}{۴}} + xz^{\frac{۲}{۳}}\right) dx$

۳) $\int \left(t^۵ - \frac{۱}{t^۴}\right) dt$

۴) $\int (۲ \cos x - ۵x)dx$

۵) $\int \left(۳csc^۲x - x\right) dx$

۶) $\int (۲t+۱)^{۲} dt$

در تمرینات ۱۶ — ۷ انتگرال معین را محاسبه کنید.

۷) $\int_{-۱}^{۲} (۳x-۴)dx$

۸) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} (-۷\sin x+۳\cos x)dx$

۹) $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۲}} \left(۳x-\frac{۱}{x^{۲}}+\sin x\right)dx$

۱۰) $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} \left(۳sec^{۲}\theta+۴csc^{۲}\theta\right)d\theta$

۱۱) $\int_{۱}^{\frac{۱}{۳}} (۳t+۲)^{۳} dt$

۱۲) $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \left(\pi\sin x-۲x+\frac{۵}{x^{۲}}+۲\ \pi\right)d\,x$

۱۳) $\int_{-۱}^{۱} (۲x+۵)(۲x-۵)dx$

۱۴) $\int_{۴}^{۷} |x-۵|dx$

۱۵) $\int_{-۳}^{۴} |-۵x+۲|dx$

۱۶) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx$ اگر $f(x) = \begin{cases} sec^۲ x & \text{برای } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{۴} \\ csc^۲ & \text{برای } \frac{\pi}{۴} < x \leq \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

در تمرینات ۱۹ – ۱۷ از تابع F مشتق بگیرید ، سپس F را بر حسب یک انتگرال نا معین بنویسید.
مثلا اگر $F(x) = \cos x^۲$ باشد ، پس چون

$$\frac{d\left(\cos x^۲\right)}{dx} = -۲x \sin x^۲$$

است ، لذا

$$\int -۲x \sin x^۲ dx = \cos x^۲ + C$$

بدست می آوریم.

۱۷) $F(x) = \left(۱ + x^۲\right)^{۱۰}$

۱۸) $F(x) = x \sin x - \cos x$

۱۹) $F(x) = ۳sin^۷ x$

در تمرینات ۲۲– ۲۰ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۲۰) $f(x) = ۳x^۲ + ۴; [-۱, ۱]$

۲۱) $f(x) = ۳\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}}; [۱, ۴]$

۲۲) $f(x) = ۲ \sin x + ۳ \cos x; \left[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}\right]$

۲۳ – با استفاده از نا مساوی های $0 \leq \sin x \leq x$ برای $0 \leq x \leq ۱$, نشان دهید که
الف

$$0 \leq \int_0^۱ \sin x^۲ dx \leq \frac{۱}{۳}$$

ب

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{۶}} sin^{\frac{۳}{۲}}xdx \le \frac{۲}{۵}\left(\frac{\pi}{۶}\right)^{\frac{۵}{۲}}$$

پاسخ تمرینات ۱.۵

در تمرینات شماره ۶ – ۱ انتگرال نا معین را محاسبه کنید.

۱) $$\int (۲x - ۷)dx = x^۲ - ۷x + C$$

۲) $$\int \left(۲x^{\frac{۱}{۳}} - ۳x^{\frac{۳}{۴}} + x^{\frac{۲}{۵}}\right)dx = \frac{۳}{۲}x^{\frac{۴}{۳}} - \frac{۱۲}{۷}x^{\frac{۷}{۴}} + \frac{۵}{۷}x^{\frac{۷}{۵}} + C$$

۳) $$\int \left(t^۵ - \frac{۱}{t^۴}\right)dt = \frac{۱}{۶}t^۶ + \frac{۱}{۳t^۳} + C$$

۴) $$\int (۲\cos x - ۵x)dx = ۲\sin x - \frac{۵}{۲}x^۲ + C$$

۵) $$\int \left(۳csc^۲x - x\right)dx = -۳\cot x - \frac{۱}{۲}x^۲ + C$$

۶) $$\int (۲t+۱)^۲dt = \int \left(۴t^۲ + ۴t + ۱\right)dt = \frac{۴}{۳}t^۳ + ۲t^۲ + t + C$$

در تمرینات ۱۶ – ۷ انتگرال معین را محاسبه کنید.

۷) $$\int_{-۱}^{۲}(۳x - ۴)dx = \left(\frac{۳}{۲}x^۲ - ۴x\right)\Big|_{-۱}^{۲} = -۲ - \frac{۱۱}{۲} = -\frac{۱۵}{۲}$$

۸) $$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}(-۷\sin x + ۳\cos x)dx = (۷\cos x + ۳\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۳ - ۵\sqrt{۲}$$

۹)
$$\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۲}}\left(۳x-\frac{۱}{x^{۲}}+\sin x\right)dx=\left(\frac{۳}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{x}-\cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۲}}$$
$$=\left(\frac{۳\pi^{۲}}{۸}-\frac{۲}{\pi}\right)-\left(\frac{۳\pi^{۲}}{۳۲}-\frac{۴}{\pi}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۹\pi^{۲}}{۳۲}+\frac{۲}{\pi}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰)
$$\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}}\left(۳sec^{۲}\theta+۴csc^{۲}\theta\right)d\theta=\left(۳\tan\theta-۴\cot\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}}$$
$$=-۱-\left(۳\sqrt{۳}-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)=-۱-\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۱)
$$\int_{۱}^{\frac{۱}{۳}}(۳t+۲)^{۳}dt=\int_{۱}^{\frac{۱}{۳}}\left(۲۷t^{۳}+۵۴t^{۲}+۳۶t+۸\right)dt$$
$$=\left(\frac{۲۷}{۴}t^{۴}+۱۸t^{۳}+۱۸t^{۲}+۸t\right)\Bigg|_{۱}^{\frac{۱}{۳}}=\frac{-۱۳۶}{۳}$$

۱۲)
$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\left(\pi\sin x-۲x+\frac{۵}{x^{۲}}+۲\ \pi\right)d\,x=\left(-\pi\cos x-x^{۲}-\frac{۵}{x}+۲\ \pi x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}$$
$$=\pi+\frac{۵}{\pi}+\frac{\pi^{۲}}{۴}$$

۱۳)
$$\int_{-۱}^{۱}(۲x+۵)(۲x-۵)dx=\int_{-۱}^{۱}\left(۴x^{۲}-۲۵\right)dx=\left(\frac{۴}{۳}x^{۳}-۲۵x\right)\Bigg|_{-۱}^{۱}$$
$$=\frac{-۱۴۲}{۳}$$

۱۴) $\int_{۴}^{۷} |x-۵|dx = \int_{۴}^{۵} (۵-x)dx + \int_{۵}^{۷} (x-۵)dx$

$$= \left(۵x - \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big|_{۴}^{۵} + \left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - ۵x\right)\Big|_{۵}^{۷} = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

ملاحظه می کنید ابتدا نماد قدر مطلق را برداشتیم.

۱۵) $\int_{-۳}^{۴} |-۵x+۲|dx = \int_{-۳}^{\frac{۲}{۵}} (-۵x+۲)dx + \int_{\frac{۲}{۵}}^{۴} (۵x-۲)dx$

$$= \left(\frac{-۵}{۲}x^{۲} + ۲x\right)\Bigg|_{-۳}^{\frac{۲}{۵}} + \left(\frac{۵}{۲}x^{۲} - ۲x\right)\Bigg|_{\frac{۲}{۵}}^{۴} = \frac{۶۱۳}{۱۰}$$

۱۶) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx$ اگر $f(x) = \begin{cases} sec^{۲}x & \text{برای } 0 \le x \le \frac{\pi}{۴} \\ csc^{۲} & \text{برای } \frac{\pi}{۴} < x \le \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} sec^{۲}x dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} csc^{۲}x dx = \tan x \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} - \cot x \Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= ۱ + ۱ = ۲$$

در تمرینات ۱۹ – ۱۷ از تابع F مشتق بگیرید ، سپس F را بر حسب یک انتگرال نا معین بنویسید.
مثلا اگر $F(x) = \cos x^{۲}$ باشد ، پس چون

$$\frac{d\left(\cos x^{۲}\right)}{dx} = -۲x \sin x^{۲}$$

است ، لذا

$$\int -۲x \sin x^{۲} dx = \cos x^{۲} + C$$

بدست می آوریم.

۱۷) $F(x) = \left(۱ + x^{۲}\right)^{۱۰}$

چون $F'(x) = ۲۰x\left(۱ + x^{۲}\right)^{۹}$ است. پس

$$\int ۲۰x\left(۱+x^{۲}\right)^{۹}dx=\left(۱+x^{۲}\right)^{۱۰}+C$$

۱۸)　$F(x)=x\sin x-\cos x$

چون $F'(x)=x\cos x+۲\sin x$ است ، پس

$$\int\left(x\cos x+۲\sin x\right)dx=x sin\, x-\cos x+C$$

۱۹)　$F(x)=۳sin^{۷}x$

چون $F'(x)=۲۱\, sin^{۶}x\cos x$ است ، پس

$$\int ۲۱\, sin^{۶}x\cos x dx=۳sin^{۷}x+C$$

در تمرینات ۲۲–۲۰ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۲۰)　$f(x)=۳x^{۲}+۴;\left[-۱,۱\right]$

$$A=\int_{-۱}^{۱}\left(۳x^{۲}+۴\right)dx=\left(x^{۳}+۴x\right)\Big|_{-۱}^{۱}=۵-\left(-۵\right)=۱۰$$

۲۱)　$f(x)=۳\sqrt{x}-\dfrac{۱}{\sqrt{x}};\left[۱,۴\right]$

$$A=\int_{۱}^{۴}\left(۳\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx=\left(۲x^{\frac{۳}{۲}}-۲x^{\frac{۱}{۲}}\right)\Bigg|_{۱}^{۴}=\left(۱۶-۴\right)-\left(۲-۲\right)=۱۲$$

۲۲)　$f(x)=۲\sin x+۳\cos x;\left[\dfrac{\pi}{۴},\dfrac{\pi}{۲}\right]$

$$A=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(۲\sin x+۳\cos x\right)dx=\left(-۲\cos x+۳\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\left(0+۳\right)-\left[-۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right]=۳-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۳ – با استفاده از نا مساوی های $0 \le \sin x \le x$ برای $0 \le x \le ۱$, نشان دهید که
الف

$$0 \le \int_0^{۱} \sin x^{۲} dx \le \frac{۱}{۳}$$

چون $0 \le \sin x \le x$ است برای $0 \le x \le ۱$ پس داریم
$0 \le \sin x^{۲} \le x^{۲}$ است برای $0 \le x \le ۱$ لذا بر اساس قضیه فرعی ۱.۲۰ داریم.

$$0 \le \int_0^{۱} \left(\sin x^{۲}\right) dx \le \int_0^{۱} x^{۲} dx = \frac{۱}{۳} x^{۳} \Big|_0^{۱} = \frac{۱}{۳}$$

ب

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{۶}} sin^{\frac{۳}{۲}} x dx \le \frac{۲}{۵}\left(\frac{\pi}{۶}\right)^{\frac{۵}{۲}}$$

چون $0 \le \sin x \le x$ است برای $0 \le x \le ۱$ پس داریم
$0 \le sin^{\frac{۳}{۲}} x \le x^{\frac{۳}{۲}}$ است برای $0 \le x \le ۱$ لذا بر اساس قضیه فرعی ۱.۲۰ داریم

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{۶}} sin^{\frac{۳}{۲}} x \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{۶}} x^{\frac{۳}{۲}} \, dx = \frac{۲}{۵} x^{\frac{۵}{۲}} \Big|_0^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۲}{۵}\left(\frac{\pi}{۶}\right)^{\frac{۵}{۲}}$$

۱ .۶ ـانتگرال گیری از طریق جانشینی Integration by Substitution

در بخش قبل قضایای جمع و ضرب مشتق ها را به قضایای مربوط به انتگرال تبدیل کردیم . حالا قاعده زنجیره ای را به قضیه برای انتگرال ها تبدیل می کنیم . به خاطر بیاورید که در حساب دیفرانسیل به همین قلم ، گفتیم

$$\frac{d}{dx}g\big(f(x)\big)=g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

بکار بردن قاعده زنجیره ای در انتگرال گیری ، به همان اندازه بکار بردن آن در مشتق گیری ، مفید است. مثلا قاعده زنجیره ای به ما کمک می کند که انتگرال هایی مانند

$$\int sin^{۴} x\cos x\,dx \quad و \quad \int x\sqrt{۲x+۱}\,dx$$

را بر حسب توابعی که برای ما اشنا است ، بنویسیم.

قضیه ۱.۲۱

فرض می کنیم f و g توابعی باشند که هم $g\circ f$ و هم f' در یک بازه مانند I پیوسته باشند. اگر G یک انتگرال نا معین g در I باشد ، پس

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)dx=G\big(f(x)\big)+C \qquad (۱)$$

اثبات

چون G یک انتگرال نا معین g است ، پس $G'(x)=g(x)$ است. پس قاعده زنجیره ای می گوید

$$\frac{d}{dx}G\big(f(x)\big)=G'\big(f(x)\big)f'(x)=g\big(f(x)\big)f'(x)$$

تساوی بالا بر حسب اینتگرل نا معین می شود

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)dx=G\big(f(x)\big)+C$$

هنگامی که می خواهید فرمول شماره (۱) را بکار ببرید ، بهتر است بجای $f(x)$ بگذارید u و بجای $f'(x)dx$ بگذارید du پس خواهیم داشت

$$\int g\overbrace{\big(f(x)\big)}^{u}\overbrace{f'(x)dx}^{du}=\int g(u)du=G(u)+C=G\big(f(x)\big)+C$$

به همین خاطر ، انتگرال گیری بوسیله فرمول شماره (۱) **انتگرال گیری از طریق جانشینی** نامیده می شود.

مثال ۱ -انتگرال زیر را پید ا کنید.

$$\int ۳x^{۲}\left(x^{۳}+۵\right)^{۹}dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u=x^{۳}+۵$ باشد ، پس $du=۳x^{۲}dx$ است. پس داریم

$$\int ۳x^{۲}\left(x^{۳}+۵\right)^{۹}dx=\int \overbrace{\left(x^{۳}+۵\right)^{۹}}^{u^{۹}}\overbrace{\left(۳x^{۲}\right)dx}^{du}=\int u^{۲}du=\frac{۱}{۱۰}u^{۱۰}+C$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\left(x^{۳}+۵\right)^{۱۰}+C$$

توجه داشته باشید که u یک متغیر موقتی است و باید پس از انجام انتگرال ، متغیر اصلی را جایگزین کرد.

مثال ۲ – انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int sin^{۴}x\cos xdx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u=\sin x$ باشد ، پس $du=\cos xdx$ است. لذا

$$\int sin^{۴}x\cos xdx=\int \overbrace{(sin\,x)^{۴}}^{u^{۴}}\overbrace{\cos xdx}^{du}=\int u^{۴}du=\frac{۱}{۵}u^{۵}+C$$

$$=\frac{۱}{۵}sin^{۵}x+C$$

مثال ۳

انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{۲}\cos ۲xdx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u=۲x$ باشد ، پس $du=۲dx$ و لذا $dx=\frac{۱}{۲}du$ است.

$$\int \frac{۱}{۲}\cos ۲x dx = \int \frac{۱}{۲}\Big(\cos \overbrace{۲x}^{u}\Big)\overbrace{dx}^{\frac{۱}{۲}du} = \int \frac{۱}{۲}(\cos u)\frac{۱}{۲}du$$

$$= \frac{۱}{۴}\int \cos u du = \frac{۱}{۴}\sin u + C = \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$$

می توانیم مثال ۳ را برای پیدا کردن مقدار $\int cos^۲ x dx$ بکار بریم. البته با استفاده از همانی مثلثاتی یعنی

$$cos^۲ x = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲x$$

لذا خواهیم داشت.

$$\int cos^۲ x dx = \int\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲x\right)dx = \int \frac{۱}{۲}dx + \int \frac{۱}{۲}\cos ۲x dx$$

$$= \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$$

پس نتیجه می گیریم

$$\boxed{\int cos^۲ x dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۲)}$$

به همین طریق

$$\boxed{\int sin^۲ x dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۳)}$$

دو فرمول بالا در طول این کتاب بکار می آید.

مثال ۴

انتگر زیر را پیدا کنید.

$$\int t\sin\left(t^۲\right)dt$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = t^۲$ باشد ، پس $du = ۲tdt$ است ، لذا

$$\int t\sin\left(t^{۲}\right)dt=\int \overbrace{\sin\left(t^{۲}\right)}^{\sin u}\overbrace{tdt}^{\frac{۱}{۲}du}=\int(\sin u)\frac{۱}{۲}du$$

$$=-\frac{۱}{۲}\cos u+C=-\frac{۱}{۲}\cos\left(t^{۲}\right)+C$$

مثال ۵

انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int x\sqrt{۲x+۱}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u=۲x+۱$ باشد ، پس $du=۲dx$ است.

$$\int x\sqrt{۲x+۱}\,dx=\int x\overbrace{\sqrt{۲x+۱}}^{u^{\frac{۱}{۲}}}\overbrace{dx}^{\frac{۱}{۲}du}$$

لازم است x را بر حسب u پیدا کنیم. از تساوی $u=۲x+۱$ نتیجه می گیریم که

$$x=\frac{۱}{۲}(u-۱)$$

لذا

$$\int x\sqrt{۲x+۱}\,dx=\overbrace{x}^{\frac{۱}{۲}(u-۱)}\overbrace{\sqrt{۲x+۱}}^{u^{\frac{۱}{۲}}}\overbrace{dx}^{\frac{۱}{۲}du}$$

$$=\int\frac{۱}{۲}(u-۱)u^{\frac{۱}{۲}}*\frac{۱}{۲}du=\frac{۱}{۴}\int\left(u^{\frac{۳}{۲}}-u^{\frac{۱}{۲}}\right)du$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)+C$$

$$=\frac{۱}{۱۰}(۲x+۱)^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۱}{۶}(۲x+۱)^{\frac{۳}{۲}}+C$$

اغلب اوقات، بیش از یک جانشینی کار می کند. مثلا در مثال ۵ می توانستیم فرض کنیم

$u=\sqrt{2x+1}$ باشد، پس $du=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\frac{1}{u}dx$ و لذا $udu=dx$ است و در نتیجه

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx=\int \overbrace{x}^{\frac{1}{2}(u^2-1)}\ \overbrace{\sqrt{2x+1}}^{u}\ \overbrace{dx}^{udu}$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)u^2du=\int\left(\frac{1}{2}u^4-\frac{1}{2}u^2\right)du$$

$$=\frac{1}{10}u^5-\frac{1}{6}u^3+C$$

$$=\frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

مثال ۶

انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int x^5\sqrt{x^2-1}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u=\sqrt{x^2-1}$ باشد ، پس $du=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ است و $udu=xdx$

حالا یک x از x^5 فاکتور می گیریم بطوری که xdx که مساوی udu در انتگرال است ، بدست آید.

$$\int x^5\sqrt{x^2-1}\,dx=x^4\ \overbrace{\sqrt{x^2-1}}^{u}\ \overbrace{xdx}^{udu}$$

حالا لازم است x^4 را بر حسب u بنویسیم.

$$u=\sqrt{x^2-1}\ \Rightarrow\ u^2=x^2-1\ \Rightarrow\ x^2=u^2+1\ \Rightarrow\ x^4=\left(u^2+1\right)^2$$

لذا

$$\int x^5\sqrt{x^2-1}\,dx=\ \overbrace{x^4}^{(u^2+1)^2}\ \overbrace{\sqrt{x^2-1}}^{u}\ \overbrace{xdx}^{udu}$$

$$= \int \left(u^{۲} + ۱\right)^{۲} u * u du$$
$$= \int \left(u^{۶} + ۲u^{۴} + u^{۲}\right) du = \frac{۱}{۷}u^{۷} + \frac{۲}{۵}u^{۵} + \frac{۱}{۳}u^{۳} + C$$
$$= \frac{۱}{۷}\left(\sqrt{x^{۲} - ۱}\right)^{۷} + \frac{۲}{۵}\left(\sqrt{x^{۲} - ۱}\right)^{۵} + \frac{۱}{۳}\left(\sqrt{x^{۲} - ۱}\right)^{۳} + C$$

جانشینی برای انتگرال های معین Substitution with Definite Integrals

فرض کنید می خواهیم انتگرال معینی به شکل $\int_a^b g(f(x))f'(x)dx$ را حساب کنیم. با استفاده از فرمول شماره (۱) و قضیه اساسی حسابان ، داریم

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = G(f(x))\Big|_a^b = G(f(b)) - G(f(a)) \quad (۴)$$

اما ، چون G یک انتگرال نا معین g است ، پس داریم

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du = G(u)\Big|_{f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)) \quad (۵)$$

از فرمول های (۴) و (۵) نتیجه می گیریم که

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du \quad (۶)$$

پس برای محاسبه انتگرال های معین به شکل $\int_a^b g(f(x))f'(x)dx$ دو راه یا دو متد در اختیار داریم. یکی از طریق جانشینی و دیگری استفاده از فرمول (۶) که به **فرمول تغییر متغیر** موسوم است.

فرمول تغییر متغیر Change of Variable Formula

مثال ۷

ابتگرل زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{۱} \frac{x^{۵}}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}} dx$$

پاسخ

برای روش روش اول ، ابتدا انتگرال نا معین $\int \frac{x^{۵}}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}} dx$ را پیدا می کنیم و سپس مقدار آنرا بین صفر و یک حسآب می کنیم. پس فرض می کنیم $u = x^{۶}+۱$ باشد ، پس $du = ۶x^{۵}dx$ است. لذا

$$\int \frac{x^{۵}}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}} dx = \int \overbrace{\frac{۱}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}}}^{\frac{۱}{u^{۳}}} \overbrace{x^{۵}dx}^{\frac{۱}{۶}du} = \int \frac{۱}{u^{۳}} * \frac{۱}{۶} du$$

$$= \frac{۱}{۶}\left(-\frac{۱}{۲} * \frac{۱}{u^{۲}}\right) + C = -\frac{۱}{۱۲} * \frac{۱}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۲}} + C$$

در نهایت

$$\int_0^{۱} \frac{x^{۵}}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}} dx = -\frac{۱}{۱۲} * \frac{۱}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۲}}\Bigg|_0^{۱} = -\frac{۱}{۱۲} * \frac{۱}{۴} - \left(-\frac{۱}{۱۲}\right) = \frac{۱}{۱۶}$$

برای روش دوم همان جانشینی را بکار می بریم ، اما همراه با تغییر حدود انتگرال

چون $u = x^{۶}+۱$ است ، پس

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است و اگر $x = ۱$ باشد ، پس $u = ۲$ است. در نتیجه

$$\int_0^{۱} \frac{x^{۵}}{\left(x^{۶}+۱\right)^{۳}} dx = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{u^{۳}} * \frac{۱}{۶} du = \frac{۱}{۶}\left(-\frac{۱}{۲} * \frac{۱}{u^{۲}}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۶}\left(-\frac{۱}{۸}\right) - \frac{۱}{۶}\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۱۶}$$

تمرینات ۱.۶

در تمرینات ۷ ــ ۱ مقدار انتگرال را با استفاده از جانشین داده شده پیدا کنید.

۱) $\int \sqrt{۴x-۵}\,dx; u=۴x-۵$

۲) $\int \cos \pi x dx; u=\pi x$

۳) $\int x\cos x^{۲} dx; u=x^{۲}$

۴) $\int cos^{-۴} t \sin t dt; u=\cos t$

۵) $\int \frac{۲t-۳}{\left(t^{۲}-۳t+۱\right)^{\frac{۷}{۲}}} dt; u=t^{۲}-۳t+۱$

۶) $\int (x-۱)\sqrt{x+۱}\,dx; v=x+۱$

۷) $\int \sec x\tan x\sqrt{۳+\sec x}\,dx; u=۳+\sec x$

در تمرینات ۱۸ ــ ۸ مقدار انتگرال را پید کنید.

۸) $\int ۳x^{۲}\left(x^{۳}+۱\right)^{۱۲} dx$

۹) $\int (۲x+۳)\left(x^{۲}+۳x+۴\right)^{۵} dx$

۱۰) $\int \sqrt{۳x+۷}\,dx$

۱۱) $\int (۱+۴x)\sqrt{۱+۲x+۴x^۲}\ dx$

۱۲) $\int_{-۱}^{۳} \sin \pi x dx$

۱۳) $\int sin^۶ t \cos t dt$

۱۴) $\int \sqrt{\sin ۲z} \cos ۲z dz$

۱۵) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin z}{cos^۲ z} dz$

۱۶) $\int \frac{۱}{\sqrt{z}} sec^۲ \sqrt{z}\, dz$

۱۷) $\int w \left(\sqrt{w^۲+۱} + \frac{۱}{\sqrt{w^۲+۱}} \right) dw$

۱۸) $\int_{۱}^{۸} x^{\frac{-۲}{۳}} \sqrt{۱+۴x^{\frac{۱}{۳}}}\, dx$

در تمرینا ت ۲۰ ــ ۱۹ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۱۹) $f(x) = \sqrt{x+۱}; [0, ۳]$

۲۰) $f(x) = \frac{x}{(x^۲+۱)^۲}; [۱, ۲]$

پاسخ تمرینات ۱.۶

در تمرینات ۷ ـ ۱ مقدار انتگرال را با استفاده از جانشین داده شده پیدا کنید.

۱) $\int \sqrt{۴x - ۵}\, dx; u = ۴x - ۵$

اگر $u = ۴x - ۵$ باشد ، پس $du = ۴dx$ یا $\frac{۱}{۴} du = dx$ است.

$$\int \sqrt{۴x - ۵}\, dx = \int \sqrt{u} \frac{۱}{۴} du = \frac{۱}{۴} \int \sqrt{u}\; du = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}}\right) + C = \frac{۱}{۶}(۴x - ۵)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

۲) $\int \cos \pi x dx; u = \pi x$

اگر $u = \pi x$ باشد ، پس $du = \pi dx$ است. یا $\frac{۱}{\pi} du = dx$

$$\int \cos \pi x dx = \int (\cos u) \frac{۱}{\pi} du = \frac{۱}{\pi} \int \cos u du = \frac{۱}{\pi} \sin u + C = \frac{۱}{\pi} \sin \pi x + C$$

۳) $\int x \cos x^۲ dx; u = x^۲$

اگر $u = x^۲$ باشد ، پس $du = ۲x dx$ است. یا $\frac{۱}{۲} du = x dx$

$$\int x \cos x^۲ dx = \int (\cos u) \frac{۱}{۲} du = \frac{۱}{۲} \int \cos u\, du = \frac{۱}{۲} \sin u + C = \frac{۱}{۲} \sin x^۲ + C$$

۴) $\int cos^{-۴} t \sin t dt; u = \cos t$

اگر $u = \cos t$ باشد ، پس $du = -\sin t\, dt$ است.

$$\int cos^{-۴} t \sin t dt = \int u^{-۴}(-۱) du = \frac{۱}{۳} u^{-۳} + C = \frac{۱}{۳} cos^{-۳} t + C$$

۵) $\int \frac{۲t - ۳}{(t^۲ - ۳t + ۱)^{\frac{۷}{۲}}} dt; u = t^۲ - ۳t + ۱$

اگر $u = t^۲ - ۳t + ۱$ باشد ، پس $du = (۲t - ۳) dt$ است.

$$\int \frac{۲t-۳}{\left(t^۲-۳t+۱\right)^{\frac{۷}{۲}}}dt=\int \frac{۱}{u^{\frac{۷}{۲}}}du=\int u^{\frac{-۷}{۲}}du=-\frac{۲}{۵}u^{-\frac{۵}{۲}}+C$$

$$=-\frac{۲}{۵}\frac{۱}{\left(t^۲-۳t+۱\right)^{\frac{۵}{۲}}}+C$$

۶) $\int (x-۱)\sqrt{x+۱}\,dx;\ v=x+۱$

اگر $v=x+۱$ باشد ، پس $dv=dx$ است. و $x=v-۱$ پس $x-۱=v-۲$ است. لذا

$$\int (x-۱)\sqrt{x+۱}\,dx=\int (v-۲)\sqrt{v}\,dv=\left(v^{\frac{۳}{۲}}-۲v^{\frac{۱}{۲}}\right)dv$$

$$=\frac{۲}{۵}v^{\frac{۵}{۲}}-۲\left(\frac{۲}{۳}v^{\frac{۳}{۲}}\right)+C=\frac{۲}{۵}(x+۱)^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۴}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}+C$$

۷) $\int \sec x\tan x\sqrt{۳+\sec x}\,dx;\ u=۳+\sec x$

اگر $u=۳+\sec x$ باشد ، پس $du=\sec x\tan x\,dx$ است.

$$\int \sec x\tan x\sqrt{۳+\sec x}\,dx=\int \sqrt{u}\,du=\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}+C=\frac{۲}{۳}(۳+\sec x)^{\frac{۳}{۲}}+C$$

در تمرینات ۱۸ ـ ۸ مقدار انتگرال را پید کنید.

۸) $\int ۳x^۲\left(x^۳+۱\right)^{۱۲}dx$

فرض می کنیم $u=x^۳+۱$ باشد ، پس $du=۳x^۲dx$ است.

$$\int ۳x^۲\left(x^۳+۱\right)^{۱۲}dx=\int u^{۱۲}du=\frac{۱}{۱۳}u^{۱۳}+C=\frac{۱}{۱۳}\left(x^{۳+۱}\right)^{۱۳}+C$$

۹) $\int (۲x+۳)\left(x^۲+۳x+۴\right)^{۵}dx$

فرض می کنیم $u=x^۲+۳x+۴$ باشد ، پس $du=(۲x+۳)dx$ است.

$$\int (۲x+۳)\left(x^{۲}+۳x+۴\right)^{۵}dx=\int u^{۵}du=\frac{۱}{۶}u^{۶}+C=\frac{۱}{۶}\left(x^{۲}+۳x+۴\right)^{۶}+C$$

۱۰) $\int \sqrt{۳x+۷}\,dx$

فرض می کنیم $u=۳x+۷$ باشد ، پس $du=۳dx$ است. و یا $\frac{۱}{۳}du=dx$

$$\int \sqrt{۳x+۷}\,dx=\int u^{\frac{۱}{۲}}*\frac{۱}{۳}du=\frac{۱}{۳}\int u^{\frac{۱}{۲}}du=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)+C=\frac{۲}{۹}(۳x+۷)^{\frac{۳}{۲}}+C$$

۱۱) $\int (۱+۴x)\sqrt{۱+۲x+۴x^{۲}}\,dx$

فرض می کنیم $u=۱+۲x+۴x^{۲}$ باشد ، پس $du=۲+۸x=۲(۱+۴x)dx$ است. یا

$$\frac{۱}{۲}du=(۱+۴x)dx$$

$$\int (۱+۴x)\sqrt{۱+۲x+۴x^{۲}}\,dx=\int u^{\frac{۱}{۲}}*\frac{۱}{۲}du=\frac{۱}{۲}\int u^{\frac{۱}{۲}}du$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)+C=\frac{۱}{۳}\left(۱+۲x+۴x^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}+C$$

۱۲) $\int_{-۱}^{۳}\sin \pi x dx$

فرض می کنیم $u=\pi x$ باشد ، پس $du=\pi dx$ است. اگر $x=-۱$ باشد ، پس $u=-\pi$ است و اگر $x=۳$ باشد ، پس $u=۳\pi$ است.

$$\int_{-۱}^{۳}\sin \pi x dx=\int_{-\pi}^{۳\pi}(\sin u)*\frac{۱}{\pi}du=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۳\pi}\sin u du$$

$$=\frac{۱}{\pi}(-\cos u)\Big|_{-\pi}^{۳\pi}=\frac{۱}{\pi}\left[-(-۱)+(-۱)\right]=0$$

۱۳) $\int sin^{۶} t \cos t dt$

فرض می کنیم $u = \sin t$ باشد ، پس $du = \cos t dt$ است.

$$\int sin^{۶} t \cos t dt = \int u^{۶} du = \frac{۱}{۷} u^{۷} + C = \frac{۱}{۷} sin^{۷} t + C$$

۱۴) $\int \sqrt{\sin ۲z} \cos ۲z dz$

فرض می کنیم $u = \sin ۲z$ باشد ، پس $du = ۲ \cos ۲z dz$ است.

$$\int \sqrt{\sin ۲z} \cos ۲z dz = \int u^{\frac{۱}{۲}} * \frac{۱}{۲} du = \frac{۱}{۲} \int u^{\frac{۱}{۲}} du = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}}\right) + C$$

$$= \frac{۱}{۳}(\sin ۲z)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

۱۵) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin z}{cos^{۲} z} dz$

فرض می کنیم $u = \cos z$ باشد .پس $du = -\sin z dz$ است. اگر $z = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است و اگر $z = \frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس $u = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin z}{cos^{۲} z} dz = \int_{۱}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{۱}{u^{۲}} (-۱) du = \frac{۱}{u}\Bigg|_{۱}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} - ۱ = \sqrt{۲} - ۱$$

۱۶) $\int \frac{۱}{\sqrt{z}} sec^{۲} \sqrt{z}\, dz$

فرض می کنیم $u = \sqrt{z}$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۲} \frac{۱}{\sqrt{z}} dz$ است. و یا $۲du = \frac{۱}{\sqrt{z}} dz$ است.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{z}} sec^{۲} \sqrt{z}\, dz = \int \left(sec^{۲} u\right)(۲)\, du = ۲ \int sec^{۲} u\, du$$

$$= ۲ \tan u + C = ۲ \tan z + C$$

۱۷) $\int w\left(\sqrt{w^{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{w^{۲}+۱}}\right)dw$

فرض می کنیم $u = w^{۲}+۱$ باشد ، پس $du = ۲wdw$ است.

$$\int w\left(\sqrt{w^{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{w^{۲}+۱}}\right)dw = \int\left(\sqrt{u}+\frac{۱}{\sqrt{u}}\right)*\frac{۱}{۲}du$$
$$= \frac{۱}{۲}\int\left(\sqrt{u}+\frac{۱}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}+۲u^{\frac{۱}{۲}}\right)+C$$
$$= \frac{۱}{۳}\left(w^{۲}+۱\right)^{\frac{۳}{۲}}+\left(w^{۲}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}}+C$$

۱۸) $\int_{۱}^{۸} x^{\frac{-۲}{۳}}\sqrt{۱+۴x^{\frac{۱}{۳}}}\,dx$

فرض می کنیم $u = ۱+۴x^{\frac{۱}{۳}}$ باشد ، پس $du = \frac{۴}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}dx$ است. اگر $x = ۱$ باشد ، پس $u = ۵$ است و اگر $x = ۸$ باشد ، پس $u = ۹$ است.

$$\int_{۱}^{۸} x^{\frac{-۲}{۳}}\sqrt{۱+۴x^{\frac{۱}{۳}}}\,dx = \int_{۵}^{۹}\sqrt{u}*\frac{۳}{۴}du = \frac{۳}{۴}\int_{۵}^{۹}\sqrt{u}du$$
$$= \frac{۳}{۴}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_{۵}^{۹} = \frac{۱}{۲}\left(۲۷-۵\sqrt{۵}\right)$$

در تمرینا ت ۲۰ — ۱۹ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۱۹) $f(x) = \sqrt{x+۱}; [0,۳]$

$$A = \int_0^{۳} \sqrt{x+۱}\, dx$$

فرض می کنیم $u = x + ۱$ باشد ، پس $du = dx$ است. اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است و اگر $x = ۳$ باشد ، پس $u = ۴$ است. لذا

$$A = \int_0^{۳} \sqrt{x+۱}\, dx = \int_{۱}^{۴} \sqrt{u}\, du = \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} \Big|_{۱}^{۴} = \frac{۲}{۳}\left(۴^{\frac{۳}{۲}} - ۱^{\frac{۳}{۲}}\right) = \frac{۱۴}{۳}$$

۲۰) $f(x) = \frac{x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}; [۱,۲]$

$$A = \int_{۱}^{۲} \frac{x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}} dx$$

فرض می کنیم $u = x^{۲} + ۱$ باشد ، پس $du = ۲x\, dx$ است و یا $\frac{۱}{۲} du = x dx$

اگر $x = ۱$ باشد ، پس $u = ۲$ است و اگر $x = ۲$ باشد ، پس $u = ۵$ است.

$$A = \int_{۱}^{۲} \frac{x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}} dx = \int_{۲}^{۵} \frac{۱}{u^{۲}} * \frac{۱}{۲} du = \frac{۱}{۲} \int_{۲}^{۵} \frac{۱}{u^{۲}} du$$

$$= -\frac{۱}{۲}\frac{۱}{u}\Big|_{۲}^{۵} = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۲۰}$$

۱.۷ - انتگرال های توابع لگاریتمی The Logarithm as an Integral

قضیه فرعی ۱.۱۳ بخش ۱.۴ به ما می گوید اگر f در یک بازه I پیوسته باشد ، پس یک انتگرال نا معین " یعنی یک ضد مشتق " بنام G برای f در I وجود دارد ، با تعریف زیر

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad ، \quad x \epsilon I$$

در فرمول بالا a هر عددی در I می تواند باشد. این گفته صحیح است ، خواه بتوانیم یک فرمول ساده برای G پیدا کنیم و یا نتوانیم.
تابع زیر را ملاحظه کنید.

$$f(x) = \frac{۱}{x} = x^{-۱}$$

گر چه f پیوسته است ، اما انتگرال نا معین آن یا به عبارت دیگر ، ضد مشتق آن بوسیله یک فرمول ساده بیان نشده است. در حقیقت ۱− تنها عدد گویا است که برای آن نمی توانیم بنویسیم

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} + C$$

به جدولی که در بخش ۱.۵ آوردیم ، مراجعه کنید. اما قضیه اساسی حسابان ضمانت می‌کند که در هر بازه ای که شامل صفر نباشد ، یک انتگرال نا معین و یا یک ضد مشتق برای $\frac{۱}{x}$ وجود دارد.می دانید چرا بازه نباید شامل صفر باشد ؟ واضح است. $\frac{۱}{0}$ تعریف شده نیست.

یاد آوری – در کتاب کامل جبر, به همین قلم ، گفتیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد مثبت عبارت است از مجموع لگاریتم های آن دو عدد. یعنی

$$log_b(xy) = log_b(x) + log_b(y)$$

تعریف ۱.۲۲ لگاریتم طبیعی **The Natural Logarithm** تابعی است تعریف شده در بازه $(0,\infty)$بوسیله فرمول زیر.

$$\ln x = \int_۱^x \frac{۱}{t} dt$$

نماد دیگری برای لگاریتم طبیعی $\log x$ است.
چون

$$\int_۱^۱ \frac{۱}{t} dt = 0$$

است. پس طبق تعریف لگاریتم طبیعی خواهیم داشت

$$\boxed{\ln ۱ = 0 \qquad (۱)}$$

از طرف دیگر بر اساس قضیه فرعی ۱.۱۳ بخش ۱.۴ داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\int_۱^x \frac{۱}{t}dt\right) = \frac{۱}{x}$$

است. پس $\ln x$ یک تابع مشتق پذیر است با

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{۱}{x} \qquad (۲)}$$

چون $\frac{۱}{x} > 0$ است برای $x > 0$ پس نتیجه می گیریم که $\ln x$ مطلقا صعودی است. پس شکل انتگرال نا معین شماره (۲) مطابق زیر است.

$$\boxed{\int \frac{۱}{x} = \ln x + C \qquad (۳)}$$

مطلقا صعودی Strictly Increasing

مثال ۱- انتگرال زیر را بر حسب لگاریتم حساب کنید.

$$\int_۲^۶ \frac{۱}{x}dx$$

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۳) داریم

$$\int_۲^۶ \frac{۱}{x}dx = \ln x \Big|_۲^۶ = \ln ۶ - \ln ۲$$

مثال ۲- نشان دهید که $\ln ۴ > ۱$ است.

پاسخ

بر اساس تعریف ۱.۲۲ و قضیه ۱.۸ بخش ۱.۳ و خاصیت مقایسه داریم.

$$\ln ۴ = \int_۱^۴ \frac{۱}{t} dt = \int_۱^۲ \frac{۱}{t} dt + \int_۲^۳ \frac{۱}{t} dt + \int_۳^۴ \frac{۱}{t} dt$$

$$\geq \frac{۱}{۲}(۲-۱) + \frac{۱}{۳}(۳-۲) + \frac{۱}{۴}(۴-۳) \geq \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} > ۱$$

هر کدام از جمله های جمع بالا , مساحت مستطیل های زیر نمودار است. مثلا $\frac{۱}{۲}(۲-۱)$ مساحت اولین مستطیل سمت چپ است و $\frac{۱}{۴}(۴-۳)$ مساحت آخرین مستطیل سمت راست است.

شکل A

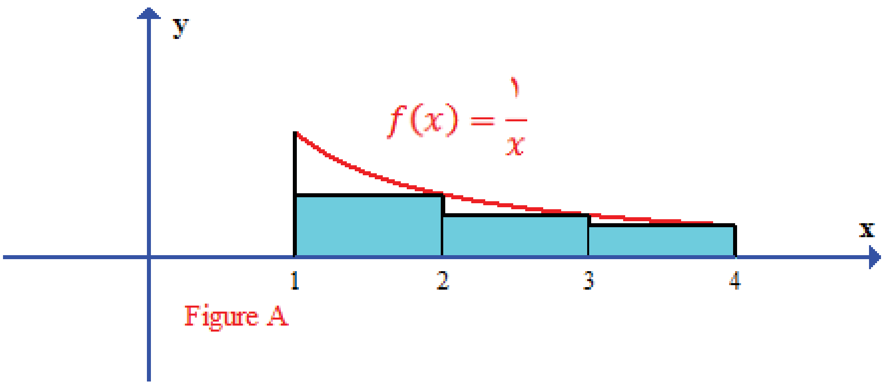


Figure A

چون $\ln ۱ = 0$ است ، و $\ln ۴ > ۱$ و چون $\ln x$ مشتق پذیر است و در نتیجه پیوسته است ، پس بر اساس قضیه مقدار میانی ، یک عدد ، بنا م e ، بین یک و چهار وجود دارد بطوری که

$$\boxed{\ln e = ۱}$$

چون تابع $\ln x$ مطلقا صعودی است ، پس e منحصر به فرد است. این عدد گویا نیست. و تقریبا مساوی است با $2.7182881 \cdots$

نماد e اولین مرتبه توسط ریاضی دان سویسی بنام لئونارد ایلر Leonhard Euler انتخاب شد.

این عدد در ریاضیات جای بخصوصی دارد. در مورد این عدد باز هم صحبت خواهیم کرد.

حال ثابت می کنیم که لگاریتم طبیعی حاصل ضرب دو عدد مثبت ، مساوی است با مجموع لگاریتم های طبیعی آن دو عدد.

قضیه ۱.۲۳ قانون لگاریتم ها Theorem 1.23 Law of Logarithms

برای تمام اعداد $b > 0$ و $c > 0$ داریم.

$$\ln bc = \ln b + \ln c$$

اثبات

عدد $b > 0$ ثابت نگاه می داریم , برای هر عددی مانند $x > 0$ فرض می کنیم

$$g(x) = \ln bx$$

باشد. طبق قاعده زنجیره ای

$$g'(x) = \left(\frac{۱}{bx}\right) b = \frac{۱}{x}$$

پس g و $\ln x$ یک مشتق دارند. طبق قضیه ۳.۳.۱ بخش ۳.۳ از کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم

قضیه ۳.۳.۱

الف - فرض می کنیم f در یک بازه I پیوسته باشد. اگر برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f'(x) = 0$$

پس f در I یک مقدار ثابت است.

ب - فرض می کنیم f و g در بازه I پیوسته باشند. اگر برای هر نقطه x در I داشته باشیم

$$f'(x) = g'(x)$$

پس $f - g$ یک عدد ثابت است. به عبارت دیگر ، یک عدد ثابت مانند c وجود دارد ، بطوری که برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f(x) = g(x) + C$$

این دو تابع در یک عدد ثابت C با هم تفاوت دارند. یعنی

$$\ln bx = \ln x + C$$

اگر در تساوی بالا بجای x بگذاریم یک و با توجه به این حقیقت که $\ln ۱ = 0$ است ، پس داریم

$$\ln b = \ln ۱ + C = C$$

در نتیجه

$$\ln bx = \ln x + \ln b$$

اگر $x = c$ فرض کنیم ، نتیجه ای که می خواستیم ، بدست می آید ، یعنی

$$\ln bc = \ln b + \ln c$$

خواص لگاریتم های زیر در حسابان نقش دارند.

$$\ln b^r = r \ln b \quad, b > 0 \ ، \ r\epsilon\mathbb{Q} \qquad (۴)$$

$$\ln \frac{۱}{b} = -\ln b \qquad (۵)$$

$$\ln \frac{b}{c} = \ln b - \ln c \qquad b ، \ c > 0 \qquad (۶)$$

یاد آوری - $\mathbb{Q}$ نماد اعداد گویا است.

با استفاده از فرمول (۶) می توانیم پاسخ مثال ۱ را ساده کنیم. یعنی خواهیم داشت.

$$\ln ۶ - \ln ۲ = \ln \frac{۶}{۲} = \ln ۳$$

پس

$$\int_{۲}^{۶} \frac{۱}{x} dx = \ln ۳$$

حالا نمودار تابع لگاریتم طبیعی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم. اولا ، طبق فرمول (۱) می دانیم که $\ln ۱ = 0$ است. و طبق فرمول (۲) داریم.

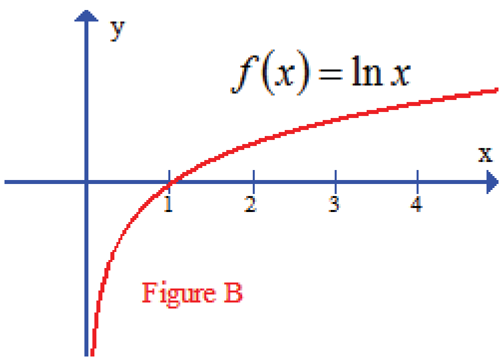
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{۱}{x} > 0$$

از تساوی بالا ، نتیجه می شود که

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}} \ln x = -\frac{۱}{x^{۲}} < 0$$

لذا ، همان طور که قبلا گفتیم ، $\ln x$ مطلقا صعودی است و چون مشتق مرتبه دوم آن منفی است ، پس نمودار $\ln x$ در بازه $(0, \infty)$ تعقر به طرف پایین دارد. شکل B می توان ثابت کرد

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$



اگر f یک تابع مثبت مشتق پذیر باشد ، پس با استفاده از قاعده زنجیره ای نتیجه می شود که

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{۱}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (۷)}$$

مثال ۳ ــ مشتق زیر را پیدا کنید.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^{۲}+x\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

پاسخ

با استفاده از فرمول (۴) و سپس فرمول (۷) داریم.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^{۲}+x\right)^{\frac{۱}{۳}} \overset{(۴)}{\cong} \frac{d}{dx}\left[\frac{۱}{۳}\ln\left(x^{۲}+x\right)\right] \overset{(۷)}{\cong} \frac{۱}{۳}*\frac{۱}{x^{۲}+x}*\frac{d}{dx}\left(x^{۲}+x\right)$$

$$=\frac{۱}{۳}*\frac{۱}{x^{۲}+x}(۲x+۱)=\frac{۲x+۱}{۳\left(x^{۲}+x\right)}$$

حالا نمودار تابعی که بر حسب لگاریتم ، تعریف شده است ، رسم می کنیم.

مثال ۴ - فرض کنید $f(x)=\ln\left(۱-x^{۲}\right)$ باشد. نمودار f را رسم کنید.

پاسخ - دامنه تابع f شامل تمام x ها است به شرطی که $۱-x^{۲}>0$ باشد. یا به عبارت دیگر ، تمام x ها در بازه $(-۱,۱)$. چون مشتق f داریم

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۱-x^{۲}}$$

است. پس f یک نقطه بحرانی در صفر دارد.

عدد c در دامنه f را یک **نقطه بحرانی Critical Point** تابع f می نامیم ، اگر یا $f'(c)=0$ باشد و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد "کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم "

$$f'(0)=\frac{-۲(0)}{۱-0^{۲}}=0$$

علاوه بر این ، مشتق مرتبه دوم f داریم.

$$f''(x)=\frac{(-۲)\left(۱-x^{۲}\right)-(-۲x)(-۲x)}{\left(۱-x^{۲}\right)^{۲}}=\frac{-۲\left(۱+x^{۲}\right)}{\left(۱-x^{۲}\right)^{۲}}$$

ملاحظه می کنید که مشتق مرتبه دوم منفی است برای تمام x ها در بازه $(-۱,۱)$ ، پس $f(0)=0$ مقدارماکسیمم f در بازه $(-۱,۱)$ است ،

تابع f یک مقدار ماکسیمم موضعی در c دارد . اگر $f'(c)=0$ و f' از مثبت به منفی تغییر می کند. یا $f'(c)=0$ است و $f''(c)<0$ است. " کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم "

و نمودار در این بازه تعقر به طرف پایین دارد

نمودار f در بازه باز I تعقر به پایین دارد. اگر $f''(x)<0$ است برای تمام x ها در I "کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم "

و در نهایت چون

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\infty$$

است ، پس مجانب عمودی در $x = ۱$ و $x = -۱$ دارد.

f یک مجانب عمودی $x = c$ دارد. اگر $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$
"کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم "

با این اطلاعات می توانیم نمودار را رسم کنیم. شکل C

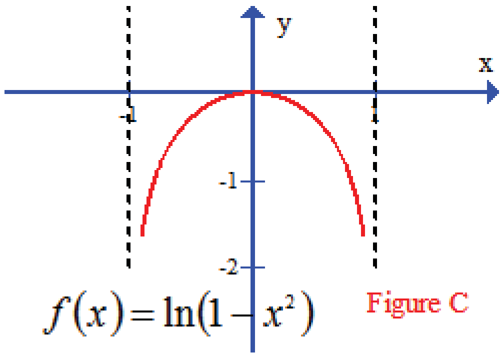


Figure C

اگر خواننده محترم دلیل مطالب گفته شده بالا را نمی داند ، باید به کتاب حساب دیفرانسیل آرمان توسط این قلم ، مراجعه نماید. فرض بر این است که استفاده کنندگان این کتاب و هر کتاب دیگری ، مقدمات لازم را بدانند. لازمه درک حساب دیفرانسیل ، دانستن جبر و مثلثات است. لازمه درک انتگرال ، دانستن حد و مشتق است. پس لازم است در صورت لزوم به کتاب کامل جبر و حساب دیفرانسیل آرمان توسط این قلم مراجعه شود.

چون دامنه تابع $\ln x$ بازه $(0,\infty)$ است و دامنه $\ln(-x)$ بازه $(-\infty,0)$ است ، پس تابع $\ln|x|$ که معادل $\ln(-x)$ است در $(-\infty,0)$ و معادل $\ln x$ است در $(0,\infty)$ لذا این مطلب فرمول زیر را به ما می دهد.

$$\boxed{\int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + C \qquad (۸)}$$

مثال ۵ - انتگرال $\int_{-۸}^{-۷} \frac{۱}{x}dx$ را بر حسب لگاریتم بنویسید.

پاسخ

طبق فرمول (۸) داریم.

$$\int_{-۸}^{-۷} \frac{۱}{x}dx = \ln|x|\Big|_{-۸}^{-۷} = \ln|-۷| - \ln|-۸| = \ln ۷ - \ln ۸ = \ln\frac{۷}{۸}$$

حالا می خواهیم مقدار انتگرال زیر را پیدا کنیم.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

فرض می کنیم $u = f(x)$ و $du = f'(x)dx$ پس طبق فرمول (۸) داریم.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \overbrace{\frac{۱}{f(x)}}^{\frac{۱}{u}} \overbrace{f'(x)dx}^{du} = \int \frac{۱}{u}du \overset{(۸)}{=} \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

پس فرمول زیر بدست می آوریم.

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \qquad (۹)}$$

لزومی ندارد فرمول (۹) را حفظ کنید. به خاطر بیاورید که برای پیدا کردن انتگرالی مانند (۹) باید به قاعده جانشینی فکر کنید و $u = f(x)$ قرار دهید

مثال ۹ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{x^۴}{x^۵ + ۱}dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = x^۵ + ۱$ باشد ، پس $du = ۵x^۴dx$ است و یا $\frac{۱}{۵}du = x^۴dx$ است.

$$\int \frac{x^۴}{x^۵ + ۱}dx = \int \overbrace{\frac{۱}{x^۵ + ۱}}^{\frac{۱}{u}} \overbrace{x^۴dx}^{\frac{۱}{۵}du} = \int \frac{۱}{u} * \frac{۱}{۵}du$$

$$= \frac{۱}{۵}\ln|u| + C = \frac{۱}{۵}\ln\left|x^۵ + ۱\right| + C$$

فرمول (۹) را می توانیم برای پیدا کردن انتگرال های چهار تابع مثلثاتی دیگر که تا کنون پیدا نکرده ایم ، بکار ببریم. برای پیدا کردن $\int \tan x dx$ میدانیم که

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

چون مخرج کسر بالا , مشتق صورت است ، پس می توانیم فرمول (۹) را بکار ببریم.

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x dx$ است. لذا

$$\int \tan x dx = \int \overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{\frac{1}{u}} \overbrace{\sin x dx}^{(-1)du} = \int \frac{1}{u}(-1)du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\boxed{\int \tan x dx = -\ln[\cos x] + C}$$

برای پیدا کردن $\int \cot x\, dx$ هم به همین طریق عمل می کنیم . اما پیدا کردن $\int \sec x dx$ و $\int \csc x dx$ به این اسانی نیست. برای بدست آوردن $\int \sec x dx$ به خاطر بیاورید که

$$\frac{d}{dx}\tan x = sex^{2} x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

پس

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x \tan x + sec^{2} x = \sec x(\sec x + \tan x)$$

چون

$$\int \sec x dx = \int \frac{(\sec x)(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

است. ملاحظه می کنید که صورت کسر انتگرال دوم ، مشتق مخرج است. پس دو باره می توانیم از فرمول شماره (۹) استفاده کنیم. لذا فرض می کنیم $u = \sec x + \tan x$ پس

$$du = (\sec x)(\sec x + \tan x)dx$$

پس

$$\int \sec x dx = \int \overbrace{\frac{1}{sec\ x + tan\ x}}^{\frac{1}{u}} \overbrace{[sec\ x(tan\ x + sec\ x)]dx}^{du}$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|sex\ x + \tan x| + C$$

پس داریم

$$\boxed{\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad (10)}$$

برای پیدا کردن $\int \csc x dx$ هم به همین طریق عمل می کنیم.

در زیر خلاصه ای از چگونگی رسم نمودار که در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم آمده برای یاد آوری ملاحظه می کنید.

قبل از طرح تمرینات این بخش ، خلاصه قواعد رسم نمودار از کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم می آوریم.

خاصیت	امتحان
f با محور y در c تلاقی می کند.	$f(0)=c$
f با محور x در c تلاقی می کند.	$f(c)=0$
نمودار f نسبت به محور y قرینه است.	$f(-x)=f(x)$
نمودار f نسبت به مبدا قرینه است.	$f(-x)=-f(x)$
f یک مقدار ماکسیمم موضعی در c دارد .	$f'(c)=0$ و f' از مثبت به منفی تغییر می کند. یا $f'(c)=0$ است و $f''(c)<0$ است.
f یک مقدار مینیمم موضعی در c دارد.	$f'(c)=0$ و f' از منفی به مثبت تغییر می کند. یا $f'(c)=0$ است و $f''(c)>0$ است.
f اکیدا صعودی است در یک بازه باز I	$f'(x)>0$ است برای تمام x ها بجز تعداد کمی
f اکیدا نزولی است در یک بازه باز I	$f'(x)<0$ است برای تمام x ها بجز تعداد کمی
نمودار f در بازه باز I تعقر به بالا دارد.	$f''(x)>0$ است برای تمام x ها در I
نمودار f در بازه باز I تعقر به پایین دارد.	$f''(x)<0$ است برای تمام x ها در I
نقطه $(c,f(c))$ یک نقطه عطف نمودار f	f'' در c تغییر علامت می دهد. و معمولا $f''(c)=0$
f یک مجانب عمودی $x=c$ دارد.	$\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$
f یک مجانب افقی $y=d$ دارد.	$\lim_{x\to -\infty} f(x)=d$ یا $\lim_{x\to\infty} f(x)=d$

طریق پیدا کردن نقاط خمید گی بسیاری از توابع . نقطه خمیدگی همان نقطه عطف است.

۱ – مقادیر c را که در آنها $f''(c)=0$ است ، پیدا کنید.

۲ – برای هر یک از مقادیر c که در مرحله اول پیدا کردید ، مشخص کنید آیا f'' در c تغییر علامت می دهد.

۳ – اگر f'' در c تغییر علامت می دهد ، $(c,f(c))$ نقطه خمید گی است.

عدد c در دامنه f را یک **نقطه بحرانی Critical Point** تابع f می نامیم ، اگر یا $f'(c)=0$ باشد و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد

تمرینات ۱.۷

در تمرینات ۳ – ۱ انتگرال را پیدا کنید. پاسخ را بر حسب لگاریتم بنویسید

۱) $\int_{۱}^{۳} \frac{۱}{x}dx$

۲) $\int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}^{۹}} \frac{-۱}{۳x} dx$

۳) $\int_{-۴}^{-۱۲} \frac{۲}{t} dt$

در تمرینات ۹ – ۴ دامنه و مشتق تابع را پیدا کنید.

۴) $f(x) = \ln(x + ۱)$

۵) $g(x) = x \ln\left(x^{۲} - ۱\right)$

۶) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x - ۳}{x - ۲}}$

۷) $f(t) = \frac{\ln x}{x - ۱}$

۸) $f(t) = \sin(\ln t)$

۹) $f(x) = \ln(\ln x)$

در تمرین زیر $\frac{dy}{dx}$ را از طریق مشتق ضمنی پیدا کنید.

۱۰) $x \ln\left(y^{۲} + x\right) = ۱ + ۵y$

در تمرینات ۱۳ – ۱۱ دامنه ، محل تلاقی با محور ها ، مقادیر اکستریم موضعی ، نقاط عطف ، تعقر و خطوط مجانب تابع داده شده را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

۱۱) $f(x) = \ln|x|$

۱۲) $g(x) = \ln(۱ - ۳x)$

۱۳) $f(x) = (\ln x)^{۲}$

در تمرینات ۲۲ — ۱۴ انتگرال را پیدا کنید.

۱۴) $\int \frac{۱}{x-۱}dx$

۱۵) $\int \frac{x}{x^{۲}+۴}dx$

۱۶) $\int \frac{x^{۳}}{x^{۴}-۴}dx$

۱۷) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{۱-۳\cos x}dx$

۱۸) $\int_{۱}^{۴} \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}dx$

۱۹) $\int \frac{\ln z}{z}dz$

۲۰) $\int \frac{\ln(\ln t)}{t\ln t}dt$

۲۱) $\int \cot t dt$

۲۲) $\int \frac{x}{۱+x\tan x}dx$

در تمرینات ۲۵ — ۲۳ مساحت بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۲۳) $f(x)=\frac{۱}{x};\left[e,e^{۲}\right]$

۲۴) $f(x)=\frac{x}{۲-x^{۲}};\left[-۲,-\sqrt{۳}\right]$

۲۵) $f(x)=sec^{۳}x\tan x;\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}\right]$

۲۶ – فرض کنید $\ln a=2.3$ و $\ln b=4.7$ باشد. مطلوب است $\ln(a^3b^2)$

۲۷ – ثابت کنید که $r\in\mathbb{Q}$ ، $b>0$ ، $\ln b^r=r\ln b$. برای این کار نشان دهید که توابع $\ln x^r$ و $r\ln x$ دارای یک مشتق هستند و هر دو یک مقدار در ۱ دارند.

۲۸ – ثابت کنید $b,c>0$ برای $\ln\left(\frac{b}{c}\right)=\ln b-\ln c$

الف - با استفاده از فرمول (۵) و قانون لگاریتم ها.

ب با نشان دادن این که توابع $\ln\left(\frac{x}{c}\right)$ و $\ln x-\ln c$ یک مشتق دارند و یک مقدار هستند در c

پاسخ تمرینات ۱.۷

در تمرینات ۳ – ۱ انتگرال را پیدا کنید. پاسخ را بر حسب لگاریتم بنویسید

۱) $$\int_{۱}^{۳}\frac{۱}{x}dx=\ln x\Big|_{۱}^{۳}=\ln ۳-\ln ۱=\ln\frac{۳}{۱}=\ln ۳$$

۲) $$\int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}}\frac{-۱}{۳x}dx=-\frac{۱}{۳}\int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}}\frac{۱}{x}dx=-\frac{۱}{۳}\ln x\Big|_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۳}\left[\ln\frac{۱}{۴}-\ln\frac{۱}{۹}\right]$$

$$=-\frac{۱}{۳}\left[(\ln ۱-\ln ۴)-(\ln ۱-\ln ۹)\right]=-\frac{۱}{۳}\left[0-\ln ۴-0+\ln ۹\right]$$

$$=-\frac{۱}{۳}(-\ln ۴+\ln ۹)=\frac{۱}{۳}\ln\frac{۴}{۹}$$

۳) $$\int_{-۴}^{-۱۲} \frac{۲}{t} dt = ۲\int_{-۴}^{-۱۲} \frac{۱}{t} dt = ۲\ln|t| \Big|_{-۴}^{-۱۲} = ۲(\ln ۱۲ - \ln ۴) = ۲\ln ۳$$

در تمرینات ۹ – ۴ دامنه و مشتق تابع را پیدا کنید.

۴) $f(x) = \ln(x + ۱)$

می دانیم که دامنه $\ln x$ شامل تمام x های بزرگ تر از صفر است. پس

$$x + ۱ > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -۱$$

لذا دامنه تابع $(-۱, \infty)$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{x + ۱}$$

۵) $g(x) = x\ln\left(x^۲ - ۱\right)$

دامنه تابع شامل تمام x ها است ، بطوری که $x^۲ - ۱ > 0$ باشد. پس دامنه $(-\infty, -۱)$ و $(۱, \infty)$ است. یا $(-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$

$$g'(x) = \ln\left(x^۲ - ۱\right) + x\left[\frac{۱}{x^۲ - ۱}(۲x)\right] = \ln\left(x^۲ - ۱\right) + \frac{۲x^۲}{x^۲ - ۱}$$

۶) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x - ۳}{x - ۲}}$

دامنه شامل کلیه x ها است بطوری که $\frac{x-۳}{x-۲} > 0$ باشد. یعنی $(-\infty, ۲)$ و .

برای پیدا کردن مشتق ، ابتدا کمی روی تابع کار می کنیم تا کار ما ساده تر شود. از خاصیت لگاریتم ها استفاده می کنیم.

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x - ۳}{x - ۲}} = \ln\left(\frac{x - ۳}{x - ۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} \overset{\text{خاصیت لگاریتم ها}}{=} \frac{۱}{۲} ln\left(\frac{x - ۳}{x - ۲}\right)$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\frac{x - ۳}{x - ۲}} * \frac{۱}{(x - ۲)^۲} = \frac{۱}{۲(x - ۳)(x - ۲)}$$

۷) $f(t) = \dfrac{\ln x}{x - ۱}$

دامنه تابع $(۱, \infty)$ و $(0, ۱)$ است ، یا $(۱., \infty) \cup (0, ۱)$

$$f'(x) = \frac{\frac{۱}{x}(x - ۱) - \ln x}{(x - ۱)^{۲}} = \frac{۱ - \frac{۱}{x} - \ln x}{(x - ۱)^{۲}} = \frac{\frac{x - ۱ - x \ln x}{x}}{(x - ۱)^{۲}}$$
$$= \frac{x - ۱ - x \ln x}{x(x - ۱)^{۲}}$$

۸) $f(t) = \sin(\ln t)$

دامنه تابع $(0, \infty)$ است و $f'(t) = [\cos(\ln t)] \frac{۱}{t}$ است.

۹) $f(x) = \ln(\ln x)$

دامنه تابع شامل کلیه x ها است بطوری که $\ln x > 0$ باشد. و می دانیم که $\ln ۱ = 0$ است پس باید $\ln x > ۱$ باشد. لذا دامنه تابع $(۱, \infty)$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{\ln x} * \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x \ln x}$$

در تمرین زیر $\frac{dy}{dx}$ را از طریق مشتق ضمنی پیدا کنید.

۱۰) $x \ln \left(y^{۲} + x\right) = ۱ + ۵y$

از دو طرف تساوی مشتق ضمنی می گیریم.

$$\ln\left(y^{۲} + x\right) + x\left[\frac{۱}{y^{۲} + x}(۲y\frac{dy}{dx} + ۱)\right] = ۵\frac{dy}{dx}$$
$$\left(۵ - \frac{۲xy}{y^{۲} + x}\right)\frac{dy}{dx} = \ln\left(y^{۲} + x\right) + \frac{x}{y^{۲} + x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(y^{۲} + x\right)\ln\left(y^{۲} + x\right) + x}{۵\left(y^{۲} + x\right) - ۲xy}$$

در تمرینات ۱۳ – ۱۱ دامنه ، محل تلاقی با محور ها ، مقادیر اکستریم موضعی ، نقاط عطف ، تعقر و خطوط مجانب تابع داده شده را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

۱۱) $f(x) = \ln|x|$

دامنه شامل $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ است.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{برای } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{برای } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

نقطه بحرانی و یا نقطه عطف وجود ندارد. زیرا $f'(0)$ و $f''(0)$ وجود ندارند. به عبارت دیگر $\frac{1}{x} = 0$ و $\frac{-1}{x^2} = 0$ هیچ کدام پاسخ یا ریشه ندارند ، پس نقاط بحرانی و عطف وجود ندارند.

چون $f''(x) < 0$ است برای تمام x ها در دامنه تابع ، پس نمودار در $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ تعقر به طرف پایین دارد.

مجانب عمودی در $x = 0$ است. زیرا

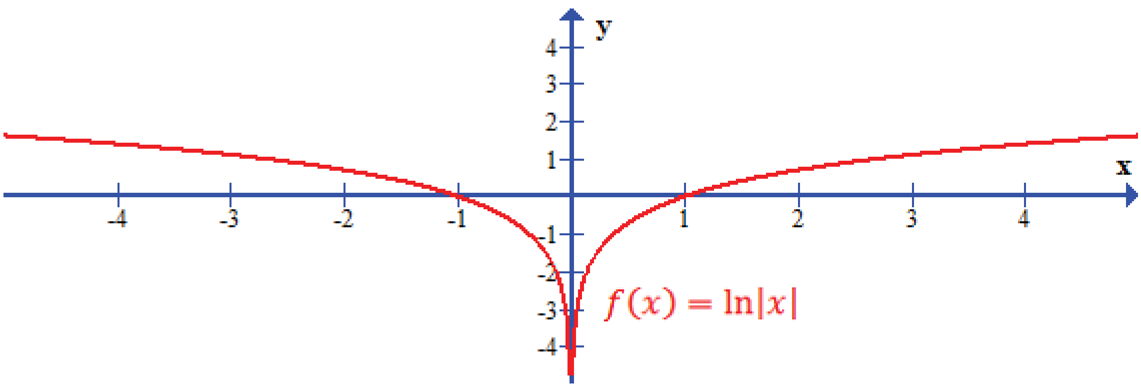
$$\lim_{x\to 0^-} \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \ln|x| = -\infty$$

محل تقاطع با محور y ندارد حد تابع در نزدیکی صفر $-\infty$ است. محل تلاقی با محور x نقاط $x = 1, x = -1$ است. زیرا

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\ln(-x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

نمودار در ذیل ملاحظه کنید.



۱۲) $g(x) = \ln(1 - 3x)$

برای پیدا کردن دامنه g باید نا معادله $1 - 3x > 0$ را حل کنیم. پس خواهیم داشت $x < \frac{1}{3}$ لذا دامنه این تابع $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ است.

$$g'(x)=\frac{-۳}{۱-۳x}=\frac{۳}{۳x-۱}\ ;g''(x)=\frac{-۹}{(۳x-۱)^{۲}}$$

چون $f'(0)$ و $g''(0)$ وجود ندارند ، پس نقاط بحرانی و عطف وجود ندارند. به عبارت دیگر تساوی $\frac{۳}{۳x-۱}=0$ و $\frac{-۹}{(۳x-۱)^{۲}}=0$ ریشه ندارند.

چون $g''(x)<0$ است برای تمام x ها در دامنه پس نمودار در $\left(-\infty,\frac{۱}{۳}\right)$ تعقر به طرف پایین دارد.

چون

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-}\ln\left(۱-۳x\right)=-\infty$$

پس $x=\frac{۱}{۳}$ مجانب عمودی است. چون

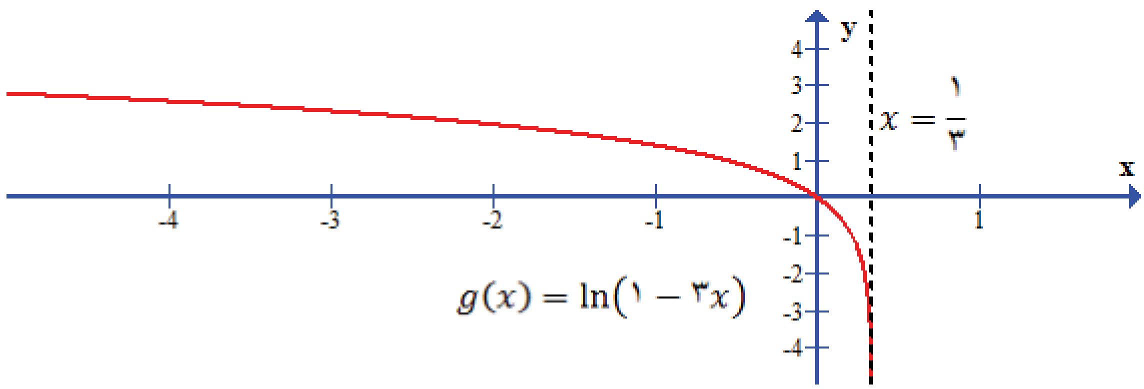
$$g(0)=\ln\left(۱\right)=0\ ،\ \ g\left(۱-۳x\right)=\ln\left(۱-۳*0\right)=0\ \Rightarrow x=0$$

پس محل تلاقی نمودار با محور ها نقطه مبدا است.

چون $g''(x)<0$ است برای تمام x ها در دامنه g پس نمودار در $\left(-\infty,\frac{۱}{۳}\right)$ تعقر به طرف پایین دارد. چون

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-}\ln\left(۱-۳x\right)=-\infty$$

پس $x=\frac{۱}{۳}$ مجانب عمودی است.



۱۳) $f(x)=(\ln x)^{۲}$

دامنه f شامل کلیه x ها است ، بطوری که $x>0$ باشد. پس دامنه $(0,\infty)$ است.

$$f'(x) = ۲\frac{\ln x}{x}\,; f''(x) = \frac{۲\left(\frac{۱}{x}\right)x - ۲\ln x}{x^۲} = \frac{۲(۱-\ln x)}{x^۲}$$

چون $f'(۱) = ۲\left(\frac{\ln ۱}{۱}\right) = 0$ است ، پس $x = ۱$ نقطه بحرانی است و چون f' در این نقطه از منفی به مثبت تغییر می کند ، پس f در $x = ۱$ یک مقدار مینیمم موضعی دارد. برای امتحان

$$۲\frac{\ln\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} \approx -۲/۷۷\,; ۲\frac{\ln ۲}{۲} \approx ۰/۶۹$$

لذا $f(۱) = (\ln ۱)^۲ = 0$ مقدار مینیمم موضعی است.

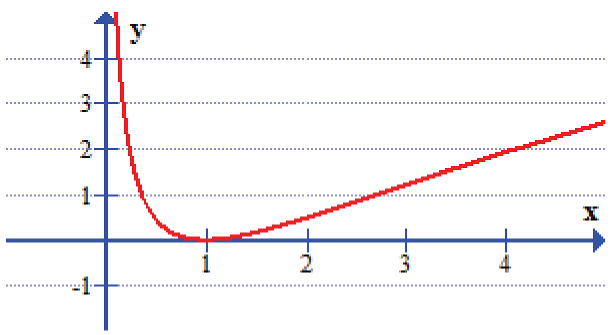
برای پیدا کردن نقطه عطف یا برگشت $f''(x)$ باید مساوی صفر باشد یعنی $\frac{۲(۱-\ln x)}{x^۲} = 0$ باشد و یا $۱ - \ln x = 0$ و یا $\ln x = ۱$ و می دانید که $\ln e = ۱$ است پس $(e, ۱)$ نقطه عطف است.

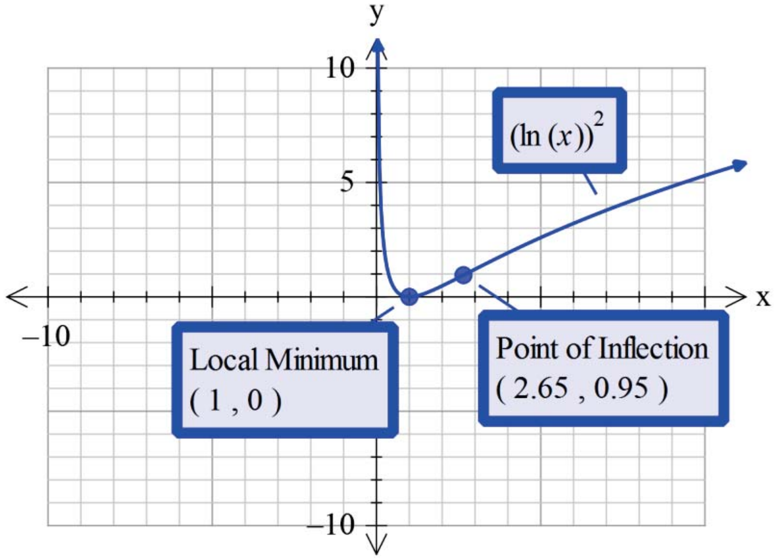
در بازه $(0, e)$ نمودار تعقر به طرف بالا و در (e, ∞) تعقر به طرف پایین دارد. می توانید با کمک ماشین حساب چند مقدار برای f'' پیداکنید. اگر $f'' < 0$ باشد در آن بازه تعقر به طرف پایین و اگر $f'' > 0$ باشد ، در آن بازه تعقر به طرف بالا است.

چون

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^۲ = \infty$$

است ، پس $x = 0$ مجانب عمودی است. نمودار در ذیل ملاحظه می کنید.





در نمودار بالا
مینیمم موضعی Local Minimum
نقطه عطف Point of Inflection

در تمرینات ۲۲ – ۱۴ انتگرال را پیدا کنید.

۱۴) $\int \frac{۱}{x-۱}dx$

فرض می کنیم $u = x - ۱$ باشد ، پس $du = dx$ اسست.

$$\int \frac{۱}{x-۱}dx = \int \frac{۱}{u}du = \ln|u| + C = \ln|x-۱| + C$$

۱۵) $\int \frac{x}{x^۲+۴}dx$

فرض می کنیم $u = x^۲ + ۴$ باشد ، پس $du = ۲x\,dx$ است. و یا $\frac{۱}{۲}du = xdx$

$$\int \frac{x}{x^۲+۴}dx = \int \frac{۱}{u} * \frac{۱}{۲}du = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{u}du = \frac{۱}{۲}\ln|u| + C = \frac{۱}{۲}\ln\left(x^۲+۴\right) + C$$

۱۶) $\int \frac{x^۳}{x^۴-۴}dx$

فرض می کنیم $u = x^۴ - ۴$ باشد ، پس $du = ۴x^۳dx$ است. و یا $\frac{۱}{۴}du = x^۳dx$

$$\int \frac{x^۳}{x^۴-۴}dx = \frac{۱}{۴}\int \frac{۱}{u}dx = \frac{۱}{۴}\ln|u| + c = \frac{۱}{۴}\ln\left|x^۴-۴\right| + C$$

۱۷) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{۱-۳\cos x}dx$

فرض می کنیم $u = ۱-۳\cos x$ باشد ، پس $du = ۳\sin x$ است. و یا $\frac{۱}{۳}du = \sin x$

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = -۲$ است ، و اگر $x = \frac{\pi}{۳}$ باشد ، پس $u = -\frac{۱}{۲}$ است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{۱-۳\cos x}dx = \frac{۱}{۳}\int_{-۲}^{-\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{u}du = \frac{۱}{۳}\ln|u|\Bigg|_{-۲}^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}\left(\ln\frac{۱}{۲} - \ln ۲\right) = -\frac{۲}{۳}\ln ۲$$

۱۸) $\displaystyle\int_۱^۴ \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}dx$

فرض می کنیم $u = ۱+\sqrt{x}$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$ است. و $۲du = \frac{۱}{\sqrt{x}}dx$

اگر $x = ۱$ باشد ، پس $u = ۲$ است. و اگر $x = ۴$ باشد ، پس $u = ۳$ است.

$$\int_۱^۴ \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}dx = ۲\int_۲^۳ \frac{۱}{u}du = ۲\ln|u|\Big|_۲^۳ = ۲(\ln ۳ - \ln ۲) = ۲\ln\frac{۳}{۲}$$

۱۹) $\displaystyle\int \frac{\ln z}{z}dz$

فرض می کنیم $u = \ln z$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{z}dz$ است.

$$\int \frac{\ln z}{z}dz = \int u du = \frac{۱}{۲}u^۲ + C = \frac{۱}{۲}(\ln z)^۲ + C$$

۲۰) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln t)}{t\ln t}dt$

فرض می کنیم $u = \ln(\ln t)$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{\ln t} * \frac{۱}{t}dt = \frac{۱}{t\ln t}dt$ است.

$$\int \frac{\ln(\ln t)}{t \ln t} dt = \int u du = \frac{۱}{۲} u^{۲} + C = \frac{۱}{۲} (\ln(\ln t))^{۲} + C$$

۲۱) $\int \cot t dt$

می دانیم که $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$ است. پس فرض می کنیم $u = \sin t$ باشد ، پس $du = \cos t \, dt$ است.

$$\int \cot t dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int \frac{۱}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sin t| + C$$

۲۲) $\int \frac{x}{۱ + x \tan x} dx$

می دانیم که

$$\int \frac{x}{۱ + x \tan x} dx = \int \frac{x}{۱ + x \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x \, dx}$$

فرض می کنیم $u = \cos x + x \sin x$ باشد ، پس

$$du = (-\sin x + \sin x + x \cos x) dx = x \cos x dx$$

$$\int \frac{x}{۱ + x \tan x} dx = \int \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x} dx = \int \frac{۱}{u} du$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\cos x + x \sin x| + C$$

در تمرینات ۲۵ – ۲۳ مساحت بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۲۳) $f(x) = \frac{۱}{x}; \left[e, e^{۲}\right]$

$$A = \int_{e}^{e^{۲}} \frac{۱}{x} dx = \ln|x| \Big|_{e}^{e^{۲}} = \ln e^{۲} - \ln e = ۲ \ln e - \ln e = ۱$$

۲۴) $f(x) = \frac{x}{۲ - x^{۲}}; \left[-۲, -\sqrt{۳}\right]$

$$A = \int_{-۲}^{-\sqrt{۳}} \frac{x}{۲ - x^{۲}} dx$$

فرض می کنیم $u=۲-x^{۲}$ باشد ، پس $du=-۲xdx$ است. یا $-\frac{۱}{۲}du=xdx$

اگر $x=-۲$ باشد ، پس $u=-۲$ است ، و اگر $x=-\sqrt{۳}$ باشد ، پس $u=-۱$ است.

$$A=\int_{-۲}^{-\sqrt{۳}}\frac{x}{۲-x^{۲}}dx=-\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{-۱}\frac{۱}{u}du=-\frac{۱}{۲}\ln|u|\Big|_{-۲}^{-۱}=-\frac{۱}{۲}(\ln ۱-\ln ۲)=\frac{۱}{۲}\ln ۲$$

۲۵) $f(x)=sec^{۳}x\tan x;\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}\right]$

$$A=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}sec^{۳}x\tan xdx=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}sec^{۲}x(\sec x\tan x)dx$$

فرض می کنیم $u=\sec x$ باشد ، پس $du=\sec x\tan x\,dx$ است. اگر $x=\frac{\pi}{۴}$ باشد .پس

$u=\sqrt{۲}$ است. اگر $x=\frac{\pi}{۳}$ باشد ، پس $u=۲$ است.

$$A=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}sec^{۳}x\tan x\,dx=\int_{\sqrt{۲}}^{۲}u^{۲}dx=\frac{۱}{۳}u^{۳}\Big|_{\sqrt{۲}}^{۲}=\frac{۸}{۳}-\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

۲۶ – فرض کنید $\ln a=2.3$ و $\ln b=4.7$ باشد. مطلوب است $\ln(a^3b^2)$

$$\ln(a^3b^2)=\ln a^3+\ln b^2=3\ln a+2\ln b=3(2.3)+2(4.7)=16.3$$

۲۷ – ثابت کنید که $r\in\mathbb{Q}$ ، $b>0$ ، $\ln b^r=r\ln b$. برای این کار نشان دهید که توابع $\ln x^r$ و $r\ln x$ دارای یک مشتق هستند و هر دو یک مقدار در ۱ دارند.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x)=\ln x^r$ و $g(x)=r\ln x$ باشد. پس

$$f'(x)=\frac{۱}{x^r}*r*x^{r-۱}=\frac{r}{x}$$

$$g'(x)=\frac{r}{x}$$

پس $f'(x)=g'(x)$ است. از طرف دیگر

$$f(۱)=\ln ۱^{r}=\ln ۱=0$$

$$g(۱)=r\ln ۱=0$$

لذا بر اساس قضیه ۳.۳.۱ که در همین بخش از کتاب حساب دیفرانسیل آرمان آوردیم $f = g$ است.
پس $\ln b^r = r \ln b$ است.

۲۸ – ثابت کنید $b, c > 0$ برای $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln b - \ln c$

الف - با استفاده از فرمول (۵) و قانون لگاریتم ها.

ب با نشان دادن این که توابع $\ln\left(\frac{x}{c}\right)$ و $\ln x - \ln c$ یک مشتق دارند و یک مقدار هستند در c

پاسخ

الف

$$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln b\left(\frac{۱}{c}\right) \overset{\text{قانون لگاریتم}}{=} \ln b + \ln\frac{۱}{c}$$

بر اساس فرمول (۵) داریم $\ln\frac{۱}{c} = -\ln c$ است. پس

$$\ln\frac{b}{c} = \ln b - \ln c$$

ب –فرض می کنیم $f(x) = \ln\frac{x}{c}$ باشد ، و $g(x) = \ln x - \ln c$ پس

$$f'(x) = \frac{۱}{\frac{x}{c}}\left(\frac{۱}{c}\right) = \frac{۱}{x}$$

$$g'(x) = \frac{۱}{x}$$

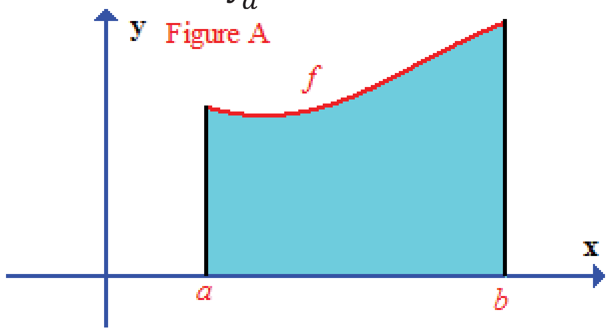
پس $f'(x) = g'(x)$ است. از طرف دیگر $f(c) = \ln\frac{c}{c} = \ln ۱ = 0$ و
$g\ (c) = \ln c - \ln c = 0$ پس طبق قضیه ۳.۳.۱ حساب دیفرانسیل آرمان داریم $f = g$ و
لذا

$$\ln\frac{b}{c} = \ln b - \ln c$$

۱.۸ ـ نگاهی دیگر به مساحت Another Look at Area

در بخش ۱.۲ مساحت یک ناحیه مانند شکل A تعریف کردیم ، این مساحت عبارت است از

$$\int_a^b f(x)dx$$



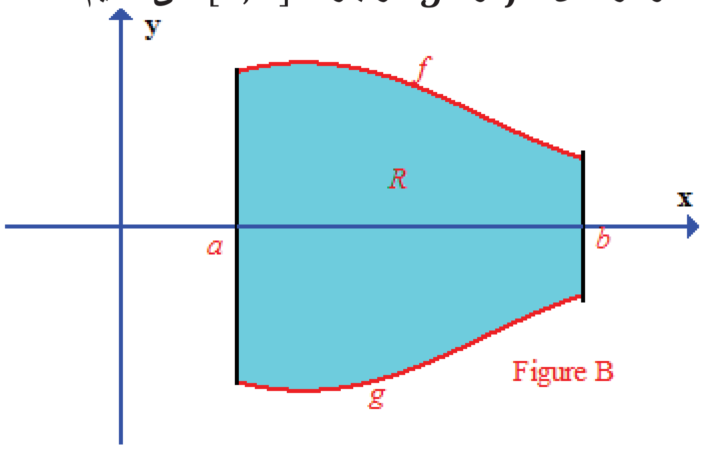
اما این تعریف شامل ناحیه ای که مرز پایین آن یک خط افقی نیست ، نمی شود.

فرض می کنیم f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند. و فرض می‌کنیم

$$f(x) \geq g(x) \text{ برای } a \leq x \leq b$$

باشد. مساحت ناحیه R را چنین تعریف می کنیم. ناحیه ای محصور از بالا به نمودار f از پایین به نمودار g و از طرفین به خطوط $x=a$ و $x=b$

ناحیه R را **ناحیه بین نمودار های f و g در بازه $[a,b]$ می نامیم.** شکل B



چون مساحت یک ناحیه نباید تغییر کند ، اگر آن ناحیه عمودی تغییر مکان دهد. پس مساحت ناحیه R در شکل B باید به همان اندازه ناحیه R' در شکل C باشد. ناحیه R' بالای محور x است و محصور است بین نمودارهای $f+c$ و $g+c$ برای یک عدد ثابت و مناسب c

اما مساحت ناحیه s_1 که محصور است از طرف بالا به نمودار $f+c$ و از طرف پایین به محور x باید مجموع مساحت های R' و S_2 باشد. شکل D

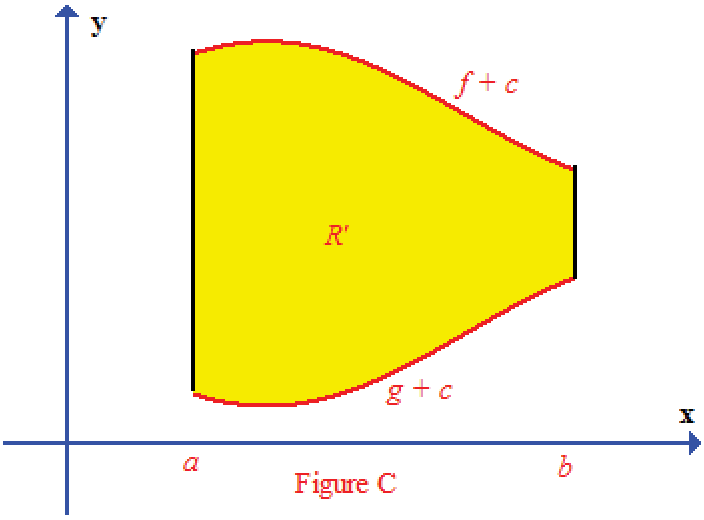


Figure C

حالا بر اساس تعریف ۱.۳ بخش ۱.۲ فرمول هایی برای مساحت های $S_۱$ و $S_۲$ داریم. پس باید انتظار داشته باشیم مساحت R' مطابق زیر باشد.

$$A=\int_a^b \overbrace{[f(x)+c]dx}^{\text{مساحت } S_۱} - \int_a^b \overbrace{[g(x)+c]dx}^{\text{مساحت } S_۲} = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

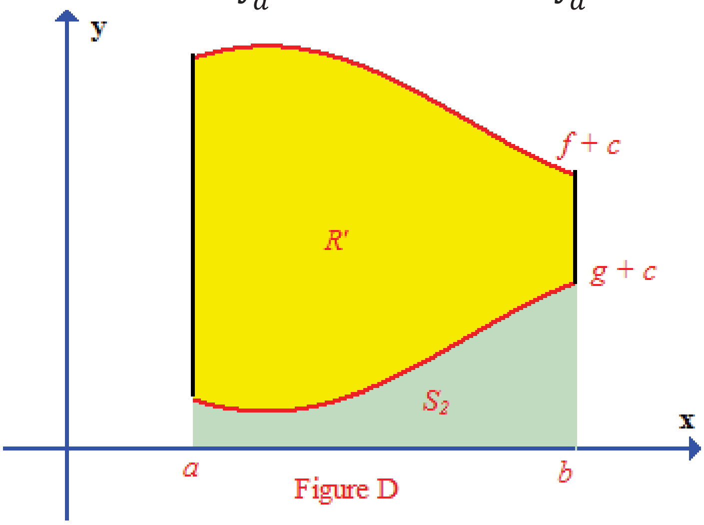


Figure D

پس در نهایت به تعریف زیر میرسیم.

تعریف ۱.۲۴ فرض می کنیم توابع f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند. و داشته باشیم

$$f(x)\geq g(x) \quad \text{برای} \quad a\leq x\leq b$$

مساحت ناحیه R واقع بین نمودارهای f و g در $[a,b]$ بصورت زیر بدست می آید.

$$A-\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \qquad (۱)$$

توجه داشته باشید که برای $a \le x \le b$ انتگر اند $f(x) - g(x)$ نمایانگر ارتفاع R در x است.
انتگراند Integrand همان تابعی است که داخل نماد انتگرال می آید.

مثال ۱

فرض کنید $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ باشد. مساحت ناحیه بین نمودار های f و g در بازه $\left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$ را پیدا کنید. شکل E

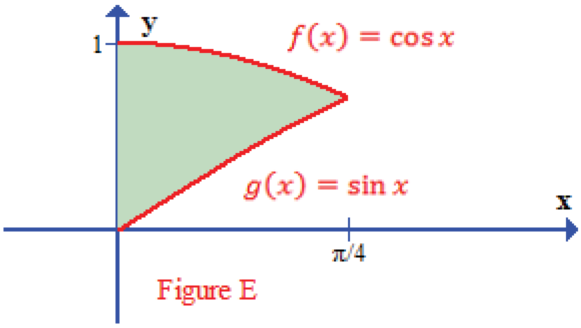


Figure E

پاسخ

چون $\cos x \ge \sin x$ است در بازه $\left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$ پس طبق فرمول (۱) داریم.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} [f(x) - g(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x)dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{۴}} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - (0 + ۱) = \sqrt{۲} - ۱$$

اگر می خواهیم مساحت ناحیه بین دو نمودار پیداکنیم که فقط در دو نقطه یک دیگر را قطع می کنند ، اما بازه ای که بر اساس آن انتگرال بگیریم داده نشده است ، ابتدا باید محل تقاطع نمودار ها را پید ا کنیم و مشخص کنیم کدام نمودار بالای دیگری قرار می گیرد ، و سپس انتگرال بگیریم.

مثال ۲

مساحت ناحیه بین نمودار $y = x^{۲} - x - ۴$ و $y = x - ۱$ را پیدا کنید. شکل F

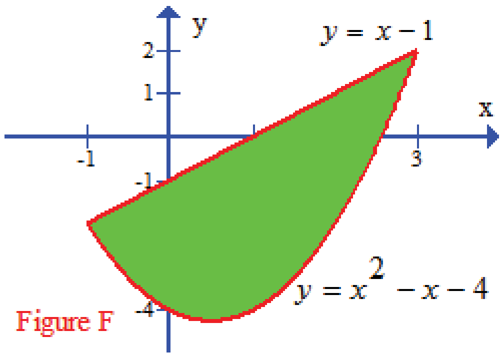


Figure F

پاسخ

ابتدا مختصات x نقاط تقاطع دو تابع را پیدا می کنیم.

$$x^{۲} - x - ۴ = x - ۱$$
$$x^{۲} - ۲x - ۳ = 0$$
$$(x + ۱)(x - ۳) = 0$$
$$x = -۱ \text{ یا } x = ۳$$

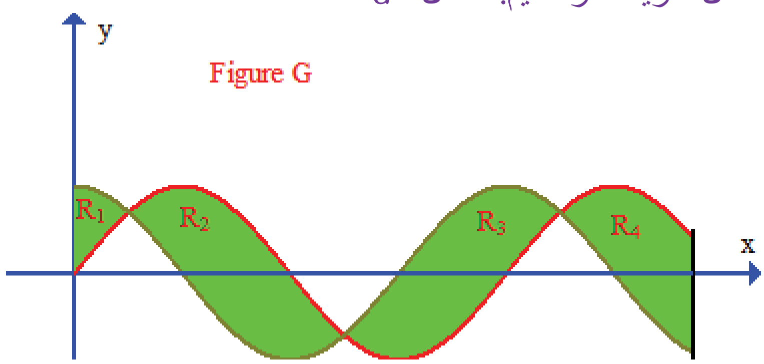
پس ناحیه ای که می خواهیم مساحت آنرا پیدا کنیم بین نمودار های $y = x^{۲} - x - ۴$ و $y = x - ۱$ در بازه $[-۱, ۳]$ قرار دارد. و چون

$$x - ۱ \geq x^{۲} - x - ۴ \quad \text{برای} \quad -۱ \leq x \leq ۳$$

است ، داریم

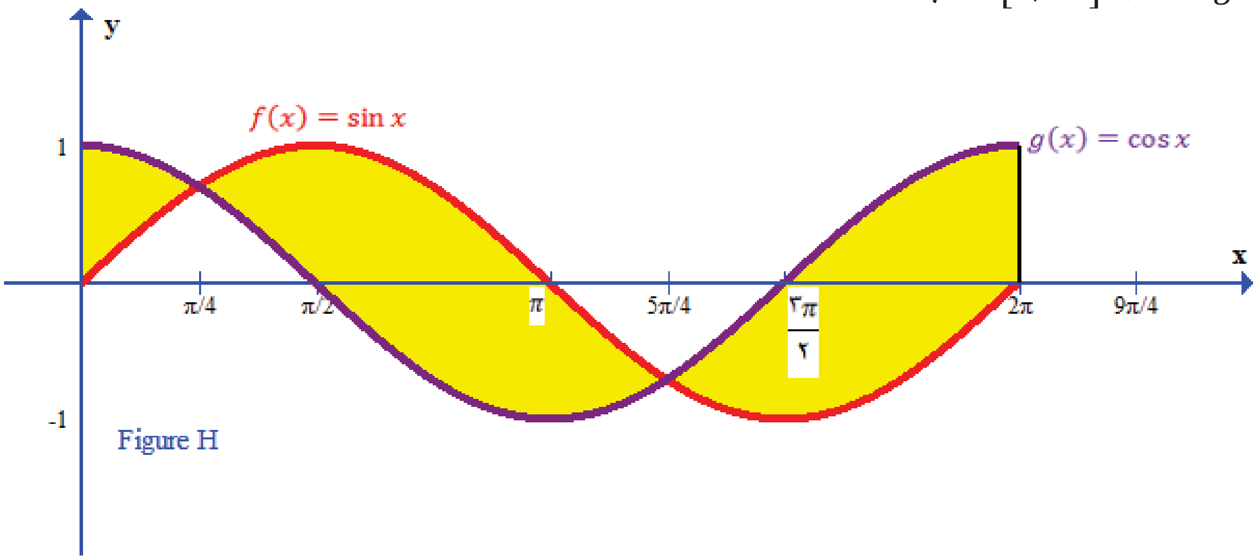
$$A = \int_{-۱}^{۳} \left[(x - ۱) - \left(x^{۲} - x - ۴\right)\right] dx = \int_{-۱}^{۳} \left(-x^{۲} + ۲x + ۳\right) dx$$
$$= \left(-\frac{۱}{۳}x^{۳} + x^{۲} + ۳x\right)\Big|_{-۱}^{۳} = (-۹ + ۹ + ۹) - \left(\frac{۱}{۳} + ۱ - ۳\right)$$
$$= \frac{۳۲}{۳}$$

حالا فرض کنید نمودار های f و g در بیش از دو نقطه در (a, b) یک دیگر را قطع می کنند. پس ناحیه R بین نمودار های f و g در $[a, b]$ شامل چند ناحیه است ، که هر کدام دارای نوعی مساحت است که تا به حال تعریف کرده ایم. شکل G



طبیعی است که مساحت تمام ناحیه R عبارت است از مجموع مساحت های این ناحیه های کوچک تر. برای محاسبه مساحت ناحیه بین f و g در بازه $[a, b]$ ابتدا باید مشخص کنیم در کدام بازه فرعی $f - g \geq 0$ است و در کدام بازه فرعی $f - g \leq 0$ است. سپس در هر کدام از بازه های فرعی جداگانه انتگرال بگیریم و در نهایت آنها را با هم جمع کنیم تا مساحت تمام R بدست آید. مثال بعدی این مراحل را نشان می دهد.

مثال ۳- فرض کنید $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ باشد. مساحت ناحیه بین نمودار های f و g در بازه $[0, ۲\pi]$ را پیدا کنید. شکل H



پاسخ

برای این که مشخص کنیم کجا $\sin x \geq \cos x$ است و کجا $\sin x \leq \cos x$ است ، ابتدا مقادیری از x که برای آنها $\sin x = \cos x$ است ، پیدا می‌کنیم. یا به عبارت دیگر کجا $\tan x = ۱$ است.

می دانیم که $\tan x = ۱$ است برای $x = \frac{\pi}{۴}$ و $x = \frac{۵\pi}{۴}$ ، این نقاط محل تلاقی این دو تابع است. از این اطلاعات ، می توانیم دریابیم که $\sin x \geq \cos x$ است در بازه $\left[\frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}\right]$ و $\cos x \geq \sin x$است در بازه های $\left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$ و $\left[\frac{۵\pi}{۴}, ۲\pi\right]$ پس

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} (\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{۲\pi} (\cos x - \sin x)dx$$

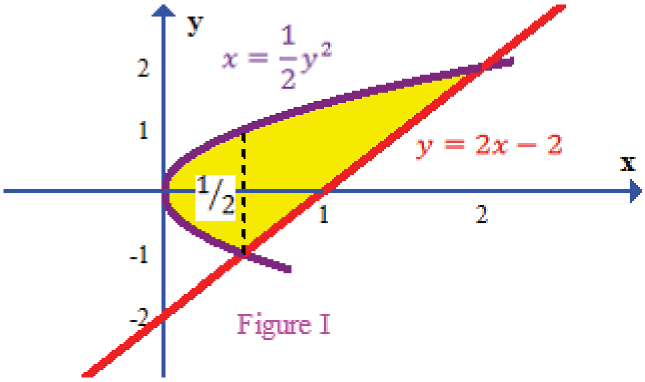
$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{۴}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} + (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{۵\pi}{۴}}^{۲\pi}$$

$$= \left(\sqrt{۲} - ۱\right) + \left(۲\sqrt{۲}\right) + \left(۱ + \sqrt{۲}\right) = ۴\sqrt{۲}$$

مثال بعد ، به نظر می‌رسد که به شکلی که تا کنون بحث کرده ایم نیست ، ولی در حقیقت به همان شکل مورد بحث ما است.

مثال ۴

مساحت ناحیه R بین نمودار سهمی $x=\frac{۱}{۲}y^{۲}$ و خط $y=۲x-۲$ را پیدا کنید. شکل I



پاسخ

ابتدا مختصات x که در آنها نمودار سهمی و خط یک دیگر را قطع می کنند ، پیدا می کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}y^{۲}=\frac{۱}{۲}(۲x-۲)^{۲}=۲x^{۲}-۴x+۲$$

یا

$$۲x^{۲}-۵x+۲=0$$
$$(۲x-۱)(x-۲)=0$$
$$x=\frac{۱}{۲} \text{ یا } x=۲$$

پس $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=۲$ نقاط تقاطع دو نمودار هستند. با توجه به شکل I ملاحظه می کنید که ناحیه R را می توان به دو قسمت تقسیم کرد . یک قسمت در بازه $\left[0,\frac{۱}{۲}\right]$ روی محور x یک قسمت در بازه $\left[\frac{۱}{۲},۲\right]$ روی محور x. آن قسمت از R که در بازه $\left[0,\frac{۱}{۲}\right]$ قرار دارد ، بین نمودار های $f_{۱}$ و $g_{۱}$ است. بطوری که

$$f_{۱}(x)=\sqrt{۲x} \quad \text{و} \quad g_{۱}(x)=-\sqrt{۲x}$$

آن قسمت از R که در بازه $\left[\frac{۱}{۲},۲\right]$ قرار دارد ، بین نمودارهای $f_{۲}$ و $g_{۲}$ است. بطوری که

$$f_{۲}(x)=\sqrt{۲x} \quad \text{و} \quad g_{۲}(x)=۲x-۲$$

پس داریم

$$A=\int_{0}^{\frac{۱}{۲}}\left(f_{۱}(x)-g_{۱}(x)\right)dx+\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\left(f_{۲}(x)-g_{۲}(x)\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x}\right)\right] dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\sqrt{2x} - (2x-2)\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\sqrt{2x} - 2x + 2\right) dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 0\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1\right)\right] = \frac{9}{4}$$

معکوس کردن نقش های x و y

Reversing the Roles of x and y

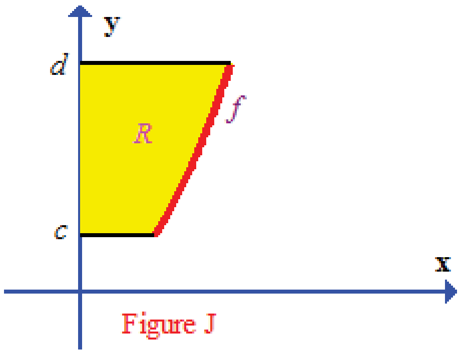


Figure J

گاهی اوقات بجای در نظر گرفتن ناحیه بین نمودار یک تابع و محور x راحت تر است اگر ناحیه بین نمودار تابع و محور y را در نظر بگیریم. شکل J . پس برای پیدا کردن مساحت ناحیه R ، انتگرال را در طول محور y حساب می کنیم.

مثال ۵

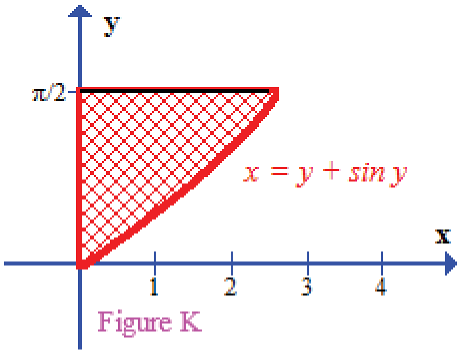
فرض کنید R ناحیه بین محور y و نمودار تساوی $x = y + \sin y$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ باشد.

مساحت R راپیدا کنید. شکل K

پاسخ

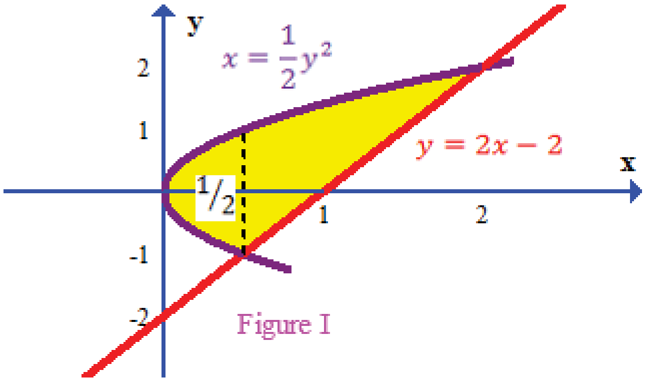
چون $y + \sin y \geq 0$ است برای $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ است ، پس

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y + \sin y)dy = \left(\frac{1}{2}y^2 - \cos y\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (-1) = \frac{\pi^2}{8} + 1$$



مثال ۶

مساحت ناحیه R بین نمودار سهمی $x = \frac{۱}{۲}y^{۲}$ و خط $y = ۲x - ۲$ را پیدا کنید. شکل I



پاسخ

ابتدا مختصات y نقاط تقاطع سهمی و خط را پیدا می کنیم.

$$\frac{۱}{۲}y^{۲} = x = \frac{۱}{۲}(y+۲)$$

$$y^{۲} - y - ۲ = 0$$

$$(y+۱)(y-۲) = 0$$

$$y = -۱ \quad \text{یا} \quad y = ۲$$

چون $\frac{۱}{۲}(y+۲) \geq \frac{۱}{۲}y^{۲}$ است برای $-۱ \leq y \leq ۲$ پس

$$A = \int_{-۱}^{۲} \left[\frac{۱}{۲}(y+۲) - \frac{۱}{۲}y^{۲}\right] dy = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۲} \left(y + ۲ - y^{۲}\right) dy$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}y^{۲} + ۲y - \frac{۱}{۳}y^{۳}\right)\Big|_{-۱}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\left(۲ + ۴ - \frac{۸}{۳}\right) - \left(\frac{۱}{۲} - ۲ + \frac{۱}{۳}\right)\right] = \frac{۹}{۴}$$

همان نتیجه ای که در مثال ۴ بدست آوردیم.

تمرینات ۱.۸

در تمرینات ۴ — ۱ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} + ۲x; [-۱, ۳]$

۲) $f(x) = \cos x - \sin x; \left[0, \frac{\pi}{۳}\right]$

۳) $f(x) = x\sqrt{۱ - x^{۲}}; [-۱, ۱]$

۴) $f(x) = \frac{x}{x^{۲} - ۱}; \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}\right]$

در تمرینات ۹ — ۵ مساحت بین نمودارهای توابع در بازه داده شده را پیدا کنید.

۵) $f(x) = x^{۲}, g(x) = x^{۳}; [-۲, ۱]$

۶) $g(x) = x^{۲} + ۴x, k(x) = x - ۲; [-۳, 0]$

۷) $f(x) = sec^{۲}x, g(x) = \sec x \tan x; \left[-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۶}\right]$

۸) $g(x) = sin^{۲}x, k(x) = \tan x; \left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right]$

۹) $f(x) = x\sqrt{۲x + ۳}, g(x) = x^{۲}; [-۱, ۳]$

در تمرینات ۱۲— ۱۰ نمودار های f و g یک ناحیه را محصور می کنند ، مساحت آن ناحیه را پیدا کنید.

۱۰) $f(x) = x^{۳}, g(x) = x^{\frac{۱}{۳}}$

۱۱) $f(x) = x^{۲} + ۱, g(x) = ۲x + ۹$

۱۲) $f(x) = x^{۳} + ۱, g(x) = (x + ۱)^{۲}$

در تمرینات ۱۴ – ۱۳ مساحت ناحیه بین نمودار های تساوی های داده شده را پیدا کنید.

۱۳) $y^{۲} = ۶x, x^{۲} = ۶y$

۱۴) $y^{۲} = ۲x - ۵\,, y = x - ۴$

در تمرین زیر نمودار های سه معادله یک ناحیه را محصور می کنند. مساحت آن ناحیه را پیدا کنید.

۱۵ $y = x + ۲, y = -۳x + ۶, y = \dfrac{۲ - x}{۳}$

در تمرینات ۱۷ – ۱۶ مساحت بین نمودار های معادله های داده شده را پید کنید.

۱۶) $x = y^{۲} - y$ و $x = y - y^{۲}$

۱۷) $x = y^{۲}$ و $x = ۶ - y - y^{۲}$

پاسخ تمرینات ۱.۸

در تمرینات ۴ – ۱ مساحت ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} + ۲x; [-۱, ۳]$

در بازه $[-۱, 0]$ عبارت $x^{۲} + ۲x \leq 0$ است در صورتی که
در بازه $[0, ۳]$ عبارت $x^{۲} + ۲x \geq 0$ است. پس داریم

$$A = \int_{-۱}^{0} -\left(x^{۲} + ۲x\right)dx + \int_{0}^{۳}\left(x^{۲} + ۲x\right)dx$$

$$= -\left(\frac{۱}{۳}x^{۳} + x^{۲}\right)\Big|_{-۱}^{0} + \left(\frac{۱}{۳}x^{۳} + x^{۲}\right)\Big|_{0}^{۳} = \frac{۲}{۳} + ۱۸ = \frac{۵۶}{۳}$$

۲) $f(x) = \cos x - \sin x; \left[0, \frac{\pi}{۳}\right]$

در بازه $\left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$ عبارت $\cos x - \sin x \geq 0$ است وعبارت $\cos x - \sin x \leq 0$ است در $\left[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}\right]$ پس داریم

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}(\sin x - \cos x)dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= \left(\sqrt{۲} - ۱\right) + \left(-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۲}\right) = ۲\sqrt{۲} - \frac{۳}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳)　$f(x) = x\sqrt{۱ - x^{۲}}; [-۱, ۱]$

عبارت $x\sqrt{۱ - x^{۲}} \le 0$ است در $[-۱, 0]$ و $x\sqrt{۱ - x^{۲}} \ge 0$ است در $[0, ۱]$ ، پس

$$A = \int_{-۱}^{0} -x\sqrt{۱ - x^{۲}}\, dx + \int_{0}^{۱} x\sqrt{۱ - x^{۲}}\, dx$$

فرض می کنیم $u = ۱ - x^{۲}$ باشد ، پس $du = -۲xdx$ است ، پس

$$A = \int_{0}^{۱} \sqrt{u} * \frac{۱}{۲} du + \int_{۱}^{0} \sqrt{u}\left(-\frac{۱}{۲}\right) du$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{0}^{۱} \sqrt{u} du + \frac{۱}{۲}\int_{0}^{۱} \sqrt{u} du = \int_{0}^{۱} \sqrt{u} du = \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{0}^{۱} = \frac{۲}{۳}$$

۴)　$f(x) = \frac{x}{x^{۲} - ۱}; \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}\right]$

عبارت $\frac{x}{x^{۲}-۱} \ge 0$ است در $\left[-\frac{۱}{۲}, 0\right]$ در صورتی که $\frac{x}{x^{۲}-۱} \le 0$ است در $\left[0, \frac{۱}{۳}\right]$ پس

$$A = \int_{-\frac{۱}{۲}}^{0} \frac{x}{x^{۲} - ۱}\, dx + \int_{0}^{\frac{۱}{۳}} \frac{-x}{x^{۲} - ۱}\, dx$$

فرض می کنیم $u = x^{۲} - ۱$ باشد ، پس $du = ۲xdx$ است و یا $\frac{۱}{۲} du = xdx$ پس

$$A = \int_{-\frac{۳}{۴}}^{-۱} \frac{۱}{۲u} du + \int_{-۱}^{-\frac{۸}{۹}} -\frac{۱}{۲u} du = \frac{۱}{۲}\ln|u|\Big|_{-\frac{۳}{۴}}^{-۱} + \left(-\frac{۱}{۲}\ln|u|\right)\Big|_{-۱}^{-\frac{۸}{۹}}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\ln\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}\ln\frac{۸}{۹} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۳}{۲}$$

در تمرینات ۹ – ۵ مساحت بین نمودارهای توابع در بازه داده شده را پیدا کنید.

۵) $f(x) = x^{۲}, g(x) = x^{۳}; [-۲, ۱]$

برای $-۲ \le x \le ۱$ داریم $f(x) \ge g(x)$ پس

$$A = \int_{-۲}^{۱} \left(x^{۲} - x^{۳}\right) dx = \left(\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)\Bigg|_{-۲}^{۱} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۲۰}{۳} = \frac{۲۷}{۴}$$

۶) $g(x) = x^{۲} + ۴x, k(x) = x - ۲; [-۳, 0]$

$$g(x) - k(x) = x^{۲} + ۴x - x + ۲ = x^{۲} + ۳x + ۲ = (x + ۱)(x + ۲)$$

پس $g(x) - k(x) \ge 0$ است برای $-۳ \le x \le -۲$ و برای $-۱ \le x \le 0$ در صورتی که $g(x) - k(x) \le 0$ است برای $-۲ \le x \le -۱$ پس

$$A = \int_{-۳}^{-۲} \left(x^{۲} + ۳x + ۲\right) dx + \int_{-۲}^{-۱} \left(-x^{۲} - ۳x - ۲\right) dx + \int_{-۱}^{0} \left(x^{۲} + ۳x + ۲\right) dx$$

$$= \left(\frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۳}{۲}x^{۲} + ۲x\right)\Bigg|_{-۳}^{-۲} + \left(-\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۳}{۲}x^{۲} - ۲x\right)\Bigg|_{-۲}^{-۱}$$

$$+ \left(\frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۳}{۲}x^{۲} + ۲x\right)\Bigg|_{-۱}^{0} = \frac{۵}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۵}{۶} = \frac{۱۱}{۶}$$

۷) $f(x) = sec^{۲}x, g(x) = \sec x \tan x; \left[-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۶}\right]$

چون $\sec x \ge \tan x$ و $\sec x > 0$ است برای $-\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۶}$ پس داریم $f(x) \ge g(x)$ است برای $-\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۶}$ لذا

$$A = \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۶}} \left(sec^{۲}x - \sec x \tan x\right) dx = (\tan x - \sec x)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۶}}$$

$$= \left(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳} - \frac{۲}{۳}\sqrt{۳}\right) - \left(-\sqrt{۳} - ۲\right) = \frac{۲}{۳}\sqrt{۳} + ۲$$

۸) $g(x) = sin^{۲}x, k(x) = \tan x; \left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right]$

چون $g(x) \ge k(x)$ است برای $-\frac{\pi}{۴} \le x \le 0$ و $g(x) \le k(x)$ است برای $0 \le x \le \frac{\pi}{۴}$ پس داریم

$$A=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{0}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x-\tan x\right)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}-\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x-\tan x\right)dx$$
$$=\left(\frac{x}{۲}-\frac{\sin ۲x}{۴}+\ln|\cos x|\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۴}}^{0}+\left(-\frac{x}{۲}+\frac{\sin ۲x}{۴}-\ln|\cos x|\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{۴}}$$
$$=\left(\frac{\pi}{۸}-\frac{۱}{۴}-\ln\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+\left(-\frac{\pi}{۸}+\frac{۱}{۴}-\ln\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-۲\ln\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\ln ۲$$

۹)　$f(x)=x\sqrt{۲x+۳},g(x)=x^{۲};[-۱,۳]$

چون $g(x)\geq f(x)$ است برای $-۱\leq x\leq 0$ و $f(x)\geq g(x)$ است برای $0\leq x\leq ۳$
پس داریم

$$A=\int_{-۱}^{0}\left(x^{۲}-x\sqrt{۲x+۳}\right)dx+\int_{0}^{۳}-\left(x^{۲}-x\sqrt{۲x+۳}\right)dx$$
$$=\frac{۱}{۳}x^{۳}\Bigg|_{-۱}^{0}-\int_{-۱}^{0}x\sqrt{۲x+۳}\;dx-\frac{۱}{۳}x^{۳}\Bigg|_{0}^{۳}+\int_{0}^{۳}x\sqrt{۲x+۳}\,dx$$
$$\overset{u=۲x+۳}{\cong}\ \frac{۱}{۳}-\int_{۱}^{۳}\frac{۱}{۲}(u-۳)\sqrt{u}\,*\frac{۱}{۲}du-۹+\int_{۳}^{۹}\frac{۱}{۲}(u-۳)\sqrt{u}*\frac{۱}{۲}du$$
$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}-۲u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Bigg|_{۱}^{۳}-۹+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}-۲u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Bigg|_{۳}^{۹}$$
$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۵}-۶\sqrt{۳}\right)-\left(\frac{۲}{۵}-۲\right)\right]-۹+\frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۲}{۵}*۲۴۳-۵۴\right)-\left(\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۵}-۶\sqrt{۳}\right)\right]$$
$$=\frac{۶}{۵}\sqrt{۳}+\frac{۲۶}{۱۵}$$

در تمرینات ۱۲ــ ۱۰ نمودار های f و g یک ناحیه را محصور می کنند ، مساحت آن ناحیه را پیدا کنید.

۱۰)　$f(x)=x^{۳},g(x)=x^{\frac{۱}{۳}}$

نمودار ها یک دیگر را در (x,y) قطع می کنند ، اگر

$$x^{۳} = y = x^{\frac{۱}{۳}}$$
$$x^{۳} - x^{\frac{۱}{۳}} = 0$$
$$x^{\frac{۱}{۳}}\left(x^{\frac{۸}{۳}} - ۱\right) = 0$$
$$x = 0 \text{ یا } x = ۱$$

باشد ، همچنین $f(x) \geq g(x)$ است در $[-۱, 0]$ و $g(x) \geq f(x)$ است در $[0, ۱]$ پس

$$A = \int_{-۱}^{0}\left(x^{۳} - x^{\frac{۱}{۳}}\right)dx + \int_{0}^{۱}\left(x^{\frac{۱}{۳}} - x^{۳}\right)dx$$
$$= \left(\frac{۱}{۴}x^{۴} - \frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}}\right)\Bigg|_{-۱}^{0} + \left(\frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)\Bigg|_{0}^{۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

۱۱)　$f(x) = x^{۲} + ۱, g(x) = ۲x + ۹$

نمودار ها یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر

$$x^{۲} + ۱ = ۲x + ۹$$
$$x^{۲} - ۲x - ۸ = 0$$
$$x = -۲ \text{ یا } x = ۴$$

باشد ، همچنین $g(x) \geq f(x)$ است در $[-۲, ۴]$ پس

$$A = \int_{-۲}^{۴}\left[\left(۲x + ۹\right) - \left(x^{۲} + ۱\right)\right]dx = \int_{-۲}^{۴}\left(۲x - x^{۲} + ۸\right)dx$$
$$= \left(x^{۲} - \frac{۱}{۳}x^{۳} + ۸x\right)\Bigg|_{-۲}^{۴} = \left(۱۶ - \frac{۶۴}{۳} + ۳۲\right) - \left(۴ + \frac{۸}{۳} - ۱۶\right) = ۳۶$$

۱۲)　$f(x) = x^{۳} + ۱, g(x) = \left(x + ۱\right)^{۲}$

نمودار ها یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر

$$x^{۳} + ۱ = \left(x + ۱\right)^{۲}$$
$$x^{۳} + ۱ = x^{۲} + ۲x + ۱$$
$$x^{۳} - x^{۲} - ۲x = 0$$
$$x\left(x^{۲} - x - ۲\right) = 0$$
$$x\left(x - ۲\right)\left(x + ۱\right) = 0$$
$$x = 0 \text{ یا } x = ۲ \text{ یا } x = -۱$$

باشد ، همچنین $f(x) \ge g(x)$ است در $[-۱, 0]$ و $g(x) \ge f(x)$ است در $[0, ۲]$ پس

$$A = \int_{-۱}^{0} \left[\left(x^۳ + ۱\right) - (x + ۱)^۲\right] dx + \int_{0}^{۲} \left[(x + ۱)^۲ - \left(x^۳ + ۱\right)\right] dx$$

$$= \int_{-۱}^{0} \left(x^۳ - x^۲ - ۲x\right) dx + \int_{0}^{۲} \left(-x^۳ + x^۲ + ۲x\right) dx$$

$$= \left(\frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲\right)\Big|_{-۱}^{0} + \left(-\frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۳}x^۳ + x^۲\right)\Big|_{0}^{۲}$$

$$= -\left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} - ۱\right) + \left(-۴ + \frac{۸}{۳} + ۴\right) = \frac{۳۷}{۱۲}$$

در تمرینات ۱۴ — ۱۳ مساحت ناحیه بین نمودار های تساوی های داده شده را پیدا کنید.

۱۳) $y^۲ = ۶x, x^۲ = ۶y$

نمودار ها یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر

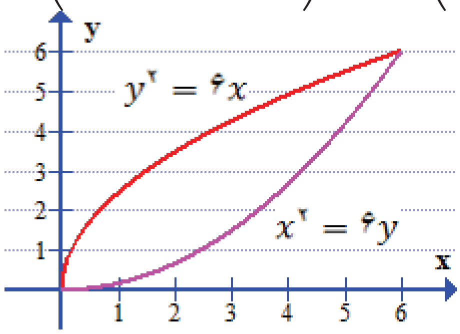
$$۶x = y^۲ = \left(\frac{x^۲}{۶}\right)^۲$$

$$x^۴ = ۲۱۶x$$

$$x = 0 \text{ یا } x = ۶$$

باشد ، پس نمودار ها در $(0,0)$ و $(۶, ۶)$ با هم تلاقی می کنند.

$$A = \int_{0}^{۶} \left(\sqrt{۶x} - \frac{۱}{۲}x^۲\right) dx = \left(\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۱۸}x^۳\right)\Big|_{0}^{۶} = \left(\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}\right)\left(۶\sqrt{۶}\right) - ۱۲ = ۱۲$$



۱۴) $y^{۲} = ۲x - ۵\,, y = x - ۴$

نمودار ها یک دیگر را در (x,y) قطع می کنند ، اگر

$$\frac{۱}{۲}\left(y^{۲} + ۵\right) = x = y + ۴$$

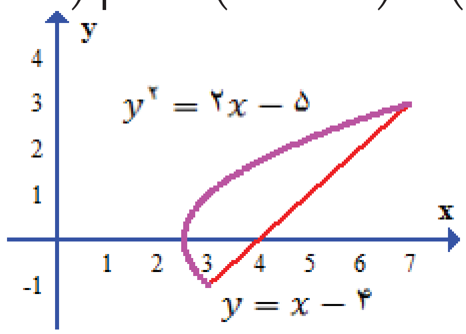
$$y^{۲} - ۲y - ۳ = 0$$

$y = -۱$ یا $y = ۳$

باشد ، پس نمودار ها در $(۳,-۱)$ و $(۷,۳)$ یک دیگر را قطع می کنند. پس

$$A = \int_{-۱}^{۳} (y + ۴) - \frac{۱}{۲}\left(y^{۲} + ۵\right) dy = \int_{-۱}^{۳} \left(y - \frac{۱}{۲}y^{۲} + \frac{۳}{۲}\right) dy$$

$$= \left(\frac{۱}{۲}y^{۲} - \frac{۱}{۶}y^{۳} + \frac{۳}{۲}y\right)\Big|_{-۱}^{۳} = \left(\frac{۹}{۲} - \frac{۹}{۲} + \frac{۹}{۲}\right) - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} - \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱۶}{۳}$$



در تمرین زیر نمودار های سه معادله یک ناحیه را محصور می کنند. مساحت آن ناحیه را پیدا کنید.

۱۵ $y = x + ۲, y = -۳x + ۶, y = \dfrac{۲ - x}{۳}$

نمودار های $y = x + ۲$ و $y = \frac{۱}{۳}(۲ - x)$ در $(-۱,۱)$ یک دیگر را قطع می کنند.

نمودار های $y = x + ۲$ و $y = -۳x + ۶$ در $(۱,۳)$ یک دیگر را قطع می کنند.

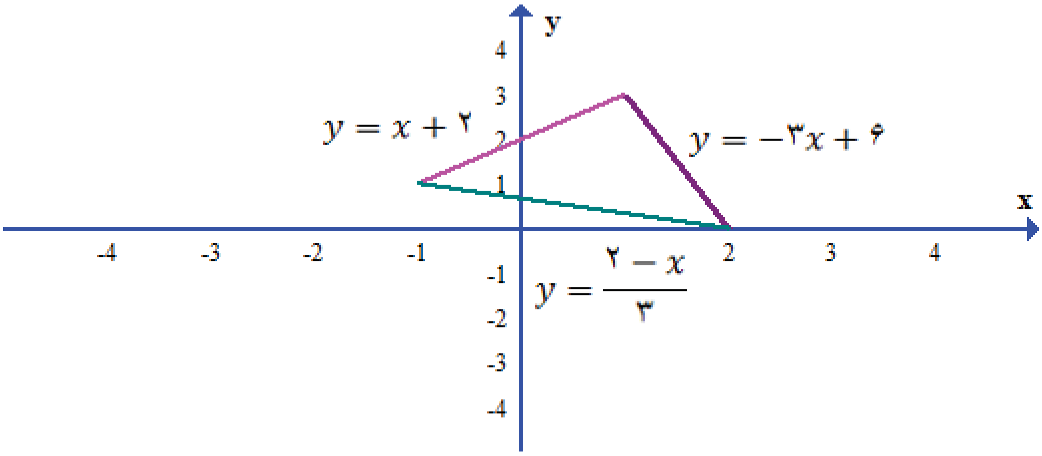
نمودار های $y = -۳x + ۶$ و $y = \frac{۱}{۳}(۲ - x)$ در $(۲,0)$ یک دیگر را قطع می کنند.

پس داریم

$$A = \int_{-۱}^{۱} \left[(x + ۲) - \frac{۱}{۳}(۲ - x)\right] dx + \int_{۱}^{۲} \left[(-۳x + ۶) - \frac{۱}{۳}(۲ - x)\right] dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱} \left(\frac{۴}{۳}x + \frac{۴}{۳}\right) dx + \int_{۱}^{۲} \left(\frac{۱۶}{۳} - \frac{۸}{۳}x\right) dx$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(۲x^{۲} + ۴x\right)\Big|_{-۱}^{۱} + \frac{۱}{۳}\left(۱۶x - ۴x^{۲}\right)\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۸}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۴$$



در تمرینات ۱۷ – ۱۶ مساحت بین نمودار های معادله های داده شده را پیدا کنید.

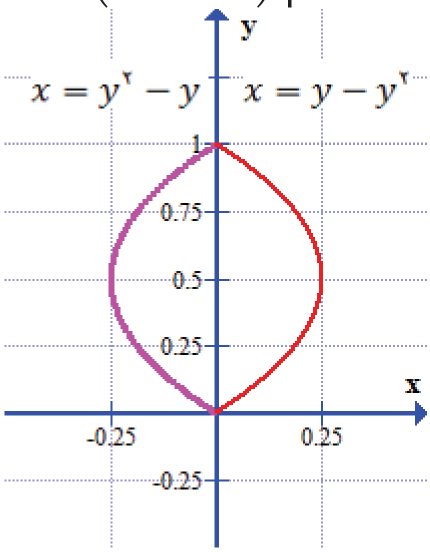
۱۶) $x = y^{۲} - y$ و $x = y - y^{۲}$

نمودار ها یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر

$$y^{۲} - y = x = y - y^{۲}$$
$$۲\left(y^{۲} - y\right) = 0$$
$$y = 0 \quad \text{یا} \quad y = ۱$$

باشد ، پس

$$A = \int_0^{۱} \left[\left(y - y^{۲}\right) - \left(y^{۲} - y\right)\right] dy = \int_0^{۱} ۲\left(y - y^{۲}\right) dy$$
$$= \left(y^{۲} - \frac{۲}{۳} y^{۳}\right)\Big|_0^{۱} = \frac{۱}{۳}$$



۱۷)　$x = ۶ - y - y^۲$ و $x = y^۲$

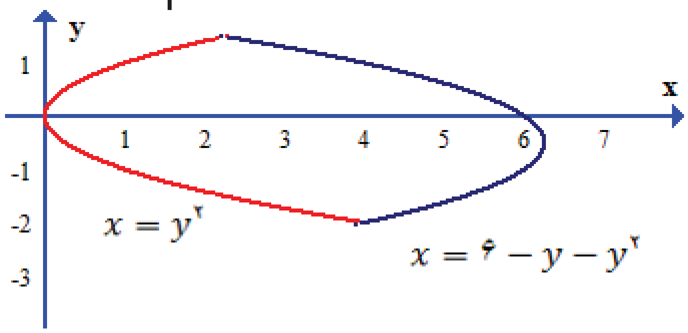
نمودار ها یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند ، اگر

$$y^۲ = x = ۶ - y - y^۲$$
$$۲y^۲ + y - ۶ = 0$$
$$(۲y - ۳)(y + ۲) = 0$$
$$y = -۲ \quad \text{یا} \quad y = \frac{۳}{۲}$$

باشد ، پس

$$A = \int_{-۲}^{\frac{۳}{۲}} \left[\left(۶ - y - y^۲\right) - y^۲\right] dy = \int_{-۲}^{\frac{۳}{۲}} \left(۶ - y - ۲y^۲\right) dy$$

$$= \left(۶y - \frac{۱}{۲}y^۲ - \frac{۲}{۳}y^۳\right)\Bigg|_{-۲}^{\frac{۳}{۲}} = \left(۹ - \frac{۹}{۸} - \frac{۹}{۴}\right) - \left(-۱۲ - ۲ + \frac{۱۶}{۳}\right) = \frac{۳۴۳}{۲۴}$$



۱.۹ ـ انتگرال توابع نمایی و معکوس توابع مثلثاتی
Integrals of Exponential Functions and Inverse Trigonometric Functions

جهت اطلاع کامل در مورد حد و مشتق لطفا به کتاب حساب دیفرانسیل آرمان به همین قلم مراجعه شود.

انتگرال e^x

در کتاب حساب دیفرانسیل ثابت کردیم که

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad (۱)$$

است. پس

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad (۲)$$

پس تابع نمایی طبیعی ، یک انتگرال نا معین خودش است.

مثال ۱ـ انتگرال $\int e^{-۳x}\,dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از روش جانشینی ، داریم

فرض می کنیم $u = -۳x$ باشد ، پس $du = -۳dx$ است.

$$\int \overbrace{e^{-۳x}}^{e^u}\ \overbrace{dx}^{-\frac{۱}{۳}du} = -\frac{۱}{۳}\int e^u du = -\frac{۱}{۳}e^u + C = -\frac{۱}{۳}e^{-۳x} + C$$

مثال ۲ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\pi} (\sin x) e^{\cos x} dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x dx$ است. اگر $x = 0$ باشد ، $u = ۱$ است ، و اگر $x = \pi$ باشد ، $u = -۱$ است. پس

$$\int_0^{\pi} (\sin x) e^{\cos x} dx = \int_0^{\pi} \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u}\ \overbrace{\sin x\, dx}^{-du} = -\int_۱^{-۱} e^u du$$

$$= -e^u\Big|_۱^{-۱} = -e^{-۱} - \left(-e^{۱}\right) = e - e^{-۱}$$

در کتاب حساب دیفرانسیل ثابت کردیم که

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-۱} \quad (۳)}$$

حال اگر در فرمول (۳) بجای r بگذاریم $r+۱$ خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\left(x^{r+۱}\right) = (r+۱)x^r$$

اگر دو طرف معادله بالا را بر $r+۱$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{r+۱}x^{r+۱}\right) = x^r \quad ، \quad r \neq -۱$$

و لذا

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{۱}{r+۱}x^{r+۱} + C \;،\quad r \neq -۱ \quad (۴)}$$

مثال ۳ ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_۱^۲ x^{\sqrt{۳}} dx$$

پاسخ

$$\int_۱^۲ x^{\sqrt{۳}} dx = \frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}x^{\sqrt{۳}+۱}\Big|_۱^۲ = \frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}\left(۲^{\sqrt{۳}+۱}\right) - \frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}\left(۱^{\sqrt{۳}+۱}\right)$$

$$= \frac{۲\left(۲^{\sqrt{۳}}\right) - ۱}{\sqrt{۳}+۱}$$

در کتاب حساب دیفرانسیل ثابت کردیم که

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$$

است ، حال اگر هر دو طرف معادله بالا را بر $\ln a$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{\ln a}a^x\right) = a^x \quad (۵)}$$

و لذا

$$\int a^x dx = \frac{۱}{\ln a} a^x + C \qquad (۶)$$

مثال ۴ - انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{۳} ۳^x dx$$

پاسخ

$$\int_0^{۳} ۳^x dx = \frac{۱}{\ln ۳}\, ۳^x \Big|_0^{۳} = \frac{۱}{\ln ۳} ۳^{۳} - \frac{۱}{\ln ۳} ۳^0 = \frac{۲۷}{\ln ۳} - \frac{۱}{\ln ۳} = \frac{۲۶}{\ln ۳}$$

در کتاب حساب دیفرانسیل ثابت کردیم که

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \quad ، \; -۱ < x < ۱ \qquad (۷)$$

است ، پس

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx = \arcsin x + C \qquad (۸)$$

مثال ۵- انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۹ - x^{۲}}} dx$$

پاسخ

ابتدا از مخرج ، عدد ۹ را فاکتور می گیریم.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۹ - x^{۲}}} dx = \int \frac{۱}{\sqrt{۹\left(۱ - \frac{x^{۲}}{۹}\right)}} dx = \frac{۱}{۳} \int \frac{۱}{\sqrt{۱ - \left(\frac{x}{۳}\right)^{۲}}} dx$$

فرض می کنیم $u=\frac{x}{۳}$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{۳}dx$ است.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۹-x^۲}}dx=\frac{۱}{۳}\int \overbrace{\frac{۱}{\sqrt{۱-\left(\frac{x}{۳}\right)^۲}}}^{\frac{۱}{\sqrt{۱-u^۲}}}\overbrace{dx}^{۳du}=\frac{۱}{۳}\int \frac{۱}{\sqrt{۱-u^۲}}۳du$$

$$=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x}{۳}+C$$

به همین طریق می توان نشان داد که

$$\boxed{\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad , \quad a>0 \qquad (۹)}$$

مثال ۶ ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۴x-x^۲}}dx$$

پاسخ

می خواهیم مخرج دارای شکل $\sqrt{a^۲-u^۲}$ داشته باشد. برای این کار عبارت داخل رادیکال را مربع کامل می کنیم. همان طور که در کتاب کامل جبر به همین قلم گفته شده است.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۴x-x^۲}}dx=\int \frac{۱}{\sqrt{۴-(۴-۴x+x^۲)}}dx=\int \frac{۱}{\sqrt{۴-(x-۲)^۲}}dx$$

حالا فرض می کنیم $u=x-۲$ باشد ، پس $du=dx$ است. لذا

$$\int \overbrace{\frac{۱}{\sqrt{۴-(x-۲)^۲}}}^{\frac{۱}{\sqrt{۴-u^۲}}}\overbrace{dx}^{du}=\int \frac{۱}{\sqrt{۴-u^۲}}du\overset{(۹)}{\cong}\arcsin\frac{u}{۲}+C=\arcsin\frac{x-۲}{۲}+C$$

مثال ۵ ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{3}^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

پاسخ

باز هم فرض می کنیم $u = x - 2$ باشد. اما حدود انتگرال باید بطور مناسب تغییر کند. یعنی اگر $x = 3$ باشد ، پس $u = 1$ است. و اگر $x = 2 + \sqrt{2}$ باشد ، پس $u = \sqrt{2}$ است. لذا

$$\int_{3}^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int_{3}^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

$$= \arcsin\frac{u}{2}\Big|_{1}^{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2}$$

در کتاب حساب دیفرانسیل ثابت کردیم که

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1} \qquad (10)}$$

است ، پس

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C \qquad (11)}$$

مثال ۶ ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{1}{x^2+16}\,dx$$

پاسخ

می خواهیم مخرج شکل $u^2 + 1$ داشته باشد. پس از مخرج عدد ۱۶ را فاکتور میگیریم.

$$\int \frac{1}{x^2+16}\,dx = \int \frac{1}{16\left(\frac{x^2}{16}+1\right)}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\,dx$$

پس فرض می کنیم $u = \frac{x}{۴}$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۴}dx$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{x^{۲} + ۱۶}dx = \frac{۱}{۱۶}\int \overbrace{\frac{۱}{\left(\frac{x}{۴}\right)^{۲} + ۱}}^{\frac{۱}{u^{۲}+۱}} \overbrace{dx}^{۴du} = \frac{۱}{۱۶}\int \frac{۱}{u^{۲} + ۱}۴du$$

$$= \frac{۱}{۴}\arctan u + C = \frac{۱}{۴}\arctan\frac{x}{۴} + C$$

پس بطور کلی اگر $a > 0$ باشد ، داریم

$$\boxed{\int \frac{۱}{x^{۲} + a^{۲}}dx = \frac{۱}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (۱۲)}$$

فرمول شماره (۱۲) را می توان ثابت کرد. فرض کنید $u = \frac{x}{a}$ باشد. سپس عینا ماند حل مثال ۶ عمل کنید. و یا از دو طرف فرمول (۱۲) مشتق بگیرید. چون انتگرال های به شکل شماره (۱۲) مکرر پیش می آید ، توصیه می شود که آنرا حفظ کنید.

مثال ۷ - انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{۲x^{۲} + ۲x + ۱}dx$$

پاسخ

می خواهیم مخرج به شکل $u^{۲} + a^{۲}$ باشد. پس از عدد ۲ فاکتور می گیریم. و سپس آن را به صورت مربع کامل می نویسیم.

$$\int \frac{۱}{۲x^{۲} + ۲x + ۱}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{x^{۲} + x + \frac{۱}{۲}}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}dx$$

حالا عمل جانشینی انجام می دهیم. فرض می کنیم $u = x + \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $du = dx$ است.

$$\int \frac{۱}{۲x^{۲} + ۲x + ۱}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{u^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}du = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\arctan\frac{u}{\frac{۱}{۲}} + C$$

$$= \int \arctan ۲\left(x+\frac{۱}{۲}\right)+C=\arctan(۲x+۱)+C$$

بقیه معکوس توابع مثلثاتی The Remaining Inverse Trigonometric Functions

لطفا از چپ به راست بخوانید.

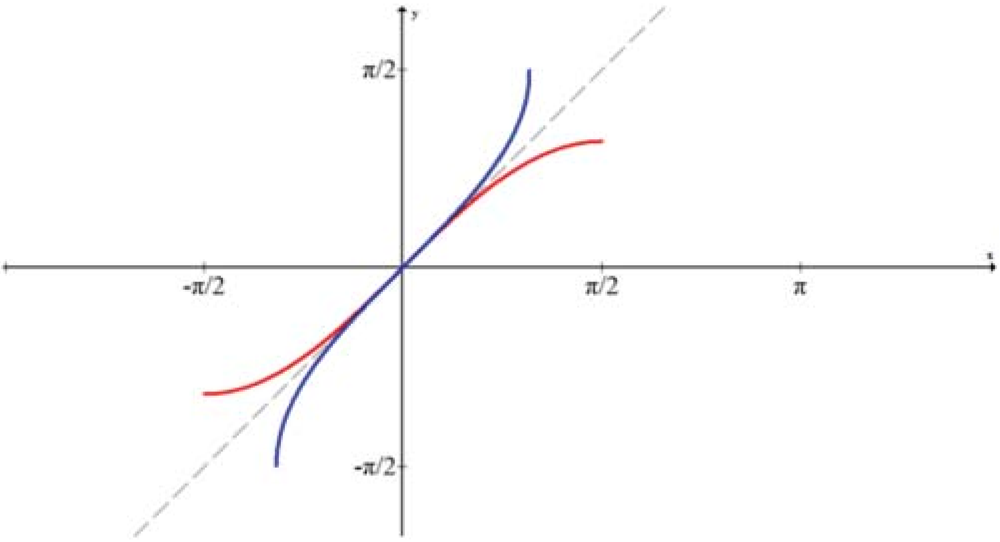
$\arccos x = y$ فقط و فقط اگر $\cos y = x$ برای $-۱ \le x \le ۱$ و $0 \le y \le \pi$

$\operatorname{arccot} x = y$ فقط و فقط اگر $\cot y = x$, برای هر مقدار x, و $0 < y < \pi$

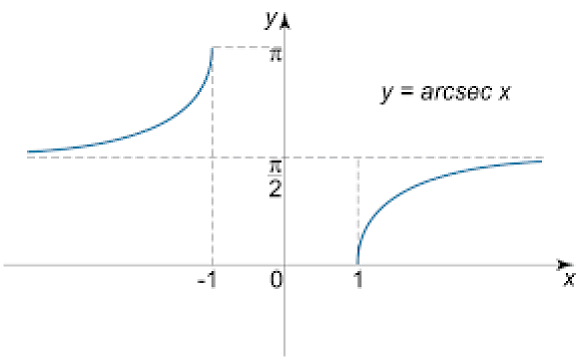
$\operatorname{arcsec} x = y$ فقط و فقط اگر $\sec y = x$ برای $|x| \ge ۱$ و برای $0 \le y \le \frac{\pi}{۲}$ یا $\pi \le y < \frac{۳\pi}{۲}$

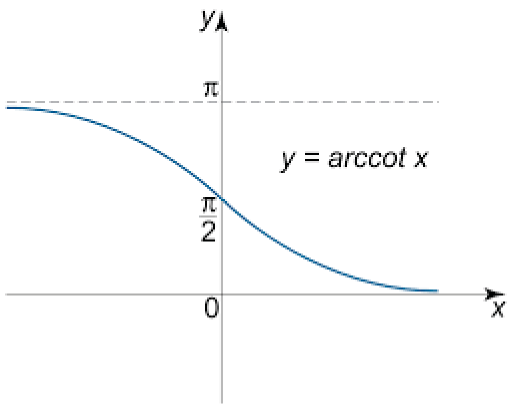
$\operatorname{arccsc} x = y$ فقط و فقط اگر $\csc y = x$ برای $|x| \ge ۱$ و برای $0 < y \le \frac{\pi}{۲}$ یا $\pi < y \le \frac{۳\pi}{۲}$

در تصویر زیر ، نمودار قرمز رنگ $\sin y = x$ است و نمودار آبی $\arcsin x = y$ است.

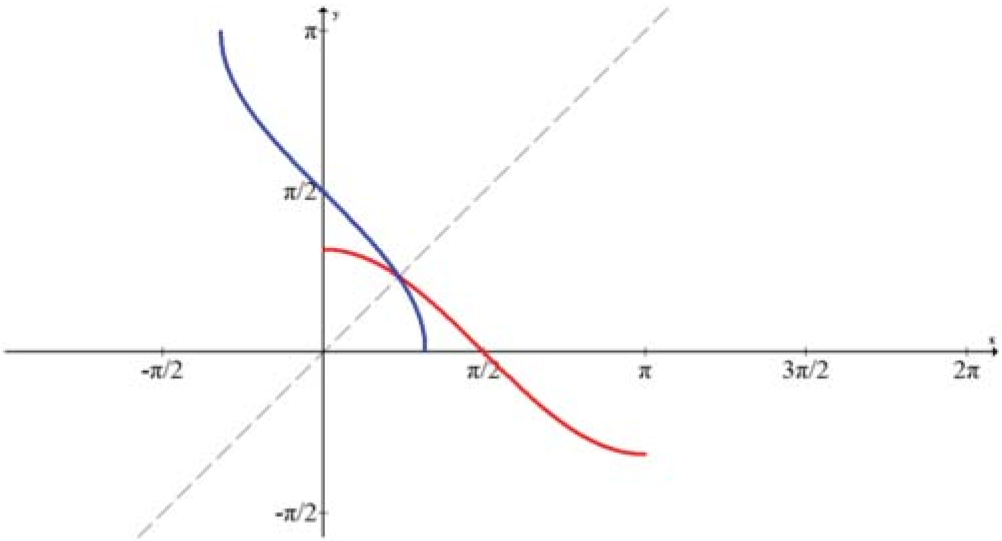


نمودار های $y = \operatorname{arcsec} x$ و $y = \operatorname{arccot} x$

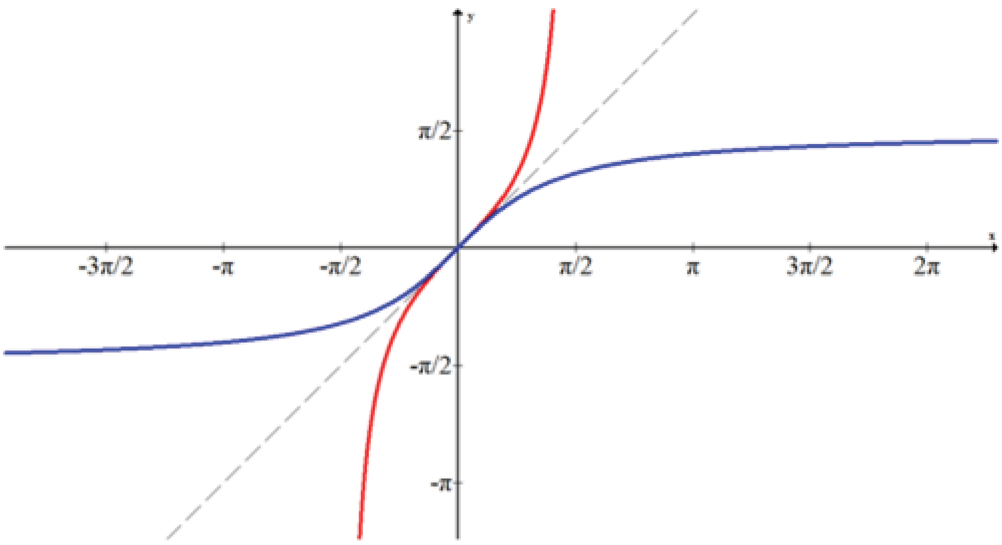




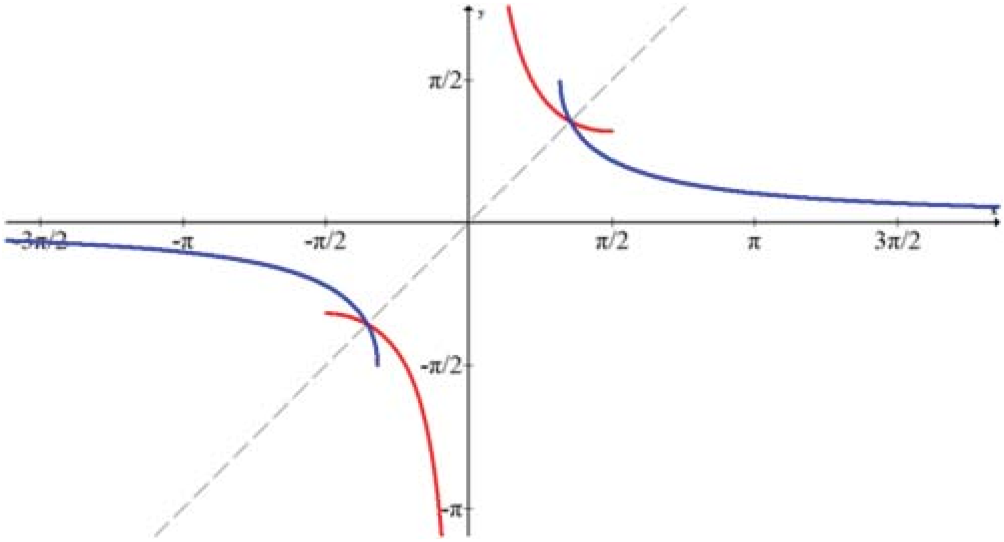
در تصویر زیر ، نمودار قرمز رنگ $\cos y = x$ است و نمودار آبی $\arccos x = y$ است.



در تصویر زیر ، نمودار قرمز رنگ $\tan y = x$ است و نمودار آبی $\arctan x = y$ است.



در تصویر زیر ، نمودار قرمز رنگ $\csc y = x$ است و نمودار آبی $\operatorname{arccsc} x = y$ است.



به همان طریق که در کتاب حساب دیفرانسیل آرمان توسط این قلم مشتق های $arcsine$ و $arctangent$ را پیدا کردیم ، می توان مشتق های معکوس توابع زیر را هم پیدا کرد.

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \qquad (۱۳)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - ۱}} \qquad (۱۴)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-۱}{x^۲ + ۱} \qquad (۱۵)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{-۱}{x\sqrt{x^۲ - ۱}} \qquad (۱۶)$$

انتگرال های مربوطه را هم در ذیل ملاحظه می کنید.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = -\arccos\frac{x}{a} + C \qquad (۱۷)$$

$$\int \frac{۱}{x^۲ + a^۲} dx = -\frac{۱}{a}\text{arccot}\frac{x}{a} + C \qquad (۱۸)$$

$$\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}} dx = \frac{۱}{a}\text{arcsec}\frac{x}{a} + C \qquad (۱۹)$$

$$\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}} dx = -\frac{۱}{a}\text{arccsc}\frac{x}{a} + C \qquad (۲۰)$$

ملاحظه می کنید که می‌توان تابع $arcsine$ ویا تابع $arccosine$ را برای محاسبه انتگرال های شماره (۹) و (۱۷) بکار برد. همچنین تابع $arctangent$ و یا $arccotangent$ را برای محاسبه انتگرال های (۱۲) و (۱۸) بکار برد. و $arcsecant$ و $arccosecant$ برای فرمول های (۱۹) و (۲۰)

$$sinh^{-۱}x = \ln\left(x + \sqrt{x^۲ + ۱}\right) \qquad (۲۱)$$

اگر از (۲۱) مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}sinh^{-۱} = \frac{۱ + \dfrac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱}}}{x + \sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$$

پس

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}} dx = sinh^{-۱}x + C \qquad (۲۲)$$

مثال ۸ ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-۱}^{۳} \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}} dx$$

پاسخ

با استفاده از (۲۱) و (۲۲) داریم.

$$\int_{-۱}^{۳} \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}} dx = sinh^{-۱}x \Big|_{-۱}^{۳} = sinh^{-۱}۳ - sinh^{-۱}(-۱)$$

$$= \ln\left(۳+\sqrt{۱۰}\right) - \ln\left(-۱+\sqrt{۲}\right) = \ln\frac{۳+\sqrt{۱۰}}{-۱+\sqrt{۲}}$$

تمرینات ۱.۹

در تمرینات ۹ – ۱ انتگرال ها را پیدا کنید.

۱) $\int e^{-۴x} dx$

۲) $\int_0^{\sqrt{۲}} ye^{y^{۲}} dy$

۳) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} (\cos y)e^{\sin y} dy$

۴) $\int \frac{e^t}{e^t+۱} dt$

۵) $\int \frac{e^{۲t}}{\sqrt{e^{۲t}-۴}} dt$

۶) $$\int \frac{e^{-t}\ln(۱+e^{-t})}{۱+e^{-t}}\,dt$$

۷) $$\int \frac{۱}{e^{\frac{-x}{۲}}}\,dx$$

۸) $$\int \frac{۱}{۱+e^{x}}\,dx$$

۹) $$\int e^{(x-e^{x})}\,dx$$

در تمرینات ۱۳ـــ ۱۰ انتگرال ها را پیدا کنید.

۱۰) $$\int ۲^{x}\,dx$$

۱۱) $$\int_{-۲}^{0} ۳^{-x}\,dx$$

۱۲) $$\int x * ۵^{-x^{۲}}\,dx$$

۱۳) $$\int x^{۲\pi}\,dx$$

در تمرینات ۲۳ ــ ۱۴ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۱۴) $$\int \frac{۱}{x^{۲}+۱۶}\,dx$$

۱۵) $$\int \frac{۱}{۹x^{۲}+۱۶}\,dx$$

۱۶) $\int \frac{1}{2x^2+4x+6}dx$

۱۷) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

۱۸) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}dx$

۱۹) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$

۲۰) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx$

۲۱) $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx$

۲۲) $\int \frac{\cos t}{9+sin^2t}dt$

۲۳) $\int \frac{\cos 4x}{\sin 4x\sqrt{16sin^2 4x-4}}dx$

در تمرینات ۲۵ – ۲۴ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۲۴) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

۲۵) $\int_{-۲}^{۲\sqrt{۳}-۲} \frac{۱}{u^۲+۴u+۸} du$

۲۶- مساحت محصور بین محور y و نمودار های توابع زیر را پیدا کنید.

$$y = \frac{۱}{x^۲ - ۲x + ۴} \quad \text{و} \quad y = \frac{۱}{۳}$$

در تمرینات ۲۸ – ۲۷ انتگرال ها را پیدا کنید.

۲۷) $\int sinh^۲ x dx$

۲۸) $\int_{۵}^{۱۰} \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}} dx$

۲۹– مساحت ناحیه بین نمودار $\cosh x$ و محور x در $[-۳,۴]$ را حساب کنید.

پاسخ تمرینات ۱.۹

در تمرینات ۹ – ۱ انتگرال ها را پیدا کنید.

۱) $\int e^{-۴x} dx$

فرض می کنیم $u = -۴x$ باشد ، پس $du = -۴dx$ و یا $-\frac{۱}{۴}du = dx$ است. پس

$$\int e^{-۴x}dx = \int -\frac{۱}{۴}e^u du = -\frac{۱}{۴}e^u + C = -\frac{۱}{۴}e^{-۴x} + C$$

۲) $\int_0^{\sqrt{۲}} ye^{y^۲} dy$

فرض می کنیم $u = y^۲$ باشد ، پس $du = ۲ydy$ است و یا $\frac{۱}{۲}du = ydy$ است ، پس

$$\int_0^{\sqrt{۲}} ye^{y^۲}dy = \int_0^{۲} \frac{۱}{۲}e^u du = \frac{۱}{۲}e^u \Big|_0^{۲} = \frac{۱}{۲}\left(e^۲ - ۱\right)$$

۳) $$\int_0^{\frac{\pi}{۲}}(\cos y)e^{\sin y}dy$$

فرض می کنیم $u=\sin y$ باشد ، پس $du=\cos y dy$ است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۲}}(\cos y)e^{\sin y}dy=\int_0^{۱}e^u du=e^u\Big|_0^{۱}=e-۱$$

۴) $$\int\frac{e^t}{e^t+۱}dt$$

فرض می کنیم $u=e^t+۱$ باشد ، پس $du=e^t dt$ است.

$$\int\frac{e^t}{e^t+۱}dt=\int\frac{۱}{u}du=\ln|u|+C=\ln\left|e^t+۱\right|+C$$

۵) $$\int\frac{e^{۲t}}{\sqrt{e^{۲t}-۴}}dt$$

فرض می کنیم $u=e^{۲t}-۴$ باشد ، پس $du=۲e^{۲t}dt$ است.

$$\int\frac{e^{۲t}}{\sqrt{e^{۲t}-۴}}dt=\int\frac{۱}{۲\sqrt{u}}du=\sqrt{u}+C=\sqrt{e^{۲t}-۴}+C$$

۶) $$\int\frac{e^{-t}\ln\left(۱+e^{-t}\right)}{۱+e^{-t}}dt$$

فرض می کنیم $u=\ln\left(۱+e^{-t}\right)$ باشد. پس $du=-\frac{e^{-t}}{۱+e^{-t}}dt$ است.

$$\int\frac{e^{-t}\ln\left(۱+e^{-t}\right)}{۱+e^{-t}}dt=\int -u du=-\frac{۱}{۲}u^{۲}+C=-\frac{۱}{۲}\left[\ln\left(۱+e^{-t}\right)\right]^{۲}+C$$

۷) $$\int\frac{۱}{e^{\frac{-x}{۲}}}dx$$

فرض می کنیم $u=\frac{x}{۲}$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{۲}dx$ است. و یا $۲du=dx$

$$\int \frac{۱}{e^{\frac{-x}{۲}}} dx = \int e^{\frac{x}{۲}} dx = \int ۲e^{u} du = ۲e^{u} + C = ۲e^{\frac{x}{۲}} + C$$

۸) $$\int \frac{۱}{۱ + e^{x}} dx$$

فرض می کنیم $u = e^{-x} + ۱$ باشد ، پس $du = -e^{-x}dx$ است. پس

$$\int \frac{۱}{۱ + e^{x}} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + ۱} dx = \int -\frac{۱}{u} du = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln\left(e^{-x} + ۱\right) + C$$

۹) $$\int e^{(x - e^{x})} dx$$

فرض می کنیم $u = e^{x}$ باشد ، پس $du = e^{x}dx$ است.

$$\int e^{(x - e^{x})} dx = \int e^{x} e^{-(e^{x})} dx = \int e^{-u} du = -e^{-u} + C = -e^{-(e^{x})} + C$$

در تمرینات ۱۳ – ۱۰ انتگرال ها را پیدا کنید.

۱۰) $$\int ۲^{x} dx = \frac{۱}{\ln ۲} ۲^{x} + C$$

۱۱) $$\int_{-۲}^{0} ۳^{-x} dx = \int_{۲}^{0} ۳^{u} (-۱) du = \frac{-۱}{\ln ۳} ۳^{u} \Big|_{۲}^{0} = -\frac{۱}{\ln ۳}\left(۱ - ۳^{۲}\right) = \frac{۸}{\ln ۳}$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u = -x$ باشد ، پس $du = -dx$ است.

۱۲) $$\int x * ۵^{-x^{۲}} dx$$

فرض می کنیم $u = -x^{۲}$ باشد ، پس $du = -۲x dx$ است ، و یا $-\frac{۱}{۲} du = dx$

$$\int x * ۵^{-x^{۲}} dx = \int -\frac{۱}{۲} ۵^{u} du = -\frac{۱}{۲} \frac{۱}{\ln ۵} ۵^{u} + C = \frac{-۱}{۲ \ln ۵} ۵^{-x^{۲}} + C$$

۱۳) $$\int x^{۲\pi} dx = \frac{۱}{۲\pi + ۱} x^{۲\pi + ۱} + C$$

در تمرینات ۲۳ – ۱۴ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۱۴) $\int \frac{۱}{x^{۲}+۱۶}dx=\frac{۱}{۴}\arctan\frac{x}{۴}+C$

۱۵) $\int \frac{۱}{۹x^{۲}+۱۶}dx=\frac{۱}{۹}\int \frac{۱}{x^{۲}+\frac{۱۶}{۹}}dx=\frac{۱}{۹}*\frac{۳}{۴}\arctan\frac{۳x}{۴}+C=\frac{۱}{۱۲}\arctan\frac{۳x}{۴}+C$

۱۶) $\int \frac{۱}{۲x^{۲}+۴x+۶}dx=\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{(x+۱)^{۲}+۲}dx=\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{u^{۲}+۲}du$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\arctan\frac{u}{\sqrt{۲}}\right)+C=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\arctan\frac{x+۱}{\sqrt{۲}}+C$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u=x+۱$ باشد.

۱۷) $\int \frac{۱}{\sqrt{۹-۴x^{۲}}}dx=\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sqrt{\frac{۹}{۴}-x^{۲}}}dx=\frac{۱}{۲}\arcsin\frac{۲x}{۳}+C$

۱۸) $\int \frac{۱}{x\sqrt{x^{۲}-۲۵}}dx=\frac{۱}{۵}\operatorname{arcsec}\frac{x}{۵}+C$

۱۹) $\int \frac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۸}}}dx=\frac{۱}{۴}\int \frac{۱}{\sqrt{۱-u^{۲}}}du=\frac{۱}{۴}\arcsin u+C=\frac{۱}{۴}\arcsin x^{۴}+C$

در عملیات بالا فرض کردیم $u=x^{۴}$ باشد.

۲۰) $\int \frac{e^{-x}}{۱+e^{-۲x}}dx=\int \frac{-۱}{۱+u^{۲}}du=-\arctan u+C=-\arctan e^{-x}+C$

در عملیات بالا فرض کردیم $u=e^{-x}$ باشد.

۲۱) $$\int \frac{\arctan ۲x}{۱+۴x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\int u du = \frac{۱}{۴}u^۲ + C = \frac{۱}{۴}(\arctan ۲x)^۲ + C$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u = \arctan ۲x$ باشد.

۲۲) $$\int \frac{\cos t}{۹ + sin^۲ t}dt = \int \frac{۱}{۹+u^۲}du = \frac{۱}{۳}\arctan\frac{u}{۳} + C = \frac{۱}{۳}\arctan\left(\frac{۱}{۳}\sin t\right) + C$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u = \sin t$ باشد.

۲۳) $$\int \frac{\cos ۴x}{\sin ۴x\sqrt{۱۶ sin^۲ ۴x - ۴}}dx = \int \frac{۱}{\frac{۱}{۴}u\sqrt{u^۲-۴}}\left(\frac{۱}{۱۶}\right)du$$

$$= \frac{۱}{۴}\int \frac{۱}{u\sqrt{u^۲-۴}}du = \frac{۱}{۸}\operatorname{arcsec}\frac{u}{۲} + C = \frac{۱}{۸}\operatorname{arcsec}(۲\sin ۴x) + C$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u = ۴\sin ۴x$ باشد.

در تمرینات ۲۵ – ۲۴ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۲۴) $$\int_0^۲ \frac{۱}{\sqrt{۱۶-x^۲}}dx = \arcsin\frac{x}{۴}\bigg|_0^۲ = \arcsin\frac{۱}{۲} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{۶}$$

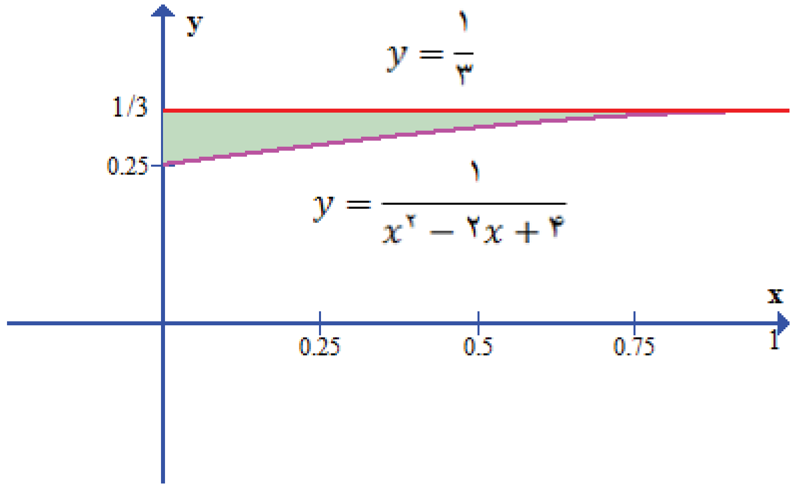
۲۵) $$\int_{-۲}^{۲\sqrt{۳}-۲} \frac{۱}{u^۲+۴u+۸}du$$

$$= \int_{-۲}^{۲\sqrt{۳}-۲} \frac{۱}{(u+۲)^۲+۴}du = \frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{u+۲}{۲}\right)\bigg|_{-۲}^{۲\sqrt{۳}-۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\arctan\sqrt{۳} - \arctan 0\right) = \frac{\pi}{۶}$$

۲۶- مساحت محصور بین محور y و نمودار های توابع زیر را پیدا کنید.

$$y=\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۴} \quad \text{و} \quad y=\frac{۱}{۳}$$



نمودار ها در (x,y) تلاقی می کنند ، اگر

$$\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۴}=y=\frac{۱}{۳}$$

$$۳=x^{۲}-۲x+۴$$

$$x^{۲}-۲x+۱=0$$

$$x=۱$$

چون

$$\frac{۱}{۳}\geq\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۴}$$

است در $[0,۱]$ پس داریم.

$$A=\int_{0}^{۱}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۴}\right)dx=\int_{0}^{۱}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{(x-۱)^{۲}+۳}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x}{۳}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\arctan\frac{x-۱}{\sqrt{۳}}\right)\Bigg|_{0}^{۱}=\left(\frac{۱}{۳}-0\right)-\left(0-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\arctan\frac{-۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۸}$$

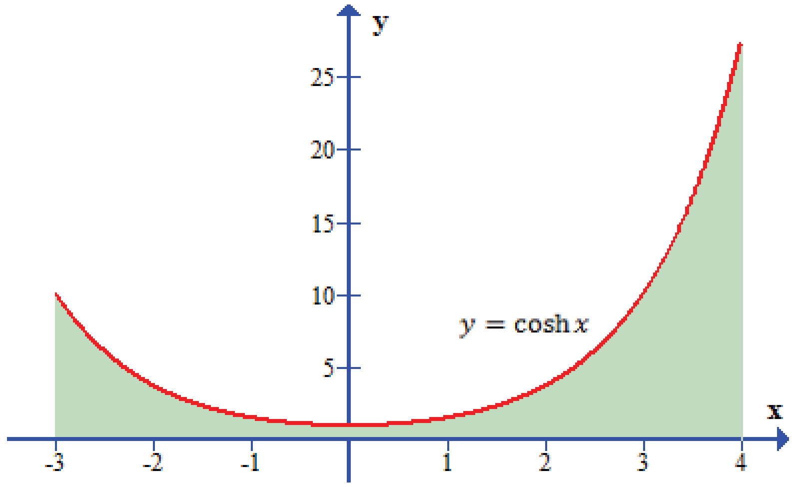
در تمرینات ۲۸ – ۲۷ انتگرال ها را پیدا کنید.

۲۷) $$\int sinh^{۲} x dx = \tanh x + C$$

۲۸) $$\int_{۵}^{۱۰} \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}} dx = sinh^{-۱} ۱۰ - sinh^{-۱} ۵$$

$$= \ln\left(۱۰+\sqrt{۱۰۱}\right) - \ln\left(۵+\sqrt{۲۶}\right) = \ln\left(\frac{۱۰+\sqrt{۱۰۱}}{۵+\sqrt{۲۶}}\right)$$

۲۹– مساحت ناحیه بین نمودار $\cosh x$ و محور x در $[-۳,۴]$ را حساب کنید.



$$A = \int_{-۳}^{۴} \cosh x \, dx = \sinh x \Big|_{-۳}^{۴} = \sinh ۴ - \sinh(-۳)$$

$$= \frac{e^{۴}-e^{-۴}}{۲} - \frac{e^{-۳}-e^{۳}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(e^{۴}-e^{-۴}-e^{-۳}+e^{۳}\right)$$

۱۰.۱ تمرینات دوره ای فصل اول

فرمول های مشتق

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$ ، C یک عدد ثابت

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \quad ، \quad r \in \mathbb{Z}، \quad r > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} * 3$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(log_a f(x)\right) = \frac{f'(x)}{(\ln a) f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{h(x)}\right) = e^{h(x)} * h'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x * \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{۱}{(\ln a)x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} * f'(x) * \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = sech^{۲} x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -csch^{۲} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}\left(Cf(x)\right) = C\, f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left((f \pm g)(x)\right) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left((fg)(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^{۲}}$$

$$\frac{d}{dx}\left((g \circ f)(x)\right) = g'\left(f(x)\right)f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \quad ، \quad -۱ < x < ۱$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$ قاعدده زنجیره ای

فرمول های انتگرال

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ قضیه اساسی حسابان

$$\int c dx = cx + C$$

$$\int x dx = \frac{۱}{۲}x^{۲} + C$$

$$\int x^{۲} dx = \frac{۱}{۳}x^{۳} + C$$

$$\int x^r dx = \frac{۱}{r+۱} * x^{r+۱} + C \quad , r \neq -۱$$

$$\int \frac{۱}{x} dx = \ln|x| + C$$

$\int (px+q)dx = \frac{۱}{۲}px^{۲} + qx + C$ ، p و q اعداد ثابت

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

اگر $g(x) \leq f(x)$ باشد در $[a,b]$ و $a \leq x \leq b$ پس

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

اگر $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ باشد در $[a,b]$ و $a \leq x \leq b$ پس

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

اگر G انتگرال نا معین g باشد ، پس

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)dx = G\big(f(x)\big) + C$$

$$\int sin^{۲}xdx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$$

$$\int cos^{۲}xdx = \frac{۱}{x}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \tan xdx - -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{۱}{\ln a} * a^x + C$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} - x^{۲}}}dx = \arcsin x + C \text{ ، } \quad a > 0$$

$$\int \frac{۱}{x^{۲} + a^{۲}}dx = \frac{۱}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}dx = sinh^{-۱}xdx + C$$

$$\int \ln xdx = x\ln x - x$$

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \left(x^{\frac{۳}{۵}} - ۸x^{\frac{۵}{۳}}\right) dx$

۲) $\int \left(x^{۳} - ۳x + ۲ - \frac{۲}{x}\right) dx$

۳) $\int \frac{۱ + \sqrt{x + ۱}}{\sqrt{x + ۱}} dx$

۴) $\int cos^{۳} ۳t \sin ۳t\, dt$

۵) $\int \sqrt{۱ + \sqrt{x}} dx$

انتگرال های زیر را حساب کنید.

۶) $\int_{-۱}^{-۲} \left(x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۵}{x^{۳}}\right) dx$

۷) $\int_{-\frac{۵\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} ۵ \cos x dx$

۸) $\int_{-۸}^{-۲} \frac{-۱}{۵u} du$

۹) $\int_{0}^{۲} \left(x^{۲} + ۳\right)\left(x^{۳} + ۹x + ۱\right)^{\frac{۱}{۳}} dx$

۱۰) $\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos t}{۱ + \sin t} dt$

۱۱) $\int_{\frac{۱}{۲۶}}^{\frac{۱}{۷}} \frac{۱}{x^{۲}}\left(\frac{x + ۱}{x}\right)^{\frac{۱}{۳}} dx$

در تمرینات زیر مساحت بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

۱۲) $f(x) = \frac{۷}{۴} x^{۲} \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}; [۲, ۴]$

۱۳) $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳; [0, ۴]$

در تمرین زیر مساحت ناحیه بین نمودار های توابع را پیدا کنید.

۱۴) $f(x) = ۲x^{۵} + ۵x^{۴}; g(x) = ۲x^{۵} + ۲۰x^{۲}$

در تمرین زیر مساحت ناحیه بین نمودار های دو رابطه زیر از $y = -۱$ تا $y = ۱$ را پیدا کنید.

۱۵) $x = y + ۳$ و $x = y^{۲}$

در تمرین زیر ، نمودار تابع f را رسم کنید. اطلاعات لازم را هم ذکر کنید.

۱۶) $f(x) = \ln\left(x^{۲} - ۴\right)$

در تمرینات زیر مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

۱۷) $F(x) = \int_0^x t\sqrt{۱ + t^{۵}}\ dt$

۱۸) $F(x) = \int_{۱}^{\ln x} \frac{۱}{t} dt$

۱۹) $f(x) = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

۲۰) $f(x) = \ln(\ln\cos x + ۲\ln\sec x)$

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۲۱) $\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^x}} dx$

۲۲) $\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^{۲x}}} dx$

۲۳) $\int (\sec x \tan x) e^{\sec x} dx$

۲۴) $\int_0^{۱} x^{۲} ۵^{-x^{۳}}\ dx$

۲۵) $\int \frac{۳}{۱ + ۴t^{۲}} dt$

۲۶) $\int_{-\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵ - ۴t^{۲}}} dt$

۲۷) $\int ۲^x \sinh ۲^x dx$

۲۸) $$\int \frac{x}{x^{۴} + ۴x^{۲} + ۱۰} dx$$

در تمرین زیر نمودار تابع را رسم کنید. مقادیر اکستریم موضعی ، تعقر و خطوط مجانب را مشخص کنید.

۲۹) $$f(x) = e^{-۲x} - e^{-۳x}$$

در تمرین زیر ، مساحت ناحیه بین نمودار های f و g در $\left[\sqrt{۲}, ۲\right]$ را پیدا کنید.

۳۰) $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^{۲} - ۱}} \quad ، \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^{۲} - ۱}}{x}$$

در تمرینات زیر انتگرال ها را پیدا کنید.

۳۱) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{۲ + \cos x} dx$$

۳۲) $$\int \frac{۱}{t} (\ln t)^{\frac{۵}{۳}} dt$$

پاسخ تمرینات دوره ای فصل اول

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $$\int \left(x^{\frac{۳}{۵}} - ۸x^{\frac{۵}{۳}}\right) dx = \frac{۵}{۸} x^{\frac{۸}{۵}} - ۸\left(\frac{۳}{۸} x^{\frac{۸}{۳}}\right) + C = \frac{۵}{۸} x^{\frac{۸}{۵}} - ۳x^{\frac{۸}{۳}} + C$$

۲) $$\int \left(x^{۳} - ۳x + ۲ - \frac{۲}{x}\right) dx = \frac{۱}{۴} x^{۴} - \frac{۳}{۲} x^{۲} + ۲x - ۲ \ln|x| + C$$

۳) $$\int \frac{۱ + \sqrt{x + ۱}}{\sqrt{x + ۱}} dx$$

فرض می کنیم $u = ۱ + \sqrt{x + ۱}$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} dx$ است. لذا

$$\int \frac{۱+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}dx=\int u(۲)du=۲\int udu=۲\left(\frac{۱}{۲}u^{۲}\right)+C=\left(۱+\sqrt{x+۱}\right)^{۲}+C$$

۴) $\int cos^{۳}۳t\sin ۳t\,dt$

فرض می کنیم $u=\cos ۳t$ باشد ، پس $du=-۳\sin ۳t\,dt$ است. لذا

$$\int cos^{۳}۳t\sin ۳t\,dt=\int u^{۳}\left(-\frac{۱}{۳}\right)du=-\frac{۱}{۳}\int u^{۳}du=-\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۴}u^{۴}\right)+C$$
$$=-\frac{۱}{۱۲}cos^{۴}۳t+C$$

۵) $\int \sqrt{۱+\sqrt{x}}dx$

فرض می کنیم $u=۱+\sqrt{x}$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$ است. و $۲\sqrt{x}=۲(u-۱)$ است.

$$\int \sqrt{۱+\sqrt{x}}dx=\int \sqrt{۱+\sqrt{x}}*۲\sqrt{x}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)dx=\int \sqrt{u}\,[۲(u-۱)]du$$
$$=\int ۲\left(u^{\frac{۳}{۲}}-u^{\frac{۱}{۲}}\right)du=۲\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)+C=\frac{۴}{۵}(۱+\sqrt{x})^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۴}{۳}(۱+\sqrt{x})^{\frac{۳}{۲}}+C$$

انتگرال های زیر را حساب کنید.

۶) $$\int_{-۱}^{-۲}\left(x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۵}{x^{۳}}\right)dx=\left(\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}+\frac{۵}{۲x^{۲}}\right)\Bigg|_{-۱}^{-۲}=\frac{۳}{۵}\left[(-۲)^{\frac{۵}{۳}}-(-۱)^{\frac{۵}{۳}}\right]$$
$$+\frac{۵}{۲}\left[\frac{۱}{(-۲)^{۲}}-\frac{۱}{(-۱)^{۲}}\right]=\frac{۳}{۵}\left[(-۲)۲^{\frac{۲}{۳}}+۱\right]+\frac{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۴}-۱\right)=\frac{۵۱}{۴۰}-\frac{۶}{۵}\left(۲^{\frac{۲}{۳}}\right)$$

۷) $$\int_{-\frac{۵\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}}۵\cos x dx=۵\sin x\Bigg|_{-\frac{۵\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}}=۵\sin\frac{\pi}{۴}-۵\sin\left(\frac{-۵\pi}{۳}\right)=\frac{۵}{۲}\left(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)$$

$$۸)\quad \int_{-۸}^{-۲} \frac{-۱}{۵u} du = -\frac{۱}{۵}\ln|u| \Big|_{-۸}^{-۲} = -\frac{۱}{۵}\ln ۲ + \frac{۱}{۵}\ln ۸ = -\frac{۱}{۵}\ln ۲ + \frac{۱}{۵}\ln ۲^{۳}$$
$$= -\frac{۱}{۵}\ln ۲ + \frac{۳}{۵}\ln ۲ = \frac{۲}{۵}\ln ۲$$

$$۹)\quad \int_0^{۲} \left(x^{۲}+۳\right)\left(x^{۳}+۹x+۱\right)^{\frac{۱}{۳}} dx$$

فرض می کنیم $u = x^{۳} + ۹x + ۱$ باشد ، پس $du = \left(۳x^{۲}+۹\right)dx = ۳\left(x^{۲}+۳\right)dx$

اگر $x = 0$ باشد ، $u = ۱$ است ، و اگر $x = ۲$ باشد ، $u = ۲۷$ است ، پس داریم.

$$\int_0^{۲} \left(x^{۲}+۳\right)\left(x^{۳}+۹x+۱\right)^{\frac{۱}{۳}} dx = \int_{۱}^{۲۷} u^{\frac{۱}{۳}} * \frac{۱}{۳} du = \frac{۱}{۳}\int_{۱}^{۲۷} u^{\frac{۱}{۳}} du$$
$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}\right)\Big|_{۱}^{۲۷} = \frac{۱}{۴}(۸۱-۱) = ۲۰$$

$$۱۰)\quad \int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos t}{۱+\sin t} dt$$

فرض می کنیم $u = ۱ + \sin t$ باشد ، پس $du = \cos t\, dt$ است.

اگر $t = -\frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس $u = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است و اگر $t = \frac{\pi}{۲}$ باشد ، پس $u = ۲$ است. پس داریم.

$$\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos t}{۱+\sin t} dt = \int_{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^{۲} \frac{۱}{u} du = \ln u \Big|_{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^{۲} = \ln ۲ - \ln\left(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\right)$$
$$= ۲\ln ۲ - \ln\left(۲-\sqrt{۲}\right)$$

$$۱۱)\quad \int_{\frac{۱}{۲۶}}^{\frac{۱}{۷}} \frac{۱}{x^{۲}}\left(\frac{x+۱}{x}\right)^{\frac{۱}{۳}} dx$$

فرض می کنیم $u=\frac{x}{x+۱}$ باشد ، پس $du=\frac{(x+۱)-x}{(x+۱)^۲}dx=\frac{۱}{(x+۱)^۲}\,dx$ است.

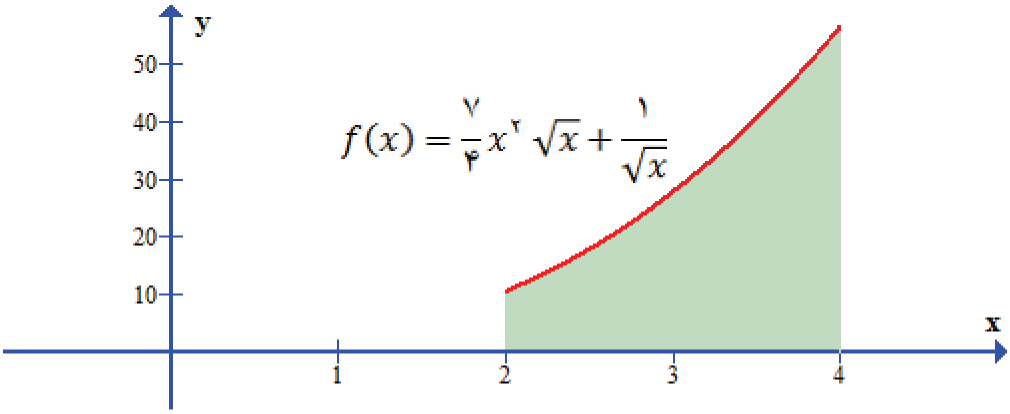
اگر $x=\frac{۱}{۲۶}$ باشد ، پس $u=\frac{۱}{۲۷}$ است. و اگر $x=\frac{۱}{۷}$ باشد ، پس $u=\frac{۱}{۸}$ است. پس داریم.

$$\int_{\frac{۱}{۲۶}}^{\frac{۱}{۷}}\frac{۱}{x^۲}\left(\frac{x+۱}{x}\right)^{\frac{۱}{۳}}dx=\int_{\frac{۱}{۲۶}}^{\frac{۱}{۷}}\left(\frac{x+۱}{x}\right)^۲\left(\frac{x+۱}{x}\right)^{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{(x+۱)^۲}dx=\int_{\frac{۱}{۲۷}}^{\frac{۱}{۸}}u^{-\frac{۷}{۳}}du$$

$$=-\frac{۳}{۴}u^{-\frac{۴}{۳}}\Bigg|_{\frac{۱}{۲۷}}^{\frac{۱}{۸}}=-\frac{۳}{۴}(۱۶-۸۱)=\frac{۱۹۵}{۴}$$

در تمرینات زیر مساحت بین نمودار f و محور x در بازه داده شده را پیدا کنید.

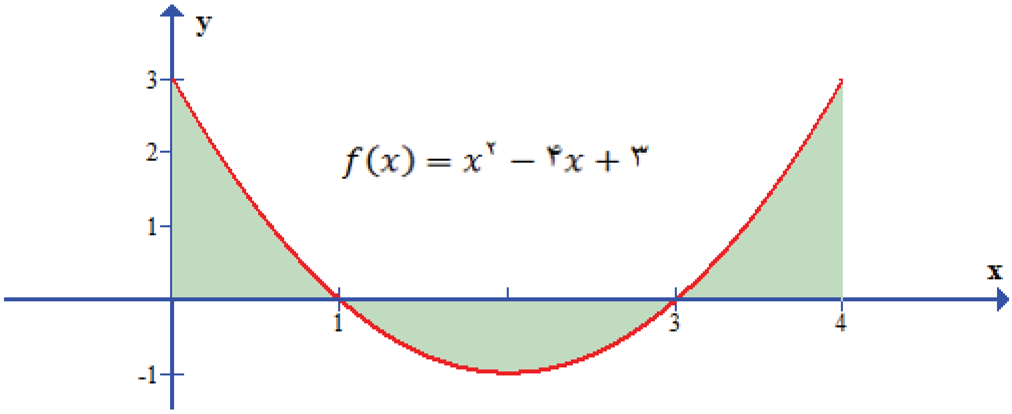
۱۲) $f(x)=\frac{۷}{۴}x^۲\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}};\,[۲,۴]$



$$A=\int_۲^۴\left(\frac{۷}{۴}x^۲\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_۲^۴\left(\frac{۷}{۴}x^{\frac{۵}{۲}}+x^{-\frac{۱}{۲}}\right)dx=\left(\frac{۱}{۲}x^{\frac{۷}{۲}}+۲x^{\frac{۱}{۲}}\right)\Bigg|_۲^۴$$

$$=(۶۴+۴)-\left(۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}\right)=۶۸-۶\sqrt{۲}$$

۱۳) $f(x)=x^۲-۴x+۳;\,[0,۴]$



ملاحظه می کنید که $0 \geq (x-۱)(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۳$ است در $[0,۱]$ و $[۳,۴]$

اما $x^۲ - ۴x + ۳ \leq 0$ است در $[۱,۳]$ پس

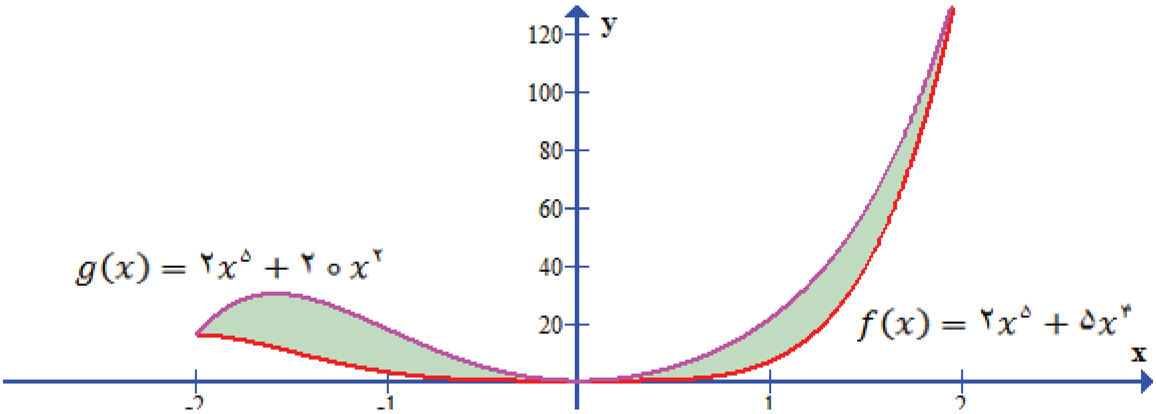
$$A = \int_0^۱ \left(x^۲ - ۴x + ۳\right) dx - \int_۱^۳ \left(x^۲ - ۴x + ۳\right) dx + \int_۳^۴ \left(x^۲ - ۴x + ۳\right) dx$$

$$= \left(\frac{۱}{۳}x^۳ - ۲x^۲ + ۳x\right)\Big|_0^۱ - \left(\frac{۱}{۳}x^۳ - ۲x^۲ + ۳x\right)\Big|_۱^۳ + \left(\frac{۱}{۳}x^۳ - ۲x^۲ + ۳x\right)\Big|_۳^۴$$

$$= \left(\frac{۱}{۳} - ۲ + ۳\right) - \left[(۹ - ۱۸ + ۹) - \left(\frac{۱}{۳} - ۲ + ۳\right)\right] + \left[\left(\frac{۶۴}{۳} - ۳۲ + ۱۲\right) - (۹ - ۱۸ + ۹)\right] = ۴$$

در تمرین زیر مساحت ناحیه بین نمودار های توابع را پیدا کنید.

۱۴)　$f(x) = ۲x^۵ + ۵x^۴; g(x) = ۲x^۵ + ۲۰x^۲$



نمودار ها در (x,y) تلاقی می کنند ، اگر

$$۲x^۵ + ۵x^۴ = y = ۲x^۵ + ۲۰x^۲$$

$$۵x^۴ - ۲۰x^۲ = 0$$

$$x = -۲ \text{ ، } x = 0 \text{ ، } x = ۲$$

همچنین $g(x) \geq f(x)$ است در $[-۲,۲]$ لذا

$$A = \int_{-۲}^{۲} \left[\left(۲x^۵ + ۲۰x^۲\right) - \left(۲x^۵ + ۵x^۴\right)\right] dx = \int_{-۲}^{۲} \left(۲۰x^۲ - ۵x^۴\right) dx$$

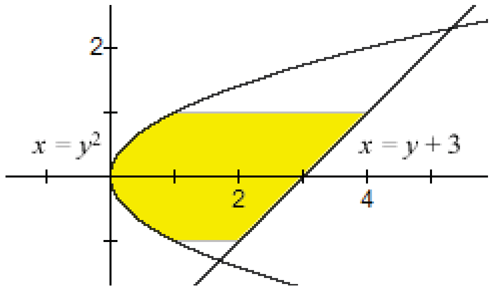
$$= \left(\frac{۲۰}{۳}x^۳ - x^۵\right)\Big|_{-۲}^{۲} = \left(\frac{۱۶۰}{۳} - ۳۲\right) - \left(\frac{۱۶۰}{۳} + ۳۲\right) = \frac{۱۲۸}{۳}$$

در تمرین زیر مساحت ناحیه بین نمودار های دو رابطه زیر از $y = -۱$ تا $y = ۱$ را پیدا کنید.

۱۵) $x = y + ۳$ و $x = y^۲$

$$A = \int_{-۱}^{۱} \left|y + ۳ - y^۲\right| dy = \int_{-۱}^{۱} \left(y + ۳ - y^۲\right) dy = \left(\frac{۱}{۲}y^۲ + ۳y - \frac{۱}{۳}y^۳\right)\Big|_{-۱}^{۱}$$

$$\left(\frac{۱}{۲} + ۳ - \frac{۱}{۳}\right) - \left(\frac{۱}{۲} - ۳ + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱۶}{۳}$$



در تمرین زیر ، نمودار تابع f را رسم کنید. اطلاعات لازم را هم ذکر کنید.

۱۶) $f(x) = \ln\left(x^۲ - ۴\right)$

جهت یاد آوری برای رسم نمودار به بخش ۱.۷ همین فصل مراجعه شود.

می دانیم که دامنه لگاریتم طبیعی اعداد بزرگ تر از صفر است. پس $x^۲ - ۴ > 0$ باید باشد. لذا دامنه این تابع $(-\infty,-۲)$ و $(۲,\infty)$ است.

$$f'(x) = \frac{۲x}{x^۲ - ۴} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-۸ - ۲x^۲}{\left(x^۲ - ۴\right)^۲}$$

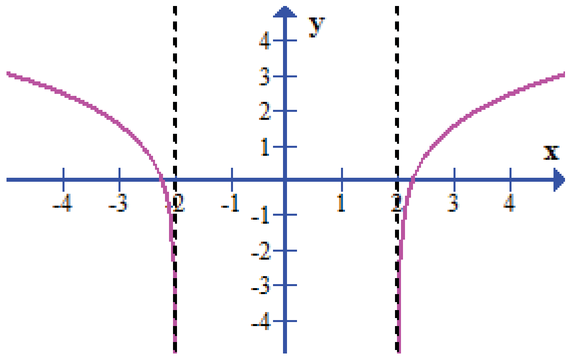
چون $f'(x) < 0$ است در بازه $(-\infty,-۲)$ پس تابع در این بازه ، نزولی است.

چون $f'(x) > 0$ است در بازه $(۲,\infty)$ پس تابع در این بازه ، صعودی است.

چون $f''(x) < 0$ است برای تمام x ها در دامنه f پس تابع تعقر به پاینن دارد در $(-\infty,-۲)$ و $(۲,\infty)$

چون $\lim_{x\to -۲} \ln\left(x^۲-۴\right) = \lim_{x\to ۲} \ln\left(x^۲-۴\right) = \pm\infty$ است ، پس خطوط مجانب عمودی در $x=-۲$ و $x=۲$

چون $f(x)=f(-x)$ است ، پس نسبت به محور y قرینه است.



در تمرینات زیر مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

۱۷) $F(x) = \int_0^x t\sqrt{۱+t^۵}\ dt$

$$F'(x) = x\sqrt{۱+x^۵}$$

۱۸) $F(x) = \int_۱^{\ln x} \frac{۱}{t} dt$

فرض می کنیم $G(x) = \int_۱^x \frac{۱}{t} dt$ باشد ، پس $F(x) = G(\ln x)$ است. چون $G'(x) = \frac{۱}{x}$ است ، پس طبق قاعده زنجیره ای داریم

$$F'(x) = [G'(\ln x)]\frac{۱}{x} = \frac{۱}{\ln x} * \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x\ln x}$$

۱۹) $f(x) = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$$f'(x) = \left\{\sin(\ln x) + x[\cos(\ln x)]\frac{۱}{x}\right\} - \left\{\cos(\ln x) + x[-\sin(\ln x)]\frac{۱}{x}\right\}$$
$$= ۲\sin(\ln x)$$

۲۰) $f(x) = \ln(\ln\cos x + ۲\ln\sec x)$

$$f'(x) = \frac{۱}{\ln\cos x + ۲\ln\sec x}\left(\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{۲\sec x\tan x}{\sec x}\right)$$
$$= \frac{\tan x}{\ln\cos x + ۲\ln\sec x}$$

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۲۱) $\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^x}}dx$

فرض می‌کنیم $u = ۱ + e^x$ باشد ، پس $du = e^x dx$ است. لذا

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^x}}dx = \int \frac{۱}{\sqrt{u}}du = ۲\sqrt{u} + C = ۲\sqrt{۱ + e^x} + C$$

۲۲) $\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^{۲x}}}dx$

فرض می کنیم $u = e^x$ باشد ، پس $du = e^x dx$ است. لذا

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{۱ + e^{۲x}}}dx = \int \frac{۱}{\sqrt{۱ + u^۲}}du = sinh^{-۱}u + C = sinh^{-۱}(e^x) + C$$

۲۳) $\int (\sec x\tan x)e^{\sec x}dx$

فرض می کنیم $u = \sec x$ باشد ، پس $du = \sec x\tan x\, dx$ است. لذا

$$\int (\sec x\tan x)e^{\sec x}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\sec x} + C$$

۲۴) $\int_0^۱ x^۲ ۵^{-x^۳}\, dx$

فرض می کنیم $u = x^۳$ باشد ، پس $du = ۳x^۲\, dx$ است. لذا

$$\int_0^۱ x^۲ ۵^{-x^۳}\, dx = \int_0^۱ ۵^{-u}\left(\frac{۱}{۳}\right)du = \frac{-۵^{-u}}{۳\ln ۵}\Big|_0^۱ = \frac{۱}{۳\ln ۵}\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right) = \frac{۴}{۱۵\ln ۵}$$

۲۵) $\int \frac{۳}{۱ + ۴t^۲} dt$

فرض می کنیم $u = ۲t$ باشد ، پس $du = ۲dx$ است ، لذا

$$\int \frac{۳}{۱ + ۴t^۲} dt = \int \frac{۳}{۱ + u^۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) du = \frac{۳}{۲}\arctan u + C = \frac{۳}{۲}\arctan ۲t + C$$

۲۶) $$\int_{-\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵ - ۴t^۲}} dt = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{\frac{۲۵}{۴} - t^۲}} dt = \frac{۱}{۲}\arcsin\frac{۲t}{۵}\Bigg|_{-\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۴}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\arcsin\frac{۱}{۲} - \arcsin\left(\frac{-۱}{۲}\right)\right] = \frac{\pi}{۶}$$

۲۷) $\int ۲^x \sinh ۲^x dx$

فرض می کنیم $u = ۲^x$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{\ln ۲}\, ۲^x\, dx$ است. لذا

$$\int ۲^x \sinh ۲^x dx = \int \sinh u * \frac{۱}{\ln ۲} du = \frac{\cosh u}{\ln ۲} + C = \frac{\cosh ۲^x}{\ln ۲} + C$$

۲۸) $$\int \frac{x}{x^۴ + ۴x^۲ + ۱۰} dx = \int \frac{x}{\left(x^۲ + ۲\right)^۲ + ۶} dx = \int \frac{۱}{u^۲ + ۶} * \frac{۱}{۲} du$$

$$= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{۶}}\arctan\frac{u}{\sqrt{۶}} + C = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\arctan\left(\frac{x^۲ + ۲}{\sqrt{۶}}\right) + C$$

در عملیات بالا فرض کردیم $u = x^۲ + ۲$ باشد ، پس $du = ۲x\, dx$ است.

در تمرین زیر نمودار تابع را رسم کنید. مقادیر اکستریم موضعی ، تعقر و خطوط مجانب را مشخص کنید.

۲۹) $f(x) = e^{-۲x} - e^{-۳x}$

$$f'(x) = -۲e^{-۲x} + ۳e^{-۳x}; f''(x) = ۴e^{-۲x} - ۹e^{-۳x}$$

$f'(x)=0$ است ، اگر $۲e^{-۲x}=۳e^{-۳x}$ باشد ، پس $x=\ln\frac{۳}{۲}$ است. ضمنا داریم

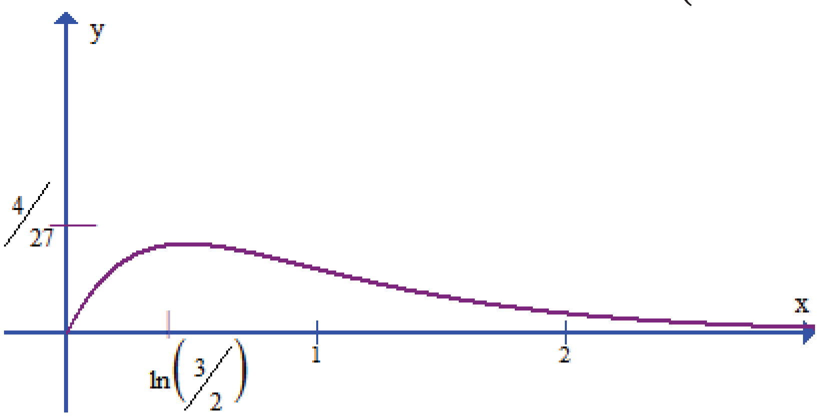
$$f''\left(\ln\frac{۳}{۲}\right)=۴\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۲}-۹\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۳}=\frac{-۸}{۹}<0$$

پس

$$f\left(\ln\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۴}{۲۷}$$

یک ماکسیمم موضعی است. همچنین $f''(x)=0$ است اگر $۴e^{-۲x}=۹e^{-۳x}$ باشد ، یا به عبارت دیگر $x=\ln\frac{۹}{۴}$ باشد. لذا نمودار در $\left(0,\ln\frac{۹}{۴}\right)$ تعقر به پایین و در $\left(\ln\frac{۹}{۴},\infty\right)$ تعقر به بالا دارد ، با نقطه عطف $\left(\ln\frac{۹}{۴},\frac{۸۰}{۷۲۹}\right)$

چون $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-۲x}-e^{-۳x}\right)=0$ است ، پس $y=0$ یک مجانب افقی است.



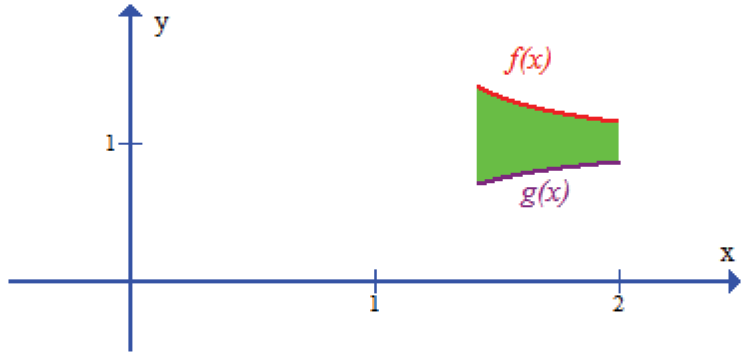
در تمرین زیر ، مساحت ناحیه بین نمودار های f و g در $\left[\sqrt{۲},۲\right]$ را پیدا کنید.

۳۰) $\quad f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}\quad ، \quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}$

چون $x^۲\geq x^۲-۱$ است در $\left[\sqrt{۲},۲\right]$ پس $f(x)\geq g(x)$ است در $\left[\sqrt{۲},۲\right]$ پس داریم

$$A=\int_{\sqrt{۲}}^{۲}\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}-\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}\right)dx=\int_{\sqrt{۲}}^{۲}\frac{x^۲-\left(x^۲-۱\right)}{x\sqrt{x^۲-۱}}dx$$

$$= \int_{\sqrt{۲}}^{۲} \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - ۱}} dx = \operatorname{arcsec} x \Big|_{\sqrt{۲}}^{۲} = \operatorname{arcsec} ۲ - \operatorname{arcsec} \sqrt{۲} = \frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$



در تمرینات زیر انتگرال ها را پیدا کنید.

۳۱) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{۲ + \cos x} dx$

فرض می کنیم $u = ۲ + \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\, dx$ است. اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۳$ و اگر $x = \pi$ باشد ، پس $u = ۱$ است. لذا داریم

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{۲ + \cos x} dx = \int_۳^۱ \frac{۱}{u}(-۱) du = -\ln u \Big|_۳^۱ = \ln ۳$$

۳۲) $\int \frac{۱}{t} (\ln t)^{\frac{۵}{۳}} dt$

فرض می کنیم $u = \ln t$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{t}\, dt$ است.

$$\int \frac{۱}{t} (\ln t)^{\frac{۵}{۳}} dt = \int u^{\frac{۵}{۳}} du = \frac{۳}{۸} u^{\frac{۸}{۳}} + C = \frac{۳}{۸} (\ln t)^{\frac{۸}{۳}} + C$$

فصل دوم
روش های انتگرال گیری
Techniques of Integration

۲.۱ - انتگرال گیری جزء به جرء Integration by Parts

قبل از بحث در مورد انتگرال گیری جزء به جرء، خلاصه ای از انتگرال های اصلی را در ذیل می آوریم.

$$\int cdx = cx + C \qquad \int x^{۴} = \frac{۱}{r+۱}x^{r+۱} + C$$

$$\int xdx = \frac{۱}{۲}x^{۲} + C \qquad \int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C \qquad \int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C \qquad \int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \csc xdx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C \qquad \int a^{x}dx = \frac{۱}{\ln a}a^{x} + C \qquad (a > 0, a \neq ۱)$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} - x^{۲}}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{۱}{x^{۲} + a^{۲}}dx = \frac{۱}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

در این بخش روشی برای حساب کردن انتگرال هایی مانند انتگرال زیر معرفی می کنیم.

$$\int x\cos xdx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{۱} x^{۲}\, e^{-x}dx$$

انتگرال های بالا با روش هایی که تا کنون یاد گرفته ایم ، نمی توان پیدا کرد. روشی که معرفی می کنیم از قاعده ضرب مشتق ، اقتباس شده است.

فرض می کنیم F و G توابع مشتق پذیر باشند. از قاعده ضرب می دانیم که

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

و یا

$$F(x)G'(x) = (FG)'(x) - F'(x)G(x) \qquad (۱)$$

اگر F' و G' پیوسته باشند ، پس فرمول (۱) را می توان به زبان انتگرال نا معین بیان کرد.

$$\int F(x)G'(x) = \int [(FG)'(x) - F'(x)G(x)]dx$$
$$= \int (FG)'(x)dx - \int F'(x)G(x)dx$$

و یا

$$\int F(x)G'(x) = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx \qquad (۲)$$

حالا فرض کنید می خواهیم انتگرال $\int f(x)dx$ را پیدا کنیم ، اما نمی توانیم به اسانی از طرقی که تا کنون یاد گرفته ایم ، این کار را انجام دهیم. اگر بتوانیم این انتگرال را به صورت حاصل ضرب FG' بنویسیم ، پس می توان فرمول (۲) را بکار برد. پس طبق فرمول (۲) داریم.

$$\int f(x)dx = \int F(x)G'(x)dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx \qquad (۳)$$

اگر بتوان $\int F'(x)G(x)d$ را به اسانی حساب کنیم

این روش انتگرال گیری که از طریق تقسیم کردن f به دو قسمت F و G' بدست می آید به **انتگرال گیری جزء به جرء Integration by Parts** موسوم است.

قضیه ۲.۱ــ انتگرال گیری جزء به جرء

فرض کنید F و G در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر باشند ، فرض کنید F' و G' در $[a,b]$ پیوسته باشند. پس

$$\int F(x)G'(x) = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx \qquad (۴)$$

و

$$\int_a^b F(x)G'(x) = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx \qquad (۵)$$

فرمول شماره (۴) را می توان ساده کرد. با جانشین کردن $u = F(x)$ و $v = G(x)$ بطوری که $du = F'(x)dx$ و $dv = G'(x)dx$ لذا خواهیم داشت.

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

که یاد آوری آن از فرمول (۴) آسان تر است. پس

$$\boxed{\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu \qquad (۶)}$$

برای بکار بردن فرمول (۶) باید u و dv طوری انتخاب کنیم که $f(x)dx = udv$ باشد. $f(x)$ باید به دو قسمت تقسیم شود ، یکی بشود u و دیگری همراه با dx بشود dv. برای نوشتن $\int udv$ به صورت $uv - \int vdu$ باید بتوانیم du را از u و v را از dv بدست آوریم. در نتیجه u باید تابعی باشد که بتوان به اسانی مشتق گرفت و dv باید طوری انتخاب شود که بتوان از طریق انتگرال گیری v را بدست آورد. از طرف دیگر انتگرال گرفتن $\int vdu$ باید آسان تر از انتگرال گرفتن $\int udv$ باشد.

مثال ۱ – انتگرال $\int x\cos x\, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

مسلم است که انتگراند $x\cos x$ می توان به دو قسمت x و $\cos x$ تقسیم کرد. پس فرض می کنیم

$$u = x \quad \text{و} \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx \quad \text{و} \quad v = \sin x$$

باشد ، پس

$$\int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\cos x\ dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} = x\sin x + \cos x + C$$

مثال ۲ – انتگرال $\int ۲x\, e^{۳x}dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

می توان $۲xe^{۳x}$ را به دو قسمت $۲x$ و $e^{۳x}$ تقسیم کرد ، پس فرض می کنیم $u = ۲x$ و $dv = e^{۳x}dx$ باشد ، پس $du = ۲dx$ و $v = \frac{۱}{۳}e^{۳x}$ است. لذا

$$\int \overbrace{۲x}^{u}\ \overbrace{e^{۳x}dx}^{dv} = \overbrace{۲x}^{u}\overbrace{\left(\frac{۱}{۳}e^{۳x}\right)}^{v} - \int \overbrace{\frac{۱}{۳}e^{۳x}}^{v}\ \overbrace{۲dx}^{du} = \frac{۲}{۳}xe^{۳x} - \int \frac{۲}{۳}e^{۳x}dx$$

$$= \frac{۲}{۳}xe^{۳x} - \frac{۲}{۹}e^{۳x} + C$$

مثال ۳ - انتگرال $\int \ln x\, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

این مرتبه $\ln x$ را به صورت $(\ln x) * ۱$ می نویسیم. حالا فرض می کنیم $u = \ln x$ و $dv = ۱dx = dx$ است. پس $du = \frac{۱}{x}dx$ است و $v = x$ است. لذا

$$\int \overbrace{\ln x}^{u}\ \overbrace{dx}^{dv} = \overbrace{(\ln x)}^{u}\ \overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{x}^{v} * \overbrace{\frac{۱}{x}dx}^{du} = x\ln x - \int ۱\, dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

مثال ۴ ـ انتگرال $\int_0^۱ x^۲ e^{-x} dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می‌کنیم $u = x^۲$ و $dv = e^{-x} dx$ باشد ، پس $du = ۲xdx$ و $v = -e^{-x}$ است. لذا

$$\int_0^۱ \overbrace{x^۲}^{u} \ \overbrace{e^{-x}dx}^{dv} = \overbrace{x^۲}^{u} \overbrace{(-e^{-x})}^{v} \Bigg|_0^۱ - \int_0^۱ \overbrace{(-e^{-x})}^{v} \ \overbrace{۲xdx}^{du} = -e^{-۱} + \int_0^۱ ۲xe^{-x}dx \quad (۷)$$

حالا انتگرال گیری را روی $\int_0^۱ ۲xe^{-x}dx$ از طریق جزء به جزء انجام می دهیم.

فرض می کنیم $u = ۲x$ و $dv = e^{-x} dx$ باشد ، پس $du = ۲dx$ و $v = -e^{-x}$ است. لذا

$$\int_0^۱ \overbrace{۲x}^{u} \ \overbrace{e^{-x}dx}^{dv} = \overbrace{۲x}^{u} \ \overbrace{(-e^{-x})}^{v} \Bigg|_0^۱ - \int_0^۱ \overbrace{(-e^{-x})}^{v} \ \overbrace{۲dx}^{du} = -۲e^{-۱} + \int_0^۱ ۲e^{-x}dx \quad (۸)$$

آخرین انتگرال را می توان مستقیما حساب کرد.

$$\int_0^۱ ۲e^{-x}dx = -۲e^{-x} \Big|_0^۱ = -۲e^{-۱} + ۲ \qquad (۹)$$

حالا نتایج (۷) تا (۹) را تلفیق می کنیم ، پس خواهیم داشت.

$$\int_0^۱ x^۲ e^{-x}dx = -e^{-۱} + \left(-۲e^{-۱}\right) + \left(-۲e^{-۱} + ۲\right) = -۵e^{-۱} + ۲$$

مثال ۵ ـ انتگرال $\int e^{-x} \cos x \, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ ـ

فرض می کنیم $u = e^{-x}$ و $dv = \cos x dx$ باشد ، پس $du = -e^{-x} dx$ و $v = \sin x$ است.
لذا

$$\int \overbrace{e^{-x}}^{u} \ \overbrace{cos\ xdx}^{dv} = \overbrace{e^{-x}}^{u} \ \overbrace{sin\ x}^{v} - \int \overbrace{(sin\ x)}^{v} \ \overbrace{(-e^{-x})dx}^{du}$$
$$= e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

حالا برای مرتبه دوم انتگرال گیری جزء به جزءانجام می دهیم.

فرض می کنیم $u = e^{-x}$ و $dv = \sin x dx$ باشد ، پس $du = -e^{-x} dx$ و $v = -\cos x$
است. لذا

$$\int \overbrace{e^{-x}}^{u} \ \overbrace{sin\ xdx}^{dv} = \overbrace{e^{-x}}^{u} \ \overbrace{(-cos\ x)}^{v} - \int \overbrace{(-cos\ x)}^{v} \ \overbrace{(-e^{-x})dx}^{du}$$
$$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

نتایج دو انتگرال گیری جزء به جزء را با هم تلفیق می کنیم ، پس خواهیم داشت.

$$\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx$$
$$= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx$$

ملاحظه می کنید که انتگرال اولیه دوباره پیدا شد. برای کامل کردن پاسخ ، به دو طرف معادله $\int e^{-x}\cos x dx$ را اضافه می کنیم. پس داریم

$$۲\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + C_۱$$

و در نهایت

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{۱}{۲}(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x) + C$$

درخاتمه خاطر نشان می شود که انتگرال گیری جزء به جزء برای انتگرال هایی که شامل یک چند جمله ای ویک تابع نمایی یا یک تابع لگاریتمی و یا یک تابع مثلثاتی است ، موثر است. مخصوصا انتگرال گیری جزء به جزء برای انتگرال های به اشکال زیر کاملا نتیجه بخش است.

$\int (\text{چند جمله ای}) \cos ax\, dx$　　　$\int (\text{چند جمله ای}) \sin ax\, dx$

$\int (\text{چند جمله ای}) \ln x dx$　　　$\int (\text{چند جمله ای}) e^{ax} dx$

در تمام اشکال بالا بجز $\int (\text{چند جمله ای}) \ln x dx$ موثرترین انتخاب برای u ، چند جمله ای است. چون مشتق های یک چند جمله ای آسان تر است و ضد مشتق های $\sin ax$ و $\cos ax$ و e^{ax} هم تقریبا شبیه هستند. برای $\int (\text{چند جمله ای}) \ln x dx$ انتخاب $u = \ln x$ موثر است .

فرمول های کاهش توان های $\int sin^n x\, dx$ و $\int cos^n x\, dx$

ابتدا در مورد یک فرمول برای $\int \sin^n x dx, (n \geq 2)$ بحث می کنیم. برای این که انتگرال گیری جزء به جزءانجام دهیم ، ملاحظه می کنید که $(\sin x)\left(sin^{n-۱}x\right) = sin^n x$ است. پس فرض می کنیم

$u = sin^{n-۱}x$ و $dv = \sin x dx$ باشد ، پس $du = (n-۱)sin^{n-۲}x \cos x dx$ و $v = -\cos x$ است. لذا

$$\int sin^n(x)dx = \int \overbrace{sin^{n-۱}x}^{u}\ \overbrace{sin\ xdx}^{dv}$$

$$= \overbrace{\left(sin^{n-1}x\right)}^{u}\ \overbrace{\left(-cos\ x\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(-cos\ x\right)}^{v}\ \overbrace{(n-1)sin^{n-2}x\ cos\ xdx}^{du}$$

$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int sin^{n-2}\ x\ cos^{2}xdx$$

$$= -sin^{n-1}xcos\ x + (n-1)\int sin^{n-2}x\left(1 - sin^{2}x\right)dx$$

پس

$$\int sin^{n}xdx = -sin^{n-1}xcos\ x + (n-1)\int sin^{n-2}xdx - (n-1)\int sin^{n}xdx$$

با تلفیق کردن جملاتی که دارای $\int sin^{n}xdx$ هستند ، خواهیم داشت.

$$n\int sin^{n}xdx = -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int sin^{n-2}xdx$$

پس برای $\int sin^{n}x\ dx$ فرمول زیر را خواهیم داشت.

$$\int sin^{n}x\ dx = -\frac{1}{n}sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}xdx \qquad (10)$$

به همین طریق خواهیم داشت.

$$\int cos^{n}xdx = \frac{1}{n}cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}xdx \qquad (11)$$

فرمول های (10) و (11) را **فرمول های کاهش توان ها** **Reduction Formulas** می نامند.

با تکرار فرمول های بالا می توانیم توان سینوس یا کسینوس را به صفر یا یک تقلیل دهیم. اگر $n-2=0$ باشد ، طبق قرار داد $sin^{n-2}x$ و $cos^{n-2}x$ هردو ، یک هستند.

با استفاده از (10) با $n=2$ داریم.

$$\int sin^{2}xdx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int 1dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C$$

چون $-\frac{1}{2}\sin x\cos x = -\frac{1}{4}\sin 2x$ پس داریم.

$$\int sin^{2}xdx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$$

ملاحظه می کنید که تساوی بالا همان فرمول شماره (3) بخش ۱.۶ است که از طریق انتگرال گیری بوسیله جانشینی پیدا کردیم.

به همین طریق اگر $n=2$ باشد ، فرمول (11) به صورت زیر خواهد بود.

$$\int cos^{۲} x dx = \frac{۱}{۴}\sin ۲x + \frac{۱}{۲}x + C$$

که باز همان معادله شماره (۲) بخش ۱.۶

در تمرینات این بخش نشان می دهیم که

$$\int sin^{۴} x dx = -\frac{۱}{۴} sin^{۳} x \cos x - \frac{۳}{۸}\sin x \cos x + \frac{۳}{۸}x + C \qquad (۱۲)$$

به همان طرق می توان نشان داد که

$$\int cos^{۴} x dx = \frac{۱}{۴} cos^{۳} x \sin x + \frac{۳}{۸}\cos x \sin x + \frac{۳}{۸}x + C \qquad (۱۳)$$

مثال ۶ــ انتگرال $\int cos^{۵} x dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\int cos^{۵}\, dx = \frac{۱}{۵} cos^{۴} x \sin x + \frac{۴}{۵}\int cos^{۳} x dx$$

با استفاده از فرمول کاهش توان برای مرتبه دوم در مورد $\int cos^{۳} x dx$ داریم.

$$\int cos^{۳} x dx = \frac{۱}{۳} cos^{۲} x \sin x + \frac{۲}{۳}\int \cos x dx$$

$$= \frac{۱}{۳} cos^{۲} x \sin x + \frac{۲}{۳}\sin x + C_۱$$

در نهایت.

$$\int cos^{۵} x dx = \frac{۱}{۵} cos^{۴} x \sin x + \frac{۴}{۵}\left(\frac{۱}{۳} cos^{۲} x \sin x + \frac{۲}{۳}\sin x + C_۱\right)$$

$$= \frac{۱}{۵} cos^{۴} x \sin x + \frac{۴}{۱۵} cos^{۲} x \sin x + \frac{۸}{۱۵}\sin x + C$$

برای انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{۶}} cos^{۵} x dx$ داریم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{۶}} cos^{۵} x dx = \left(\frac{۱}{۵} cos^{۴} x \sin x + \frac{۴}{۱۵} cos^{۲} x \sin x + \frac{۸}{۱۵}\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{۶}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4}\frac{1}{2} + \frac{4}{15}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}\frac{1}{2} + \frac{8}{15}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{160} + \frac{12}{120} + \frac{8}{30} = \frac{203}{480}$$

تمرینات ۲.۱

انتگرال های نا معین زیر را پیدا کنید.

۱) $\int x \sin x \; dx$

۲) $\int x \ln x \, dx$

۳) $\int (\ln x)^{2} \, dx$

۴) $\int x^{3} \ln x \, dx$

۵) $\int x^{2} e^{4x} \, dx$

۶) $\int x^{3} \cos x \, dx$

۷) $\int e^{3x} \cos 3x \, dx$

۸) $\int t * 2^{t} \, dt$

۹) $\int t^{2} * 4^{t} \, dt$

۱۰) $\int t \sinh t \, dt$

۱۱) $\int \arctan x \, dx$

۱۲) $\int \arccos(-7x) \, dx$

۱۳) $\int x^{n} \ln x^{m} \, dx; \quad m, n \in \mathbb{Z}; m, n > 0$

در تمرینات زیر انتگرال ها را حساب کنید.

۱۴) $\int_0^{۱} x\, e^{۵x}\, dx$

۱۵) $\int_0^{\pi} t^{۲} \cos t\, dt$

۱۶) $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} x\, sec^{۲} x\, dx$

در تمرینات زیر ابتدا عمل جانشینی انجام دهید و سپس با انتگرال گیری جزء به جزء، انتگرال را حساب کنید.

۱۷) $\int_0^{۱} \ln(x+۱)\, dx$

۱۸) $\int x \sin ax\, dx$

۱۹) $\int \sin x \arctan(\cos x)\, dx$

۲۰) $\int \cos\sqrt{t}\, dt$

در تمرین زیر درستی فرمول شماره (۱۲) را نشان دهید.

۲۱) $\int sin^{۴} x dx = -\frac{۱}{۴} sin^{۳} x \cos x - \frac{۳}{۸} \sin x \cos x + \frac{۳}{۸} x + C \qquad (۱۲)$

پاسخ تمرینات ۲.۱

انتگرال های نا معین زیر را پیدا کنید.

۱) $\int x \sin x\, dx$

فرض می کنیم $u = x$ و $dv = \sin x dx$ باشد، پس $du = dx$ و $v = -\cos x$ است. لذا

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C$$

۲) $\int x \ln x\, dx$

فرض می کنیم $u = \ln x$ و $dv = x dx$ باشد، پس $du = \frac{۱}{x} dx$ و $v = \frac{۱}{۲} x^{۲}$ است. لذا

$$\int x\ln x\,dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\int\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\frac{۱}{x}dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{۱}{۲}\int x\,dx$$
$$=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x-\frac{۱}{۴}x^{۲}+C$$

۳) $\int(\ln x)^{۲}\,dx$

فرض می کنیم $u=(\ln x)^{۲}$ و $dv=dx$ باشد ، پس $du=\frac{۲\ln x}{x}dx$ و $v=x$ است. لذا

$$\int(\ln x)^{۲}dx=(\ln x)^{۲}\,x-\int x\left(\frac{۲\ln x}{x}\right)dx=x\,(\ln x)^{۲}-۲\int\ln x\,dx$$

بر اساس مثال ۳

$$-۲\int\ln x\,dx=-۲x\ln x+۲x+C$$

پس

$$\int(\ln x)^{۲}\,dx=x\,(\ln x)^{۲}-۲x\ln x+۲x+C$$

۴) $\int x^{۳}\ln x\,dx$

فرض می کنیم $u=\ln x$ و $dv=x^{۳}dx$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{x}dx$ و $v=\frac{۱}{۴}x^{۴}$ است. لذا

$$\int x^{۳}\ln x\,dx=(\ln x)\left(\frac{۱}{۴}x^{۴}\right)-\int\frac{۱}{۴}x^{۴}\left(\frac{۱}{x}\right)dx$$
$$=\frac{۱}{۴}x^{۴}\ln x-\frac{۱}{۴}\int x^{۳}dx=\frac{۱}{۴}x^{۴}\ln x-\frac{۱}{۱۶}x^{۴}+C$$

۵) $\int x^{۲}\,e^{۴x}\,dx$

فرض می کنیم $u=x^{۲}$ و $dv=e^{۴x}dx$ باشد ، پس $du=۲x\,dx$ و $v=\frac{۱}{۴}e^{۴x}$ است. لذا

$$\int x^{۲}e^{۴x}dx=\frac{۱}{۴}x^{۲}e^{۴x}-\int\frac{۱}{۲}x\,e^{۴x}dx=\frac{۱}{۴}x^{۲}e^{۴x}-\frac{۱}{۲}\int x\,e^{۴x}\,dx$$

برای $\int x\, e^{۴x}\, dx$ فرض می کنیم $u = x$ و $dv = e^{۴x}\, dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \frac{۱}{۴} e^{۴x}$ است. لذا

$$\int x\, e^{۴x}\; dx = \frac{۱}{۴} x\, e^{۴x} - \int \frac{۱}{۴} e^{۴x}\; dx = \frac{۱}{۴} x\, e^{۴x} - \frac{۱}{۱۶} e^{۴x} + C_۱$$

و در نهایت

$$\int x^۲\, e^{۴x}\, dx = \frac{۱}{۴} x^۲\, e^{۴x} - \frac{۱}{۸} x\, e^{۴x} + \frac{۱}{۳۲} e^{۴x} + C$$

۶) $\int x^۳ \cos x\, dx$

فرض می کنیم $u = x^۳$ و $dv = \cos x\; dx$ باشد ، پس $du = ۳x^۲ dx$ و $v = \sin x$ است. لذا

$$\int x^۳ \cos x\, dx = x^۳ \sin x - \int ۳x^۲ \sin x\, dx = x^۳ \sin x - ۳ \int x^۲ \sin x\, dx$$

چون

$$\int x^۲ \sin x\, dx = -x^۲ \cos x + ۲x \sin x + ۲ \cos x + C_۱$$

است .لذا

$$\int x^۳ \cos x\, dx = x^۳ \sin x + ۳x^۲ \cos x - ۶x \sin x - ۶ \cos x + C$$

۷) $\int e^{۳x} \cos ۳x\, dx$

فرض می کنیم $u = \cos ۳x$ و $dv = e^{۳x} dx$ باشد ، پس $du = -۳ \sin ۳x\, dx$ و $v = \frac{۱}{۳} e^{۳x}$ ا ست. لذا

$$\int e^{۳x} \cos ۳x\, dx = \frac{۱}{۳} e^{۳x} \cos ۳x + \int e^{۳x} \sin ۳x\, dx$$

برای $\int e^{۳x} \sin ۳x\, dx$ فرض می کنیم $u = \sin ۳x$ و $dv = e^{۳x} dx$ باشد ، پس $du = ۳ \cos ۳x\, dx$ و $v = \frac{۱}{۳} e^{۳x}$ است. لذا

$$\int e^{۳x} \sin ۳x\, dx = \frac{۱}{۳} e^{۳x} \sin ۳x - \int e^{۳x} \cos ۳x\, dx$$

و.

$$\int e^{۳x}\cos ۳x\,dx=\frac{۱}{۳}e^{۳x}\cos ۳x+\frac{۱}{۳}e^{۳x}\,\sin ۳x-\int e^{۳x}\cos ۳x dx$$

در نهایت.

$$\int e^{۳x}\cos ۳x dx=\frac{۱}{۶}e^{۳x}\cos ۳x+\frac{۱}{۶}e^{۳x}\sin ۳x+C$$

۸) $\int t*۲^{t}\,dt$

فرض می کنیم $u=t$ و $dv=۲^{t}dt$ باشد ، پس $du=dt$ و $v=\frac{۱}{\ln ۲}۲^{t}$ است.لذا

$$\int t*۲^{t}\,dt=\frac{t}{\ln t}۲^{t}-\int\frac{۱}{\ln ۲}۲^{t}dt=\frac{t}{\ln ۲}۲^{t}-\frac{۱}{(\ln ۲)^{۲}}۲^{t}+C$$

۹) $\int t^{۲}*۴^{t}\,dt$

فرض می کنیم $u=t^{۲}$ و $dv=۴^{t}dt$ باشد ، پس $du=۲t\,dt$ و $v=\frac{۱}{\ln ۴}۴^{t}$ است.لذا

$$\int t^{۲}*۴^{t}\,dt=\frac{t^{۲}}{\ln ۴}۴^{t}-\int\frac{۲t}{\ln ۴}۴^{t}\,dt=\frac{t^{۲}}{\ln ۴}۴^{t}-\frac{۲}{\ln ۴}\int t*۴^{t}\,dt$$

برای $\int t*۴^{t}\,dt$

فرض می کنیم $u=t$ و $dv=۴^{t}\,dt$ باشد ، پس $du=dt$ و $v=\frac{۱}{\ln ۴}۴^{t}$ است.لذا

$$\int t*۴^{t}\,dt=\frac{t}{\ln ۴}۴^{t}-\int\frac{۱}{\ln ۴}۴^{t}dt=\frac{t}{\ln ۴}۴^{t}-\frac{۱}{(\ln ۴)^{۲}}۴^{t}+C_{۱}$$

و در نهایت

$$\int t^{۲}\,۴^{t}\,dt=\left(\frac{t^{۲}}{\ln ۴}-\frac{۲t}{(\ln ۴)^{۲}}+\frac{۲}{(\ln ۴)^{۳}}\right)۴^{t}+C$$

۱۰) $\int t\sinh t\,dt$

فرض می کنیم $u=t$ و $dv=\sinh t\,dt$ باشد ، پس $du=dt$ و $v=\cosh t$ است.لذا

$$\int t\sinh t\,dt = t\cosh t - \int \cosh t\,dt = t\cosh t - \sinh t + C$$

۱۱) $\int \arctan x\,dx$

فرض می کنیم $u = \arctan x$ و $dv = dx$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۱+x^۲}dx$ و $v = \mathrm{x}$ است.لذا

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{۱+x^۲}\,dx$$

برای $\int \frac{x}{۱+x^۲}dx$

فرض می کنیم $u = ۱ + x^۲$ پس $du = ۲x\,dx$ است. لذا

$$\int \frac{x}{۱+x^۲}\,dx = \int \frac{۱}{u}\left(\frac{۱}{۲}\right)\,du = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{u}\,du = \frac{۱}{۲}\ln|u| + C$$

$$= \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + x^۲\right) + C$$

و در نهایت

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + x^۲\right) + C$$

۱۲) $\int \arccos(-۷x)\,dx$

فرض می کنیم $u = \arccos(-۷x)$ و $dv = dx$ باشد ، پس

$$du = -\frac{-۷}{\sqrt{۱-(-۷)^۲}}dx = \frac{۷}{\sqrt{۱-۴۹x^۲}}dx ،\quad v = x$$

لذا

$$\int \arccos(-۷x)dx = x\arccos(-۷x) - \int \frac{۷x}{\sqrt{۱-۴۹x^۲}}dx$$

$$= x\arccos(-۷x) - ۷\int \frac{x}{\sqrt{۱-۴۹x^۲}}dx$$

برای $\int \frac{x}{\sqrt{۱-۴۹x^۲}}dx$ فرض می کنیم $u = ۱ - ۴۹x^۲$ باشد ، پس $du = -۹۸x\,dx$ است. لذا

$$\int \frac{x}{\sqrt{۱ - ۴۹x^۲}}dx = \int \frac{۱}{\sqrt{u}}\left(-\frac{۱}{۹۸}\right)du = -\frac{۱}{۴۹}\sqrt{u} + C_۱ = -\frac{۱}{۴۹}\sqrt{۱ - ۴۹x^۲} + C_۱$$

و در نهایت

$$\int \arccos(-۷x)\,dx = x\arccos(-۷x) + \frac{۱}{۷}\sqrt{۱ - ۴۹x^۲} + C$$

۱۳) $\int x^n \ln x^m\,dx; \quad m,n \in \mathbb{Z}; m،n > 0$

ابتدا $\int x^n \ln(x)dx$ را پیدا می کنیم. فرض می کنیم $u = \ln(x)$ و $dv = x^n dx$ باشد. پس

$$\int x^n \ln(x)\,dx = \ln(x)\frac{x^{n+۱}}{n+۱} - \int \frac{۱}{x} * \frac{x^{n+۱}}{n+۱}dx = \frac{\ln(x)x^{n+۱}}{n+۱} - \int \frac{x^n}{n+۱}dx$$

حالا $\int \frac{x^n}{n+۱}dx$ را پیدا می کنیم.

$$\int \frac{x^n}{n+۱}dx = \frac{۱}{n+۱}\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} * \frac{x^{n+۱}}{n+۱} = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲}$$

پس

$$\int x^n \ln(x)\,dx = \frac{\ln(x)x^{n+۱}}{n+۱} - \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲} + C$$

و در نهایت

$$\int x^n \ln x^m dx = m\int x^n \ln x\,dx = \frac{m}{n+۱}x^{n+۱}\ln x - \frac{m}{(n+۱)^۲}x^{n+۱} + C$$

در تمرینات زیر انتگرال ها را حساب کنید.

۱۴) $\int_0^۱ x\,e^{۵x}\,dx$

فرض می کنیم $u = x$ و $dv = e^{۵x}dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \frac{۱}{۵}e^{۵x}$ است. لذا

$$\int_0^{۱} x\, e^{۵x}\, dx = \frac{۱}{۵} x e^{۵x} \Big|_0^{۱} - \int_0^{۱} \frac{۱}{۵} e^{۵x} dx = \frac{۱}{۵} e^{۵} - \frac{۱}{۵} \int_0^{۱} e^{۵x} dx$$

$$= \frac{۱}{۵} e^{۵} - \left(\frac{۱}{۲۵} e^{۵x}\right)\Big|_0^{۱} = \frac{۱}{۵} e^{۵} - \frac{۱}{۲۵} e^{۵} + \frac{۱}{۲۵} e^{0} = \frac{۴}{۲۵} e^{۵} + \frac{۱}{۲۵}$$

۱۵) $\int_0^{\pi} t^{۲} \cos t\, dt$

فرض می کنیم $u = t^{۲}$ و $dv = \cos t\, dt$ باشد ، پس $du = ۲t\, dt$ و $v = \sin t$ است. لذا

$$\int_0^{\pi} t^{۲} \cos t\, dt = t^{۲} \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} ۲t \sin t\, dt = -۲ \int_0^{\pi} t \sin t\, dt$$

بر اساس حل تمرین شماره ۱

$$-۲ \int_0^{\pi} t \sin t\, dt = -۲(-t \cos t + \sin t)\Big|_0^{\pi} = -۲(-\pi \cos \pi + 0) + ۲ * 0 = -۲\, \pi$$

و در نهایت

$$\int_0^{\pi} t^{۲} \cos t\, dt = -۲\, \pi$$

۱۶) $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} x\, sec^{۲} x\, dx$

فرض می کنیم $u = x$ و $dv = sec^{۲} x\, dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \tan x$ است. لذا

$$\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} x\, sec^{۲} x\, dx = x \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} - \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} \tan x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi \sqrt{۳}}{۳} + (\ln|\cos x|)\Big|_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi \sqrt{۳}}{۳} + \ln \frac{۱}{\sqrt{۲}} - \ln \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi \sqrt{۳}}{۳} + \frac{۱}{۲} \ln ۲$$

در تمرینات زیر ابتدا عمل جانشینی انجام دهید و سپس با انتگرال گیری جزء به جزء، انتگرال را حساب کنید.

۱۷) $\int_0^{۱} \ln(x+۱)\,dx$

فرض می کنیم $u = x + ۱$ باشد ، پس $du = dx$ است. اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است و اگر $x = ۱$ باشد ، پس $u = ۲$ است. لذا بر اساس حل مثا ل ۳

$$\int_0^{۱} \ln(x+۱)dx = \int_{۱}^{۲} \ln u\,du = (u\ln u - u)\Big|_{۱}^{۲} = (۲\ln ۲ - ۲) + ۱ = ۲\ln ۲ - ۱$$

۱۸) $\int x\sin ax\,dx$

فرض می کنیم $u = ax$ باشد ، پس $du = adx$ است. و $x = \frac{u}{a}$ پس

$$\int x\sin ax\,dx = \int \frac{u}{a}(\sin u)\frac{۱}{a}du = \frac{۱}{a^{۲}}\int u\sin u\,du$$

بر اساس تمرین شماره ۱ داریم.

$$\int u\sin u\,du = -u\cos u + \sin u + C_{۱}$$

و در نهایت

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{۱}{a^{۲}}\left(-ax\cos ax + \sin ax + C_{۱}\right)$$
$$= -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{۱}{a^{۲}}\sin ax + C$$

۱۹) $\int \sin x\arctan(\cos x)\,dx$

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\,dx$ است. پس

$$\int \sin x\arctan(\cos x)\,dx = -\int \arctan u\,du$$

بر اساس حل تمرین شماره ۱۱ داریم.

$$\int \arctan u\,du = u\arctan u - \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + u^{۲}\right) + C_{۱}$$

و در نهایت

$$\int \sin x \arctan(\cos x)dx = -\cos x \arctan(\cos x) + \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + \cos^{۲} x\right) + C$$

۲۰) $\int \cos\sqrt{t}\ dt$

فرض می کنیم $s = \sqrt{t}$ باشد ، پس $ds = \frac{۱}{۲\sqrt{t}}$ است. لذا

$$\int \cos\sqrt{t}\, dt = \int (\cos s)(۲s)ds = ۲\int s\cos s\, dx$$

بر اساس حل مثال ۱ داریم.

$$\int s\cos s\, ds = s\sin s + \cos s + C_۱$$

و در نهایت

$$\int \cos\sqrt{t}\, dt = ۲\int s\cos s\, ds = ۲s\sin s + ۲\cos s + C$$
$$= ۲\sqrt{t}\sin\sqrt{t} + ۲\cos\sqrt{t} + C$$

در تمرین زیر درستی فرمول شماره (۱۲) را نشان دهید.

۲۱) $\int \sin^{۴} x dx = -\frac{۱}{۴}\sin^{۳} x\cos x - \frac{۳}{۸}\sin x\cos x + \frac{۳}{۸}x + C \qquad (۱۲)$

با استفاده از فرمول (۱۰) برای $\int \sin^{n} x\, dx$ و سپس برای $\int \sin^{۲} x\, dx$ داریم

$$\int \sin^{۴} x\, dx = \frac{-۱}{۴}\sin^{۳} x\cos x + \frac{۳}{۴}\int \sin^{۲} x\, dx$$
$$= \frac{-۱}{۴}\sin^{۳} x\cos x - \frac{۳}{۱۶}\sin ۲x + \frac{۳}{۸}x + C$$
$$= \frac{-۱}{۴}\sin^{۳} x\cos x - \frac{۳}{۸}\sin x\cos x + \frac{۳}{۸}x + C$$

۲.۲ – انتگرال های مثلثاتی Trigonometric Integrals

انتگرال هایی مانند

$$\int \sin^{۵} x \ \cos^{۴} x \, dx \ ، \quad \int \tan^{۳} x \ \sec^{۳} x \, dx \quad و \quad \int \sin ۵x \ \cos ۳x \ dx$$

را **انتگرال های مثلثاتی Trigonometric Integrals** می نامند ، زیرا انتگراند های آنها ترکیبی از توابع مثلثاتی هستند.

انتگرال های به شکل $\int \sin^m x \ \cos^n x \, dx$

تا کنون به انتگرال هایی به شکل $\int \sin^m x \ \cos^n x \, dx$ بر خورد کرده ایم. در حقیقت اگر $n = 0$ باشد ، پس انتگرال می شود $\int \sin^m x \, dx$ و اگر $m = 0$ باشد ، پس انتگرال می شود $\int \cos^n x \, dx$ که هر دو را در بخش ۲.۱ تحت عنوان کاهش توان ها ، مورد بحث قرار دادیم.
حالا اگر $n = ۱$ باشد ، $\int \sin^m x \ \cos^n x \, dx$ می شود $\int \sin^m x \cos x \, dx$ که با جانشین کردن $u = \sin x$ انتگرال را حساب می کنیم. به مثا ل ۲ بخش ۱.۶ مراجعه کنید. به همین طریق ، اگر $m = ۱$ باشد ، پس $\int \sin x \ \cos^n x \, dx$ بدست می آوریم که با جانشین کردن $u = \cos x$ انتگرال را حساب می کنیم.
حالا بر می گردیم به انتگرال های به ششکل $\int \sin^m x \ \cos^n x \, dx$ که n و m اعداد صحیح مثبت هستند. و $n \geq ۲$ و $m \geq ۲$. پس دو حالت پیش می آید. یکی هنگامی که یا m یا n و یا هر دو فرد هستند. و حالت دوم ، هر دو n و m زوج هستند.
اگر n فرد باشد ، مانند $\int \sin^{۲} x \ \cos^{۳} x \, dx$ از $\cos x$ فاکتور می گیریم و بقیه انتگراند را با استفاده از همانی $\cos^{۲} x = ۱ - \sin^{۲} x$ برحسب $\sin x$ می نویسیم.

مثال ۱ ـ انتگرال $\int \sin^{۲} x \ \cos^{۳} x \, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

همان طور که در بالا گفتیم ، از $\cos x$ فاکتور می گیریم ، پس

$$\int \sin^{۲} x \ \cos^{۳} x \, dx = \int \sin^{۲} x \ \cos^{۲} x \cos x \, dx = \int \sin^{۲} x \left(۱ - \sin^{۲} x\right) \cos x \, dx$$

حالا فرض می کنیم $u = \sin x$ باشد ، پس $du = \cos x \, dx$ است. لذا

$$\int \sin^{۲} x \ \cos^{۳} x \, dx = \int \overbrace{\sin^{۲} x}^{u^{۲}} \ \overbrace{(۱ - \sin^{۲} x)}^{۱-u^{۲}} \ \overbrace{\cos x \ dx}^{du}$$

$$= \int u^{۲} \left(۱ - u^{۲}\right) du = \int \left(u^{۲} - u^{۴}\right) du = \frac{۱}{۳} u^{۳} - \frac{۱}{۵} u^{۵} + C$$

$$= \frac{۱}{۳} \sin^{۳} x - \frac{۱}{۵} \sin^{۵} x + C$$

اگر m در $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ فرد باشد ، همان مراحل بالا را طی می کنیم. اما این مرتبه از $\sin x$ فاکتور می گیریم و انتگراند را با استفاده از همانی $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ بر حسب $\cos x$ می نویسیم.

مثال ۲– انتگرال $\int \sin^۵ x \cos^۴ x\, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

همان طور که در بالا پیشنهاد شد ، از $\sin x$ فاکتور می گیریم. پس داریم.

$$\int \sin^۵ x \cos^۴ x\, dx = \int \sin^۴ x \sin x \cos^۴ x\, dx$$

$$= \left(\sin^۲ x\right)^۲ \cos^۴ x \sin x\, dx = \int \left(۱ - \cos^۲ x\right)^۲ \cos^۴ x \sin x\, dx$$

حالا عمل جانشینی انجام می دهیم. فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\, dx$ است. لذا

$$\int \sin^۵ x \cos^۴ x\, dx = \int \overbrace{\left(۱ - \cos^۲ x\right)^۲}^{\left(۱-u^۲\right)^۲} \overbrace{\cos^۴ x}^{u^۴} \overbrace{\sin x\, dx}^{-du}$$

$$= -\int \left(۱ - u^۲\right)^۲ u^۴\, du = -\int \left(u^۴ - ۲u^۶ + u^۸\right) du$$

$$= -\frac{۱}{۵}u^۵ + \frac{۲}{۷}u^۷ - \frac{۱}{۹}u^۹ + C$$

$$= -\frac{۱}{۵}\cos^۵ x + \frac{۲}{۷}\cos^۷ x - \frac{۱}{۹}\cos^۹ x + C$$

اگر در انتگرال $\int \sin^m x \cos^n\, dx$ هم m و هم n زوج باشند ، حساب کردن آن پیچیده تر است. سه همانی مثلثاتی زیر کمک می کنند که توان های m و n را کاهش دهیم.

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲} \sin ۲x \qquad (۱)$$

$$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} \qquad (۲)$$

$$\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} \qquad (۳)$$

همچنین دو فرمول زیر که از بخش ۱.۶ اقتباس شده ، مفید خواهد بود.

$$\int \sin^{۲} x\ dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۴)$$

$$\int \cos^{۲} x\ dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۵)$$

مثال ۳ – انتگرال $\int \sin^{۲} x\ \cos^{۴} x\ dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول های (۱) و (۳) با هم ، خواهیم داشت.

$$\int \sin^{۲} x\ \cos^{۴} x\ dx = \int \left(\sin^{۲} x\ \cos^{۲} x\right)\cos^{۲} x\ dx$$
$$= \int (\sin x\ \cos x)^{۲} \cos^{۲} x\ dx$$
$$\overset{(۱),(۳)}{=} \int \left(\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right)^{۲} \left(\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}\right) dx$$
$$= \frac{۱}{۸}\int \sin^{۲} ۲x\ dx + \frac{۱}{۸}\int \sin^{۲} ۲x\ \cos ۲x\ dx$$

برای انتگرال اول سمت راست ، فرض می کنیم $u = ۲x$ باشد ، پس $du = ۲\ dx$ است. و برای انتگرال دوم سمت چپ ، فرض می کنیم $v = \sin ۲x$ باشد ، پس $dv = ۲\cos ۲x\ dx$ است. لذا با کمک فرمول (۴) داریم.

$$\int \sin^{۲} x\ \cos^{۴} x\ dx = \frac{۱}{۸}\int \sin^{۲} \overbrace{۲x}^{u}\ \overbrace{dx}^{\frac{۱}{۲}u} + \frac{۱}{۸}\int \overbrace{\sin^{۲} ۲x}^{v^{۲}}\ \overbrace{\cos ۲x\ dx}^{\frac{۱}{۲}dv}$$
$$= \frac{۱}{۸}\int \sin^{۲} u \left(\frac{۱}{۲}\right) du + \frac{۱}{۸}\int v^{۲} * \frac{۱}{۲}dv$$
$$\overset{(۴)}{=} \frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۱}{۲}u - \frac{۱}{۴}\sin ۲u\right) + \frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۱}{۳}v^{۳}\right) + C$$
$$= \frac{۱}{۱۶}\left(x - \frac{۱}{۴}\sin ۴x\right) + \frac{۱}{۴۸}\sin^{۳} ۲x + C$$

جدول ۲.۱ خلاصه از تجزیه و تحلیل $\int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$ را نشان می دهد.

	روش	همانی های مفید
n فرد	$u=\sin x$ جانشین کنید	$\cos^۲ x = ۱-\sin^۲ x$
m فرد	$u=\cos x$ جانشین کنید	$\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x$
n و m زوج	توان های n یا m کاهش دهید	$\begin{cases} \sin x\ \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \\ \sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \\ \cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲} \end{cases}$

انتگرال های به شکل $\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx$

برای بسیاری از اعداد صحیح نا منفی m و n, انتگرال های به شکل $\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx$ را ازطریق جانشینی پیدا می کنیم. باز هم مراحل پیدا کردن این انتگرال ها ، بستگی به فرد یا زوج بودن m و n دارد.

اگر n زوج باشد و $n>0$ مانند $\int \tan^۳ x\ \sec^۴ x\ dx$, از $\sec^۲ x$ فاکتور می گیریم و بقیه انتگراند را با استفاده از $\sec^۲ x = ۱+\tan^۲ x$ بر حسب $\tan x$ می نویسیم

مثال ۴ – انتگرال $\int \tan^۳ x\ \sec^۴ x\ dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\int \tan^۳ x\ \sec^۴ x\, dx = \int \tan^۳ x\ \sec^۲ x\ \sec^۲ x\ dx$$
$$= \int \tan^۳ x \left(۱+\tan^۲ x\right) \sec^۲ x\ dx$$

فرض می کنیم $u=\tan x$ باشد ، پس $du=\sec^۲ x\ dx$ است. لذا

$$\int \tan^۳ x\ \sec^۴ x\ dx = \int \overbrace{\tan^۳ x}^{u^۳}\ \overbrace{(۱+\tan^۲ x)}^{۱+u^۲}\ \overbrace{\sec^۲ x\ dx}^{du}$$
$$= \int u^۳\left(۱+u^۲\right) du = \int \left(u^۳+u^۵\right) du$$

$$= \frac{۱}{۴}u^{۴} + \frac{۱}{۶}u^{۶} + C = \frac{۱}{۴}\tan^{۴} x + \frac{۱}{۶}\tan^{۶} x + C$$

حالا فرض می کنیم m فرد و $n > 0$ باشد ، مانند $\int \tan^{۳} x\ \sec^{۳} x\, dx$. در این حالت از $\sec x\ \tan x$ فاکتور می گیریم و بقیه انتگراند را با استفاده از $\tan^{۲} x = \sec^{۲} x - ۱$ بر حسب $\sec x$ می نویسیم.

مثال ۵ – انتگرال $\int \tan^{۳} x\ \sec^{۳} x\, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\int \tan^{۳} x\ \sec^{۳} x\, dx = \int \left(\tan^{۲} x\ \sec^{۲} x\right) \sec x\ \tan x\, dx$$

$$= \int \left[\left(\sec^{۲} x - ۱\right) \sec^{۲} x\right] \sec x\ \tan x\, dx$$

فرض می کنیم $u = \sec x$ باشد ، پس $du = \sec x\ \tan x\, dx$ است. لذا

$$\int \tan^{۳} x\ \sec^{۳} x\, dx = \int \left[\int \overbrace{\left(\sec^{۲} x - ۱\right)}^{u^{۲}-۱}\ \overbrace{\sec^{۲} x}^{u^{۲}}\right] \overbrace{\sec x\ \tan x\ dx}^{du}$$

$$= \int \left(u^{۲} - ۱\right) u^{۲} du = \int \left(u^{۴} - u^{۲}\right) du$$

$$= \frac{۱}{۵}u^{۵} - \frac{۱}{۳}u^{۳} + C = \frac{۱}{۵}\sec^{۵} x - \frac{۱}{۳}\sec^{۳} x + C$$

همان طور که در مثال های ۴ و ۵ توضیح داده شد ، اگر n زوج باشد و یا m فرد باشد ، پیدا کردن انتگرال $\int \tan^{m} x\ \sec^{n} x\, dx$ تا حدی آسان است. امکان دیگر این است که n فرد و m زوج باشد. با استفاده از فرمول $\tan^{۲} x = \sec^{۲} x - ۱$ می توانیم مساله را به شکل $\int \sec^{n} x\, dx$ در آوریم ، اینجا n فرد است. اما پیدا کردن این انتگرال ها آسان نیستند. اگر $n = ۱$ باشد، پس طبق فرمول (۱۰) بخش ۱.۷ داریم.

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad (۶)$$

پیدا کردن $\int \sec^{۳} x\, dx$ مشکل تر است. برای پیدا کردن این انتگرال فرض می کنیم $u = \sec x$ باشد ، پس $du = \sec x \tan x$ است. و فرض می کنیم $d\,v = \sec^{۲} x dx$ باشد ، پس $v = \tan x$ است. لذا

$$\int \sec^{3} x dx = \int \overbrace{\sec x}^{u}\ \overbrace{\sec^{2} x dx}^{dv} = \overbrace{\sec x}^{u}\ \overbrace{\tan x}^{v} - \int \overbrace{\tan x}^{v}\ \overbrace{\sec x\ \tan x\ dx}^{du}$$

$$= \sec x\ \tan x - \int \sec x \tan^{2} x\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec x)\left(\sec^{2} x - 1\right) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^{3} x\, dx + \int \sec x\, dx$$

با تلفیق جمله هایی که شامل $\int \sec^{3} x dx$ هستند. داریم.

$$\int \sec^{3} x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x\, dx$$

بر اساس فرمول (۶) داریم.

$$\boxed{\int \sec^{3} x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad (7)}$$

مثال ۶– انتگرال $\int \tan^{2} x\ \sec x\, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

چون m زوج و n فرد است ، پس همانی $\tan^{2} x = \sec^{2} x - 1$ را بکار می بریم تا انتگراند را به جملاتی تبدیل کنیم که شامل توان های $\sec x$ هستند. سپس فرمول های (۶) و (۷) را بکار می بریم.

$$\int \tan^{2} x\ \sec x\, dx = \int \left(\sec^{2} x - 1\right)(\sec x)\, dx = \int \left(\sec^{3} x - \sec x\right) dx$$

$$= \int \sec^{3} x\, dx - \int \sec x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sec x\ \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C$$

طرق مختلف پیدا کردن انتگرال های به شکل $\int \tan^m x \sec^n x \; dx$ را در جدول زیر خلاصه می کنیم.

همانی مفید	روش	
$\sec^۲ x = ۱ + \tan^۲ x$	$u = \tan x$ جانشین کنید	n زوج
$\tan^۲ x = \sec^۲ x - ۱$	$u = \sec x$ جانشین کنید	m فرد
$\tan^۲ x = \sec^۲ x - ۱$	تبدیل به $\sec x$ تنها	m زوج ، n فرد

چون $\csc^۲ x = ۱ + \cot^۲ x$ است ، پس با همان روش های بالا می توان انتگرال های به شکل زیر را پیدا کرد.

$$\int \cot^m x \; \csc^n x \, dx$$

تبدیل به سینوس و کسینوس Conversion to Sine and Cosine

انتگرال های مثلثاتی که به اشکالی که تا کنون بحث کرده ایم نباشند ، می توان آنها را به انتگرال های بر حسب سینوس و کسینوس تبدیل کرد و سپس انتگرال گیری کنیم.

مثال ۷ - انتگرال $\int \cos^۲ x \; \tan^۵ x \, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\int \cos^۲ x \; \tan^۵ x \, dx = \int \cos^۲ x \; \frac{\sin^۵ x}{\cos^۵ x} dx = \int \frac{\sin^۴ x}{\cos^۳ x} \sin x \, dx$$

$$= \int \frac{\left(۱ - \cos^۲ x\right)^۲}{\cos^۳ x} \sin x \; dx$$

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x \, dx$ است. لذا

$$\int \cos^۲ x \tan^۵ x \; dx = \int \overbrace{\frac{\left(۱ - \cos^۲ x\right)^۲}{\cos^۳ x}}^{\frac{(۱-u^۲)^۲}{u^۳}} \overbrace{\sin x \, dx}^{-du}$$

$$= -\int \frac{\left(۱ - u^۲\right)^۲}{u^۳} du = -\int \frac{۱ - ۲u^۲ + u^۴}{u^۳} du$$

$$= \int \left(-\frac{۱}{u^۳} + \frac{۲}{u} - u\right) du = \frac{۱}{۲u^۲} + ۲\ln|u| - \frac{u^۲}{۲} + C$$

$$= \frac{۱}{۲\cos^۲ x} + ۲\ln|\cos x| - \frac{\cos^۲ x}{۳} + C$$

انتگرال های به شکل $\int \sin ax \cos bx \, dx$

پیدا کردن چنین انتگرال هایی بستگی به همانی های مثلثاتی دارد.

$$\sin x \cos y = \frac{۱}{۲}\sin(x-y) + \frac{۱}{۲}\sin(x+y)$$

فرمول بالا را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\sin ax \cos bx = \frac{۱}{۲}\sin(a-b)x + \frac{۱}{۲}\sin(a+b)x \qquad (۸)$$

مثال ۸– انتگرال $\int \sin ۵x \cos ۳x \, dx$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\int \sin ۵x \cos ۳x \, dx = \int \left(\frac{۱}{۲}\sin ۲x + \frac{۱}{۲}\sin ۸x\right) dx$$

$$= -\frac{۱}{۴}\cos ۲x - \frac{۱}{۱۶}\cos ۸x + C$$

انتگرال های به شکل زیر را هم با همان روش بالا می توان پیدا کرد.

$$\int \sin ax \sin bx \, dx \quad \text{و} \quad \int \cos ax \cos bx \, dx$$

تمرینات ۲.۲

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \sin^۳ x \cos^۲ x \, dx$

۲) $\int \sin^۳ ۳x \cos ۳x \, dx$

۳) $\int \frac{۱}{x^۲}\sin^۵ \frac{۱}{x} \cos^۲ \frac{۱}{x} \, dx$

۴) $\int \sin^۲ y \cos^۲ y \, dy$

۵) $\int \sin^{۴} x \ \cos^{۴} x \, dx$

۶) $\int \sin^{-۱۰} x \ \cos^{۳} x \, dx$

۷) $\int \left(۱+\sin^{۲} x\right)\left(۱+\cos^{۲} x\right) \, dx$

۸) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin^{۳} x}{\cos^{۲} x} \, dx$

۹) $\int \tan^{۵} x \ \sec^{۲} x \, dx$

۱۰) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۵} t \ \sec^{۴} t \, dt$

۱۱) $\int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{\frac{۴\pi}{۳}} \tan^{۳} x \ \sec x \, dx$

۱۲) $\int \frac{۱}{\sqrt{x}} \tan^{۳} \sqrt{x} \ \sec^{۳} \sqrt{x} \, dx$

۱۳) $\int \tan^{۳} x \ \sec^{۴} x \, dx$

۱۴) $\int \tan x \ \sec^{۵} x \, dx$

۱۵) $\int \cot^{۳} x \ \csc^{۲} x \, dx$

۱۶) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \cot^{۳} x \ \csc^{۳} x \, dx$

۱۷) $\int \cot x \ \csc^{-۲} x \, dx$

۱۸) $\int \frac{\tan x}{\cos^{۳} x} \, dx$

۱۹) $\int \frac{\tan^{۲} x}{\sec^{۵} x} \, dx$

۲۰) $\int \tan^{۴} x \, dx$

۲۱) $\int \sin ۲x \ \cos ۳x \ dx$

۲۲) $\int \sin(-۴x) \ \cos(-۲x) \, dx$

۲۳) $\int \sin ۲x \ \sin ۳x \, dx$

۲۴) $\int \cos ۵x \ \cos(-۳x) \, dx$

۲۵) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱ + \cos x} dx$

پاسخ تمرینات ۲.۲

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \sin^۳ x \ \cos^۲ x \, dx$

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x \, dx$ است. لذا

$$\int \sin^۳ x \ \cos^۲ x \, dx = -\int (-\sin x) \left(۱ - \cos^۲ x\right) \cos^۲ x \, dx$$

$$= -\int \left(۱ - u^۲\right) u^۲ du = \int \left(-u^۲ + u^۴\right) du = \frac{-۱}{۳} u^۳ + \frac{۱}{۵} u^۵ + C$$

$$= \frac{-۱}{۳} \cos^۳ x + \frac{۱}{۵} \cos^۵ x + C$$

۲) $\int \sin^۳ ۳x \ \cos ۳x \, dx$

فرض می کنیم $u = \sin ۳x$ باشد ، پس $du = ۳ \cos ۳x \, dx$ است. لذا

$$\int \sin^۳ ۳x \ \cos ۳x \, dx = \frac{۱}{۳} \int u^۳ \, dx = \frac{۱}{۱۲} u^۴ + C = \frac{۱}{۱۲} \sin^۴ ۳x + C$$

۳) $\int \frac{۱}{x^۲} \sin^۵ \frac{۱}{x} \ \cos^۲ \frac{۱}{x} \ dx$

فرض می کنیم $u = \frac{۱}{x}$ باشد ، پس $du = -\frac{۱}{x^۲} \, dx$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{x^۲} \sin^۵ \frac{۱}{x} \cos^۲ \frac{۱}{x}\, dx = \int -\sin^۵ u \cos^۲ u\, du = -\int \sin^۵ u \cos^۲ u\, du$$

برای $\int \sin^۵ u \cos^۲ u\, du$ فرض می کنیم $v = \cos u$ باشد ، پس $dv = -\sin u\, du$ است. لذا

$$\begin{aligned}\int \sin^۵ u \cos^۲ u\, du &= \int \left(۱ - \cos^۲ u\right)^۲ (\sin u) \cos^۲ u\, du \\ &= \int -\left(۱ - v^۲\right)^۲ v^۲\, dv = -\int \left(v^۲ - ۲v^۴ + v^۶\right) dv \\ &= -\left(\frac{۱}{۳} v^۳ - \frac{۲}{۵} v^۵ + \frac{۱}{۷} v^۷\right) + C_۱ \\ &= -\frac{۱}{۳}\cos^۳ u + \frac{۲}{۵}\cos^۵ u - \frac{۱}{۷}\cos^۷ u + C_۱\end{aligned}$$

و در نهایت

$$\int \frac{۱}{x^۲} \sin^۵ \frac{۱}{x} \cos^۲ \frac{۱}{x}\, dx = \frac{۱}{۳}\cos^۳ \frac{۱}{x} - \frac{۲}{۵}\cos^۵ \frac{۱}{x} - \frac{۱}{۷}\cos^۷ \frac{۱}{x} + C$$

۴) $$\int \sin^۲ y \cos^۲ y\, dy \overset{(۱)}{\cong} \int (\sin y \cos y)^۲\, dy = \int \left(\frac{۱}{۲}\sin ۲y\right)^۲ dy = \frac{۱}{۴}\int \sin^۲ ۲y\, dy$$

حالا فرض می کنیم $u = ۲y$ باشد ، پس $du = ۲y\, dy$ است. لذا

$$\int \sin^۲ ۲y\, dy = \int \left(\sin^۲ u\right) \frac{۱}{۲}\, du = \frac{۱}{۲}\int \sin^۲ u\, du$$

بر اساس فرمول (۴) داریم

$$\int \sin^۲ u\, du = \frac{۱}{۲} u - \frac{۱}{۴}\sin ۲u + C_۱$$

لذا

$$\begin{aligned}\int \sin^۲ y \cos^۲ y\, dy &= \frac{۱}{۴}\int \sin^۲ ۲y\, dy = \frac{۱}{۸}\int \sin^۲ u\, du \\ &= \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲} u - \frac{۱}{۴}\sin ۲u\right) + C = \frac{۱}{۸} y - \frac{۱}{۳۲}\sin ۴y + C\end{aligned}$$

۵) $\int \sin^{۴} x \ \cos^{۴} x \, dx \overset{(۱)}{\cong} \int \frac{۱}{۱۶}\left(۲ \sin x \ \cos x\right)^{۴} dx = \frac{۱}{۱۶}\int \sin^{۴} ۲x \, dx$

حالا فرض می کنیم $u = ۲x$ باشد ، پس $du = ۲ \, dx$ است. لذا

$$\frac{۱}{۱۶}\int \sin^{۴} ۲x \, dx = \frac{۱}{۱۶}\int \left(\sin^{۴} u\right)\frac{۱}{۲} \, du = \frac{۱}{۳۲}\int \sin^{۴} u \, du$$

بر اساس فرمول (۱۲) بخش ۲.۱ داریم

$$\frac{۱}{۳۲}\int \sin^{۴} u \, du = \frac{۱}{۳۲}\left(-\frac{۱}{۴}\sin^{۳} u \cos u - \frac{۳}{۸}\sin u \ \cos u + \frac{۳}{۸}u\right) + C$$

$$= -\frac{۱}{۱۲۸}\sin^{۳} ۲x \ \cos ۲x - \frac{۳}{۲۵۶}\sin ۲x \ \cos ۲x + \frac{۳}{۱۲۸}x + C$$

۶) $\int \sin^{-۱۰} x \ \cos^{۳} x \, dx$

فرض می کنیم $u = \sin x$ باشد ، پس $du = \cos x \, dx$ است. لذا

$$\int \sin^{-۱۰} x \ \cos^{۳} x \, dx = \int \sin^{-۱۰} x \ \left(۱ - \sin^{۲} x\right)\cos x \, dx$$

$$= \left(u^{-۱۰} - u^{-۸}\right) du = \frac{-۱}{۹}u^{-۹} + \frac{۱}{۷}u^{-۷} + C$$

$$= \frac{-۱}{۹}\sin^{-۹} x + \frac{۱}{۷}\sin^{-۷} x + C$$

۷) $\int \left(۱ + \sin^{۲} x\right)\left(۱ + \cos^{۲} x\right) \, dx$

$$= \int \left(۱ + \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱ + \cos ۲x}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{۳ - \cos ۲x}{۲}\right)\left(\frac{۳ + \cos ۲x}{۲}\right) dx = \frac{۱}{۴}\int (۹ - \cos^{۲} ۲x) \, dx$$

با استفاده از فرمول (۵) داریم

$$\frac{۱}{۴}\int (۹ - \cos^{۲} ۲x) \, dx = \frac{۹}{۴}x - \frac{۱}{۸}x - \frac{۱}{۳۲}\sin ۴x + C$$

$$= \frac{۱۷}{۸}x - \frac{۱}{۳۲}\sin ۴x + C$$

۸) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin^۳ x}{\cos^۲ x}\, dx$

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\, dx$ است.

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است ، و اگر $x = \frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس $u = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin^۳ x}{\cos^۲ x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\left(۱ - \cos^۲ x\right)}{\cos^۲ x}\, \sin x\, dx$$

$$= \int_۱^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{-\left(۱ - u^۲\right)}{u^۲} du = \int_۱^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \left(۱ - \frac{۱}{u^۲}\right) du = \left(u + \frac{۱}{u}\right)\Bigg|_۱^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \sqrt{۲}\right) - \left(۱ + ۱\right) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲} - ۲$$

۹) $\displaystyle\int \tan^۵ x\, \sec^۲ x\, dx$

فرض می کنیم $u = \tan x$ باشد ، پس $du = \sec^۲ x\, dx$ است. لذا

$$\int \tan^۵ x\, \sec^۲ x\, dx = \int u^۵\, du = \frac{۱}{۶}u^۶ + C = \frac{۱}{۶}\tan^۶ x + C$$

۱۰) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \tan^۵ t\, \sec^۴ t\, dt$

فرض می کنیم $u = \tan t$ باشد ، پس $du = \sec^۲ t\, dt$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \tan^۵ t\, \sec^۴ t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{۴}} \tan^۵ t\left(\tan^۲ t + ۱\right)\sec^۲ t\, dt$$

$$= \int_0^{۱} u^{۵}\left(u^{۲}+۱\right)du = \int_0^{۱}\left(u^{۷}+u^{۵}\right)du = \left(\frac{۱}{۸}u^{۸}+\frac{۱}{۶}u^{۶}\right)\Big|_0^{۱} = \frac{۷}{۲۴}$$

۱۱) $\displaystyle\int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{\frac{۴\pi}{۳}} \tan^{۳} x\ \sec x\, dx$

فرض می کنیم $u=\sec x$ باشد ، پس $du=\sec x\ \tan x\ dx$ است. لذا

$$\int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{\frac{۴\pi}{۳}} \tan^{۳} x\ \sec x\, dx = \int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{\frac{۴\pi}{۳}} \left(\sec^{۲} x-۱\right)(\sec x\ \tan x)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{۲}}^{-۲}\left(u^{۲}-۱\right)du = \left(\frac{۱}{۳}u^{۳}-u\right)\Big|_{-\sqrt{۲}}^{-۲} = -\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}$$

۱۲) $\displaystyle\int \frac{۱}{\sqrt{x}}\tan^{۳}\sqrt{x}\ \sec^{۳}\sqrt{x}\, dx$

فرض می کنیم $u=\sec\sqrt{x}$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}\,dx$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x}}\tan^{۳}\sqrt{x}\ \sec^{۳}\sqrt{x}\, dx$$

$$= \int \left(\tan^{۲}\sqrt{x}\right)\left(\sec^{۲}\sqrt{x}\right)\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int \left[\left(\sec^{۲}\sqrt{x}-۱\right)\sec^{۲}\sqrt{x}\right]\frac{۱}{\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}\,dx$$

$$= \int \left(u^{۱}-۱\right)u^{۲}(۲)du = ۲\int\left(u^{۴}-u^{۲}\right)du$$

$$= \frac{۲}{۵}u^{۵}-\frac{۲}{۳}u^{۳}+C = \frac{۲}{۵}\sec^{۵}\sqrt{x}-\frac{۲}{۳}\sec^{۳}\sqrt{x}+C$$

۱۳) $\displaystyle\int \tan^{۳} x\ \sec^{۴} x\, dx$

فرض می کنیم $u=\tan x$ باشد ، پس $du=\sec^{۲} x\, dx$ است. لذا

$$\int \tan^{۳} x \ \sec^{۴} x \, dx = \int \tan^{۳} x \left(\tan^{۲} x + ۱\right) \sec^{۲} x \, dx$$
$$= \int u^{۳}\left(u^{۲}+۱\right) du = \int \left(u^{۵}+u^{۳}\right) du$$
$$= \frac{۱}{۶}u^{۶} + \frac{۱}{۴}u^{۴} + C = \frac{۱}{۶}\tan^{۶} x + \frac{۱}{۴}\tan^{۴} x + C$$

۱۴) $\int \tan x \ \sec^{۵} x \, dx$

فرض می کنیم $u = \sec x$ باشد ، پس $du = \sec x \ \tan x \, dx$ است. لذا

$$\int \tan x \ \sec^{۵} x \, dx = \int u^{۴} du = \frac{۱}{۵}u^{۵} + C = \frac{۱}{۵}\sec^{۵} x + C$$

۱۵) $\int \cot^{۳} x \ \csc^{۲} x \, dx$

فرض می کنیم $u = \cot x$ باشد ، پس $du = -\csc^{۲} x \, dx$ است. لذا

$$\int \cot^{۳} x \ \csc^{۲} x \, dx = -\int u^{۳} du = -\frac{۱}{۴}u^{۴} + C = -\frac{۱}{۴}\cot^{۴} x + C$$

۱۶) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \cot^{۳} x \ \csc^{۳} x \, dx$

فرض می کنیم $u = \csc x$ باشد ، پس $du = -\csc x \ \cot x \, dx$ است. لذا

$$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \cot^{۳} x \ \csc^{۳} x \, dx = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\csc^{۲} x - ۱\right) \csc^{۲} x (\cot x \ \csc x) dx$$
$$= -\int_{\sqrt{۲}}^{۱} \left(u^{۴} - u^{۲}\right) du = \left(\frac{-۱}{۵}u^{۵} + \frac{۱}{۳}u^{۳}\right)\Bigg|_{\sqrt{۲}}^{۱} = \frac{۲}{۱۵}\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

۱۷) $\int \cot x \ \csc^{-۲} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \sin^{۲} x \, dx = \int \cos x \ \sin x \ dx = \frac{۱}{۲}\sin^{۲} x + C$

۱۸) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^{3} x}\,dx$

فرض می کنیم $u=\cos x$ باشد ، پس $du=-\sin x\,dx$ است. لذا

$$\int \frac{\tan x}{\cos^{3} x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos^{4} x}dx=\int \frac{1}{u^{4}}(-1)du$$
$$=\frac{1}{3u^{3}}+C=\frac{1}{3\cos^{3} x}+C$$

۱۹) $$\int \frac{\tan^{2} x}{\sec^{5} x}\,dx=\int \frac{\sin^{2} x}{\cos^{2} x}\cos^{5} x\,dx=\int \sin^{2} x\,\cos^{3} x\,dx$$
$$=\int \sin^{2} x\left(1-\sin^{2} x\right)\cos x\,dx=\int\left(\sin^{2} x-\sin^{4} x\right)\cos x\,dx$$

فرض می کنیم $u=\sin x$ باشد ، پس $du=\cos x\,dx$ است. لذا

$$\int \frac{\tan^{2} x}{\sec^{5} x}\,dx=\int\left(\sin^{2} x-\sin^{4} x\right)\cos x\,dx=\int\left(u^{2}-u^{4}\right)du$$
$$=\frac{1}{3}u^{3}-\frac{1}{5}u^{5}+C=\frac{1}{3}\sin^{3} x-\frac{1}{5}\sin^{5} x+C$$

۲۰) $$\int \tan^{4} x\,dx=\int \tan^{2} x\left(\sec^{2} x-1\right)dx$$
$$=\int \tan^{2} x\,\sec^{2} x\,dx-\int \tan^{2} x\,dx$$

برای $\int \tan^{2} x\,\sec^{2} x\,dx$ فرض می کنیم $u=\tan x$ باشد ، پس $du=\sec^{2} x\,dx$ است. پس

$$\int \tan^{2} x\,\sec^{2} x\,dx=\int u^{2}du=\frac{1}{3}u^{3}+C_{1}=\frac{1}{3}\tan^{3} x+C_{1}$$

از طرف دیگر داریم

$$\int \tan^{2} x\,dx=\int\left(\sec^{2} x-1\right)dx=\tan x-x+C_{2}$$

و در نهایت

$$\int \tan^{4} x\,dx=\frac{1}{3}\tan^{3} x-\tan x+x+C$$

۲۱) $$\int \sin ۲x\ \cos ۳x\ dx \overset{(۸)}{\cong} \frac{۱}{۲}\int \big(\sin(-x) + \sin ۵x\big)dx$$
$$= \frac{۱}{۲}\cos(-x) - \frac{۱}{۱۰}\cos ۵x + C = \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۱۰}\cos ۵x + C$$

۲۲) $$\int \sin\big(-۴x\big)\ \cos\big(-۲x\big)\ dx \overset{(۸)}{\cong} \frac{۱}{۲}\int \Big(\sin\big(-۲x\big) + \sin\big(-۶x\big)\Big)dx$$
$$= \frac{۱}{۴}\cos\big(-۲x\big) + \frac{۱}{۱۲}\cos\big(-۶x\big) + C$$

۲۳) $$\int \sin ۲x\ \sin ۳x\ dx = \int \left[-\frac{۱}{۲}\cos\big(۲+۳\big)x + \frac{۱}{۲}\cos\big(۲-۳\big)x\right]dx$$
$$= -\frac{۱}{۱۰}\sin ۵x + \frac{۱}{-۲}\sin(-x) + C = -\frac{۱}{۱۰}\sin ۵x + \frac{۱}{۲}\sin x + C$$

۲۴) $$\int \cos ۵x\ \cos\big(-۳x\big)\ dx = \int \left[\frac{۱}{۲}\cos\big(۵-۳\big)x + \frac{۱}{۲}\cos\big(۵+۳\big)x\right]dx$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin ۲x + \frac{۱}{۱۶}\sin ۸x + C$$

۲۵) $$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱+\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱+\cos x} * \frac{۱-\cos x}{۱-\cos x}\ dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\cos x}{\sin^۲ x}dx = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\csc^۲ x - \csc x \cot x\right)dx$$
$$= (-\cot x + \csc x)\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۲ - \sqrt{۲}$$

۲.۳- جانشینی مثلثاتی Trigonometric Substitutions

در فصل اول بخش ۱.۶ در مورد انتگرال گیری از طریق جانشینی بحث کردیم. گفتیم برای انتگرالی به شکل $\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)$ عمل جانشینی به طریق زیر انجام می دهیم.
فرض می کنیم $u = g(x)$ باشد ، پس $du = g'(x)\, dx$ است. پس داریم

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x) = \int f(u)du$$

انتگرال سمت راست بالا را به اسانی پیدا می کردیم.

حالا جانشینی دیگری را معرفی می کنیم. برای آماده شدن جهت این جانشینی نوع دوم ، فرض می کنیم

$$u = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}\, dx \qquad (۱)$$

برای ساده کردن تساوی های در فرمول (۱) ملاحظه می کنید که $u = \arcsin x$ معادل است با $x = \sin u$ ، و طبق تعریف تابع $arcsine$ داریم $-\frac{\pi}{۲} \le u \le \frac{\pi}{۲}$.
چون $\cos u \ge 0$ است برای $-\frac{\pi}{۲} \le u \le \frac{\pi}{۲}$ پس نتیجه می گیریم که

$$\sqrt{۱ - x^۲} = \sqrt{۱ - \sin^۲ u} = \cos u$$

و لذا دومین تساوی در فرمول (۱) را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$du = \frac{۱}{\cos u} dx \quad \text{یا} \quad dx = \cos u\, du$$

پس بجای جانشینی که در فرمول (۱) انجام دادیم ، می توان جانشینی زیر را انجام داد.

$$x = \sin u \quad \Rightarrow \quad dx = \cos u\, du \qquad (۲)$$

در فرمول بالا $-\frac{\pi}{۲} \le u \le \frac{\pi}{۲}$ است.

و بطور کلی برای پیدا کردن انتگرال $\int f(x)dx$ عمل جانشینی زیر را انجام می دهیم.

$$x = g(u\,) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(u)\, du \qquad (۳)$$

پس انتگرال زیر را بدست می آوریم.

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)\, du \qquad (۴)$$

و برای انتگرال معین

$$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(g(u)\big)g'(u)\, du \qquad (۵)}$$

طبیعی است که تابع g در فرمول (۳) شامل توابع مثلثاتی است. همان طور که در (۲) ملاحظه می کنید ، $x = \sin u$ است. فرمول (۳) را **جانشینی مثلثاتی** می نامند. جانشینی مثلثاتی مخصوصا هنگامی که انتگرال شامل رادیکال هایی به شکل

$$\sqrt{a^۲ - x^۲}\ ,\ \sqrt{x^۲ + a^۲}\ ,\ \sqrt{x^۲ - a^۲}$$

باشد ، مفید است.

انتگرال های شامل $\sqrt{a^۲ - x^۲}$

اگر فرض کنیم $x = a \sin u$ باشد ، و $a > 0$ و $-\frac{\pi}{۲} \le u \le \frac{\pi}{۲}$ پس $a \cos u \ge 0$ است ، بطوری که

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \sqrt{a^۲ - a^۲ \sin^۲ u} = \sqrt{a^۲(۱ - \sin^۲ u)} = \sqrt{a^۲ \cos^۲ u} = a \cos u$$

پس اگر انتگرال شامل $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ باشد ، با جانشین کردن

$$x = a \sin u \quad \Rightarrow \quad dx = a \cos u\, du$$

رادیکال را حذف می کنیم

مثال ۱ – انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۱۶ - x^۲}}\, dx$$

پاسخ

چون $\sqrt{۴^۲ - x^۲} = \sqrt{۱۶ - x^۲}$ است ، فرض می کنیم $x = ۴ \sin u$ باشد ، پس $dx = ۴ \cos u\, du$ است

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۱۶ - x^۲}}\, dx = \int \frac{۱}{۱۶ \sin^۲ u \sqrt{۱۶ - ۱۶ \sin^۲ u}} (۴ \cos u)\, du$$

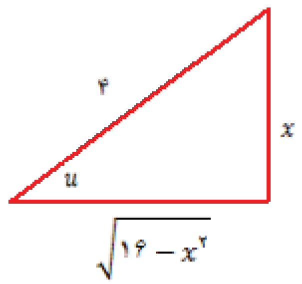
$$= \int \frac{۱}{(۱۶ \sin^۲ u)\, ۴ \sqrt{۱ - \sin^۲ u}} (۴ \cos u) du$$

$$= \frac{۱}{۱۶} \int \frac{\cos u}{\sin^۲ u \cos u}\, du = \frac{۱}{۱۶} \int \csc^۲ u\, du$$

$$= -\frac{۱}{۱۶} \cot u + C$$

برای این که جواب را بر حسب متغیر اصلی یعنی x بنیویسیم , یک مثلث مانند شکل A رسم می کنیم. در این مثلث $x = ۴ \sin u$ است. از مثلث داریم

$$\cot u = \frac{\sqrt{۱۶ - x^۲}}{x}$$



شکل A

پس

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۱۶ - x^۲}}\,dx = -\frac{۱}{۱۶}\cot u + C = -\frac{\sqrt{۱۶ - x^۲}}{۱۶x} + C$$

در مثال ۱ اگر انتگرال به شکل زیر

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱۶ - x^۲}}\,dx$$

بود ، باز همان جانشینی $x = ۴\sin u$ همراه با فرمول (۳) بخش ۱.۶ که در ذیل ملاحظه می کنید

$$\int sin^۲ x dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۳)$$

داشتیم

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱۶ - x^۲}}\,dx = \int \frac{۱۶\sin^۲ u}{\sqrt{۱۶ - ۱۶\sin^۲ u}}(۴\cos u)\,du$$

$$= ۱۶\int \sin^۲ u\,du = ۸u - ۴\sin ۲u + C$$

باز هم طبق معمول پاسخ را باید بر حسب متغیر اصلی یعنی x بنویسیم. با استفاده از فرمول زاویه مضاعف و مراجعه به شکل A داریم.

$$\sin ۲u = ۲\sin u\,\cos u = ۲\left(\frac{x}{۴}\right)\frac{\sqrt{۱۶ - x^۲}}{۴} = \frac{x}{۸}\sqrt{۱۶ - x^۲}$$

چون $x=۴\sin u$ است ، پس $u=\arcsin\left(\frac{x}{۴}\right)$ است ، و لذا

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}\,dx = ۸u - ۴\sin ۲u + C = ۸\arcsin\frac{x}{۴} - \frac{x}{۲}\sqrt{۱۶-x^۲} + C$$

مثال ۲ ـ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{-\frac{۵}{۲}}^{\frac{۵}{۲}} \sqrt{۲۵-۴x^۲}\,\, dx$$

پاسخ

چون $\sqrt{۲۵-۴x^۲}=\sqrt{۵^۲-(۲x)^۲}$ پس فرض می کنیم $۲x=۵\sin u$ باشد ، پس $x=\frac{۵}{۲}\sin u$ و لذا $dx=\frac{۵}{۲}\cos u\, du$ است. برای حدود انتگرال گیری داریم.

اگر $x=-\frac{۵}{۲}$ باشد ، پس $u=-\frac{\pi}{۲}$ است و اگر $x=\frac{۵}{۲}$ باشد ، پس $u=\frac{\pi}{۲}$ است. لذا با کمک فرمول (۲) بخش ۱.۶ که در ذیل می آوریم

$$\int cos^۲ x dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۲)$$

داریم.

$$\int_{-\frac{۵}{۲}}^{\frac{۵}{۲}} \sqrt{۲۵-۴x^۲}\,\, dx = \int_{-\frac{۵}{۲}}^{\frac{۵}{۲}} \sqrt{۵^۲-(۲x)^۲}$$

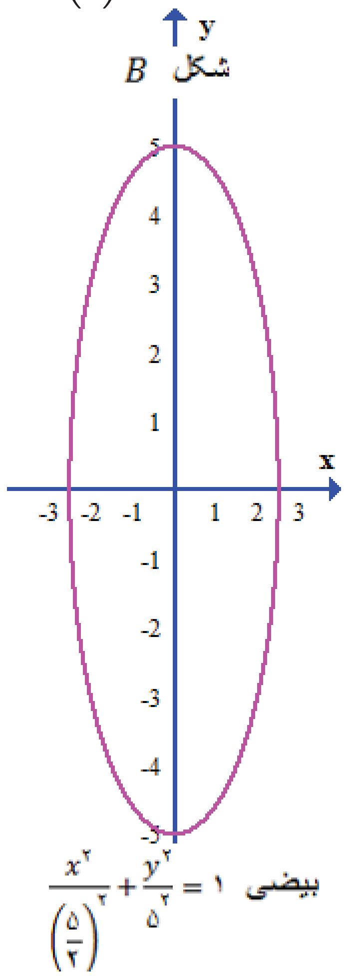
$$= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۵^۲-۵^۲\,\sin^۲ u}\,\left(\frac{۵}{۲}\cos u\right) du$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} ۵\sqrt{۱-\sin^۲ u}\,\left(\frac{۵}{۲}\cos u\right) du = \frac{۲۵}{۲}\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ u\, du$$

$$= \frac{۲۵}{۲}\left(\frac{۱}{۲}u + \frac{۱}{۴}\sin ۲u\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲۵}{۲}\left(\frac{\pi}{۴} - \left(-\frac{\pi}{۴}\right)\right) = \frac{۲۵}{۴}\pi$$

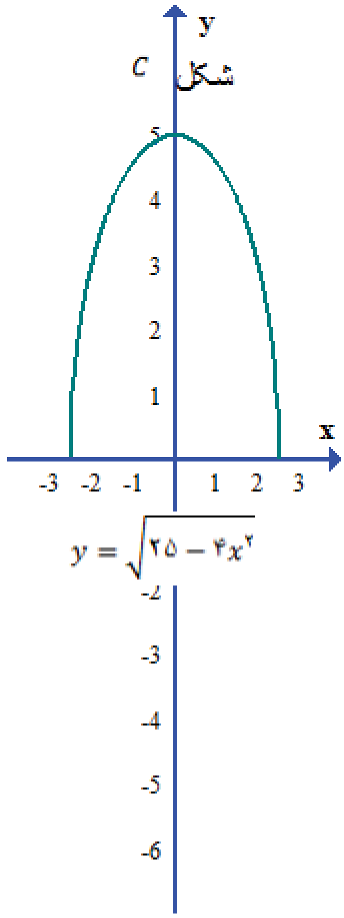
می توانیم مثال ۲ را برای پیدا کردن ناحیه محصور داخل بیضی زیر استفاده کرد. شکل B

$$\frac{x^{۲}}{\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲}}+\frac{y^{۲}}{۵^{۲}}=۱$$



این مساحت دو برابر مساحت ناحیه محصور از طرف بالا به نمودار $y=\sqrt{۲۵-۴x^{۲}}$ در بازه $\left[-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲}\right]$ است. شکل C
با استفاده از مثال ۲ داریم.

$$A=۲\int_{-\frac{۵}{۲}}^{\frac{۵}{۲}}\sqrt{۲۵-۴x^{۴}}\ dx=۲\left(\frac{۲۵\ \pi}{۴}\right)=\frac{۲۵\ \pi}{۲}$$



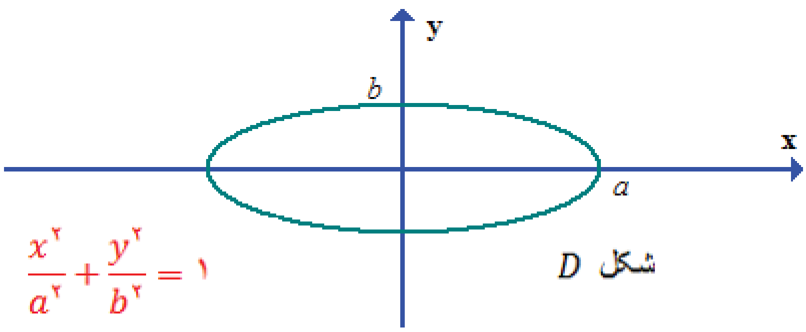
یک مساله چا لشی

نشان دهید مساحت محصور داخل بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \qquad a>0، b>0$$

مساوی است با πab

اثبات



معادله بیضی را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$y = \pm b\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}$$

مساحت یک چهارم بیضی را حساب می کنیم و سپس حاصل را در ۴ ضرب می کنیم تا مساحت تمام بیضی بدست آید. انتگرال را از $x = 0$ تا $x = a$ حساب می کنیم. پس باید انتگرال زیر را پیدا کنیم.

$$۴\int_0^a y\,dx = ۴\int_0^a b\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}\ \ dx \qquad (۱)$$

فرض می کنیم $\sin u = \frac{x}{a}$ باشد ، پس $x = a\ \sin u$ است. و $\frac{dx}{du} = a\ \cos u$ است و لذا $dx = a\ \cos u\, du$ است.

اگر $x = 0$ باشد پس $u = 0$ است. اگر $x = a$ باشد ، پس داریم

$$x = a\ \sin u \ \Rightarrow\ a = a \sin u \ \ \Rightarrow\ \sin u = ۱ \ \ \Rightarrow u = \frac{\pi}{۲}$$

لذامعادله (۱) به صورت زیر می شود.

$$۴\int_0^{\frac{\pi}{۲}} b\sqrt{۱ - (\sin u)^۲}\ * a\ \cos u\, du \qquad (۲)$$

می دانیم که $\sin^۲ u + \cos^۲ u = ۱$ است. پس

$$\sqrt{۱ - \sin^۲ u}\ \ \cos u = \sqrt{\cos^۲ u} * \cos u = \cos^۲ u$$

نتیجه بالا را در (۲) قرار می دهیم. پس داریم

$$۴\int_0^{\frac{\pi}{۲}} ab\ \cos^۲ u\, du = ۴ab\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ u\, du \qquad (۳)$$

باز می دانیم که

$$\cos^۲ u = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲u)$$

این تساوی را در (۳) می گذاریم. پس داریم.

$$۴ab\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲u)\, du = ۲ab\int_0^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲u)\, du$$

$$= ۲ab\left[u - \frac{\sin ۲u}{۲}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{۲}} = ۲ab\left[\left(\frac{\pi}{۲} + 0\right) - (0 + 0)\right] = \pi\, ab$$

انتگرال هایی که شامل $\sqrt{x^۲+a^۲}$ هستند.

اگر فرض کنیم $x = a\ \tan u$ باشد و $a > 0$ و $-\frac{\pi}{۲} < u < \frac{\pi}{۲}$ پس $a\sec u \geq 0$ است.

بطوری که

$$\sqrt{x^۲+a^۲} = \sqrt{a^۲\ \tan^۲ u + a^۲} = \sqrt{a^۲(\tan^۲ u + ۱)} = \sqrt{a^۲\ \sec^۲ u} = a\sec u$$

پس اگر انتگرال شامل $\sqrt{x^۲+a^۲}$ باشد ، می توانیم رادیکال را حذف کنیم ، اگر عمل جانشینی زیر را انجام دهیم.

$$x = a\tan u \ \Rightarrow dx = a\sec^۲ u\, du$$

مثال ۳ ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{x^۲+۱}}\, dx$$

پاسخ

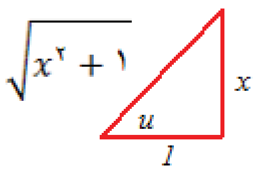
فرض می کنیم $x = \tan u$ باشد ، پس $du = \sec^۲ u\, du$ است.

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{x^۲+۱}}\, dx = \int \frac{۱}{\tan^۲ u\sqrt{\tan^۲ u + ۱}}(\sec^۲ u)\, du$$

$$= \int \frac{۱}{\tan^۲ u\ \sec u}(\sec^۲ u)\, du = \int \frac{\sec u}{\tan^۲ u}\, du$$

$$= \int \frac{\cos u}{\sin^۲ u}\, du = -\frac{۱}{\sin u} + C$$

برای این که پاسخ را بر حسب x بنویسیم ، شکل E را ملاحظه کنید. با $x = \tan u$ پس داریم



شکل E

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{x^۲+۱}} dx = -\frac{۱}{\sin u} + C = -\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x} + C$$

مثال ۴- انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۴+۱۶x^۲}}\,dx$$

پاسخ
چون

$$\sqrt{۴+۱۶x^۲}=\sqrt{۴(۱+۴x^۲)}=۲\sqrt{۱+(۲x)^۲}$$

است ، پس فرض می کنیم $۲x=\tan u$ باشد ، پس $x=\frac{۱}{۲}\tan u$ و $dx=\frac{۱}{۲}\sec^۲ u\ du$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۴+۱۶x^۲}}\,dx=\int \frac{۱}{۲\sqrt{۱+(۲x)^۲}}\,dx=\int \frac{۱}{۲\sqrt{۱+\tan^۲ u}}\left(\frac{۱}{۲}\sec^۲ u\right)du$$

$$=\int \frac{۱}{۲\sec u}\left(\frac{۱}{۲}\sec^۲ u\right)du=\frac{۱}{۴}\int \sec u\,du$$

با استفاده از فرمول (۶) بخش ۲.۲ که در ذیل تکرار می کنیم

$$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad (۶)$$

و این حقیقت که $\tan u=۲\,x$ و $\sec u=\sqrt{\tan^۲ u+۱}=\sqrt{۴x^۲+۱}$ نتیجه می گیریم

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۴+۱۶x^۲}}\,dx=\frac{۱}{۴}\int \sec u\,du=\frac{۱}{۴}\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\frac{۱}{۴}\ln\left|\sqrt{۴x^۲+۱}+۲x\right|+C$$

انتگرال هایی که شامل $\sqrt{x^۲-a^۲}$ هستند .

اگر فرض کنیم $x=a\ \sec u$ و $0\le u<\frac{\pi}{۲}$ و یا $\pi\le u<\frac{۳\pi}{۲}$ باشد، پس داریم $a\tan u\ge 0$ است بطوری که

$$\sqrt{x^۲-a^۲}=\sqrt{a^۲\ \sec^۲ u-a^۲}=\sqrt{a^۲(\sec^۲ u-۱)}=\sqrt{a^۲\ \tan^۲ u}=a\tan u$$

لذا اگر یک انتگرال شامل $\sqrt{x^۲-a^۲}$ باشد ، می توان رادیکال را حذف کرد با جانشینی زیر

$$x=a\ \sec u \ ، \quad dx=a\sec u\ \tan u\ du$$

مثال ۵ ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-۶}^{-۳} \frac{\sqrt{x^۲ - ۹}}{x}\, dx$$

پاسخ

دامنه انتگراند شامل $(-\infty, -۳]$ و $[۳, \infty)$ است. اما چون بازه ای که باید روی آن انتگرال بگیریم $[-۶, -۳]$ است ، پس در جستجوی ضد مشتقی هستیم که دامنه آن در $(-\infty, -۳]$ باشد.

چون $\sqrt{x^۲ - ۹} = \sqrt{x^۲ - ۳^۲}$ است ، پس فرض می کنیم

$$x = ۳\sec u \quad , \quad dx = ۳\sec u \, \tan u \, du$$

باشد. همچنین ملاحظه می کنید که $\sqrt{x^۲ - ۹} = \sqrt{۹\sec^۲ u - ۹} = ۳\tan u$ است.

برای حدود انتگرال ، اگر $x = -۶$ باشد ، پس $u = \frac{۴\pi}{۳}$ است و اگر $x = -۳$ باشد ، پس $u = \pi$ است. لذا

$$\int_{-۶}^{-۳} \frac{\sqrt{x^۲ - ۹}}{x}\, dx = \int_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\pi} \frac{\sqrt{۹\sec^۲ u - ۹}}{۳\sec u}\,(۳\sec u \tan u) du$$

$$= \int_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\pi} \frac{۳\tan u}{۳\sec u}(۳\sec u \, \tan u) du = ۳\int_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\pi} \tan^۲ u \, du = ۳\int_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\pi} \left(\sec^۲ u - ۱\right) du$$

$$= ۳(\tan u - u)\Bigg|_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\pi} = ۳(\tan \pi - \pi) - ۳\left(\tan\frac{۴\pi}{۳} - \frac{۴\pi}{۳}\right) = \pi - ۳\sqrt{۳}$$

جدول زیر جانشینی هایی که اخیرا بحث کردیم ، خلاصه می کند.

عبارت انتگراند	جانشین
$\sqrt{a^۲ - x^۲}$	$x = a\sin u$ ، $-\frac{\pi}{۲} \le u \le \frac{\pi}{۲}$ $dx = a\cos u \, du$
$\sqrt{x^۲ + a^۲}$	$x = a\tan u$ ، $-\frac{\pi}{۲} < u < \frac{\pi}{۲}$ $dx = a\sec^۲ u \, du$
$\sqrt{x^۲ - a^۲}$	$x = a\sec u$ ، $0 \le u < \frac{\pi}{۲}$ یا $\pi \le u < \frac{۳\pi}{۲}$ $dx = a\sec u \, \tan u \, du$

انتگرال هایی که شامل $\sqrt{bx^2+cx+d}$ هستند.

با کامل کردن مربع ، می توان $\sqrt{bx^2+cx+d}$ را بر حسب $\sqrt{a^2-x^2}$ یا $\sqrt{x^2+a^2}$ یا $\sqrt{x^2-a^2}$ نوشت. با توجه به این که $a>0$ است. سپس همان روش هایی که برای هر کدام از سه فرم گفته شد ، بکار می بریم.

مثال ۶ ـ انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$$

پاسخ

مخرج را به صورت مربع کامل می نویسیم.

$$\sqrt{9x^2+6x+2}=\sqrt{(3x+1)^2+1}$$

حالا فرض می کنیم $3x+1=\tan u$ باشد ، پس $3dx=\sec^2 u\,du$ و

$$dx=\frac{1}{3}\sec^2 u\,du$$

است. همچنین ملاحظه می کنید که $\sqrt{(3x+1)^2+1}=\sqrt{\tan^2 u+1}=\sec u$ است. با استفاده از فرمول (۶) بخش ۲.۲ که در بالا هم ذکر شد داریم.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}dx=\int \frac{1}{\sec u}\left(\frac{1}{3}\sec^2 u\right)du$$

$$=\frac{1}{3}\int \sec u\,du=\frac{1}{3}\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{(3x+1)^2+1}+3x+1\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+6x+2}+3x+1\right|+C$$

تمرینات ۲.۳
انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱) $$\int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{۱ - ۴x^۲}\, dx$$

۲) $$\int_{-۲}^{۲} \sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}\, dx$$

۳) $$\int \frac{۱}{(۹ + t^۲)^۲}\, dt$$

۴) $$\int \frac{۱}{(x^۲ + ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$$

۵) $$\int_0^{۱} \frac{۱}{(۳x^۲ + ۲)^{\frac{۵}{۲}}}\, dx$$

۶) $$\int \frac{۱}{(۹x^۲ - ۴)^{\frac{۵}{۲}}}\, dx$$

۷) $$\int \frac{۱}{(۳ - x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$$

۸) $$\int_0^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵ - ۴x^۲}}\, dx$$

۹) $$\int \frac{۱}{\sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۲}}\, dx$$

۱۰) $$\int \frac{۱}{(۱ - ۲w^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\, dw$$

۱۱) $$\int_0^{۱} \frac{۱}{۲x^۲ - ۲x + ۱}\, dx$$

۱۲) $\int \sqrt{x - x^۲}\, dx$

۱۳) $\int \frac{x^۲}{\sqrt{۹x^۲ - ۱}}\, dx$

۱۴) $\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ + ۴}}\, dx$

۱۵) $\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱ + x^۲}}\, dx$

۱۶) $\int_۲^{۲\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^۲ - ۴}}{x}\, dx$

۱۷) $\int \sqrt{۴ + x^۲}\, dx$

پاسخ تمرینات ۲.۳

انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱) $\int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{۱ - ۴x^۲}\, dx$

فرض می کنیم $x = \frac{۱}{۲}\sin u$ باشد ، پس $dx = \frac{۱}{۲}\cos u\ du$ است.

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = 0$ است، و اگر $x = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $u = \frac{\pi}{۲}$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{۱ - ۴x^۲}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - \sin^۲ u}\left(\frac{۱}{۲}\cos u\right) du = \frac{۱}{۲}\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ u\, du$$
$$= \frac{۱}{۴}\int_0^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲u)\, du = \frac{۱}{۴}\left(u + \frac{۱}{۲}\sin ۲u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۸}$$

۲) $\int_{-۲}^{۲} \sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}\, dx$

فرض می کنیم $x = ۲\ \sin u$ باشد ، پس $dx = ۲\cos u\, du$ است. اگر $x = -۲$ باشد ،

پس $u=-\frac{\pi}{۲}$ است ، و اگر $x=۲$ باشد ، پس $u=\frac{\pi}{۲}$ است. لذا

$$\int_{-۲}^{۲}\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۴}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\sin^۲ u}\;(۲\cos u)\,du=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲ u\,du$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲u)\,du=\left(u+\frac{۱}{۲}\sin ۲u\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}=\pi$$

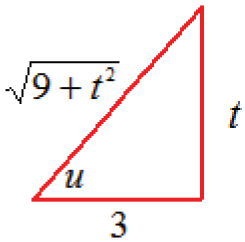
۳) $$\int\frac{۱}{(۹+t^۲)^۲}\,dt$$

فرض می کنیم $t=۳\tan u$ باشد ، پس $dt=۳\sec^۲ u\,du$ است. لذا

$$\int\frac{۱}{(۹+t^۲)^۲}\,dt=\int\frac{۱}{(۹+۹\tan^۲ u)^۲}\,۳\sec^۲ u\,du=\frac{۱}{۲۷}\int\frac{\sec^۲ u}{\sec^۴ u}\,du$$

$$=\frac{۱}{۲۷}\int\cos^۲ u\,du=\frac{۱}{۵۴}\int(۱+\cos ۲u)\,du=\frac{۱}{۵۴}\left(u+\frac{۱}{۲}\sin ۲u\right)+C$$

حالا فرض می کنیم $t=۳\tan u$ باشد ، پس $u=\arctan\frac{t}{۳}$ است. با توجه به شکل زیر



داریم.

$$\sin u=\frac{t}{\sqrt{۹+t^۲}} \quad و \quad \cos u=\frac{۳}{\sqrt{۹+t^۲}}$$

است و لذا

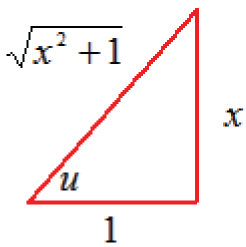
$$\sin ۲u=۲\sin u\cos u=\frac{۶t}{۹+t^۲}$$

و در نهایت

$$\int \frac{۱}{\left(۹+t^۲\right)^۲}\,dt = \frac{۱}{۵۴}u + \frac{۱}{۱۰۸}\sin ۲u + C$$
$$= \frac{۱}{۵۴}\arctan\frac{t}{۳} + \frac{t}{۱۸\left(۹+t^۲\right)} + C$$

۴) $$\int \frac{۱}{\left(x^۲+۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx$$

فرض می کنیم $x = \tan u$ باشد ، پس $dx = \sec^۲ u\,du$ است و با توجه به شکل زیر

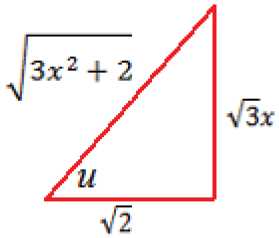


داریم $\sin u = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ لذا

$$\int \frac{۱}{\left(x^۲+۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx = \int \frac{۱}{\left(\tan^۲ u+۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}\sec^۲ u\,du = \int \frac{\sec^۲ u}{\sec^۳ u}\,du = \int \cos u\,du$$
$$= \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} + C$$

۵) $$\int_0^۱ \frac{۱}{\left(۳x^۲+۲\right)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx$$

فرض می کنیم $x = \sqrt{\frac{۲}{۳}}\tan u$ باشد ، پس $dx = \sqrt{\frac{۲}{۳}}\sec^۲ u\,du$ است. و با توجه به شکل زیر



داریم $\sin u = \frac{\sqrt{۳}\,x}{\sqrt{۳x^۲+۲}}$ است ، لذا

$$\int \frac{۱}{(۳x^۲+۲)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx = \int \frac{۱}{(۲\tan^۲ u+۲)^{\frac{۵}{۲}}}\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\sec^۲ u\right)du$$

$$= \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\int \frac{۱}{\sec^۵ u}\sec^۲ u\,du = \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\int \cos^۳ u\,du$$

$$= \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\int \left(۱-\sin^۲ u\right)\cos u\,du$$

$$= \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\left(\sin u - \frac{۱}{۳}\sin^۳ u\right)+C$$

$$= \frac{x}{۴\sqrt{۳x^۲+۲}} - \frac{۳}{۴\,(۳x^۲+۲)^{\frac{۳}{۲}}}+C$$

و در نهایت

$$\int_0^۱ \frac{۱}{(۳x^۲+۲)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx = \left(\frac{x}{۴\sqrt{۳x^۲+۲}} - \frac{x^۳}{۴(۳x^۲+۲)^{\frac{۳}{۲}}}\right)\Bigg|_0^۱ = \frac{\sqrt{۵}}{۲۵}$$

۶) $\displaystyle\int \frac{۱}{(۹x^۲-۴)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx$

فرض می کنیم $x=\frac{۲}{۳}\sec u$ باشد ، پس $dx=\frac{۲}{۳}\sec u\tan u\,du$ است. پس

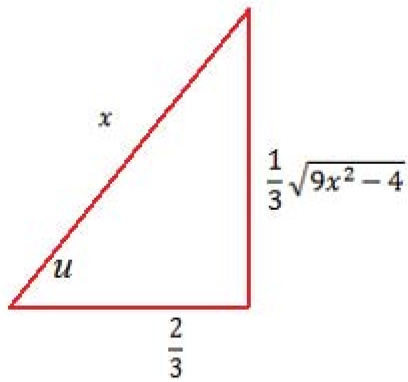
$$\int \frac{۱}{(۹x^۲-۴)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx = \int \frac{۱}{(۴\sec^۲ u-۴)^{\frac{۵}{۲}}}\,\frac{۲}{۳}\sec u\,\tan u\,du = \int \frac{\sec u\,\tan u}{۴۸\,\tan^۵ u}\,du$$

$$= \frac{۱}{۴۸}\int \frac{\sec u}{\tan^۴ u}du = \frac{۱}{۴۸}\int \frac{\cos^۳ u}{\sin^۴ u}\,du = \frac{۱}{۴۸}\int \frac{۱-\sin^۲ u}{\sin^۴ u}\cos u\,du$$

$$= \frac{۱}{۴۸}\int \left(\frac{۱}{\sin^۴ u}-\frac{۱}{\sin^۲ u}\right)\cos u\,du$$

$$= \frac{۱}{۴۸}\left(\frac{-۱}{۳\sin^۳ u}+\frac{۱}{\sin u}\right)+C$$

حالا اگر $x=\frac{۲}{۳}\sec u$ باشد ، پس $\sin u=\frac{\sqrt{۹x^۲-۴}}{۳x}$ است.



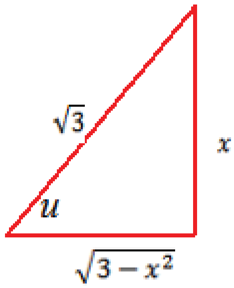
و در نهایت

$$\int \frac{۱}{(۹x^۲-۴)^{\frac{۵}{۲}}}\,dx = \frac{۱}{۴۸}\left(\frac{-۱}{۳\sin^۳ u}+\frac{۱}{\sin u}\right)+C$$

$$= \frac{-۳x^۳}{۱۶(۹x^۲-۴)^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{x}{۱۶(۹x^۲-۴)^{\frac{۱}{۲}}}+C$$

۷) $$\int \frac{۱}{(۳-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx$$

اگر $x=\sqrt{۳}\,\sin u$ باشد ، پس $dx=\sqrt{۳}\,\cos u\,du$ است. لذا



$$\int \frac{۱}{(۳-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\,dx = \int \frac{۱}{(۳-۳\sin^{۲} u)^{\frac{۳}{۲}}}\left(\sqrt{۳}\cos u\right)du = \frac{۱}{۳}\int \sec^{۲} u\,du$$

$$= \frac{۱}{۳}\tan u + C = \frac{۱}{۳}\frac{x}{\sqrt{۳-x^{۲}}} + C$$

۸) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵-۴x^{۲}}}\,dx$

فرض می کنیم $x = \frac{۵}{۲}\sin u$ باشد ، پس $dx = \frac{۵}{۲}\cos u\,du$ است.

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = 0$ است و اگر $x = \frac{۵}{۴}$ باشد ، پس $u = \frac{\pi}{۶}$ است. لذا

$$\int_{0}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵-۴x^{۲}}}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{\sqrt{۲۵-۲۵\sin^{۲} u}}\left(\frac{۵}{۲}\cos u\right)du = \frac{۱}{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۶}} ۱\,du$$

$$= \frac{۱}{۲}u\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{\pi}{۱۲}$$

۹) $\displaystyle\int \frac{۱}{\sqrt{۴x^{۲}+۴x+۲}}\,dx = \int \frac{۱}{\sqrt{(۴x^{۲}+۴x+۱)+۱}}\,dx$

$$= \int \frac{۱}{\sqrt{(۲x+۱)^{۲}+۱}}\,dx$$

فرض می کنیم $۲x+۱ = \tan u$ باشد ، پس $۲dx = \sec^{۲} u\,du$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{\sqrt{(۲x+۱)^۲+۱}}dx=\int\frac{۱}{\sqrt{\tan^۲ u+۱}}\frac{۱}{۲}\sec^۲ u\,du=\frac{۱}{۲}\int \sec u\,du$$
$$=\frac{۱}{۲}\ln|\sec u+\tan u|+C$$

چون

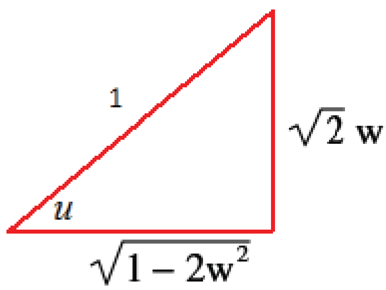
$$\sec u=\sqrt{\tan^۲ u+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۲}$$

است ، پس داریم

$$\int\frac{۱}{\sqrt{۴x^۲+۴x+۲}}\,dx=\frac{۱}{۲}\ln\left|\sqrt{۴x^۲+۴x+۲}+(۲x+۱)\right|+C$$

۱۰) $$\int\frac{۱}{(۱-۲w^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\,dw$$

فرض می کنیم $w=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin u$ باشد ، پس $dw=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos u\;du$ است. پس داریم .



$$\int\frac{۱}{(۱-۲w^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\,dw=\int\frac{۱}{(۱-\sin^۲ u)^{\frac{۵}{۲}}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos u\right)du=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int\sec^۴ u\,du$$
$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int\left(\tan^۲ u+۱\right)\sec^۲ u\,du=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{۳}\tan^۳ u+\tan u\right)+C$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{۳}\frac{۲\sqrt{۲}\,w^{۳}}{(۱-۲w^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{\sqrt{۲}\,w}{(۱-۲w^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\right)+C$$
$$=\frac{۲w^{۳}}{۳(۱-۲w^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{w}{(۱-۲w^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}+C$$

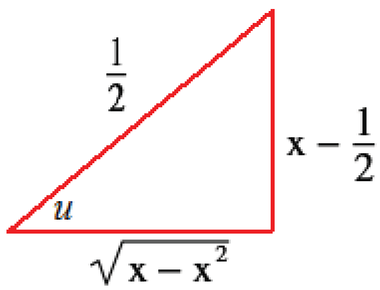
۱۱) $$\int_0^{۱}\frac{۱}{۲x^{۲}-۲x+۱}\,dx=\int_0^{۱}\frac{۱}{۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}}dx$$

فرض می کنیم $x-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\tan u$ باشد ، پس $dx=\frac{۱}{۲}\sec^{۲}u\,du$ است.
اگر $x=0$ باشد ، پس $u=-\frac{\pi}{۴}$ است ، و اگر $x=۱$ باشد ، پس $u=\frac{\pi}{۴}$ است. لذا

$$\int_0^{۱}\frac{۱}{۲x^{۲}-۲x+۱}\,dx=\int_0^{۱}\frac{۱}{۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}}dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\tan^{۲}u+\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\sec^{۲}u\right)du=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}۱\,du=\frac{\pi}{۲}$$

۱۲) $$\int\sqrt{x-x^{۲}}\,dx=\int\sqrt{\frac{۱}{۴}-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}\,dx$$

فرض می کنیم $x-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin u$ باشد ، پس $dx=\frac{۱}{۲}\cos u\,du$ است. لذا



$$\int \sqrt{\frac{۱}{۴}-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}\ dx = \int \sqrt{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\sin^{۲} u}\ \left(\frac{۱}{۲}\cos u\right) du$$
$$= \frac{۱}{۴}\int \cos^{۲} u\, du = \frac{۱}{۴}\int \left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲u\right) du$$
$$= \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}u+\frac{۱}{۴}\sin ۲u\right)+C$$

حالا اگر $\sin u$ $\frac{۱}{۲}$ $= \frac{۱}{۲} - x$ باشد ، پس $\sin u = ۱ - ۲x$ است و در نتیجه

$$u = \arcsin(۲x-۱)$$

است. با توجه به شکل بالا ملاحظه می کنید که

$$\cos u = \frac{\sqrt{x-x^{۲}}}{\frac{۱}{۲}} = ۲\sqrt{x-x^{۲}}$$

است بطوری که

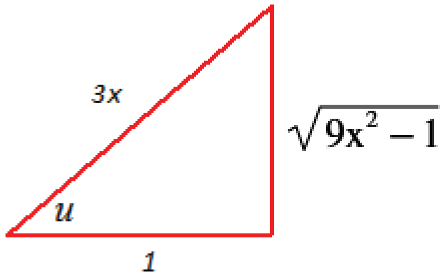
$$\sin ۲u = ۲\sin u\ \cos u = \left[۲(۲x-۱)\right]\left[۲\sqrt{x-x^{۲}}\right] = ۴(۲x-۱)\sqrt{x-x^{۲}}$$

و در نهایت

$$\int \sqrt{x-x^{۲}}\ dx = \int \sqrt{\frac{۱}{۴}-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}\ dx$$
$$= \frac{۱}{۴}\left\{\frac{۱}{۲}\arcsin(۲x-۱)+\frac{۱}{۴}\left[۴(۲x-۱)\sqrt{x-x^{۲}}\right]\right\}+C$$
$$= \frac{۱}{۸}\arcsin(۲x-۱)+\frac{۱}{۴}(۲x-۱)\sqrt{x-x^{۲}}+C$$

۱۳) $$\int \frac{x^{۲}}{\sqrt{۹x^{۲}-۱}}\, dx$$

فرض می کنیم $\sec u$ $\frac{۱}{۳}$ $= x$ باشد ، پس ، $dx = \frac{۱}{۳}\sec u\ \tan u\, du$ است.



$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۹x^۲-۱}}\,dx = \int \frac{\frac{۱}{۹}\sec^۲ u}{\sqrt{\sec^۲ u - ۱}}\frac{۱}{۳}\sec u\ \tan u\, du = \int \frac{۱}{۲۷}\sec^۳ u\, du$$

بر اساس فرمول (۷) بخش ۲.۲ که در ذیل ملاحظه می کنید ،

$$\int \sec^۳ x\, dx = \frac{۱}{۲}\sec x \tan x + \frac{۱}{۲}\ln|\sec x + \tan x| + C \qquad (۷)$$

داریم.

$$\int \frac{۱}{۲۷}\sec^۳ u\, du = \frac{۱}{۵۴}\sec u\ \tan u + \frac{۱}{۵۴}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

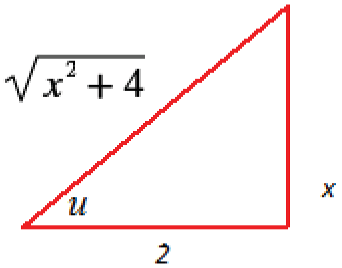
حالا اگر $x = \frac{۱}{۳}\sec u$ باشد ، پس $\sec u = ۳x$ و $\tan u = \sqrt{۹x^۲ - ۱}$ است. و لذا

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۹x^۲-۱}}\,dx = \frac{۱}{۵۴}\sec u\ \tan u + \frac{۱}{۵۴}\ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{۱}{۱۸}x\sqrt{۹x^۲-۱} + \frac{۱}{۵۴}\ln\left|۳x + \sqrt{۹x^۲-۱}\right| + C$$

۱۴) $\displaystyle\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲+۴}}\,dx$

فرض می کنیم $x = ۲\ \tan u$ باشد ، پس $dx = ۲\sec^۲ u\, du$ است. و همچنین با توجه به شکل زیر داریم ،

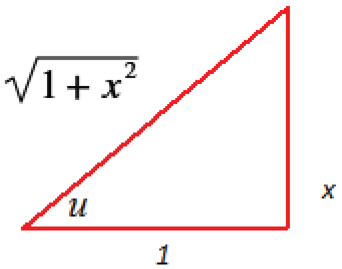
$$\csc u = \frac{\sqrt{x^۲+۴}}{x} \quad و \quad \cot u = \frac{۲}{x}$$



لذا داریم

$$\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲+۴}}\,dx = \int \frac{۱}{۲\tan u\sqrt{۴\tan^۲ u+۴}}\left(۲\sin^۲ u\right)\,du$$
$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{\sec u}{\tan u}\,du = \frac{۱}{۲}\int \csc u\,du$$
$$= -\frac{۱}{۲}\ln|\csc u+\cot u| + C = -\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{x}+\frac{۲}{x}\right| + C$$

۱۵) $\displaystyle\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}\,dx$



فرض می کنیم $x=\tan u$ باشد ، پس $x=\sec^۲ u\,du$ است. و با توجه به شکل بالا داریم

$$\sec u = \sqrt{۱+x^۲}$$

است. و طبق فرمول (۷) بخش ۲.۲ که در بالا هم ذکر شد داریم.

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}\,dx = \int \frac{\tan^۲ u}{\sqrt{۱+\tan^۲ u}}\sec^۲ u\,du = \int \tan^۲ u\,\sec u\,du$$

$$= \int \left(\sec^{۲} u - ۱\right) \sec u \; du = \int \left(\sec^{۳} u - \sec u\right) du$$

$$= \left(\frac{۱}{۲} \sec u \tan u + \frac{۱}{۲} \ln|\sec u + \tan u|\right) - \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$= \frac{۱}{۲} \sec u \tan u - \frac{۱}{۲} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$= \frac{۱}{۲} x \sqrt{۱ + x^{۲}} - \frac{۱}{۲} \ln\left|\sqrt{۱ + x^{۲}} + x\right| + C$$

۱۶) $\displaystyle\int_{۲}^{۲\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^{۲} - ۴}}{x} \; dx$

فرض می کنیم $x = ۲ \sec u$ باشد ، پس $dx = ۲ \sec u \tan u \; du$ است.

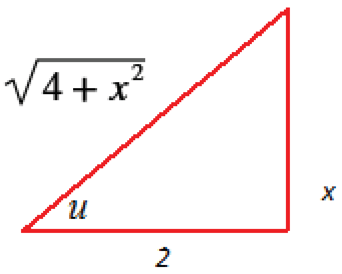
اگر $x = ۲$ باشد ، پس $u = 0$ است. و اگر $x = ۲\sqrt{۲}$ باشد ، پس $u = \frac{\pi}{۴}$ است. لذا

$$\int_{۲}^{۲\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^{۲} - ۴}}{x} \; dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۴ \sec^{۲} u - ۴}}{۲ \sec u} (۲ \sec u \tan u) du$$

$$= ۲ \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۲} u \; du = ۲ \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \left(\sec^{۲} u - ۱\right) du = ۲(\tan u - u) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} = ۲ - \frac{\pi}{۲}$$

۱۷) $\displaystyle\int \sqrt{۴ + x^{۲}} \; dx$

فرض می کنیم $x = ۲ \tan u$ باشد ، پس $dx = ۲ \sec^{۲} u \; du$ است. و با توجه به شکل زیر



داریم $\sec u = \frac{\sqrt{۴ + x^{۲}}}{۲}$ است. و همچنین طبق فرمول (۷) بخش ۲.۲ داریم

$$\int \sqrt{۴ + x^۲}\; dx = \int \sqrt{۴ + ۴\tan^۲ u}\,\left(۲\sec^۲ u\right)\,du$$
$$= \int \sec^۳ u\,du = ۲\sec u \tan u + ۲\ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{x\sqrt{۴ + x^۲}}{۲} + ۲\ln\left|\frac{\sqrt{۴ + x^۲}}{۲} + \frac{x}{۲}\right| + C$$

۲.۴ - کسر های جزئی Partial Fractions

در این بخش در مورد انتگرال گرفتن توابع گویا بحث می کنیم. می خواهیم انتگرال هایی مانند زیر را پیدا کنیم.

$$\int \frac{2x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx \quad \text{و} \quad \int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}\,dx$$

فرمول

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \quad , \quad a\neq 0 \qquad (1)$$

که در بخش ۶.۱بحث کردیم ، بکار گرفته می شود.

آماده سازی توابع گویا برای انتگرال گیری
Preparing Rational Functions for Integration

قبل از انتگرال گیری از توابع گویا ، باید ابتدا سه مرحله آماده سازی انجام دهیم.

الف – اگر ممکن باشد ، صورت تابع گویا را بر مخرج آن تقسیم کنید، تا مطمئن شوید که درجه صورت مانده جواب از درجه مخرج کمتر باشد.

مثال ۱ – آماده سازی الف را روی کسر زیر انجام دهید.

$$\frac{2x^3}{x^2+3}$$

پاسخ

عمل تقسیم مانند ، تقسیم اعداد صحیح انجام , می دهیم.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2+3\overline{)2x^3} \\ \underline{2x^3+6x} \\ -6x \end{array}$$

لذا

$$\frac{2x^3}{x^2+3} = 2x - \frac{6x}{x^2+3}$$

است. ملاحظه می کنید که درجه صورت کسر بدست آمده یک است در صورتی که درجه مخرج کسر بدست آمده دو است.

پس از مثال ۱ نتیجه می گیریم که

$$\int \frac{2x^3}{x^2+3}\,dx = \int 2x\,dx - \int \frac{6x}{x^2+3}\,dx$$

است. چون پیدا کردن انتگرال اول سمت راست آسان است , باید راهی برای محاسبه انتگرال دوم پیدا کنیم.

مثال ۲ – آماده سازی الف را روی کسر زیر انجام دهید.

$$\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

پاسخ

در این مثال درجه هم صورت و هم مخرج ، دو است. و چون درجه صورت از درجه مخرج کوچک تر نیست باید عمل تقسیم انجام دهیم.

$$\begin{array}{r|l} x^2-1 & x^2+1 \\ \underline{x^2+1} & 1 \\ -2 & \end{array}$$

بنا بر این

$$\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}=۱-\frac{۲}{x^۲+۱}$$

اگر داشته باشیم

$$\frac{x^۲+۳}{۲x^۳+x^۲+۱}$$

چون درجه صورت از درجه مخرج کوچک تر است ، آمده سازی الف لزومی ندارد.

بعد از انجام مرحله الف ، باید روی مانده جواب که خود یک تابع گویا است ، کار کنیم.

مرحله ب – از صورت و مخرج مانده تقسیم مرحله الف، مانند عبارت های زیر فاکتور بگیرید.

$$\left(x^۲+bx+c\right)^۲ \quad \text{و} \quad ، \quad (x-a)^r \quad , \quad \text{عدد ثابت}$$

در عبارت های بالا ، s و r اعداد صحیح مثبت هستند. عوامل درجه دوم را هم اگر امکان دارد فاکتور بگیرید. و در نهایت عوامل مشترک در صورت و مخرج را حذف کنید.

مثال ۳ ـعمل مرحله ب را روی کسر زیر انجام دهید.

$$\frac{۲x+۴}{x^۲+۳x+۲}$$

پاسخ

$$\frac{۲x+۴}{x^۲+۳x+۲}=\frac{۲(x+۲)}{(x+۲)(x+۱)}=\frac{۲}{x+۱}$$

مثال ۳ – عمل مرحله ب را روی عبارت گویای زیر انجام دهید.

$$\frac{۲x+۳}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}$$

پاسخ

$$\frac{۲x+۳}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}=\frac{۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}{x(x+۱)^{۲}}$$

در مثال های ۱ و ۲ عمل فاکتور گیری آسان بود. برای حالت های مشکل تر ، اصل موضوعه زیر برای فاکتور گیری چند جمله ای $P(x)$ کمک می کند.

اصل موضوعه Lemma 2.2

عبارت $x-a$ یک فاکتور $P(x)$ است ، اگر فقط و فقط $P(a)=0$ باشد.

اثبات

اگر $x-a$ یک فاکتور $P(x)$ باشد ، پس یک چند جمله ای مانند R وجود دارد ، بطوری که

$$P(x)=(x-a)R(x)$$

پس داریم

$$P(a)=(a-a)R(a)=0$$

برای اثبات عکس قضیه ، فرض می کنیم $P(x)$ مطابق زیر باشد

$$P(x)=c_nx^n+c_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+c_۱x+c_0$$

و فرض می کنیم $P(a)=0$ باشد ، پس

$$P(a)=c_nx^n+c_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+c_۱x+c_0=0$$

است ، بطوری که

$$P(x)=P(x)-P(a)$$

$$=c_n(x^n-a^n)+c_{n-۱}\left(x^{n-۱}-a^{n-۱}\right)+\cdots+c_۱(x-a)\qquad(۲)$$

اما برای هر عدد صحیح $k\geq ۲$ می دانیم که

$$x^k-a^k=(x-a)\left(x^{k-۱}+x^{k-۲}a+\cdots+xa^{k-۲}+a^{k-۱}\right)$$

پس $x-a$ یک فاکتور برای هر یک از جمع وند های سمت راست شماره (۲) است. لذا $x-a$ یک فاکتور $P(x)$ است.

جمع وند Summand

مثال ۵ - عمل مرحله ب را روی کسر زیر انجام دهید.

$$\frac{x^{۲}+۲x+۷}{x^{۳}+x^{۲}-۲}$$

پاسخ

با استفاده از فرمول درجه دوم یعنی $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ ملاحظه می شود که صورت کسر ریشه حقیقی ندارد. پس نمی توان از آن فاکتور گرفت. برای فاکتور گرفتن از مخرج ، ملاحظه می شود که

$$x^۳ + x^۲ - ۲ = 0 \quad \text{برای} \quad x = ۱$$

پس بر اساس اصل موضوعه ۲.۲ عبارت $x - ۱$ باید یک فاکتور باشد. اگر $x^۳ + x^۲ - ۲$ را بر $x - ۱$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت

$$x^۳ + x^۲ - ۲ = \left(x - ۱\right)\left(x^۲ + ۲x + ۲\right)$$

باز هم فرمول درجه دوم به ما می گوید که $x^۲ + ۲x + ۲$ هیچ ریشه حقیقی ندارد. پس نمی توان از آن فاکتور گرفت. لذا

$$\frac{x^۲ + ۲x + ۷}{x^۳ + x^۲ - ۲} = \frac{x^۲ + ۲x + ۷}{(x - ۱)(x^۲ + ۲x + ۲)} \qquad (۳)$$

بعد از انجام مرحله الف و ب یک تابع گویای g بدست می آوریم بطوری که مخرج $g(x)$ شامل حاصل ضرب اعداد ثابت ، فاکتور هایی به شکل $(x + a)^r$ یا به شکل $\left(x^۲ + bx + c\right)^s$ است.

مرحله آخر در آماده سازی برای انتگرال گیری $g(x)$ این است که آنرا به صورت مجموع عبارت هایی که از فاکتور های مخرج $g(x)$ بدست آمده بنویسیم. برای هر فاکتور $(x + a)^r$ که در مخرج $g(x)$ وجود دارد ، عبارت هایی به شکل زیر می نویسیم.

$$\frac{A_۱}{x + a} + \frac{A_۲}{(x + a)^۲} + \cdots + \frac{A_r}{(x + a)^r} \qquad (۴)$$

که باید $A_۱, A_۲ \cdots, A_r$ را مشخص کنیم.

برای هر فاکتور به شکل $\left(x^۲ + bx + c\right)^s$ عبارت هایی مانند زیر می نویسیم.

$$\frac{B_۱x + C_۱}{x^۲ + bx + c} + \frac{B_۲x + C_۲}{\left(x^۲ + bx + c\right)^۲} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{\left(x^۲ + bx + c\right)^s} \qquad (۵)$$

که باز باید $B_۱, B_۲, \cdots, B_s$ و $C_۱, C_۲, \cup \cdots, C_s$ را مشخص کنیم. مثلا

$$\frac{۲\left(x + \frac{۳}{۲}\right)}{x\left(x + ۱\right)^۲} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + ۱} + \frac{C}{\left(x + ۱\right)^۲} \qquad (۶)$$

و

$$\frac{x^۲ + ۲x + ۷}{(x - ۱)(x^۲ + ۲x + ۲)} = \frac{A}{x - ۱} + \frac{Bx + C}{x^۲ + x + ۲} \qquad (۷)$$

که A ، B ، C را باید مشخص کنیم.

حالا سومین مرحله آماده سازی را بیان می کنیم.

مرحله ج

شکل تبدیل یافته تابع $g(x)$ را به صورت مجموع عبارت هایی که در شماره (۴) و (۵) آمده است بنویسید.

این روش تبدیل توابع گویا به کسر هایی که در مرحله ج بدست آمده، را روش کسر های جزئی می نامند.

مثال های انتگرال گیری بوسیله کسر های جزئی

Examples of Integration by Partial Fractions

مثال ۶ - انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{۲x+۳}{x^۳+۲x^۲+x}\,dx$$

پاسخ

در مثال ۴ مرحله ب را روی انتگراند انجام دادیم و نتیجه زیر بدست آمد.

$$\frac{۲x+۳}{x^۳+۲x^۲+x}=\frac{۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}{x(x+۱)^۲}$$

حالا مرحله ج را روی کسر سمت راست انجام می دهیم.

$$\frac{۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}{x(x+۱)^۲}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۱}+\frac{C}{(x+۱)^۲} \qquad (۸)$$

برای محاسبه اعداد ثابت A ، B ,C هر دو طرف (۸) را در $x(x+۱)^۲$ ضرب می کنم ، تا کسر ها حذف شوند. پس داریم

$$۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)=A(x+۱)^۲+Bx(x+۱)+Cx$$

این معادله باید برای تمام مقادیر x بر قرار باشد ، مخصوصا برای $x=0$ و $x=-۱$

برای $x=0$ داریم.

$$۳=A(۱)+B(0)+C(0) \qquad \Rightarrow A=۳$$

برای $x=-۱$ داریم.

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=A(0)+B(0)+C(-۱) \qquad \Rightarrow C=-۱$$

لذا

$$۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)=۳(x+۱)^۲+Bx(x+۱)=x$$

روی عبارت سمت راست اعمال جبری انجام می دهیم و سپس جملات مشابه را تلفیق می کنیم

$$۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)=۳x^{۲}+۶x+۳+Bx^{۲}+Bx-x$$
$$۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)=(۳+B)x^{۲}+(۵+B)x+۳$$

این معادله بدست آمده می تواند بر قرار باشد ، فقط اگر ضریب x های هم توان در هر دو طرف یکسان باشند. در معادله بالا ضریب x در سمت چپ ۲ است و در سمت راست $B+۵$ است.
ضریب $x^{۲}$ در سمت چپ صفر است و در سمت راست $B+۳$ است. پس

$$۳+B=0 \;\Rightarrow\; B=-۳$$

در نتیجه معادله (۸) به صورت زیر می شود

$$\frac{۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}{x(x+۱)^{۲}}=\frac{۳}{x}-\frac{۳}{x+۱}-\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$$

لذا

$$\int\frac{۲x+۳}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}\,dx=\int\frac{۲\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}{x(x+۱)^{۲}}dx=\int\frac{۳}{x}dx-\int\frac{۳}{x+۱}dx-\int\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}dx$$
$$=۳\ln|x|-۳\ln|x+۱|+\frac{۱}{x+۱}+C_{۱}$$
$$=۳\ln\left|\frac{x}{x+۱}\right|+\frac{۱}{x+۱}+C_{۱}$$

مثال ۷ - انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int\frac{x^{۲}+۲x+۷}{x^{۳}+x^{۲}-۲}dx$$

پاسخ

برای انجام مراحل الف و ب شماره های (۳) و (۷) را تلفیق می کنیم.

$$\frac{x^{۲}+۲x+۷}{x^{۳}+x^{۲}-۲}=\frac{A}{x-۱}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+۲x+۲}\qquad(۹)$$

برای حذف کسر ها ، دو طرف (۹) را در $(x-۱)\left(x^{۲}+۲x+۲\right)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$x^{۲}+۲x+۷=A\left(x^{۲}+۲x+۲\right)+(Bx+C)(x-۱)$$

این معادله باید برای تمام x ها بر قرار باشد ، مخصوصا برای $x=۱$. برای $x=۱$ داریم.

$$۱۰=A(۵)\;\;\Rightarrow A=۲$$

پس

$$x^۲+۲x+۷=۲\left(x^۲+۲x+۲\right)+(Bx+C)(x-۱)$$
$$x^۲+۲x+۷=۲x^۲+۴x+۴+Bx^۲-Bx+Cx-C$$
$$x^۲+۲x+۷=(۲+B)x^۲+(۴+C-B)x+(۴-C)\qquad(۱۰)$$

معادله (۱۰) بر قرار است فقط اگر ضریب های x های با توان های مساوی در هر دو طرف یکسان باشند.

$$۱=۲+B\ \Rightarrow\ B=-۱$$
$$۷=۴-C\ \Rightarrow\ C=-۳$$

چون $۴+C-B=۴-۳+۱=۲$

پس ضریب های x در هر دو طرف مساوی هستند. پس (۹) را می توانیم به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$\frac{x^۲+۲x+۷}{x^۳+x^۲-۲}=\frac{۲}{x-۱}-\frac{x+۳}{x^۲+۲x+۲}$$

لذا

$$\int\frac{x^۲+۲x+۷}{x^۳+x^۲-۲}dx=\int\frac{۲}{x-۱}dx-\int\frac{x+۳}{x^۲+۲x+۲}dx$$

برای محاسبه انتگرال سمت راست ، باید مخرج را به صورت مربع کامل بنویسیم. پس داریم

$$x^۲+۲x+۲=(x+۱)^۲+۱$$

سپس فرض می کنیم $u=x+۱$ باشد ، پس $du=dx$ و $x+۳=u+۲$ است. پس داریم

$$\int\frac{x+۳}{x^۲+۲x+۲}dx=\int\frac{x+۳}{(x+۱)^۲+۱}dx=\int\frac{u+۲}{u^۲+۱}du$$
$$=\int\frac{u}{u^۲+۱}du+۲\int\frac{۱}{u^۲+۱}du=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲u}{u^۲+۱}du+۲\int\frac{۱}{u^۲+۱}du$$
$$=\frac{۱}{۲}\ln\left(u^۲+۱\right)+۲\arctan u+C$$
$$=\frac{۱}{۲}\ln\left[(x+۱)^۲+۱\right]+۲\arctan(x+۱)+C$$

و در نهایت

$$\int\frac{x^۲+۲x+۷}{x^۳+x^۲-۲}dx=\int\frac{۲}{x-۱}dx-\int\frac{x+۳}{x^۲+۲x+۲}dx$$
$$=۲\ln|x-۱|+\frac{۱}{۲}\ln\left[(x+۱)^۲+۱\right]+۲\arctan(x+۱)+C$$

مثال ۸ - انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{۱}{x(x^۲+۱)^۲}\,dx$$

پاسخ
برای انجام مرحله ج داریم

$$\frac{۱}{x(x^۲+۱)^۲}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^۲+۱}+\frac{Dx+E}{(x^۲+۱)^۲}$$

حالا کسر ها را حذف می کنیم.

$$۱=A\left(x^۲+۱\right)^۲+(Bx+C)x\left(x^۲+۱\right)+(Dx+E)x \qquad (۱۱)$$

برای $x=0$ معادله به صورت زیر است.

$$۱=A(۱)+C(0)+E(0) \quad \Rightarrow \quad A=۱$$

بعد از جایگزین کردن $A=۱$ و انجام ضرب های لازم و تلفیق کردن جملات مشابه ، معادله (۱۱) به صورت زیر می شود.

$$۱=(۱+B)x^۴+Cx^۳+(۲+B+D)x^۲+(C+E)x+۱$$

با مساوی قرار دادن ضریب های x های با توان های مساوی داریم.

$$۱+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-۱$$
$$C=0$$
$$۲+B+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-۱$$
$$C+E=0 \quad \Rightarrow \quad E=0$$

پس

$$\frac{۱}{x(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱}{x}-\frac{x}{x^۲+۱}-\frac{x}{(x^۲+۱)^۲}$$

لذا

$$\int \frac{۱}{x(x^۲+۱)^۲}\,dx=\int \frac{۱}{x}dx-\int \frac{x}{x^۲+۱}dx-\int \frac{x}{(x^۲+۱)^۲}dx$$

فرض می کنیم $u=x^۲+۱$ باشد ، پس $du=۲xdx$ است.

$$-\int \frac{x}{x^۲+۱}dx-\int \frac{x}{(x^۲+۱)^۲}dx=-\int \frac{۱}{u}*\frac{۱}{۲}du-\int \frac{۱}{u^۲}*\frac{۱}{۲}du$$
$$=-\frac{۱}{۲}\ln|u|+\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{u}+C_۱$$

$$= -\frac{۱}{۲}\ln\left(x^{۲}+۱\right)+\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{x^{۲}+۱}+C_{۱}$$

و در نهایت

$$\int \frac{۱}{x\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}\,dx = \int \frac{۱}{x}dx - \int \frac{x}{x^{۲}+۱}dx - \int \frac{x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln\left(x^{۲}+۱\right)+\frac{۱}{۲(x^{۲}+۱)}+C_{۲}$$

تمرینات ۲.۴

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \frac{x}{x+۱}dx$

۲) $\int \frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}dx$

۳) $\int \frac{x^{۲}+۴}{x\left(x-۱\right)^{۲}}dx$

۴) $\int_{۳}^{۴} \frac{۵}{\left(x-۲\right)\left(x+۳\right)}dx$

۵) $\int \frac{۳t}{t^{۲}-۸t+۱۵}dt$

۶) $\int \frac{۲\left(۱-x\right)}{x\left(x^{۲}+۲x-۱\right)}dx$

۷) $\int \frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-۱}dx$

۸) $\int_{0}^{۱} \frac{u-۱}{u^{۲}+u+۱}du$

۹) $\int \frac{۳x}{\left(x-۲\right)^{۲}}dx$

۱۰) $\int \frac{-x}{x\left(x-۱\right)\left(x-۲\right)}dx$

پاسخ تمرینات ۲.۴
انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $$\int \frac{x}{x+۱}dx = \int \left(۱ - \frac{۱}{x+۱}\right)dx = x - \ln|x+۱| + C$$

۲) $$\int \frac{x^۲}{x^۲-۱}dx = \int \left(۱ + \frac{۱}{(x+۱)(x-۱)}\right)dx$$

$$\frac{۱}{(x+۱)(x-۱)} = \frac{A}{x+۱} + \frac{B}{x-۱}$$

$$A(x-۱) + B(x+۱) = ۱$$

$$A + B = 0; -A + B = ۱; A = \frac{-۱}{۲}; B = \frac{۱}{۲}$$

$$\int \frac{x^۲}{x^۲-۱}dx = \int \left(۱ - \frac{۱}{۲(x+۱)} + \frac{۱}{۲(x-۱)}\right)dx$$

$$= x - \frac{۱}{۲}\ln|x+۱| + \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| + C$$

$$= x + \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right| + C$$

۳) $$\int \frac{x^۲+۴}{x(x-۱)^۲}dx$$

$$\frac{x^۲+۴}{x(x-۱)^۲} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-۱} + \frac{C}{(x-۱)^۲}$$

$$A(x-۱)^۲ + Bx(x-۱) + Cx = x^۲ + ۴$$

$$A + B = ۱; -۲A - B + C = 0; A = ۴; B = -۳; C = ۵$$

$$\int \frac{x^۲+۴}{x(x-۱)^۲}dx = \int \left(\frac{۴}{x} - \frac{۳}{x-۱} + \frac{۵}{(x-۱)^۲}\right)dx$$

$$= ۴\ln|x| - ۳\ln|x-۱| - \frac{۵}{x-۱} + C_۱$$

$$= \ln\left|\frac{x^{۴}}{(x-۱)^{۳}}\right| - \frac{۵}{x-۱} + C_{۱}$$

۴) $\int_{۳}^{۴} \frac{۵}{(x-۲)(x+۳)}dx$

$$\frac{۵}{(x-۲)(x+۳)} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۳}$$
$$A(x+۳) + B(x-۲) = ۵$$
$$A + B = 0; ۳A - ۲B = ۵; A = ۱; B - ۱$$
$$\int_{۳}^{۴} \frac{۵}{(x-۲)(x+۳)}dx = \int_{۳}^{۴}\left(\frac{۱}{x-۲} - \frac{۱}{x+۳}\right)dx$$
$$= \left(\ln|x-۲| - \ln|x+۳|\right)\Big|_{۳}^{۴} = \ln ۲ - \ln ۷ + \ln ۶ = \ln\frac{۱۲}{۷}$$

۵) $\int \frac{۳t}{t^{۲} - ۸t + ۱۵}dt$

$$\frac{۳t}{t^{۲} - ۸t + ۱۵} = \frac{A}{t-۵} + \frac{B}{t-۳}$$
$$A(t-۳) + B(t-۵) = ۳t$$
$$A + B = ۳; -۳A - ۵B = 0; A = \frac{۱۵}{۲}; B = \frac{-۹}{۲}$$
$$\int \frac{۳t}{t^{۲} - ۸t + ۱۵}dt = \int\left(\frac{۱۵}{۲(t-۵)} - \frac{۹}{۲(t-۳)}\right)dt$$
$$= \frac{۱۵}{۲}\ln|t-۵| - \frac{۹}{۲}\ln|t-۳| + C$$

۶) $\int \frac{۲(۱-x)}{x(x^{۲} + ۲x - ۱)}dx$

برای پیدا کردن ریشه $x^{۲} + ۲x = 0$ داریم

$$x^{۲} + ۲x - ۱ = 0$$

$$x=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۴}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۲}$$

پس

$$\frac{۲(۱-x)}{x(x^{۲}+۲x-۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۱-\sqrt{۲}}+\frac{C}{x+۱+\sqrt{۲}}$$

$$A\left(x+۱-\sqrt{۲}\right)\left(x+۱+\sqrt{۲}\right)+Bx\left(x+۱+\sqrt{۲}\right)+Cx\left(x+۱-\sqrt{۲}\right)=۲(۱-x)$$

اگر $x=0$ باشد ، پس $A=-۲$ است. اگر $x=-۱+\sqrt{۲}$ باشد ، پس

$$B\left(-۱+\sqrt{۲}\right)\left(-۱+\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}\right)=۲\left(۱+۱-\sqrt{۲}\right)$$

$$B=\frac{۲-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\left(-۱+\sqrt{۲}\right)}=۱$$

اگر $x=-۱-\sqrt{۲}$ باشد ، پس

$$C\left(-۱-\sqrt{۲}\right)\left(-۱-\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}\right)=۲\left(۱+۱+\sqrt{۲}\right)$$

$$C=\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\left(۱+\sqrt{۲}\right)}=۱$$

لذا

$$\int\frac{۲(۱-x)}{x(x^{۲}+۲x-۱)}dx=\int\left(-\frac{۲}{x}+\frac{۱}{x+۱-\sqrt{۲}}+\frac{۱}{x+۱+\sqrt{۲}}\right)dx$$

$$=-۲\ln|x|+\ln\left|x+۱-\sqrt{۲}\right|+\ln\left|x+۱+\sqrt{۲}\right|+C$$

$$= \ln\left|\frac{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}{x^2}\right| + C = \ln\left|\frac{x^2+2x-1}{x^2}\right| + C$$

۷) $$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$A(x-1) + B(x+1) = x+2$$

$$A+B=1; -A+B=2; A=-\frac{1}{2}; B=-\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)}\right)dx$$

$$= x-\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C$$

۸) $$\int_0^1 \frac{u-1}{u^2+u+1}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,du \overset{v=u+\frac{1}{2}}{\overbrace{=}} -\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{v^2+\frac{3}{4}}\,dv$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\arctan\frac{2v}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{-\sqrt{3}\,\pi}{6}$$

و در نهایت

$$\int_0^{۱} \frac{u-۱}{u^{۲}+u+۱}\,du = \frac{۱}{۲}\ln ۳ - \frac{\sqrt{۳}\,\pi}{۶}$$

۹) $\displaystyle\int \frac{۳x}{(x-۲)^{۲}}\,dx$

$$\frac{۳x}{(x-۲)^{۲}} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{(x-۲)^{۲}}$$
$$A(x-۲) + B = ۳x$$
$$A = ۳; -۲A + B = 0; A = ۳; B = ۶$$
$$\int \frac{۳x}{(x-۲)^{۲}}\,dx = \int \left(\frac{۳}{x-۲} + \frac{۶}{(x-۲)^{۲}}\right)dx$$
$$= ۳\ln|x-۲| - \frac{۶}{x-۲} + C$$

۱۰) $\displaystyle\int \frac{-x}{x(x-۱)(x-۲)}\,dx$

$$\frac{-x}{x(x-۱)(x-۲)} = \frac{-۱}{(x-۱)(x-۲)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x-۲}$$
$$A(x-۲) + B(x-۱) = -۱$$
$$A + B = 0; -۲A - B = -۱; A = ۱; B = -۱$$
$$\int \frac{-x}{x(x-۱)(x-۲)}\,dx = \int \left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x-۲}\right)dx$$
$$= \ln|x-۱| - \ln|x-۲| + C$$
$$= \ln\left|\frac{x-۱}{x-۲}\right| + C$$

۲.۵ ـ قاعده ذوزنقه ای و قاعده سیمپسون The Trapezoidal Rule and Simpson's Rule

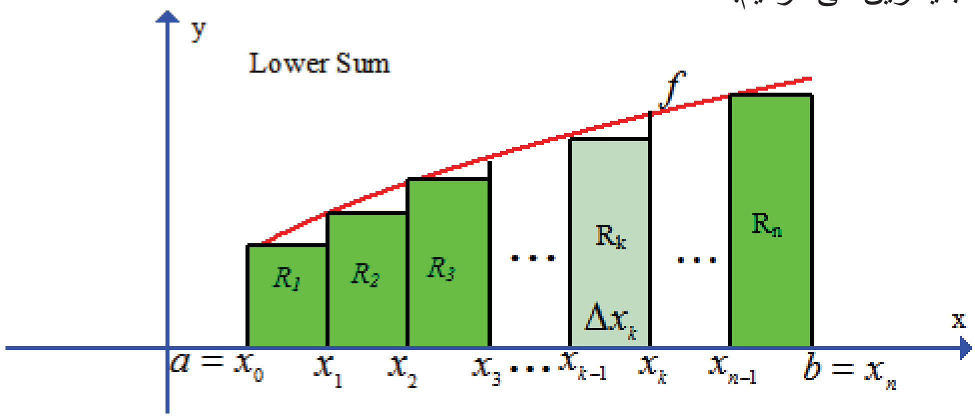
با وجودی که روش های متعددی برای محاسبه انتگرال ها وجود دارند ، اما اغلب اوقات غیر ممکن است بتوان انتگرال هایی را بر حسب توابع شناخته شده بنویسیم وبوسیله آنها مقداردقیق عددی آن انتگرال را محاسبه کنیم. مثلا نمی توانیم مقدار دقیق انتگرال زیر را حساب کنیم.

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^{۴}}\ dx \qquad (۱)$$

چنین انتگرال هایی در تجزیه و تحلیل جاده ها و خطوط راه آهن پیدا می شوند. گر چه پیدا کردن مقدار دقیق انتگرال (۱) غیر ممکن است ، اما در این بخش روش هایی را شرح می دهیم که بوسیله آنها می توانیم تا حدودی مقدار تقریبی خوبی از این نوع انتگرال ها را پیدا کنیم.

بخاطر می آورید که بوسیله مجموع ریمانی برای پیدا کردن انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ ناحیه محصور بین نمودار و محور x را به مستطیل هایی تقسیم می کردیم و مجموع مساحت های آن مستطیل ها را مقدار تقریبی آن انتگرال به حساب می آوردیم.شکل A

در مجموع ریمانی در حقیقت یک قسمت از نمودار f در هر یک از بازه های فرعی بوسیله یک خط افقی مناسب جایگزین می کردیم.



شکل A

حال اگر قسمت های نمودار f را بوسیله خطوط غیر افقی جایگزین کنیم ، تقریبا همان اثر را دارا است. شکل B

شکل B

با استفاده از خطوط غیر افقی بجای خطوط افقی ، تخمین انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ دقیق تر از مجموع ریمانی است.در حقیقت ذوزنقه را جایگزین مستطیل می کنیم.
ابتدا فرض ما این است که f در بازه $[a,b]$ پیوسته و نا منفی است . با این وجود ، فرمولی که بدست می آوریم ، برای توابعی که لزوما نا منفی هم نیستند معتبر است.

قاعده ذوزنقه The Trapezoidal Rule

یک پارش $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ در نظر می گیریم. این پارش ، بازه $[a,b]$ را به n بازه فرعی با طول های مساوی $\frac{b-a}{n}$ تقسیم می کنیم. هر دو نقطه $\left(x_{j-۱}, f(x_{j-۱})\right)$ و $\left(x_j, f(x_j)\right)$ روی نمودار f را با یک خط مستقیم به یک دیگر متصل می کنیم. در نتیجه ناحیه های ذوزنقه ای شکل ایجاد می کنیم. شکل B

چون فرض کردیم f نا منفی است ، فرمول مساحت ذوزنقه جی ام مطابق زیر است.

$$\left(\frac{f(x_{j-۱}) + f(x_j)}{۲}\right)(x_j - x_{j-۱}) = \frac{b-a}{۲n}\left[f(x_{j-۱}) + f(x_j)\right]$$

با استفاده از این فرمول برای هر کدام از بازه های فرعی ، جمع زیر را بدست می آوریم.

$$\frac{b-a}{۲n}\left\{[f(x_0) + f(x_۱)] + [f(x_۱) + f(x_۲)] + \cdots + [f(x_{n-۱}) + f(x_n)]\right\}$$

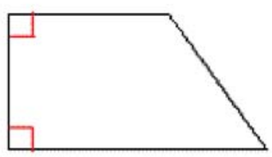
که تخمینی برای $\int_a^b f(x)dx$ است. به عبارت دیگر

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{۲n}\left[f(x_0) + ۲f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + ۲f(x_{n-۱}) + f(x_n)\right] \quad (۲)$$

فرمول (۲) را **قاعده ذوزنقه ای** **Trapezoidal Rule** می نامند ، زیرا از فرمول مساحت ذوزنقه گرفته شده است.
یاد آوری - ذوزنقه های ایجاد شده در شکل B مانند شکل C است. اگر قاعده کوچک تر را a و قاعده بزرگ تر را b و ارتفاع را h بنامیم ، فرمول مساحت مطابق زیر است.

$$A = \frac{b+a}{۲} * h$$

شکل C



مثال ۱ – برای $n=۱۰$ ، $n=۵$ ، $n=۳$ قاعده ذوزنقه ای را برای تخمین مقدار انتگرال زیر بکار برید.

$$\ln ۲ = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} dx$$

پاسخ

برای $n=۳$ داریم.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} dx \approx \frac{۱}{۶}\left[f(۱) + ۲f\left(\frac{۴}{۳}\right) + ۲f\left(\frac{۵}{۳}\right) + f(۲)\right]$$
$$= \frac{۱}{۶}\left(۱ + \frac{۶}{۴} + \frac{۶}{۵} + \frac{۱}{۲}\right) = ۰/۷$$

برای $n=۵$ داریم.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} dx \approx \frac{۱}{۱۰}\left[f(۱) + ۲f\left(\frac{۶}{۵}\right) + ۲f\left(\frac{۷}{۵}\right) + ۲f\left(\frac{۸}{۵}\right) + ۲f\left(\frac{۹}{۵}\right) + f(۲)\right]$$
$$= \frac{۱}{۱۰}\left(۱ + \frac{۱۰}{۶} + \frac{۱۰}{۷} + \frac{۱۰}{۸} + \frac{۱۰}{۹} + \frac{۱}{۲}\right) \approx ۰/۶۹۵۶۳۵$$

برای $n=۱۰$ داریم.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} \approx \frac{۱}{۲۰}\Bigg[f(۱) + ۲f\left(\frac{۱۱}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۳}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۴}{۱۰}\right)$$
$$+ ۲f\left(\frac{۱۵}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۶}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۷}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۸}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۹}{۱۰}\right) + f(۲)\Bigg]$$
$$= \frac{۱}{۲۰}\left(۱ + \frac{۲۰}{۱۱} + \frac{۲۰}{۱۲} + \frac{۲۰}{۱۳} + \frac{۲۰}{۱۴} + \frac{۲۰}{۱۵} + \frac{۲۰}{۱۶} + \frac{۲۰}{۱۷} + \frac{۲۰}{۱۸} + \frac{۲۰}{۱۹} + \frac{۱}{۲}\right)$$
$$\approx ۰/۶۹۳۷۷۱$$

چون $\ln ۲ \approx ۰/۶۹۳۱۴۷$ است ، محاسبه ما تایید می کند که هر چه تعداد بازه های فرعی یک پارش بیشتر باشد ، تخمین بهتری برای $\ln ۲$ حاصل می شود. در حقیقت برای $n=۱۰$ تخمین ما با دقت ۰/۰۰۱ بود.یا به عبارت دیگر مقدارتخمینی با دقت $۱۰^{-۳}$ است . هنگامی که قاعده ذوزنقه را برای محاسبه یک انتگرال بکار می بریم ، معمولا تفاوت بین مقدار حقیقی تابع و مقدار تخمینی انتگرال را محاسبه می کنیم. پس هنگام استفاده از قاعده ذوزنقه میزان خطا را مشخص می کنیم و آنرا با نماد زیر نشان می دهیم

$$E_n^T$$

در نماد بالا E حرف اول $Error$ است به معنی خطا. T حرف اول $Trapezoidal$ است به معنی ذوزنقه ای ، و n تعداد بازه های فرعی است . و می گوییم **تقریب خطای ذوزنقه ای به ازائ مقدار ان**

nth Trapezoidal Rule Error

و مقدار خطا را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$E_n^T = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{۲n}[f(x_0) + ۲f(x_۱) + \cdots + ۲f(x_{n-۱}) + f(x_n)]\right|$$

با استفاده از مقدار حقیقی $\ln ۲$ و مقادیر بدست آمده از طریق انتگرال گیری با قاعده ذوزنقه ای مقدار خطا را برای مقادیر مختلف n در مثال ۱ پیدا می کنیم.

$$E_n^T \approx |0.693147 - 0.7| = 0.006853$$
$$E_n^T \approx |0.693147 - 0.695635| = 0.002488$$
$$E_n^T \approx |0.693147 - 0.693771| = 0.000624$$

ملاحظه می کنید که هنگامی که n افزایش پیدا می کند ، خطا نقصان می یابد.

جهت ارائه یک فرمول برای کران بالای E_n^T فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ دارای مشتق مرتبه دوم و پیوسته دارد. و فرض می کنیم M کران بالای $|f''(x)|$ در بازه $[a,b]$ باشد.
پس خطای E_n^T در قاعده ذوزنقه ای برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ در نا معادله زیر صدق می کند.

$$E_n^T \leq \frac{(b-a)^۳ M}{۱۲n^۲} \qquad (۳)$$

مثال ۲ ـ مطلوب است مقدار n در تخمین ذوزنقه ای انتگرال زیر بطوری که اطمینان داشته باشیم خطا بیشتر از ۰/۰۰۱ نباشد.

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{۱}{x}\,dx$$

پاسخ

برای استفاده از (۳) فرض می کنیم $a = ۱$ و $b = ۲$ و $f(x) = \frac{۱}{x}$ باشد.

$$f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$$

پس داریم

$$|f''(x)| = \left|\frac{۲}{x^۳}\right| \leq ۲ \quad \text{برای} \quad ۱ \leq x \leq ۲$$

لذا $M = ۲$ است. بر اساس (۳) داریم.

$$E_n^T \leq \frac{(۲-۱)^۳(۲)}{۱۲n^۲} = \frac{۲}{۱۲n^۲} = \frac{۱}{۶x^۲}$$

برای اینکه اطمینان داشته باشیم $E_n^T \leq$ ۰/۰۰۱ است ، باید n را طوری انتخاب کنیم که

$$\frac{۱}{۶n^۲} \leq ۰/۰۰۱$$

باشد. یا

$$n^۲ \geq \frac{۱}{۰/۰۰۶} = ۱۶۶\frac{۲}{۳}$$

لذا اگر $n \geq ۱۳$ باشد ، پس $E_n^T \leq ۰/۰۰۱$ است.

چون بر اساس مثال ۲ داریم $E_n^T \leq ۰/۰۰۱$ و چون مقدار تقریبی $\int_a^b f(x)dx$ که بوسیله قاعده ذوزنقه ای با $n = ۱۳$ بدست آمد مطابق زیر است

$$\frac{۱}{۲۶}\left[۱ + ۲\left(\frac{۱۳}{۱۴}\right) + \cdots + ۲\left(\frac{۱۳}{۲۵}\right) + \frac{۱}{۲}\right] \approx ۰/۶۹۳۵۱۷$$

با شش رقم اعشاری ، پس نتیجه می شود که مقدار تقریبی بین ۰/۶۹۳ و ۰/۶۴۹ قرار دارد ، پس

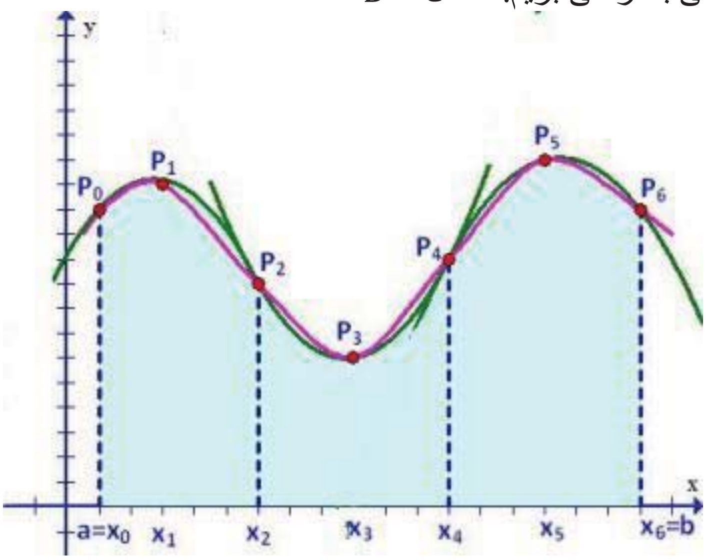
$$0.692 = 0.693 - 0.001 < \int_1^2 \frac{1}{x}dx < 0.694 + 0.001 = 0.695$$

بعد از این که مقدار $\int_۱^۲ \frac{۱}{x}\,dx$ را بوسیله قاعده ذوزنقه ای در مثال ۱ تخمین زدیم و مقدار عددی انتگرال را با شش رقم اعشاری بدست اوردیم ، ملاحظه کردیم که $E_{۱۰}^T \leq ۰/۰۰۱$ است.

نکته قابل توجه مثال ۲ این است که با محاسبه کران بالای $E_{۱۳}^T$ می توانیم بگوییم $E_{۱۳}^T \leq ۰/۰۰۱$ است ، حتی بدون محاسبه مقدار تقریبی جمع قاعده ذوزنقه ای .

قاعده سیمپسون Simpson's Rule

در روش دوم برای محاسبه تقریبی انتگرال ، قاعده سیمپسون است. در این روش بجای خط مستقیم در روش ذوزنقه ای ، سهمی بکار می بریم. شکل D



شکل D

توماس سیمپسون ریاضی دان انگلیسی که ابتدا یک بافنده بود و ریاضیات را خود آموزی کرد.
در این روش باز هم از پارش

$$\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$$

استفاده می کنیم. اما علاوه بر این که پارش ، بازه $[a,b]$ را به n بازه فرعی با طول مساوی

$$h = \frac{b-a}{n}$$

تقسیم می کند ، فرض می کنیم n یک عدد زوج است. یک محاسبه طولانی و خسته کننده نشان می دهد هر کدام از سهمی ها که از سه نقطه $(x_0, f(x_0))$ و $(x_۱, f(x_۱))$ و $(x_۲, f(x_۲))$ می گذرد ، با فرمول زیر تعریف می شود.

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_۱) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$
$$+\frac{f(x_0) - ۲f(x_۱) + f(x_۲)}{۲h^۲}(x - x_0)(x - x_۱) \qquad (۴)$$

چون p یک چند جمله ای درجه دواست بر حسب متغیر x مسلم است که می توانیم انتگرال زیر را پیدا کنیم.

$$\int_{x_0}^{x_۲} p(x)\, dx$$

بعدا از عملیات جبری طولانی نتیجه می گیریم

$$\int_{x_0}^{x_۲} p(x)\, dx = \frac{h}{۳}[f(x_0) + ۴f(x_۱) + f(x_۲)]$$

چون بر اساس فرض اولیه f نا منفی است ، پس انتگرال بالا نمایش مساحت ناحیه بین نمودار p و محور x در بازه فرعی $[x_0, x_۲]$ است.

این کار را برای بازه های فرعی $[x_۲, x_۴], [x_۴, x_۶], \cdots, [x_{n-۲}, x_n]$ انجام می دهیم. هر کدام از زیر نماهای $۲, ۴, ۶, \cdots, n-۲, n$ باید زوج باشند. مجموع مساحت های نواحی زیر سهمی ها که مطابق بالا بدست آوردیم ، تقریبی است برای $\int_a^b f(x)dx$ یعنی

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{۳n}[f(x_0) + ۴f(x_۱) + ۲f(x_۲) + ۴f(x_۳) + \cdots$$
$$+ ۲f(x_{n-۲}) + ۴f(x_{n-۱}) + f(x_n)] \qquad (۵)$$

فرمول (۵) به **قاعده سیمپسون Simpson’s Rule** معروف است

این فرمول برای تمام توابع پیوسته در بازه $[a,b]$ صادق است ، خواه منفی و خواه نا منفی. اهمیت این فرمول آن است که می توان آنرا مانند قاعده ذوزنقه ای و یا مجموع ریمانی بکار برد. با این تفاوت که خیلی دقیق تر است.

برای نشان دادن دقت قاعده سیمسون ، آنرا برای پیدا کردن تقریبی همان تابع مثال های قبلی بکار می بریم. توجه داشته باشید که قاعده سیمپسون را فقط برای هر عدد زوج n می توان بکار برد.

مثال ۳ مقدار تقریبی انتگرال زیر را با استفاده از قاعده سیمپسون برای $n = ۱۰$ پیدا کنید.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x}\, dx$$

پاسخ

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x}\, dx \approx \frac{۱}{۳(۱۰)}\left[f(۱) + ۴f\left(\frac{۱۱}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right) + ۴f\left(\frac{۱۳}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۴}{۱۰}\right)\right.$$
$$\left. + ۴f\left(\frac{۱۵}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۶}{۱۰}\right) + ۴f\left(\frac{۱۷}{۱۰}\right) + ۲f\left(\frac{۱۸}{۱۰}\right) + ۴f\left(\frac{۱۹}{۱۰}\right) + f(۲)\right]$$
$$= \frac{۱}{۳۰}\left(۱ + \frac{۴۰}{۱۱} + \frac{۲۰}{۱۲} + \frac{۴۰}{۱۳} + \frac{۲۰}{۱۴} + \frac{۴۰}{۱۵} + \frac{۲۰}{۱۶} + \frac{۴۰}{۱۷} + \frac{۲۰}{۱۸} + \frac{۴۰}{۱۹} + \frac{۱}{۲}\right)$$
$$\approx ۰/۶۹۳۱۵۰$$

چون $\ln ۲ \approx ۰/۶۹۳۱۴۷$ است پس تقریب ما با دقت $۰/۰۰۰۰۱$ است ، و مقدار وقت صرف شده هم مناسب و قابل قبول است.

مثال ۴ مقدار تقریبی انتگرال زیر را با روش سیمپسون و $n = ۴$ پیدا کنید.

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^{۴}}\ \ dx$$

پاسخ

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^{۴}}\ \ dx \approx \frac{۲}{۳(۴)}\left[f(-۱) + ۴f\left(-\frac{۱}{۲}\right) + ۲f(0) + ۴f\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱)\right]$$
$$= \frac{۱}{۶}\left(\sqrt{۲} + ۴\sqrt{\frac{۱۷}{۱۶}} + ۲ * ۱ + ۴\sqrt{\frac{۱۷}{۱۶}} + \sqrt{۲}\right) \approx ۲/۱۷۹۱۱$$

هنگام استفاده از قاعده سیمپسون میزان خطا را مشخص می کنیم و آنرا با نماد زیر نشان می دهیم

$$E_n^S$$

در نماد بالا E حرف اول $Error$ است به معنی خطا. S حرف اول $Simpson$ است و n تعداد بازه های فرعی است . و می گوییم **تقریب خطای قاعده سیمپسون به ازای مقدار ان**

nth Simpson’s Rule Error

و مقدار خطا را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$E_n^S = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + ۴f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + ۴f(x_{n-۱}) + f(x_n)\right]\right|$$

با استفاده مقدار تقریب $۰/۶۹۳۱۴۷$ که برای $\ln ۲$ در مثال ۳ پیدا کردیم ، ملاحظه می شود

$$E_{10}^S \approx |0.693147 - 0.693150| = 0.000003 = 3 \times 10^{-6}$$

ملاحظه می شود که مقدار خطای سیمپسون بطور چشمگیر کمتر از $E_{۱۰}^{T}$ برای $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه $[۱,۲]$ است.

کران بالا برای E_n^S جهت f در بازه $[a,b]$

فرض می کنیم f یک مشتق مرتبه چهارم و پیوسته در $[a,b]$ دارد. و فرض می کنیم M کران بالای $\left|f^{(۴)}(x)\right|$ در بازه $[a,b]$ باشد.

پس خطای E_n^S در قاعده سیمپسون برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ در نا معادله زیر صدق می کند.

$$\boxed{E_n^S \le \frac{(b-a)^۵ M}{۱۸۰\, n^۴} \qquad (۶)}$$

کران بالای E_n^S در فرمول (۶) به نسبت $n^۴$ کاهش پید می کند ، و در نتیجه تخمین زدن بوسیله قاعده سیمپسون عالی است .

مثال ۵ - مطلوب است مقدار n در تخمین انتگرال زیر بوسیله قاعده سیمپسون بطوری که اطمینان داشته باشیم خطا بیشتر از $۱۰^{-۳}$ نباشد.

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{۱}{x}dx$$

پاسخ

با استفاده از (۶) و $a=۱$ و $b=۲$ و $f(x)=\frac{۱}{x}$ داریم

$$f^{(۴)}(x)=\frac{۲۴}{x^۵}$$

$$\left|f^{(۴)}(x)\right| = \left|\frac{۲۴}{x^۵}\right| \le ۲۴ \quad \text{برای} \quad ۱\le x\le ۲$$

پس $M=۲۴$ و لذا

$$E_n^S \le \frac{(۲-۱)^۵\, ۲۴}{۱۸۰\, n^۴} = \frac{۲۴}{۱۸۰\, n^۴} = \frac{۲}{۱۵n^۴}$$

برای اطمینان خاطر که $E_n^S \le ۰/۰۰۱$ باشد، n را طوری انتخاب می کنیم بطوری که

$$\frac{۲}{۱۵n^۴} \le ۰/۰۰۱$$

باشد. یعنی

$$n^۴ \ge \frac{۲}{۰/۰۱۵} \approx ۱۳۳/۳۳۳$$

باشد. چون $۴^۴=۲۵۶$ و $۳^۴=۸۱$ است ، پس کافی است $n=۴$ انتخاب کنیم.

تمرینات ۲.۵

در تمرینات زیر مقدار تقریبی انتگرال ها را برای n های مشخص شده با دو روش بحث شده در این بخش پید کنید.

۱) $\int_{۱}^{۳} \frac{۱}{x}\, dx; n = ۲$

۲) $\int_{۱}^{۷} \frac{۱}{t} dt; n = ۶$

۳) $\int_{0}^{۴} \sqrt{۱ + x^{۳}}\, dx; n = ۲$

۴) $\int_{۱}^{۵} [(x \ln x) - x] dx; n = ۴$

۵) $\int_{-۱}^{۱} \sin \pi\, x^{۲}\, dx; n = ۴$

۶) $\int_{0}^{\pi} \frac{۱}{۱ + \sin x} dx; n = ۴$

در تمرینات زیر یک عدد صحیح n پیدا کنید بطوری که نا معادله داده شده برای محاسبه تقریبی انتگرال بر قرار باشد.

۷) $E_n^T \leq ۱۰^{-۲}; \int_{۱}^{۲} \ln x\, dx$

۸) $E_n^S \leq ۱۰^{-۴}; \int_{۱}^{۵} (x \ln x - x) dx$

پاسخ تمرینات ۲.۵

در تمرینات زیر مقدار تقریبی انتگرال ها را برای n های مشخص شده با دو روش بحث شده در این بخش پید کنید.

فرض می کنیم T تقریب از طریق قاعده ذوزنقه ای باشد و S تقریب از طریق قاعده سیمپسون باشد.

۱) $\int_{۱}^{۳} \frac{۱}{x}\, dx; n = ۲$

$$T = \frac{۲}{۴}\left(۱ + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۷}{۶}$$

$$S = \frac{۲}{۶}\left(۱ + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱۰}{۹}$$

۲) $\int_{۱}^{۷} \frac{۱}{t} dt; n = ۶$

$$T = \frac{۶}{۱۲}\left(۱ + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۳}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۴}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۵}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۶}\right) + \frac{۱}{۷}\right) = \frac{۲۸۳}{۱۴۰} \approx ۲/۰۲۱۴۳$$

$$S = \frac{۶}{۱۸}\left(۱ + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۳}\right) + ۴\left(\frac{۱}{۴}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۵}\right) + ۴\left(\frac{۱}{۶}\right) + \frac{۱}{۷}\right) = \frac{۶۱۷}{۳۱۵} \approx ۱/۹۵۸۷۳$$

۳) $\int_{0}^{۴} \sqrt{۱ + x^{۳}}\, dx; n = ۲$

$$T = \frac{۲}{۴}\left(۱ + ۲\sqrt{۲} + ۳\right) = ۲ + \sqrt{۲} \approx ۳/۴۱۴۲۱$$

$$S = \frac{۲}{۶}\left(۱ + ۴\sqrt{۲} + ۳\right) = \frac{۴ + ۴\sqrt{۲}}{۳} \approx ۳/۲۱۸۹۵$$

۴) $\int_{۱}^{۵} [(x \ln x) - x] dx; n = ۴$

$$T = \frac{۴}{۸}\left[-۱ + ۲(۲\ln ۲ - ۲) + ۲(۳\ln ۳ - ۳) + ۲(۴\ln ۴ - ۴) + (۵\ln ۵ - ۵)\right] \approx ۲/۲۵۰۹۰$$

$$S = \frac{۴}{۱۲}\left[-۱ + ۴(۲\ln ۲ - ۲) + ۲(۳\ln ۳ - ۳) + ۴(۴\ln ۴ - ۴) + (۵\ln ۵ - ۵)\right] \approx ۲/۱۲۱۵۸$$

۵) $\int_{-۱}^{۱} \sin \pi x^{۲}\, dx; n = ۴$

$$T = \frac{۲}{۸}\left[0 + ۲ * \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲ * 0 + ۲ * \frac{\sqrt{۲}}{۲} + 0\right] = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$$

$$S = \frac{۲}{۱۲}\left[0 + ۴ * \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲ * 0 + ۴ * \frac{\sqrt{۲}}{۲} + 0\right] = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

۶) $\int_0^{\pi} \frac{۱}{۱ + \sin x} dx; n = ۴$

$$T = \frac{\pi}{۸}\left[۱ + ۲\frac{۱}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۲\frac{۱}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} + ۱\right] \approx ۲/۰۹۸۲۵$$

$$S = \frac{\pi}{۱۲}\left[۱ + ۴\frac{۱}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۴\frac{۱}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} + ۱\right] \approx ۲/۰۱۲۲۷$$

در تمرینات زیر یک عدد صحیح n پیدا کنید بطوری که نا معادله داده شده برای محاسبه تقریبی انتگرال بر قرار باشد.

۷) $E_n^T \leq ۱۰^{-۲}; \int_۱^۲ \ln x \, dx$

فرض می کنیم $f(x) = \ln x$ باشد. برای بکار بردن (۳) داریم $f'(x) = \frac{۱}{x}$ و $f''(x) = -\frac{۱}{x^۲}$ است. پس برای x در بازه $[۱,۲]$ داریم $|f''(x) \leq ۱|$ است. پس $M = ۱$ انتخاب می کنیم. پس بر اساس (۳) داریم.

$$E_n^T \leq \frac{(۲-۱)^۳ * ۱}{۱۲n^۲} = \frac{۱}{۱۲n^۲}$$

پس $E_n^T \leq ۰/۰۱$ است اگر $\frac{۱}{۱۲n^۲} \leq ۰/۰۱$ باشد. یعنی اگر $n \geq \sqrt{\frac{۱۰۰}{۱۲}}$ باشد. چون

$$۲ < \sqrt{\frac{۱۰۰}{۱۲}} < ۳$$

است ، پس $n = ۳$ را انتخاب می کنیم.

۸) $E_n^S \leq ۱۰^{-۴}; \int_۱^۵ (x \ln x - x)dx$

فرض می کنیم $f(x) = x\ln x - x$ باشد. برای استفاده از (۶) باید مشتق مرتبه چهارم را پیدا کنیم.

$$f'(x) = \ln x + ۱ - ۱ = \ln x$$

$$f''(x) = \frac{۱}{x}; f^{(۳)}(x) = -\frac{۱}{x^۲}; f^{(۴)}(x) = \frac{۲}{x^۳}$$

است. پس برای x در بازه $[۱,۵]$ داریم $\left|f^{(۴)}(x)\right| \leq ۲$ است. پس $M = ۲$ را انتخاب می کنیم. بر اساس (۶) داریم.

$$E_n^S \leq \frac{(۵-۱)^۵ \ * ۲}{۱۸۰n^۴} = \frac{۲\left(۴^۵\right)}{۱۸۰n^۴} = \frac{۵۱۲}{۴۵n^۴}$$

پس $E_n^S \leq ۱۰^{-۴}$ است ، اگر $\frac{۵۱۲}{۴۵n^۴} \leq ۱۰^{-۴}$ باشد ، یعنی $n \geq ۱۰\sqrt[۴]{\frac{۵۱۲}{۴۵}}$ باشد.

چون $۱۹ > ۱۰\sqrt[۴]{\frac{۵۱۲}{۴۵}} > ۱۸$ است و n باید زوج باشد ، پس $n = ۲۰$ را انتخاب می کنیم.

۲.۶ - انتگرال های ناسره Improper Integrals

تا کنون انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را فقط برای توابع پیوسته در بازه $[a,b]$ تعریف کرده ایم. از قضیه ماکسیمم –مینیمم نتیجه می شود که چنین تابعی در $[a,b]$ کران دار است، اگر برای یک عدد M داشته باشیم

$$|f(x)| \leq M$$

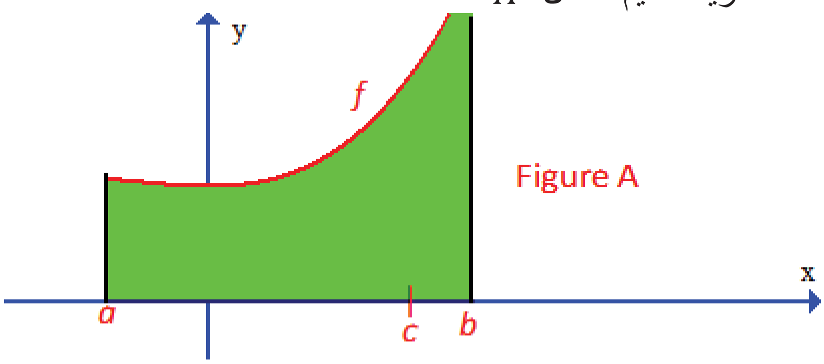
برای تمام x ها در $[a,b]$ و یا بطور کلی اگر I هر بازه ای باشد ، می گوییم f در I **کران دار** است ، اگر یک عدد ثابت مانند M وجود دارد بطوری که

$$|f(x)| \leq M$$

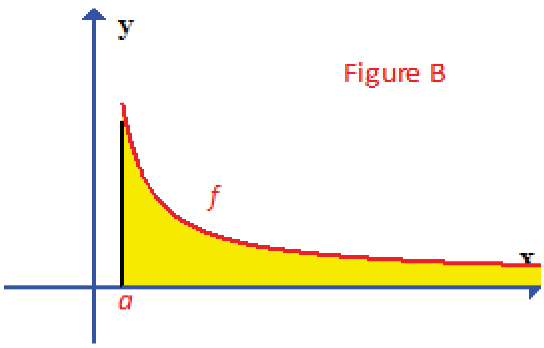
باشد ، برای تمام x ها در I

هر تابعی که در یک بازه داده شده I داخل دامنه اش ، کران دار نباشد ، می‌گوییم در I **بی کران** است.

در این بخش این سئوال را مطرح می کنیم که آیا می توان مساحت ناحیه زیر نمودار یک تابع نا منفی که در یک بازه محدود ، بی کران باشد ، تعریف کنیم؟ شکل A



همچنین می خواهیم بدانیم آیا می توان مساحت ناحیه ای زیر یک تابع نا منفی در یک بازه بی کران را تعریف کرد؟ شکل B



گر چه ممکن است بنظر برسد که مساحت های چنین ناحیه هایی باید بی نهایت باشند ، اما خواهیم دید که در موارد بخصوصی کران دار هستند . برای این کار انتگرال معین را در دو مورد تعریف می کنیم. یکی هنگامی که انتگراند بی کران است ، دیگر هنگامی که بازه بی کران است. چنین انتگرال هایی را **انتگرال های ناسره یا انتگرال های بی کران Improper Integrals** می نامند.

انتگرال های توابع پیوسته روی بازه های کران دار را **انتگرال های سره یا انتگرال های کران دار Proper Integrals** می نامند.

انتگرال های با انتگراند های بی کران Integrals with Unbounded Integrands

برای ساده کردن بحث ، می گوییم f **در همسایگی c بی کران است Unbounded near c** اگر برای هر بازه بازی به شکل (c,x) و یا (x,c) آن تابع بی کران باشد. مثلا $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در همسایگی صفر بی کران هستند.

نوع اول - یک تابع f در نظر می گیریم که در کلیه نقاط $[a,b)$ پیوسته است و در همسایگی b بی کران است. شکل A. بر اساس فرض مساله برای هر c در (a,b) تابع f در بازه $[a,c]$ پیوسته است. پس برای این c انتگرال $\int_a^c f(x)dx$ تعریف شده است. اگر حد زیر

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

وجود داشته باشد ، پس $\int_a^b f(x)dx$ را آن حد می نامیم ومی گوییم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ **همگرا است. Converges**

در غیر این صورت می گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **واگرا است. Diverges**

اگر آن انتگرال واگرا باشد ، عددی به آن نسبت نمی دهیم.

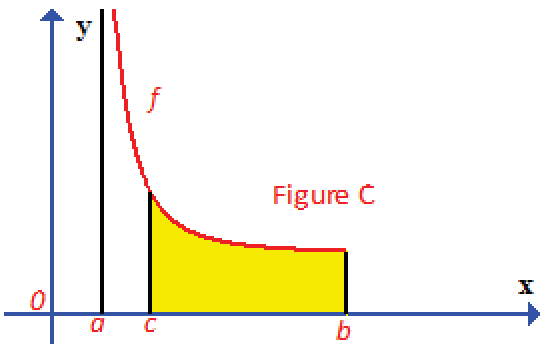
اگر f در $[a,b)$ نا منفی باشد ، پس هنگامی که c از سمت چپ به b نزدیک می شود ، انتگرال $\int_a^c f(x)dx$ ناحیه بزرگ تر و بزرگ تری را نشان می دهد. علاوه بر این اگر $\int_a^b f(x)dx$ همگرا باشد ، **مساحت** ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه $[a,b]$ مقدار انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ است. و بر عکس اگر f در $[a,b]$ نا منفی باشد و $\int_a^b f(x)dx$ واگرا باشد ، می گوییم ناحیه مربوطه دارای مساحت نا محدود است و می نویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \infty$$

مثال ۱ نشان دهید که $\int_0^{۱}\frac{۱}{\sqrt{x}}dx$ همگرا است و مقدار آنرا حساب کنید.

پاسخ

برای روشن شدن مطلب ، شکل C را ملاحظه کنید. در مورد تابع مانند شکل D در صفحه قبل بحث کردیم. چون $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در تمام نقاط $(0,۱]$ پیوسته است و نزدیک صفر بی کران است ، پس برای $0 < c < ۱$ داریم.



$$\int_c^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}} dx = ۲\sqrt{x}\Big|_c^{۱} = ۲(۱ - \sqrt{c})$$
$$\lim_{c\to 0^+} ۲(۱ - \sqrt{c}) = ۲$$

در نتیجه $\int_0^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}} dx$ همگرا است و

$$\int_0^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}} dx = ۲$$

یعنی ناحیه رنگی درشکل D دارای مساحت ۲ است.

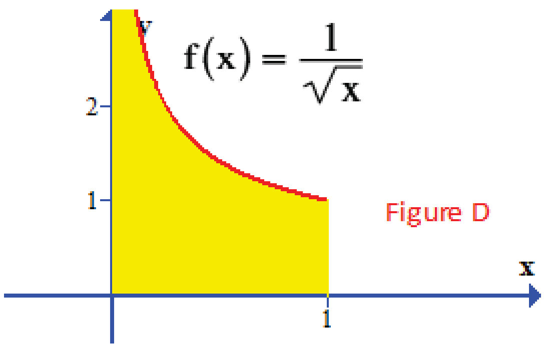


Figure D

مثال ۲ ـ نشان دهید که $\int_0^{۱} \frac{۱}{x} dx$ واگرا است.

پاسخ

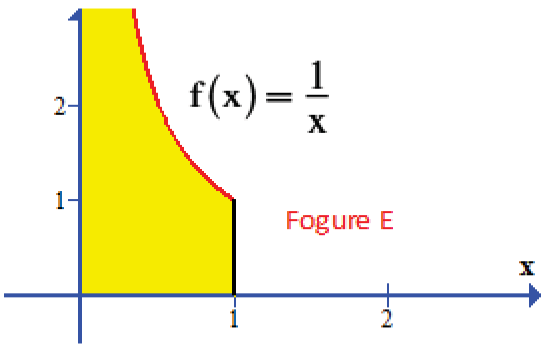
باز هم به شکل C مراجعه کنید. تابع $\frac{۱}{x}$ در $(0, ۱]$ پیوسته است و نزدیک صفر بی کران است. و برای $0 < c < ۱$ داریم.

$$\int_c^{۱} \frac{۱}{x} dx = \ln x\Big|_c^{۱} = \ln ۱ - \ln c = -\ln c$$

اما

$$\lim_{c\to 0^+} (-\ln c) = \infty$$

لذا انتگرال $\int_0^{۱} \frac{۱}{x} dx$ واگرا است. یعنی مساحت ناحیه رنگی در شکل E بی نهایت است.



Fogure E

مثال ۳ - مشخص کنید آیا $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \tan x \, dx$ همگرا است.

پاسخ

انتگراند در $\left[0,\frac{\pi}{۲}\right)$ پیوسته است و در همسایگی $\frac{\pi}{۲}$ بی کران است. برای $0 < c < \frac{\pi}{۲}$ داریم.

$$\int_0^c \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \Big|_0^c = -\ln(\cos c) + \ln(\cos 0) = -\ln(\cos c)$$

چون

$$\lim_{c\to\frac{\pi}{۲}^-} \cos c = 0$$

است ، پس

$$\lim_{c\to\frac{\pi}{۲}^-} [-\ln(\cos c)] = \infty$$

در نتیجه انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \tan x \, dx$ واگرا است ، و ناحیه مربوطه دارای مساحت بی نهایت است.

شکل F

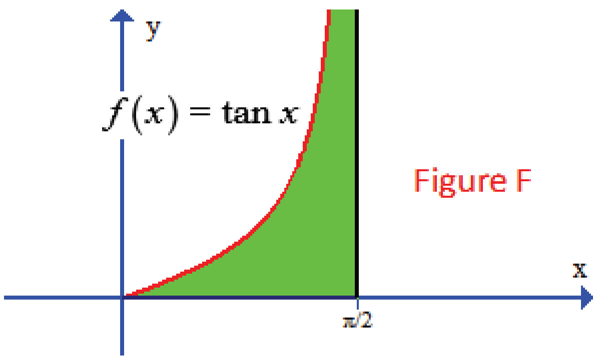


Figure F

نوع دوم

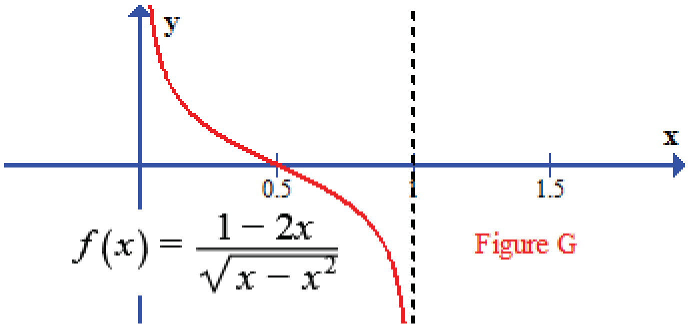
اگر f در کلیه نقاط (a,b) پیوسته باشد و در همسایگی هم a و هم b بی کران باشد می‌گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **همگرا** است اگر برای یک نقطه مانند d در (a,b) هر دو انتگرال $\int_a^d f(x)dx$ و $\int_d^b f(x)dx$ همگرا باشند. در غیر این صورت می گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **واگرا** است.

مثال ۴ - مشخص کنید آیا انتگرال زیر همگرا است ؟

$$\int_0^۱ \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}} \, dx$$

پاسخ

انتگراند در هر دو نقطه انتهایی ، بی کران است ، و در $(0,۱)$ پیوسته است. شکل G



اگر فرض کنیم $d = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس باید دو انتگرال زیر را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم.

$$\int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx \quad \text{و} \quad \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx$$

برای $0 < c < \frac{۱}{۲}$ داریم.

$$\int_c^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = ۲\sqrt{x-x^۲}\Big|_c^{\frac{۱}{۲}} = ۲\left(\sqrt{\frac{۱}{۴}} - \sqrt{c-c^۲}\right) = ۱ - ۲\sqrt{c-c^۲}$$

چون

$$\lim_{c\to 0^+} \sqrt{c-c^۲} = 0$$

پس

$$\int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left(۱ - ۲\sqrt{x-x^۲}\right) = ۱$$

به همین طریق دومین انتگرال نا سره هم همگرا است. و داریم

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = -۱$$

پس انتگرال اصلی همگرا است و داریم.

$$\int_0^{۱} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = \int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱-۲x}{\sqrt{x-x^۲}}\,dx = ۱ - ۱ = 0$$

نوع سوم

تابعی که در کلیه نقاط $[a,b]$ پیوسته است بجز در یک نقطه d در (a,b) بطوری که f در همسایگی d بی کران باشد. می گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **همگرا** است ، اگر هم $\int_a^d f(x)dx$ و هم $\int_d^b f(x)dx$ همگرا باشد. در غیر این صورت می گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **واگرا** است.

مثلا $\int_{-۱}^{۲} \frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}\, dx$ **همگرا** است.

نشان می دهیم انتگرال زیر همگرا است. شکل I

$$\int_{-۱}^{۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx$$

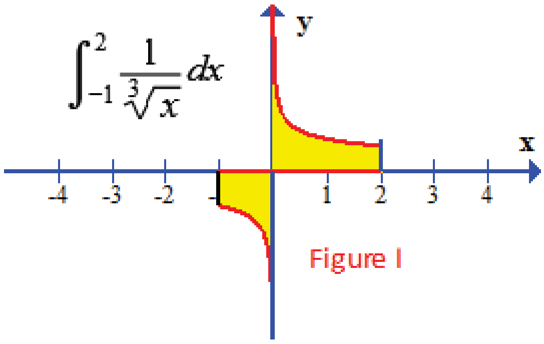


Figure I

پاسخ

همانطور که در شکل I ملاحظه می کنید ، تابع در $[-۱,۲]$ پیوسته است بجز در مبدا. پس فرض می کنیم $d = 0$ باشد. انتگرال را به دو قسمت تقسیم می کنیم

$$\int_{-۱}^{0} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx \quad و \quad \int_{0}^{۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx$$

برای $-۱ < c < 0$ داریم

$$\int_{-۱}^{c} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx = \lim_{c \to 0^-} \frac{۳}{۲}\left(x^{\frac{۲}{۳}}\right)\Big|_{-۱}^{c} = -\frac{۳}{۲}$$

برای $0 < c < ۲$ داریم

$$\int_{c}^{۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} \frac{۳}{۲}\left(x^{\frac{۲}{۳}}\right)\Big|_{c}^{۲} = \frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$$

پس انتگرال هر دو طرف صفر همگرا است ، لذا $\int_{-۱}^{۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} dx$ همگرا است.

اما $\int_{-۱}^{۲} \left(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^{۲}}\right) dx$ **واگرا** است.تمرین شماره ۱۰

انتگرال های روی بازه های بی کران Integrals over Unbounded Intervals

انتگرال های به شکل $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ هم انتگرال های ناسره هستند. اگر f در $[a,\infty)$ پیوسته باشد ، پس $\int_{a}^{b} f(x)dx$ برای $b \geq a$ یک انتگرال سره است. این حقیقت به ما امکان می دهد که بگوییم $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ **همگرا** است اگر $\lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$ وجود داشته باشد. در این صورت

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} f(x)dx$$

است. و در غیر این صورت انتگرال **واگرا** است. انتگرال نا سره $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ هم به همین طریق ارزیابی می کنیم.

مثال ۵ - نشان دهید که ناحیه رنگی در شکل H مساحت محدودی دارد ، آنرا پیدا کنید.

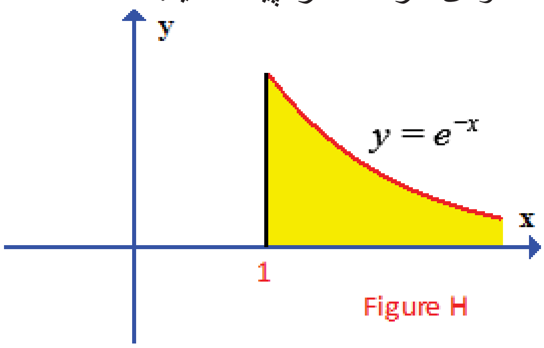


Figure H

پاسخ

باید $\int_{۱}^{\infty} e^{-x}\,dx$ را پیدا کنیم که معادل است با $\lim_{b\to\infty}\int_{۱}^{b} e^{-x}\,dx$

برای $b \geq ۱$ داریم.

$$\int_{۱}^{b} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{۱}^{b} = -e^{-b} + e^{-۱}$$

چون $\lim_{b\to\infty} -e^{-b} = 0$ است ، پس این انتگرال ناسره همگرا است و

$$\int_{۱}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + e^{-۱}\right) = 0 + e^{-۱} = e^{-۱}$$

این مساحت ناحیه رنگی شکل H است

می توان انتگرال های ناسره را برای سرعت و مسافت بکار برد. بخاطر بیاورید که تابع مسافت ضد مشتق تابع سرعت است.

مثال ۶ - فرض کنید یک موشک در زمان $t = ۱$ با سرعت $v(t) = \frac{۱}{t}$ به هوا پرتاب می شود. نشان دهید که موشک سر انجام تا آنجا که می توان تصور کرد ، از زمین دور خواهد بود.

پاسخ

فرض می کنیم $b > ۱$ باشد. چون مسافت طی شده بین زمان $t = ۱$ و $t = b$

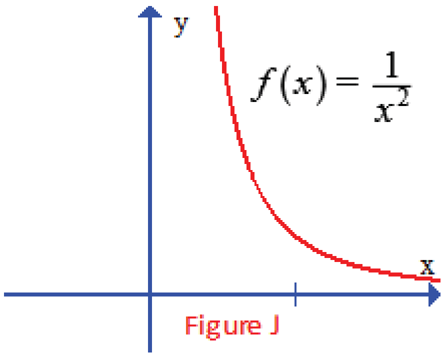
$$\int_{۱}^{b} v(t)dt$$

است ، باید انتگرال بالا را محاسبه کنیم.

$$\int_{۱}^{b} v(t)dt = \int_{۱}^{b} \frac{۱}{t}dt = \ln b - \ln ۱ = \ln b$$

پس چون $\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$ می دانیم که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{t}\, dt$ و گرا است و هر قدر زمان می گذرد ، موشک بیشتر و بیشتر از زمین دور می شود . خیلی دور تر از مسافت از قبل تعیین شده.

انتگرال ها ممکن است به طرق مختلف ناسره باشند. مثلا انتگراند در $\int_0^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}\, dx$ در همسایگی صفر بی کران است. همچنین بازه انتگرال هم بی کران است. شکل J



در چنین حالتی می گوییم انتگرا ل همگرا است اگر برای یک $d > 0$ هر دو انتگرال $\int_0^{d} \frac{۱}{x^{۲}}\, dx$ و $\int_d^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}\, dx$ همگرا باشند. ملاحظه می کنید که هر کدام از یک طرف ناسره هستند. می توان نشان داد اگر $\int_0^{d} f(x)dx$ و $\int_d^{\infty} f(x)dx$ هر دو همگرا باشند برای یک d در $(0,\infty)$ پس انتگرال ها برای تمام d ها در $(0,\infty)$ همگرا هستند. پس برای این که نشان دهیم $\int_0^{\infty} f(x)dx$ واگرا است ، کافی است یک d در $(0,\infty)$ پیدا کنیم بطوری که $\int_0^{d} f(x)dx$ و یا $\int_d^{\infty} f(x)dx$ واگرا باشد.

مثال ۷ ـ نشان دهید انتگرال زیر واگرا است.

$$\int_0^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}} dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $d = ۱$ باشد. نشان می دهیم $\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۲}} dx$ واگرا است و در نتیجه $\int_0^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}} dx$ واگرا است. برای نشان دادن واگرا بودن $\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۲}} dx$ ، مقدار $\int_c^{۱} \frac{۱}{x^{۲}} dx$ برای یک عدد اختیاری c ، در $(0,۱)$ پیدا می کنیم.

$$\int_c^{۱} \frac{۱}{x^{۲}}\, dx = -\frac{۱}{x}\Big|_c^{۱} = \frac{۱}{c} - ۱$$

چون $\lim_{c\to 0^+} \left(\frac{۱}{c} - ۱\right) = \infty$ است ، پس $\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۲}} dx$ واگرااست و در نتیجه $\int_0^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}\, dx$ واگرا است.

می گوییم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ **همگرا** است اگر هم $\int_{-\infty}^{d} f(x)dx$ و هم $\int_{d}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشند برای یک عدد d ،در این صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

مثال ۸ نشان دهید انتگرال زیر همگرا است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx$$

پاسخ
انتگراند در $(-\infty,\infty)$ پیوسته است. می دانید چرا ؟ چون توابع گویا در دمنه شان پیوسته هستند. دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است ، زیر مخرج آن هرگز صفر نیست. برای نشان دادن انتگرال داده شده همگرا است ، نشان می دهیم دو انتگرال زیر همگرا هستند.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) = \frac{\pi}{۲}$$

به همین طریق خواهیم داشت.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx = \frac{\pi}{۲}$$

و در نهایت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\, dx = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = \pi$$

تمرینات ۲.۶

مشخص کنید که آیا انتگرال های ناسره زیر ، همگرا هستند یا نه. اگر همگرا هستند ، مقدار آنها را پیدا کنید.

۱) $\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۰/۹}} dx$

۲) $\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{(t-۴)^{۲}} dt$

۳) $\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}} dx$

۴) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sec^{۲} \theta d\theta$

۵) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\cos x}} dx$

۶) $\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{w \ln w} dw$

۷) $\int_0^{۱} \frac{۳x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۳}-x}} dx$

۸) $\int_0^{\pi} \csc^{۲} x dx$

۹) $\int_0^{۱} \frac{۱}{e^t - e^{-t}} dt$

۱۰) $\int_{-۱}^{۲} \left(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^{۲}}\right) dx$

۱۱) $\int_0^{۲} \frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}} dx$

۱۲) $\int_0^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}} dt$

۱۳) $\int_{0}^{\infty} \frac{۱}{x} dx$

۱۴) $\int_{0}^{\infty} \frac{۱}{(۲+x)^{\pi}} dx$

۱۵) $\int_{0}^{\infty} \sin y \, dy$

۱۶) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{۱+x^{۲}} dx$

۱۷) $\int_{۳}^{\infty} \ln x dx$

۱۸) $\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{x\,(\ln x)^{۳}} dx$

۱۹) $\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{(x+۳)^{۲}} dx$

۲۰) $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)} dx$

۲۱) $\int_{0}^{\infty} e^{۴x} dx$

۲۲) $\int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$

۲۳) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

در تمرینات زیر مشخص کنید که آیا ناحیه بین نمودار انتگراند و محور x در بازه انتگرال دارای مساحت محدود است یا نه. اگر هست مساحت را حساب کنید.

۲۴) $\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{(x-۳)^{۲}} dx$

۲۵) $\int_{۲}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

۲۶) $\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}} dx$

پاسخ تمرینات ۲.۶

مشخص کنید که آیا انتگرال های ناسره زیر ، همگرا هستند یا نه. اگر همگرا هستند ، مقدار آنها را پیدا کنید.

۱) $\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۰/۹}} dx$

همگرا است ، زیرا

$$\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۰/۹}} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^{۱} \frac{۱}{x^{۰/۹}} dx = \lim_{c \to 0^+} ۱۰\, x^{۰/۱} \Big|_c^{۱}$$
$$\lim_{c \to 0^+} ۱۰ \left(۱ - c^{۰/۱}\right) = ۱۰$$

۲) $\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{(t-۴)^{۲}} dt$

واگرا است ، زیرا

$$\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{(t-۴)^{۲}} dt = \lim_{c \to ۴^-} \int_{۳}^{c} \frac{۱}{(t-۴)^{۲}} dt = \lim_{c \to ۴^-} \frac{۱}{t-۴} \Big|_{۳}^{c}$$
$$= \lim_{c \to ۴^-} \left(\frac{-۱}{c-۴} - ۱\right) = \infty$$

۳) $\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}} dx$

همگرا است ، زیرا

$$\int_{۳}^{۴} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}} dx = \lim_{c \to ۳^+} \int_c^{۴} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}} dx = \lim_{c \to ۳^+} \frac{۳}{۲}(x-۳)^{\frac{۲}{۳}} \Big|_c^{۴}$$
$$= \lim_{c \to ۳^+} \left(\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}(c-۳)^{\frac{۲}{۳}}\right) = \frac{۳}{۲}$$

۴) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sec^{۲}\theta\, d\theta$

واگرا است ، زیرا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sec^{۲} \theta d\theta = \lim_{c\to\frac{\pi}{۲}^-} \int_0^c \sec^{۲} \theta d\theta = \lim_{c\to\frac{\pi}{۲}^-} \tan\theta \Big|_0^c$$
$$= \lim_{c\to\frac{\pi}{۲}^-} \tan c = \infty$$

۵) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\cos x}} dx$$

همگرا است. فرض می کنیم $u = ۱ + \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\, dx$ است. پس

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\cos x}} dx = \lim_{c\to\pi^-} \int_0^c \frac{\sin x}{\sqrt{۱+\cos x}} dx$$
$$= \lim_{c\to\pi^-} \int_{۲}^{۱+\cos c} \frac{-۱}{u^{\frac{۱}{۲}}} du = \lim_{c\to\pi^-} \left(-۲u^{\frac{۱}{۲}}\right)\Big|_{۲}^{۱+\cos c}$$
$$= \lim_{c\to\pi^-} \left[-۲(۱+\cos c)^{\frac{۱}{۲}} + ۲\sqrt{۲}\right] = ۲\sqrt{۲}$$

۶) $$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{w \ln w} dw$$

واگرا است ، زیرا

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{w\ln w} dw = \lim_{c\to ۱^+} \int_c^{۲} \frac{۱}{w\ln w} dw = \lim_{c\to ۱^+} \ln(\ln w)\Big|_c^{۲}$$
$$= \lim_{c\to ۱^+} [\ln(\ln ۲) - \ln(\ln c)]\infty$$

۷) $$\int_0^{۱} \frac{۳x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۳}-x}} dx$$

همگرا است. فرض می کنیم $d = \frac{۱}{۲}$ باشد.

$$\int_0^{۱} \frac{۳x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۳}-x}} dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{\frac{۱}{۲}} \frac{۳x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۳}-x}} dx + \lim_{p\to ۱^-} \int_{\frac{۱}{۲}}^{p} \frac{۳x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۳}-x}} dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \frac{۳}{۲}\left(x^۳ - x\right)^{\frac{۲}{۳}}\Bigg|_c^{\frac{۱}{۲}} + \lim_{p\to ۱^-} \frac{۳}{۲}\left(x^۳ - x\right)^{\frac{۲}{۳}}\Bigg|_{\frac{۱}{۲}}^{p}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{۲}{۳}\left(\frac{-۳}{۸}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۳}{۲}\left(c^۳ - c\right)^{\frac{۲}{۳}}\right] + \lim_{p\to ۱^-}\left[\frac{۳}{۲}\left(p^۳ - p\right)^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{-۳}{۸}\right)^{\frac{۲}{۳}}\right]$$

$$= \frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۸}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۸}\right)^{\frac{۲}{۳}} = 0$$

۸) $\displaystyle\int_0^{\pi} \csc^۲ x dx$

واگرا است. فرض می کنیم $d = \frac{\pi}{۲}$ باشد. پس

$$\int_0^{\pi} \csc^۲ x dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^{\frac{\pi}{۲}} \csc^۲ x dx + \lim_{p\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{p} \csc^۲ x dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+} (-\cot x)\Bigg|_c^{\frac{\pi}{۲}} + \lim_{p\to\pi^-}(-\cot x)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{p}$$

$$\lim_{c\to 0^+}(0 + \cot c) + \lim_{p\to\pi^-}(-\cot p + 0)$$

ملاحظه می کنید که هیچ کدام از حد های یک طرفه وجود ندارند. پس انتگرال واگرا است.

۹) $\displaystyle\int_0^{۱} \frac{۱}{e^t - e^{-t}} dt$

واگرا است. فرض می کنیم $u = e^t$ باشد ، پس $du = e^t\, dt$ و $\frac{۱}{u}du = dt$ است. پس

$$\int_0^{۱} \frac{۱}{e^t - e^{-t}} dt = \lim_{c\to 0^+}\int_c^{۱} \frac{۱}{e^t - e^{-t}} dt = \lim_{c\to 0^+}\int_{e^c}^{e} \frac{۱}{u - \frac{۱}{u}} * \frac{۱}{u}\, du$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\int_{e^c}^{e} \frac{۱}{u^۲ - ۱} du = \lim_{c\to 0^+}\int_{e^c}^{e}\left(\frac{۱}{۲} * \frac{۱}{u - ۱} - \frac{۱}{۲} * \frac{۱}{u + ۱}\right) du$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)\ln|u - ۱| - \left(\frac{۱}{۲}\right)\ln|u + ۱|\right]\Big|_{e^c}^{e} = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{u - ۱}{u + ۱}\right|\right]\Big|_{e^c}^{e}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{e-۱}{e+۱}\right| - \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{e^c-۱}{e^c+۱}\right|\right)$$

چون $\lim_{c\to 0^+}\frac{e^c-۱}{e^c+۱} = 0$ است ، پس

$$\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{e-۱}{e+۱}\right| - \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{e^c-۱}{e^c+۱}\right|\right) = \infty$$

است. لذا انتگرال واگرا است.

۱۰) $\int_{-۱}^{۲}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)dx$

واگرا است.

$$\int_{-۱}^{۲}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)dx = \lim_{c\to 0^-}\int_{-۱}^{c}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)dx + \lim_{p\to 0^+}\int_{p}^{۲}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)dx$$

$$= \lim_{c\to 0^-}\left(\ln|x| - \frac{۱}{x}\right)\Big|_{-۱}^{c} + \lim_{p\to 0^+}\left(\ln|x| - \frac{۱}{x}\right)\Big|_{p}^{۲}$$

$$= \lim_{c\to 0^-}\left(\ln|c| - \frac{۱}{c} - ۱\right) + \lim_{p\to 0^+}\left(\ln ۲ - \frac{۱}{۲} - \ln p + \frac{۱}{p}\right)$$

چون

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\ln ۲ - \frac{۱}{۲} - \ln p + \frac{۱}{p}\right) = \infty$$

است ، پس انتگرا ل واگرا است.

۱۱) $\int_{0}^{۲}\frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx$

همگرا است.

$$\int_{0}^{۲}\frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx = \lim_{c\to ۱^-}\int_{0}^{c}\frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx + \lim_{p\to ۱^+}\int_{p}^{۲}\frac{۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx$$

$$= \lim_{c\to ۱^-}\frac{۳}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}\Big|_{0}^{c} + \lim_{p\to ۱^+}\frac{۳}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}\Big|_{p}^{۲}$$

$$= \lim_{c\to ۱^-}\left(\frac{۳}{۲}(c-۱)^{\frac{۲}{۲}} - \frac{۳}{۲}\right) + \lim_{p\to ۱^+}\left(\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}(p-۱)^{\frac{۲}{۳}}\right) = 0$$

۱۲) $\int_0^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}dt$

همگرا است.

$$\int_0^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}dt = \lim_{c\to ۱^-} \int_0^{c} \frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}dt = \lim_{c\to ۱^-} \arcsin t \Big|_0^c$$
$$= \lim_{c\to ۱^-}(\arcsin c - \arcsin 0) = \arcsin ۱ = \frac{\pi}{۲}$$

۱۳) $\int_0^{\infty} \frac{۱}{x}dx$

واگرا است.

$$\int_0^{\infty} \frac{۱}{x}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{۱} \frac{۱}{x}dx + \lim_{b\to\infty} \int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x}dx$$
$$= \lim_{a\to 0^+} \ln|x| \Big|_a^{۱} + \lim_{b\to\infty} \ln|x| \Big|_{۱}^{b} = \lim_{a\to 0^+}(0 - \ln a) + \lim_{b\to\infty}(\ln b - 0)$$

چون هر دو حد بالا بی نهایت هستند ، پس انتگرال واگرا است.

۱۴) $\int_0^{\infty} \frac{۱}{(۲+x)^{\pi}}dx$

همگرا است.

$$\int_0^{\infty} \frac{۱}{(۲+x)^{\pi}}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (۲+x)^{-\pi} = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{-\pi+۱}(۲+x)^{-\pi+۱} \Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{-\pi+۱}\left((۲+b)^{-\pi+۱} - ۲^{-\pi+۱}\right) = \frac{۱}{\pi-۱}۲^{-\pi+۱}$$

۱۵) $\int_0^{\infty} \sin y\, dy$

واگرا است.

$$\int_0^{\infty} \sin y\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \sin y\, dy = \lim_{b\to\infty}(-\cos y) \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(۱ - \cos b\right)$$

حد بالا وجود ندارد. پس انتگرال واگرا است.

۱۶) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{۱ + x^۲}\,dx$

واگرا است.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{۱ + x^۲}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{x}{۱ + x^۲}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + x^۲\right)\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{۱}{۲}\ln\left(۱ + b^۲\right) = \infty$$

۱۷) $\displaystyle\int_۳^{\infty} \ln x dx$

واگرا است.

$$\int_۳^{\infty} \ln x dx = \lim_{b\to\infty}\int_۳^{b} \ln x\,dx = \lim_{b\to\infty}(x\ln x - x)\Big|_۳^b$$
$$\lim_{b\to\infty}\left(b\ln b - b - ۳\ln ۳ + ۳\right)$$

چون

$$\lim_{b\to\infty}(b\ln b - b) = \lim_{b\to\infty} b\left(\ln b - ۱\right) = \infty$$

است ، پس انتگرال واگرا است.

۱۸) $\displaystyle\int_۲^{\infty} \frac{۱}{x\,(\ln x)^۳}\,dx$

همگرا است. فرض می کنیم $u = \ln x$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{x}\,dx$ است.

$$\int_۲^{\infty} \frac{۱}{x\,(\ln x)^۳}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_۲^{b} \frac{۱}{x\,(\ln x)^۳}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln ۲}^{\ln b} \frac{۱}{u^۳}\,du$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-۱}{۲u^۲}\Bigg|_{\ln ۲}^{\ln b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{۱}{۲(\ln b)^۲} + \frac{۱}{۲\left(\ln ۲\right)^۲}\right) = \frac{۱}{۲\left(\ln ۲\right)^۲}$$

۱۹) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{\left(x + ۳\right)^۲}\,dx$

واگرا است. فرض می کنیم $d = -۴$ باشد ، پس

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{(x+۳)^۲}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-۴} \frac{۱}{(x+۳)^۲}dx + \lim_{c\to-۳^-}\int_{-۴}^{c} \frac{۱}{(x+۳)^۲}dx$$
$$+ \lim_{p\to-۳^+}\int_{p}^{0} \frac{۱}{(x+۳)^۲}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{-۱}{x+۳}\bigg|_{a}^{-۴} + \lim_{c\to-۳^-}\frac{-۱}{x+۳}\bigg|_{-۴}^{c}$$
$$+ \lim_{p\to-۳^+}\frac{-۱}{x+۳}\bigg|_{p}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left(۱+\frac{۱}{a+۳}\right) + \lim_{c\to-۳^-}\left(\frac{-۱}{x+۳}-۱\right)$$
$$+ \lim_{p\to-۳^+}\left(-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{p+۳}\right)$$

چون دو حد یک طرفه آخر وجود ندارند ، پس انتگرال واگرا است.

۲۰) $\displaystyle\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}dx$

واگرا است. فرض می کنیم $u=\sqrt{x}+۱$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\,dx$ است.

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{۱}^{b} \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}dx = \lim_{b\to\infty}۲\int_{۲}^{\sqrt{b}+۱}\frac{۱}{u}du$$
$$\lim_{b\to\infty}۲\ln|u|\bigg|_{۲}^{\sqrt{b}+۱} = \lim_{b\to\infty}\left(۲\ln(\sqrt{b}+۱)-۲\ln ۲\right)=\infty$$

۲۱) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{۴x}dx$

واگرا است.

$$\int_{0}^{\infty} e^{۴x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{۴x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{۱}{۴}e^{۴x}\bigg|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{۱}{۴}e^{۴b}-\frac{۱}{۴}\right)=\infty$$

۲۲) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$

همگرا است. فرض می کنیم $u=x$ و $dv=e^{-x}$ باشد ، پس $du=dx$ و $v=-e^{-x}$ است.

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\bigg|_{0}^{b}+\int_{0}^{b}e^{-x}dx\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\bigg|_{0}^{b}-e^{-x}\bigg|_{0}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}\left((-be^{-b}+0)-(e^{-b}-۱)\right)$$

$$= \left(-\lim_{b\to\infty} be^{-b}\right) - \lim_{b\to\infty} e^{-b} + ۱ = \left(-\lim_{b\to\infty} be^{-b}\right) + ۱$$

چون

$$\lim_{b\to\infty} b = \infty = \lim_{b\to\infty} e^{b}$$

است ، قانون لا پیتال می گوید

$$\lim_{b\to\infty} be^{-b} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^{b}} = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{e^{b}} = 0$$

پس ،

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = ۱$$

۲۳) $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$

واگرا است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xdx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xdx = \lim_{a\to-\infty} \frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{0}^{b}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{-۱}{۲}a^{۲} + \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{۲}b^{۲}$$

هیچ یک از دو حد های بالا وجود ندارند. پس انتگرال واگرا است.

در تمرینات زیر مشخص کنید که آیا ناحیه بین نمودار انتگراند و محور x در بازه انتگرال دارای مساحت محدود است یا نه. اگر هست مساحت را حساب کنید.

۲۴) $\int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{(x-۳)^{۲}}dx$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{۱}{(x-۳)^{۲}}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{۱}{(x-۳)^{۲}}dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{-۱}{x-۳}\Big|_{a}^{0}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{a-۳}\right) = \frac{۱}{۳}$$

پس ناحیه دارای مساحت محدود است.

۲۵) $\displaystyle\int_{۲}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$A = \int_{۲}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{۲}^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{۲}(\ln x)^{۲}\,\Big|_{۲}^{b}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}(\ln b)^{۲} - \frac{۱}{۲}\big(\ln ۲\big)^{۲}\right) = \infty$$

پس ناحیه دارای مساحت نا محدود است.

۲۶) $\displaystyle\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}}\,dx$

$$A = \int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{۲}^{b} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}}\,dx = \lim_{b\to\infty} ۲\sqrt{x+۱}\,\Big|_{۲}^{b}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(۲\sqrt{b+۱} - ۲\sqrt{۳}\right) = \infty$$

$\lim_{b\to\infty}$پس ناحیه دارای مساحت نا محدود است.

۲.۷ ـ تمرینات دوره ای فصل دوم Chapter Two Review Exercises

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \ln\left(x^{۲}+۹\right)dx$

۲) $\int x\ \csc^{۲} x\ dx$

۳) $\int x\cosh x\ dx$

۴) $\int x\ \cos^{۲} x\ dx$

۵) $\int x^{۲}\sin x^{۳}\cos x^{۳}\ dx$

۶) $\int \tan^{۵} x\ dx$

۷) $\int x^{۳}\cos x^{۲}\ dx$

۸) $\int t^{۲}\ \sqrt{۱-۳t}\ dt$

۹) $\int \frac{\cos x}{۱+\cos x}\ dx$

۱۰) $\int \frac{x^{۲}}{\left(x^{۲}+۲x+۱۰\right)^{\frac{۵}{۲}}}\ dx$

۱۱) $\int \frac{x^{۴}}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}\ dx$

۱۲) $\int \frac{x}{x^{۲}+۳x-۱۸}\ dx$

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا انتگرال داده شده سره است یا نا سره. اگر ناسره است مشخص کنید آیا همگرا است. اگر انتگرال سره باشد و یا ناسره همگرا ، مقدار آنرا پیدا کنید.

۱۳) $\int_{-۲}^{۱} \frac{۱}{۳x+۴}\ dx$

۱۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} x\sec x\tan x\ dx$

۱۵) $\int_{۱}^{۴} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}\ dx$

۱۶) $$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \sin^۴ x \ \cos^۳ x \, dx$$

۱۷) $$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \left(\tan^۳ x + \tan^۵ x\right) \, dx$$

۱۸) $$\int_۱^{\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^۲ - ۱}}{x^۲} \, dx$$

پاسخ تمرینات دره ای فصل دوم
انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $$\int \ln\left(x^۲ + ۹\right) dx$$

فرض می کنیم $u = \ln\left(x^۲ + ۹\right)$ و $dv = dx$ باشد ، پس $du = \frac{۲x}{x^۲+۹}$ و $v = x$ است.

$$\int \ln\left(x^۲ + ۹\right) dx = x \ln\left(x^۲ + ۹\right) - \int \frac{۲x^۲}{x^۲ + ۹} dx$$
$$= x \ln\left(x^۲ + ۹\right) - ۲ \int \left(۱ - \frac{۹}{x^۲ - ۹}\right) dx$$
$$= x \ln\left(x^۲ + ۹\right) - ۲x + ۱۸\left(\frac{۱}{۳}\right) \arctan\frac{x}{۳} + C$$
$$= x \ln\left(x^۲ + ۹\right) - ۲x + ۶ \arctan\frac{x}{۳} + C$$

۲) $$\int x \ \csc^۲ x \, dx$$

فرض می کنیم $u = x$ و $dv = \csc^۲ x \, dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = -\cot x$ است.

$$\int x \ \csc^۲ x \, dx = -x \cot x + \int \cot x \, dx = -x \cot x + \ln|\sin x| + C$$

۳) $$\int x \cosh x \, dx$$

فرض می کنیم $u = x$ و $dv = \cosh x \, dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \sinh x$ است.

$$\int x \cosh x \, dx = x \sinh x - \int \sinh x \, dx = x \sinh x - \cosh x + C$$

۴) $$\int x\ \cos^{۲} x\,dx = \int x\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x\right)dx = \frac{۱}{۲}\int x\,dx + \frac{۱}{۲}\int x\cos ۲x dx$$
$$= \frac{۱}{۴}x^{۲} + \frac{۱}{۲}\int x\cos ۲x\,dx$$

برای $\int x\cos ۲x\,dx$ فرض می کنیم $u = x$ و $dv = \cos ۲x\,dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ است.پس

$$\int x\cos ۲x\,dx = \frac{۱}{۲}x\sin ۲x - \frac{۱}{۲}\int \sin ۲x\,dx = \frac{۱}{۲}x\sin ۲x + \frac{۱}{۴}\cos ۲x + C_۱$$

لذا

$$\int x\ \cos^{۲} x\,dx = \frac{۱}{۴}x^{۲} + \frac{۱}{۴}x\sin ۲x + \frac{۱}{۸}\cos ۲x + C$$

۵) $$\int x^{۲}\sin x^{۳}\cos x^{۳}\,dx$$

فرض می کنیم $u = \sin x^{۳}$ باشد ، پس $du = ۳x^{۲}\cos x^{۳}\,dx$ است.

$$\int x^{۲}\sin x^{۳}\cos x^{۳}\,dx = \frac{۱}{۳}\int u\,du = \frac{۱}{۶}u^{۲} + C = \frac{۱}{۶}\sin^{۲} x^{۳} + C$$

۶) $$\int \tan^{۵} x\,dx = \int \tan^{۳} x\left(\sec^{۲} x - ۱\right)dx = \int \tan^{۳} x\sec^{۲} x dx - \int \tan^{۳} x\,dx$$
$$= \int \tan^{۳} x\ \sec^{۲} x dx - \int \tan x\left(\sec^{۲} x - ۱\right)dx$$
$$= \int \tan^{۳} x\sec^{۲} x dx - \int \tan x\sec^{۲} x dx + \int \tan x dx$$

برای دو انتگرال اول فرض می کنیم $u = \tan x$ باشد ، پس $du = \sec^{۲} x\,dx$ است. پس

$$\int \tan^{۳} x\sec^{۲} x dx - \int \tan x\sec^{۲} x dx = \int u^{۳}du - \int u\,du$$
$$= \frac{۱}{۴}u^{۴} - \frac{۱}{۲}u^{۲} + C_۱ = \frac{۱}{۴}\tan^{۴} x - \frac{۱}{۲}\tan^{۲} x + C_۱$$

و در نهایت

$$\int \tan^{۵} x dx = \frac{۱}{۴}\tan^{۴} x - \frac{۱}{۲}\tan^{۲} x - \ln|\cos x| + C$$

۷) $\int x^{۳} \cos x^{۲} \, dx$

فرض می کنیم $u = x^{۲}$ و $dv = x \cos x^{۲} \, dx$ باشد ، پس $du = ۲x \, dx$ و $v = \frac{۱}{۲} \sin x^{۲}$ است.

$$\int x^{۳} \cos x^{۲} \, dx = \frac{۱}{۲} x^{۲} \sin x^{۲} - \int \frac{۱}{۲} (۲x) \sin x^{۲} \, dx$$
$$= \frac{۱}{۲} x^{۲} \sin x^{۲} + \frac{۱}{۲} \cos x^{۲} + C$$

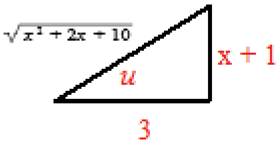
۸) $\int t^{۲} \sqrt{۱ - ۳t} \, dt$

فرض می کنیم $u = ۱ - ۳t$ باشد ، پس $du = -۳ \, dt$ و $t = \frac{۱}{۳}(۱ - u)$ است.

$$\int t^{۲} \sqrt{۱ - ۳t} \, dt = \int \left(\frac{۱}{۳} (۱ - u) \right)^{۲} \sqrt{u} \left(-\frac{۱}{۳} \right) du$$
$$= \frac{-۱}{۲۷} \int \left(u^{\frac{۱}{۲}} - ۲u^{\frac{۳}{۲}} + u^{\frac{۵}{۲}} \right) du$$
$$= -\frac{۱}{۲۷} \left(\frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۴}{۵} u^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۷} u^{\frac{۷}{۲}} \right) + C$$
$$= -\frac{۲}{۸۱} (۱ - ۳t)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۴}{۱۳۵} (۱ - ۳t)^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۲}{۱۸۹} (۱ - ۳t)^{\frac{۷}{۲}} + C$$

۹) $$\int \frac{\cos x}{۱ + \cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{۱ + \cos x} * \frac{۱ - \cos x}{۱ - \cos x} \, dx$$
$$= \int \frac{\cos x - \left(۱ - \sin^{۲} x \right)}{\sin^{۲} x} dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin^{۲} x} - \csc^{۲} x + ۱ \right) dx$$
$$= \frac{-۱}{\sin x} + \cot x + x + C = -\csc x + \cot x + x + C$$

۱۰) $$\int \frac{x^{۲}}{\left(x^{۲} + ۲x + ۱۰ \right)^{\frac{۵}{۲}}} \, dx$$



فرض می کنیم $x + ۱ = ۳\tan u$ باشد ، پس $dx = ۳\sec^۲ u\, du$ است.

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+10)^{\frac{5}{2}}}\,dx = \int \frac{x^2}{\left((x+1)^2+9\right)^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{(3\tan u - 1)^2}{(9\tan^2 u + 9)^{\frac{5}{2}}}\, 3\sec^2 u\, du = \frac{1}{81}\int \frac{9\tan^2 u - 6\tan u + 1}{\sec^2 u}\sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{9}\int \sin^2 u \cos u\, du - \frac{2}{27}\int \sin u \cos^2 u\, du + \frac{1}{81}\int \left(1 - \sin^2 u\right)\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{27}\sin^3 u + \frac{2}{81}\cos^3 u + \frac{1}{81}\sin u - \frac{1}{243}\sin^3 u + C$$

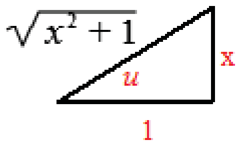
$$= \frac{8}{243}\frac{(x+1)^3}{(x^2+2x+10)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3}\frac{1}{(x^2+2x+10)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{81}\frac{x+1}{(x^2+2x+10)^{\frac{1}{2}}} + C$$

۱۱) $$\int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\,dx$$

فرض می کنیم $x = \tan u$ باشد ، پس $dx = \sec^۲ u\, du$ است.

$$\int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\tan^4 u}{(\tan^2 u + 1)^2}\sec^2 u\, du$$

$$= \int \frac{\tan^4 u}{\sec^2 u}\,du = \int \frac{\sin^4 u}{\cos^4 u}\cos^2 u\, du$$



$$\int \frac{\sin^۴ u}{\cos^۲ u} du = \int \frac{\left(۱-\cos^۲ u\right)^۲}{\cos^۲ u} du = \int \frac{۱-۲\cos^۲ u+\cos^۴ u}{\cos^۲ u} du$$
$$= \int \left(\sec^۲ u - ۲ + \cos^۲ u\right) du$$
$$= \tan u - ۲u + \int \left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲u\right) du = \tan u - ۲u + \frac{۱}{۲}u + \frac{۱}{۴}\sin ۲u + C$$
$$= \tan u - \frac{۳}{۲}u + \frac{۱}{۲}\sin u \cos u + C$$

حالا $u = \arctan x$ و با توجه به شکل بالا

$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} \quad و \quad \cos u = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

پس

$$\int \frac{x^۴}{\left(x^۲+۱\right)^۲} dx = x - \frac{۳}{۲}\arctan x + \frac{۱}{۲} * \frac{x}{x^۲+۱} + C$$

۱۲) $$\int \frac{x}{x^۲+۳x-۱۸}\ dx = \int \frac{x}{(x+۶)(x-۳)} dx$$
$$\frac{x}{(x+۶)(x-۳)} = \frac{A}{x+۶} + \frac{B}{x-۳}$$
$$A(x-۳) + B(x+۶) = x$$
$$A + B = ۱; -۳A + ۶B = 0; A = \frac{۲}{۳}; B = \frac{۱}{۳}$$
$$\int \frac{x}{x^۲+۳x-۱۸}\ dx = \int \left(\frac{۲}{۳} * \frac{۱}{x+۶} + \frac{۱}{۳} * \frac{۱}{x-۳}\right) dx$$

$$= \frac{۲}{۳}\int \frac{۱}{x+۶}dx + \frac{۱}{۳}\int \frac{۱}{x-۱}dx$$
$$= \frac{۲}{۳}\ln|x+۶| + \frac{۱}{۳}\ln|x-۳| + C$$

در تمرینات زیر مشخص کنید آیا انتگرال داده شده سره است یا نا سره. اگر ناسره است مشخص کنید آیا همگرا است. اگر انتگرال سره باشد و یا ناسره همگرا ، مقدار آنرا پیدا کنید.

۱۳) $\displaystyle\int_{-۲}^{۱} \frac{۱}{۳x+۴}\,dx$

انتگرال نا سره

$$\int_{-۲}^{۱}\frac{1}{۳x+۴}dx = \lim_{c\to -\frac{۴}{۳}^-}\int_{-۲}^{c}\frac{1}{۳x+۴}dx + \lim_{p\to -\frac{۴}{۳}^+}\int_{p}^{۱}\frac{۱}{۳x+۴}dx$$
$$= \lim_{c\to -\frac{۴}{۳}^-}\frac{۱}{۳}\ln|۳x+۴|\Bigg|_{-۲}^{c} + \lim_{p\to -\frac{۴}{۳}^+}\frac{۱}{۳}\ln|۳x+۴|\Bigg|_{p}^{۱}$$
$$= \lim_{c\to -\frac{۴}{۳}^-}\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۳}\ln|۳c+۴| - \frac{۱}{۳}\ln ۲\right)$$
$$+ \lim_{p\to -\frac{۴}{۳}^+}\left(\frac{۱}{۳}\ln ۷ - \frac{۱}{۳}\ln|۳p+۴|\right)$$

هیچ یک از دو حد بالا وجود ندارند ، پس انتگرال واگرا است.

۱۴) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} x\sec x\tan x\,dx$

انتگرال سره است. فرض می کنیم $u = x$ و $dv = \sec x\tan x\,dx$ باشد ، پس $du = dx$ و $v = \sec x$ است.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} x\sec x\tan x\,dx = x\sec x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}\sec x\,dx$$
$$= x\sec x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} - \ln\left|\sec x + \tan x\right|\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۴} - \ln\left|\left(\sqrt{۲}+۱\right)\right|$$

۱۵) $\int_{۱}^{۴} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}\, dx$

انتگرال سره است. فرض می کنیم $u = ۱ + \sqrt{x}$ باشد، پس $du = \frac{۱}{۲} x^{-\frac{۱}{۲}}\, dx$ و $dx = ۲\left(u - ۱\right) du$ است.

$$\int_{۱}^{۴} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}} dx = \int_{۲}^{۳} \frac{۲\left(u-۱\right)}{u} du = \int_{۲}^{۳} \left(۲ - \frac{۲}{u}\right) du$$

$$= \left(۲u - ۲\ln|u|\right)\Big|_{۲}^{۳} = ۶ - ۲\ln ۳ - ۴ + ۲\ln ۲$$

$$= ۲ + \ln\frac{۴}{۹}$$

۱۶) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \sin^{۴} x\, \cos^{۳} x\, dx$

انتگرال سره است. فرض می کنیم $u = \sin x$ باشد ، پس $du = \cos x\, dx$ است.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \sin^{۴} x\, \cos^{۳} x\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \sin^{۴} x \left(۱ - \sin^{۲} x\right) \cos x dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \left(u^{۴} - u^{۶}\right) du = \left(\frac{۱}{۵} u^{۵} - \frac{۱}{۷} u^{۷}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴۰} - \frac{\sqrt{۲}}{۱۱۲} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۵۶۰}$$

۱۷) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \left(\tan^{۳} x + \tan^{۵} x\right)\, dx$

انتگرال سره است. فرض می کنیم $u = \tan x$ باشد ، پس $du = \sec^{۲} x\, dx$ است.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \left(\tan^{۳} x + \tan^{۵} x\right)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۳} x \left(۱ + \tan^{۲} x\right) dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۳} x\, \sec^{۲} x\, dx = \int_{0}^{۱} u^{۳} du = \frac{u^{۴}}{۴}\Big|_{0}^{۱} = \frac{۱}{۴}$$

۱۸) $\displaystyle\int_{۱}^{\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{x^{۲}}\,dx$

انتگرال سره. فرض می کنیم $x=\sec u$ باشد ، پس $dx=\sec u\tan u\,du$ است.

$$\int_{۱}^{\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{x^{۲}}\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\sec^{۲}u-۱}}{\sec^{۲}u}\sec u\tan u\,du=\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin^{۲}u}{\cos u}du$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\cos^{۲}u}{\cos u}du=\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}}(\sec u-\cos u)du$$

$$=(\ln|\sec u+\tan u|-\sin u)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}}=\ln\left(\sqrt{۲}+۱\right)-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

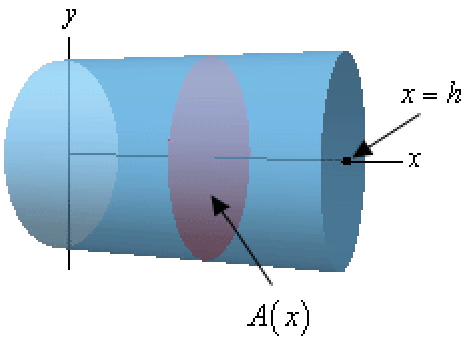
فصل سوم
کار برد های انتگرال
Applications of Integrals

در این فصل در مورد کار برد های انتگرال ، از جمله محاسبه حجم ، سطح جانبی و طول یک منحنی و کار برد های انتگرال در فیزیک بحث خواهیم کرد.

۳.۱ – محاسبه حجم با روش برش عرضی Volumes – The cross-Sectional Method

در این بخش در مورد کاربرد انتگرال ، برای پیدا کردن فرمولی جهت محاسبه حجم یک جسم سه بعدی ، با استفاده ازمساحت برش عرضی آن ، بحث می کنیم. این فرمول به ما کمک می کند که بتوانیم حجم اجسامی مانند کره ، استوانه ، هرم ، مخروط و مانند آنها را پیدا کنیم.

مثلا یک استوانه با سطح مقطع ثابت را در نظر بگیرید , با شعاع r و ارتفاع h شکل زیر. می دانید



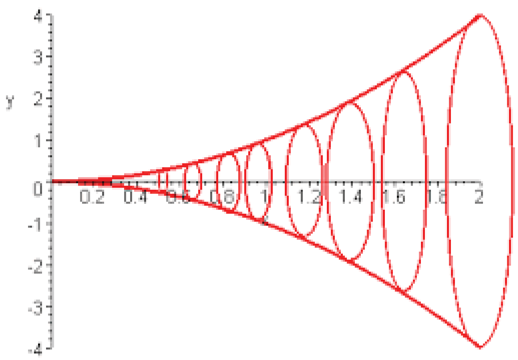
مساحت سطح مقطع و یا مساحت برش عرضی این استوانه مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$A(x) = \pi r^{۲} \text{ ،} \quad 0 \le x \le h$$

و در نتیجه ، حجم این استوانه طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$V = \pi r^{۲} h$$

حالا فرض کنید مساحت سطح مقطع $A(x)$ یک جسم سه بعدی D یک تابع پیوسته است اما لزوما در بازه $[a, b]$ ثابت نیست.شکل زیر (یعنی مانند استوانه بالا برش های عرضی با هم مساوی نیستند)



فرض کنید $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. برای هر k بین یک و n فرض می کنیم t_k یک عدد اختیاری در بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد. اگر Δx_k کوچک باشد ، حجم ΔV_k آن قسمت از D بین $x_{k-۱}$ و x_k تقریبا مساوی است با حاصل ضرب مساحت برش عرضی $A(t_k)$ و طول Δx_k . پس

$$\Delta V_k \approx (\text{مساحت سطح مقطع}) \times (\text{طول}) = A(t_k)\Delta x_k$$

چون حجم جسم D عبارت است از مجموع $\Delta V_۱, \Delta V_۲, \cdots, \Delta V_n$ پس نتیجه می گیریم که V باید تقریبا

$$\sum_{k=۱}^{n} A(t_k)\, \Delta x_k$$

باشد. که همان مجموع ریمانی برای A در $[a,b]$ است. لذا می توان گفت

$$V = \lim_{\|\wp\| \to 0} \sum_{k=۱}^{n} A(t_k)\, \Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$$

پس اگر مساحت برش عرضی یا مساحت سطح مقطع یک جسم را یعنی $A(x)$ و حدود انتگرال را بدانیم ، حجم آن جسم از طریق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)dx \quad (۱)}$$

مثال ۱ - مطلوب است حجم ناحیه سه بعد ی در شکل A که سطح مقطع آن روی محور x یک نیم دائره است با شعاع $x^۲$ برای $0 \le x \le ۱$

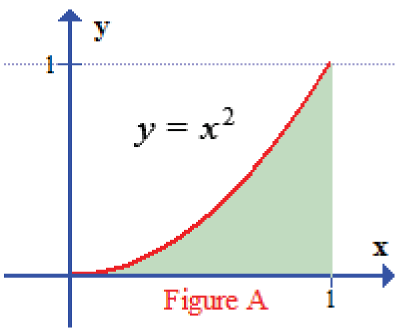
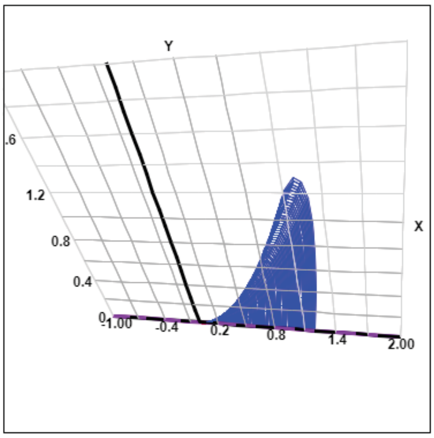


Figure A



پاسخ

به خاطر دارید که مساحت یک ناحیه نیم دائره با شعاع r مساوی است با $\frac{۱}{۲}\pi r^۲$

پس مساحت سطح مقطع مطابق زیر بدست می آید.

$$A(x) = \frac{۱}{۲}\pi \left(x^{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi\, x^{۴}$$

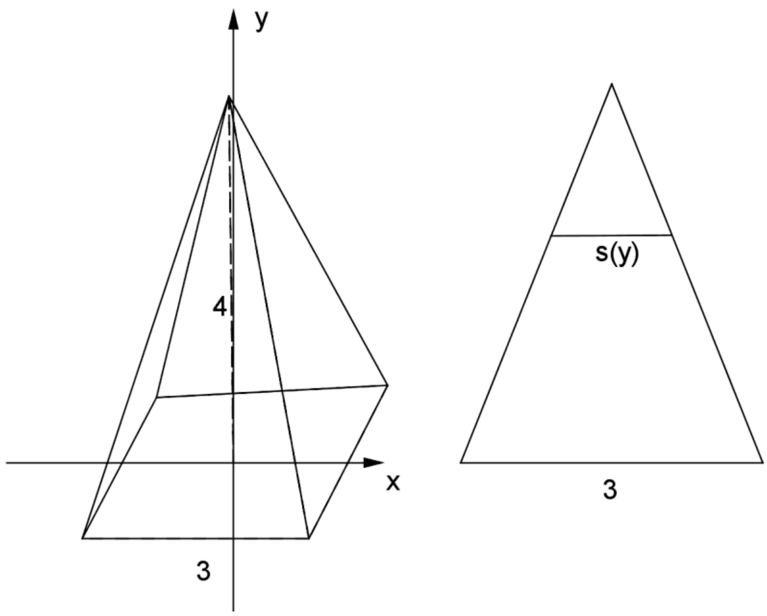
پس حجم این ناحیه سه بعدی مطابق زیر است.

$$V = \int_0^{۱} A(x)dx \int_0^{۱} \frac{۱}{۲}\,\pi\, x^{۴}dx = \frac{۱}{۱۰}\,\pi x^{۴}\Big|_0^{۱} = \frac{\pi}{۱۰}$$

می توان نقش های محور های x و y را جا بجا کرد. و انتگرال را نسبت به y محاسبه نمود.

$$\boxed{V = \int_c^d A(y)dy \quad (۲)}$$

مثال ۲- فرض کنید یک هرم به ارتفاع ۴ واحد و قاعده مربع به ابعاد ۳ واحد داریم. حجم هرم را پیدا کنید.



پاسخ

محور هرم را روی محور y و مبدا مختصات را روی قاعده هرم قرار می دهیم. توجه دارید که هرم از صفر تا ۴ روی محور y قرار دارد. پس حدود انتگرال 0 و ۴ است. همچنین ملاحظه می کنید مقطع هرم در هر نقطه در $[0,۴]$ یک مربع است که هر ضلع آن $s(y)$ تساوی زیر را بر قرار می کند.

$$\frac{s(y)}{۳} = \frac{۴-y}{۴} \quad \Rightarrow \quad s(y) = \frac{۳}{۴}(۴-y)$$

پس مساحت سطح مقطع در y مطابق زیر است.

$$A(y) = \left(s(y)\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۶}\left(۱۶ - ۸y + y^{۲}\right)$$

پس بر اساس فرمول (۲) داریم.

$$V = \int_{0}^{۴} \frac{۹}{۱۶}\left(۱۶ - ۸y + y^{۲}\right) dy = \frac{۹}{۱۶}\left(۱۶y - ۴y^{۲} + \frac{۱}{۳}y^{۳}\right)\Big|_{0}^{۴}$$

$$= \frac{۹}{۱۶}\left(۶۴ - ۶۴ + \frac{۶۴}{۳}\right) = ۱۲$$

بطور کلی ، یک هرم با ارتفاع h و قاعده مربع که طول هر ضلع آن a باشد، حجم آن مطابق زیر است

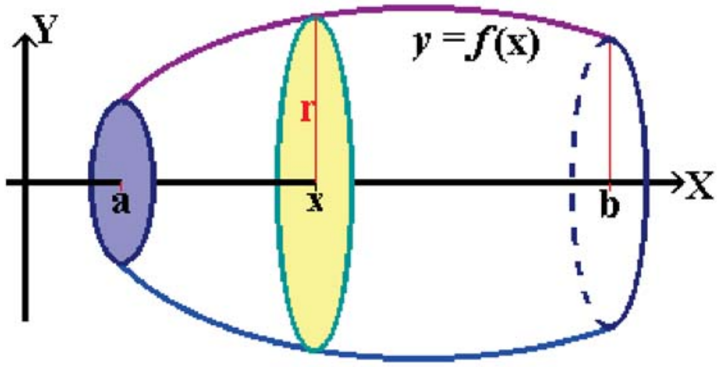
$$V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h$$

پس حجم هرم مثال ۲ بر اساس فرمول بالا می شود.

$$V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h = \frac{۱}{۳}\left(۳^{۲}\right)۴ = \frac{۱}{۳}(۹)۴ = ۱۲$$

روش دیسک Disk Method

هنگامی که نمودار یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a, b]$ حول محور x می چرخد ، یک ناحیه سه بعدی ایجاد می کند که دارای سطح مقطع مدور است . شکل زیر.



چون شعاع سطح مقطع در x تابع $f(x)$ است ، پس مساحت سطح مقطع

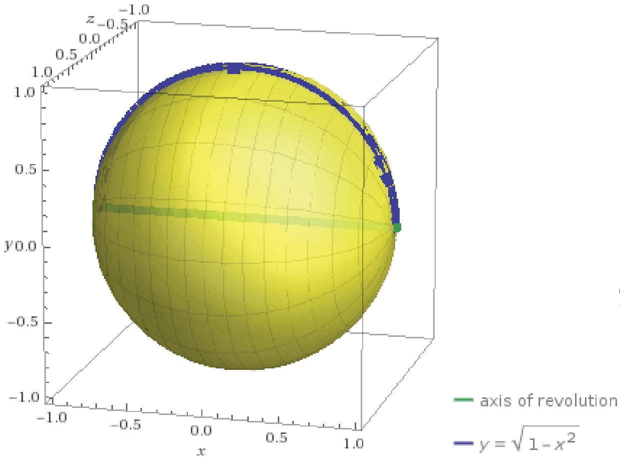
$$A(x) = \pi\left(f(x)\right)^{۲}$$

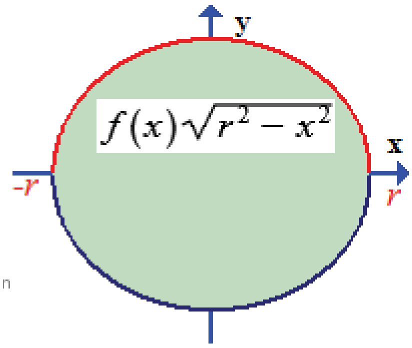
است و لذا حجم آن

$$\boxed{V(x) = \int_{a}^{b} \pi\left(f(x)\right)^{۲} dx \quad (۳)}$$

است. چون برش های مقطع به شکل دیسک است ، محاسبه حجم به این طریق را **روش دیسک** می نامند.

مثال ۳ ـ حجم یک کره با شعاع r را پیدا کنید.





پاسخ

یک کره با چرخاندن یک نیم دائره حول قطرش بدست می آید. شکل بالا

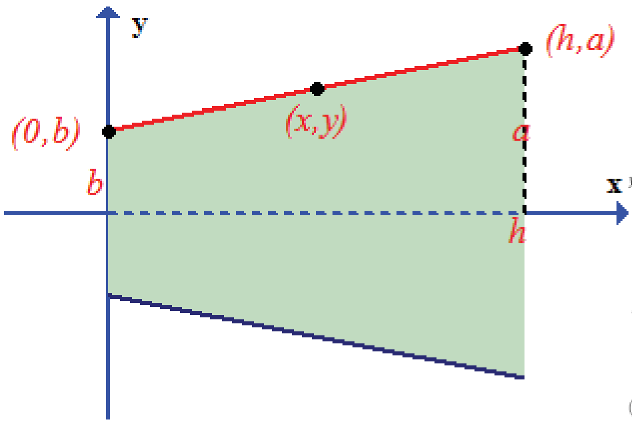
فرض می کنیم $f(x) = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ باشد برای $-r \le x \le r$ پس

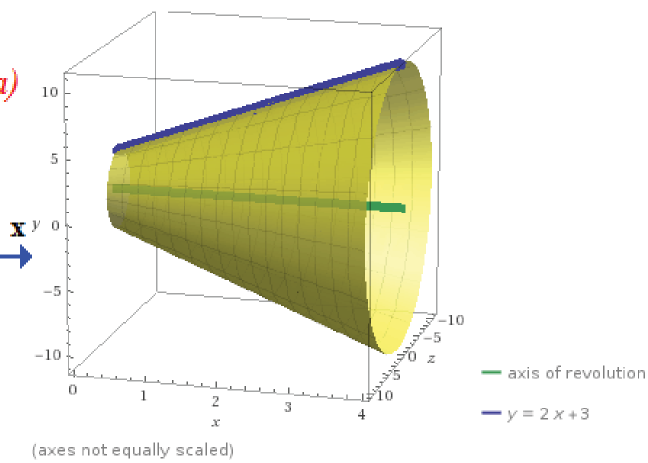
$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^۲ - x^۲}\right)^۲ dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^۲ - x^۲\right) dx$$

$$= \pi\left(r^۲ x - \frac{۱}{۳} x^۳\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

فرمول حجم کره به ارشمیدس نسبت داده می شود. (سال ۲۵۰ قبل از میلاد)

مثال بعدی یک مخروط سر و ته بریده $A\ Frustum\ of\ a\ Cone$ است. تصاویر زیر





خط لبه بالایی تصویرسمت چپ را در نظر بگیرید. دو نقطه روی خط عبارت هستند از $(0,b)$ و $(h,0)$
می توانیم با دانستن مختصات دو نقطه روی خط ، معادله آنرا بدست آوریم.

$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$
$$\frac{y-b}{x-0}=\frac{a-b}{h-0}$$
$$y=b+\frac{a-b}{h}x \qquad (۴)$$

مخروط نا قص بالا با چرخاندن نمودار این معادله حول محور x در بازه $[a,b]$ بدست می آید. تصویر سمت راست.

مثال ۴ - حجم مخروط ناقص شکل بالا را پیدا کنید.

پاسخ

چون y درمعادله (۴) شعاع مقطع مخروط ناقص در x است ، بر اساس فرمول (۳) داریم

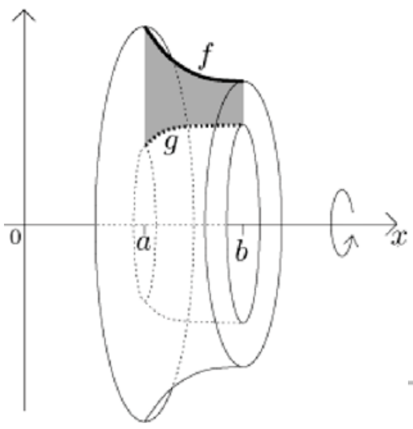
$$V=\int_0^h \pi\left(b+\frac{a-b}{h}x\right)^۲ dx=\frac{\pi h}{۳(a-b)}\left(b+\frac{a-b}{h}\right)^۳\Big|_0^h$$
$$=\frac{\pi h}{۳(a-b)}\left(a^۳-b^۳\right)$$

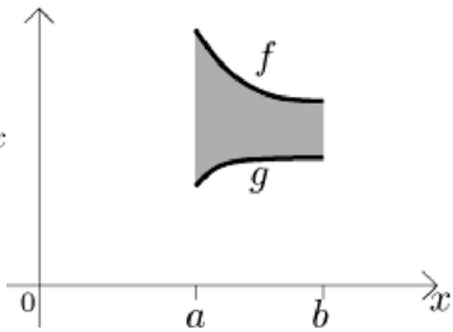
اگر $b=0$ باشد ، ناحیه ای که بدست می آید ، یک مخروط کامل است. و در نتیجه حجم به صورت زیر می شود که می دانیم فرمول حجم مخروط است.

$$V=\frac{۱}{۳}\pi a^۲h$$

روش واشر The Washer Method

حالا فرمولی برای حجم یک جسم سه بعدی ار ائه می دهیم که از دوران یک ناحیه حول محور x ایجاد می شود.





فرض کنید f و g دو تابع باشند ، بطوری که

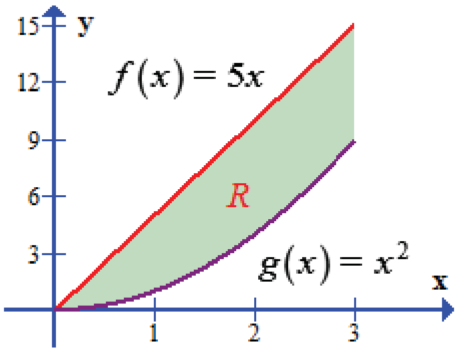
$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad ، \quad a \leq x \leq b$$

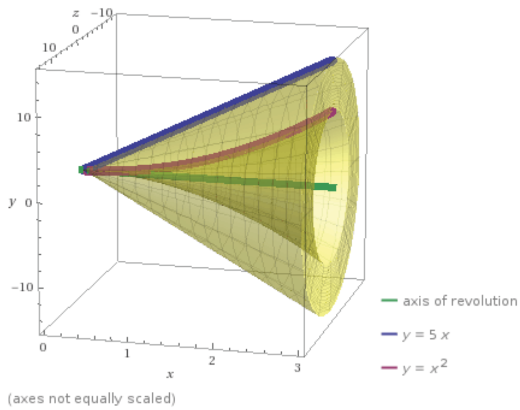
باشد. پس ناحیه بین نمودار f و محور x در $[a,b]$ ، شامل ناحیه بین نمودار های f و g در $[a,b]$ است و همچنین شامل ناحیه بین نمودار g و محور x در $[a,b]$ است. لذا حجم ناحیه سه بعدی که از دوران تمام ناحیه حول محور x ایجاد می شود ، باید مساوی مجموع حجم های دو ناحیه ایجاد شده از دوران حول محور x باشد. یعنی

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \left[\left(f(x)\right)^{۲} - \left(g(x)\right)^{۲} \right] dx \quad (۵)}$$

اگر $g \neq 0$ باشد ، روشی که برای پیدا کردن حجم ها در (۵) بکار بردیم ، به **روش واشر** موسوم است.

مثال ۵ - فرض کنید $f(x) = ۵x$ و $g(x) = x^{۲}$ باشد. فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و g در $[0,۳]$ باشد. حجم ناحیه سه بعدی که ازدوران R حول محور x ایجاد می شود پیدا کنید.





پاسخ

چون $۵x \geq x^{۲}$ است برای $0 \leq x \leq ۳$ پس بر اساس (۵) داریم.

$$V = \int_0^{۳} \pi \left(۲۵x^{۲} - x^{۴}\right) dx = \pi \left(\frac{۲۵x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۵}}{۵} \right) \Big|_0^{۳}$$

$$= \pi \left(۲۲۵ - \frac{۲۴۳}{۵} \right) = \frac{۸۸۲\, \pi}{۵}$$

تمرینات ۳.۱

در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^۲; [0, ۱]$

۲) $g(x) = \sqrt{۳ - x^۲}; \left[0, \sqrt{۳}\right]$

۳) $g(x) = \sec x; \left[-\frac{\pi}{۴}, 0\right]$

۴) $f(x) = \sqrt{x}\, e^x; [0, ۱]$

۵) $f(x) = x^{\frac{۳}{۲}}; [۱, ۴]$

۶) $g(x) = x\left(x^۳ + ۱\right)^{\frac{۱}{۴}}; [۱, ۲]$

در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور y در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

۷) $f(y) = e^y; [۱, ۲]$

۸) $f(y) = \sqrt{۱ + y^۳}; [۱, ۲]$

در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و g در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۹) $f(x) = \sqrt{x + ۱}, g(x) = \sqrt{x - ۱}; [۱, ۳]$

۱۰) $f(x) = \cos\ x + \sin$ ، $g(x) = \cos x - \sin x\,; \left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$

در تمرینات زیر ، حجم ناحیه سه بعدی ایجاد شده از دوران ناحیه بین نمودار های معادله های داده شده و محور x را پیدا کنید.

۱۱) $y = \frac{۱}{۲}x^۲ + ۳$ و $y = ۱۲ - \frac{۱}{۲}x^۲$

۱۲) $y = ۵x$ و $y = x^۲ + ۲x + ۲$

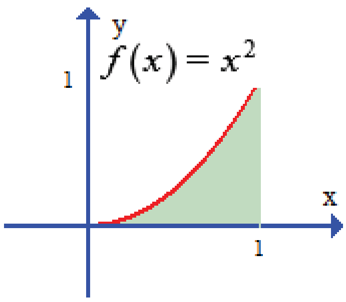
پاسخ تمرینات ۳.۱

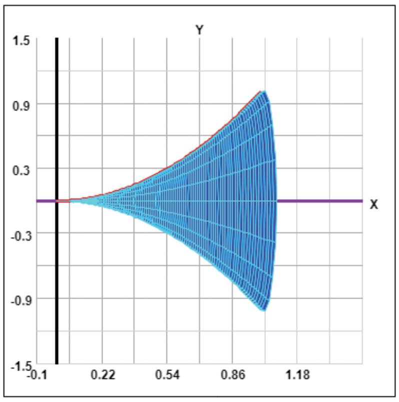
در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^۲; [0, ۱]$

$$V = \pi \int_0^۱ \left(x^۲\right)^۲ dx = \frac{\pi}{۵} x^۵ = \frac{\pi}{۵}$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.



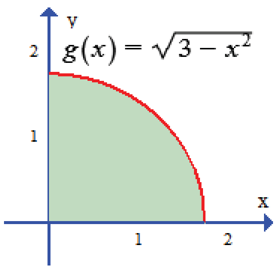


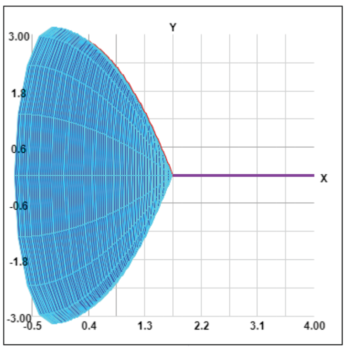
۲) $g(x) = \sqrt{۳ - x^۲};\left[0, \sqrt{۳}\right]$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{۳}} \left(\sqrt{۳ - x^۲}\right)^۲ dx = \pi \int_0^{\sqrt{۳}} \left(۳ - x^۲\right) dx = \pi \left(۳x - \frac{۱}{۳} x^۳\right)\Bigg|_0^{\sqrt{۳}}$$

$$= ۲\pi\sqrt{۳}$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.

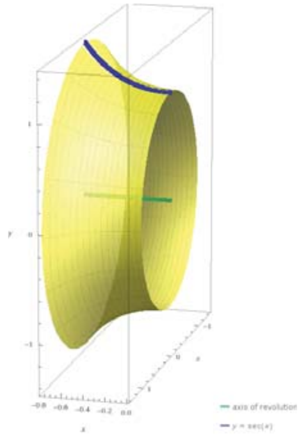


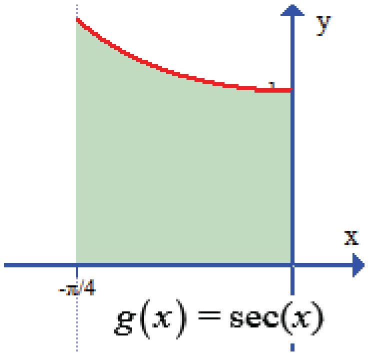


۳) $g(x) = \sec x;\left[-\frac{\pi}{۴}, 0\right]$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{0} \sec^۲ x\, dx = \pi \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{۴}}^{0} = \pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.



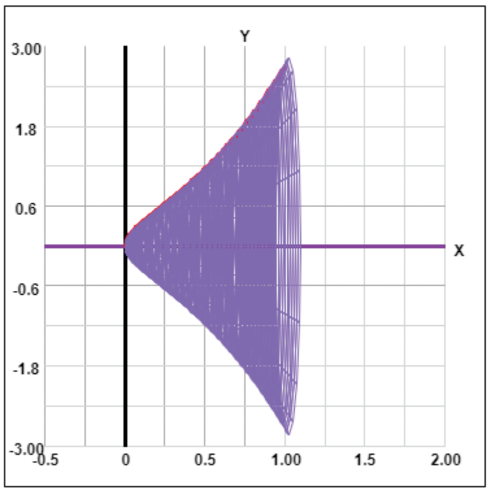


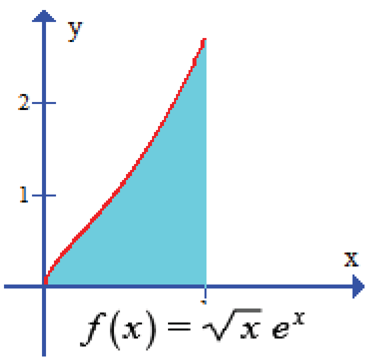
۴) $f(x) = \sqrt{x}\, e^{x}; [0,۱]$

$$V = \pi\int_0^{۱} (\sqrt{x}\;\, e^x)^{۲} dx = \pi\int_0^{۱} x\, e^{۲x}\, dx = \pi\left(\frac{۱}{۲} x\, e^{۲x}\right) - \frac{۱}{۴} e^{۲x}\Big|_0^{۱}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{۱}{۲}e^{۲} - \frac{۱}{۴}e^{۲}\right) - \left(0 - \frac{۱}{۴}\right)\right) = \frac{\pi}{۴}\left(e^{۲}+۱\right)$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.

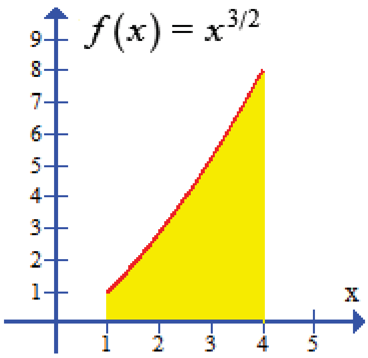


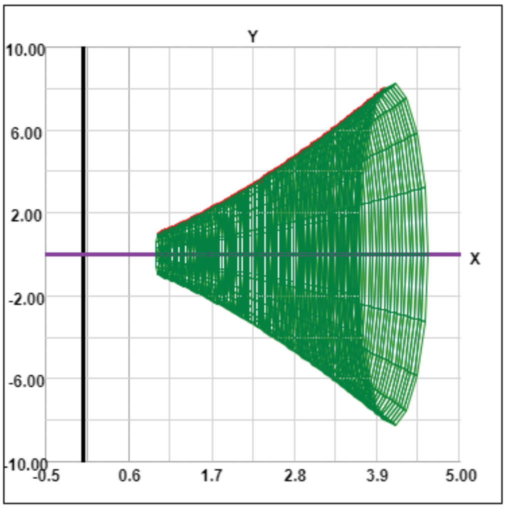


۵) $f(x) = x^{\frac{۳}{۲}}; [۱,۴]$

$$V = \pi\int_{۱}^{۴}\left(x^{\frac{۳}{۲}}\right)^{۲} dx = \pi\int_{۱}^{۴} x^{۳}dx = \frac{\pi}{۴}x^{۴}\Big|_{۱}^{۴} = \frac{\pi}{۴}(۲۵۶) - \frac{\pi}{۴} = \frac{۲۵۵}{۴}\pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.





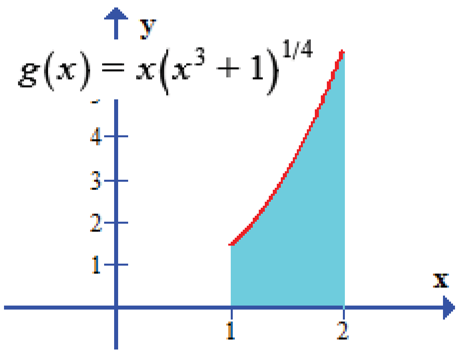
۶) $g(x) = x\left(x^{۳}+۱\right)^{\frac{۱}{۴}};[۱,۲]$

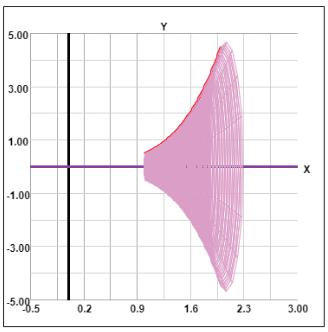
$$V=\pi\int_{۱}^{۲}\left(x\left(x^{۳}+۱\right)^{\frac{۱}{۴}}\right)^{۲}dx=\pi\int_{۱}^{۲}x^{۲}\left(x^{۳}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}}dx$$

فرض می کنیم $u = x^{۳}+۱$ باشد. پس

$$\pi\int_{۱}^{۲}x^{۲}\left(x^{۳}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}}dx=\pi\int_{۲}^{۹}u^{\frac{۱}{۲}}*\frac{۱}{۳}du=\frac{\pi}{۳}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Bigg|_{۲}^{۹}=6\pi-\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}\pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.

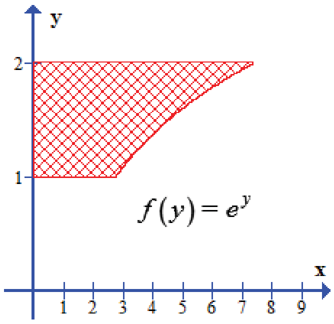


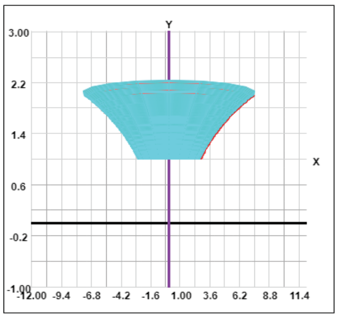


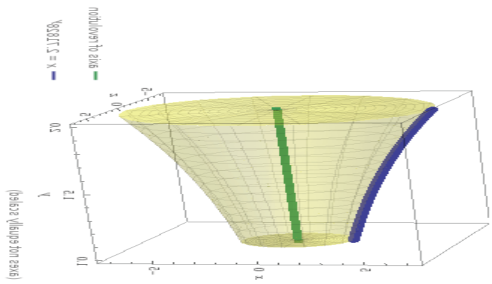
در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور y در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

۷) $f(y) = e^y ; [۱, ۲]$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست و وسط جسم سه بعدی ایجاد شده است.







$$V = \pi \int_{۱}^{۲} (e^y)^{۲} dy = \pi \int_{۱}^{۲} e^{۲y} dy = \frac{\pi}{۲} e^{۲y} \Big|_{۱}^{۲} = \frac{\pi}{۲} e^{۴} - \frac{\pi}{۲} e^{۲}$$

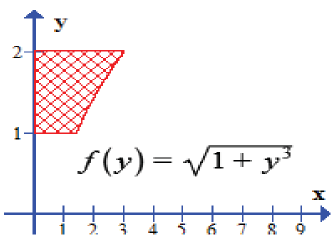
$$= \frac{\pi}{۲}\left(e^{۴} - e^{۲}\right)$$

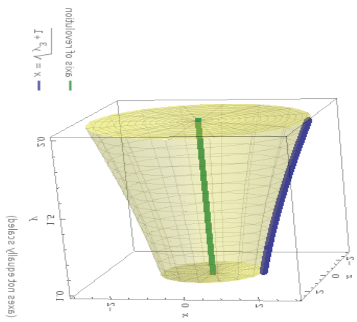
۸) $f(y) = \sqrt{۱ + y^{۳}} ; [۱, ۲]$

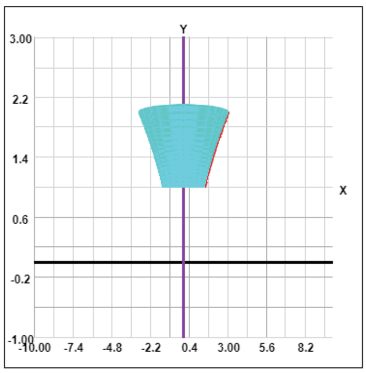
$$V = \pi \int_{۱}^{۲} \left(\sqrt{۱ + y^{۳}}\right)^{۲} dy = \pi \int_{۱}^{۲} \left(۱ + y^{۳}\right) dy = \pi \left(y + \frac{۱}{۴} y^{۴}\right) \Big|_{۱}^{۲}$$

$$= \pi \left((۲ + ۴) - \left(۱ + \frac{۱}{۴}\right) \right) = \frac{۱۹}{۴} \pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست و وسط جسم سه بعدی ایجاد شده است.







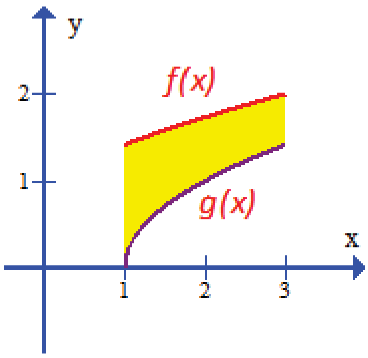
در تمرینات زیر ، فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و g در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

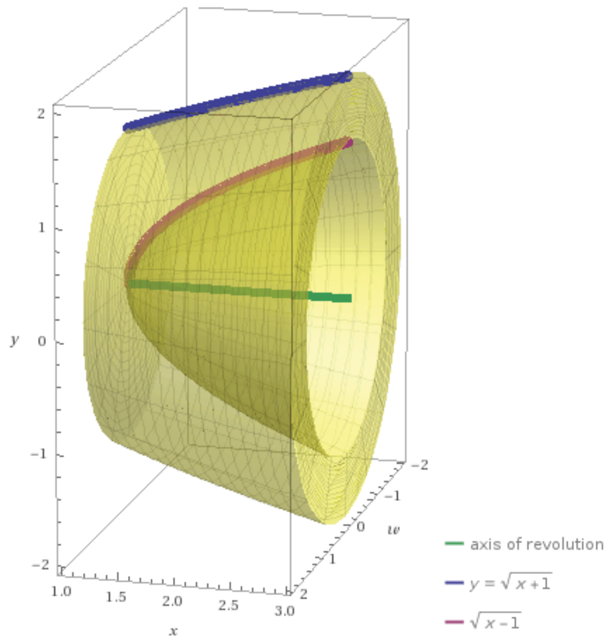
۹) $f(x) = \sqrt{x+۱}, g(x) = \sqrt{x-۱}; [۱,۳]$

$$V = \pi \int_{۱}^{۳} \left(\left(\sqrt{x+۱}\right)^{۲} - \left(\sqrt{x-۱}\right)^{۲} \right) dx$$

$$= \pi \int_{۱}^{۳} ۲x dx = ۲\, \pi\, x \Big|_{۱}^{۳} = ۴\, \pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.



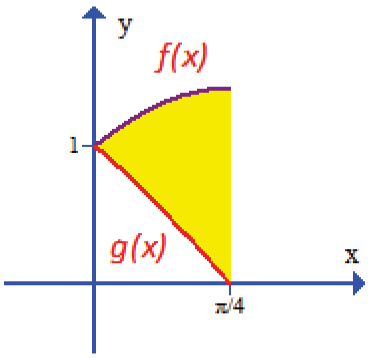


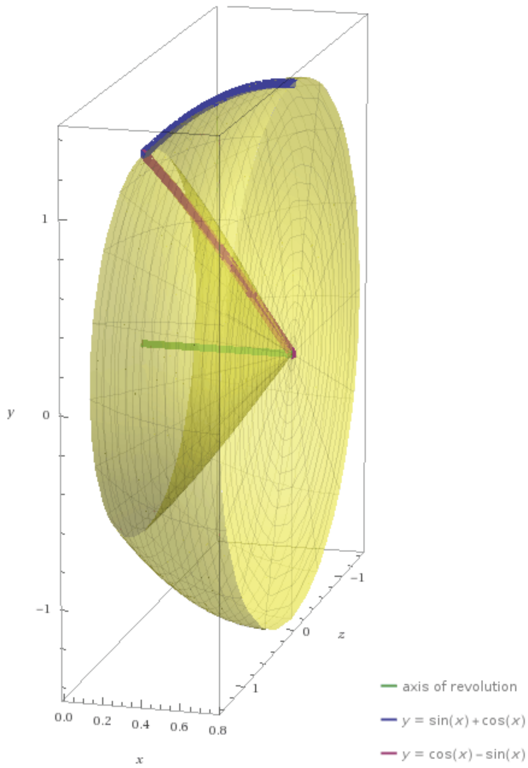
۱۰) $f(x) = \cos\ x + \sin$ ، $g(x) = \cos x - \sin x\,; \left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{۴}} \left((\cos x + \sin x)^۲ - (\cos x - \sin x)^۲ \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{۴}} (۴ \cos x \sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} ۴u\, du = ۲\ \pi\, u^۲ \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \pi$$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.





در تمرینات زیر ، حجم ناحیه سه بعدی ایجاد شده از دوران ناحیه بین نمودار های معادله های داده شده و محور x را پیدا کنید.

۱۱) $y = \frac{۱}{۲}x^۲ + ۳$ و $y = ۱۲ - \frac{۱}{۲}x^۲$

نمودار های $y = \frac{x^۲}{۲} + ۳$ و $y = ۱۲ - \frac{x^۲}{۲}$ یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند اگر

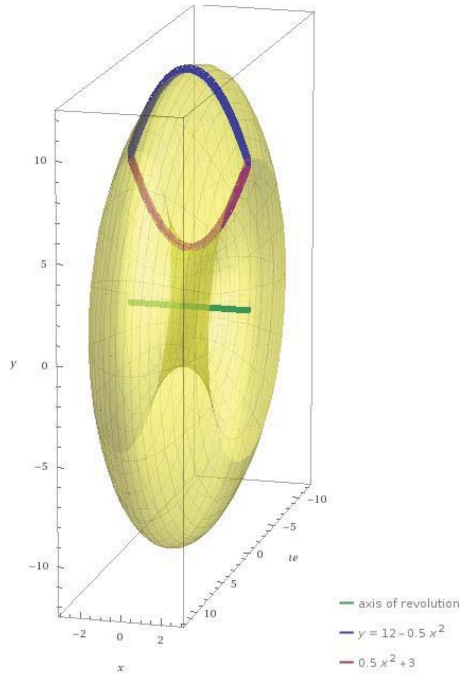
$$\frac{x^۲}{۲} + ۳ = ۱۲ - \frac{x^۲}{۲}$$

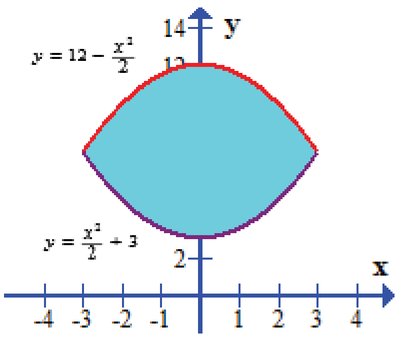
باشد ، یعنی در $x = -۳$ و $x = ۳$ و چون $\frac{x^۲}{۲} + ۳ \leq ۱۲ - \frac{x^۲}{۲}$ است برای $-۳ \leq x \leq ۳$ پس

$$V = \pi \int_{-۳}^{۳} \left(\left(۱۲ - \frac{x^۲}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{x^۲}{۲} + ۳\right)^۲ \right) dx$$

$$= \pi \int_{-۳}^{۳} \left(۱۳۵ - ۱۵x^۲\right) dx = \pi \left(۱۳۵x - ۵x^۳\right) \Big|_{-۳}^{۳} = ۵۴۰ \pi$$

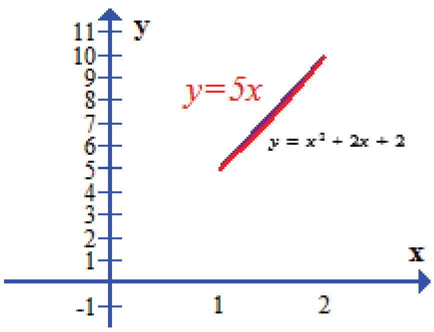
توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است.

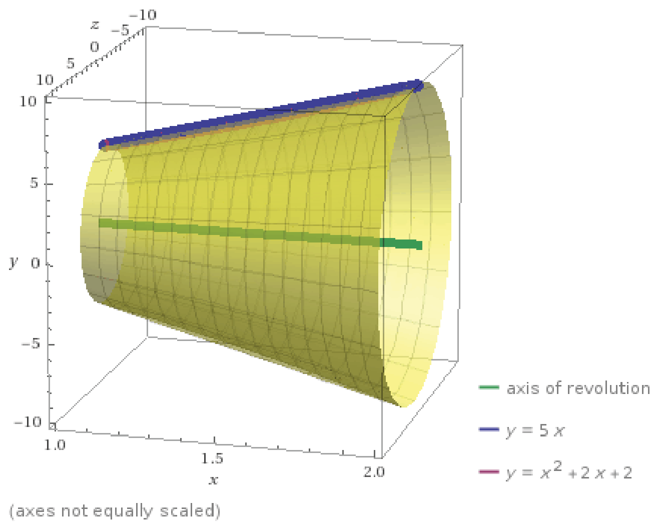




۱۲) $y = ۵x$ و $y = x^۲ + ۲x + ۲$

توجه :تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید دوران کند تا ناحیه سه بعدی ایجاد شود. تصویر سمت راست جسم سه بعدی ایجاد شده است. درتصویر سمت راست ، خط بنفش رنگ $y = ۵x$ است خط قرمز رنگ $y = x^۲ + ۲x + ۲$ است و خط سبز رنگ محور دوران که همان محور x است.





نمودار های $y = ۵x$ و $y = x^۲ + ۲x + ۲$ یک دیگر را در (x, y) قطع می کنند اگر

$$۵x = x^۲ + ۲x + ۲$$

باشد ، یعنی در $x = ۱$ یا $x = ۲$. چون $۵x \geq x^۲ + ۲x + ۲$ است برای $۱ \leq x \leq ۲$ پس داریم

$$V = \pi \int_۱^۲ \left((۵x)^۲ - \left(x^۲ + ۲x + ۲\right)^۲ \right) dx$$

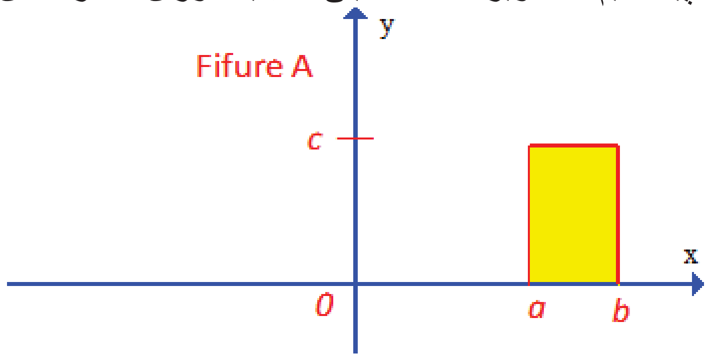
$$= \pi \int_۱^۲ \left(-x^۴ - ۴x^۳ + ۱۷x^۲ - ۸x - ۴ \right) dx$$

$$\pi \left(-\frac{۱}{۵}x^۵ - x^۴ + \frac{۱۷}{۳}x^۳ - ۴x^۲ - ۴x \right) \Bigg|_۱^۲$$

$$= \pi \left(\left(-\frac{۳۲}{۵} - ۱۶ + \frac{۱۳۶}{۳} - ۱۶ - ۸ \right) - \left(-\frac{۱}{۵} - ۱ + \frac{۱۷}{۳} - ۴ - ۴ \right) \right) = \frac{۱۷}{۱۵}\pi$$

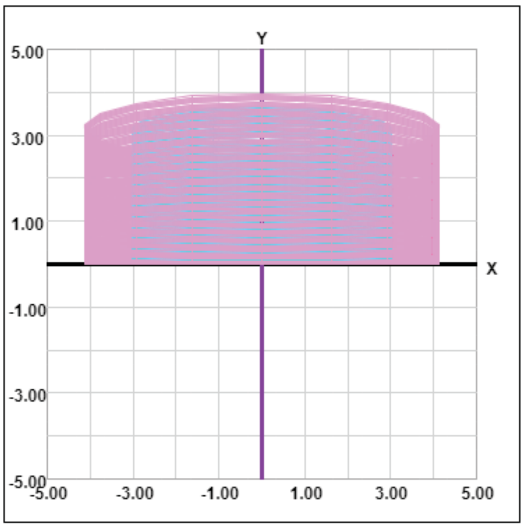
۳.۲-محاسبه حجم با روش غشای استوانه ای Volumes: The Shell Method

در بخش ۳.۱ فرمولی برای پیدا کردن حجم یک جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین نمودار های f و g حول محور x در بازه $[a,b]$ ایجاد می شد ، بدست آوردیم. می توانیم چنین ناحیه ای را حول محور y بچرخانیم و فرمولی برای محاسبه حجم چنین جسمی پیدا کنیم.
جهت شروع کار فرض کنید می خواهیم حجم پوسته یک استوانه تو خالی که ازدوران یک مستطیل حول محور y ایجاد شده را پیدا کنیم. تصویر A مستطیلی که باید داوران کند را نشان می دهد.



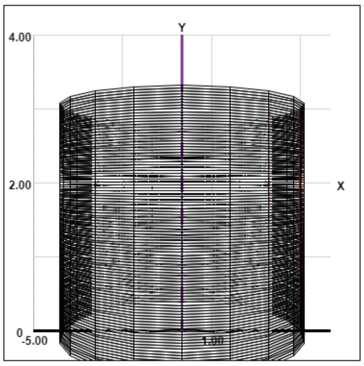
فرض کنید این مستطیل محدود است بین محور x و خط $y = c$ و خط $x = a$ و خط $x = b$ در صورتی که $b \geq a \geq 0$ و $c \geq 0$ باشد. اگر این مستطیل حول محور y دوران کند ، یک استوانه تو خالی مانند تصویر B بدست می آید. حالا می خواهیم حجم پوسته این استوانه را پیدا کنیم. یعنی قسمت صورتی‌صاف و یک دست اطراف قسمت تیره تر.

تصویر B



تصویر واضح تر ، تصویر C است. می خواهیم حجم قسمت سیاه رنگ را پیدا کنیم.

تصویر C



تصویر D نمایش استوانه است اگر از بالا به آن نگاه کنیم. محور y به صورت یک نقطه است. می خواهیم حجم قسمت آبی رنگ را پیدا کنیم.

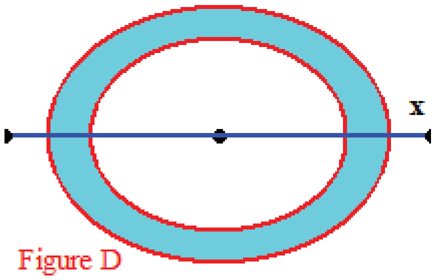


Figure D

واضح است که حجم پوسته استوانه $Cylindrical\ Shell$ مساوی است با تفاضل حجم استوانه بیرونی و حجم استوانه درونی .

$$V = \pi\, b^۲ c \;-\; \pi\, a^۲ c = \pi\, c\left(b^۲ - a^۲\right) \qquad (۱)$$

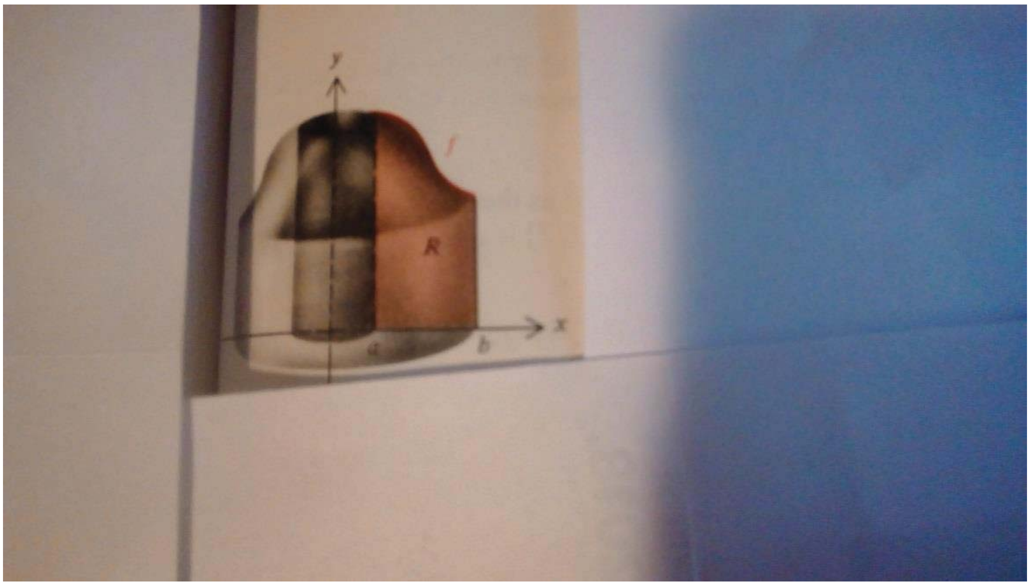
حجم استوانه داخلی − حجم استوانه بیرونی = حجم

اگر a را با $x_{k-۱}$ و b را با x_k جایگزین کنیم ، خواهیم داشت

$$V = \pi\, c\,\left(x_k^۲ - x_{k-۱}^۲\right) = \pi\, c(x_k + x_{k-۱})(x_k - x_{k-۱}) \qquad (۲)$$

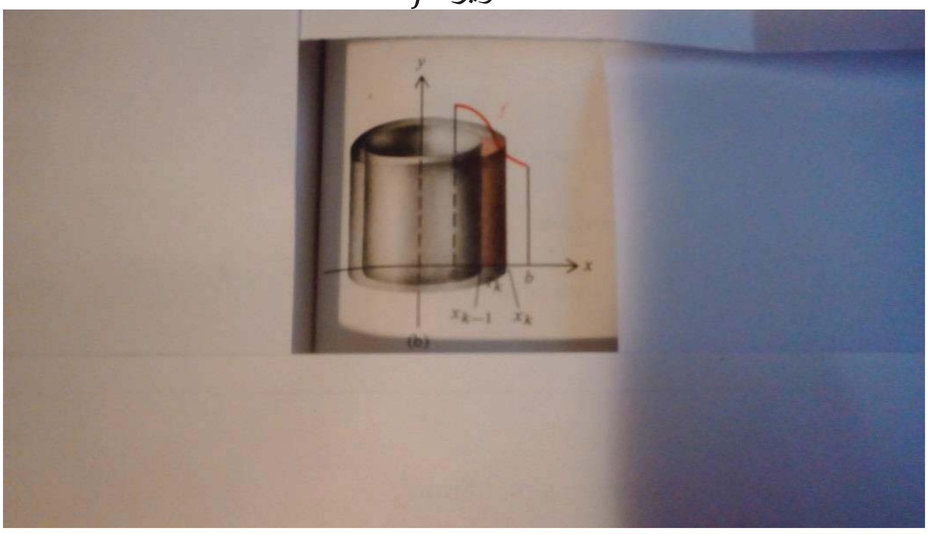
این فرمول بزودی مورد استفاده قرار می گیرد.

حال فرض کنید f یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a,b]$ است و $a \geq 0$ تصویر E
تصویر E



می خواهیم حجم جسم سه بعدی در تصویر E که از دوران ناحیه R حول محور y ایجاد می شود را تعریف کنیم. همان طور که در تصویر E ملاحظه می کنید ، ناحیه R بین نمودار f و محور x در بازه $[a,b]$ قرار دارد. فرض می کنیم $\wp = \left\{x_0, x_۱, \cdots, x_n\right\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. برای هر k بین یک و n فرض می کنیم t_k نقطه میانی بازه فرعی $\left[x_{k-۱}, x_k\right]$ باشد. یعنی $t_k = \frac{x_k + x_{k-۱}}{۲}$ است. اگر Δx_k کوچک باشد ، حجم ΔV_k آن قسمت از جسم بین خطوط دوران کرده $x = x_{k-۱}$ و $x = x_k$ ، تقریبا مساوی حجم پوسته استوانه متناظر با ارتفاع $f(t_k)$ است.
تصویر f

تصویر f



پس اگر بجای c بگذاریم $f(t_k)$ فرمول (۲) به صورت زیر می شود.

$$\Delta V_k \approx \pi\, f(t_k)(x_k + x_{k-۱})(x_k - x_{k-۱}) = ۲\,\pi\, t_k\, f(t_k)\,\Delta x_k$$

لذا حجم جسم که مجموع $\Delta V_۱, \Delta V_۲, \cdots, \Delta V_n$ است ، باید یقریبا مطابق زیر باشد.

$$\sum_{k=۱}^{n} \overbrace{۲\,\pi\, t_k}^{\text{پیرامون}} * \overbrace{f(t_k)}^{\text{ارتفاع}} * \overbrace{\Delta x_k}^{\text{ضخامت}}$$

که همان مجموع ریمانی است برای $۲\,\pi\, f$ در بازه $[a, b]$ و در نتیجه

$$V = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} ۲\,\pi\, t_k\, f(t_k)\,\Delta x_k = \int_a^b ۲\,\pi\, x\, f(x)\, dx$$

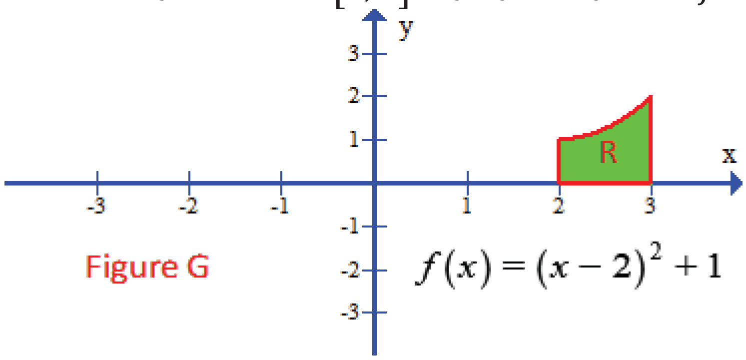
پس به تعریف زیر برای حجم می رسیم.

$$\boxed{V = \int_a^b ۲\,\pi\, x\, f(x)\, dx \qquad (۳)}$$

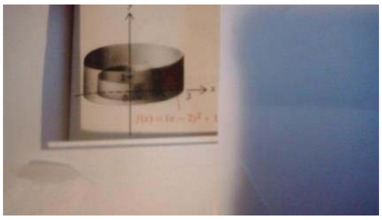
اصرار ما در مورد بکار بردن کلمه **روش شل** **Shell Method** تایید می شود.

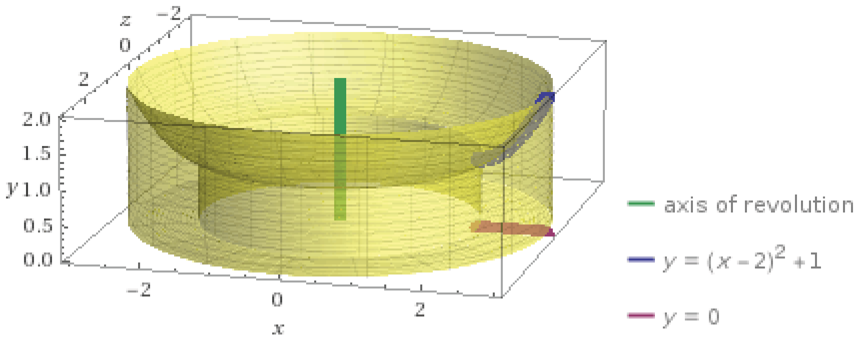
اگر نمودار حول محور x دوران کند روش دیسک Disk Method و اگر حول محور y دوران کند روش غشای استوانه ای Shell Method داریم

مثال ۱– فرض کنید $f(x) = (x - ۲)^۲ + ۱$ داشته باشیم و $۲ \le x \le ۳$ باشد. و فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه $[۲,۳]$ باشد. تصویر G



مطلوب است حجم جسم سه بعدی ایجاد شده در اثر دوران ناحیه R حول محور y. تصویر H و I





تصاویر بالا H و I هستند.

پاسخ

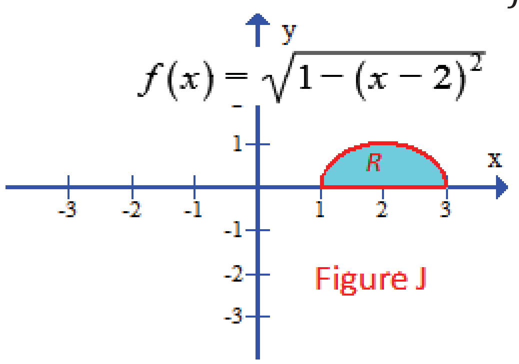
چون ارتفاع پوسته $Shell$ در هر نقطه x در بازه $[۲,۳]$ عبارت $(x - ۲)^۲ + ۱$ است ، پس بر اساس (۳) داریم.

$$V = \int_۲^۳ ۲\pi x\left[(x-۲)^۲ + ۱\right]dx = ۲\pi \int_۲^۳ \left(x^۳ - ۴x^۲ + ۵x\right)dx$$

$$= ۲\pi\left(\frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۴}{۳}x^۳ + \frac{۵}{۲}x^۲\right)\Bigg|_۲^۳$$

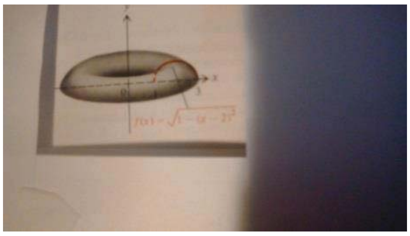
$$= ۲\pi\left[\left(\frac{۸۱}{۴} - ۳۶ + \frac{۴۵}{۲}\right) - \left(۴ - \frac{۳۲}{۳} + ۱۰\right)\right] = \frac{۴۱}{۶}\pi$$

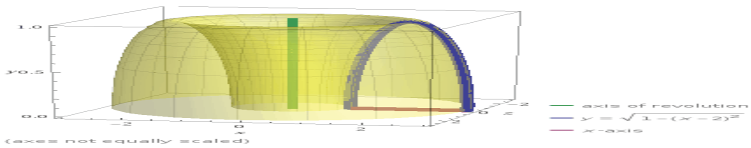
مثال ۲ فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱-(x-۲)^{۲}}$ باشد و R ناحیه بین نمودار f و محور x در بازه $[۱,۳]$ باشد. تصویر J



مطلوب است حجم ایجاد شده در اثر دوران R حول محور y. تصویر K

تصویر K





پاسخ

می توانید جسم ایجاد شده را به شکل یک نان کماچی حلقوی نیمه تصور کنید. تصویر K. چون ارتفاع این نان شیرینی در هر نقطه x در بازه $[۱,۳]$ عبارت $\sqrt{۱-(x-۲)^{۲}}$ است، پس بر اساس (۳) داریم.

$$V=\int_{۱}^{۳} ۲\pi x\sqrt{۱-(x-۲)^{۲}}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال بالا از جانشینی مثلثاتی استفاده می کنیم. فرض می کنیم $x-۲=\sin u$ باشد، پس $dx=\cos u\,du$ است.

اگر $x=۱$ باشد، پس $u=-\frac{\pi}{۲}$ است و اگر $x=۳$ باشد، پس $u=\frac{\pi}{۲}$ است. لذا

$$V=\int_{۱}^{۳} ۲\pi\ \overbrace{x\sqrt{۱-(x-۲)^{۲}}}^{(\sin u+۲)\sqrt{۱-\sin^{۲} u}}\ \overbrace{dx}^{\cos u\,du}$$

$$= ۲\,\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (\sin u + ۲) \cos u \cos u \, du$$

$$= ۲\,\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \sin u \ \cos^{۲} u \, du + ۲\,\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} ۲ \ \cos^{۲} u \, du$$

$$= ۲\,\pi \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۲} u \sin u \, du + ۲\,\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲u) du$$

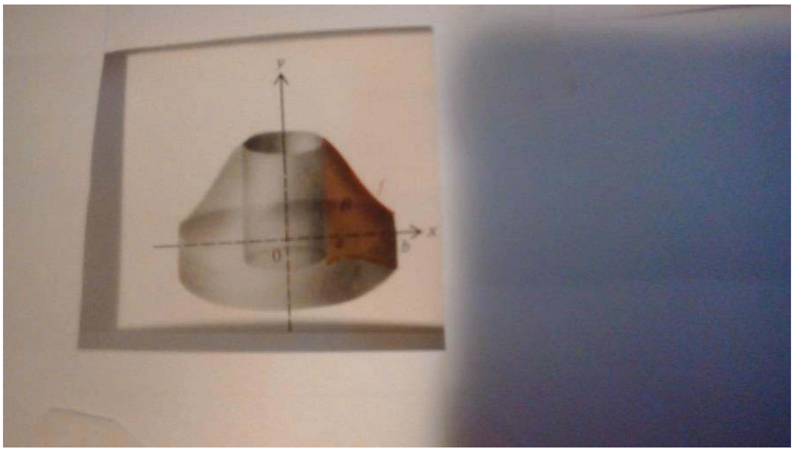
$$= ۲\,\pi \left(-\frac{۱}{۳}\cos^{۳} u\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} + ۲\,\pi \left(u + \frac{۱}{۲}\sin ۲u\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۲\,\pi^{۲}$$

در نهایت در مورد حالت مخصوص بحث می کنیم که در آن یک ناحیه بین نمودار دو تابع حول محور y دوران کند. فرض می کنیم f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند و $a \geq 0$ و فرض می کنیم

$$g(x) \leq f(x) \quad ، \quad a \leq x \leq b$$

و فرض می کنیم R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه $[a,b]$ باشد. تصویر K

تصویر K

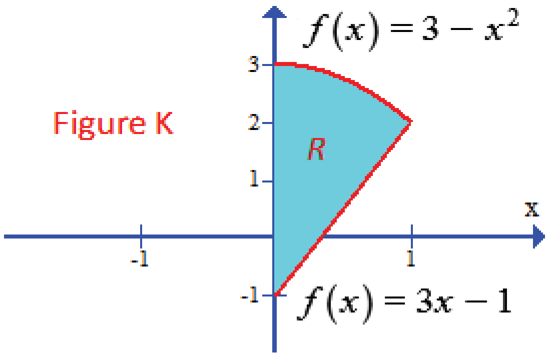


حجم جسم سه بعدی ایجاد شده در اثر دوران R حول محور y مطابق زیر است.

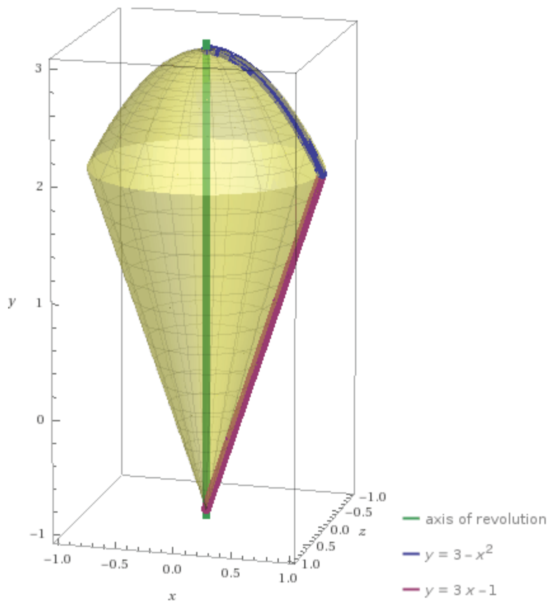
$$V = \int_a^b ۲\,\pi\, x[f(x) - g(x)]\, dx \qquad (۴)$$

فرمول شماره (۴) را برای پیدا کردن حجم یک بستنی قیفی بکار می بریم.

مثال ۳ - فرض کنید $f(x) = ۳ - x^۲$ و $g(x) = ۳x - ۱$ باشد و فرض کنید R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه $[0, ۱]$ باشد. تصویر K



مطلوب است حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y. تصویر L
تصویر L



پاسخ

چون $۳ - x^۲ \geq ۳x - ۱$ است برای $0 \leq x \leq ۱$ پس ارتفاع جسم سه بعدی در هر نقطه x در بازه $[0, ۱]$ عبارت $(۳x - ۱) - (۳ - x^۲)$ است ، لذا بر اساس (۴) داریم.

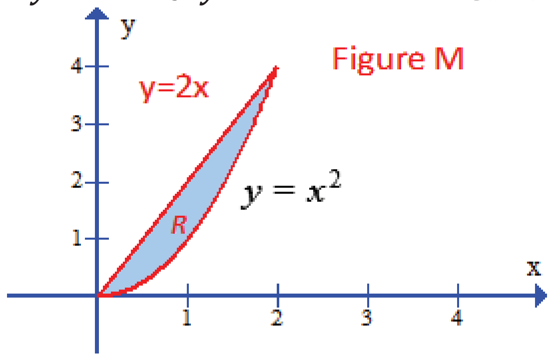
$$V = \int_0^۱ ۲\,\pi\, x\left[\left(۳ - x^۲\right) - (۳x - ۱)\right] dx$$

$$= ۲\pi \int_0^۱ \left(-x^۳ - ۳x^۲ + ۴x\right) dx = ۲\,\pi\left(-\frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ + ۲x^۲\right)\Big|_0^۱$$

$$= \frac{۳\pi}{۲}$$

حجم بعضی از اجسام که از طریق دوران ایجاد می شوند ، می توان یا با روش واشر و یا با روش شل محاسبه کرد. و نتیجه یکسان است. مثال بعدی این موضوع را نشان می دهد.

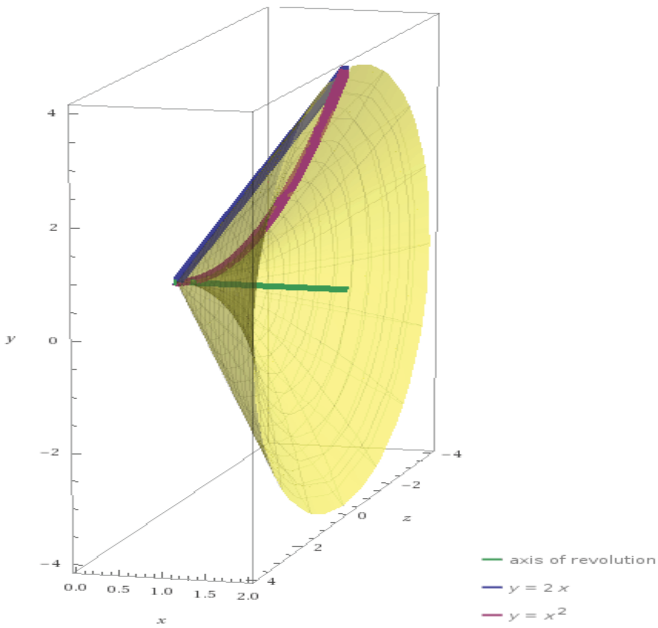
مثال ۴ - فرض کنید R ناحیه بین معادله های $y = x^{۲}$ و $y = ۲x$ است. تصویر M



مطلوب است حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از طریق دوران R حول محور x با روش های
الف – واشر
ب – شل

پاسخ
الف – برای روش واشر ، نسبت به x انتگرال می گیریم. با استفاده از (۵) بخش ۳.۱ داریم.

$$V = \int_0^{۲} \pi \left[(۲x)^{۲} - (x^{۲})^{۲} \right] dx = \pi \int_0^{۲} \left(۴x^{۲} - x^{۴} \right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{۴}{۳}x^{۳} - \frac{۱}{۵}x^{۵} \right) \Big|_0^{۲} = \pi \left(\frac{۳۲}{۳} - \frac{۳۲}{۵} \right) = \frac{۶۴\,\pi}{۱۵}$$



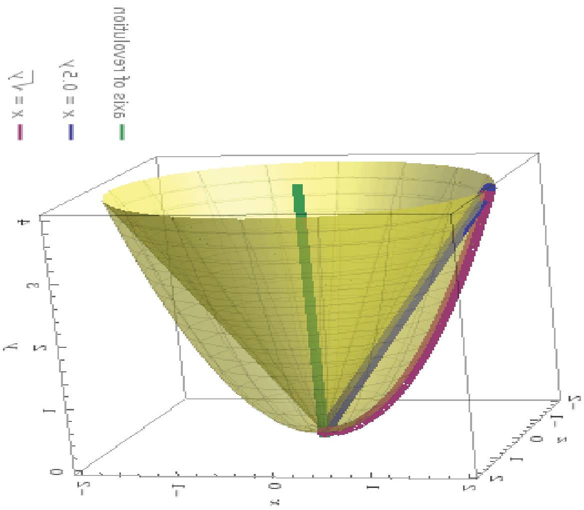
ب - برای روش شل ، با استفاده از (۴) همین بخش نسبت به y انتگرال می گیریم. پس باید جای x و y را تعویض کنیم. یعنی احتیاج به معکوس توابع $y = ۲x$ و $y = x^۲$ در $[0, ۲]$ داریم.

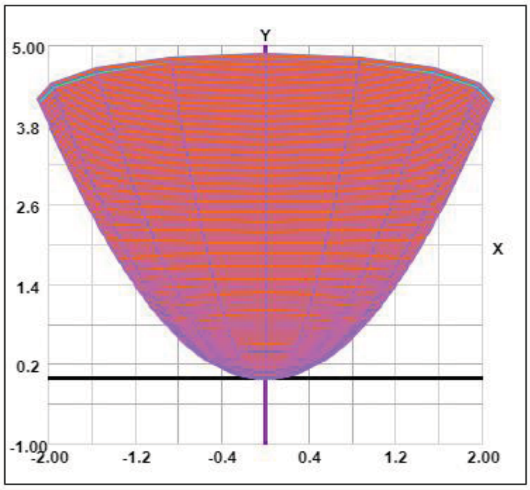
$$x = \frac{۱}{۲}y \quad \text{و} \quad x = \sqrt{y}$$

توجه داشته باشید اگر $x = 0$ باشد ، پس $y = 0$ است. و اگر $x = ۲$ باشد ، پس $y = ۴$ است. پس از صفر تا ۴ نسبت به y انتگرلل می گیریم. از طرفی $\sqrt{y} \geq \frac{۱}{۲}\,y$ است برای $0 \leq y \leq ۴$ در نتیجه

$$V = \int_0^۴ ۲\,\pi\, y\left(\sqrt{y} - \frac{۱}{۲}y\right)dy = ۲\,\pi \int_0^۴ \left(y^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲}y^۲\right)dy$$

$$= ۲\,\pi \left(\frac{۲}{۵}y^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۶}y^۳\right)\Bigg|_0^۴ = ۲\,\pi\left(\frac{۶۴}{۵} - \frac{۶۴}{۶}\right) = \frac{۶۴\,\pi}{۱۵}$$





تمرینات ۳.۲

در تمرینات زیر فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده باشد. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱}\,; \left[0, \sqrt{۳}\right]$

۲) $f(x) = e^{۲x+۱}; [0, ۱]$

۳) $f(x) = \sqrt{x - ۱}; [۱, ۲]$

۴) $g(x) = \ln x; [۱, ۳]$

در تمرینات زیر R ناحیه بین نمودار f و محور y در بازه داده شده است. با جابجا کردن نقش x و y حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۵) $f(y) = y^۲ \sqrt{۱ + y^۴}; [0, ۱]$

۶) $f(y) = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - y^۴}}; \left[0, \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$

در تمرینات زیر R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

۷) $f(x) = ۱, g(x) = x - ۲; [۱, ۳]$

۸) $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x; \left[0, \dfrac{\pi}{۴}\right]$

در تمرین زیر R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه داده شده است. hajm جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۹) $f(y) = y^۲ + ۱, g(y) = y \sqrt{۱ + y^۳}; [0, ۱]$

در تمرین زیر حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران ناحیه بین نمودار های معادله های داده شده حول محور y را پیدا کنید.

۱۰) $y = ۲x$ و $y = x^۲$

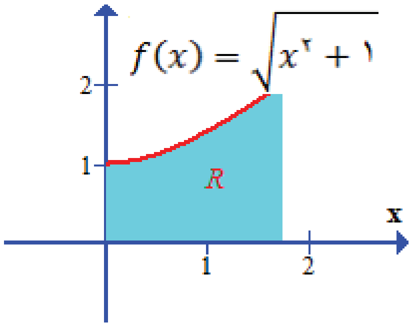
پاسخ تمرینات ۳.۲

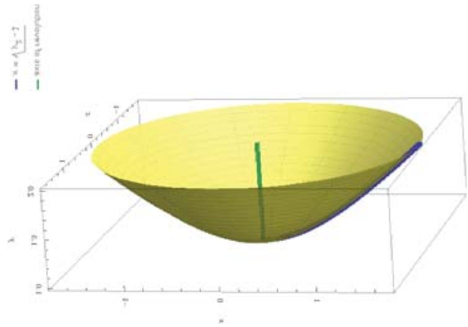
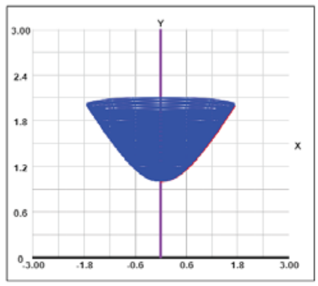
در تمرینات زیر فرض کنید R ناحیه بین نمودار تابع و محور x در بازه داده شده باشد. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}\,;\left[0,\sqrt{۳}\right]$

$$V=۲\pi\int_0^{\sqrt{۳}} x\sqrt{x^۲+۱}\,dx \overset{u=x^۲+۱}{=} \pi\int_۱^۴ u^{\frac{۱}{۲}}du=\frac{۲\pi}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۱^۴=\frac{۱۴\pi}{۳}$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر وسط و سمت راست حسم سه بعدی است.



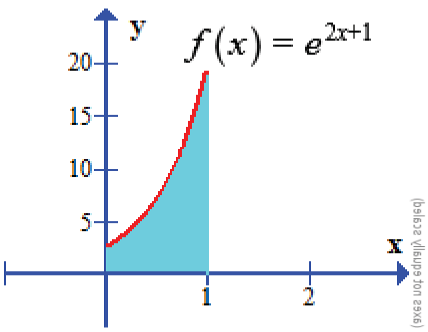



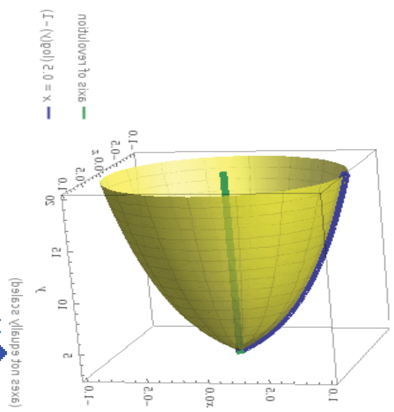
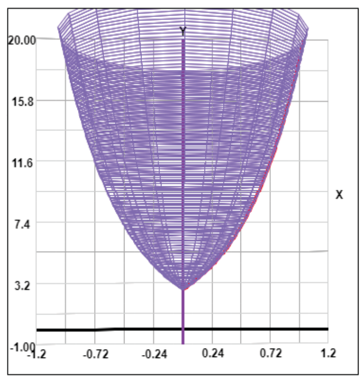
۲) $f(x)=e^{۲x+۱};[0,۱]$

$$V=۲\pi\int_0^۱ x\,e^{۲x+۱}dx=۲\pi\left(\frac{۱}{۲}xe^{۲x+۱}\Big|_0^۱-\int_0^۱\frac{۱}{۲}e^{۲x+۱}dx\right)$$

$$=۲\pi\left(\frac{۱}{۲}e^۳-\frac{۱}{۴}e^{۲x+۱}\Big|_0^۱\right)=۲\pi\left(\frac{۱}{۴}e^۳+\frac{۱}{۴}e\right)=\frac{۱}{۲}\pi\,e\left(e^۲+۱\right)$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر وسط و سمت راست حسم سه بعدی است.



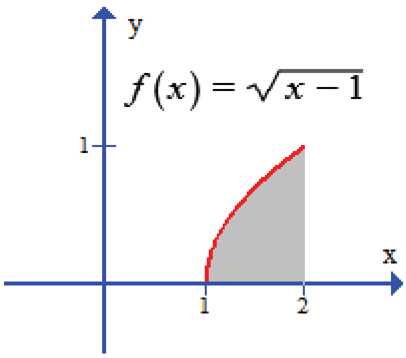



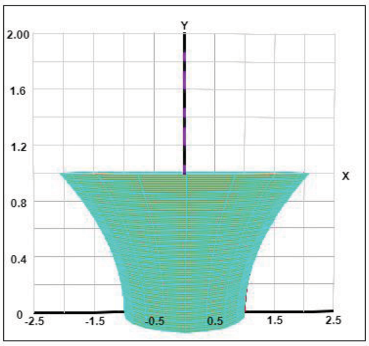
۳) $f(x)=\sqrt{x-۱};[۱,۲]$

$$V=۲\pi\int_{۱}^{۲}x\sqrt{x-۱}\,dx \overset{u=x-۱}{=} ۲\pi\int_{0}^{۱}(u+۱)u^{\frac{۱}{۲}}du$$

$$=۲\pi\int_{0}^{۱}\left(u^{\frac{۳}{۲}}+u^{\frac{۱}{۲}}\right)du=۲\pi\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}+\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_{0}^{۱}=\frac{۳۲\pi}{۱۵}$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.



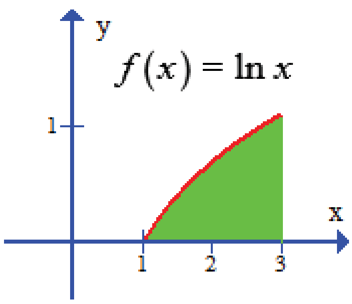


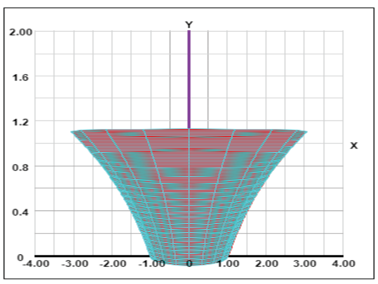
۴) $g(x)=\ln x;[۱,۳]$

$$V=۲\pi\int_{۱}^{۳}x\ln x\,dx=۲\pi\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x\right)\Big|_{۱}^{۳}-۲\pi\int_{۱}^{۳}\frac{۱}{۲}x\,dx$$

$$=۹\pi\ln ۳-\frac{\pi}{۲}x^{۲}\Big|_{۱}^{۳}=۹\pi\ln ۳-۴\pi$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





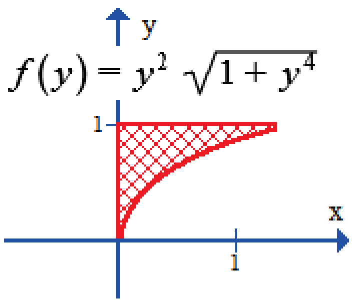
در تمرینات زیر R ناحیه بین نمودار f و محور y در بازه داده شده است. با جابجا کردن نقش x و y حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

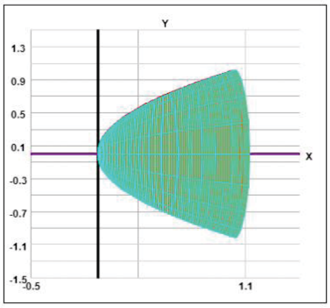
۵) $f(y) = y^{۲}\sqrt{۱ + y^{۴}}; [0, ۱]$

$$V = ۲\pi \int_0^{۱} y\left(y^{۲}\sqrt{۱ + y^{۴}}\right) dy \overset{u=۱+y^{۴}}{\cong} ۲\pi \int_{۱}^{۲} \sqrt{u} * \frac{۱}{۴} du$$

$$= ۲\pi * \frac{۱}{۴} * \frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۳}\pi\left(۲\sqrt{۲} - ۱\right)$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور x دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.



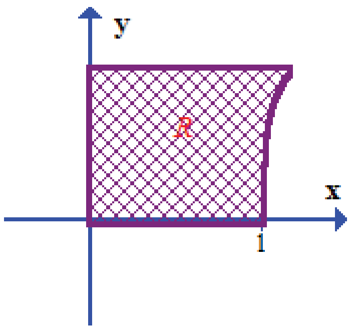


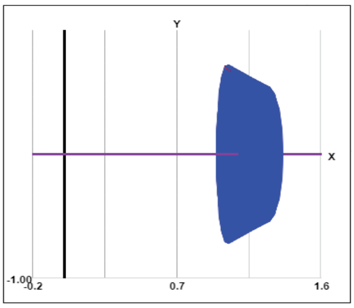
۶) $f(y) = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - y^۴}}; \left[0, \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$

$$V = ۲\pi \int_0^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{y}{\sqrt{۱ - y^۴}} dx \overset{u=y^۲}{\cong} ۲\pi \int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۱ - u^۲}} * \frac{۱}{۲} du$$

$$= \pi \arcsin u \Big|_0^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\pi^۲}{۶}$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور x دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





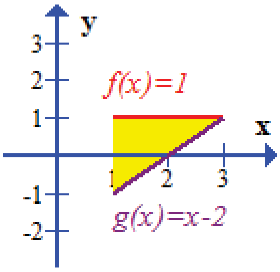
در تمرینات زیر R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور y را پیدا کنید.

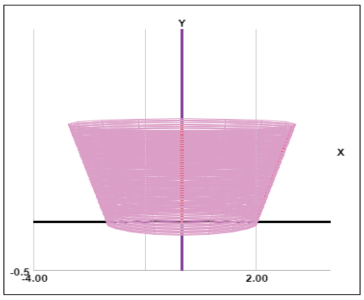
۷) $f(x) = ۱, g(x) = x - ۲; [۱,۳]$

$$V = ۲\pi \int_{۱}^{۳} x\left(۱ - (x - ۲)\right) dx = ۲\pi \int_{۱}^{۳} \left(۳x - x^{۲}\right) dx$$

$$= ۲\pi \left(\frac{۳}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۳}x^{۳}\right)\Big|_{۱}^{۳} = ۲\pi\left(\left(\frac{۲۷}{۲} - ۹\right) - \left(\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۳}\right)\right) = \frac{۲۰\pi}{۳}$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





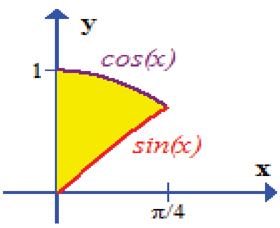
۸) $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x; \left[0, \frac{\pi}{۴}\right]$

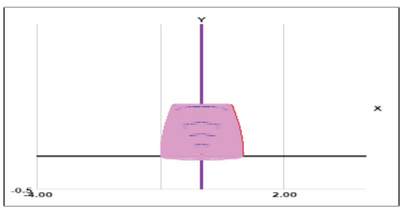
$$V = ۲\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} x(\cos x - \sin x)dx = ۲\ \pi x(\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$-۲\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x)dx = \frac{\pi^{۲}\sqrt{۲}}{۲} + ۲\pi(\cos x - \sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi^{۲} - ۲\pi$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





در تمرین زیر R ناحیه بین نمودار های f و g در بازه داده شده است. حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران R حول محور x را پیدا کنید.

۹) $$f(y)=y^{۲}+۱,\, g(y)=y\sqrt{۱+y^{۳}};[0,۱]$$

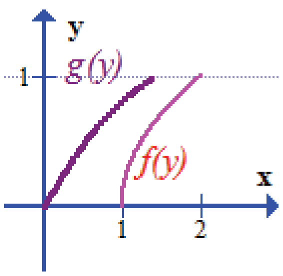
$$V=۲\pi\int_0^{۱} y\left(\left(y^{۲}+۱\right)-y\sqrt{۱+y^{۳}}\right)dy$$

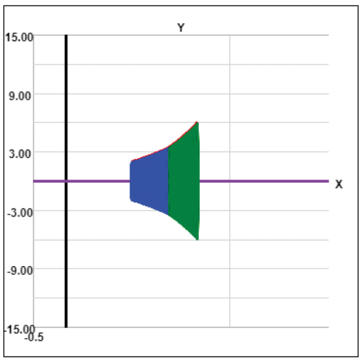
$$=۲\pi\left(\left(\frac{۱}{۴}y^{۴}+\frac{۱}{۲}y^{۲}\right)\Big|_0^{۱}-\int_0^{۱} y^{۲}\sqrt{۱+y^{۳}}\;dy\right)$$

$$\overset{u=۱+y^{۳}}{\cong}\;۲\pi\left(\frac{۳}{۴}-\int_{۱}^{۲}\sqrt{u}*\frac{۱}{۳}du\right)=۲\pi\left(\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}*\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۱}^{۲}\right)$$

$$=۲\pi\left(\frac{۳}{۴}-\frac{۴}{۹}\sqrt{۲}+\frac{۲}{۹}\right)=\frac{\pi}{۱۸}\left(۳۵=۱۶\sqrt{۲}\right)$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور x دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





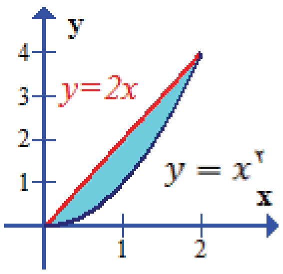
در تمرین زیر حجم جسم سه بعدی ایجاد شده از دوران ناحیه بین نمودار های معادله های داده شده حول محور y را پیدا کنید.

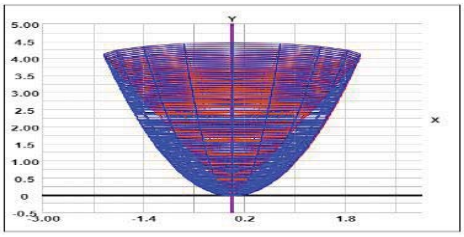
۱۰) $y = ۲x$ و $y = x^۲$

نمودار ها در (x, y) یک دیگر را قطع می کنندن اگر $۲x = y = x^۲$ باشد. یعنی در $x = 0$ یا در $x = ۲$. چون $۲x \geq x^۲$ است برای $0 \leq x \leq ۲$ پس داریم.

$$V = ۲\pi \int_0^۲ x\left(۲x - x^۲\right) dx = ۲\pi \int_0^۲ \left(۲x^۲ - x^۳\right) dx$$
$$= ۲\pi \left(\frac{۲}{۳}x^۳ - \frac{۱}{۴}x^۴\right)\Bigg|_0^۲ = ۲\pi\left(\frac{۱۶}{۳} - ۴\right) = \frac{۸\pi}{۳}$$

تصویر سمت چپ ناحیه ای است که باید حول محور y دوران کند و تصویر سمت راست حسم سه بعدی است.





۳.۳ ـ محاسبه طول منحنی بوسیله انتگرال گیری
Finding the length of a Curve by Integration

در یونان قدیم برای پیدا کردن تقریبی محیط یک دائره ، یک چند ضلعی در آن محاط می کردند و سپس محیط آن چند ضلعی را محاسبه می کردند. آنها حدس می زدند هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی را افزایش دهند. تخمین آنها به محیط حقیقی دائره نزدیک تر است. تصویر A

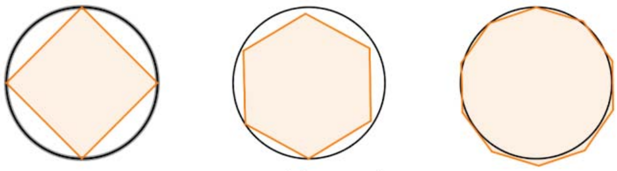
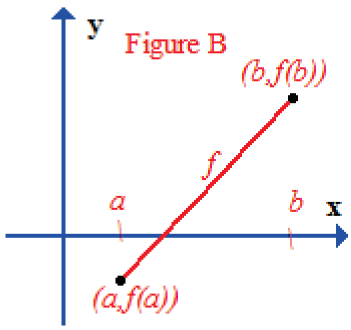


Figure A

این ایده را برای محاسبه طول بسیاری از منحنی ها بکار می بریم.
فرض می کنیم f یک مشتق پیوسته در $[a,b]$ داشته باشد. اگر f یک تابع خطی باشد ، یعنی نمودار f یک پاره خط باشد ، پس طول نمودار عبارت است از فاصله بین $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ است. یعنی

$$\mathcal{L}=\sqrt{(b-a)^{۲}+[f(b)-f(a)]^{۲}}$$

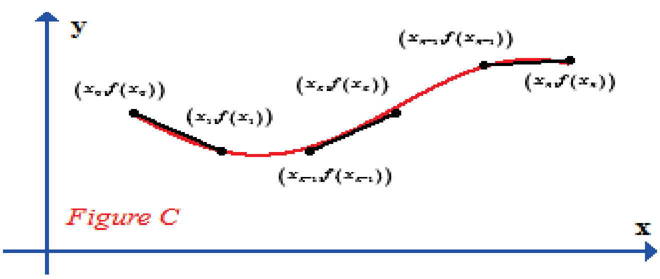
تصویر B



اگر f لزوما یک تابع خطی نباشد ، فرض می کنیم $\wp=\{x_0,x_۱,\cdots,x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. و طول نمودار f را با محاسبه طول خط چند گوشه ای ، که هر گوشه آن

$$(x_0,f(x_0)),\left(x_۱,f\left(x_۱\right)\right),\cdots,(x_n,f(x_n))$$

است ، بدست می آوریم. تصویر C



فرض می کنیم $\Delta\mathcal{L}_k$ طول آن قسمت از نمودار f باشد که $\left(x_{k-۱}, f\left(x_{k-۱}\right)\right)$ و $(x_k, f(x_k))$ را به یک دیگر متصل می کند. اگر Δx_k کوچک باشد ، $\Delta\mathcal{L}_k$ تقریبا مساوی طول پاره خطی است که $\left(x_{k-۱}, f\left(x_{k-۱}\right)\right)$ و $(x_k, f(x_k))$ را به یک دیگر متصل می کند. به عبارت دیگر

$$\Delta\mathcal{L}_k \approx \sqrt{\left(x_k - x_{k-۱}\right)^۲ + \left[f(x_k) - f\left(x_{k-۱}\right)\right]^۲} \qquad (۱)$$

قضیه مقدار مینگین هم در مورد f در بازه $[x_{k-۱}, x_k]$ صدق می کند. یعنی

$$f(x_k) - f\left(x_{k-۱}\right) = f'(t_k)\left(x_k - x_{k-۱}\right)$$

برای یک t_k در $\left(x_{k-۱}, x_k\right)$ پس شماره (۱) را می توان مطابق زیر باز نویسی کرد.

$$\Delta\mathcal{L}_k \approx \sqrt{\left(x_k - x_{k-۱}\right)^۲ + \left[f'(t_k)\left(x_k - x_{k-۱}\right)\right]^۲} = \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\left(x_k - x_{k-۱}\right)$$

لذا طول نمودار f که عبارت است از مجموع طول های $\Delta\mathcal{L}_۱, \Delta\mathcal{L}_۲, \cdots, \Delta\mathcal{L}_n$ تقریبا باید مطابق زیر باشد.

$$\sum_{k=۱}^{n} \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\,\Delta x_k$$

که یک مجموع ریمانی برای $\sqrt{۱ + (f')^۲}$ در بازه $[a, b]$ است. پس می توان گفت

$$\mathcal{L} = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\,dx$$

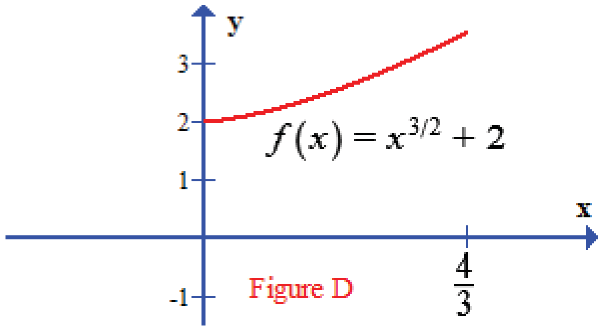
پس تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۳.۱

فرض می کنیم f در $[a, b]$ یک مشتق پیوسته داشته باشد. پس **طول** نمودار f در بازه $[a, b]$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\,dx \qquad (۲)$$

مثال ۱ ـ اگر $f(x) = x^{\frac{۳}{۲}} + ۲$ باشد برای $0 \le x \le \frac{۴}{۳}$. طول نمودار f را پیدا کنید. تصویر D



پاسخ

$$f'(x) = \frac{۳}{۲} x^{\frac{۱}{۲}}$$

پس

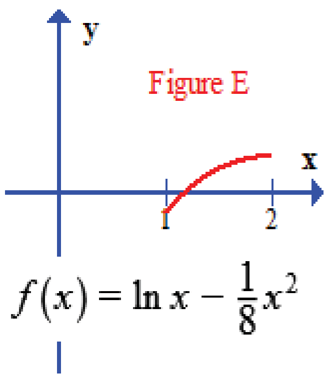
$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{۴}{۴}} \sqrt{۱ + \left(\frac{۳}{۲} x^{\frac{۱}{۲}}\right)^۲}\, dx = \int_0^{\frac{۴}{۳}} \sqrt{۱ + \frac{۹}{۴} x}\, dx$$

برای محاسبه انتگرال بالا ، فرض می کنیم $u = ۱ + \frac{۹}{۴}x$ باشد ، پس $du = \frac{۹}{۴}\, dx$ است.

اگر $x = 0$ باشد ، پس $u = ۱$ است ، و اگر $x = \frac{۴}{۳}$ باشد ، پس $u = ۴$ است.

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{۴}{۳}} \sqrt{۱ + \frac{۹}{۴} x}\, dx = \int_۱^۴ \sqrt{u} * \frac{۴}{۹}\, du = \frac{۴}{۹}\left(\frac{۲}{۳} u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Bigg|_۱^۴ = \frac{۵۶}{۲۷}$$

مثال ۲ ـ اگر $f(x) = \ln x - \frac{۱}{۸} x^۲$ باشد ، برای $۱ \le x \le ۲$. طول نمودار f را پیدا کنید. تصویر E



پاسخ

$$f'(x)=\frac{۱}{x}-\frac{x}{۴}$$

پس

$$\mathcal{L}=\int_{۱}^{۲}\sqrt{۱+\left(\frac{۱}{x}-\frac{x}{۴}\right)^{۲}}\,dx=\int_{۱}^{۲}\sqrt{۱+\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{۲}+\frac{x^{۲}}{۱۶}\right)}\,dx$$

$$=\int_{۱}^{۲}\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{۲}+\frac{x^{۲}}{۱۶}}\,dx=\int_{۱}^{۲}\sqrt{\left(\frac{۱}{x}+\frac{x}{۴}\right)^{۲}}\,dx$$

$$=\int_{۱}^{۲}\left(\frac{۱}{x}+\frac{x}{۴}\right)dx=\left(\ln x+\frac{x^{۲}}{۸}\right)\Big|_{۱}^{۲}=\ln ۲+\frac{۳}{۸}$$

در مثال ۲ ملاحظه کردید که با اضافه کردن یک به $(f'(x))^{۲}$ مربع کامل داخل رادیکال بدست آوردیم این به ما کمک کرد که نماد رادیکال را حذف کنیم و عمل انتگرال گیری را به آسانی انجام دهیم. اگر انتگرال گیری به اسانی انجام نشود ، قاعده سیمپسون به ما کمک می کند.

مثال ۳ - یک بزرگراه به طرف شمال شرق ، از عرض یک رودخانه عبور می کند. رودخانه روی محور y قرار دارد. تصویر F. برای عبور بزرگراه از روی رودخانه با زوایای مناسب ، یک منحنی در جاده ایجاد می شود. اگر

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}\ ،\ -۱\le x\le ۱$$

باشد ، پس نمودار f نمایش آن منحنی است. می خواهیم با رنگ سفید ، وسط پل را خط کشی کنیم. با استفاده از قاعده سیمپسون و $n=۴$ طول تقریبی این نوار سفید را پیدا کنید.

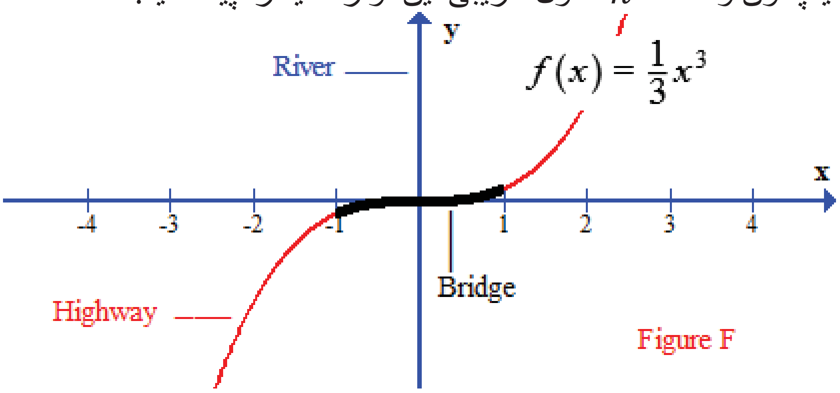


Figure F

پاسخ

چون $f'(x) = x^۲$ است ، می دانیم که

$$\mathcal{L} = \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + \left(x^۲\right)^۲}\ dx = \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}\ dx$$

انتگرال بالا را در بخش ۲.۵ مثال ۴ محاسبه کردیم و آنرا از آن بخش برای یاد اوری کپی می کنیم.

مثال ۴ مقدار تقریبی انتگرال زیر را با روش سیمپسون و $n = ۴$ پیدا کنید.

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}\ dx$$

پاسخ

$$\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + x^۴}\ dx \approx \frac{۲}{۳(۴)}\left[f(-۱) + ۴f\left(-\frac{۱}{۲}\right) + ۲f(0) + ۴f\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱)\right]$$

$$= \frac{۱}{۶}\left(\sqrt{۲} + ۴\sqrt{\frac{۱۷}{۱۶}} + ۲ * ۱ + ۴\sqrt{\frac{۱۷}{۱۶}} + \sqrt{۲}\right) \approx ۲ \,/\, ۱۷۹۱۱$$

پس $\mathcal{L} \approx ۲ \,/\, ۱۷۹۱۱$ است.

تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر طول نمودار تابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۲x + ۳ \;;\; ۱ \leq x \leq ۵$

۲) $f(x) = x^۲ - \frac{۱}{۸}\ln x \;;\; ۲ \leq x \leq ۳$

۳) $k(x) = x^۴ + \frac{۱}{۳۲x^۲} \;;\; ۱ \leq x \leq ۲$

۴) $f(x) = \ln\left(۱ + x^۲\right) - \frac{۱}{۸}\left(\frac{x^۲}{۲} + \ln x\right) \;;\; ۱ \leq x \leq ۲$

۵) $f(x) = -\frac{۱}{۴}\sin x + \ln(\sec x + \tan x)$ ؛ $\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۳}$

۶) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ + x - \frac{۱}{۴}\arctan x \qquad 0 \leq x \leq ۱$

در تمرینات زیر ، فرض کنید f تابعی است که در بازه داده شده تعریف شده باشد و دارای مشتق داده شده باشد. طول نمودار f را پیدا کنید.

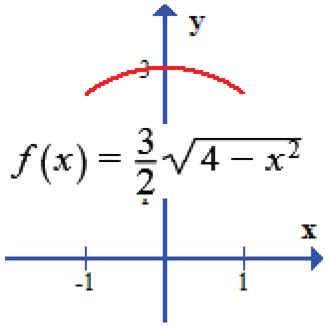
۷) $f'(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}\,; [۲, ۳]$

۸)　$f'(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱}\,; \left[\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۴}\right]$

۹)　$f'(x) = \sqrt{\sqrt{x} - ۱}; [۲۵, ۱۰۰]$

با استفاده از قاعده سیمپسون و $n = ۲$ طول کمان بیضوی زیر را تخمین بزنید.

۱۰)　$f(x) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۴ - x^۲}؛ -۱ \leq x \leq ۱$



پاسخ تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر طول نمودار تابع داده شده را پیدا کنید.

۱)　$f(x) = ۲x + ۳ \; ; \; ۱ \leq x \leq ۵$

$$f'(x) = ۲$$

$$\mathcal{L} = \int_۱^۵ \sqrt{۱ + (۲)^۲}\, dx = \int_۱^۵ \sqrt{۵}\, dx = ۴\sqrt{۵}$$

۲)　$f(x) = x^۲ - \frac{۱}{۸}\ln x \;\; ; \;\; ۲ \leq x \leq ۳$

$$f'(x) = ۲x - \frac{۱}{۸x}$$

$$\mathcal{L} = \int_۲^۳ \sqrt{۱ + \left(۲x - \frac{۱}{۸x}\right)^۲}\, dx = \int_۲^۳ \sqrt{۱ + ۴x^۲ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶۴x^۲}}\, dx$$

$$= \int_{۲}^{۳} \sqrt{\left(۲x + \frac{۱}{۸x}\right)^{۲}}\, dx = \int_{۲}^{۳} \left(۲x + \frac{۱}{۸x}\right) dx = \left(x^{۲} + \frac{۱}{۸}\ln|x|\right)\Big|_{۲}^{۳}$$

$$= ۵ + \frac{۱}{۸}\ln\frac{۳}{۲}$$

۳) $k(x) = x^{۴} + \frac{۱}{۳۲x^{۲}} \quad ; \quad ۱ \leq x \leq ۲$

$$k'(x) = ۴x^{۳} - \frac{۱}{۱۶x^{۳}}$$

$$\mathcal{L} = \int_{۱}^{۲} \sqrt{۱ + \left(۴x^{۳} - \frac{۱}{۱۶x^{۳}}\right)^{۲}}\, dx = \int_{۱}^{۲} \sqrt{۱ + ۱۶x^{۶} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲۵۶x^{۶}}}\, dx$$

$$= \int_{۱}^{۲} \sqrt{\left(۴x^{۳} + \frac{۱}{۱۶x^{۳}}\right)^{۲}}\, dx = \int_{۱}^{۲} \left(۴x^{۳} + \frac{۱}{۱۶x^{۳}}\right) dx$$

$$= \left(x^{۴} - \frac{۱}{۱۲x^{۲}}\right)\Big|_{۱}^{۲} = \left(۱۶ - \frac{۱}{۱۲۸}\right) - \left(۱ - \frac{۱}{۳۲}\right) = \frac{۱۹۲۳}{۱۲۸}$$

۴) $f(x) = \ln\left(۱ + x^{۲}\right) - \frac{۱}{۸}\left(\frac{x^{۲}}{۲} + \ln x\right) \quad ; \quad ۱ \leq x \leq ۲$

$$f'(x) = \frac{۲x}{۱ + x^{۲}} - \frac{۱}{۸}\left(x + \frac{۱}{x}\right)$$

$$\mathcal{L} = \int_{۱}^{۲} \sqrt{۱ + \left(\frac{۲x}{۱ + x^{۲}} - \frac{۱}{۸}\left(x + \frac{۱}{x}\right)\right)^{۲}}\, dx$$

$$= \int_{۱}^{۲} \sqrt{۱ + \frac{۴x^{۲}}{\left(۱ + x^{۲}\right)^{۲}} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶۴}\frac{\left(۱ + x^{۲}\right)^{۲}}{x^{۲}}}\, dx$$

$$= \int_{۱}^{۲} \sqrt{\left(\frac{۲x}{۱ + x^{۲}} + \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱ + x^{۲}}{x}\right)\right)^{۲}}\, dx = \int_{۱}^{۲} \left(\frac{۲x}{۱ + x^{۲}} + \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{x} + x\right)\right) dx$$

$$= \left(\ln\left(۱ + x^{۲}\right) + \frac{۱}{۸}\left(\ln|x| + \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\right)\Bigg|_{۱}^{۲}$$

$$= \left(\ln ۵ + \frac{۱}{۸}\ln ۲ + \frac{۱}{۴}\right) - \left(\ln ۲ + \frac{۱}{۱۶}\right) = \ln ۵ - \frac{۷}{۸}\ln ۲ + \frac{۳}{۱۶}$$

۵) $f(x) = -\frac{۱}{۴}\sin x + \ln(\sec x + \tan x)$ ؛ $\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۳}$

$$f'(x) = -\frac{۱}{۴}\cos x + \sec x$$

$$\mathcal{L} = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \sqrt{۱ + \left(-\frac{۱}{۴}\cos x + \sec x\right)^{۲}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \sqrt{۱ + \frac{۱}{۱۶}\cos^{۲} x - \frac{۱}{۲} + \sec^{۲} x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \sqrt{\left(\frac{۱}{۴}\cos x + \sec x\right)^{۲}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \left(\frac{۱}{۴}\cos x + \sec x\right) dx = \left(\frac{۱}{۴}\sin x + \ln|\sec x + \tan x|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= \left(\frac{۱}{۸}\sqrt{۳} + \ln\left(۲ + \sqrt{۳}\right)\right) - \left(\frac{۱}{۸}\sqrt{۲} + \ln\left(\sqrt{۲} + ۱\right)\right)$$

$$= \frac{۱}{۸}\left(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}\right) + \ln\frac{۲ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} + ۱}$$

۶) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} + x - \frac{۱}{۴}\arctan x \qquad 0 \le x \le ۱$

$$f'(x) = x^{۲} + ۱ - \frac{۱}{۴\left(۱ + x^{۲}\right)}$$

$$\mathcal{L}=\int_0^{۱}\sqrt{۱+\left(x^{۲}+۱-\frac{۱}{۴(۱+x^{۲})}\right)^{۲}}\,dx$$

$$=\int_0^{۱}\sqrt{۱+(x^{۲}+۱)^{۲}-\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۴(۱+x^{۲})}\right)^{۲}}\,dx$$

$$=\int_0^{۱}\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۲}+\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۴(۱+x^{۲})}\right)^{۲}}\,dx$$

$$=\int_0^{۱}\sqrt{\left(x^{۲}+۱+\frac{۱}{۴(۱+x^{۲})}\right)^{۲}}\,dx=\int_0^{۱}\left(x^{۲}+۱+\frac{۱}{۴(۱+x^{۲})}\right)dx$$

$$=\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}+x+\frac{۱}{۴}\arctan x\right)\Big|_0^{۱}=\frac{۴}{۳}+\frac{\pi}{۱۶}$$

در تمرینات زیر ، فرض کنید f تابعی است که در بازه داده شده تعریف شده باشد و دارای مشتق داده شده باشد. طول نمودار f را پیدا کنید.

۷) $f'(x)=\sqrt{x^{۲}-۱}\,;[۲,۳]$

$$\mathcal{L}=\int_{۲}^{۳}\sqrt{۱+\left(\sqrt{x^{۲}-۱}\right)^{۲}}\,dx=\int_{۲}^{۳}\sqrt{x^{۲}}dx=\int_{۲}^{۳}xdx$$

$$=\frac{۱}{x}x^{۲}\Big|_{۲}^{۳}=\frac{۵}{۲}$$

۸) $f'(x)=\sqrt{\tan^{۲}x-۱}\,;\left[\frac{۲\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۴}\right]$

$$\mathcal{L}=\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۳\pi}{۴}}\sqrt{۱+\left(\sqrt{\tan^{۲}x-۱}\right)^{۲}}\,dx=\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۳\pi}{۴}}|\tan x|dx$$

$$= \int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۳\pi}{۴}} -\tan x dx = \ln|\cos x| \Big|_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۳\pi}{۴}} = \ln\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \ln\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\ln ۲$$

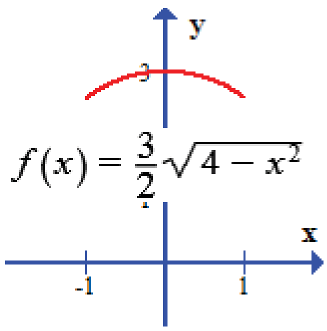
۹) $f'(x) = \sqrt{\sqrt{x} - ۱}; [۲۵, ۱۰۰]$

$$\mathcal{L} = \int_{۲۵}^{۱۰۰} \sqrt{۱ + \left(\sqrt{\sqrt{x} - ۱}\right)^۲}\, dx = \int_{۲۵}^{۱۰۰} x^{\frac{۱}{۴}} dx$$

$$= \frac{۴}{۵} x^{\frac{۵}{۴}} \Big|_{۲۵}^{۱۰۰} = \frac{۴}{۵}\left(۱۰^{\frac{۵}{۲}} - ۵^{\frac{۵}{۲}}\right)$$

با استفاده از قاعده سیمپسون و $n = ۲$ طول کمان بیضوی زیر را تخمین بزنید.

۱۰) $f(x) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۴ - x^۲}؛ -۱ \leq x \leq ۱$



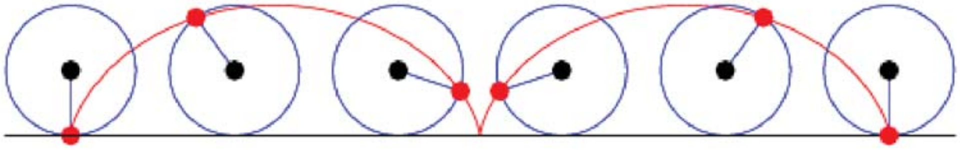
$$\mathcal{L} = \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + \left(\frac{-۳x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}}\right)^۲}\, dx = \int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱ + \frac{۹x^۲}{۴(۴ - x^۲)}}\, dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱۶ + ۵x^۲}{۴ - x^۲}}\, dx \approx \frac{۱}{۶}\left(\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۴} + \sqrt{۷}\right) = \frac{۱}{۳}\left(\sqrt{۷} + ۴\right)$$

$$\approx ۲ / ۲۱۵۲۵$$

۳.۴ - محا سبه طول منحنی های معادلات پارا متری
Lengths of Curves Defined Parametrically

منحنی هایی که تا کنون مورد بحث قرار داده ایم ، نمودار یک تابع و یا یک معادله بوده اند.



اما یک سیکلویید در نظر بگیرید ، تصویر بالا. یک نقطه روی یک دائره تصورکنید ،اگر این دائره در امتداد یک خط مستقیم حرکت کند نموداری که این نقطه روی صفحه ایجاد می کند ، سیکلویید می نامند . گرچه می توان یک سیکلو یید را بوسیله نمودار یک تابع نشان داد ، اما راه دیگری برای نشان دادن منحنی ها وجود دارد بنام نمایش پارا متری . این بخش اختصاص دارد به نمایش پارامتری منحنی ها و محاسبه طول این منحنی ها.

فرض کنید یک ذره $Particle$ درامتداد یک منحنی بنام C در صفحه مختصات حرکت می کند. پس مختصات x و y این نقطه یا ذره روی منحنی ، تابع زمان هستند . مختصات این نقطه را (x, y) زمان را t می نامیم. فرض می کنیم دو تابع f و g که در بازه I پیوسته هستند ، وجود دارند ، بطوری که منحنی C شامل کلیه نقاط (x, y) است ، بطوری که

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad , t \in I \quad (۱)$$

در چنین حالتی ، معادله های (۱) را **معادله های پارا متری** C می نامند. و میگوئیم C **پارا متری شده بوسیله** معادله های (۱). و t پارا متر C است.

برای $a \le t \le b$ می نویسیم

$$P(t) = \big(f(t), g(t)\big)$$

مثال ۱--منحنی C را که با معادلات پارا متری زیر نشان داده شده است توصیف کنید.

$$x = r\cos t \text{ و } y = r\sin t \text{ ، } 0 \le t \le ۲\pi$$

پاسخ

نشان می دهیم برای $0 \le t \le ۲\pi$ تابع $P(t)$ روی دائره $x^۲ + y^۲ = r^۲$ قرار دارد. برای این کار ، هر دو طرف معادله های داده شده را به توان ۲ میرسانیم. و با هم جمع می کنیم.

$$x^۲ + y^۲ = (r\cos t)^۲ + (r\sin t)^۲ = r^۲\left(\cos^۲ t + \sin^۲ t\right) = r^۲$$

بنا بر این نقاطی که معادله های داده شده را بر قرار می کنند ، تساوی $x^۲ + y^۲ = r^۲$ را هم بر قرار می کنند. پس این نقاط روی دائره نامبرده قرار دارند. هنگامی که t افزایش پیدا می کند ، نقطه $P(t)$ درامتداد دائره حرکت می کند. مختصات چند نقطه عبارتند از

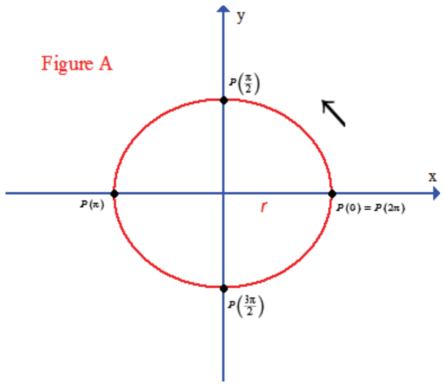
$$P(0) = (r, 0) \text{ ، } P\left(\frac{\pi}{۲}\right) = (0, r) \text{ ، } P(\pi) = (-r, 0)\ , P\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = (0, -r), P(۲\pi) = (r, 0)$$

در نتیجه C دائره $x^۲ + y^۲ = r^۲$ است ، که دقیقا یک مرتبه خلاف جهت عقربه ساعت پیموده می شود . تصویر A

معادله های پارا متری

$$x = r\cos t \text{ و } y = r\sin t \text{ ، } 0 \le t \le ۴\pi$$

همان دائره مثال ۱ است ، اما دراین حالت مسیردائره دو مرتبه طی می شود.



مثال ۲ - منحنی C را که مطابق معادله های زیر پارا متری شده ، رسم کنید.

برای تمام مقادیر t $\quad x = ۱ - ۲t$ و $y = -۳ + ۴t$

و مشخص کنید هنگامی که t افزایش می یابد ، $P(t)$ در کدام جهت C را می پیماید.

پاسخ

مانند مثال ۱ ملاحظه می شود که یک معادله بر حسب x و y که شامل t نباشد ، وجود ندارد. برای بدست آوردن یک معادله بر حسب x و y که شامل t نباشد ، معادله اول را برای t حل می کنیم.

$$t = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}x$$

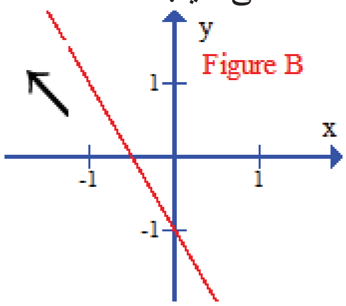
حالا این مقدار بدست آمده برای t در معادله پارا متری دوم می گذاریم.

$$y = -۳ + ۴\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}x\right)$$

$$y = -۱ - ۲x \qquad (۲)$$

پس یک نقطه (x, y) روی C روی خط مستقیم معادله (۲) قرار دارد. این خط دارای شیب -۲ است و در -۱ـمحور y را قطع می کند. تصویر B.

از معادله های پارا متری داده شده ملاحظه می شود که $P(0) = (۱, -۳)$ و $P(۱) = (-۱, ۱)$ است. بنا بر این هنگامی که t افزایش می یابد ، $P(t)$ روی C به طرف بالا و سمت چپ حرکت می کند. همان طور که در تصویر B ملاحظه می کنید.



بطور کلی هر مجموعه معادله های پارا متری به شکل زیر ، نمایانگر یک خط مستقیم است.

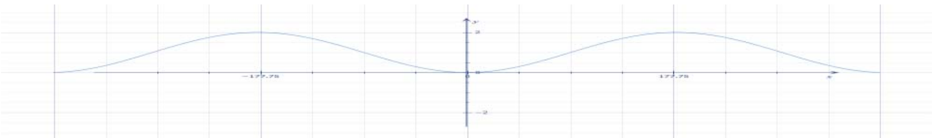
$$x = a + bt \text{ و } y = c + dt \text{ ، } b \neq 0 \text{ ، } d \neq 0 \quad (۳)$$

حالا بر می گردیم به سیکلویید که در ابتدای این بخش از آن نام بردیم. اگر یک دائره به شعاع r در جهت مثبت محور x بلغزد ، منحنی ایجاد شده بوسیله یک نقطه P که روی دائره قرار دارد ، سیکلویید می نامند. تصویر ابتدای این بخش.

اگر در زمان $t = 0$ نقطه P روی مبدا قرار داشته باشد ، پس مختصات x و y این نقطه طبق معادله های زیر است.

$$x = r(t - \sin t) \text{ و } y = r(۱ - \cos t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

تصویر C



توجه داشته باشید که y یک تابع تناوبی t است ، با دره تناوب ۲π .تصویر C بالا.

اگر g یک تابع باشد ، منحنی C که مطابق زیر پارا متری شده

$$x = t \text{ و } y = g(t)$$

نمودار g است. پس نمودار هر تابعی می تواند پارا متری بشود.

طول یک منحنی که به صورت پارا متری داده شده است.
Length of a Curve given Parametrically

فرض می کنیم یک منحنی C توسط فرمول های زیر پارا متری شده است.

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad \text{برای} \quad a \leq t \leq b$$

و فرض می کنیم f و g در $[a,b]$ مشتق های پیوسته داشته باشند. روش پیدا کردن فرمول طول C عیناً مانند روش پیدا کردن فرمو ل طول یک نمودار در بخش ۳.۳ تعریف ۳.۱ است.

فرض می کنیم $\wp = \{t_0, t_۱, \cdots, t_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد ، وبرای $۱ \leq k \leq n$ فرض می کنیم $(x_k, y_k) = (f(t_k), g(t_k))$ نقاط متناظر روی C باشند، تصویر D

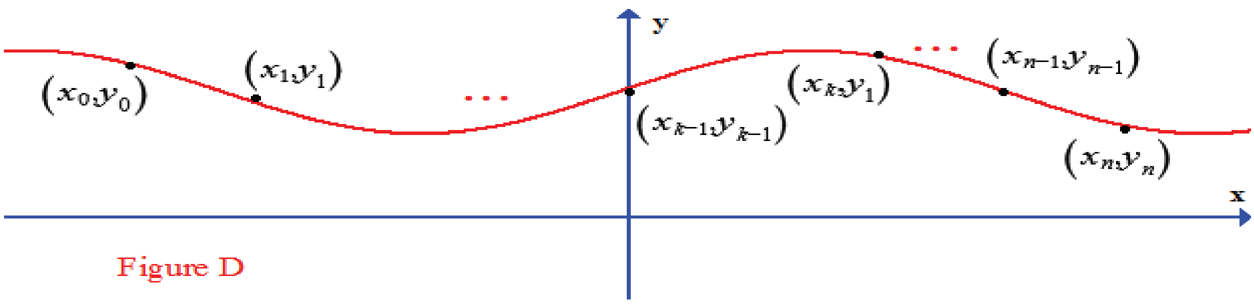


Figure D

فرض می کنیم $\Delta\mathcal{L}_k$ طول آن قسمت از منحنی باشد که نقاط (x_{k-1}, y_{k-1}) و (x_k, y_k) را به هم متصل می کند. اگر Δx_k کوچک باشد ، $\Delta\mathcal{L}_k$ تقریبا مساوی طول پاره خطی است که نقاط (x_{k-1}, y_{k-1}) و (x_k, y_k) به هم متصل می کند. به عبارت دیگر

$$\Delta\mathcal{L}\mathcal{L}_k \approx \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$
$$= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

بر اساس قضیه مقدار میانگین ، اعدادی مانند t_k' و t_k'' در $[t_{k-1}, t_k]$ وجود دارند بطوری که

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k')\Delta t_k \quad و \quad g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k'')\Delta t_k$$

است. پس طول تمام نمودار منحنی ، که مساوی است با مجموع $\Delta\mathcal{L}_1, \Delta\mathcal{L}_2, \cdots, \Delta\mathcal{L}_n$ باید تقریبا

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k')]^2 + [g'(t_k'')]^2}\, \Delta t_k$$

اگر چه فرمول بالا یک مجموع ریمانی نیست ، زیرا t_k' و t_k'' دو عدد متفاوت هستند ، اما نزدیک به یک مجموع ریمانی است. به علاوه می توان گفت

$$\lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k')]^2 + [g'(t_k'')]^2}\, \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

پس منطقی به نظر می رسد که طول منحنی C را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \qquad (4)}$$

توجه داشته باشید اگر C
مطابق زیر پارا متری شده باشد

$$x = t \quad و \quad y = g(t) \quad \text{برای} \quad a \le t \le b$$

پس فرمول (4) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [g'(t)]^2}\, dt$$

که معادل فرمول (2) بخش ۳.۳ است که بجای f تابع g بکار رفته است.

مثال ۳ ـ مطلوب است محیط دائره با شعاع r که مرکز آن روی مبدا مختصات قرار دارد و مطابق زیر پارا متری شده است.

$$x = r\cos t \quad و \quad y = r\sin t \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

پاسخ

چون

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

پس

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\ dt$$

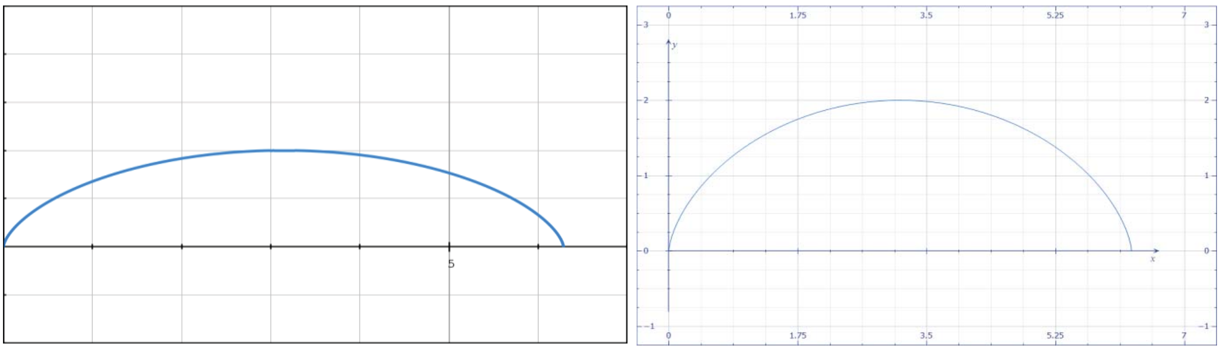
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\int_0^{2\pi} 1\ dt = rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

این همان فرمول محیط دائره است که در هندسه خوانده ایم.

مثال ۲ ـ طول کمان سیکلویید که مطابق زیرپارا متری شده است ، پیدا کنید. تصویر D

$$x = r(t - \sin t) \quad \text{و} \quad y = r(1 - \cos t) \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

تصویر D



پاسخ

$$\frac{dx}{dt} = r - r\cos t \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = r\sin t$$

پس

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos t)^2 + (r\sin t)^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2\cos t + r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\ \ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos t}\ \ dt$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\ \ dt$$

با استفاده ازفرمول نصف زاویه برای $\sin\frac{1}{2}$

$$\frac{۱-\cos t}{۲}=\sin^{۲}\frac{t}{۲} \quad \text{پس} \quad \sqrt{۲(۱-\cos t)}=\sqrt{۴\sin^{۲}\frac{t}{۲}}$$

چون $\sin\frac{t}{۲}\geq 0$ است برای $0\leq t\leq ۲\pi$ نتیجه می گیریم

$$\mathcal{L}=r\int_0^{۲\pi}\sqrt{۴\sin^{۲}\frac{t}{۲}}\;dt=۲r\int_0^{۲\pi}\sin\frac{t}{۲}\;dt$$

$$=-۴r\cos\frac{t}{۲}\Big|_0^{۲\pi}=۸r$$

تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر منحنی C را که معادله های پارا متری آن داده شده رسم کنید و مشخص کنید هنگامی که t افزایش می یابد ، جهت $P(t)$ به کدام سمت است.

۱) $x=۲\cos t$ و $y=۲\sin t$ برای $0\leq t\leq\frac{\pi}{۲}$

۲) $x=۲-\cos t$ و $y=-۱-\sin t$ برای $0\leq t\leq ۲\pi$

۳) $x=-۲+۳t$ و $y=۲-۳t$ برای تمام مقادیر t

۴) $x=۳$ و $y=-۱-t$

۵) $x=t^{۳}$ و $y=t^{۲}$ برای تمام مقادیر t

۶) $x=e^{-t}$ و $y=e^{۳t}$ برای تمام تمقادیر t

۷) $x=\cos^{۳}t$ و $y=\sec^{۳}t$

در تمرینات زیر طول منحنی که پارا متری توصیف شده است ، پید کنید.

۸) $x=t^{۲}$ و $y=۲t+۱$ ، $0\leq t\leq\sqrt{۳}$

۹) $x=e^{t}\sin t$ و $y=e^{t}\cos t$,$0\leq t\leq\pi$

۱۰) $x=\arcsin t$ و $y=\frac{۱}{۲}\ln\left(۱-t^{۲}\right)$, $0\leq t\leq\frac{۱}{۲}$

پاسخ تمرینات ۳.۴
تمرینات ۳.۴

در تمرینات زیر منحنی C را که معادله های پارا متری آن داده شده رسم کنید و مشخص کنید هنگامی که t افزایش می یابد ، جهت $P(t)$ به کدام سمت است.

۱) $x = ۲\cos t$ و $y = ۲\sin t$ برای $0 \le t \le \frac{\pi}{۲}$

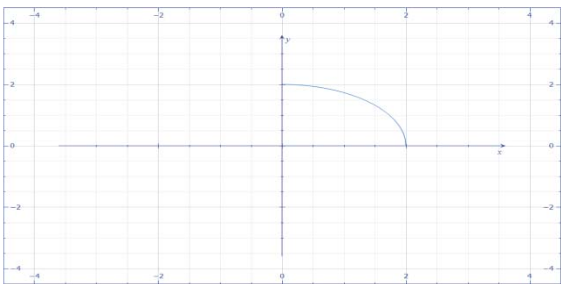
اگر بخواهیم معادله های پارا متری بالا را به صورت یک معادله بر حسب x و y بدون t بنویسیم، هر دو معادله را به توان دو میرسانیم و باهم جمع می کنیم. در نتیجه داریم.

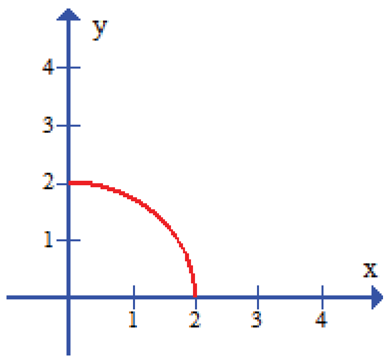
$$x^۲ + y^۲ = ۴\cos^۲ t + ۴\sin^۲ t$$
$$x^۲ + y^۲ = ۴$$
$$y = \pm\sqrt{۴ - x^۲}$$

ملاحظه می کنید که معادله بدست آمده یک نیم دائره است. برای مشخص شدن جهت $P(t)$ مقادیر t را در معادله های پارا متری داده شده می گذاریم . پس

$$P(0) = (۲,0) \quad ، \quad P\left(\frac{\pi}{۲}\right) = (0,۲)$$

پس در حقیقت معادله های پارا متری مساله یک ربع دائره است
نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.





جهت $P(t)$ خلاف جهت عقربه ساعت.

۲) $x = ۲ - \cos t$ و $y = -۱ - \sin t$ برای $0 \le t \le ۲\pi$

معادله های پارا متری داده شده را به صورت یک رابطه بر حسب x و y تنها ، مطابق زیر است.

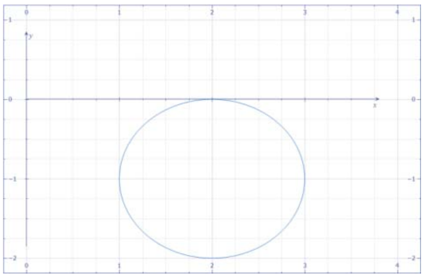
$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱$$

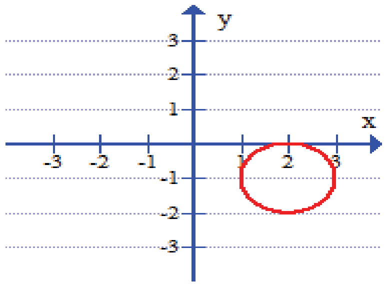
برای پیدا کردن جهت حرکت $P(t)$ داریم.

$$P(0) = (۱,-۱), P\left(\frac{\pi}{۲}\right) = (۲,-۲), P(\pi) = (۳,-۱), P\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = (۲,0)$$

پس ، جهت $P(t)$ خلاف جهت عقربه ساعت است.

نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.



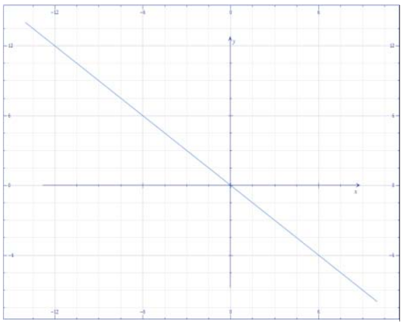


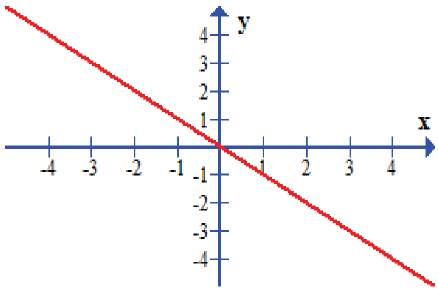
.

۳) $x = -۲ + ۳t$ و $y = ۲ - ۳t$ برای تمام مقادیر t

$$y = -x$$

نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.

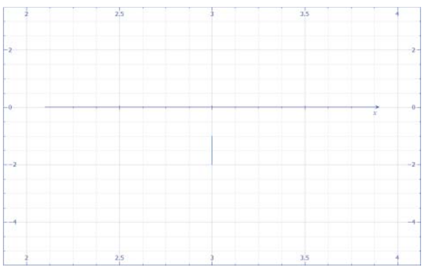


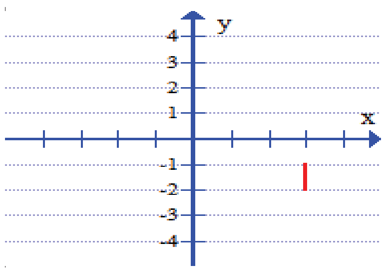


جهت $P(t)$ از چپ به راست به طرف پایین است.

۴) $x = ۳$ و $y = -۱ - t$

نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.

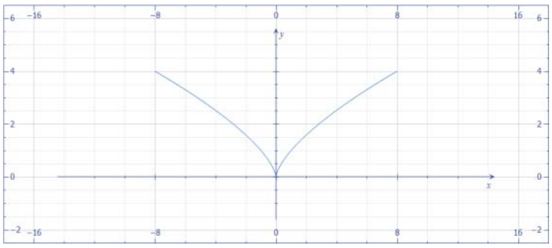


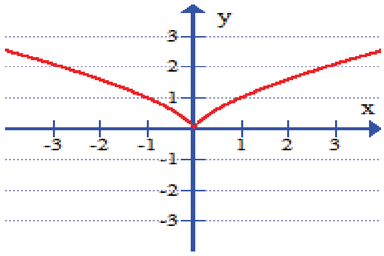


جهت $P(t)$ از بالا به پایین است.

۵) $x = t^{۳}$ و $y = t^{۲}$ برای تمام مقادیر t

نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.

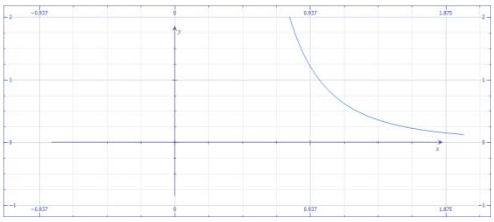


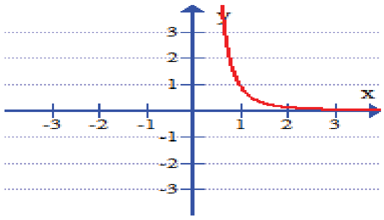


جهت $P(t)$ از چپ به راست به طرف پایین است.

۶) $x = e^{-t}$ و $y = e^{۳t}$ برای تمام تمقادیر t

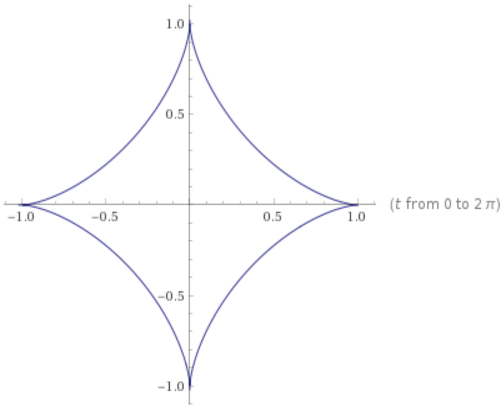
نمودار سمت چپ نمودارمعادله های پارا متری است و سمت راست نمودار رابطه بر حسب x و y تنها است.





جهت $P(t)$ از راست به چپ به طرف بالا است.

۷) $x = \cos^{۳} t$ و $y = \sec^{۳} t$



در تمرینات زیر طول منحنی که پارا متری توصیف شده است ، پید کنید.

۸) $x = t^{۲}$ و $y = ۲t + ۱$ ، $0 \le t \le \sqrt{۳}$

$$\mathcal{L} = \int_0^{\sqrt{۳}} \sqrt{(۲t)^{۲} + (۲)^{۲}}\; dt = \int_0^{\sqrt{۳}} ۲\sqrt{t^{۲} + ۱}\; dt$$

$$\overset{t=\tan u}{\cong} \int_0^{\frac{\pi}{۳}} ۲\sqrt{\tan^{۲} u + ۱}\;\; \sec^{۲} u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{۳}} ۲\; \sec^{۳} u\;\, du$$

پس بر اساس فرمول شماره (۷) بخش ۲.۲ داریم.

$$\mathcal{L} = (\sec u \tan u + \ln|\sec u\; + \tan u|)\Big|_0^{\frac{\pi}{۳}} = ۲\sqrt{۳} + \ln\left(۲ + \sqrt{۳}\right)$$

۹) $x = e^{t} \sin t$ و $y = e^{t}\; \cos t \quad ,0 \le t \le \pi$

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{(e^{t} \sin t + e^{t} \cos t)^{۲} + (e^{t} \cos t - e^{t} \sin t)^{۲}}\;\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{e^{۲t}\left(\sin^{۲} t\; + ۲ \sin t \cos t + ۲\cos^{۲} t - ۲\cos t \sin t + \sin^{۲} t\right)}\;\; dt$$

$$= \int_0^{\pi} e^{t}\; \sqrt{۲}\; dt = \sqrt{۲}\; e^{t}\Big|_0^{\pi} = \sqrt{۲}\; (e^{\pi} - ۱)$$

۱۰) $x = \arcsin t$ و $y = \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ - t^{۲}\right) \quad , \;\; 0 \le t \le \frac{۱}{۲}$

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{\left(\frac{۱}{\sqrt{۱ - t^{۲}}}\right)^{۲} + \left(\frac{-t}{۱ - t^{۲}}\right)^{۲}}\;\; dt$$

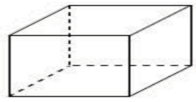
$$= \int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{\frac{۱}{۱ - t^{۲}} + \frac{t^{۲}}{\left(۱ - t^{۲}\right)^{۲}}}\;\; dt = \int_0^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{\frac{۱ - t^{۲} + t^{۲}}{\left(۱ - t^{۲}\right)^{۲}}}\;\; dt = \int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۱ - t^{۲}}$$

$$= \int_0^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱ - t^{۲}} + \frac{۱}{۱ + t^{۲}}\right) dt$$

$$= \left[-\frac{۱}{۲}\ln|۱-t| + \frac{۱}{۲}\ln|۱+t|\right]\Bigg|_0^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱+t}{۱-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\ln ۳$$

محاسبه مساحت جانبی بوسیله انتگرال Finding Surface Area by Integral

از قدیم الایام دانشمندان می دانستند

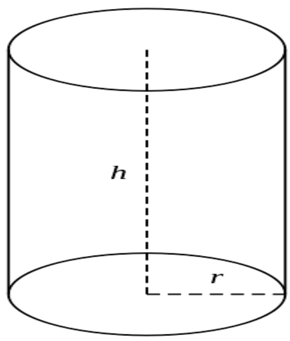


یک مکعب که طول یک ضلع آن s باشد ، پس مساحت جانبی مکعب

$$S = ۶s^۲$$

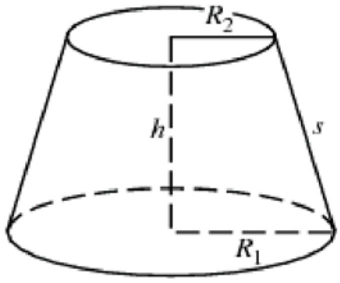
است.

همچنین مساحت جانبی یک استوانه با شعاع r و ارتفاع h مطابق زیر محاسبه می کردند.



$$S = ۲\pi rh$$

اما تجزیه و تحلیل ما در مورد مساحت جانبی اجسام ، بر اساس مساحت جانبی یک مخروط ناقص است. مخروطی که سر و انتهای آن بریده شده باشد. تصویر زیر

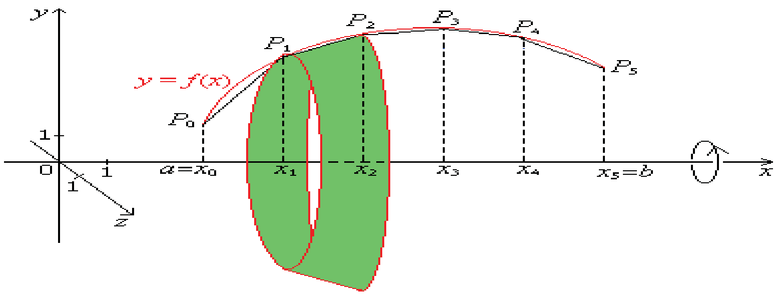


اگر ارتفاع این مخروط ناقص h و شعاع های آن $R_۱$ و $R_۲$ باشد ، پس مساحت جانبی آن مطابق زیر است.

$$S = ۲\pi\left(\frac{R_۱ + R_۲}{۲}\right)h = \pi(R_۱ + R_۲)h \qquad (۱)$$

بطور کلی ، فرض کنید f در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد ، و $f(x) \geq 0$ برای $a \leq x \leq b$.

می خواهیم فرمولی برای محاسبه مساحت جانبی سطح ایجاد شده از دوران نمودار f حول محور x پیدا کنیم. تصویر زیر.



برای اینکه بتوانیم طول نمودار f را در محاسبه مساحت جانبی بکار ببریم ، فر می کنیم f در $[a,b]$ بطور پیوسته مشتق پذیر باشد.

حالا فرض می کنیم $\wp=\{x_0,x_۱,\cdots,x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. و فرض می کنیم ΔS_k مساحت آن قسمت از سطح بین خطوط دوران کرده $x=x_{k-۱}$ و $x=x_k$ باشد. اگر Δx_k کوچک باشد ، مساحت جانبی ΔS_k تقریبا مساوی مساحت جانبی مخروط ناقص متناظر است , یعنی مخروط ناقصی که طول ارتفاع اریب آن مساوی طول خط بین $\left(x_{k-۱},f\left(x_{k-۱}\right)\right)$ و $\left(x_k,f(x_k)\right)$ است ، و دارای شعاع های که انتهای آنها $f\left(x_{k-۱}\right)$ و $f(x_k)$ است. بر اساس فرمول (۱) یعنی

$$\Delta S_k=\pi\left[f\left(x_{k-۱}\right)+f(x_k)\right]\sqrt{\left(x_k-x_{k-۱}\right)^۲+\left[f(x_k)-f\left(x_{k-۱}\right)\right]^۲}\qquad (۲)$$

مانند بحث ما در مورد طول یک منحنی در بخش ۳.۳ , قضیه مقدار میانگین را می توان بکار برد و نشان داد که برای یک t_k در $\left[x_{k-۱},x_k\right]$ داریم

$$\sqrt{\left(x_k-x_{k-۱}\right)^۲+\left[f(x_k)-f\left(x_{k-۱}\right)\right]^۲}=\sqrt{۱+\left[f'(t^k)\right]^۲}\ \ \Delta x_k\qquad (۳)$$

چون فرض بر این است که Δx_k کوچک باشد ، $x_{k-۱}$ و x_k نزدیک به هم هستند. و t_k بین آنها. چون f' و در نتیجه f در $\left[x_{k-۱},x_k\right]$ پیوسته هستند ، پس $f\left(x_{k-۱}\right)+f(x_k)$ باید تقریبا مساوی $f(t_k)+f(t_k)$ باشد ، یعنی $۲f(t_k)$, پس با جانشین کردن شماره (۳) در (۲) نتیجه می گیریم که

$$\Delta S_k\approx\pi\left[۲f(t_k)\right]\sqrt{۱+\left[f'(t_k)\right]^۲}\ \ \Delta x_k$$

در نتیجه مساحت جانبی تمام سطح که مساوی مجموع $\Delta S,\Delta S_۲,\cdots,\Delta S_n$ است باید تقریبا مطابق زیر باشد.

$$\sum_{k=۱}^{n}۲\,\pi\,f(t_k)\,\sqrt{۱+\left[f'(t_k)\right]^۲}\ \ \Delta x_k$$

که این خود مجموع ریمانی برای $\text{۲}\,\pi\, f\sqrt{\text{۱}+(f')^{\text{۲}}}$ در بازه $[a,b]$ است. پس می توانیم مساحت جانبی را مطابق زیر تعریف کنیم .

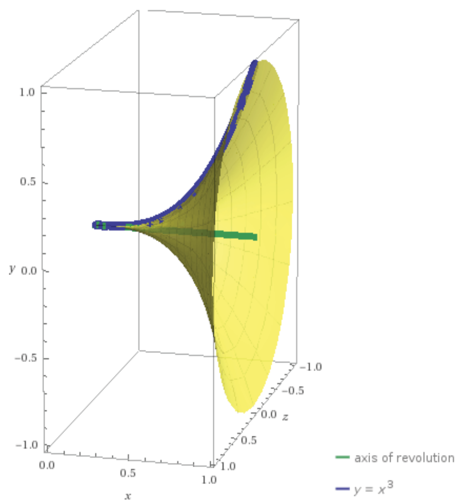
$$S=\lim_{\|\wp\|\to 0}\sum_{k=\text{۱}}^{n}\text{۲}\,\pi\, f(t_k)\sqrt{\text{۱}+[f'(t_k)]^{\text{۲}}}\,\Delta x_k$$
$$=\int_a^b \text{۲}\,\pi\, f(x)\sqrt{\text{۱}+[f'(x)]^{\text{۲}}}\;dx$$

تعریف ۳.۲

فرض می کنیم f در $[a,b]$ نا منفی ، پیوسته و مشتق پذیر باشد. **مساحت جانبی** سطحی که از دوران نمودار f حول محور x ایجاد می شود ، مطابق زیر تعریف میشود.

$$S=\int_a^b \text{۲}\,\pi\, f(x)\sqrt{\text{۱}+[f'(x)]^{\text{۲}}}\;dx \quad (\text{۴})$$

مثال ۱ - فرض کنید $f(x)=x^{\text{۳}}$ باشد ، برای $0\le x\le \text{۱}$. مطلوب است مساحت جانبی سطح ایجاد شده از دوران نمودار f حول محور x تصویر زیر



پاسخ

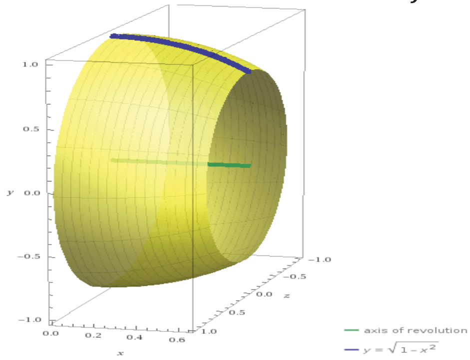
چون $f'(x)=\text{۳}x^{\text{۲}}$ است ، پس

$$S=\int_0^{\text{۱}}\text{۲}\,\pi x^{\text{۳}}\sqrt{\text{۱}+\left(\text{۳}x^{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}}\;dx=\text{۲}\,\pi\int_0^{\text{۱}}x^{\text{۳}}\sqrt{\text{۱}+\text{۹}x^{\text{۴}}}\;dx$$

فرض می کنیم $u=\text{۱}+\text{۹}x^{\text{۴}}$ باشد ، پس $du=\text{۳۶}x^{\text{۳}}\,dx$ است. اگر $x=0$ باشد ، پس $u=\text{۱}$ است. و اگر $x=\text{۱}$ باشد ، پس $u=\text{۱۰}$ است. در نتیجه

$$S = ۲\pi\int_0^{۱} x^{۳}\sqrt{۱+۹x^{۴}}\,dx = ۲\pi\int_{۱}^{۱۰}\sqrt{u} * \frac{۱}{۳۶}\,du = \frac{\pi}{۱۸}\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_{۱}^{۱۰}$$
$$= \frac{\pi}{۲۷}\left(۱۰^{\frac{۳}{۲}} - ۱\right)$$

مثال ۲ - فرض کنید $f(x) = \sqrt{۱ - x^{۲}}$ باشد برای $0 \le x \le \frac{۱}{۲}$. مطلوب است مساحت جانبی آن قسمت از کره که از دوران نمودار f حول محور x ایجاد می شود. تصویر زیر.



پاسخ

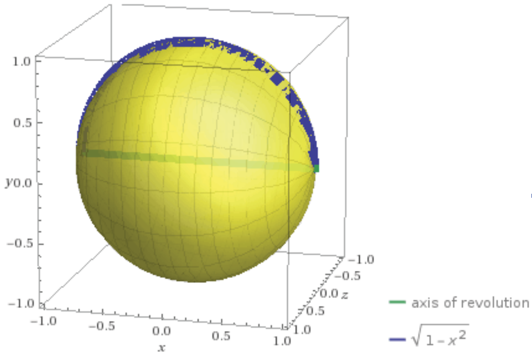
چون $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ است ، پس

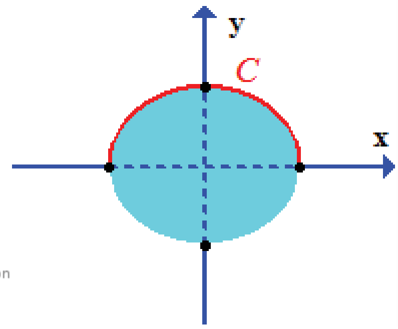
$$S = \int_0^{\frac{۱}{۲}} ۲\pi\sqrt{۱ - x^{۲}}\sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}\right)^{۲}}\,dx$$
$$= ۲\pi\int_0^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱ - x^{۲}}\sqrt{۱ + \frac{x^{۲}}{۱ - x^{۲}}}\,dx$$
$$= ۲\pi\int_0^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱ - x^{۲}}\sqrt{\frac{۱}{۱ - x^{۲}}}\,dx = ۲\pi\int_0^{\frac{۱}{۲}} ۱\,dx = ۲\pi x\Big|_0^{\frac{۱}{۲}} = \pi$$

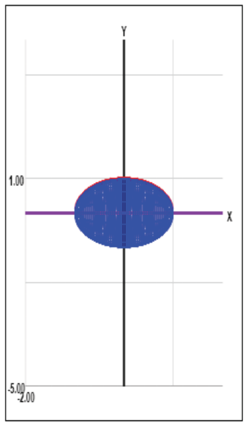
اگر منحنی که باید حول محور x دوران کند و ایجاد یک سطح شود ، پارا متری داده شود ، یعنی
$x = f(t)$ و $y = g(t)$ برای $a \le t \le b$ ، $g \neq 0$
پس فرمول قرینه زیر برای مساحت جانبی بدست می آید. یعنی

$$\boxed{S = \int_a^b ۲\pi g(t)\sqrt{[f'(t)]^{۲} + [g'(t)]^{۲}}\,dt \qquad (۵)}$$

مثال ۳ - نشان دهید که مساحت جانبی یک کره به شعاع r مساوی است با $۴\pi r^۲$







پاسخ

فرض می کنیم مرکز کره روی مبدا مختصات قرار دارد. پس اگر C نیم دائره ای است با معادله های زیر

$$x = r\cos t \quad \text{و} \quad y = r\sin t \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le \pi$$

پس کره سطحی است که از دوران C حول محور x ایجاد می شود. بر اساس (۵) داریم.

$$S = \int_0^\pi ۲\,\pi\, r\sin t\,\sqrt{(-r\sin t)^۲ + (r\cos t)^۲}\;dt$$

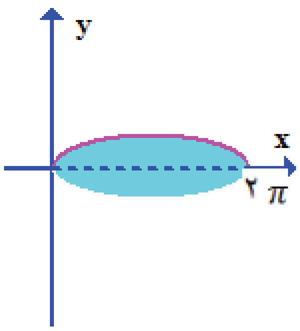
$$= ۲\,\pi\int_0^\pi r\sin t\sqrt{r^۲\,\sin^۲ t + r^۲\,\cos^۲ t}\;dt$$

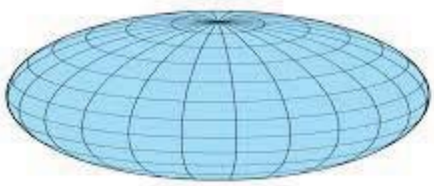
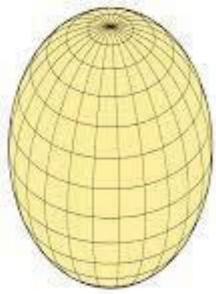
$$= ۲\,\pi\int_0^\pi r^۲\sin t\;dt = ۲\,\pi r^۲(-\cos t)\,\Big|_0^\pi = ۴\,\pi r^۲$$

مثال ۴ - فرض کنید یک کمان سیکلویید با معادله های پارا متری زیر

$$x = r(t - \sin t) \quad \text{و} \quad y = r\big(۱ - \cos t\big) \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le ۲\,\pi$$

حول محور x دوران می کند. مساحت جانبی سطح ایجاد شده را پیدا کنید.



پاسخ

با استفاده ازشماره (۵) و فرمول نصف زاویه $\sin^۲\frac{t}{۲} = \frac{۱-\cos t}{۲}$ داریم

$$S=\int_0^{2\pi} 2\pi r(1-\cos t)\sqrt{[r(1-\cos t)]^2+(r\sin t)^2}\ dt$$
$$=\int_0^{2\pi} 2\pi r(1-\cos t)\sqrt{r^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)}\ dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\pi r^2\, 2(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\ dt$$
$$=\pi r^2\int_0^{2\pi}[2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}\,dt=\pi r^2\int_0^{2\pi}\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt$$
$$=8\pi r^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8\pi r^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)dt$$

حالا فرض می کنیم $u=\cos\frac{t}{2}$ باشد ، پس $du=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt$ است.

اگر $t=0$ باشد ، پس $u=1$ است و اگر $t=2\pi$ باشد ، پس $u=-1$ است. لذا

$$S=8\pi r^2\int_1^{-1}(1-u^2)(-2)\,du=-16\pi r^2\left(u-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^{-1}$$
$$=-16\pi r^2\left[\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{64\pi}{3}r^2$$

تمرینات ۳.۵

در تمرینات زیر مساحت جانبی سطحی که از دوران نمودار f حول محور x در بازه داده شده ایجاد می شود ، پیدا کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{4-x^2};\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

۲) $f(x)=\sqrt{x};[0,6]$

۳) $f(x)=x^2-\frac{1}{8}\ln x;[1,2]$

۴) $f(x)=\sin x;[0,\pi]$

در تمرینات زیر مساحت جانبی سطحی که از دوران منحنی پارا متری داده شده حول محور x ایجاد می شود .پیدا کنید.

۵) $x=\frac{1}{2}t^2$ و $y=t$ برای $\sqrt{3}\le t\le 2\sqrt{2}$

۶) $x=\sin^2 t$ و $y=\sin t\cos t$ برای $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

پاسخ تمرینات ۳.۵

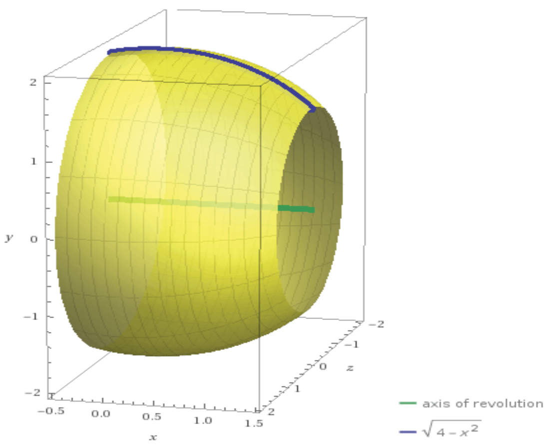
در تمرینات زیر مساحت جانبی سطحی که از دوران نمودار f حول محور x در بازه داده شده ایجاد می شود ، پیدا کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{۴ - x^{۲}}; \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right]$

$$S = ۲\pi \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} \sqrt{۴ - x^{۲}} \sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}}\right)^{۲}}\, dx$$

$$= ۲\pi \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} \sqrt{۴ - x^{۲}} \sqrt{۱ + \frac{x^{۲}}{۴ - x^{۲}}}\, dx$$

$$= ۲\pi \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} ۲\, dx = ۴\pi x \Big|_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} = ۸\pi$$

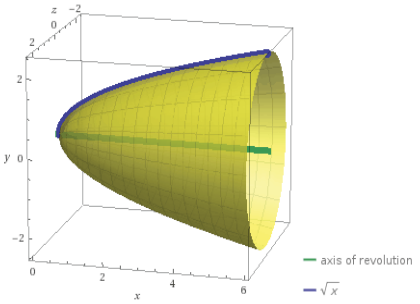


۲) $f(x)=\sqrt{x};[0,۶]$

$$S=۲\pi\int_0^۶\sqrt{X}\ \sqrt{۱+\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^۲}\ dx=\lim_{a\to0^+}۲\pi\int_a^۶\sqrt{x}\ \sqrt{۱+\frac{۱}{۴x}}\ dx$$

$$=\lim_{a\to0^+}\pi\int_a^۶\sqrt{۴x+۱}\ dx=\lim_{a\to0^+}\frac{\pi}{۶}(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_a^۶$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left[\frac{۱۲۵\,\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}\right]=\frac{۱۲۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۶۲\pi}{۳}$$



۳) $f(x) = x^{۲} - \frac{۱}{۸}\ln x; [۱, ۲]$

$$S = ۲\pi \int_{۱}^{۲} \left(x^{۲} - \frac{۱}{۸}\ln x\right) \sqrt{۱ + \left(۲x - \frac{۱}{۸x}\right)^{۲}}\ dx$$

$$= ۲\pi \int_{۱}^{۲} \left(x^{۲} - \frac{۱}{۸}\ln x\right) \sqrt{۱ + \left(۴x^{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶۴x^{۲}}\right)}\ dx$$

$$= ۲\pi \int_{۱}^{۲} \left(x^{۲} - \frac{۱}{۸}\ln x\right) \sqrt{\left(۲x + \frac{۱}{۸x}\right)^{۲}}\ dx$$

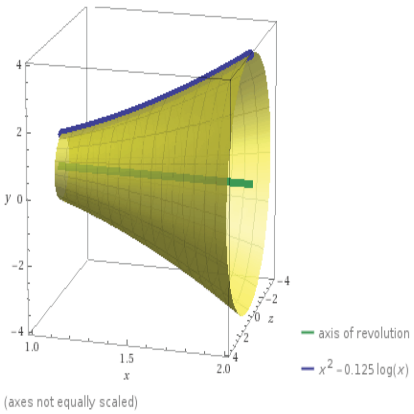
$$= ۲\pi \int_{۱}^{۲} \left(x^{۲} - \frac{۱}{۸}\ln x\right)\left(۲x + \frac{۱}{۸x}\right) dx$$

$$= ۲\pi \int_{۱}^{۲} \left(۲x^{۳} + \frac{۱}{۸}x\right) dx - ۲\pi \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{۴} x \ln x\ dx - ۲\pi \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{۶۴}\frac{\ln x}{x}\ dx$$

$$= ۲\pi \left(\frac{۱}{۲}x^{۴} + \frac{۱}{۱۶}x^{۲}\right)\Bigg|_{۱}^{۲} - \frac{\pi}{۲}\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln x - \frac{۱}{۴}x^{۲}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}$$

$$= \frac{\pi}{۶۴}(\ln x)^{۲}\Bigg|_{۱}^{۲} = ۲\pi\left(\frac{۳۳}{۴} - \frac{۹}{۱۶}\right) - \frac{\pi}{۲}\left[(۲\ln ۲ - ۱) + \frac{۱}{۴}\right] - \frac{\pi}{۶۴}(\ln ۲)^{۲}$$

$$= \pi\left[\frac{۶۳}{۴} - \ln ۲ - \frac{۱}{۶۴}(\ln ۲)^{۲}\right]$$



۴) $f(x) = \sin x; [0،\pi]$

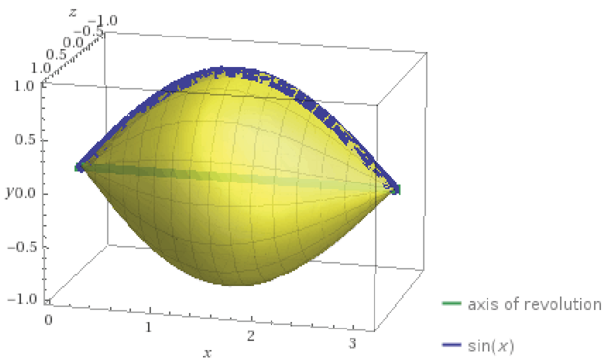
$$S = ۲\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{۱ + \cos^۲ x}\; dx \overset{u=\cos x}{\triangleq} ۲\pi \int_۱^{-۱} \sqrt{۱ + u^۲}\; (-۱) du$$

$$\overset{u=\tan v}{\triangleq} -۲\pi \int_{\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۴}} \sec^۲ v\, dv$$

پس بر اساس فرمول (۷) بخش ۲.۲ داریم.

$$S = -۲\pi \left(\frac{۱}{۲}\sec v \tan v + \frac{۱}{۲}\ln|\sec v + \tan v|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۴}}$$

$$= \pi\left[۲\sqrt{۲} + \ln\left(\sqrt{۲}+۱\right) - \ln\left(\sqrt{۲}-۱\right)\right] = \pi\left[۲\sqrt{۲} + \ln\left(۳ + ۲\sqrt{۲}\right)\right]$$



در تمرینات زیر مساحت جانبی سطحی که از دوران منحنی پارا متری داده شده حول محور x ایجاد می شود .پیدا کنید.

۵) $x = \frac{۱}{۲}t^۲$ و $y = t$ برای $\sqrt{۳} \le t \le ۲\sqrt{۲}$

$$S = ۲\pi \int_{\sqrt{۳}}^{۲\sqrt{۲}} t\sqrt{t^{۲+۱}}\; dt = \frac{۲\pi}{۳}\left(t^۲ + ۱\right)^{\frac{۳}{۲}}\Bigg|_{\sqrt{۳}}^{۲\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{۲\pi}{۳}(۲۷ - ۸) = \frac{۳۸\pi}{۳}$$

۶) $x = \sin^{۲} t$ و $y = \sin t \cos t$ برای $0 \le t \le \frac{\pi}{۲}$

$$S = ۲\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \cos t \sqrt{\left(۲ \sin t \cos t\right)^{۲} + \left(\cos^{۲} t - \sin^{۲} t\right)^{۲}}\; dt$$

$$= ۲\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \cos t \sqrt{\sin^{۲} ۲t + \cos^{۲} ۲t \;\; dt}$$

$$= ۲\,\pi \int^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \cos t \, dt = \pi \;\sin^{۲} t \Big|_0^{\frac{\pi}{۲}} = \pi$$

۳.۶ - انتگرال و فیزیک - کار Intergrals and Physics – Work

در این بخش در مورد مفهوم کار در فیزیک بحث می کنیم. به عنوان مقدمه ، فرض کنید یک نفر یک چرخ دستی را از نقطه a به نقطه b به طرف جلو فشار می دهد.

اگر در تمام مدت نیروی وارده c به چرخ دستی ثابت باشد ، پس مقدار کار انجام شده مطابق زیر تعریف می شود.

$$Work = Force * Distance = c(b-a)$$

مسافت * نیرو = کار

حاصل ضرب $c(b-a)$ باید مساحت یک مربع مستطیل را به خاطر شما بیاورد. این تعریف منطقی به نظر می‌رسد. زیرا انتظار داریم مقدار کار انجام شده بیشتر شود ، اگر آن شخص مسافت بیشتری چرخ دستی را به پیش براند و یا نیروی بیشتری بکار ببرد.

اگر نیروی وارده بر جسم متغیر باشد ، کار را چگونه تعریف می کنیم؟ اینجا ، انتگرال به ما کمک می کند. برای اینکه انتگرال را به کار ارتباط دهیم ، چند فرض در نظر می گیریم.

فرض اول - شئی که بر آن نیرو وارد می شود در یک خط مستقیم حرکت می کند. پس می توانیم تصور کنیم که شئی در امتداد محور x از نقطه a به نقطه b حرکت می کند.

فرض دوم - در تمام نقاط بین a و b یک نیروی ثابت $f(x)$ بر شئی وارد می شود و این که f در $[a,b]$ پیوسته است.

فرض سوم - نیروی وارده مثبت است اگر در جهت مثبت محور x باشد ، و منفی است اگر در جهت منفی محور x باشد.

اگر نیرو بر حسب پوند و مسافت بر حسب فوت باشد ، پس کار بر حسب پوند-فوت است.

در مقیاس cgs یعنی سانتیمتر- گرم- ثانیه $Centimetre - Gram - second$ نیرو بر حسب دین $Dynes$ مسافت بر حسب سانتی متر و کار بر حسب ارگ $Ergs$ است.

در مقیاس mks یعنی متر-کیلو گرم -ثانیه $Meter - Kilogram - Second$ نیرو بر حسب نیوتن ، مسافت بر حسب متر و کار بر حسب ژول $Joules$ است.

همان طور که در بالا دیدیم ، اگر نیروی وارده بر شئی که از a به b طی مسافت می کند ، ثابت باشد ، یعنی $f(x)=c$ پس کار انجام شده $W=c(b-a)$ است.

اگر نیرو الزاما ثابت نباشد ، فرض می کنیم $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد ، و برای هر k بین یک و n فرض می کنیم t_k یک نقطه اختیاری در بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد.

اگر Δx_k کوچک باشد ، پس هنگامی که شئی از $x_{k-۱}$ به طرف x_k حرکت می کند ، مقدار کار انجام شده یعنی ΔW_k بوسیله فشار وارد بر شئی تقریبا مساوی است با $f(t_k)\Delta x_k$. همچنین منطقی به نظر می رسد که انتظار داشته باشیم کار انجام شده بوسیله نیرو هنگامی که شئی از a به طرف b حرکت می کند ، مجموع $\Delta W_۱, \Delta W_۲, \cdots, \Delta W_n$ باشد. این حاصل جمع نشانگر کار انجام شده روی شئی است هنگامی که از بازه های فرعی متوالی $[a,b]$ عبور می کند. پس کار باید تقریبا مساوی حاصل جمع زیر باشد.

$$\sum_{k=۱}^{n} \overbrace{f(t_k)}^{\text{نیرو}}\,\overbrace{\Delta x_k}^{\text{مسافت}}$$

که این خود یک مجموع ریمانی است. پس در نتیجه کار مطابق زیر تعریف می شود.

$$W = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

تعریف ۳.۳
فرض کنید یک شئی در اثر نیروی وارد بر آن یعنی f از نقطه a به نقطه b حرکت می کند. f در $[a,b]$ یک تابع پیوسته است. پس کار انجام شده بوسیله نیروی وارد بر شئی مطابق زیر تعریف می شود.

$$W = \int_a^b f(x)dx \qquad (۱)$$

در تعریف ۳.۳ تلویحا مستفاد می شود که کار مثبت است ، اگر نیرو در جهت حرکت شئی وارد شود و منفی است اگر نیرو در جهت خلاف حرکت شئی وارد شود.

مثال ۱- فرض کنید یک چرخ دستی سوراخ دار را به طرف جلو ۱۰۰ فوت حرکت می دهیم و چون سوراخ دارد و آب داخل آن چکه می کند نیروی وارد بر چرخ دستی در حال نقصان است و مطابق زیر تعریف می شود.

$$f(x) = ۶۰\left(۱ - \frac{x^۲}{۲۰۰۰۰}\right), \qquad 0 \le x \le ۱۰۰$$

مقدا کار انجام شده بوسیله نیروی وارد بر چرخ دستی را پیدا کنید.
پاسخ

$$W = \int_0^{۱۰۰} ۶۰\left(\frac{x^۲}{۲۰۰۰۰}\right)dx = ۶۰\left(x - \frac{x^۳}{۶۰۰۰۰}\right)\Bigg|_0^{۱۰۰}$$
$$= ۵۰۰۰ \quad \text{فوت} - \text{پوند}$$

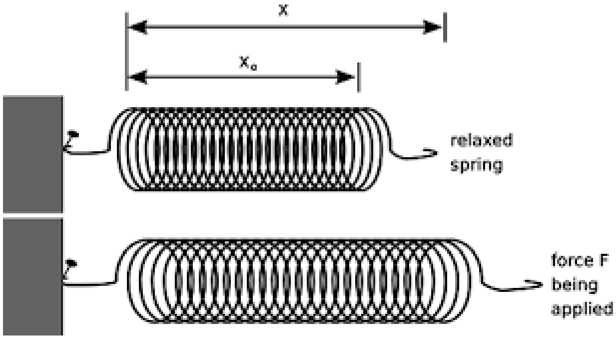
قانون هوک Hooke's Law

به عنوان یک مثال دیگر ، کار انجام شده هنگامی که یک فنر کشیده می شود را در نظر بگیرید.
هوک (هندسه دان انگلیسی سال ۱۶۷۶) می گوید نیروی ارتجاعی یاکشسانی $g(x)$ که توسط یک فنر که به اندازه x واحد بیشتر از طول طبیعی آن کشیده شده است ، متناسب است با x

توضیحات بیشتر در مورد مطالب بالا یا قانون هوک

نیروی ارتجایی یا نیروی کشسانی $Elastic\ force$ نیرویی است که توسط فنر یا هر جسمی که مانند کش قابلیت کشش و ارتجاعی دارد، ایجاد می شود. این نیرو باعث می شود که فنر یا جسم ارتجاعی بعد از برداشته شدن نیروی خارج بر آن ، به حالت اول بر گرد د این نیرو بستگی $Proportional$ دارد به مقدار x

در تصویر زیر x_1 طول اولیه فنر است. و x طول فنر است بعد از وارد کردن نیرو بر آن .



این نیرو ی ارتجاعی یا کشسانی یعنی $g(x)$ منفی است. زیرا با انبساط یا کشش مخالفت می کند و لذا در جهت منفی محور x است. پس یک عدد ثابت مثبت k وجود دارد بطوری که

$$g(x) = -kx$$

گفته می شود اگر مقدار x تا حد قابل قبولی کوچک باشد ، فرمول بالا تا حدودی قابل اعتماد است.
نیروی $f(x)$ که لازم است که فنر را x واحد بیشتر از طول طبیعی آن کش دهد ضد $g(x)$است و از نظر مقدار مساوی آن است. یعنی

$$f(x) = -g(x) = kx$$

پس از فرمول (۱) نتیجه می شود که مقدار کار لازم برای کشیدن یک فنر از واحد a تا واحد b طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$W = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b kx\,dx \qquad (۲)$$

چون نیرویی که ایجاد کار می کند مخالف نیرویی است که فنر اعمال می کند ، می گوییم W کاری است که بر علیه نیروی فنر انجام شده است.

توجه : k یک عدد ثابت مثبت است که به نوع فنر بستگی دارد.

مثال ۱ - فرض کنید نیروی لازم برای این که یک نوع فنر را یک فوت افزون بر طول طبیعی آن کش دهد ، ۱۰ فوت– پوند است. مطلوب است مقدار کار لازم برای کشیدن فنر از یک فوت افزون بر طول طبیعی آن به ۳ فوت افزون بر طول طبیعی.

پاسخ

ابتدا باید مقدار k برای این فنر پید کنیم.

بر اساس فرض مساله داریم

$$۱۰ = \int_0^{۱} kx\,dx$$

یعنی اگر ۱۰ فوت –پوند نیرو بر فنر وارد کنیم ، ملاحظه می کنیم فنر یک فوت کش می آید. با محاسبه انتگرال بالا می توانیم مقدار k را پیدا کنیم.

$$۱۰ = \int_0^{۱} = kx = \frac{۱}{۲}kx^{۲}\Big|_0^{۱} = \frac{۱}{۲}k(۱-0) = \frac{۱}{۲}k$$

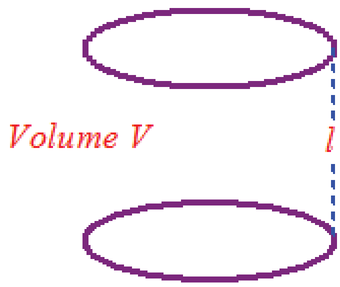
پس $k = ۲۰$. حالا با دانستن مقدا ر k می توانیم مقدار کار لازم برای این که این فنر مورد نظر را ۳ فوت دیگر کش دهیم را پیدا کنیم.

$$W = \int_{۱}^{۳} ksdx = \int_{۱}^{۳} ۲۰\,xdx = ۱۰\,x^{۲}\Big|_{۱}^{۳} = ۱۰\,(۹-۱) = ۸۰ \quad \text{فوت – پوند}$$

کار لازم برای خالی کردن یک مخزن Work Required to Empty a Tank

می خواهیم فرمولی برای محاسبه مقدار کار لازم برای تخلیه آب یک مخزن بوسیله تلمبه ای که در بالای مخزن قرار دارد ، پیدا کنیم. برای این کار علاوه بر استفاده از ویژه گی هایی که منجر به تعریف ۳.۳ شد ، از ویژه گی دیگری استفاده می کنیم. یعنی مقدار کار لازم برای حرکت دادن یک شئی ازنقطه P به نقطه Q خلاف نیروی جاذبه. ، بدون در نظر گرفتن مسیر از P تا Q. پس فرض می کنیم شئی در امتدا یک خط عمودی حرکت کند. و در این صورت باید حد اقل نیرو یی مساوی وزن شئی اعمال کنیم تا نیروی جاذبه را خنثی کند.

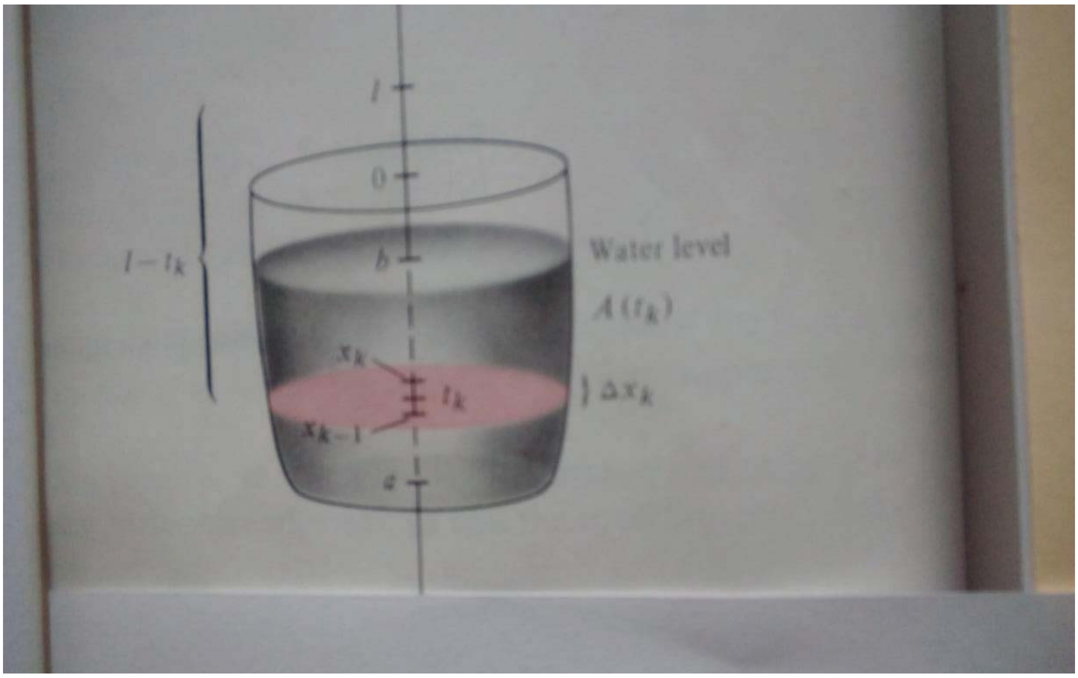
می خواهیم مقدار کار انجام شده برای تخلیه آب یک مخزن تا سطح معینی را محاسبه کنیم. ابتدا فرض کنید یک بخش سه بعدی آب را l فوت بالا ببریم و فرض کنید حجم این بخش آب V فوت مکعب باشد. تصویر زیر



بر اساس تعریف ، کار انجام شده برای بلند کردن این حجم آب ، عبارت است حاصل ضرب وزن آب در مسافتی که آب حرکت داده شده یعنی l. چون وزن یک فوت مکعب آب ۶۲/۵ پوند وزن دارد ، پس وزن آب حرکت داده شده $۶۲ / ۵V$ است. یعنی

$$W = \text{وزن} * \text{مسافت} = ۶۲ / ۵Vl$$

اگر مایع داخل مخزن آب نباشد ، بجای ۶۲ / ۵ لازم است وزن یک فوت مکعب آن مایع را جایگزین کنیم. حال فرض کنید محور x را عمودی اختیار کنیم و اعداد مثبت ، بالای مبدا قرار داشته باشند.



فرض کنید ، آبی که باید تخلیه شود از a تا b باشد. تصویر بالا. و فرض کنید l مسافتی باشد که آب باید طی کند.

برای هر x در $[a, b]$ فرض کنید $A(x)$ مساحت سطح مقطع مخزن در x باشد ، و فرض کنید A در $[a, b]$ پیوسته باشد. فرض می کنیم $\wp = \left\{x_0, x_۱, \cdots, x_n\right\}$ یک پارش $[a, b]$ باشد. برای هر k بین یک و n, فرض می کنیم t_k هر عددی در $\left[x_{k-۱}, x_k\right]$ باشد. اگر Δx_k کوچک باشد ، حجم آب بین سطح $x_{k-۱}$ و x_k تقریبا $A(t_k)\Delta x_k$ است. چون هر ذره از آب آن قسمت باید مسافت تقریبی $l - t_k$ طی کنند ، طبق بحث قبلی در بالا ، مقدار کار لازم یعنی ΔW_k برای بالا بردن مقدار آب بین $x_{k-۱}$ و x_k تقریبا مساوی است با حاصل ضرب وزن $۶۲/۵A(t_k)\Delta x_k$ در مسافت $l - t_k$ پیموده شده ، یعنی

$$۶۲/۵A(t_k)\Delta x_k\,(l - t_k)$$

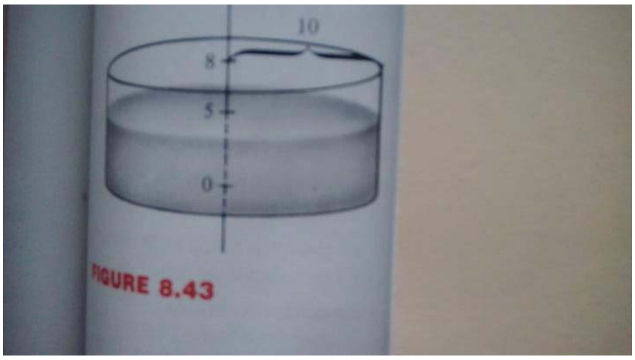
در نتیجه کار لازم برای بالا بردن تمام آب بین سطح $x = a$ و $x = b$ که مجموع $\Delta W_۱, \Delta W_۲, \cdots, \Delta W_n$ است ، باید تقریبا

$$\sum_{k=۱}^{n} ۶۲/۵A(t_k)\Delta x_k\,(l-t_k)$$

که این یک مجموع ریمانی است برای $۶۲/۵A(x)\,(l-x)$, پس کارانجام شده برای بالا بردن آب مطابق زیر است.

$$W=\lim_{\|\wp\|\to 0}\sum_{k=۱}^{n} ۶۲/۵(l-t_k)A(t_k)\Delta x_k=\int_a^b ۶۲/۵(l-x)A(x)dx \quad (۴)$$

مثال ۳ یک استخر شنا به شکل استوانه مدور است به شعاع ۱۰ فوت و عمق ۸ فوت. فرض کنید استخرتا عمق ۵ فوت آب دارد. مطلوب است کار لازم برای بالا کشیدن تمام آب داخل استخر بطوری که فقط یک فوت آب در استخر باقی بماند.



پاسخ

مبدا مختصات را کف استخر قرار می دهیم. تصویر بالا. پس $l=۸$ است. پس هر ذره از آب که در x فوتی کف استخر قرار دارد ، باید $۸-x$ فوت بالا آورده شود.علاوه بر این ، آبی که باید با تلمبه بالا آورده شود ، از یک تا ۵ روی محور x گسترده است. فراموش نشود فرض کرده ایم محور x عمودی قرار دارد. همچنین مساحت سطح مقطع ثابت است و مطابق زیر بدست می آید.

$$A(x)=\pi\,(۱۰)^۲=۱۰۰\,\pi$$

لذا بر اساس (۴) داریم.

$$W=\int_۱^۵ ۶۲/۵(۸-x)(۱۰۰\,\pi)dx=۶۲۵۰\,\pi\int_۱^۵(۸-x)dx$$

$$=۶۲۵۰\,\pi\left(۸x-\frac{۱}{۲}x^۲\right)\Big|_۱^۵=۱۲۵\,۰۰۰\,\pi \text{ فوت – پوند}$$

در مثال ۳ قرار دادن مبدا مختصات را در کف استخر فقط برای راحتی کار بود. اگر مبدا مختصات را روی سطح آب قرار دهیم باز هم مساحت سطح مقطع همان $A(x)=۱۰۰\,\pi$ است اما, $l=۳$

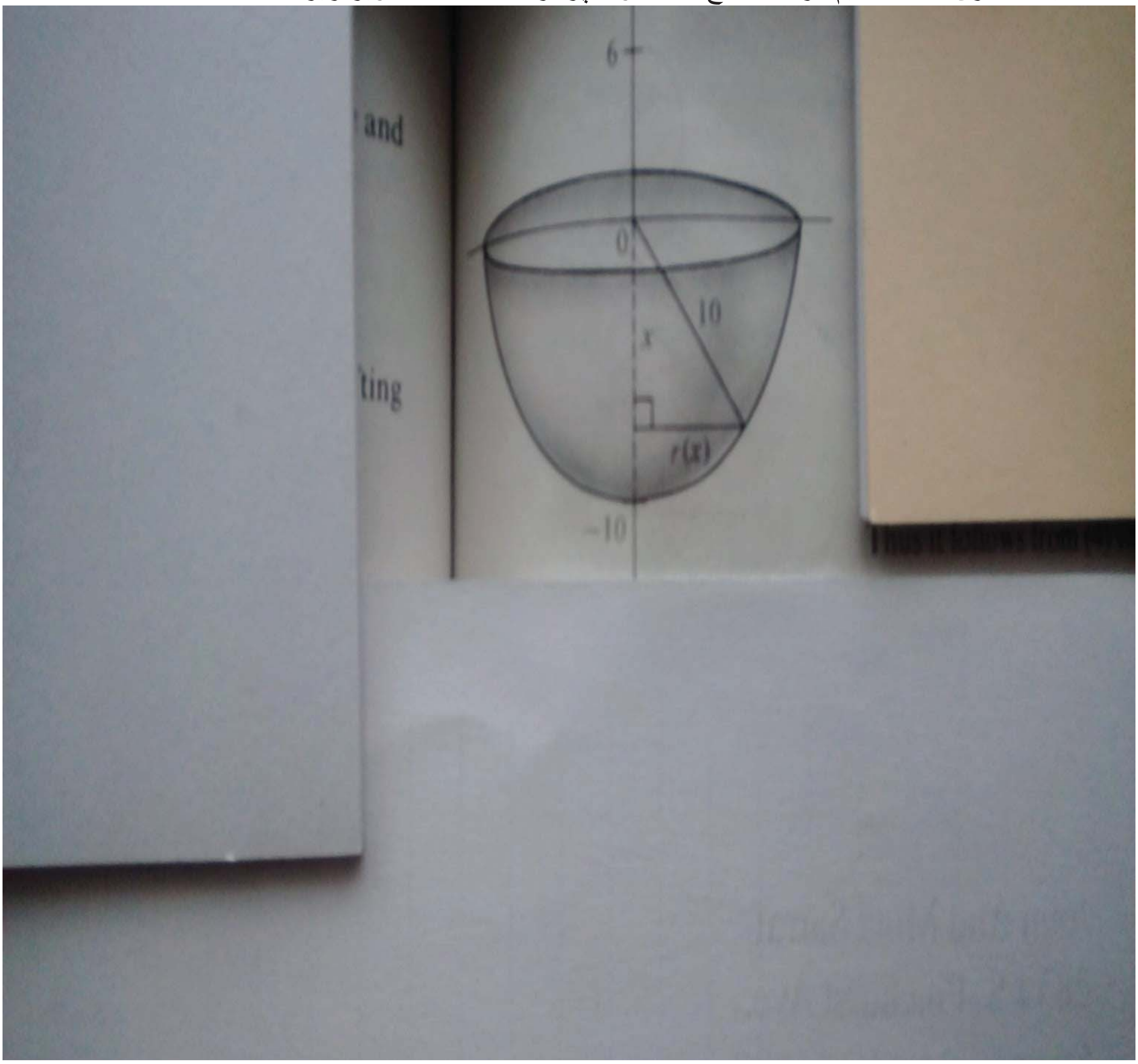
خواهد بود. مسافتی را که هر ذره از آب باید طی کند $x - ۳$ است. آبی هم که باید توسط تلمبه خارج شود از ۴− تا صفر روی محور x است. پس خواهیم داشت

$$W = \int_{-۴}^{0} ۶۲/۵(۳ - x)(۱۰۰\ \pi)dx = ۶۲۵۰\ \pi \int_{-۴}^{0}(۳ - x)dx$$

$$= ۶۲۵۰\ \pi\left(۳x - \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big|_{-۴}^{0} = ۱۲۵\,۰۰۰\ \pi \ \text{فوت – پوند}$$

همان نتیجه مثال ۳

مثال ۴ یک مخزن به شکل نیم کره با شعاع ۱۰ فوت پر از آب است. تصویر زیر



مطلوب است مقدار کار لازم برای این که تمام آب را با تلمبه تا ۶ فوت بالای مخزن برسانیم .

پاسخ

این مرتبه راحت تر است اگر مبدا مختصات را روی سطح فوقانی مخزن قرار دهیم. پس $l = ۶$ است. هر ذره از آب باید $۶ - x$ فوت بالا اورده شود. آبی که باید خارج شود ، از -۱۰ تا صفر روی محور x است. با توجه به تصویر بالا ملاحظه می کنید که $r(x)$ یعنی شعاع برش مقطع در هر نقطه x معادله $[r(x)]^۲ = ۱۰۰ - x^۲$ را بر قرار می کند. پس مساحت سطح مقطع مطابق زیر است.

$$A(x) = \pi\,[r(x)]^۲ = \pi\left(۱۰۰ - x^۲\right)$$

بر اساس (۴) داریم.

$$\begin{aligned} W &= \int_{-۱۰}^{0} ۶۲/۵(۶ - x)\,\pi\left(۱۰۰ - x^۲\right)dx \\ &= ۶۲/۵\,\pi\int_{-۱۰}^{0}\left(۶۰۰ - ۱۰۰x - ۶x^۲ + x^۳\right)dx \\ &= ۶۲/۵\,\pi\left(۶۰۰x - ۵۰x^۲ - ۲x^۳ + \frac{۱}{۴}x^۴\right)\Big|_{-۱۰}^{0} \\ &= ۶۲/۵\,\pi\left(۶۰۰۰ + ۵۰۰۰ - ۲۰۰۰ - ۲۵۰۰\right) \\ &= ۴۰۶۲۵۰\,\pi \text{ فوت ــ پوند} \end{aligned}$$

تمرینات ۴.۶

۱ ـ مطلوب است مقدار کار انجام شده در مثال ۱ , اگر چرخ دستی فقط ۶۰ فوت به طرف جلو رانده شود.

۲ ـ یک پاکت محتوی خوار بار به وزن ۱۰ پوند را می خواهیم از پلکانی به ارتفاع ۸ فوت بالا ببریم. مطلوب است مقدار کار ی که باید روی این پاکت انجام شود.

۳ ـ یک قایق در وسط دریاچه بی حرکت قرار دارد. ناگهان یک تند باد شدید آنرا در طول یک خط مستقیم به حرکت می آورد. فرض کنید نیرویی که از طرف باد بر قایق اعمال می شود تا آنرا x مایل دور تر از محل اولیه سوق دهد ، مطابق معادله زیر است.

$$f(x) = ۱۰^{۴} \sin x \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

مطلوب است کار انجام شده بوسیله باد روی قایق.

۴ ـ اگر نیروی لازم برای این که یک نوع فنر را یک فوت کش دهیم و در آن حالت نگاه داریم ، ۳۰ فوت باشد ، مطلوب است مقدار کار لازم برای این که فنر را از ۳ فوت به ۶ فوت کش دهیم.

۵ ـ اگر بخواهیم یک فنرکه طول طبیعی آن ۱۰ فوت است ، یک فوت متراکم کنیم ، مقدار ۶ فوت ــ پوند کار لازم باشد ، مطلوب است مقدارکار لازم برای این که طول فنر را به ۱۲ فوت برسانیم .

۶ ـ مطلوب است مقدار کار لازم برای این که تمام آب داخل استخر مثال ۳ تا ۳ فوت بالا تر از لبه استخر با تلمبه به بالا کشیده شود.

۷ ـ یک مخزن به شکل مخروط وارونه به ارتفاع ۱۲ فوت و شعاع ۳ فوت ، پر از آب است. مطلوب است مقدار کار لازم برای بالا کشیدن تمام آب تا لبه مخزن.

۸ ـ یک مخزن بزرگ بنزین به شکل یک نیم استوانه به شعاع ۴ فوت و طول ۱۰ داریم .
اگر مخزن پر باشد ، مقدار کار لازم برای اینکه با تلمبه تمام بنزین را تا لبه مخزن پمپ کنیم ، محاسبه کنید. فرض کنید یک فوت مکعب بنزین ، ۴۲ پوند وزن داشته باشد.

۹ ـ یک توپ به وزن ۲ /۰ پوند ، عمودی به طرف بالا پرتاب می شود. ارتفاع توپ بعد از t ثانیه از طریق معادله زیر بدست می آید.

$$h(t) = ۶ + ۸t - ۱۶t^{۲}$$

تا زمانی که توپ با زمین بر خورد کند.
الف ـ مطلوب است مقدار کار انجام شده از طرف نیروی جاذبه بر توپ ، از زمانی که توپ به بالا ترین ارتفاع می رسد تا به زمین برسد ،
ب مطلوب است مقدار کار انجام شده بر توپ هنگام برگشت ، اگر توب در ارتفاع ۶ فوتی زمین گرفته شود.

پاسخ تمرینات ۳.۶

۱ - مطلوب است مقدار کار انجام شده در مثال ۱ , اگر چرخ دستی فقط ۶۰ فوت به طرف جلو رانده شود.

پاسخ

$$W=\int_0^{۶۰} ۶۰\left(۱-\frac{x^۲}{۲۰۰۰۰}\right)dx=۶۰\left(x-\frac{x^۳}{۶۰۰۰۰}\right)\Bigg|_0^{۶۰}=۳۳۸۴$$ فوت – پوند

۲ - یک پاکت محتوی خوار بار به وزن ۱۰ پوند را می خواهیم از پلکانی به ارتفاع ۸ فوت بالا ببریم. مطلوب است مقدار کار ی که باید روی این پاکت انجام شود.

پاسخ

$$f(x)=۱۰; W=\int_0^{۸} ۱۰\,dx=۱۰\,x\Big|_0^{۸}=۸۰$$ فوت – پوند

۳ - یک قایق در وسط دریاچه بی حرکت قرار دارد. ناگهان یک تند باد شدید آنرا در طول یک خط مستقیم به حرکت می آورد. فرض کنید نیرویی که از طرف باد بر قایق اعمال می شود تا آنرا x مایل دور تر از محل اولیه سوق دهد ، مطابق معادله زیر است.

$$f(x)=۱۰^۴\sin x \quad , \quad 0\le x\le \pi$$

مطلوب است کار انجام شده بوسیله باد روی قایق.

پاسخ

$$W=\int_0^{\pi} ۱۰^۴\sin x\,dx=-۱۰^۴\cos x\Big|_0^{\pi}=۲*۱۰^۴$$ مایل – پوند

۴ - اگر نیروی لازم برای این که یک نوع فنر را یک فوت کش دهیم و در آن حالت نگاه داریم ، ۳۰ فوت باشد ، مطلوب است مقدار کار لازم برای این که فنر را از ۳ فوت به ۶ فوت کش دهیم.

پاسخ

$$W=\int_{۳}^{۶} ۳۰\,x\,dx=۱۵x^۲\Big|_{۳}^{۶}۴۰۵$$ فوت – پوند

۵ - اگر بخواهیم یک فنرکه طول طبیعی آن ۱۰ فوت است ، یک فوت متراکم کنیم ، مقدار ۶ فوت – پوند کار لازم باشد ، مطلوب است مقدارکار لازم برای این که طول فنر را به ۱۲ فوت برسانیم .

پاسخ

بر اساس فرض مساله داریم

$$\int_0^{-۱} kx\,dx=۶$$

از طرف دیگر

$$\int_0^{-۱} kx\,dx = \frac{kx^۲}{۲}\Big|_0^{-۱} = \frac{k}{۲}$$

پس

$$\frac{k}{۲} = ۶ \Rightarrow k = ۱۲$$

در نهایت

$$W = \int_0^۲ ۱۲x dx = ۶x^۲ \Big|_0^۲ = ۲۴ \text{ فوت ـ پوند}$$

۶ ـ مطلوب است مقدار کار لازم برای این که تمام آب داخل استخر مثال ۳ تا ۳ فوت بالا تر از لبه استخر با تلمبه به بالا کشیده شود.

پاسخ

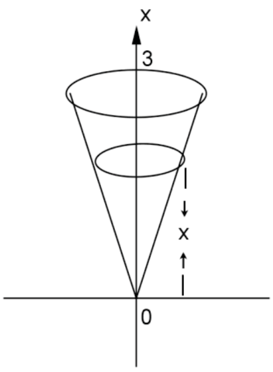
مانند مثال ۳ , مبدا مختصات را در کف استخر قرار می دهیم. چون باید آب سه فوت بالا تر از لبه استخر با تلمبه به بالا کشیده شود ، پس $l = ۱۱$ است. پس یک ذره آب ، x فوتی کف استخر ، باید $۱۱ - x$ فوت به بالا آورده شود. و آبی که باید با تلمبه خارج شود از صفر تا ۵ روی محور x است. مانند مثال ۳ ،مساحت برش عرضی , داریم $A(x) = ۱۰۰\pi$ پس بر اساس (۴)

$$W = ۶۲/۵\int_0^۵ (۱۱ - x)(۱۰۰\pi)dx = ۶۲۵۰\pi\left(۱۱x - \frac{۱}{۲}x^۲\right)\Big|_0^۵$$
$$= ۲۶۵۶۲۵\pi \text{ فوت ـ پوند}$$

۷ ـ یک مخزن به شکل مخروط وارونه به ارتفاع ۱۲ فوت و شعاع ۳ فوت ، پر از آب است. مطلوب است مقدار کار لازم برای بالا کشیدن تمام آب تا لبه مخزن.

پاسخ

محور x را مطابق تصویر زیر عمودی قرار می دهیم با راس مخروط روی مبدا مختصات. پس $l = ۱۲$ است. یک ذره آب در x فوتی راس مخروط باید $۱۲ - x$ فوت به بالا آورده شود. آبی که باید با تلمبه خارج شود از صفر تا ۱۲ روی محور x است. طبق مثلث های متشابه داریم



$$\frac{r(x)}{x} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

پس $r(x) = \frac{x}{۴}$ و در نتیجه $A(x) = \pi\,[r(x)]^{۲} = \frac{\pi\, x^{۲}}{۱۶}$ و لذا بر اساس (۴) داریم.

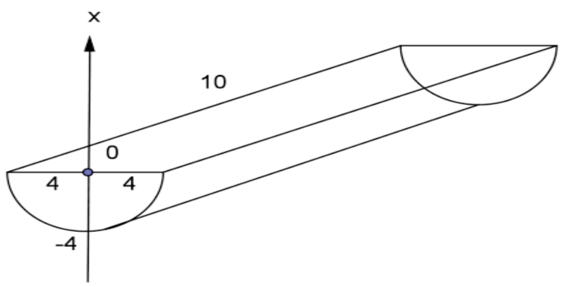
$$W = ۶۲\,/\,۵\int_0^{۱۲}(۱۲ - x)\frac{\pi}{۱۲}\;x^{۲}dx = \frac{۶۲\,/\,۵\pi}{۱۶}\int_0^{۱۲}\left(۱۲x^{۲} - x^{۳}\right)dx$$

$$= \frac{۶۲\,/\,۵\pi}{۱۶}\left(۴x^{۳} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)\Big|_0^{۱۲} = ۶۷۵۰\,\pi \text{ فوت – پوند}$$

۸ - یک مخزن بزرگ بنزین به شکل یک نیم استوانه به شعاع ۴ فوت و طول ۱۰ داریم .
اگر مخزن پر باشد ، مقدار کار لازم برای اینکه با تلمبه تمام بنزین را تا لبه مخزن پمپ کنیم ، محاسبه کنید. فرض کنید یک فوت مکعب بنزین ، ۴۲ پوند وزن داشته باشد.

پاسخ

اگر مخزن را روی محور x که عمودی است مطابق تصویر زیر قرار دهیم ، پس $l = 0$ است. و بنزینی که باید با تلمبه خارج شود ، از -۴ تا صفر روی محور x است.



علاوه بر این عرض $w(x)$ برش مقطع در x می شود $w(x) = ۲\sqrt{۱۶ - x^{۲}}$ پس

$$A(x) = ۱۰\,w(x) = ۲۰\,\sqrt{۱۶ - x^{۲}}$$

لذا بر اساس (۴) و بکار بردن ۴۲ بجای ۶۲ / ۵ داریم.

$$W = ۴۲\int_{-۴}^{0}(0 - x)۲۰\,\sqrt{۱۶ - x^{۲}}\;dx \overset{u=۱۶-x^{۲}}{\cong} ۸۰۰\int_0^{۱۶}\sqrt{u}\;\left(\frac{۱}{۲}\right)du$$

$$= ۴۲۰\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_0^{۱۶} = ۱۷۹۲۰ \text{ فوت – پوند}$$

۹ - یک توپ به وزن ۲ /۰ پوند ، عمودی به طرف بالا پرتاب می شود. ارتفاع توپ بعد از t ثانیه از طریق معادله زیر بدست می آید.

$$h(t) = ۶ + ۸t - ۱۶t^۲$$

تا زمانی که توپ با زمین بر خورد کند.

پاسخ

الف - مطلوب است مقدار کار انجام شده از طرف نیروی جاذبه بر توپ ، از زمانی که توپ به بالا ترین ارتفاع می رسد تا به زمین برسد ،

می دانیم $h'(t) = ۸ - ۳۲t$ است. پس $h'(t) = 0$ است ، برای $t = \frac{۱}{۴}$

حد اکثر ارتفاع توپ $h\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۷$,پس ارتفاع ماکسیمم توپ ۷ فوت است.

چون $f(h) = -۰/۲$ است ، پس داریم.

$$W = \int_{۷}^{0} -۰/۲dh = (-۰/۲)h\Big|_{۷}^{0} = ۱/۴ \text{ فوت – پوند}$$

ب مطلوب است مقدار کار انجام شده بر توپ هنگام برگشت ، اگر توب در ارتفاع ۶ فوتی زمین گرفته شود.

در این قسمت حد بالایی انتگرا ل به ۶ تغییر می دهیم. زیرا شش فوت قبل از رسیدن توپ به زمین ، گرفته می شود.

$$W = \int_{۷}^{۶} -۰/۲dh = (-۰/۲)h\Big|_{۷}^{۶} ۰/۲ \text{ فوت – پوند}$$

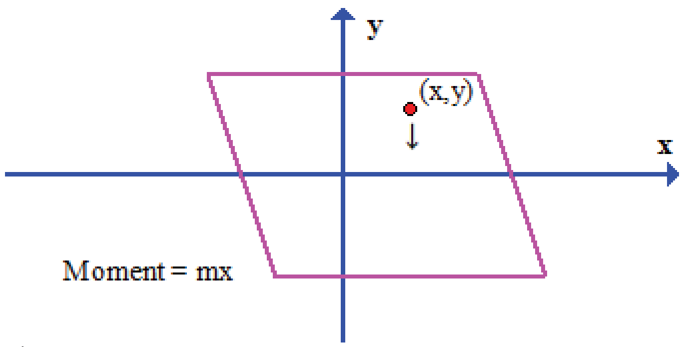
۳.۷ - انتگرال و فیزیک – گشتاور و مرکز ثقل Moments and Centers of Gravity

بچه ها که با الا کلنگ بازی می کنند ، به سرعت یاد می گیرند که بچه سنگین تر اثر بیشتری بر حرکت الا کلنگ دارد تا بچه سبکتر. و یاد می گیرند که اگر بچه سبک تر از محور لغزش الا کلنگ دور تر شود می تواند با بچه سنگین تر موازنه بر قرار کند.

در این بخش می خواهیم در مورد گشتاور بحث کنیم. گشتاور عاملی است که باعث حرکت دورانی در جسم می شود.

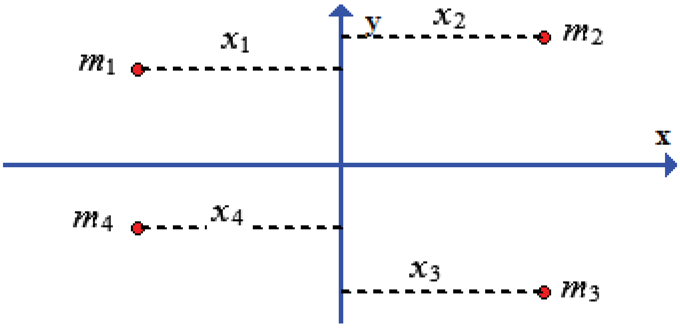
گشتاور های جرم های نقطه ای یا ذره ای Moments of Point Masses

ابتدا برای درک بهتر از مفهوم گشتاور ، فرض کنید یک شئی دارای جرم مثبت m در یک نقطه (x, y) در صفحه مختصات متمرکز است. چنین شئی را **جرم ذره ای یا نقطه ای Point Mass** می نامیم. گشتاور این جرم ذره ای **حول محور y** را mx تعریف می کنیم. mx یا همان گشتاور عبارت است از اندازه یا میزان گرایش جرم ذره ای برای چرخش حول محور y. تصویر زیر.

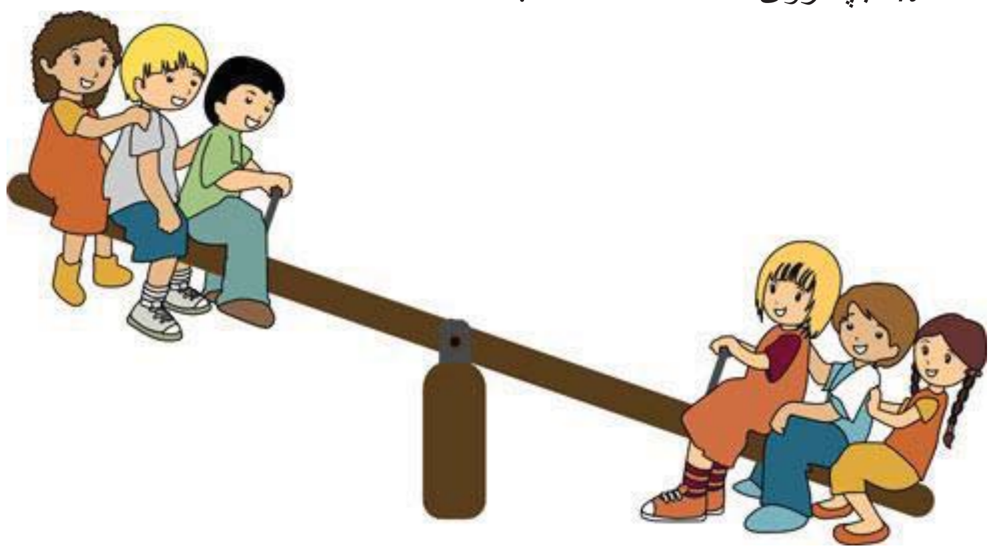


مقدار گشتاور بستگی به x و m دارد. هرکدام از این دو بیشتر شود ، مقدار گشتاور بیشتر می شود.

این تعریف ما از گشتاور با این موضوع سازگار است که هر چه شخص سنگین تر و یا دور تر از محور باشد ، الا کلنگ آسان تر حول محور می چرخد.
حالا، تصور کنید چندین جرم های ذره ای وجود داشته باشد ، با جرم های $m_۱, m_۲, \cdots, m_n$ که به ترتیب در نقاط $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \cdots, (x_n, y_n)$ در صفحه مختصات قرار دارند. تصویر زیر.



در صورتی که این جرم های نقطه ای روی یک خط قرار داشته باشند ، می توان آنرا شبیه تصویر زیر تصور کرد که n بچه روی الا کلنگ نشسته اند.



گشتاور M_y را چنین تعریف می کنیم.

مجموعه جرم های نقطه ای **حول محور** y عبارت است از

جمع هر یک از جرم های نقطه ای حول محور y

$$M_y = m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots m_nx_n \qquad (۱)$$

اگر M_y را به عنوان میزان گرایش مجموعه جرم ها به ایجاد دوران حول محور y تصور کنیم ، پس اگر $M_y = 0$ باشد ، پس گرایشی برای چرخیدن وجود ندارد. در این صورت می گوییم جرم های نقطه ای نسبت به محور y در **تعادل** **Equilibrium** است. هنگامی که چندین بچه روی الا کلنگ قرار دارند و الا کلنگ در حالت تعادل است ، به اسانی بچه ها می توانند با فشار دادن پا به زمین آنرا به چرخش آورند.

همچنین می توان **گشتاور** M_x **حول محور** x را چنین تعریف کرد.

$$M_x = m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + \cdots + m_ny_n \qquad (۲)$$

در این صورت اگر $M_x = 0$ باشد ، پس جرم های نقطه ای نسبت به چرخش حول محور x در حال تعادل هستند.

حالا فرض کنید $m = m_۱ + m_۲ + \cdots + m_n$ ترکیب جرم های نقطه ای که در بالا بحث کردیم ، باشد. و فرض کنید می خواهیم یک نقطه $(\overline{x}, \overline{y})$ پیدا کنیم با این خاصیت که اگر یک جرم نقطه ای به جرم m در $(\overline{x}, \overline{y})$ قرار دهیم ، پس گشتاور آن حول محور های x و y به ترتیب M_x و M_y باشد. گشتاور یک جرم نقطه ای حول محور y می شود $m\overline{x}$ و گشتاور آن حول محور x می شود $m\overline{y}$, بطوری که

$$m\overline{x} = M_y = m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots + m_nx_n$$

$$m\overline{y} = M_x = m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + \cdots + m_ny_n$$

این شرایط $\overline{x}$ و $\overline{y}$ به ما میگوید

$$\overline{x} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots + m_nx_n}{m} = \frac{M_y}{m} \qquad (۳)$$

$$\overline{y} = \frac{m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + \cdots + m_ny_n}{m} = \frac{M_x}{m}$$

نقطه $(\overline{x}, \overline{y})$ را **مرکز ثقل** **Center of Gravity** مجموعه جرم های نقطه ای داده شده می نامند.

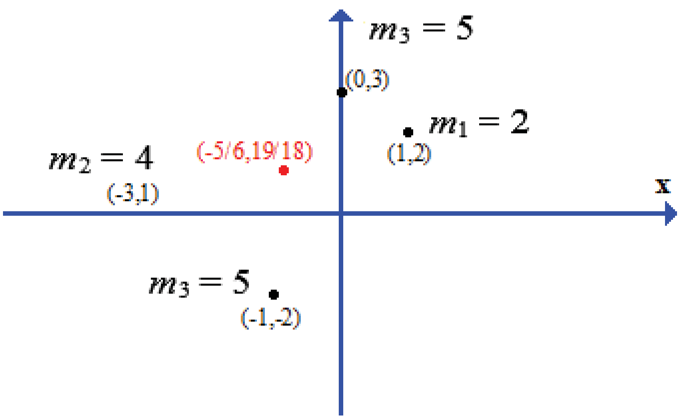
مثال۱ - دو گشتاور و مرکز ثقل اشیائ با جرم های ۲, ۴, ۵, ۷ که به ترتیب روی نقاط

$$(۱,۲), (-۳,۱), (-۱,-۲), (0,۳)$$

قرار دارند را پیدا کنید.

پاسخ

در تصویر زیر نقاط سیاه رنگ جرم های داده شده در نقاط مربوطه هستند و نقطه قرمز رنگ ، مرکز ثقل است. همراه با مختصات آن.



بر اساس (۱) و (۲) گشتاور ها مطابق زیر هستند.

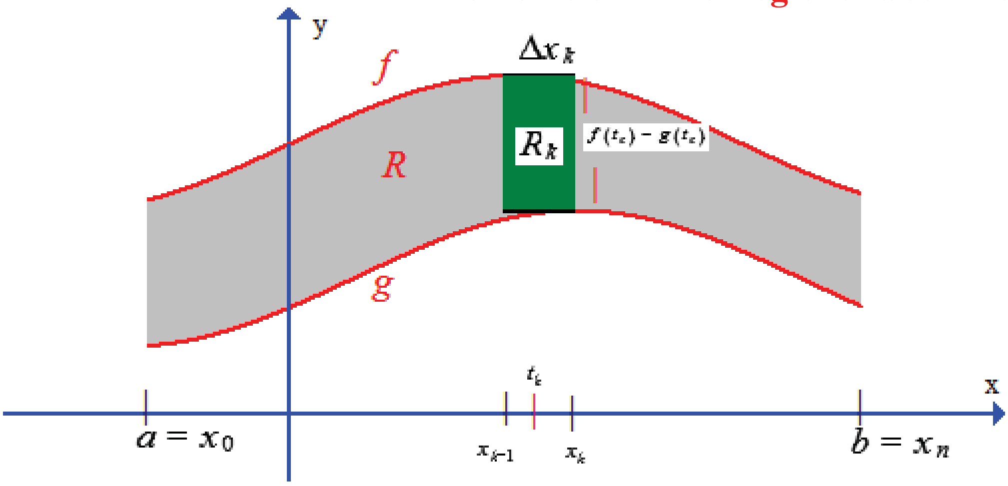
$$M_y = ۲(۱) + ۴(-۳) + ۵(-۱) + ۷(0) = -۱۵$$

$$M_x = ۲(۲) + ۴(۱) + ۵(-۲) + ۷(۳) = ۱۹$$

چون $m=۲+۴+۵+۷=۱۸$ است ، لذا بر اساس (۳) داریم.

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{-۱۵}{۱۸}=\frac{-۵}{۶} \quad \text{و} \quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{۱۹}{۱۸}$$

گشتاور ناحیه های مسطح حول محور y
Moments of Plane Regions about the y Axis



از این به بعد فرض می کنیم که یک جرم بطور یکسان سر تا سر یک ناحیه مسطح R پخش شده است ، تا کنون فرض می کردیم جرم در چند نقطه متمرکز است. مثلا اگر R یک ورق فلز باشد ، جرم در سر تا سر ورق فلز پخش است. فرض می کنیم R ناحیه ای است بین دو تابع پیوسته f و g در بازه $[a,b]$ بطوری که

$$g(x)\le f(x) \quad , \quad a\le x\le b$$

تصویر بالا. همچنین فرض می کنیم جرم هر ناحیه فرعی R مساوی مساحت آن است.

فرض می کنیم $\wp=\{x_0,x_۱,\cdots,x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. برای k بین یک و n فرض می کنیم t_k یک عدد اختیاری در بازه فرعی $\{x_{k-۱},x_k\}$ باشد. و فرض می کنیم R_k آن قسمت از R باشد که بین $x=x_{k-۱}$ و $x=x_k$ است. اگر Δx_k کوچک باشد ، مساحت ΔA_k مربوط به R_k تقریبا $[f(t_k)-g(t_k)]\Delta x_k$ است. علاوه بر این گشتاور ΔM_k مربوط به R_k بآید تقریبا مساوی گشتاوری باشد که اگر تمام جرم R_k روی خط $x=t_k$ متمرکز می شد. یعنی

$$\Delta M_k \approx (\text{فاصله تا محور } y)*(\text{مساحت})$$
$$=t_k\Delta A_k=t_k[f(t_k)-g(t_k)]\Delta x_k$$

پس گشتاور M_y تمام ناحیه R که مجموع گشتاور های $\Delta M_۱,\Delta M_۲,\cdots,\Delta M_n$ است باید تقریبا

$$\sum_{k=۱}^{n}\overbrace{t_k}^{\text{مسافت تا محور } y}\;\overbrace{[f(t_k),g(t_k)]}^{\text{ارتفاع}}\;\overbrace{\Delta x_k}^{\text{عرض}}$$

باشد ، که این خود یک مجموع ریمانی است برای $x(f-g)$ در $[a,b]$. لذا M_y را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$M_y = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} t_k[f(t_k)-g(t_k)]\Delta x_k = \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx \qquad (۴)$$

و اگر $g=0$ باشد ، داریم

$$M_y = \int_a^b xf(x)dx$$

انتگرال سمت راست معادله بالا منطقی به نظر می رسد ، بدون در نظر گرفتن شرایط هندسی یا فیزیکی. معمولا آنرا **گشتاور** f می نامند. (در صورتی که انتگرال سمت راست (۴) را گشتاور ناحیه می نامند.) گشتاور های توابع نقش مهمی در آمار $Statistics$ و احتمالات $Probability$ دارند.

مثال ۲ - مطلوب است گشتاور ناحیه R حول محور y ، اگر R مستطیلی باشد ، محدود بین خطوط

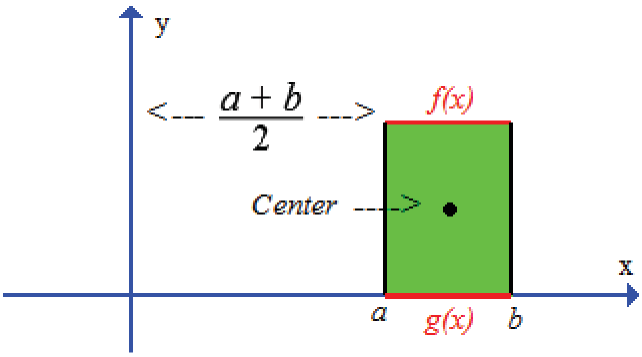
$$x=a ، x=b ، y=0 ، y=c$$

پاسخ

در این مثال $f(x)=c$ و $g(x)=0$ است. لذا ارتفاع مستطیل در هر نقطه x در $[a,b]$ تابع ثابت c است ، پس

$$M_y = \int_a^b x(c-0)dx = \frac{c\left(b^۲-a^۲\right)}{۲} = c(b-a)\left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

ملاحظه می کنید که $c(b-a)$ مساحت R است ، و $\frac{a+b}{۲}$ فاصله بین مرکز $Center$ و محور y است. و همچنین توجه داشته باشید که این همان گشتاوری است که اگر تمام جرم متمرکز میشد در یک نقطه روی خط $x=\frac{b+a}{۲}$ و نیم راه بین خطوط $x=a$ و $x=b$. تصویر زیر.



گشتاور های ناحیه های مسطح حول محور x

Moments of Plane Regions about the x Axis

حالا بر می گردیم به گشتاور یک ناحیه حول محور x. ابتدا ، ناحیه R بین نمودار یک تابع پیوسته و نا منفی f و محور x در $[a,b]$ را در نظر بگیرید . موقتا فرض کنید f ثابت باشد ، یعنی

$$f(x)=c ، \quad a\le x\le b$$

پس R یک مستطیل است. تصویر مثال ۲ را ملاحظه کنید. با توجه به شباهت با مثال ۲ ، می دانیم گشتاور M_x ناحیه R حول محور x باید مطابق زیر تعریف شود.

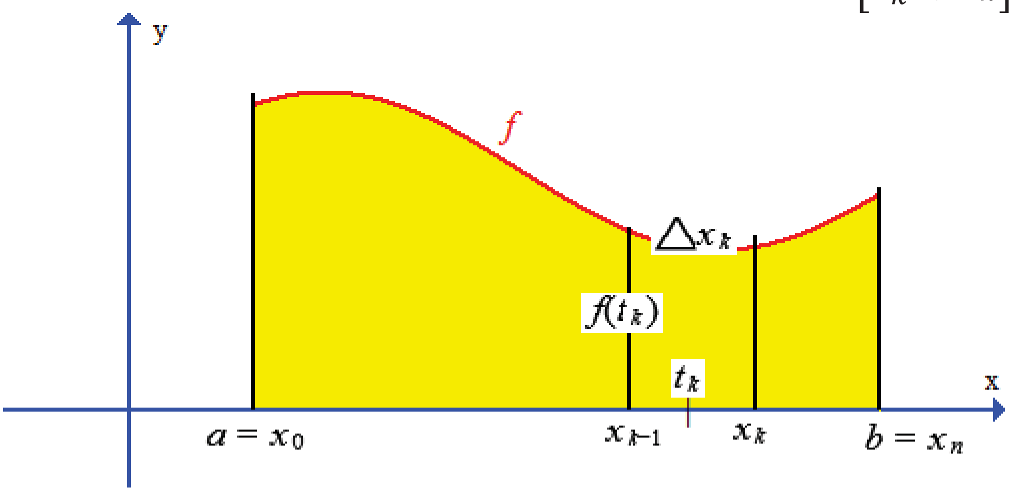
$$M_x = R \text{ مساحت } * \quad x \text{ فاصله از مرکز } R \text{ تا محور }$$

$$= [c(b-a)]\left(\frac{c}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}c^{۲}(b-۱) \qquad (۵)$$

اگر f ثابت نباشد ، پس مانند گذشته ، فرض می کنم $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ یک پارش $[a,b]$ باشد. برای هر k بین یک و n فرض می کنیم R_k آن قسمت از R باشد که بین خطوط

$$\mathrm{x} = x_k \quad \text{و} \quad x = x_{k-۱}$$

باشد .اگر Δx_k کوچک باشد ، و t_k یک عدد اختیاری در بازه $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد ، پس گشتاور ΔM_k مربوط به R_k حول محور x باید تقریبا مساوی گشتاور یک مستطیل با ارتفاع $f(t_k)$ و قاعده $[x_{k-۱}, x_k]$ حول محور x باشد. تصویر زیر.



یعنی

$$\Delta M_x \approx \frac{۱}{۲}[f(t_k)]^{۲}(x_k - x_{k-۱}) = \frac{۱}{۲}[f(t_k)]^{۲}\Delta x_k$$

چون M_x مربوط به R باید مجموع $\Delta M_۱, \Delta M_۲, \cdots, \Delta M_n$ باشد ، پس M_x باید تقریبا مساوی

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲}[f(t_k)]^{۲}\Delta x_k$$

باشد ، این خود یک مجموع ریمانی است برای $\frac{۱}{۲}f^{۲}$ در $[a,b]$. پس به نتیجه زیر می رسیم.

$$M_x = \lim_{\|\wp\|\to 0}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲}[f(t_k)]^{۲}\Delta x_k = \int_a^b \frac{۱}{۲}[f(x)]^{۲}dx$$

مطالب بالا را می توان بسط داد به گشتاور یک ناحیه بین نمودارهای دو تابع پیوسته f و g حول محور x در بازه $[a,b]$ یعنی,

$$M_x = \int_a^b \frac{۱}{۲}\left\{[f(x)]^۲ - [g(x)]^۲\right\} dx$$

در ذیل تعاریف گشتاور های یک ناحیه حول هر دو محور مختصات و تعریف مرکز ثقل ناحیه R خلاصه می کنیم.

تعریف ۳.۴
فرض می کنیم f و g در $[a,b]$ پیوسته باشند ، و

$$g(x) \leq f(x) \quad ، \quad a \leq x \leq b$$

و فرض می کنیم R ناحیه بین نمودار های f و g در $[a,b]$ باشد. پس **گشتاور R حول محور x** مطابق زیر است.

$$M_x = \int_a^b \frac{۱}{۲}\left\{[f(x)]^۲ - [g(x)]^۲\right\} dx$$

و گشتاور R حول محور y مطابق زیر است.

$$M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

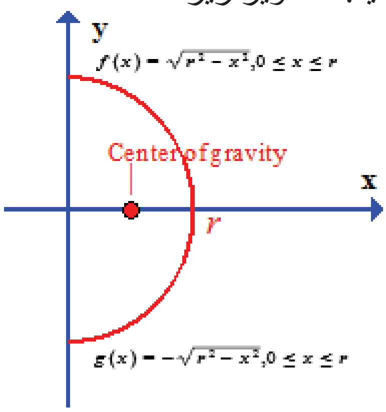
اگر R دارای مساحت مثبت A باشد ، پس **مرکز ثقل یا مرکز جرم** مطابق زیر تعریف می شود.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \quad ، \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

مثال ۳ - فرض کنید ناحیه R یک نیم دائره محصور بین محور y و نمودار های f و g باشد. در صورتی که داشته باشیم.

$$f(x)=\sqrt{r^{۲}-x^{۲}} \quad \text{و} \quad g(x)=-\sqrt{r^{۲}-x^{۲}} \quad \text{برای} \quad 0\le x\le r$$

گشتاور ها و مرکز ثقل R را پیدا کنید. تصویر زیر



پاسخ

$$M_x=\int_0^r \frac{۱}{۲}\left[\left(r^{۲}-x^{۲}\right)-\left(r^{۲}-x^{۲}\right)\right]dx=\frac{۱}{۲}\int_0^r 0dx=0$$

$$M_y=\int_0^r x\left[\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}-\left(-\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}\right)\right]dx=۲\int_0^r x\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}\,dx$$

$$=-\frac{۲}{۳}\left(r^{۲}-x^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_0^r=\frac{۲}{۳}r^{۳}$$

برای مساحت R داریم

$$A=\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}$$

پس

$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\frac{۲}{۳}r^{۳}}{\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}}=\frac{۴r}{۳\pi}$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{0}{\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}}=0$$

در نتیجه مرکز ثقل روی محور x قرار دارد و تقریبا $۰/۴۲r$ دورتر از مبدا مختصات.

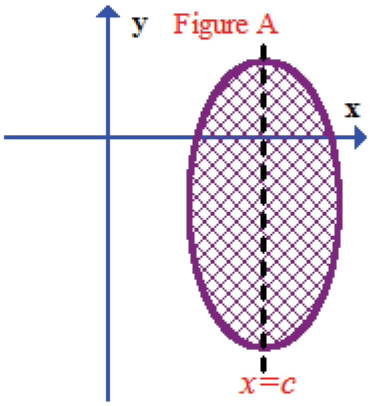
$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{۴r}{۳\pi},0\right)$$

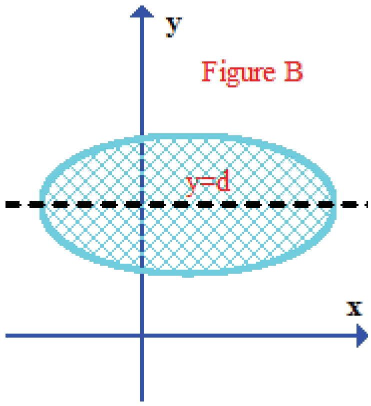
در مثال ۳ دیدیم که R نسبت به محور x قرینه است و مرکز ثقل روی محور x قرار دارد.

بطور کلی

۱ - اگر R نسبت به خط $x = c$ قرینه باشد ، مرکز ثقل R روی خط $x = c$ قرار دارد و $\overline{x} = c$ است. تقریبا تصویر A

۲ - اگر R نسبت به خط $y = d$ قرینه باشد ، مرکز ثقل R روی خط $y = d$ قرار دارد و $\overline{y} = d$ است. تقریبا تصویر B

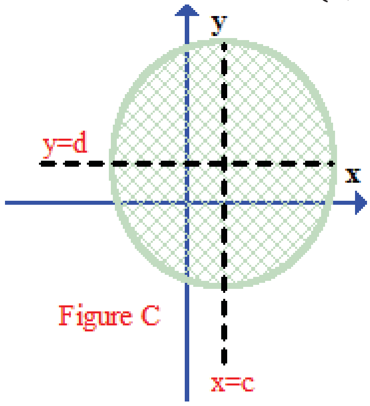




مثال ۴ نشان دهید مرکز ثقل یک دائره یا یک مستطیل ، مرکز آن است.

پاسخ

اگر (c, d) مرکز ناحیه مورد سئوال است ، پس واضح است که ناحیه نسبت به $x = c$ و $y = d$ قرینه است ، پس مرکز ثقل ناحیه (c, d) است. تصویر C



تمرینات ۳.۷

۱ - یک بچه به وزن ۳۰ کیلو گرم روی یک الا کلنگ درفاصله ، ۱/۵ متری سمت چپ محور چرخش نشسته است. یک بچه دیگر ، به وزن ۲۰ کیلو گرم درفاصله ، ۲ متر ی سمت راست محور چرخش نشسته است. کدام سمت الا کلنگ بلند می شود؟

۲ - اگر یک بچه ۱۰ کیلو گرمی، یک متری سمت چپ الا کلنگ نشسته باشد. بعداً دو بچه دیگر ، یکی به وزن ۱۵ کیلو گرم و دیگری به وزن ۲۰ کیلو گرم در طرفین الا کلنگ به فواصل مساوی نسبت به محور چرخش بنشینند ، محل نشستن این بچه ها را پیدا کنید بطوری که الا کلنگ به حالت تعادل قرار گیرد.

در تمرینات زیر مرکز ثقل ناحیه R بین نمودار های f و g در بازه های داده شده را پیدا کنید.

۳) $f(x) = x, g(x) = -۲; [0, ۲]$

۴) $f(x) = ۲ - x, g(x) = -(۲ - x); [0, ۲]$

۵) $f(x) = (x + ۱)^۲, g(x) = (x - ۱)^۲; [۱, ۲]$

۶) $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}, g(x) = -(۱ + x); [0, ۱]$

۷) $f(x) = \sin x + \cos x, g(x) = \sin x - \cos x; \left[0, \frac{\pi}{۲}\right]$

۸ - مرکز ثقل ناحیه بین نمودار های f و g را پید کنید ، اگر $f(x) = ۲ - x^۲$ و $g(x) = |x|$ باشد.

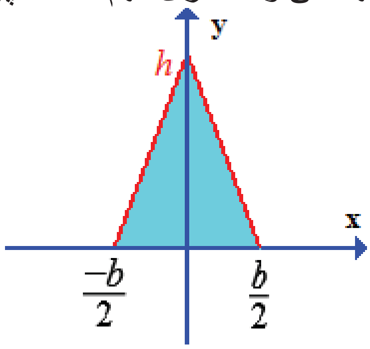
۹ - مرکز ثقل ناحیه بین نمودار های $y = x + ۲$ و $y = -۳x + ۶$ و $y = \frac{۲-x}{۳}$ را پیدا کنید.

۱۰ - مرکز ثقل ناحیه شش ضلعی که مختصات روس آن مطابق زیر است پیدا کنید.

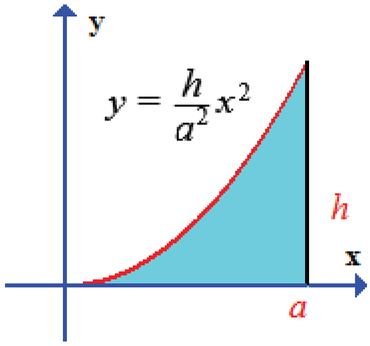
$(0,0), (0, ۶), (۱, ۱)(۱, ۵), (-۱, ۱), (-۱, ۵)$

۱۱ - مرکز ثقل ناحیه داخل نمودار آسترویید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ را پیدا کنید.

۱۲ - مرکز ثقل مثلث زیر را که در مهندسی و معماری مهم است ، پیدا کنید.



۱۳ - مرکز ثقل ناحیه زیر را که , به سه گوش قوسی $Parabolic\ Spandrel$ موسوم است ، و در معماری مهم است ، پیدا کنید.



پاسخ تمرینات ۳.۷

۱ - یک بچه به وزن ۳۰ کیلو گرم روی یک الا کلنگ درفاصله ، ۱/۵ متری سمت چپ محور چرخش نشسته است. یک بچه دیگر ، به وزن ۲۰ کیلو گرم درفاصله ۲ متر ی سمت راست محور چرخش نشسته است. کدام سمت الا کلنگ بلند می شود؟

پاسخ

صفر محور x را روی محور چرخش قرار می دهیم , بطوری که قسمت مثبت محور x سمت راست باشد. پس گشتاور دو بچه مطابق زیر بدست می اید.

$$۳۰(-۱/۵)+۲۰(۲)=-۵$$

پس سمت راست الا کلنگ بالا می رود.

۲ - اگر یک بچه ۱۰ کیلو گرمی، یک متری سمت چپ الا کلنگ نشسته باشد. بعداً دو بچه دیگر ، یکی به وزن ۱۵ کیلو گرم و دیگری به وزن ۲۰ کیلو گرم در طرفین الا کلنگ به فواصل مساوی نسبت به محور چرخش بنشینند ، محل نشستن این بچه ها را پیدا کنید بطوری که الا کلنگ به حالت تعادل قرار گیرد.

پاسخ

مبدا محور x را روی محور چرخش قرار می دهیم بطوری که قسمت مثبت محور x به طرف بچه ۱۰ کیلو گرمی باشد. اگر بچه ۱۵ کیلو گرامی سمت مثبت x و بچه ۲۰ کیلو گرمی سمت منفی x بنشینند ، پس اگر بخواهیم تعادل بر قرار شود باید معادله زیر بر قرار باشد.

$$۱۰(۱)+۱۵(x)+۲۰(-x)=0$$

$$۱۰-۵x=0$$

$$x=۲$$

پس بچه ۱۵ کیلو گرمی باید دو متری محور چرخش همان طرف که بچه ۱۰ کیلو گرمی نشسته ، قرار گیرد ، و بچه ۲۰ کیلو گرمی دو متری محور چرخش در سمت دیگر بنشیند.

در تمرینات زیر مرکز ثقل ناحیه R بین نمودار های f و g در بازه های داده شده را پیدا کنید.

۳) $f(x)=x, g(x)=-۲; [0,۲]$

$$M_x=\frac{۱}{۲}\int_0^{۲}\left[x^{۲}-(-۲)^{۲}\right]dx=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x\right)\Big|_0^{۲}=\frac{-۸}{۳}$$

$$M_y=\int_0^{۲}x[x-(-۲)]dx=\int_0^{۲}\left(x^{۲}+۲x\right)dx=\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}\right)\Big|_0^{۲}=\frac{۲۰}{۳}$$

$$A=\int_0^{۲}\left(x-(-۲)\right)dx=\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲x\right)\Big|_0^{۲}=۶$$

$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\frac{۲۰}{۳}}{۶}=\frac{۱۰}{۹}\ ;\overline{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{\frac{-۸}{۳}}{۶}=\frac{-۴}{۹}$$

$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{۱۰}{۹},\frac{-۴}{۹}\right)$$

۴) $f(x)=۲-x, g(x)=-(۲-x); [0,۲]$

$$M_x=\frac{۱}{۲}\int_0^{۲}\left[(۲-x)^{۲}-\left(-(۲-x)\right)^{۲}\right]dx=0$$

$$M_y=\int_0^{۲}x\left[(۲-x)-\left(-(۲-x)\right)\right]dx=\int_0^{۲}\left(۴x-۲x^{۲}\right)dx$$

$$=\left(۲x^{۲}-\frac{۲}{۳}x^{۳}\right)\Big|_0^{۲}=\frac{۸}{۳}$$

$$A=\int_0^{۲}\left[(۲-x)-\left(-(۲-x)\right)\right]dx=\int_0^{۲}(۴-۲x)dx=\left(۴x-x^{۲}\right)\Big|_0^{۲}=۴$$

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{۸}{۳}}{۴} = \frac{۲}{۳}; \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{0}{۴} = 0$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{۲}{۳}, 0\right)$$

۵) $f(x) = (x+۱)^{۲}, g(x) = (x-۱)^{۲}; [۱,۲]$

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲} \left[(x+۱)^{۴} - (x-۱)^{۴}\right] dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۵}(x+۱)^{۵} - \frac{۱}{۵}(x-۱)^{۵}\right]\Big|_{۱}^{۲} = ۲۱$$

$$M_y = \int_{۱}^{۲} x\left[(x+۱)^{۲} - (x-۱)^{۲}\right] dx = \int_{۱}^{۲} ۴x^{۲} dx = \frac{۴}{۳}x^{۳}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۲۸}{۳}$$

$$A = \int_{۱}^{۲} \left[(x+۱)^{۲} - (x-۱)^{۲}\right] dx = \int_{۱}^{۲} ۴x dx = ۲x^{۲}\Big|_{۱}^{۲} = ۶$$

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{۲۸}{۳}}{۶} = \frac{۱۴}{۹}; \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{۲۱}{۶} = \frac{۷}{۲}$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{۱۴}{۹}, \frac{۷}{۲}\right)$$

۶) $f(x) = \sqrt{۱-x^{۲}}, g(x) = -(۱+x); [0,۱]$

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_{0}^{۱} \left[\left(\sqrt{۱-x^{۲}}\right)^{۲} - \left(-(۱+x)\right)^{۲}\right] dx = \frac{۱}{۲}\int_{0}^{۱} \left(-۲x - ۲x^{۲}\right) dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(-x^{۲} - \frac{۲}{۳}x^{۳}\right)\Big|_{0}^{۱} = \frac{-۵}{۶}$$

$$M_y = \int_{0}^{۱} x\left[\sqrt{۱-x^{۲}} - \left(-(۱+x)\right)\right] dx = \int_{0}^{۱} \left(x\sqrt{۱-x^{۲}} + x + x^{۲}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{۱}{۳}(۱-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x^{۳}\right)\Big|_{0}^{۱} = \frac{۷}{۸}$$

$$A=\int_0^{۱}\left[\sqrt{۱-x^{۲}}-\left(-(۱+x)\right)\right]dx$$
$$=\int_0^{۱}\sqrt{۱-x^{۲}}dx+\int_0^{۱}(۱+x)dx$$
$$\overset{x=\sin u}{\triangleq}\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\sin^{۲}u}\ \cos u\,du+\left(x+\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big|_0^{۱}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲}u\,du+\frac{۳}{۲}=\left(\frac{u}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}}+\frac{۳}{۲}=\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۲}$$
$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\frac{۷}{۶}}{\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۴}{۳\pi+۱۸};\overline{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{-\frac{۵}{۶}}{\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۲}}=\frac{-۱۰}{۳\pi+۱۸}$$
$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{۱۴}{۳\pi+۱۸},\frac{-۱۰}{۳\pi+۱۸}\right)$$

۷) $f(x)=\sin x+\cos x, g(x)=\sin x-\cos x;\left[0,\frac{\pi}{۲}\right]$

$$M_x=\frac{۱}{۲}\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\left[(\sin x+\cos x)^{۲}-(\sin x-\cos x)^{۲}\right]dx$$
$$=\frac{۱}{۲}\int_0^{\frac{\pi}{۲}}۴\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\sin ۲x\,dx=\frac{-۱}{۲}\cos ۲x\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}}=۱$$
$$M_y=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}x[(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}۲x\cos x\,dx=۲x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}}-۲\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\sin x\,dx=\pi+۲\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}}=\pi-۲$$
$$A=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}[(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{۲}}۲\cos x\,dx=۲\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{۲}}=۲$$

$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\pi-۲}{۲}=\frac{\pi}{۲}-۱;\overline{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{۱}{۲}$$
$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{\pi}{۲}-۱,\frac{۱}{۲}\right)$$

۸ ـ مرکز ثقل ناحیه بین نمودار های f و g را پید کنید ، اگر $f(x)=۲-x^۲$ و $g(x)=|x|$ باشد.

پاسخ

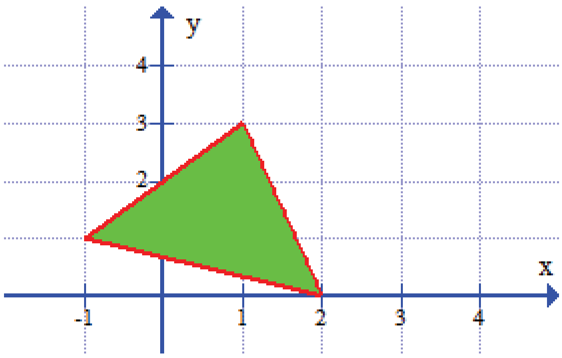
نمودار های f و g در (x,y) یه دیگر را قطع می کنند اگر
$$۲-x^۲=y=|x|$$
پس
$$x=۲-x^۲ \text{ برای } x\geq 0$$
$$-x=۲-x^۲ \text{ برای } x\leq 0$$
پس $x=-۱$ یا $x=۱$

$$M_x=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\left[\left(۲-x^۲\right)^۲-|x|^۲\right]dx=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\left(۴-۵x^۲+x^۴\right)dx$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(۴x-\frac{۵}{۳}x^۳+\frac{۱}{۵}x^۵\right)\Bigg|_{-۱}^{۱}=\frac{۳۸}{۱۵}$$
$$M_y=\int_{-۱}^{۱}x\left[\left(۲-x^۲\right)-|x|\right]dx$$
$$=\int_{-۱}^{0}\left(۲x+x^۲-x^۳\right)dx+\int_{0}^{۱}\left(۲x-x^۲-x^۳\right)dx$$
$$=\left(x^۲+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}\right)\Bigg|_{-۱}^{0}+\left(x^۲-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}\right)\Bigg|_{0}^{۱}=0$$
$$A=\int_{-۱}^{۱}\left(۲-x^۲-|x|\right)dx=\int_{-۱}^{0}\left(۲+x-x^۲\right)dx+\int_{0}^{۱}\left(۲-x-x^۲\right)dx$$
$$=\left(۲x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}\right)\Bigg|_{-۱}^{0}+\left(۲x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}\right)\Bigg|_{0}^{۱}=\frac{۷}{۶}+\frac{۷}{۶}=\frac{۷}{۳}$$
$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}=0;\overline{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{\frac{۳۸}{۱۵}}{\frac{۷}{۳}}=\frac{۳۸}{۳۵}$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{۳۸}{۳۵}\right)$$

۹ - مرکز ثقل ناحیه بین نمودار های $y = x + ۲$ و $y = -۳x + ۶$ و $y = \frac{۲-x}{۳}$ را پیدا کنید.

پاسخ



نمودار های $y = x + ۲$ و $y = -۳x + ۶$ و $y = \frac{۲-x}{۳}$ دو به دو یکدیگر را در (x, y) قطع می کنند بطوری که

$$x + ۲ = -۳x + ۶$$
$$x + ۲ = \frac{۲ - x}{۳}$$
$$-۳x + ۶ = \frac{۲ - x}{۳}$$

باشد. از معادله های بالا به ترتیب داریم $x = ۱, x = -۱, x = ۲$

برای استفاده از تعریف ۳.۵ فرض می کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & \text{برای } -۱ \leq x \leq ۱ \\ -۳x + ۶ & \text{برای } ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{۲ - x}{۳} \quad \text{برای } -۱ \leq x \leq ۲$$

باشد. پس

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\left[(x + ۲)^۲ - \left(\frac{۲ - x}{۳}\right)^۲\right]dx + \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\left[(-۳x + ۶)^۲ - \left(\frac{۲ - x}{۳}\right)^۲\right]dx$$

$$= \frac{۴}{۹}\int_{-۱}^{۱}\left(x^۲ + ۵x + ۴\right)dx + \frac{۴۰}{۹}\int_{۱}^{۲}\left(x^۲ - ۴x + ۴\right)dx$$

$$= \frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{۳}x^۳ + \frac{۵}{۲}x^۲ + ۴x\right)\Big|_{-۱}^{۱} + \frac{۴۰}{۹}\left(\frac{۱}{۳}x^۳ - ۲x^۲ + ۴x\right)\Big|_{۱}^{۲}$$

$$= \frac{۱۰۴}{۲۷} + \frac{۴۰}{۲۷} = \frac{۱۶}{۳}$$

$$M_y = \int_{-۱}^{۱} x\left[(x+۲) - \left(\frac{۲-x}{۳}\right)\right]dx = \int_{۱}^{۲} x\left[(-۳x+۶) - \left(\frac{۲-x}{۳}\right)\right]dx$$

$$= \frac{۴}{۳}\int_{-۱}^{۱}\left(x^{۲}+x\right)dx + \frac{۸}{۳}\int_{۱}^{۲}\left(-x^{۲}+۲x\right)dx$$

$$= \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big|_{-۱}^{۱} + \frac{۸}{۳}\left(-\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}\right)\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۸}{۹} + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۸}{۳}$$

$$A = \int_{-۱}^{۱}\left[(x+۲) - \left(\frac{۲-x}{۳}\right)\right]dx + \int_{۱}^{۲}\left[(-۳x+۶) - \left(\frac{۲-x}{۳}\right)\right]dx$$

$$= \frac{۴}{۳}\int_{-۱}^{۱}(x+۱)dx + \frac{۸}{۳}\int_{۱}^{۲}(-x+۲)dx$$

$$= \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+x\right)\Big|_{-۱}^{۱} + \frac{۸}{۳}\left(-\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲x\right)\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۸}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۴$$

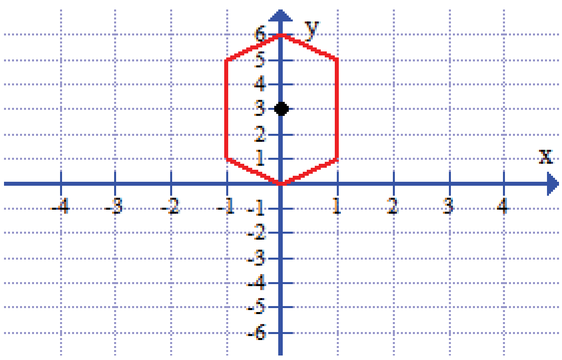
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{۸}{۳}}{۴} = \frac{۲}{۳};\ \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{۱۶}{۳}}{۴} = \frac{۴}{۳}$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}\right)$$

۱۰ - مرکز ثقل ناحیه شش ضلعی که مختصات روس آن مطابق زیر است پیدا کنید.

$$(0,0),(0,۶),(۱,۱)(۱,۵),(-۱,۱),(-۱,۵)$$

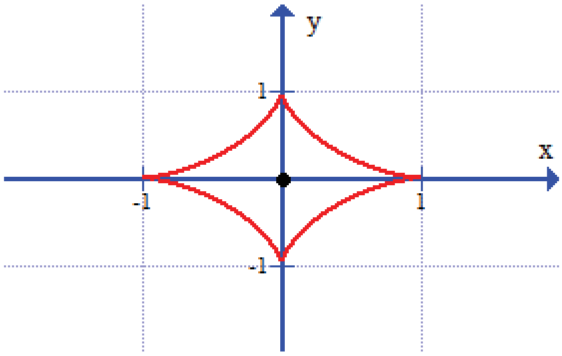
پاسخ



$$(\bar{x},\bar{y}) = (0,۳)$$

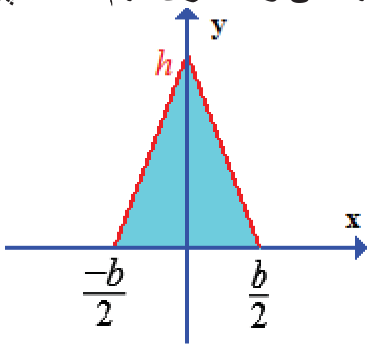
۱۱ - مرکز ثقل ناحیه داخل نمودار آسترویید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ را پیدا کنید.

پاسخ



$$(\overline{x},\overline{y}) = (0,0)$$

۱۱ - مرکز ثقل مثلث زیر را که در مهندسی و معماری مهم است ، پیدا کنید.



پاسخ

مثلث نسبت به محور y قرینه است ، پس $\overline{x} = 0$ است. حالا فرض می کنیم

$$f(x) = \begin{cases} h + \frac{۲h}{b}x & \text{برای} \quad \frac{-b}{۲} \le x \le 0 \\ h - \frac{۲h}{b}x & \text{برای} \quad 0 \le x \le \frac{b}{۲} \end{cases}$$

پس

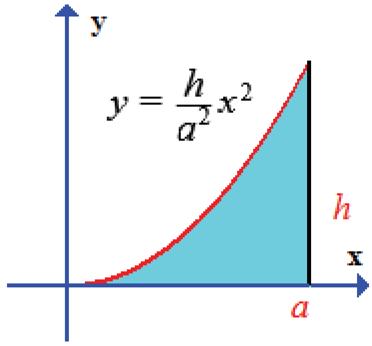
$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{b}{۲}}^{0}\left(h + \frac{۲h}{b}x\right)^{۲} dx + \frac{۱}{۲}\int_{0}^{\frac{b}{۲}}\left(h - \frac{۲h}{b}x\right)^{۲} dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{b}{۲h}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(h + \frac{۲h}{b}x\right)^{۳}\Bigg|_{-\frac{b}{۲}}^{0} + \frac{۱}{۲}\left(-\frac{b}{۲h}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(h - \frac{۲h}{b}x\right)^{۳}\Bigg|_{0}^{\frac{b}{۲}} = \frac{bh^{۲}}{۶}$$

$$A = \frac{bh}{۲}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{bh^۲}{۶}}{\frac{bh}{۲}} = \frac{h}{۳}; (\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{h}{۳}\right)$$

۱۲ - مرکز ثقل ناحیه زیر را که , به سه گوش قوسی $Parabolic\ Spandrel$ موسوم است ، و در معماری مهم است ، پیدا کنید.



پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = \frac{h}{a^۲}x^۲$ و $g(x) = 0$ باشد.

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_0^a \left(\frac{h}{a^۲}x^۲\right)^۲ dx = \frac{h^۲}{۲a^۴}\left(\frac{۱}{۵}x^۵\right)\Bigg|_0^a = \frac{ah^۲}{۱۰}$$

$$M_y = \int_0^a x\left(\frac{h}{a^۲}x^۲\right)dx = \frac{hx^۴}{۴a^۲}\Bigg|_0^a = \frac{a^۲h}{۴}$$

$$A = \int_0^a \frac{h}{a^۲}x^۲ dx = \frac{hx^۳}{۳a^۲}\Bigg|_0^a = \frac{ah}{۳}$$

$$\overline{x} = \frac{\frac{a^۲h}{۴}}{\frac{ah}{۳}} = \frac{۳a}{۴}; \overline{y} = \frac{\frac{ah^۲}{۱۰}}{\frac{ah}{۳}} = \frac{۳h}{۱۰}$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{۳a}{۴}, \frac{۳h}{۱۰}\right)$$

۸ .۳ انتگرال و فیزیک –فشار هیدرو استاتیک Hydrostatic Force

در این بخش در مورد فشار هیدرو استاتیک بحث می کنیم , یعنی فشار آب ساکن بر یک صفحه مانند یک دیوار یا سد.
حتما با نام هیدروژن $Hydrogen$ اشنا هستید. هیدروژن یکی از عناصر تشکیل دهنده آب است.
هیدرو $Hydro$ یک پیشوند است به معنی آبدار یا مربوط به آب مانند هیدرو دینامیک ، هیدرو الکتریک و غیرو.
پس فشار هیدرو استاتیک عبارت است از فشار وارد شده توسط سیال در حال تعادل که بعلت نیروی جاذبه اعمال می گردد.

فشار هیدرو استاتیک Hydrostatic Pressure

یک غواص فشاری را متحمل می شود. این فشار بخاطر وزن آب روی غواص است. هر چه این غواص پائین تر برود ، این فشار بیشتر می شود.
اجازه دهید این پدیده $Phenomenon$ را بیشتر مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم و یک تعریف برای آن پیدا کنیم.
یک صفحه افقی به مساحت A فوت مربع را در نظر بگیرید که در عمق x فوتی زیر سطح آب قرار دارد. تصویر A

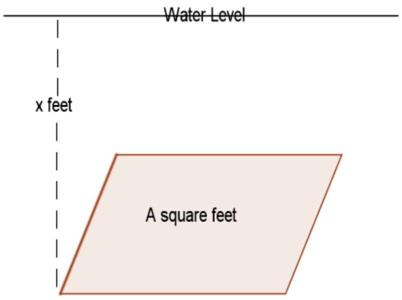


Figure A

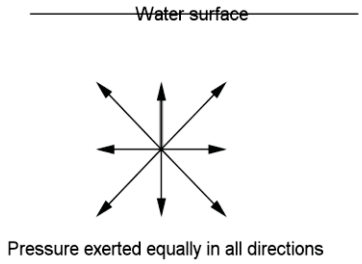


Figure B

آن قسمت از آب که مستقیما بالای صفحه قرار دارد ، یک نیروی F مساوی وزنش(وزن آب) بر صفحه وارد می کند. چون حجم آبی که مستقیما بالای صفحه قرار دارد ، xA است و وزن یک فوت مکعب آب ۶۲/۵ پوند است ، پس فشار یا نیروی F مطابق زیر بدست می آید.

$$F = ۶۲ / ۵xA$$

اگر دو طرف معادله بالا را بر A تقسیم کنیم ، خواهیم داشت.

$$\frac{F}{A} = ۶۲/۵x \qquad (۱)$$

مقدار $\frac{F}{A}$ را **فشار هیدرو استاتیک Hydrostatic Force** بر روی صفحه می نامند و مقیاس آن پوند بر فوت مربع است.
فشار هیدرو استاتیک روی یک صفحه افقی ، به سطح آن بستگی ندارد ، بلکه فقط به عمق صفحه دارد.
در نتیجه ، هنگامی که در مورد فشار هیدرو استاتیک صحبت می کنیم ، در مورد فشار هیدرو استاتیک بر یک نقطه زیر آب صحبت می کنیم. یعنی فشار هیدرو استاتیک روی هر صفحه افقی که شامل آن نقطه است. فشار هیدرو استاتیک نه تنها به طرف پایین ، بلکه در تمام جهات اعمال می شود. در حقیقت قانون

پاسکال $Pascal's\ Principle$ می گوید فشار هیدرو استاتیک بر یک نقطه در تمام جوانب بطور مساوی اعمال می شود. تصویر B
اگر یک نقطه ، x فوت زیر سطح آب باشد ، پس مقدار فشار بر آن نقطه $x\ ۶۲/۵$ است. لذا هر چه صفحه در عمق آب پایین تر رود ، فشار هیدرو استاتیک بیشتر روی آن است.
حالا آمده هستیم در مورد فشار هیدرو استاتیک روی یک صفحه عمودی صحبت کنیم.

فشار هیدرو استاتیک بر یک صفحه عمودی Hydrostatic Force on a Vertical Plate

بحث ما در مورد فشار هیدرو استاتیک بر یک صفحه عمودی ، در مورد یک دیوار عمودی و سد هم کار برد دارد.
ابتدا محور x را عمودی قرار می دهیم ، بطوری که جهت مثبت به طرف بالا باشد. فرض کنید $x = c$ سطح آب و فرض کنید آن قسمت از صفحه که در آب است از a تا b روی محور x باشد.
تصویر C و D

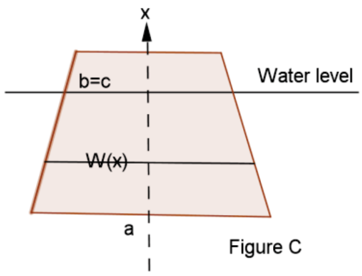


Figure C

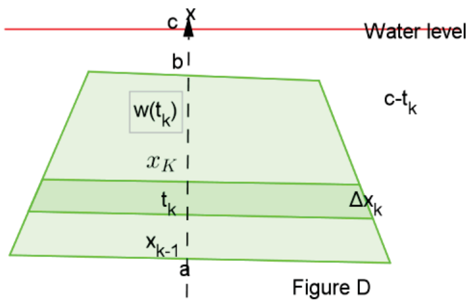


Figure D

در تصویر C ملاحظه می کنید که انتهای صفحه از سطح آب بالا تر است. پس $c = b$ است. در صورتی که در تصویر D انتهای صفحه پایین تر از سطح آب است بطوری که $c > b$ است.
همچنین فرض می کنیم $w(x)$ عرض صفحه در عمق x باشد و فرض می کنیم w در $[a, b]$ پیوسته باشد.
فرض می کنیم $\wp = \{x_0, x_۱, \cdots, x_n\}$ یک پارش $[a, b]$ باشد. برای هر k بین یک و n فرض می کنیم t_k یک عدد اختیاری در بازه فرعی $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد. اگر Δx_k کوچک باشد ، مساحت آن قسمت از صفحه که بین $x_{k-۱}$ و x_k قرار دارد ، یعنی S_k تقریبا مساوی $w(t_k)\Delta x_k$ است.
تصویر D . علاوه بر این بر اساس فرمول (۱) می دانیم فشار وارد بر هر نقطه S_k تقریبا مساوی است با $(۶۲ / ۵)(c - t_k)$. پس فشار ΔF_k بر S_k تقریبا مساوی است با حاصل ضرب فشار $(۶۲ / ۵)(c - t_k)$ بر S_k در مساحت آن $w(t_k)\Delta x_k$ لذا

$$\Delta F_k \approx (\text{فشار}) * (\text{مساحت}) \approx (۶۲ / ۵)(c - t_k)w(t_k)\Delta x_k$$

چون فشار F بر صفحه ، عبارت است از مجموع فشار های $\Delta F_۱, \Delta F_۲, \cdots, \Delta F_n$ پس F باید تقریبا

$$\sum_{k=۱}^{n} \overbrace{(۶۲ / ۵)(c - t_k)}^{\text{فشار}}\ \overbrace{w(t_k)\Delta x_k}^{\text{مساحت}}$$

و این خود یک مجموع ریمانی است برای تابع $(۶۲ / ۵)(c - x)w$ در $[a, b]$ در نتیجه تعریف زیر برای فشار F داریم.

$$F = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} (۶۲ / ۵)(c - t_k)\, w(t_k)\Delta x_k = \int_a^b (۶۲ / ۵)(c - x)w(x)dx$$

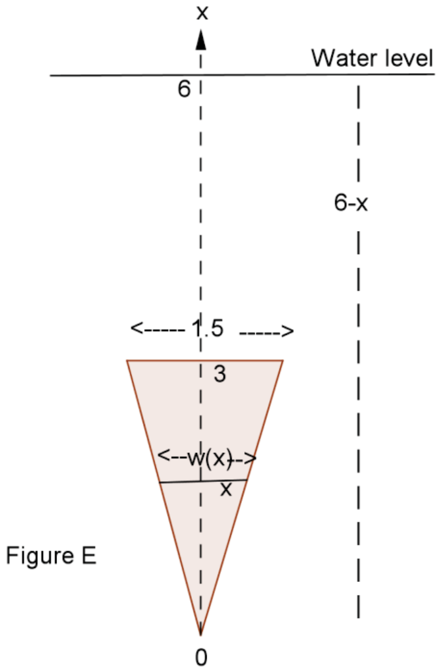
تعریف ۳.۶

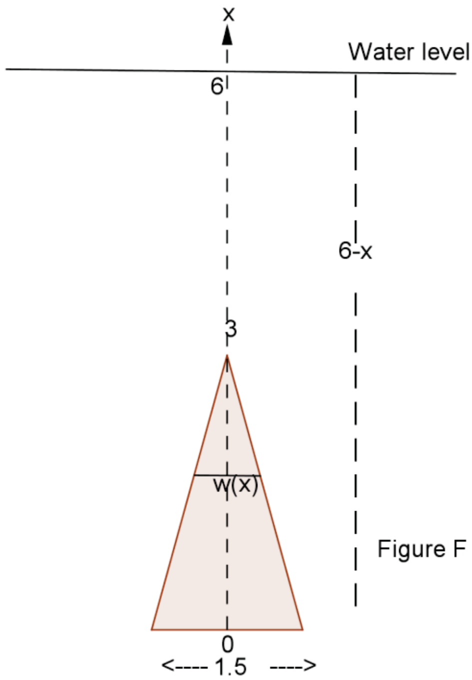
فرض می کنیم یک صفحه عمودی بطور کامل یا قسمتی از آن در آب قرار دارد، و سطح آب $x = c$ است. فرض می کنیم آن قسمت از صفحه که در آب قرار دارد ، از a یا b روی محور x باشد. فرض می کنیم $w(x)$ عرض صفحه برای $a \le x \le b$ باشد. و فرض می کنیم w در $[a, b]$ پیوسته باشد. پس **فشار هیدرو استاتیک** F بر صفحه توسط آب مطابق زیر است.

$$F = \int_a^b (۶۲ / ۵)(c - x)w(x)dx \qquad (۲)$$

اگر بجای آب مایع دیگر ی مثلا بنزین داشته باشیم ، پس باید ۵ / ۶۲ را با وزن یک فوت مکعب آن مایع عوض کنیم.

مثال ۱ـ یک مثلث متساوی الساقین به ارتفاع ۳ فوت و عرض ۵ / ۱ فوت روی یک دیوار عمودی یک استخر شنا قرار دارد ، بطوری که راس انتهایی آن ۶ فوت زیر سطح آب است. تصویر E . مطلوب است فشار هیدرو استاتیک بر صفحه.





پاسخ

برای راحتی کار ، مبدا را روی راس مثلث قرار می دهیم. در این صورت صفحه از $x = 0$ تا $x = ۳$ ادامه دارد. و عمق در هر نقطه $۶ - x$ است. و چون عرض مثلث نصف ارتفاع است ، پس از مثلث های متشابه نتیجه می شود در هر نقطه از x داریم

$$w(x) = \frac{۱}{۲}x$$

پس بر اساس (۲) داریم.

$$F=\int_0^{۳}(۶۲ / ۵)(۶-x)\left(\frac{۱}{۲}x\right)dx=۳۱ / ۲۵\int_0^{۳}(۶x-x_{۲})dx$$

$$=۳۱ / ۲۵\left(۳x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Big|_0^{۳}=(۳۱ / ۲۵)(۱۸)=۵۶۲/۵ \text{ پوند}$$

اگر مثلث طوری قرار می گرفت که راس آن به طرف بالا و سه فوت زیر سطح آب ، پس می توانستیم قاعده مثلث را روی مبدا قرار دهیم.دراین صورت نیز ، صفحه از $x=0$ تا $x=۳$ ادامه داشت و عمق هر نقطه $۶-x$ می بود. اما حالا با توجه به مثلث های متشابه داریم

$$\frac{w(x)}{۱ / ۵}=\frac{۳-x}{۳} \Rightarrow w(x)=\frac{۳-x}{۲}$$

تصویر F ،لذا

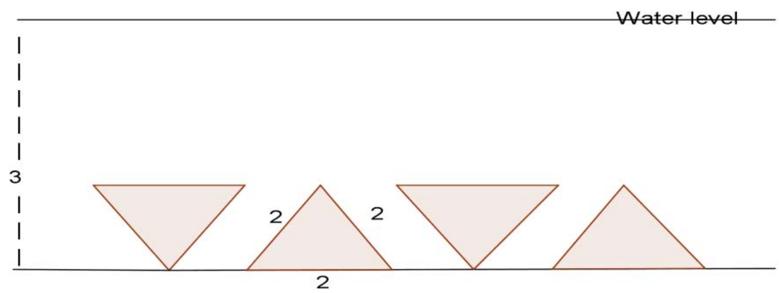
$$F=\int_0^{۳}(۶۲ / ۵)(۶-x)\left(\frac{۳-x}{۲}\right)dx=۳۱ / ۲۵\int_0^{۳}\left(۱۸-۹x+x^{۲}\right)dx$$

$$=۳۱/۲۵\left(۱۸x-\frac{۹}{۲}x^{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Big|_0^{۳}(۳۱/۲۵)(۲۲/۵)=۷۰۳/۱۲۵ \text{ پوند}$$

تمرینات ۳.۸
۱ ـ فرض کنید راس صفحه مثلثی شکل مثال ۱ هم سطح آب باشد ، مقدار فشار هیدرو استاتیک بر صفحه را حساب کنید.

۲ ـ ـ فرض کنید انتهای یک ابشخور به شکل مثلث متساوی الضلاع است که راس آن به طرف پائین است و طول هر ضلع آن ۲ فوت است. اگر سطح آب یک فوت بالای انتهای ابشخور باشد ، فشار هید رو استاتیک بر انتهای ابشخور را حساب کنید.

۳ـ یک استخر که اطراف یک فواره آب قرار دارد دارای دیوار های عمودی است. اطراف این استخر چراغ هایی به شکل مثلث های متساوی الضلاع که طول هر ضلع آنها ۲ فوت است قرار دارد. فرض کنید سطح آب ۳ فوت بالا تر از انتهای مثلث ها است. فشار هیدرو استاتیک بر هر یک از چراغ ها را حساب کنید. ترتیب قرار گرفتن چراغ ها مطابق تصویر زیر است.



۴ ـ یک جعبه مکعب شکل که هر کدام از ابعاد آن ۱ فوت است در آب غوطه ور است. اما به انتهای آب نمی رسد. فرض کنید دو رویه آن موازی سطح آب باشد. نشان دهید که تفاضل فشار هیدرو استاتیک بر رویه بالای جعبه و فشار هیدرو استاتیک بر رویه پایینی جعبه مساوی است با ۵ / ۶۲ پوند.
این تفاضل بنام **نیروی شناور Buoyant force** معروف است.
قانون ارشمیدس می گوید هر سیالی به جسمی که در آن قرار گرفته ، نیروی شناور وارد می کند ، اندازه این نیرو برابر وزن سیّال جابجا شده است.

پاسخ تمرینات ۳.۸

۱ ـ فرض کنید راس صفحه مثلثی شکل مثال ۱ هم سطح آب باشد ، مقدار فشار هیدرو استاتیک بر صفحه را حساب کنید.

پاسخ

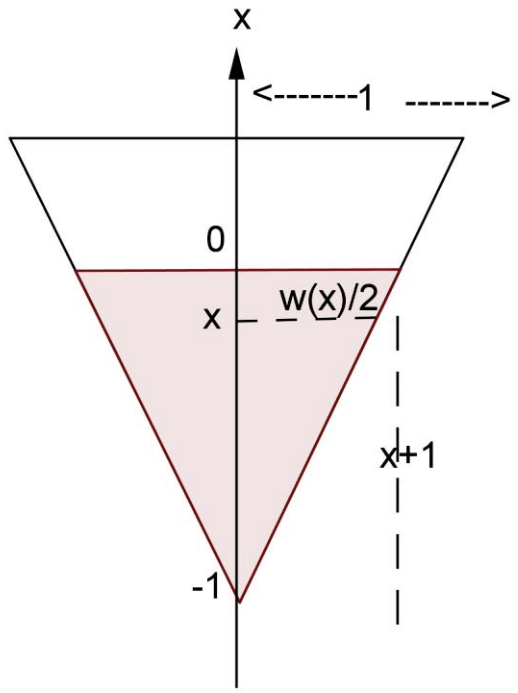
حل مثال یک را ادامه می دهیم ، اما $c=۳$ را ، بجای ۶ ، بکار می بریم ، پس داریم.

$$F=\int_0^{۳} ۶۲\Big/۵(۳-x)\left(\frac{۱}{۲}x\right)dx=۳۱\ /\ ۲۵\int_0^{۳}\left(۳x-x^{۲}\right)dx$$

$$=۳۱\ /\ ۲۵\left(\frac{۳}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۳}\right)\Bigg|_0^{۳}=\left(۳۱\ /\ ۲۵\right)\frac{۹}{۲}=۱۴۰/۶۲۵\ \text{پوند}$$

۲ ـ فرض کنید انتهای یک ابشخور به شکل مثلث متساوی الضلاع است که راس آن به طرف پائین است و طول هر ضلع آن ۲ فوت است. اگر سطح آب یک فوت بالای انتهای ابشخور باشد ، فشار هید رو استاتیک بر انتهای ابشخور را حساب کنید.

پاسخ



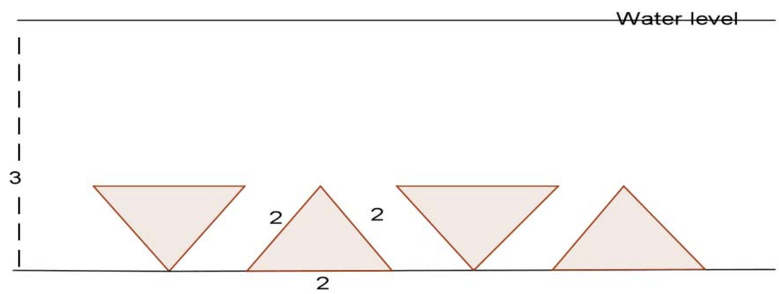
مبدا را روی سطح آب قرار می دهیم. پس $c=0$ است و $\frac{x-(-۱)}{\sqrt{۳}}=\frac{w(x)}{۲}$ بطوری که

$$w(x) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(x+۱)$$

$$F = ۶۲/۵\int_{-۱}^{0}(0-x)\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(x+۱)dx$$

$$= \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۳}\left(-\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Bigg|_{-۱}^{0} = \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۱۸} \approx ۱۲/۰۲۸۱ \text{ پوند}$$

۳ـ یک استخر که اطراف یک فواره آب قرار دارد دارای دیوار های عمودی است. اطراف این استخر چراغ هایی به شکل مثلث های متساوی الضلاع که طول هر ضلع آنها ۲ فوت است قرار دارد. فرض کنید سطح آب ۳ فوت بالا تر از انتهای مثلث ها است. فشار هیدرو استاتیک بر هر یک از چراغ ها را حساب کنید. ترتیب قرار گرفتن چراغ ها مطابق تصویر زیر است.



پاسخ

برای مثلث هایی که راس آنها به طرف بالا است ، $c=0$ و $\frac{w(x)}{۲} = \frac{x+۳}{\sqrt{۳}}$ است بطوری که

$w(x) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(x+۳)$ است. پس

$$F = ۶۲/۵\int_{-۳}^{-۳+\sqrt{۳}}(0-x)\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(x+۳)dx$$

$$= \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۳}\left(-\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۳}{۲}x^{۲}\right)\Bigg|_{-۳}^{-۳+\sqrt{۳}}$$

$$= \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۳}\left(\frac{۹}{۲} - \sqrt{۳}\right) \approx ۱۹۹/۷۶ \text{ پوند}$$

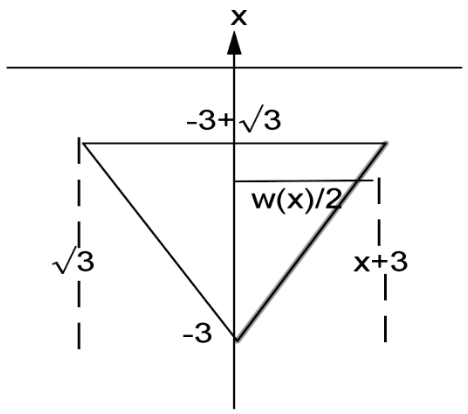
برای مثلث ها یی که راس آنها به طرف پااین است ، $c = 0$ و $\frac{w(x)}{۲} = \frac{-۳+\sqrt{۳}-x}{\sqrt{۳}}$ است بطوری که

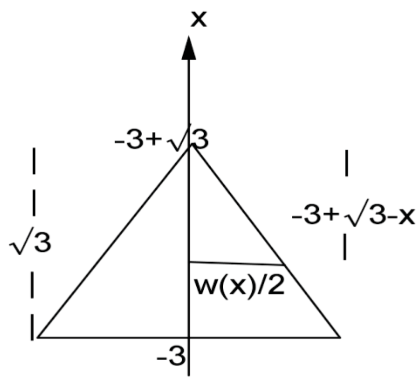
$$w(x) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\left(-۳ + \sqrt{۳} - x\right)$$

$$F = ۶۲/۵\int_{-۳}^{-۳+\sqrt{۳}} (0 - x)\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\left(-۳ + \sqrt{۳} - x\right)dx$$

$$= \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۳}\left[\frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x^{۳}\right]\Bigg|_{-۳}^{-۳+\sqrt{۳}}$$

$$= \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۳}\left(\frac{۹}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \approx ۲۶۲/۲۶ \text{ پوند}$$





۴ ـ یک جعبه مکعب شکل که هر کدام از ابعاد آن ۱ فوت است در آب غوطه ور است. اما به انتهای آب نمی رسد. فرض کنید دو رویه آن موازی سطح آب باشد. نشان دهید که تفاضل فشار هیدرو استاتیک بر رویه بالای جعبه و فشار هیدرو استاتیک بر رویه پایینی جعبه مساوی است با ۶۲ / ۵ پوند.
این تفاضل بنام **نیروی شناور** **Buoyant force** معروف است.
قانون ارشمیدس می گوید هر سیالی به جسمی که در آن قرار گرفته ، نیروی شناور وارد می کند ، اندازه این نیرو برابر وزن سیّال جابجا شده است.

پاسخ

اگر رویه بالایی جعبه x فوت تا سطح آب فاصله داشته باشد ، فشار هیدرو استاتیک بر رویه بالایی‌عبارت است از

$$F_{top} = ۶۲/۵(x)(۱) = ۶۲ / ۵x$$

فشار هیدرو استاتیک بر رویه پایینی عبارت است از

$$F_{bottom} = ۶۲/۵(x+۱)(۱) = ۶۲ / ۵(x+۱)$$

تفاضل بین این دو فشار عبارت است از

$$F_{bottom} - F_{top} = ۶۲/۵(x+۱) - ۶۲/۵x = ۶۲/۵ \text{ پوند}$$

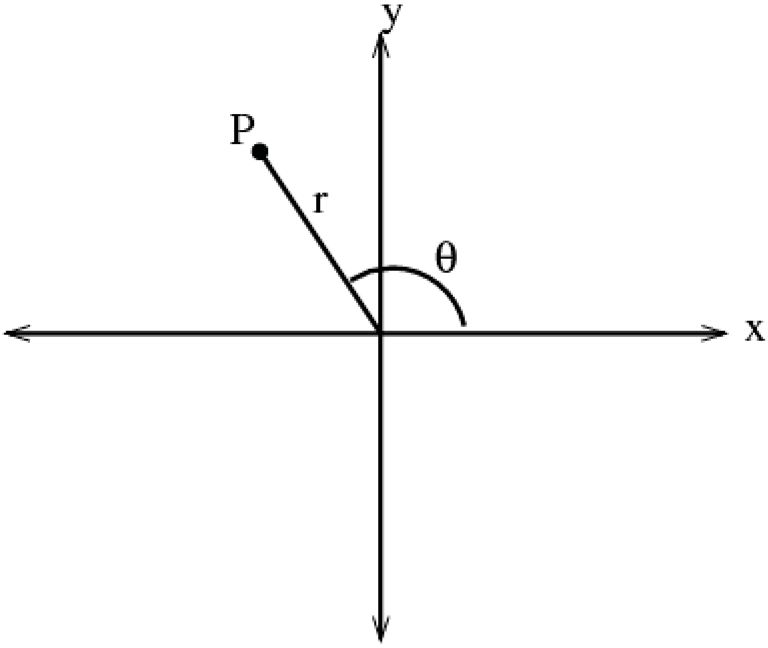
۳.۹ ـ دستگاه مختصات قطبی Polar Coordinates

تا کنون هر نقطه ای روی صفحه را با دستگاه مختصات دکارتی مشخص کرده ایم. اما دستگاه های دیگری هم هستند ، که مهم ترین آنها ، دستگاه مختصات قطبی است. در این بخش این دستگاه را به شما معرفی می کنیم.

دستگاه مختصات قطبی The Polar Coordinate System

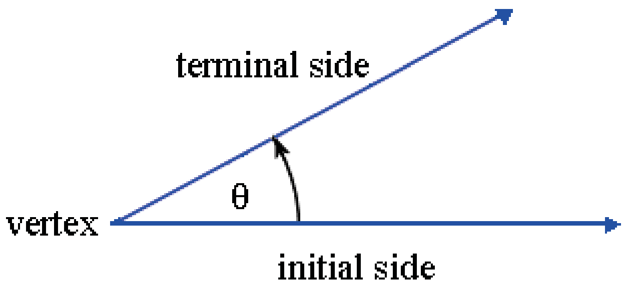
با دستگاه مختصات دکارتی شروع می کنیم. برای هر نقطه مانند P ، بجز مبدا ، فرض می کنیم r فاصله بین P و مبدا باشد ، و θ یک زاویه باشد که ضلع اولیه $Initial\ Side$ آن روی قسمت مثبت محور x قرار دارد و ضلع ثانویه $Terminal\ Side$ روی پاره خطی است که نقطه P را به مبدا متصل می کند. تصویر A

تصویر A

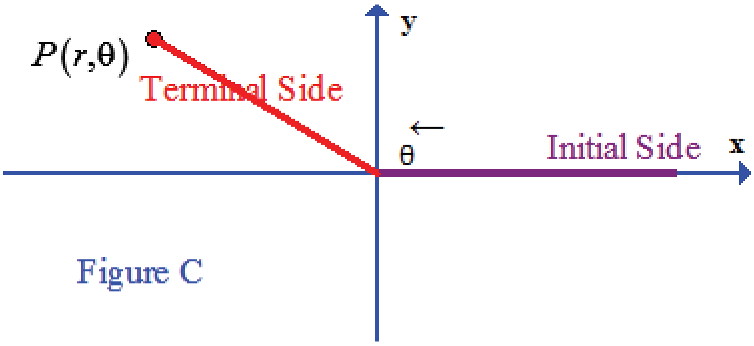


ضلع اولیه عبارت است از یک خط مستقیم و ثابت که یک نقطه روی آن قرار دارد و یک خط دیگر حول آن نقطه می چرخد تا تشکیل یک زاویه بدهد. خط دوم را خط ثانوی می نامند. تصویر B

تصویر B

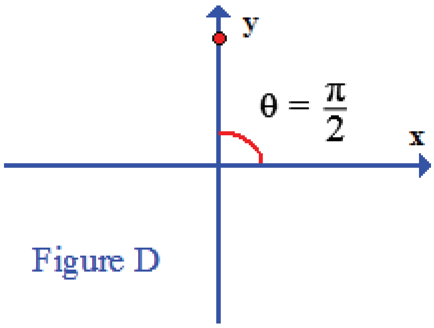


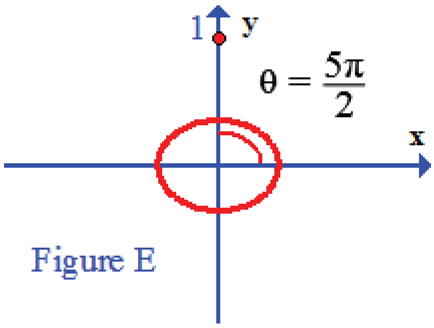
دو تایی (r,θ) را **مختصات قطبی Set of Polar Coordinates** نقطه P می نامند. تصویر C



برای هر P بی نهایت انتخاب برای θ وجود دارد. اختلاف هر زوج از θ مضربی از π ۲ است. مثلا اگر نقطه P روی محور y باشد ، پس $\theta = \frac{\pi}{۲}$ یک انتخاب است. تصویر D

همچنین $\theta = \frac{۵\,\pi}{۲}$ هم می تواند انتخاب دیگر باشد. تصویر E





پس برای راحتی کار هر گاه مختصات قطبی $P(r,\theta)$ داشته باشیم ، $P(-r,\theta+\pi)$ را هم در نظر می گیریم.
به عبارت دیگر , اگر (r,θ) یک مختصات قطبی برای P باشد ، پس هر کدام از مختصات زیر هم یک مختصات قطبی برای P می تواند باشد.

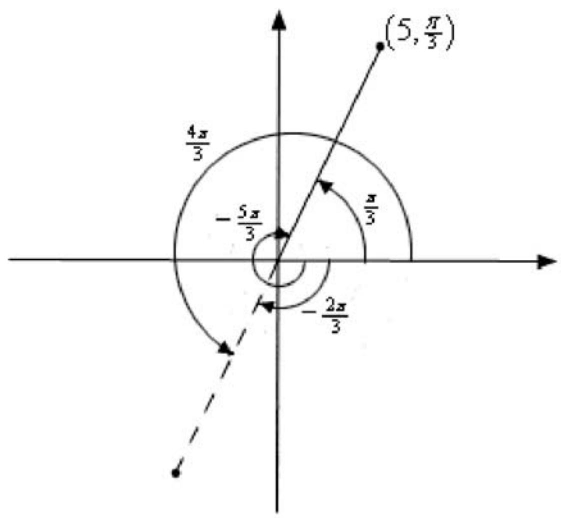
$$(r,\theta + ۲\,n\,\pi) \;،\; n \in \mathbb{Z}$$
$$(-r,\theta + (۲n + ۱)\pi) \;،\; n \in \mathbb{Z}$$

باز بر می گردیم به تصویر های D و E, نقطه ای که روی $y = ۱$ قرار دارد و دارای مختصات $\left(۱,\frac{\pi}{۲}\right)$ است ، مختصات زیر هم می توانند برای همان نقطه باشند.

$$\left(۱,\frac{۵\pi}{۲}\right),\left(-۱,\frac{\pi}{۲}+\pi\right)=\left(-۱,\frac{۳\pi}{۲}\right)$$

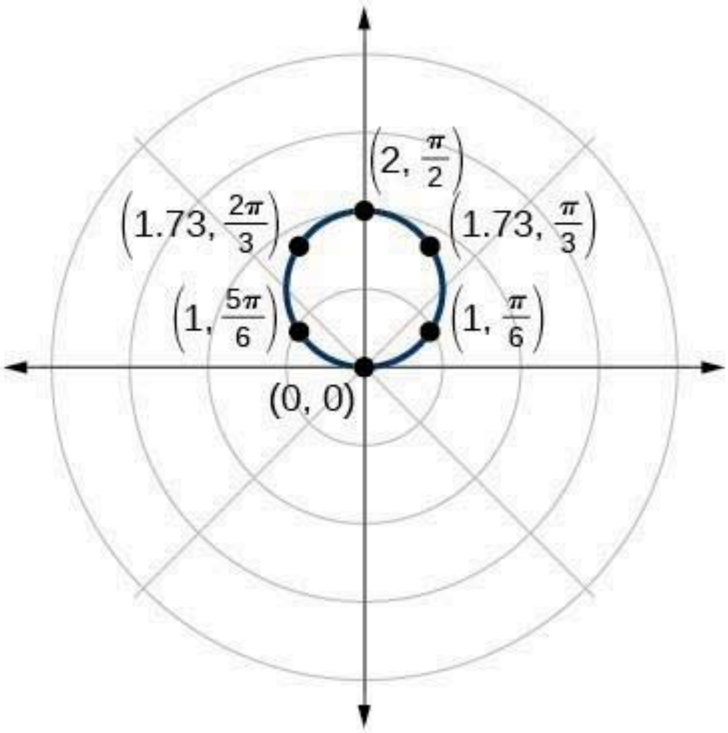
اما ، با وجود این که می توان برای هر نقطه P , بی نهایت مختصات قطبی علاوه بر مختصات اصلی در نظر گرفت ، اصرار داریم که بگوییم نقطه P فقط یک مختصات قطبی دارد و آن (r,θ) است بطوری که $r>0$ و $0\le\theta\le ۲\pi$ باشد.
و در نهایت ، مبدا مختصات قطبی $(0,\theta)$ است، بطوری که θ می توانند هر عددی باشد.
تصویر F هم نمایش دیگری است از مختصات متعدد نقطه $\left(۵,\frac{\pi}{۳}\right)$

تصویر F



تصویر $F۲$ هم چند نقطه روی صفحه مختصات قطبی همراه با مختصات آنها.

تصویر $F۲$



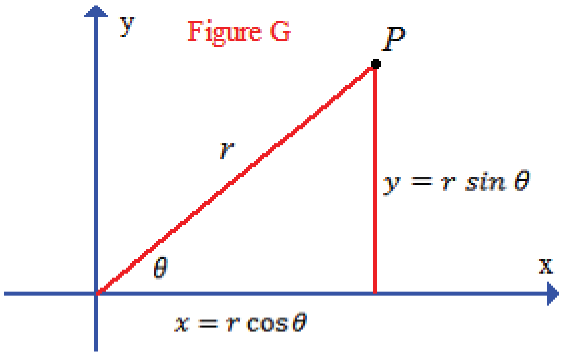
تبدیل مختصات دکارتی و قطبی به یک دیگر

Conversion Between Cartesian and Ploar Coordinates

هر نقطه ای روی صفحه ، هم مختصات دکارتی دارد و هم مختصات قطبی. حالا نشان می دهیم که تبدیل یک مختصات به دیگری امکان پذیر است. فرض کنید یک نقطه P دارای مختصات قطبی (r,θ) است و دارای مختصات دکارتی (x,y) است. بر اساس تعریف سینوس و کسینوس نتیجه می گیریم که

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta \qquad (۲)$$

است برای تمام مقادیر r و θ. تصویر G



بر اساس (۲) ملاحظه می کنید که x و y تنها توسط r و θ مشخص می شوند ، و همچنین فرمول های زیر را بدست می آوریم.

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{برای} \quad x \neq 0 \qquad (۳)$$

مثال ۱- مختصات دکارتی نقطه $p\left(۳,\frac{۲۳\pi}{۶}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

از فرمول (۲) نتیجه می گیریم که

$$x = ۳\cos\frac{۲۳\pi}{۶} = ۳\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = ۳\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۳\sin\frac{۲۳\pi}{۶} = ۳\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = -۳\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

پس مختصات دکارتی p می شود $\left(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$

مثال ۲ - تمام مختصات قطبی نقطه P با مختصات دکارتی $\left(-۵, ۵\sqrt{۳}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا مختصات قطبی (r,θ) برای نقطه P پیدا می کنیم. از فرمول (۳) داریم.

$$r^{۲} = (-۵)^{۲} + \left(۵\sqrt{۳}\right)^{۲} = ۲۵ + ۷۵ = ۱۰۰$$

پس $r = ۱۰$ است.

$$\tan\theta = \frac{۵\sqrt{۳}}{-۵} = -\sqrt{۳} \qquad (۴)$$

از (۴) و این حقیقت که نقطه $\left(-۵, ۵\sqrt{۳}\right)$ در ربع دوم قرار دارد ، پس نتیجه می گیریم که $\theta = \frac{۲\pi}{۳}$ است. پس یک مجموعه مختصات قطبی $\left(۱۰, \frac{۲\pi}{۳}\right)$ است و هر مجموعه دیگری از این نقطه باید مختصات زیر را دارا باشد.

$$\left(۱۰, \frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi\right) \text{ ، } n \in \mathbb{Z}$$
$$\left(-۱۰, \frac{۵\pi}{۳} + ۲n\,\pi\right) \text{ ، } n \in \mathbb{Z}$$

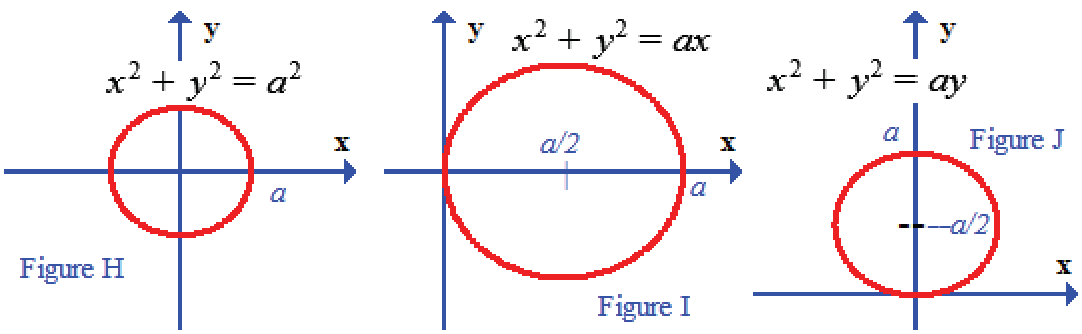
معادله های قطبی و نمودار ها Polar Equations and Graphs

همان طور که می توانیم نمودار معادله شامل مختصات دکارتی x و y را رسم کنیم ، همچنین می‌توانیم نمودار معادله شامل مختصات قطبی r و θ را رسم کنیم. **نمودار قطبی** چنین معادله ای مجموعه نقاطی است که دارای مختصات (r,θ) باشند.

مثال ۳ - معادله قطبی دائره $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ را پیدا کنید. $a > 0$ است. تصویر H.

پاسخ

با استفاده از فرمول (۳) متوجه می شویم که $r^{۲} = a^{۲}$ و یا $r = a$ است.



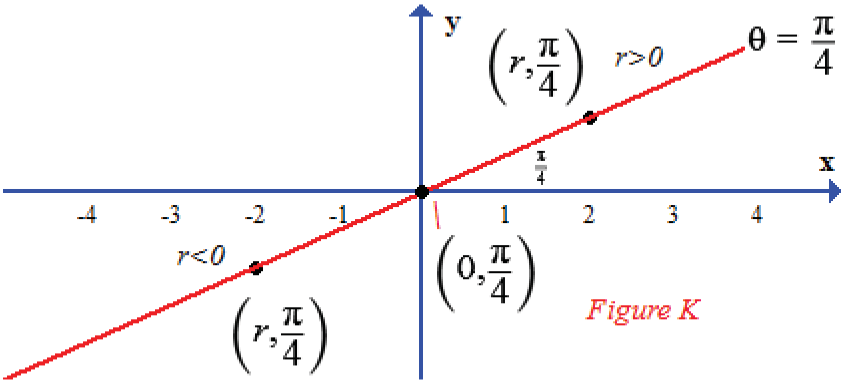
مثال ۴- یک معادله قطبی برای $x^{۲}+y^{۲}=ax$ پیدا کنید. تصویر I.

پاسخ

با استفاده از (۲) و (۳) داریم $r^{۲}=ar\cos\theta$ و یا $r=a\cos\theta$

به همین طریق معادله قطبی برای $x^{۲}+y^{۲}=ay$ می شود $r=a\sin\theta$, تصویر J.

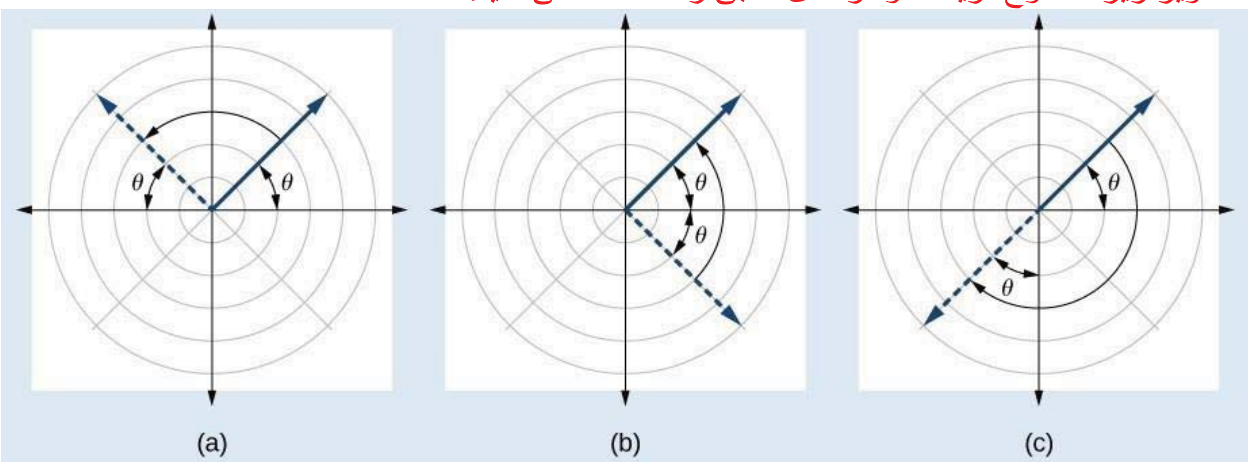
مثال ۵ - یک معادله قطبی پیدا کنید برای خطی که از مبدا می گذرد و زاویه $\frac{\pi}{۴}$ نسبت به قسمت مثبت محور x ایجاد می کند. تصویر K



پاسخ

بر اساس تعریف مختصات قطبی متوجه می شویم که هر نقطه ای روی این خط دارای مختصات $\left(r,\frac{\pi}{۴}\right)$ است بطوری که r می تواند مثبت ، یا منفی و یا صفر باشد. پس معادله خط $\theta=\frac{\pi}{۴}$ است.

تصاویر زیر سه نوع قرینه نمودار های قطبی را ملاحظه می کنید.



جدول زیر هم خلاصه ای از قرینه های نمودار های قطبی است.

قرینه	شرایط قرینه
نسبت به محور x	اگر (r,θ) و $(r,-\theta)$ یا $(-r,\pi-\theta)$ معادله را بر قرار کند.
نسبت به محور y	اگر (r,θ) و $(-r,-\theta)$ یا $(r,\pi-\theta)$ معادله را بر قرار کند.
نسبت به مبدا	اگر (r,θ) و $(-r,\theta)$ یا $(r,\pi+\theta)$ معادله را بر قرار کند.

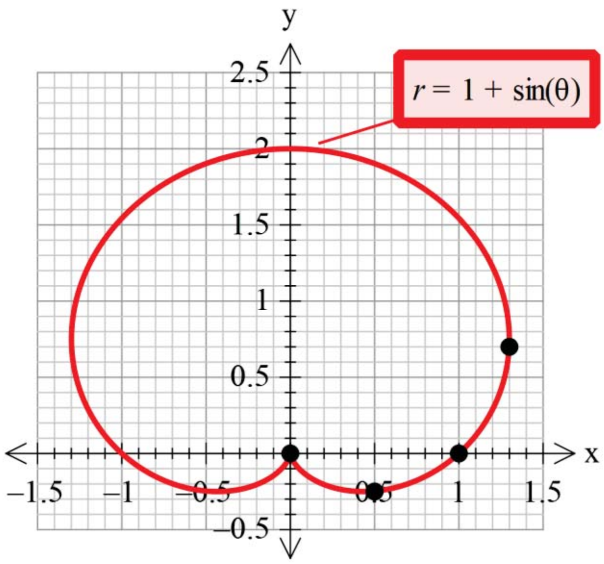
مثال ۶ نمودار آستریید $r = ۱ + \sin\theta$ را رسم کنید.

پاسخ

ابتدا ملاحظه می کنید که $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ است پس از جدول بالا نتیجه می گیریم که نمودار نسبت به محور y قرینه است. پس چون تابع سینوس دارای دوره تناوبی ۲π است ، پس لازم است فقط مقادیر بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ را برای θ در نظر بگیریم , سپس بقیه نمودار را با استفاده از قرینه بودن رسم می کنیم .

چند نقطه در جدول زیر بدست می آوریم.

θ	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۶}$	0	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$
$r = ۱ + \sin\theta$	0	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲

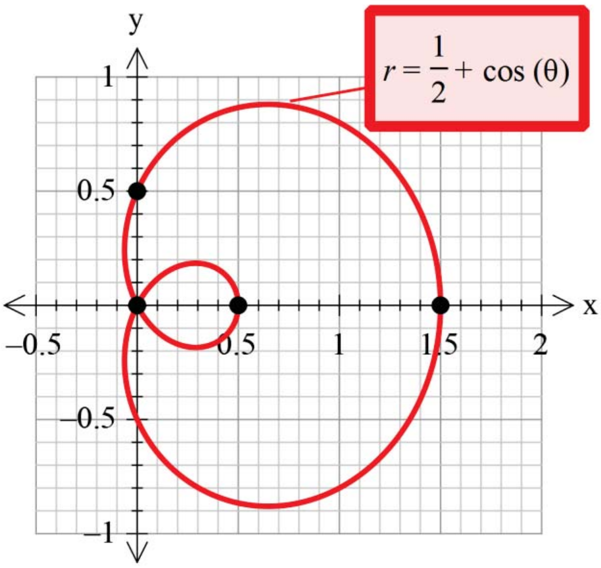


مثال ۷- نمودار $r = \frac{۱}{۲} + \cos\theta$ را رسم کنید.

پاسخ

چون $\cos(-\theta) = \cos\theta$ پس نمودار نسبت به محور x قرینه است. پس فقط لازم است مقادیر بین صفر و π برای θ در نظر بگیریم. ، سپس با استفاده از قرینه ، نمودار را کامل می کنیم. در جدول زیر چند نقطه را بدست می آوریم.

θ	0	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
$r = \frac{۱}{۲} + \cos\theta$	$\frac{۳}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	0	$-\frac{۱}{۲}$



مثال ۸ - نمودار گل رز سه برگی $r = \cos(۳\,\theta)$ را رسم کنید.

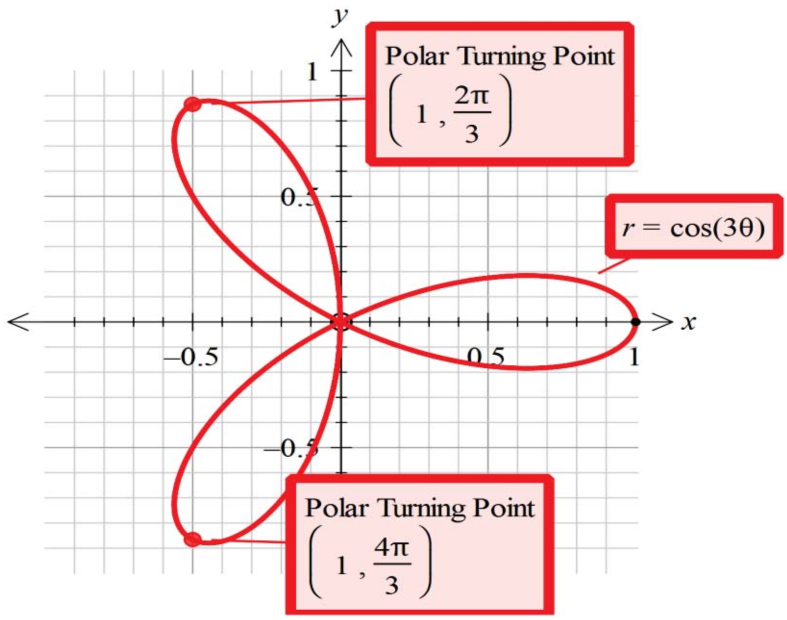
پاسخ

نمودار قطبی نسبت به محور x قرینه است. پس نمودار معادله $r = \cos(۳\,\theta)$ را برای

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

رسم می کنیم و سپس با استفاده از قرینه بقیه نمودار را رسم می کنیم. ججدول زیر چند نقطه را به ما میدهد.

θ	0	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
$r = \cos(۳\,\theta)$	۱	-۱	0	۱	-۱



تمرینات ۳.۹

۱ - مختصات قطبی زیر را به مختصات دکارتی تبدیل کنید.

$a)\ \left(۳,\frac{\pi}{۴}\right)$ $\quad b)\ \left(-۲,-\frac{\pi}{۶}\right)$ $\quad c)\ \left(۳,\frac{۷\pi}{۳}\right)$ $\quad d)\ (۵,0)$ $\quad e)\ \left(-۲,\frac{\pi}{۲}\right)$

$f)\ \left(-۲,\frac{۳\pi}{۲}\right)$ $\quad g)\ \left(۴,\frac{۳\pi}{۴}\right)$ $\quad h)\ \left(0,\frac{۶\pi}{۷}\right)$ $\quad i)\ \left(-۱,\frac{۲۳\pi}{۳}\right)$

$j)\ \left(-۱,-\frac{۲۳\pi}{۳}\right)$

در تمرینات زیر معادله های داده شده را به صورت معادله های در دستگاه قطبی بنویسید.

۲) $۲x + ۳y = ۴$

۳) $x^۲ + ۹y^۲ = ۱$

۴) $\left(x^۲ + y^۲\right)^۲ = x^۲ - y^۲$

۵) $x^۲ + y^۲ = x\left(x^۲ - ۳y^۲\right)$

۶) $y^۲ = \dfrac{x^۲(۳ - x)}{۱ + x}$

در تمرینات زیر معادله های دردستگاه قطبی را به صورت معادله های د ر دستگاه دکارتی تبدیل کنید.

۷) $r = ۳\cos\theta$

۸) $\cot\theta = ۳$

۹) $r = \sin(۲\,\theta)$

۱۰- نشان دهید نمودار قطبی معادله $r = ۱ + \cos\theta$ مانند نمودار قطبی $r^۲ = r + r\cos\theta$ است.

در تمرینات زیر نمودار معادله های داده شده را رسم کنید. ممکن است راحت تر باشد اگر ابتدا ، معادله را به صورت معادله در دستگاه دکارتی تبدیل کنید.

۱۱) $r = ۵$

۱۲) $r = 0$

۱۳) $\theta = -\dfrac{۷\pi}{۶}$

۱۴) $r\sin\theta = ۵$

۱۵) $r = -\dfrac{۳}{۲}\cos\theta$

۱۶) $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{۳}\right)=۲$

۱۷) $r=۲\cot\theta\csc\theta$

۱۸) $r(\sin\theta+\cos\theta)=۱$

۱۹) $r^{۲}\left(\cos^{۲}\theta-۹\sin^{۲}\theta\right)=۹$

۲۰) $r=\frac{-۱}{\cos\theta+۴\sin\theta}$

در تمرینات زیر نمودارهای معادله های داده شده را رسم کنید. به قرینه ها توجه کنید.

۲۱) $r=۲\cos(۲\theta)$

۲۲) $r=-۴\sin(۳\theta)$

۲۳) $r=۲\cos(۶\theta)$

۲۴) $r=\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

۲۵) $r^{۲}=۲۵\cos\theta$

۲۶) $r^{۲}=۴\cos۲\theta$

۲۷) $r=۲-\cos\theta$

۲۸) $r=۳\tan\theta$

۲۹) $r=۲\theta$

پاسخ تمرینات ۳.۹

۱ ـ مختصات قطبی زیر را به مختصات دکارتی تبدیل کنید.

$a)\ \left(۳,\frac{\pi}{۴}\right)\quad b)\ \left(-۲,-\frac{\pi}{۶}\right)\quad c)\ \left(۳,\frac{۷\pi}{۳}\right)\quad d)\ (۵,0)\quad e)\ \left(-۲,\frac{\pi}{۲}\right)$

$f)\ \left(-۲,\frac{۳\pi}{۲}\right)\quad g)\ \left(۴,\frac{۳\pi}{۴}\right)\quad h)\ \left(0,\frac{۶\pi}{۷}\right)\quad i)\ \left(-۱,\frac{۲۳\pi}{۳}\right)$

$j)\ \left(-۱,-\frac{۲۳\pi}{۳}\right)$

پاسخ ها

$a)\ x=۳\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲};\ y=۳\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$; مختصات دکارتی $\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)$

$b)\ x=-۲\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=-\sqrt{۳};\ y=-۲\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=۱$ ؛ مختصات دکارتی $\left(-\sqrt{۳},۱\right)$

$c)\ x=۳\cos\frac{۷\pi}{۳}=\frac{۳}{۲};\ y=۳\sin\frac{۷\pi}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ؛ مختصات دکارتی $\left(\frac{۳}{۲},\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)$

$d)\ x=۵\cos 0=۵;\ y=۵\sin 0=0$; مختصات دکارتی $(۵,0)$

$e)\ x=-۲\cos\frac{\pi}{۲}=0;\ y=-۲\sin\frac{\pi}{۲}=-۲$; مختصات دکارتی $(0,-۲)$

$f)\ x=-۲\cos\frac{۳\pi}{۲}=0;\ y=-۲\sin\frac{۳\pi}{۲}=۲$; مختصات دکارتی $(0,۲)$

$g)\ x=۴\cos\frac{۳\pi}{۴}=-۲\sqrt{۲};\ y=۴\sin\frac{۳\pi}{۴}=۲\sqrt{۲}$; مختصات دکارتی $\left(-۲\sqrt{۲},۲\sqrt{۲}\right)$

$h)\ x=0\cos\frac{۶\pi}{۷}=0;\ y=0\sin\frac{۶\pi}{۷}=0$; مختصات دکارتی $(0,0)$

$i)\ x=-۱\cos\frac{۲۳\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲};\ y=-۱\sin\frac{۲۳\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$; مختصات دکارتی $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

$j)\ x=-۱\cos\left(-\frac{۲۳\pi}{۳}\right)=\frac{-۱}{۲};\ y=-۱\sin\left(-\frac{۲۳\pi}{۳}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$; مختصات دکارتی $\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

در تمرینات زیر معادله های داده شده را به صورت معادله های در دستگاه قطبی بنویسید.

۲) $۲x + ۳y = ۴$

اگر $۲x + ۳y = ۴$ باشد ، پس $۲(r\cos\theta) + ۳(r\sin\theta) = ۴$ است. پس

$$r = \frac{۴}{۲\cos\theta + ۳\sin\theta}$$

۳) $x^۲ + ۹y^۲ = ۱$

اگر $x^۲ + ۹y^۲ = ۱$ باشد ، پس $r^۲\cos^۲\theta + ۹\left(r^۲\sin^۲\theta\right) = ۱$ است. پس

$$r^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta + ۹\sin^۲\theta} = \frac{۱}{۸\sin^۲\theta + ۱}$$

$$r = \frac{۱}{\sqrt{۸\sin^۲\theta + ۱}}$$

۴) $\left(x^۲ + y^۲\right)^۲ = x^۲ - y^۲$

اگر $\left(x^۲ + y^۲\right)^۲ = x^۲ - y^۲$ باشد ، پس $\left(r^۲\right)^۲ = r^۲\cos^۲\theta - r^۲\sin^۲\theta$ است. پس

$$r^۴ = r^۲\cos ۲\theta; r^۲ = \cos ۲\theta$$

۵) $x^۲ + y^۲ = x\left(x^۲ - ۳y^۲\right)$

اگر $x^۲ + y^۲ = x\left(x^۲ - ۳y^۲\right)$ باشد ، پس $r^۲ = r\cos\theta\left(r^۲\cos^۲\theta - ۳r^۲\sin^۲\theta\right)$ است.

$$r^۲ = \frac{r}{\cos\theta(\cos^۲\theta - ۳\sin^۲\theta)}$$

۶) $y^۲ = \dfrac{x^۲(۳ - x)}{۱ + x}$

اگر $y^۲ = \frac{x^۲(۳-x)}{۱+x}$ باشد ، پس $r^۲\sin^۲\theta = \frac{r^۲\cos^۲\theta(۳-r\cos\theta)}{۱+r\cos\theta}$ است. پس

$$\sin^۲\theta(۱ + r\cos\theta) = \cos^۲\theta(۳ - r\cos\theta)$$

$$r = \frac{۳\cos^۲\theta - \sin^۲\theta}{\sin^۲\theta\cos\theta + \cos^۳\theta} = \frac{۳\cos^۲\theta - \sin^۲\theta}{\cos\theta}$$

در تمرینات زیر معادله های دردستگاه قطبی را به صورت معادله های د ر دستگاه دکارتی تبدیل کنید.

۷) $r = ۳\cos\theta$

اگر $r = ۳\cos\theta$ باشد ، پس $r^۲ = ۳r\cos\theta$ است و یا $x^۲ + y^۲ = ۳x$

۸) $\cot\theta = ۳$

اگر $\cot\theta = ۳$ باشد ، پس $\cos\theta = ۳\sin\theta$ است ، پس

$$r\cos\theta = ۳r\sin\theta$$
$$x = ۳y$$

۹) $r = \sin(۲\theta)$

اگر $r = \sin(۲\theta) = ۲\sin\theta\cos\theta$ باشد ، پس $r^۳ = ۲(r\sin\theta)(r\cos\theta)$ است. لذا

$$\left(x^۲ + y^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۲xy$$
$$\left(x^۲ + y^۲\right)^۳ = ۴x^۲y^۲$$

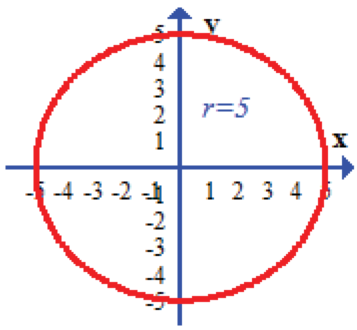
۱۰- نشان دهید نمودار قطبی معادله $r = ۱ + \cos\theta$ مانند نمودار قطبی $r^۲ = r + r\cos\theta$ است.

پاسخ

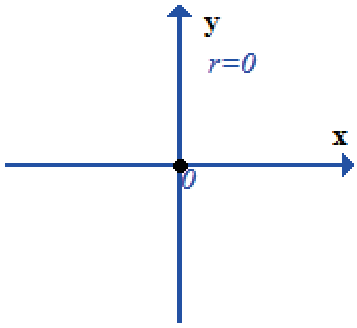
اگر $r \neq 0$ باشد ، پس $r = ۱ + \cos\theta$ معادل $r^۲ = r + r\cos\theta$ است. اگر $r = 0$ باشد ، که معادل مبدا است ، پس (r,θ) معادله $r^۲ = r + r\cos\theta$ را بر قرار می کند ، برای هر θ. در صورتی که (r,π) معادله $r = ۱ + \cos\theta$ را بر قرار می کنند. پس مبدا روی نمودار قطبی هر دو معادله است ، و لذا نمودار های قطبی یکی هستند.

در تمرینات زیر نمودار معادله های داده شده را رسم کنید. ممکن است راحت تر باشد اگر ابتدا ، معادله را به صورت معادله در دستگاه دکارتی تبدیل کنید.

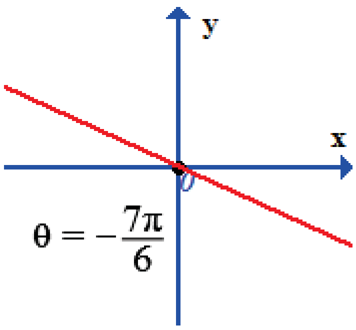
۱۱) $r = ۵$

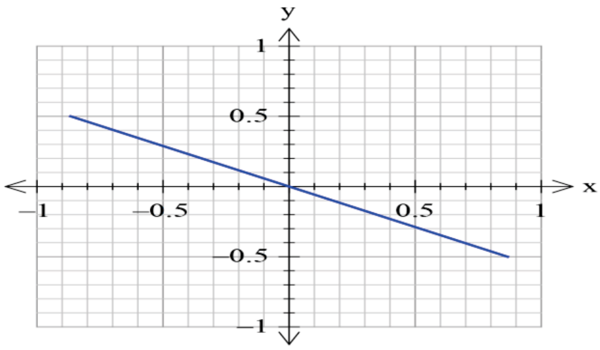


۱۲)　$r = 0$

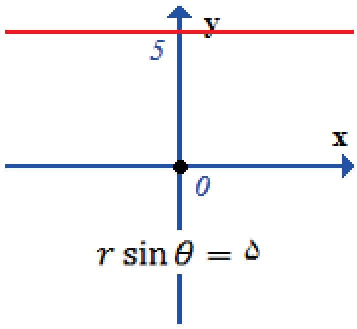


۱۳)　$\theta = -\frac{۷\pi}{۶}$

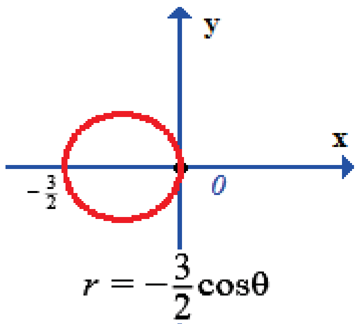




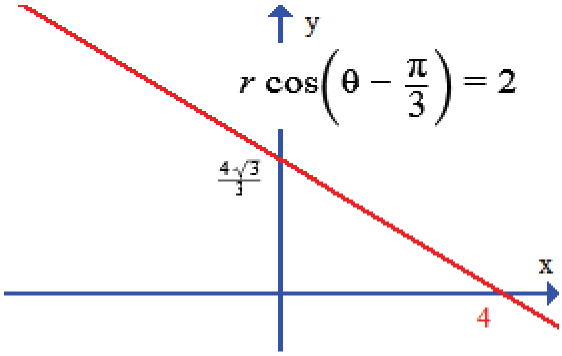
۱۴)　$r \sin\theta = ۵$



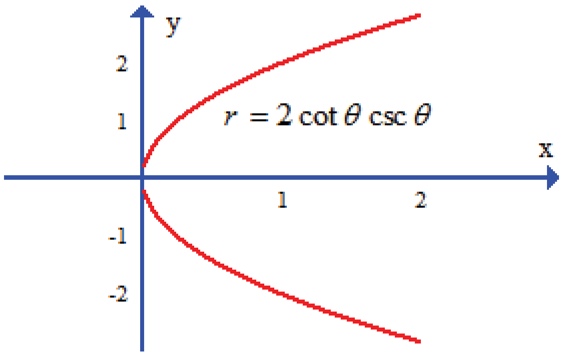
۱۵)　$r = -\frac{۳}{۲}\cos\theta$



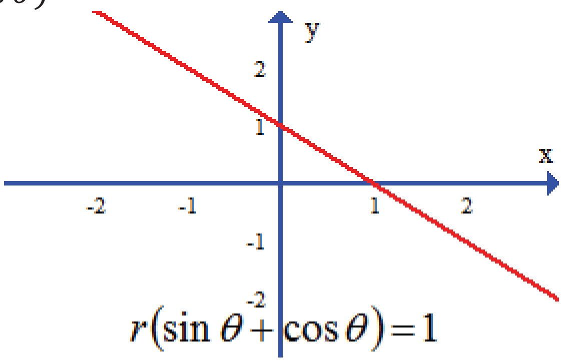
۱۶) $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{۳}\right) = ۲$



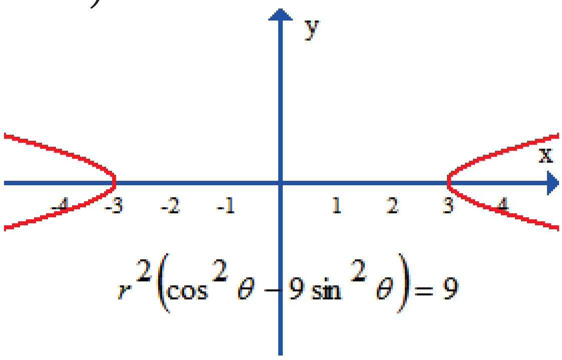
۱۷) $r = ۲\cot\theta\csc\theta$



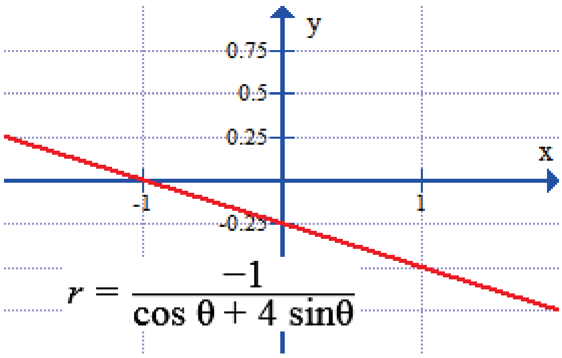
۱۸) $r(\sin\theta + \cos\theta) = ۱$



۱۹) $r^{۲}\left(\cos^{۲}\theta - ۹\sin^{۲}\theta\right) = ۹$



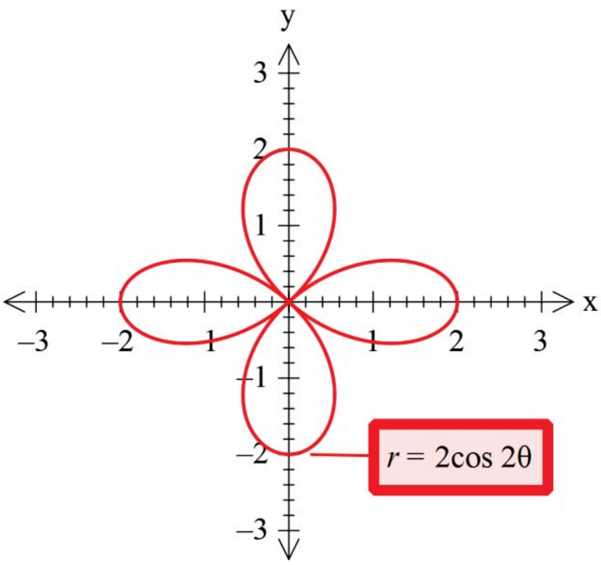
۲۰) $r = \dfrac{-۱}{\cos\theta + ۴\sin\theta}$



در تمرینات زیر نمودارهای معادله های داده شده را رسم کنید. به قرینه ها توجه کنید.

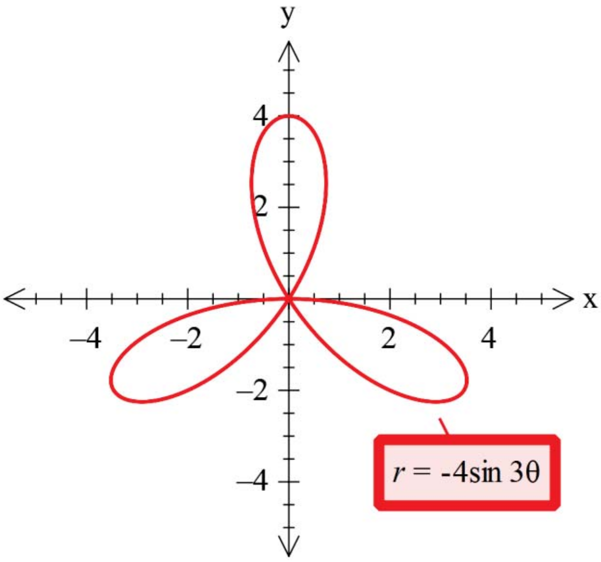
۲۱) $r = ۲\cos(۲\theta)$

قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



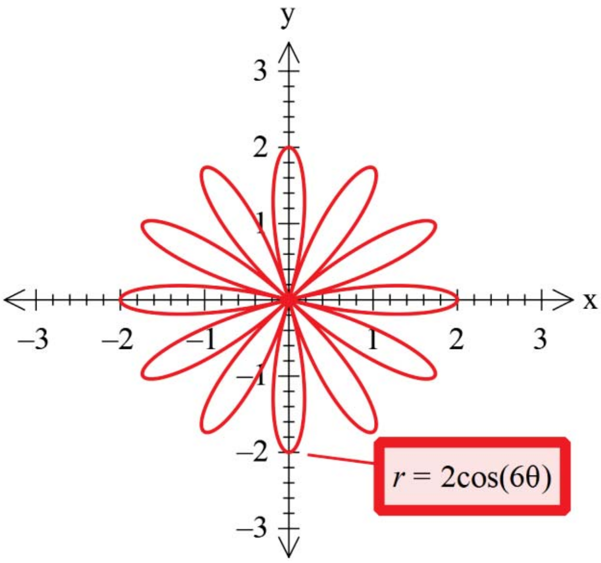
۲۲) $r = -۴\sin(۳\,\theta)$

قرینه نسبت به محور y .



۲۳) $r = ۲\cos(۶\,\theta)$

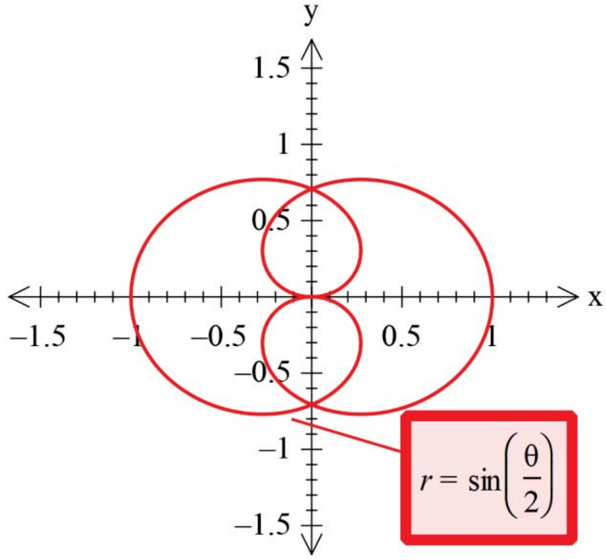
قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



۲۴) $r = \sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

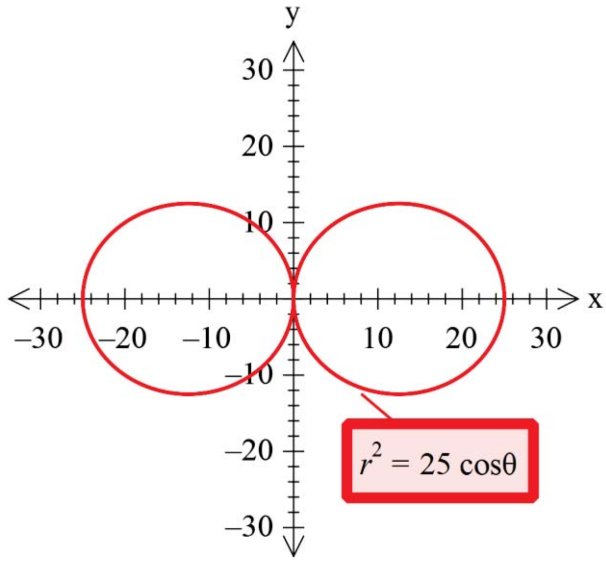
قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا. توجه : اگر $(r، \theta)$ روی نمودار باشد ، $(-r, \theta + ۲\pi)$

هم روی نمودار است.



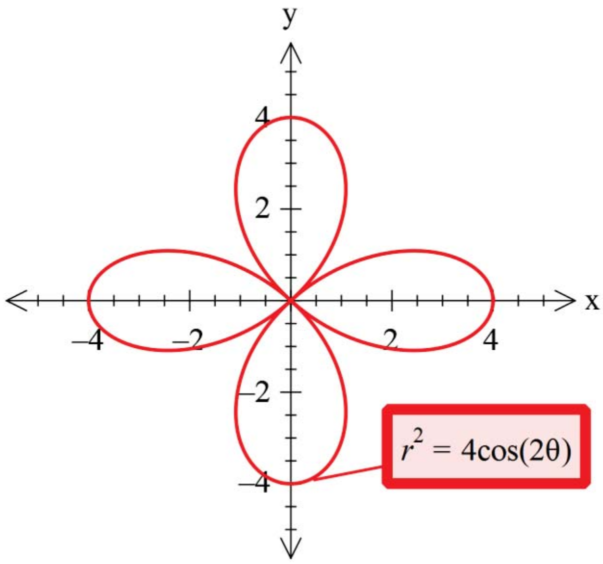
۲۵) $r^۲ = ۲۵ \cos\theta$

قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



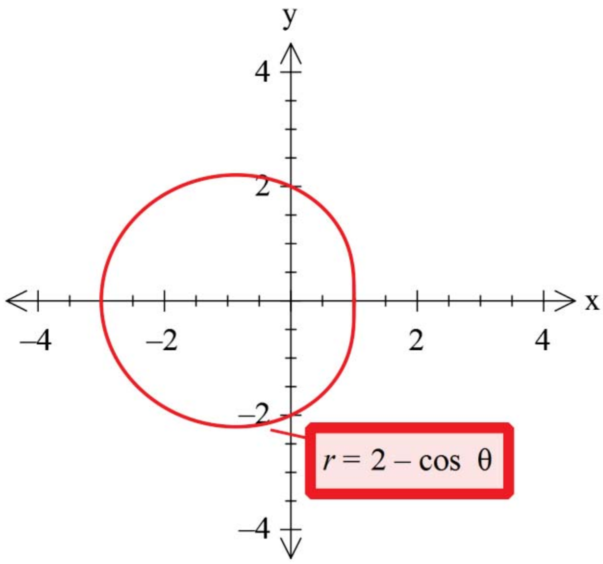
۲۶) $r^{۲} = ۴\cos ۲\theta$

قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



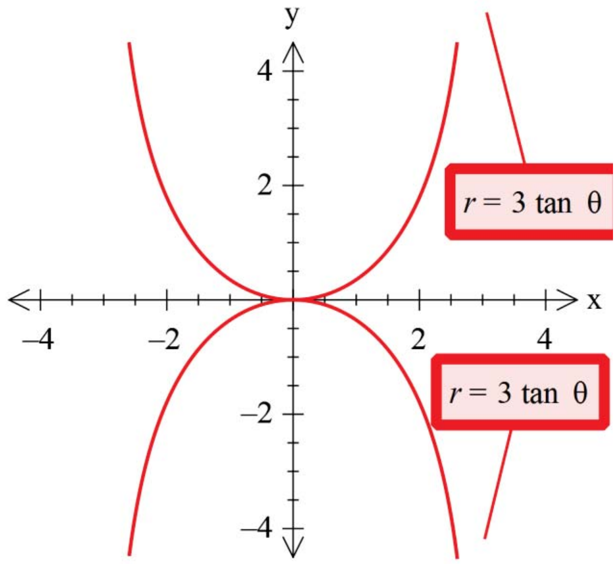
۲۷) $r = ۲ - \cos\theta$

قرینه نسبت به محور x.



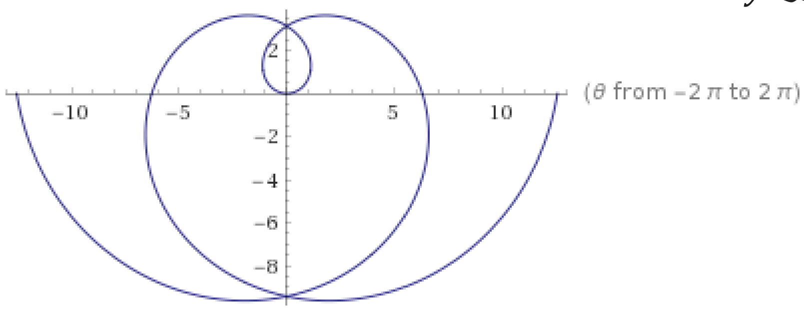
۲۸) $r = ۳ \tan\theta$

قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



۲۹) $r = ۲\,\theta$

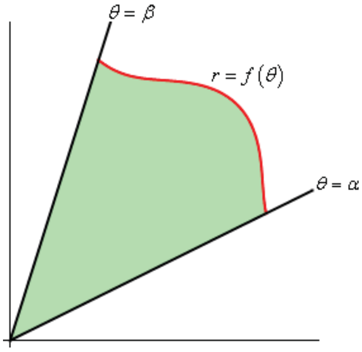
قرینه نسبت به محور y.



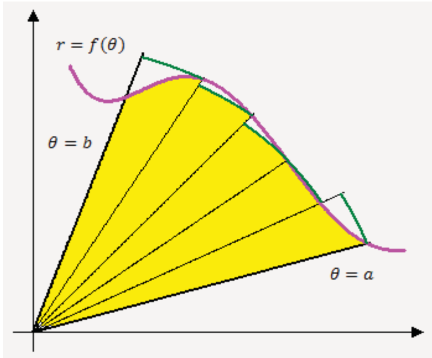
۳.۱۰ - مساحت در مختصات قطبی Area in Polar Coordinates

همان طور که در بخش ۳.۹ دیدیم ، توصیف بسیاری از منحنی ها در سیستم مختصات قطبی آسان تر از تعریف انها در سیستم مختصات دکارتی است. در بسیار ی از مورد ، محاسبه مساحت های نواحی در دستگاه مختصات قطبی آسان تر است. در بخش ۱.۲ هنگامی که می خو استیم مقدمات محاسبه مساحت را توضیح دهیم، ناحیه را به مستطیل های کوچک تقسیم می کردیم و مساحت کل ناحیه را با جمع کردن مساحت های مستطیل های کوچک بدست می آوردیم. در سیستم قطبی برای محاسبه مساحت یک ناحیه ، تصویر A ، انرا مانند برش های پیتزا به چند قطاع تقسیم می کنیم. تصویر B, مساحت آنها را حساب می کنیم و سپس مجموع آنها رابدست می اوریم.

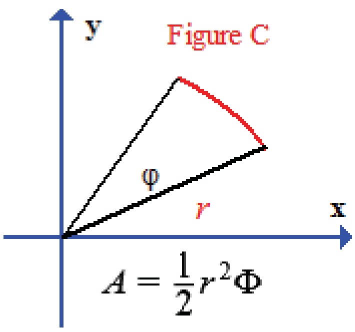
تصویر A



تصویر B



برای شروع ، مساحت قطاع S با زاویه φ و شعاع r را محاسبه می کنیم. تصویر C .



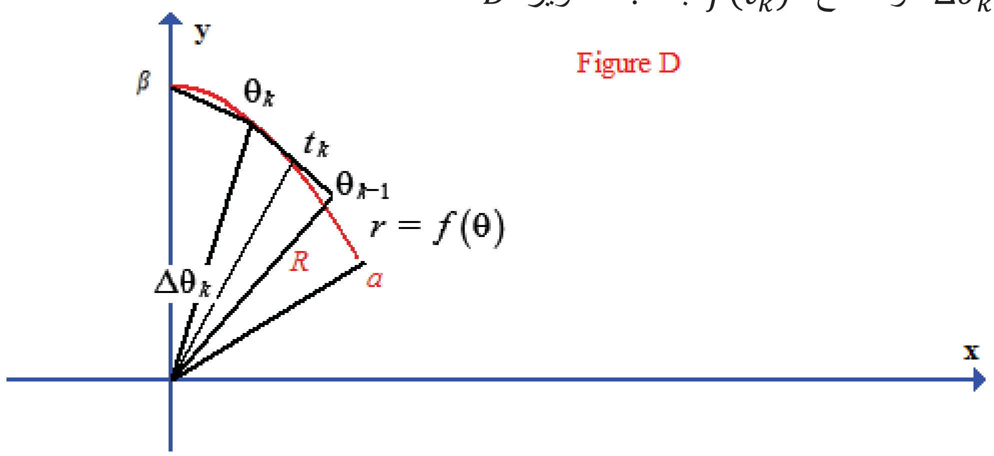
چون مساحت یک قطاع عبارت است از $\frac{\varphi}{۲\pi}$ ضرب در مساحت دائره یعنی $\pi r^۲$ پس داریم.

$$A=\frac{\varphi}{۲\pi}\left(\pi r^۲\right)=\frac{۱}{۲}r^۲\varphi \qquad (۱)$$

حالا یک تابع پیوسته و نا منفی f را در نظر بگیرید که در $[a,\beta]$ تعریف شده است به شرطی که $0\le\beta-\alpha\le ۲\pi$ باشد و فرض کنید R ناحیه ای باشد که شامل کلیه نقاطی در روی صفحه مختصات بدشد که مختصات قطبی آن نا معادله های زیر را بر قرار کنند.

$$0\le r\le f(\theta) \quad \text{و} \quad \alpha\le\theta\le\beta$$

هدف ما تعریف کردن مساحت R است. فرض می کنیم $\wp = \{\theta_0, \theta_۱, ..., \theta_n\}$ یک پارش $[\alpha،\beta]$ باشد. و برای هر k بین یک و n فرض می کنیم $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-۱}$ باشد. اگر t_k یک عدد اختیاری در بازه $[\theta_{k-۱}, \theta_k]$ باشد ، و اگر $\Delta\theta_k$ کوچک باشد ، پس ΔA_k یعنی مساحت آن قسمت R_k بین خطوط $\theta = \theta_{k-۱}$ و $\theta = \theta_k$ باید تقریبا مساوی مساحت یک قطاع با زاویه $\Delta\theta_k$ و شعاع $f(t_k)$ باشد. تصویر D



اگر در فرمول (۱) بجای r بنویسیم $f(t_k)$ و بجای φ بنویسیم $\Delta\theta_k$ پس ΔA_k تقریبا $\frac{۱}{۲}[f(t_k)]^۲\Delta\theta_k$ است . چون A یعنی مساحت R مساوی است با جمع مساحت های $\Delta A_۱, \Delta A_۲, \cdots, \Delta A_n$ است ، پس A باید تقریبا مساوی

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{۲}[f(t_k)]^۲\Delta\theta_k$$

باشد. و این خود یک مجموع ریمانی است برای $\frac{۱}{۲}f^۲$ در $[\alpha, \beta]$. لذا A یعنی مساحت R باید مطابق فرمول زیر باشد.

$$A = \lim_{\|\wp\|\to 0} \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{۲}[f(t_k)]^۲\Delta\theta_k = \int_\alpha^\beta \frac{۱}{۲}[f(\theta)]^۲ d\theta$$

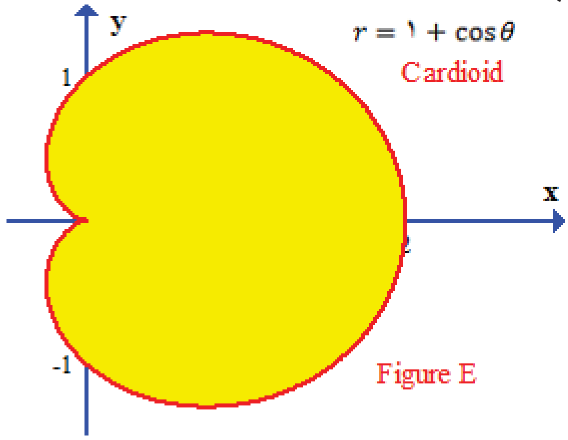
پس مساحت ناحیه ای که شامل تمام نقاط روی صفحه مختصات با مختصات قطبی (r, θ) و با شرایط زیر

$$0 \le r \le f(\theta) \quad \text{و} \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

باشد ، مطابق زیر است.

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \frac{۱}{۲}[f(\theta)]^۲ d\theta \qquad (۲)}$$

مثال ۱- فرض کنید R ناحیه ای است محصور بوسیله کاردیواید $Cardioid\ r = ۱ + \cos\theta$ تصویر E. مساحت R را پیدا کنید.



پاسخ

فرض می کنیم $f(\theta) = ۱ + \cos\theta$ باشد. اگر فرض کنیم $\alpha = 0$ و $\beta = ۲\pi$ باشد ، پس بر اساس (۲) و فرمول (۲) از بخش ۱.۶ که در ذیل می آوریم

$$\int cos^۲ x dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C \qquad (۲)$$

خواهیم داشت.

$$A = \int_0^{۲\pi} \frac{۱}{۲}[f(\theta)]^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi} \left(۱ + \cos\theta\right)^۲ d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi} \left(۱ + ۲\cos\theta + \cos^۲\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\theta + ۲\sin\theta + \frac{\theta}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin(۲\theta)\right)\Big|_0^{۲\pi} = \frac{۳\pi}{۲}$$

فرض می کنیم f و g در بازه $[\alpha, \beta]$ تعریف شده باشند و فرض می کنیم $0 \le \beta - \alpha \le ۲\pi$ باشد، و

$$0 \le g(\theta) \le f(\theta) \text{ برای } \alpha \le \theta \le \beta$$

باشد ، پس داریم.

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \frac{۱}{۲}\left\{[f(\theta)]^۲ - [g(\theta)]^۲\right\} d\theta \qquad (۳)}$$

اگر $g = 0$ باشد ، پس فرمول (۳) تبدیل می شود به فرمول (۲)

مثال ۲- مساحت قسمت رنگی تصویر F را پیدا کنید.

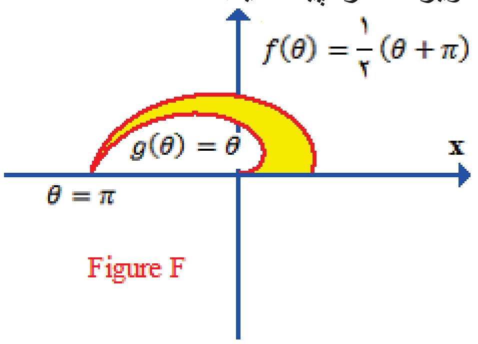


Figure F

پاسخ
فرض می کنیم

$$f(\theta) = \frac{۱}{۲}(\theta + \pi) \quad \text{و} \quad g(\theta) = \theta$$

باشد. پس بر اساس (۳) داریم.

$$A = \int_0^{\pi} \frac{۱}{۲}\left\{[f(\theta)]^۲ - [g(\theta)]^۲\right\} d\theta = \frac{۱}{۲}\int_0^{\pi}\left[\frac{۱}{۴}(\theta+\pi)^۲ - \theta^۲\right] d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۱۲}(\theta+\pi)^۳ - \frac{۱}{۳}\theta^۳\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{۱}{۱۲}\left(۸\pi^۳\right) - \frac{۱}{۳}\pi^۳\right) - \frac{۱}{۱۲}\pi^۳\right] = \frac{\pi^۳}{۸}$$

مثال ۳ - مساحت ناحیه داخل دائره $r = ۲\cos\theta$ و خارج دائره $r = ۱$ را پیدا کنید. تصویر G

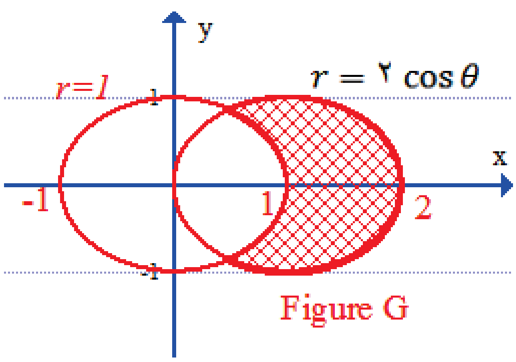
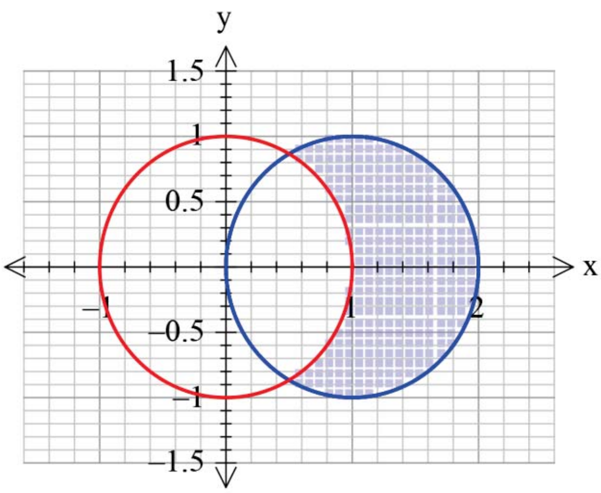


Figure G



پاسخ
ناحیه مورد سوال بین خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ قرار دارد. برای پیدا کردن محل تلاقی دو نمودار معادله زیر را حل می کنیم.

$$۲\cos\theta = ۱ \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{۱}{۲}$$

ملاحظه می کنیم که $\theta = -\frac{\pi}{۳}$ و یا $\theta = \frac{\pi}{۳}$ است ، پس $\alpha = -\frac{\pi}{۳}$ و $\beta = \frac{\pi}{۳}$ است.

فرض می کنیم $f(\theta) = ۲\cos\theta$ و $g(\theta) = ۱$. با استفاده از (۳) همین بخش و (۲) بخش (۱.۶) داریم.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱}{۲}\left(۴\cos^{۲}\theta - ۱\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} ۲\cos^{۲}\theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱}{۲}d\theta$$

$$= ۲\left(\frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} - \frac{۱}{۲}\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

تمرینات ۳.۱۰

در تمرینات زیر مساحت محدود توسط نمودارهای توابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $r = ۴$

۲) $r = ۳\sin\theta$

۳) $r = -۲\cos\theta$

۴) $r = ۹\cos ۲\theta$ برای $\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ و خط $\theta = \frac{\pi}{۲}$

۵) $r = \frac{۱}{۲}\cos ۳\theta$ گل رز سه برگی

۶) $r = ۲(۱ - \sin\theta)$ کارد یو ئید یا دل نما

۷) $r = ۴ + ۳\cos\theta$ لیماسون پاسکال

۸) $r^{۲} = ۲۵\cos\theta$

در تمرینات زیر مساحت ناحیه داخل نمودار تابع اول و بیرون نمودار تابع دوم را پیدا کنید.

۹) $r = ۵$ و $r = ۱$

۱۰) $r = ۱$ و $r = \sin\theta$

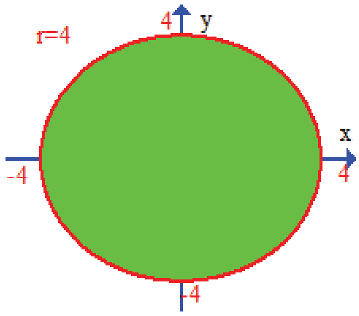
۱۱) $r = ۱$ $r^{۲} = \cos ۲\theta$

۱۲) $r = ۲ + \cos\theta$ $r = -\cos\theta$

پاسخ تمرینات ۳.۱۰

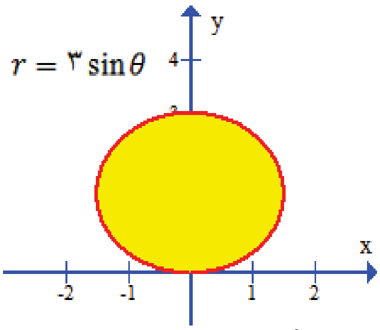
در تمرینات زیر مساحت محدود توسط نمودارهای توابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $r = ۴$



$$A = \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi} ۴^۲\, d\theta = ۸\,\theta \Big|_0^{۲\pi} = ۱۶\,\pi$$

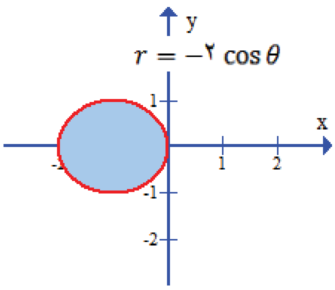
۲) $r = ۳\sin\theta$



تمام ناحیه برای $0 \le \theta \le \pi$ بدست می آید.

$$A = \frac{۱}{۲}\int_0^{\pi} ۹\sin^۲\theta d\theta = \frac{۹}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\theta - \frac{۱}{۴}\sin ۲\,\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{۹\pi}{۴}$$

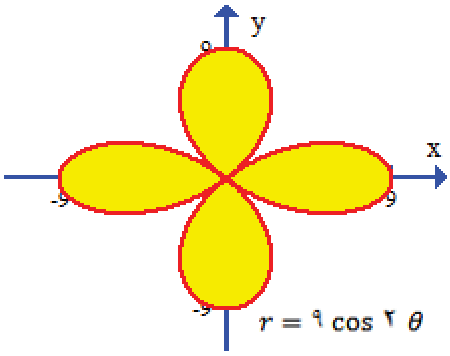
۳) $r = -۲\cos\theta$



$$A = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} (-۲\cos\theta)^۲ d\theta = ۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \cos^۲\theta d\theta = ۲\left(\frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\,\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} = \pi$$

۴) $r = ۹\cos ۲\theta$ برای $\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ و خط $\theta = \frac{\pi}{۲}$

ناحیه همان مساحت را دارا است که $r = -۹\cos ۲\,\theta$ برای $\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$

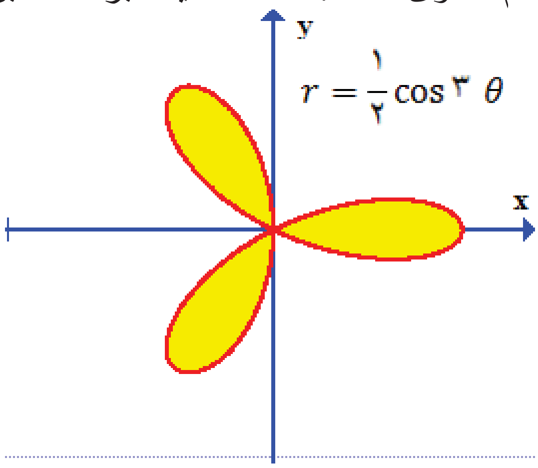


$$A = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} (-۹\cos ۲\,\theta)^۲ d\theta = \frac{۸۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ ۲\,\theta d\theta$$

$$= \frac{۸۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۴\,\theta\right) d\theta = \frac{۸۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\theta - \frac{۱}{۸}\sin ۴\,\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۸۱\pi}{۱۶}$$

۵) $r = \frac{۱}{۲}\cos ۳\,\theta$ گل رز سه برگی

مساحت های هر سه برگ با هم مساوی هستند. مساحت یک برگ مطابق زیر است.

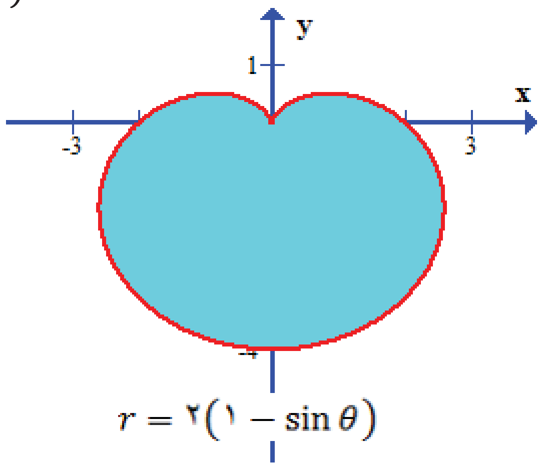


$$A_۱ = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} \left(\frac{۱}{۲}\cos ۳\,\theta\right)^۲ d\theta = \frac{۱}{۸}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} \cos^۲ ۳\,\theta d\theta$$

$$= \frac{۱}{۸}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۶\,\theta\right)d\theta = \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۱۲}\sin ۶\,\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{\pi}{۴۸}$$

پس مجموع مساحت $A = ۳A_۱ = \frac{\pi}{۱۶}$

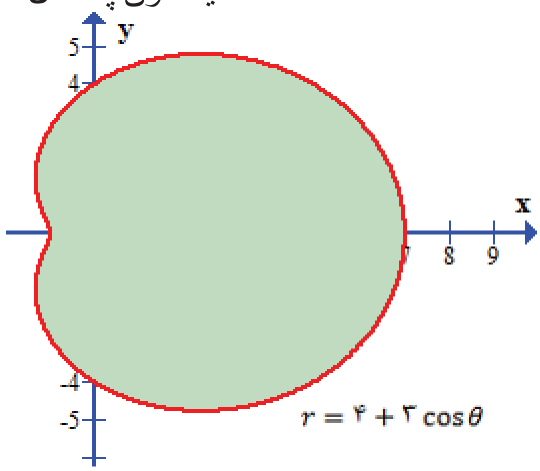
۶) $r = ۲(۱-\sin\theta)$ کارد یو ئید یا دل نما



$$A = \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi} ۴(۱-\sin\theta)^۲ d\theta = ۲\int_0^{۲\pi}\left(۱-۲\sin\theta+\sin^۲\theta\right)d\theta$$

$$= ۲\int_0^{۲\pi}\left(\frac{۳}{۲}-۲\sin\theta-\frac{۱}{۲}\cos ۲\,\theta\right)d\theta = ۲\left(\frac{۳}{۲}\theta+۲\cos\theta-\frac{۱}{۴}\sin ۲\,\theta\right)\Big|_0^{۲\pi} = ۶\,\pi$$

۷) $r = ۴+۳\cos\theta$ لیماسون پاسکال

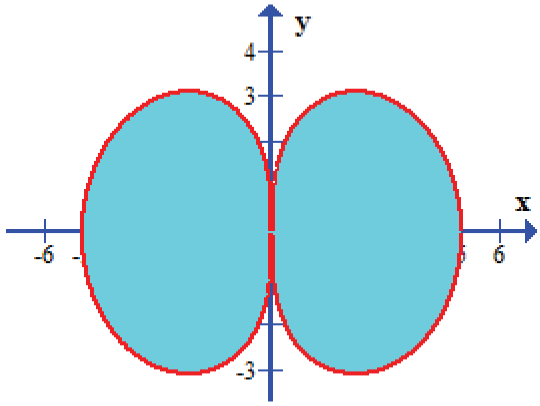


$$A = \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi}(۴+۳\cos\theta)^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi}\left(۱۶+۲۴\cos\theta+۹\cos^۲\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{41}{2} + 24\cos\theta + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{41}{2}\theta + 24\sin\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{41\pi}{2}$$

۸)　　$r^2 = 25\cos\theta$



$r^2 = 25\cos\theta$

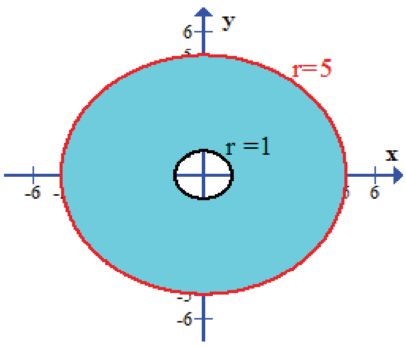
هر دو برگ نمودار دارای مساحت مساوی هستند. مساحت یکی از آنها مطابق زیر است.

$$A_1 = \frac{1}{2}\int^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{25\cos\theta}\right)^2 d\theta = \frac{25}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{25}{2}\sin\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 25$$

پس مجموع مساحت $A = 2A_1 = 50$

در تمرینات زیر مساحت ناحیه داخل نمودار تابع اول و بیرون نمودار تابع دوم را پیدا کنید.

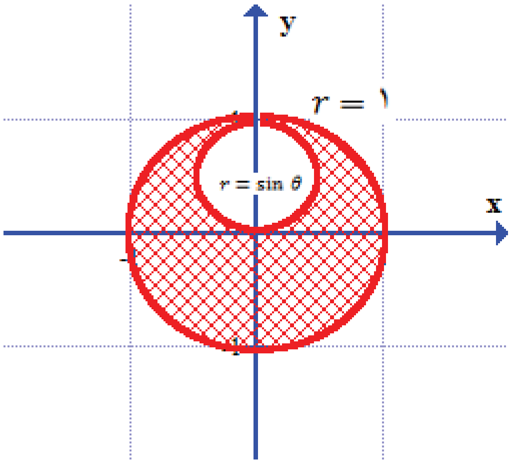
۹)　　$r = 5$ و $r = 1$



فرض می کنیم $f(\theta) = 5$ و $g(\theta) = 1$ باشد ، پس داریم.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(5^2 - 1^2\right)d\theta = 12\ \theta\Big|_0^{2\pi} = 24\pi$$

۱۰) $r = ۱$ و $r = \sin\theta$



فرض می کنیم

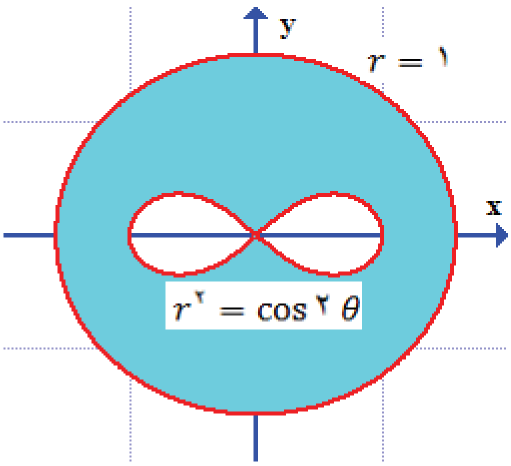
$$f(\theta) = ۱, g(\theta) = \begin{cases} \sin\theta & \text{برای } 0 \le \theta \le \pi \\ 0 & \text{برای } \pi \le \theta \le ۲\pi \end{cases}$$

باشد ، پس داریم.

$$A = \frac{۱}{۲}\int_0^{\pi}\left(۱^{۲} - \sin^{۲}\theta\right)d\theta + \frac{۱}{۲}\int_{\pi}^{۲\pi} ۱^{۲} d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{۱}{۲}\theta\Big|_{\pi}^{۲\pi} = \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۱۱) $r = ۱$ $r^{۲} = \cos ۲\theta$



فرض می کنیم

$$f(\theta) = ۱, g(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\cos ۲\theta} & \text{برای } -\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴} \text{ و } \frac{۳\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۵\pi}{۴} \\ 0 & \text{برای } \frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۳\pi}{۴} \text{ و } \frac{۵\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۷\pi}{۴} \end{cases}$$

$$A=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\left[۱^{۲}-\left(\sqrt{\cos ۲\,\theta}\right)^{۲}\right]d\theta+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}}۱^{۲}d\theta$$

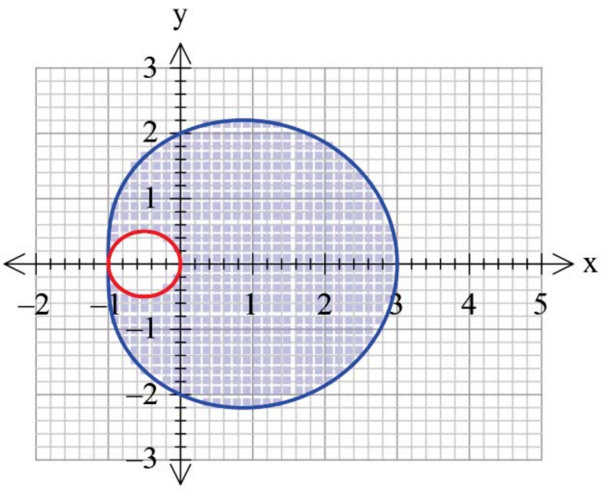
$$+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}\left[۱^{۲}-\left(\sqrt{\cos ۲\,\theta}\right)^{۲}\right]d\theta+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{\frac{۷\pi}{۴}}۱^{۲}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}(۱-\cos ۲\,\theta)d\theta+\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}(۱-\cos ۲\,\theta)d\theta+\frac{\pi}{۴}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\,\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}+\frac{۱}{۲}\left(\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\,\theta\right)\Bigg|_{\frac{۳\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}+\frac{\pi}{۲}$$

$$=\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)+\frac{\pi}{۲}=\pi-۱$$

۱۲) $r=۲+\cos\theta \quad r=-\cos\theta$



فرض می کنیم

$$f(\theta)=۲+\cos\theta\ ,g(\theta)=\begin{cases}0 & -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\\ -\cos\theta & \frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

باشد ، پس داریم.

$$A = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(۲ + \cos\theta\right)^{۲} d\theta + \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \left[\left(۲ + \cos\theta\right)^{۲} - (-\cos\theta)^{۲}\right] d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(۴ + ۴\cos\theta + \cos^{۲}\theta\right) d\theta + \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \left(۴ + ۴\cos\theta\right) d\theta$$

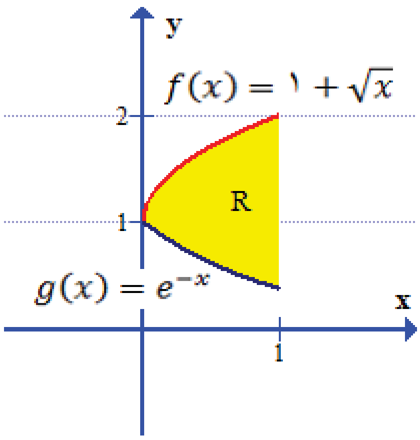
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۹}{۲}\theta + ۴\sin\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{۱}{۲}\left(۴\theta + ۴\sin\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}$$

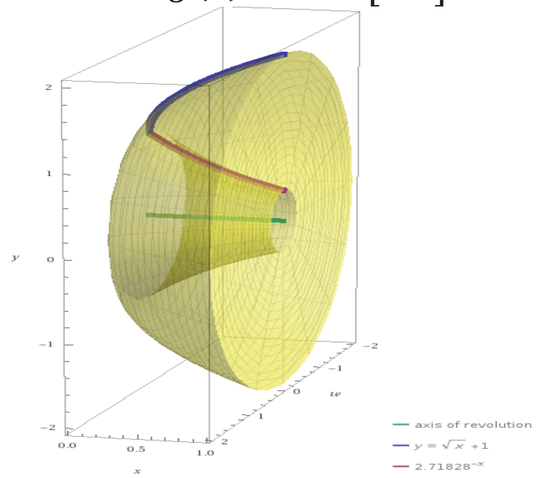
$$= \left(\frac{۹\pi}{۴} + ۴\right) + \left(۲\pi - ۴\right) = \frac{۱۷\pi}{۴}$$

۳.۱۱- تمرینات دوره ای فصل سوم Chapter Three Review Exercises

۱ - حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین نمودار های f و g حول محور x در بازه داده شده ایجاد می شود را پیدا کنید.

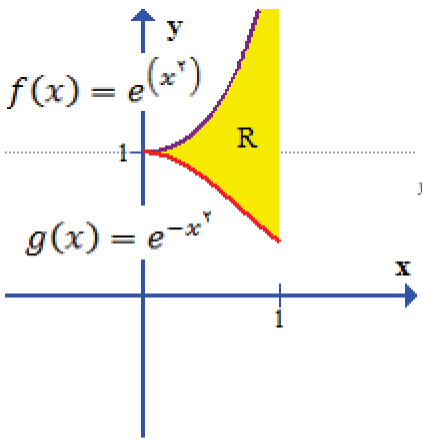
$$f(x) = ۱ + \sqrt{x} \text{،} \quad g(x) = e^{-x}; [0, ۱]$$

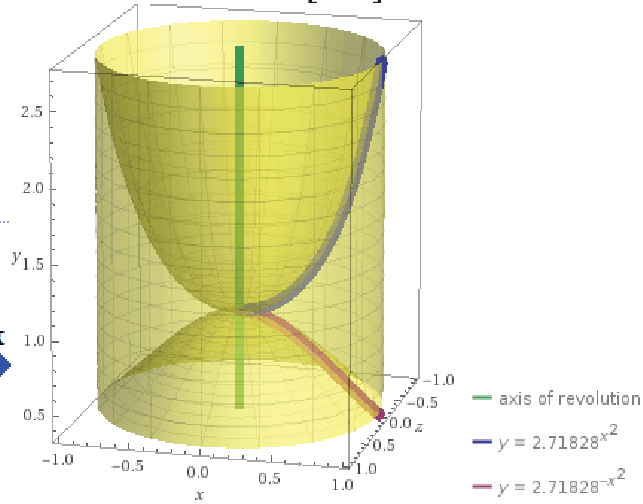




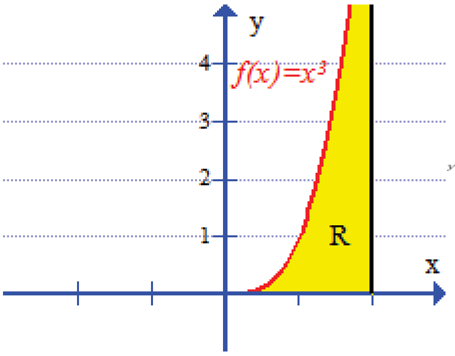
۲ - حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین نمودار های f و g حول محور y در بازه داده شده ایجاد می شود را پیدا کنید.

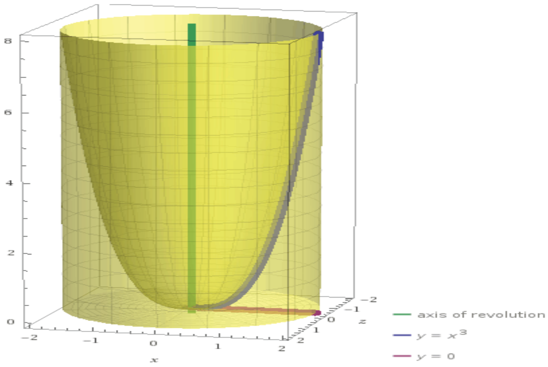
$$f(x) = e^{(x^۲)}, g(x) = e^{-x^۲}; [0, ۱]$$





۳ - فرض کنید $f(x) = x^۳$ باشد ، و فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و محور x باشد. ناحیه R مکعب قوسی $Cubical\ Spandrel$ می نامند.تصویر زیر

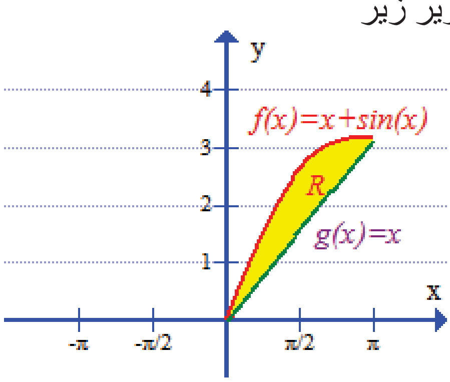




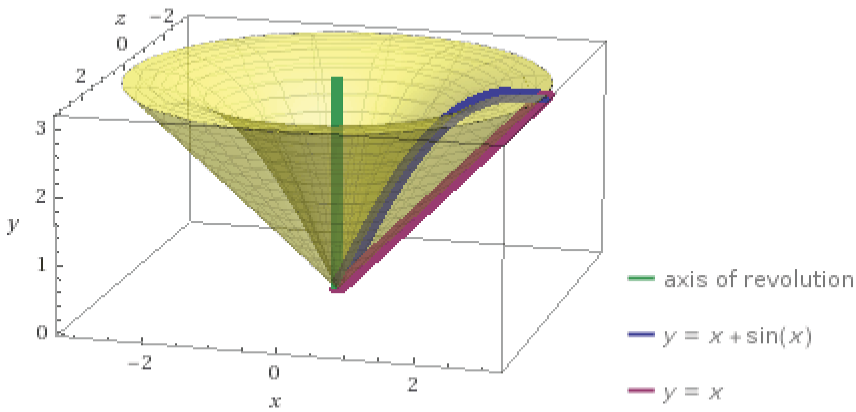
الف - با استفاده از روش شل یا روش غشای استوانه ای $Shell\ Method$ حجم جسم ایجاد شده در اثر دوران R حول محور y را پیدا کنید.

ب - مرکز ثقل R را پیدا کنید.

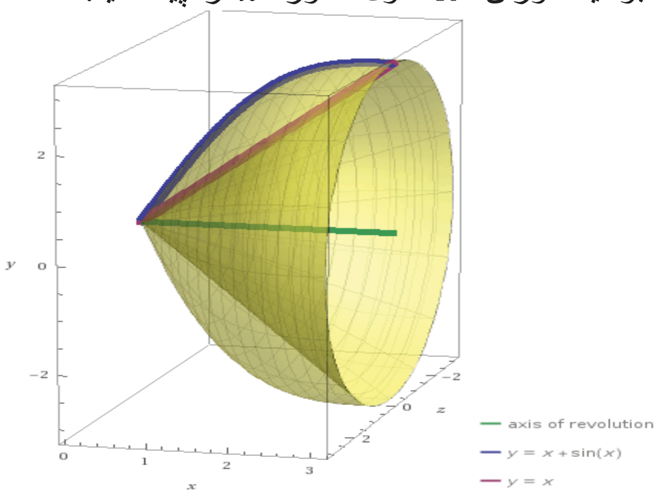
۴ - فرض کنید $f(x) = x + \sin x$ و $g(x) = x$ باشد و فرض کنید R ناحیه بین نمودار های f و g در $[0,\pi]$ باشد.تصویر زیر



الف - حجم جسم ایجاد شده بوسیله دوران R حول محور y را پیدا کنید.



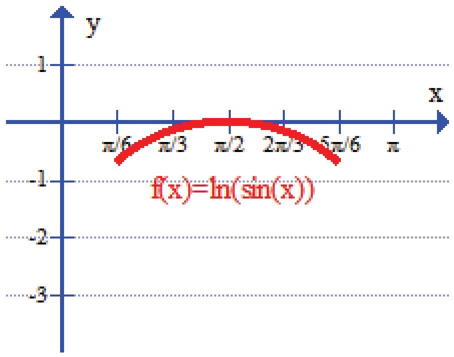
ب - حجم جسم ایجاد شده بوسیله دوران R حول محور x را پیدا کنید.



۵ - یک هرم با قاعده شش ضلعی منظم که طول هر ضلع قاعده ۲ فوت است وارتفاع آن ۱۰ فوت . حجم هرم را پیدا کنید.

۶ - طول نمودار f را پیدا کنید.

$$f(x) = \ln(\sin x) \qquad \frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{۵\pi}{۴}$$



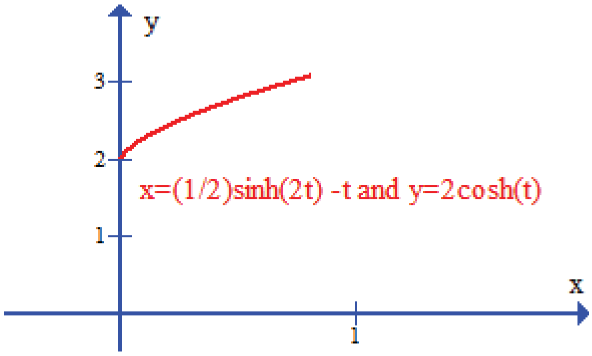
۷ - نمودار معادله های پارا متری زیر را رسم کنید.

$x = ۲t + ۱$ و $y = ۴ - ۶t$

۸ ـ طول منحنی پارا متری زیر را پیدا کنید.

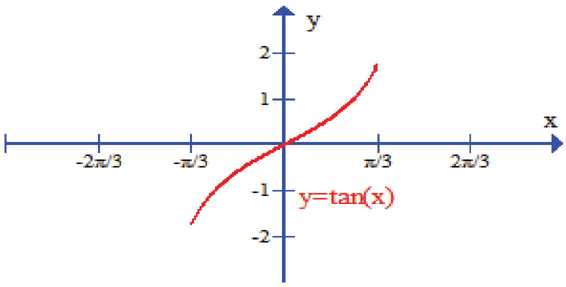
$$x = \frac{۱}{۲}\sinh ۲t - t \quad \text{و} \quad y = ۲\cosh t \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le ۱$$

راهنمایی : $\cosh ۲t = ۱ + ۲\sinh^{۲} t$



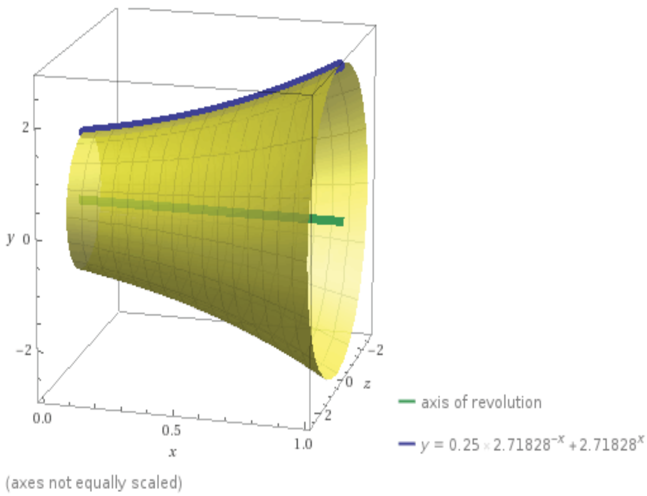
۹ ـ با استفاده از قاعده سیمپسون و $n = ۴$ طول نمودار تابع زیر را پیدا کنید.

$$y = \tan x \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۳}$$



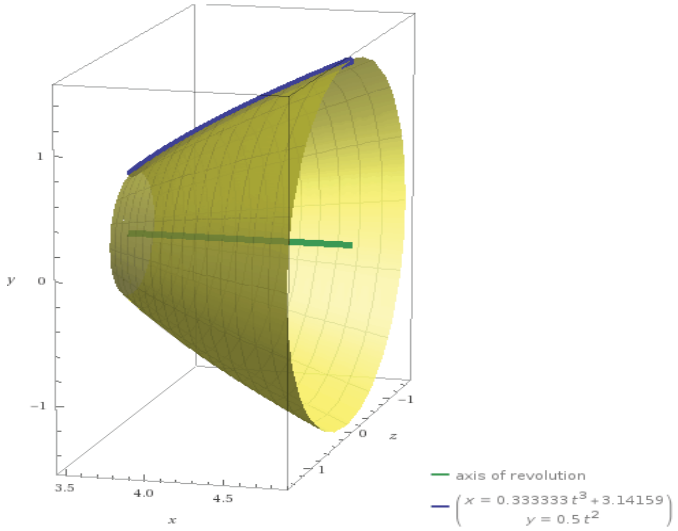
۱۰ ـ مساحت جانبی سطحی که از دوران نمودار f حول محور x ایجاد می شود ، پیدا کنید.

$$f(x) = e^{x} + \frac{۱}{۴}e^{-x} \quad \text{برای} \quad 0 \le x \le ۱$$



۱۱ - مساحت جانبی سطحی که از دوران منحنی پارا متری زیر حول محور x ایجاد می شود ، پیدا کنید.

$$x=\pi+\frac{1}{3}t^{3} \text{ و } y=\frac{1}{2}t^{2} \text{ برای } 1\le t\le\sqrt{3}$$

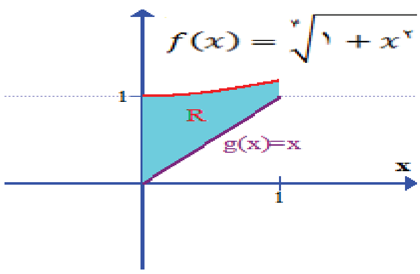


۱۲ - یک مخزن بنزین به شکل کره به قطر ۴۰ فوت داریم . اگر تا عمق ۵ فوتی آن بنزین باشد ، حجم بنزین داخل مخزن را پیدا کنید.

۱۳ - یک چاه به عمق ۲۰ فوت و شعاع ۳ فوت حفر می شود. اگر هر فوت مکعب خاک ۱۵۰ پوند وزن داشته باشد ، مقدار کار لازم برای بالا اوردن خاک به سطح زمین را پیدا کنید.

۱۴ - فرض کنید $f(x)=\sqrt[4]{1+x^{2}}$ و $g(x)=x$ باشد ، و فرض کنید R ناحیه بین نمودار های f و g باشد. گشتاورهای R حول محور های مختصات را پیدا کنید.
راهنمایی : برای پاسخ دادن به این مساله لازم است از فرمول (۷) بخش ۲.۲ که در ذیل می آوریم ، استفاده کنید.

$$\int \sec^{3}x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad (7)$$



در تمرینات زیر نمودار ها را رسم کنید.

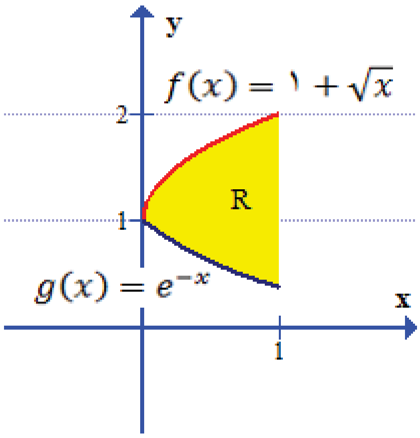
۱۵) $r = ۲\cos\theta - ۲$

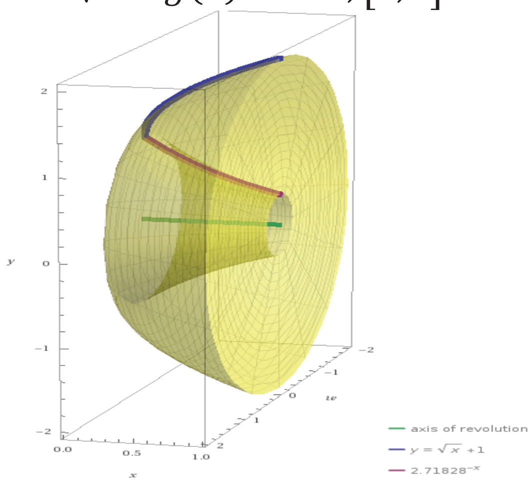
۱۶) $r^۲ = \frac{۱}{۴}\cos ۲\theta$

پاسخ تمرینات دوره ای فصل سوم

۱ - حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین نمودار های f و g حول محور x در بازه داده شده ایجاد می شود را پیدا کنید.

$$f(x) = ۱ + \sqrt{x} \text{ ، } g(x) = e^{-x}; [0, ۱]$$





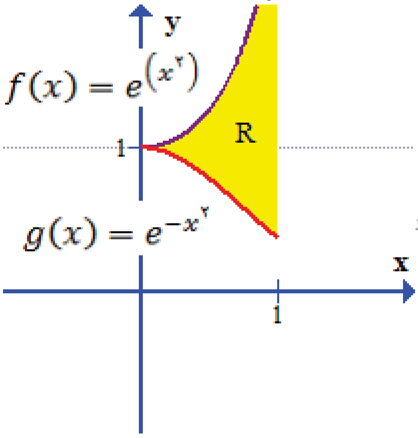
پاسخ

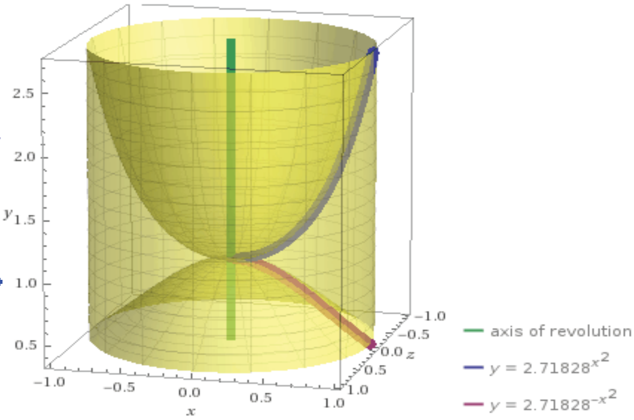
$$V = \pi \int_0^۱ \left[\left(۱ + \sqrt{x}\right)^۲ - \left(e^{-x}\right)^۲ \right] dx = \pi \int_0^۱ \left(۱ + ۲\sqrt{x} + x - e^{-۲x}\right) dx$$

$$= \pi \left(x + \frac{۴}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۲} x^۲ + \frac{۱}{۲} e^{-۲x} \right) \Big|_0^۱ = \pi \left(\frac{۷}{۳} + \frac{۱}{۲} e^{-۲} \right)$$

۲ - حجم جسم سه بعدی که از دوران ناحیه بین نمودار های f و g حول محور y در بازه داده شده ایجاد می شود را پیدا کنید.

$$f(x) = e^{(x^۲)}, g(x) = e^{-x^۲}\ ; [0, ۱]$$

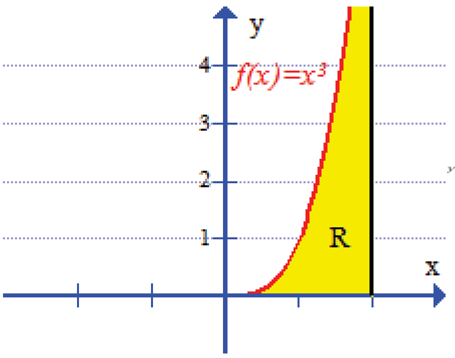


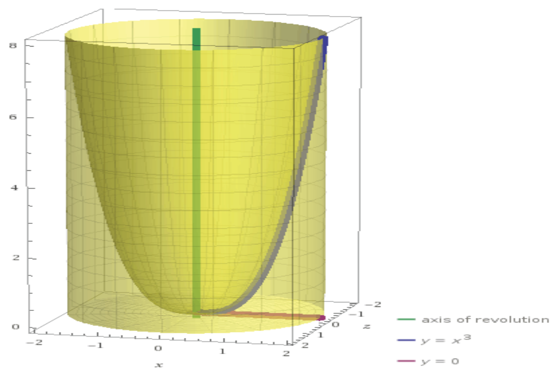


پاسخ

$$V = ۲\pi \int_0^۱ x\left(e^{x^۲} - e^{-x^۲}\right) dx \overset{u=x^۲}{\cong} ۲\pi \int_0^۱ (e^u - e^{-u}) \frac{۱}{۲} du$$
$$= \pi(e^u + e^{-u})\Big|_0^۱ = \pi\left(e + e^{-۱} - ۲\right)$$

۳ - فرض کنید $f(x) = x^۳$ باشد ، و فرض کنید R ناحیه بین نمودار f و محور x باشد. ناحیه R مکعب قوسی $Cubical\ Spandrel$ می نامند.تصویر زیر





الف - با استفاده از روش شل یا روش غشای استوانه ای $Shell\ Method$ حجم جسم ایجاد شده در اثر دوران R حول محور y را پیدا کنید.

پاسخ

$$V = ۲\pi \int_0^۲ x\left(x^۳\right) dx = \frac{۲}{۳}\pi x^۵ \Big|_0^۲ = \frac{۶۴\pi}{۵}$$

ب - مرکز ثقل R را پیدا کنید.

پاسخ

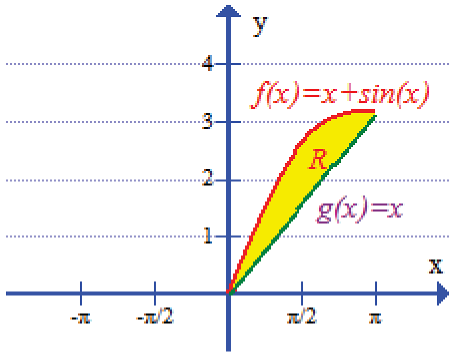
$$M_x=\frac{۱}{۲}\int_0^{۲}\left(x^{۳}\right)^{۲}dx=\frac{۱}{۱۴}x^{۷}\Big|_0^{۲}=\frac{۶۴}{۷}$$

$$M_y=\int_0^{۲}x\left(x^{۳}\right)dx=\frac{۱}{۵}x^{۵}\Big|_0^{۲}=\frac{۳۲}{۵}$$

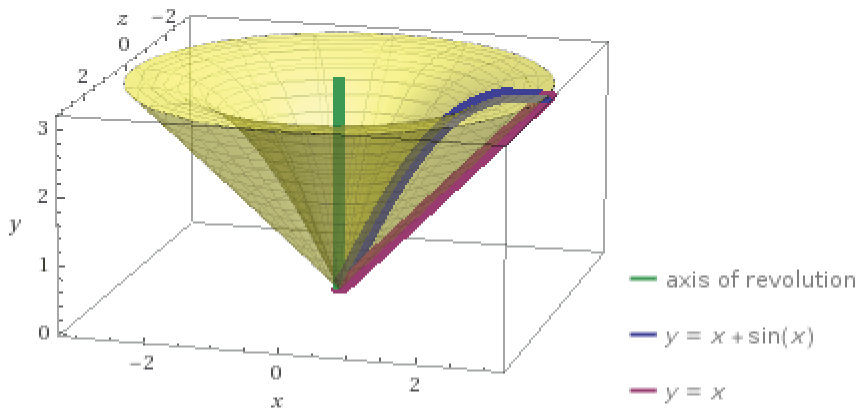
$$A=\int_0^{۲}x^{۳}dx=\frac{۱}{۴}x^{۴}\Big|_0^{۲}=۴$$

$$\overline{x}=\frac{\frac{۳۲}{۵}}{۴}=\frac{۸}{۵};\overline{y}=\frac{\frac{۶۴}{۷}}{۴}=\frac{۱۶}{۷};(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{۸}{۵},\frac{۱۶}{۷}\right)$$

۴ - فرض کنید $f(x)=x+\sin x$ و $g(x)=x$ باشد و فرض کنید R ناحیه بین نمودار های f و g در $[0,\pi]$ باشد.تصویر زیر



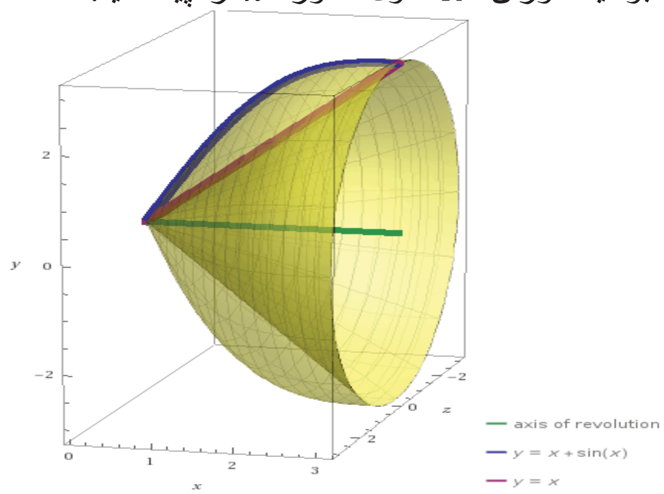
الف - حجم جسم ایجاد شده بوسیله دوران R حول محور y را پیدا کنید.



پاسخ

$$V=۲\pi\int_0^{\pi}x[(x+\sin x)-x]dx=۲\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$
$$=۲\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=۲\pi^{۲}$$

ب - حجم جسم ایجاد شده بوسیله دوران R حول محور x را پیدا کنید.

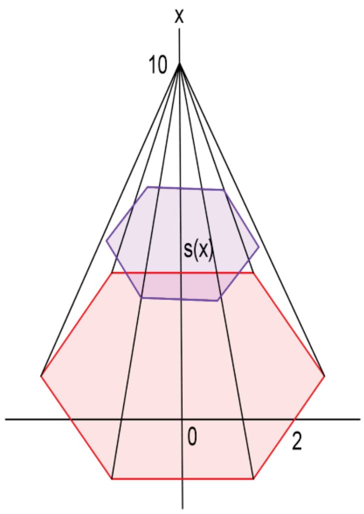


پاسخ

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left[(x+\sin x)^{۲}-x^{۲}\right]dx=\pi\int_0^{\pi}\left(۲x\sin x+\sin^{۲}x\right)dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi}۲x\sin x\,dx+\pi\int_0^{\pi}\sin^{۲}x\,dx$$
$$۲\,\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}+\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x\right)dx$$
$$=۲\,\pi^{۲}+\pi\left(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{۵}{۲}\pi^{۲}$$

۵ - یک هرم با قاعده شش ضلعی منظم که طول هر ضلع قاعده ۲ فوت است وارتفاع آن ۱۰ فوت . حجم هرم را پیدا کنید.

پاسخ



فرض می کنیم یک برش عرضی این شش ضلعی که تا قاعده هرم x فوت فاصله دارد ، طول هر ضلع آن $s(x)$ فوت باشد. پس

$$\frac{s(x)}{۲}=\frac{۱۰-x}{۱۰}=\frac{۱}{۵}(۱۰-x)$$

پس ، مساحت این برش ، مطابق زیر بدست می آید.

$$A(x)=۶\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)(s(x))^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۵۰}(۱۰-x)^۲$$

و در نهایت حجم هرم مطابق زیر است.

$$V=\int_0^{۱۰}\frac{۳\sqrt{۳}}{۵۰}(۱۰-x)^۲dx=\frac{۳\sqrt{۳}}{۵۰}\left(-\frac{۱}{۳}\right)(۱۰-x)^۳\Big|_0^{۱۰}=۲۰\sqrt{۳}$$ فوت مکعب

۶ - طول نمودار f را پیدا کنید.

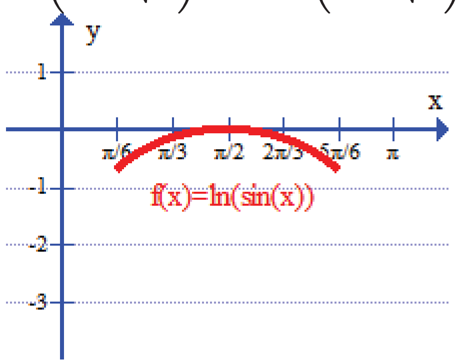
$$f(x)=\ln(\sin x)\qquad \frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۶}$$

پاسخ

$$L=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\sqrt{۱+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^۲}\,dx=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\sqrt{۱+\cot^۲ x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\csc x dx=-\ln|\csc x+\cot x|\Bigg|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}$$

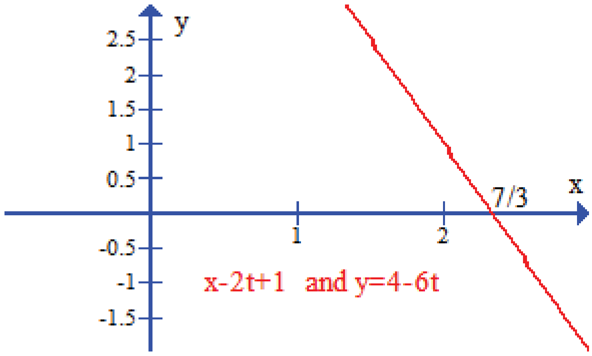
$$=\ln\left(۲+\sqrt{۳}\right)-\ln\left(۲-\sqrt{۳}\right)=۲\ln\left(۲+\sqrt{۳}\right)=\ln\left(۷+۴\sqrt{۳}\right)$$



۷ ـ نمودار معادله های پارا متری زیر را رسم کنید.

$$x = ۲t + ۱ \quad \text{و} \quad y = ۴ - ۶t$$

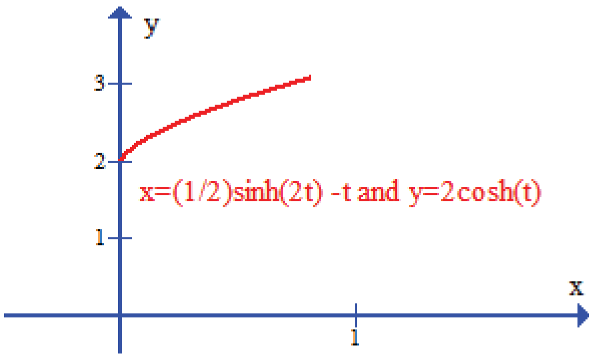
پاسخ



۸ ـ طول منحنی پارا متری زیر را پیدا کنید.

$$x = \frac{۱}{۲}\sinh ۲t - t \quad \text{و} \quad y = ۲\cosh t \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le ۱$$

راهنمایی : $\cosh ۲t = ۱ + ۲\sinh^۲ t$



پاسخ

$$L = \int_0^۱ \sqrt{(\cosh ۲t - ۱)^۲ + (۲\sinh t)^۲}\, dt$$

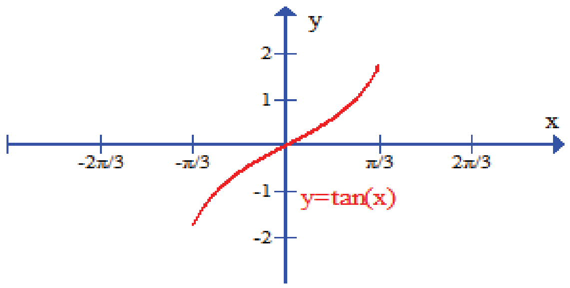
$$= \int_0^۱ \sqrt{(۲\ \sinh^۲ t)^۲ + (۲\sinh t)^۲}\ dt = \int_0^۱ \sqrt{۴\ \sinh^۴ t + ۴\sinh^۲ t}\ dt$$

$$= \int_0^۱ ۲\sinh t \sqrt{\sinh^۲ t + ۱}\ dt = \int_0^۱ ۲\sinh t \cosh t\, dt$$

$$= \sinh^۲ t\,\Big|_0^۱ = \sinh ۱ = \frac{۱}{۲}\left(e - e^{-۱}\right)$$

۹ ـ با استفاده از قاعده سیمپسون و $n = ۴$ طول نمودار تابع زیر را پیدا کنید.

$$y = \tan x \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۳}$$



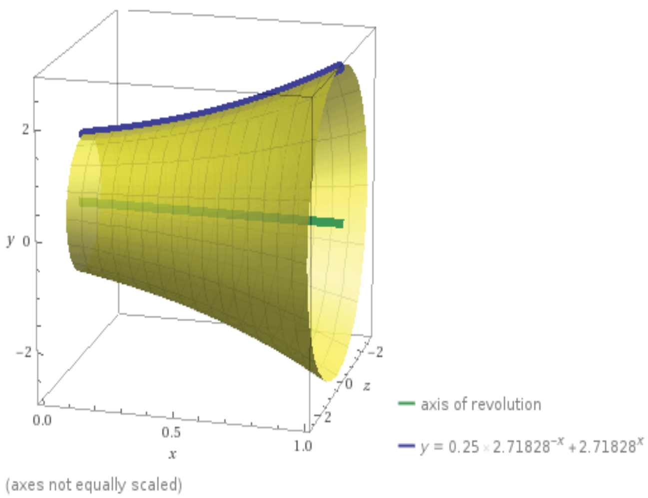
پاسخ

$$L = \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \sqrt{۱ + \left(\sec^۲ x\right)^۲}\; dx = \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \sqrt{۱ + \sec^۴ x}\; dx$$

$$\approx \frac{۲\frac{\pi}{۳}}{۱۲}\left(\sqrt{۱۷} + ۴\sqrt{\frac{۲۵}{۹}} + ۲\sqrt{۲} + ۴\sqrt{\frac{۲۵}{۹}} + \sqrt{۱۷}\right) \approx ۴ / ۲۵۹۹۹$$

۱۰ ـ مساحت جانبی سطحی که از دوران نمودار f حول محور x ایجاد می شود ، پیدا کنید.

$$f(x) = e^x + \frac{۱}{۴}e^{-x} \quad \text{برای} \quad 0 \le x \le ۱$$



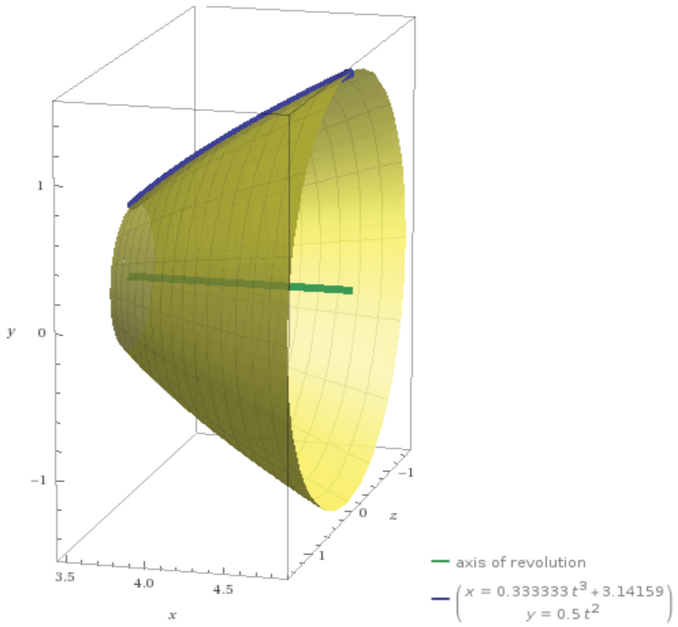
پاسخ

$$S = ۲\pi \int_0^۱ \left(e^x + \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)\sqrt{۱ + \left(e^x - \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)^۲}\; dx$$

$$= ۲\pi \int_0^{۱} \left(e^{x} + \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)\sqrt{۱ + \left(e^{۲x} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶}e^{-۲x}\right)}\ dx$$
$$= ۲\pi \int_0^{۱} \left(e^{x} + \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)\sqrt{e^{۲x} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶}e^{-۲x}}\ dx$$
$$= ۲\pi \int_0^{۱} \left(e^{x} + \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)\left(e^{x} + \frac{۱}{۴}e^{-x}\right)dx$$
$$= ۲\pi \int_0^{۱} \left(e^{۲x} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶}e^{-۲x}\right)dx = ۲\pi\left(\frac{۱}{۲}e^{۲x} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۳۲}e^{-۲x}\right)\Big|_0^{۱}$$
$$= \pi\left(e^{۲} - \frac{۱}{۱۶}e^{-۲} + \frac{۱}{۱۶}\right)$$

۱۱ - مساحت جانبی سطحی که از دوران منحنی پارا متری زیر حول محور x ایجاد می شود ، پیدا کنید.

$$x = \pi + \frac{۱}{۳}t^{۳} \text{ و } y = \frac{۱}{۲}t^{۲} \text{ برای } ۱ \le t \le \sqrt{۳}$$



پاسخ

$$S = ۲\pi \int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{۱}{۲}t^{۲}\sqrt{\left(t^{۲}\right)^{۲} + (t)^{۲}}\ dt = ۲\pi \int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{۱}{۲}t^{۲}\sqrt{t^{۴} + t^{۲}}\ dt$$

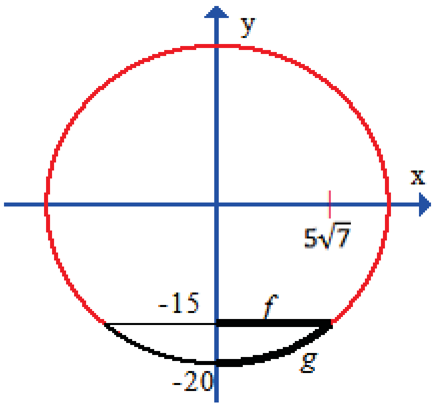
$$= ۲\pi\int_۱^{\sqrt{۳}}\frac{۱}{۲}t^۳\sqrt{t^۲+۱}\ dt \overset{u=t^۲+۱}{\cong} ۲\pi\int_۲^۴\frac{۱}{۴}(u-۱)\sqrt{u}\ du$$

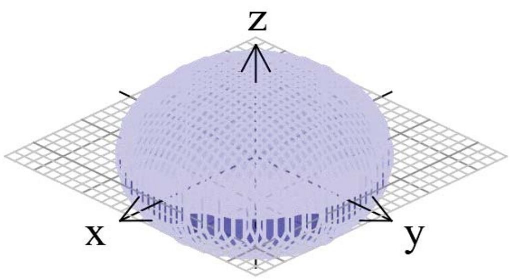
$$=\frac{۱}{۲}\pi\int_۲^۴\left(u^{\frac{۳}{۲}}-u^{\frac{۱}{۲}}\right)du=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_۲^۴$$

$$=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{۶۴}{۵}-\frac{۱۶}{۳}\right)-\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{۸}{۵}\sqrt{۲}-\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}\right)=\frac{\pi}{۱۵}\left(۵۶-۲\sqrt{۲}\right)$$

۱۲ - یک مخزن بنزین به شکل کره به قطر ۴۰ فوت داریم . اگر تا عمق ۵ فوتی آن بنزین باشد ، حجم بنزین داخل مخزن را پیدا کنید.

پاسخ





فرض می کنیم $f(x)=-۱۵$ و $g(x)=-\sqrt{۴۰۰-x^۲}$ باشد ، برای $0\le x\le ۵\sqrt{۷}$ پس

$$V=۲\pi\int_0^{۵\sqrt{۷}}x\left[-۱۵-\left(-\sqrt{۴۰۰-x^۲}\right)\right]dx$$

$$=۲\pi\left[\frac{-۱۵}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}\left(۴۰۰-x^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]\Bigg|_0^{۵\sqrt{۷}}=\frac{۱۳۷۵\pi}{۳}\quad \text{فوت مکعب}$$

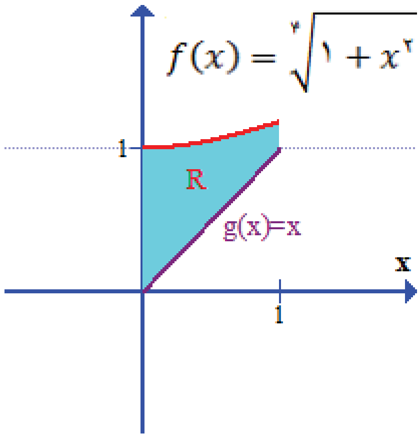
۱۳ - یک چاه به عمق ۲۰ فوت و شعاع ۳ فوت حفر می شود. اگر هر فوت مکعب خاک ۱۵۰ پوند وزن داشته باشد ، مقدار کار لازم برای بالا اوردن خاک به سطح زمین را پیدا کنید.

پاسخ

$$A(x)=۹\pi; W=۱۵۰\int_0^{۲۰}۹\pi x dx=۶۷۵\ \pi x^۲\Big|_0^{۲۰}=۲۷۰۰۰۰\ \pi\quad \text{فوت مکعب}$$

۱۴ - فرض کنید $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}$ و $g(x)=x$ باشد ، و فرض کنید R ناحیه بین نمودار های f و g باشد. گشتاورهای R حول محور های مختصات را پیدا کنید.
راهنمایی : برای پاسخ دادن به این مساله لازم است از فرمول (۷) بخش ۲.۲ که در ذیل می آوریم ، استفاده کنید.

$$\int \sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad (7)$$



پاسخ

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\sqrt[4]{1+x^2}\right)^2-x^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\sqrt{1+x^2}-x^2\right)dx$$

$$\overset{x=\tan u}{\equiv}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 u}\,\left(\sec^2 u\right)du-\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 u\,du-\frac{1}{6}$$

بر اساس فرمول (۷) بخش ۲.۲ که در بالا تکرار کردیم ، داریم.

$$M_x=\frac{1}{4}(\sec u\tan u+\ln|\sec u+\tan u|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]-\frac{1}{6}$$

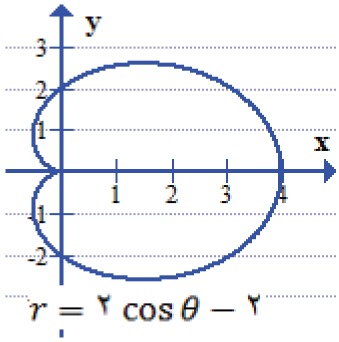
$$M_y=\int_0^1 x\left(\sqrt[4]{1+x^2}-x\right)dx=\left[\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{4}}-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{۴}{۵}\sqrt[۴]{۲}-\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۵}\sqrt[۴]{۲}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

در تمرینات زیر نمودار ها را رسم کنید.

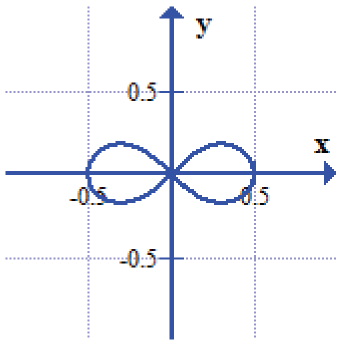
۱۵) $r=۲\cos\theta-۲$

قرینه نسبت به محور x



۱۶) $r^{۲}=\frac{۱}{۴}\cos ۲\,\theta$

قرینه نسبت به هر دو محور و مبدا.



تمرینات دوره ای سری اول Review Exercises, Part One

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \sqrt{x}\ dx$

۲) $\int ۳e^{x}\, dx$

۳) $\int \left(۳x^{۲} - \sqrt{۵x} + ۲\right) dx$

۴) $\int \left(\frac{۱}{۲x} - \frac{۲}{x^{۲}} + \frac{۳}{\sqrt{x}}\right) dx$

۵) $\int \left(۲e^{x} + \frac{۶}{x} + \ln ۲\right) dx$

۶) $\int \frac{x^{۳} + ۳x - ۲}{\sqrt{x}}\ dx$

۷) $\int \left(x^{۳} - ۲x^{۲}\right)\left(\frac{۱}{x} - ۵\right) dx$

۸ - تابعی را پیدا کنید که خط مماس بر آن برای هر مقدار از x دارای شیب $x^{۳} - \frac{۲}{x^{۲}} + ۲$ است و نمودار این تابع از نقطه $(۱, ۳)$ می گذرد.

۹ - تخمین زده می شود که میزان رشد جمعیت یک شهر $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ هزار نفر در سال است. سازمان محیط زیست در یافته است که سطح آلودگی در آن شهر به ازائ هر هزار نفر ، پنج واحد افزایش می یابد. تا دو سال دیگر میزان آلودگی در این شهر چه مقدار افزایش می یابد.

۱۰ - یک شئی در حال حرکت است بطوری که سرعت آن بعد از t دقیقه

$$v(t) = ۱ + ۴t + ۳t^{۲}$$

متر در هر دقیقه است. در دقیقه سوم ، این شئی چند متر طی کرده است؟

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱۱) $\int x^{۵}\, dx$

۱۲) $\int x^{\frac{۳}{۴}}\ dx$

۱۳) $\int \frac{۱}{x^{۲}}\ dx$

۱۴) $\int ۵\, dx$

۱۵) $\int \left(x^{\frac{۱}{۲}} - ۳x^{\frac{۲}{۳}} + ۶\right) dx$

۱۶) $\int \left(۳\sqrt{x} - \frac{۲}{x^{۳}} + \frac{۱}{x}\right) dx$

۱۷) $\int \left(\frac{e^{x}}{۲} + x\sqrt{x}\right) dx$

۱۸) $\int \left(\sqrt{x^{۳}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \sqrt{۲}\right) dx$

۱۹) $\int \left(\frac{۱}{۳x} - \frac{۳}{۲x^{۲}} + e^{۲} + \frac{\sqrt{x}}{۲}\right) dx$

۲۰) $\int \frac{x^{۲} + ۲x + ۱}{x^{۲}}\, dx$

۲۱) $\int x^{۳}\left(۲x + \frac{۱}{x}\right) dx$

۲۲) $\int \sqrt{x}\,\left(x^{۲} - ۱\right) dx$

۲۳) $\int x(۲x + ۱)^{۲}\, dx$

پاسخ تمرینات دوره ای سری اول

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{۱}{۲}}\, dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C = \frac{۲}{۳}x\,\sqrt{x} + C$

۲) $\int ۳e^{x}\, dx = ۳\int e^{x}\, dx = ۳e^{x} + C$

۳) $$\int\left(۳x^{۲}-\sqrt{۵x}+۲\right)dx=۳\int x^{۲}\,dx-\sqrt{۵}\int\sqrt{x}\;\;dx+۲\int ۱\,dx$$
$$=۳*\frac{۱}{۳}x^{۳}-\sqrt{۵}*\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\;+۲x+C=x^{۳}-\frac{۲}{۳}x\sqrt{۵x}+۲x+C$$

۴) $$\int\left(\frac{۱}{۲x}-\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۳}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{x}\,dx-۲\int x^{-۲}\,dx+۳\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx$$
$$=\frac{۱}{۲}\ln|x|-۲(-۱)x^{-۱}+۳*۲x^{\frac{۱}{۲}}+C=\frac{\ln|x|}{۲}+\frac{۲}{x}+۶\sqrt{x}\;+C$$

۵) $$\int\left(۲e^{x}+\frac{۶}{x}+\ln ۲\right)dx=۲\int e^{x}\,dx+۶\int\frac{۱}{x}\,dx+\ln ۲\int ۱\,dx$$
$$=۲e^{x}+۶\ln|x|+(\ln ۲)x+C$$

۶) $$\int\frac{x^{۳}+۳x-۲}{\sqrt{x}}\;dx=\int x^{\frac{۳}{۲}}dx+۳\int x^{\frac{۱}{۲}}dx-۲\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx$$
$$=\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+۳*\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-۲*۲x^{\frac{۱}{۲}}+C=\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}-۴x^{\frac{۱}{۲}}+C$$
$$=\frac{۲}{۵}x^{۲}\sqrt{x}+۲x\sqrt{x}\;-۴\sqrt{x}+C$$

۷) $$\int\left(x^{۳}-۲x^{۲}\right)\left(\frac{۱}{x}-۵\right)dx=\int\left(x^{۲}-۵x^{۳}-۲x+۱۰x^{۲}\right)dx$$
$$=\int\left(-۵x^{۳}+۱۱x^{۲}-۲x\right)\,dx=-۵*\frac{۱}{۴}x^{۴}+۱۱*\frac{۱}{۳}x^{۳}-۲*\frac{۱}{۲}x^{۲}+C$$
$$=-\frac{۵}{۴}x^{۴}+\frac{۱۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}+C$$

۸ - تابعی را پیدا کنید که خط مماس بر آن برای هر مقدار از x دارای شیب $x^۳ - \frac{۲}{x^۲} + ۲$ است و نمودار این تابع از نقطه $(۱,۳)$ می گذرد.

پاسخ - فرض می کنیم آن تابع f باشد. پس شیب خط مماس بر f مشتق f است. یعنی

$$f'(x) = x^۳ - \frac{۲}{x^۲} + ۲$$

پس $f(x)$ انتگرال نا معین زیر است.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(x^۳ - \frac{۲}{x^۲} + ۲\right) dx = \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۲}{x} + ۲x + C$$

با توجه به فرض مساله که نمودار f از نقطه $(۱,۳)$ می گذرد ، داریم

$$۳ = \frac{۱}{۴} + ۲ + ۲ + C \Rightarrow C = -\frac{۵}{۴}$$

لذا تابع مورد بحث مطابق زیر است.

$$f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۲}{x} + ۲x - \frac{۵}{۴}$$

۹ - تخمین زده می شود که میزان رشد جمعیت یک شهر $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ هزار نفر در سال است. سازمان محیط زیست در یافته است که سطح آلودگی در آن شهر به ازائ هر هزار نفر ، پنج واحد افزایش می یابد. تا دو سال دیگر میزان آلودگی در این شهر چه مقدار افزایش می یابد.

پاسخ

فرض می کنیم $P(t)$ جمعیت شهر t سال بعد باشد. پس میزان تغییر جمعیت نسبت به زمان ، مشتق زیر است.

$$\frac{dP}{dt} = P'(t) = 0.6t^2 + 0.2t + 0.5$$

لذا تابع جمعیت یعنی $P(t)$ ضد مشتق $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ است. یعنی

$$P(t) = \int P'(t)dt = \int (0.6t^2 + 0.2t + 0.5)\, dt$$
$$= 0.2t^3 + 0.1t^2 + 0.5t + C$$

تا دو سال دیگر تعداد جمعیت مطابق زیر افزایش پیدا می کند.

$$P(2) - P(0) = 0.2 * 2^3 + 0.1 * 2^2 + 0.5 * 2 + C - C$$
$$= 1.6 + 0.4 + 1 = 3$$

یعنی بعد از دوسال سه هزار نفربه جمعیت شهر افزوده می شود. و در نهایت

واحد به آلودگی اضافه میشود $۱۵ = ۳ * ۵$

۱۰ ـ یک شئی در حال حرکت است بطوری که سرعت آن بعد از t دقیقه

$$v(t) = ۱ + ۴t + ۳t^{۲}$$

متر در هر دقیقه است. در دقیقه سوم ، این شئی چند متر طی کرده است؟

پاسخ

فرض می کنیم $s(t)$ نمایانگر جابجایی شئی بعد از t دقیقه باشد. چون $v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ است ، پس

$$s(t) = \int v(t)dt = \left(۱ + ۴t + ۳t^{۲}\right)dt = t + ۲t^{۲} + t^{۳} + C$$

در طی دقیقه سوم ، شئی مسافت زیر را می پیماید.

$$s(۳) - s(۲) = ۳ + ۲/۹ + ۲۷ + C - ۲ - ۲/۴ - ۸ - C$$

$$= ۳۰ \text{ متر}$$

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱۱) $\int x^{۵}\, dx = \frac{۱}{۶}x^{۶} + C$

۱۲) $\int x^{\frac{۳}{۴}}\, dx = \frac{۴}{۷}x^{\frac{۷}{۴}} + C$

۱۳) $\int \frac{۱}{x^{۲}}\, dx = -\frac{۱}{x} + C$

۱۴) $\int ۵\, dx = ۵x + C$

۱۵) $\int \left(x^{\frac{۱}{۲}} - ۳x^{\frac{۲}{۳}} + ۶\right) dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۹}{۵}x^{\frac{۵}{۳}} + ۶x + C$

۱۶) $\int \left(۳\sqrt{x} - \frac{۲}{x^{۳}} + \frac{۱}{x}\right) dx = ۲x^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{x^{۲}} + \ln|x| + C$

۱۷) $\int \left(\frac{e^{x}}{۲} + x\sqrt{x}\right) dx = \frac{۱}{۲}e^{x} + \frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}} + C$

۱۸) $\int \left(\sqrt{x^{۳}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \sqrt{۲}\right) dx = \frac{۲}{۵}\sqrt{(x^{۳})}\; x + \sqrt{۲}\, x + C$

۱۹) $\int \left(\frac{۱}{۳x} - \frac{۳}{۲x^{۲}} + e^{۲} + \frac{\sqrt{x}}{۲}\right) dx = \frac{۱}{۳}\ln|x| + \frac{۳}{۲}x + e^{۲}x + \frac{۱}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C$

۲۰) $\int \frac{x^{۲} + ۲x + ۱}{x^{۲}}\, dx = x + \ln|x| - \frac{۱}{x} + C$

۲۱) $\int x^{۳}\left(۲x + \frac{۱}{x}\right) dx = \frac{۲}{۵}x^{۵} + \frac{۱}{۳}x^{۳} + C$

۲۲) $\int \sqrt{x}\,\left(x^{۲} - ۱\right) dx = \frac{۲}{۷}x^{\frac{۷}{۲}} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C$

۲۳) $\int x(۲x + ۱)^{۲}\, dx = x^{۴} + \frac{۴}{۳}x^{۳} + \frac{۱}{۲}x^{۲} + C$

۴.۲ - تمرینات دوره ای سری دوم Review Exercise, Part 2

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int ۲xe^{x^۲}dx$

۲) $\int \sin(x+۱)dx$

۳) $\int \frac{۱}{x^۲}\ln\left(\frac{۱}{x}\right)dx$

۴) $\int_0^{\pi} \cos(۳x)dx$

۵) $\int e^{-۲x}\,dx$

۶) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\ln(\tan(x))}{\cos^۲(x)}dx$

۷) $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$

۸) $\int_0^{۱} \sqrt{۱-x^۲}\,dx$

۹) $\int_0^{۲} x^۲\sqrt{x^۳+۱}\,dx$

۱۰) $\int xe^x\,dx$

۱۱) $\int x\sin(x)dx$

۱۲) $\int x\ln(۲x)\,dx$

۱۳) $\int_0^{۱} x\,e^{-x}\,dx$

عبارت های گویای زیر را به کسر های جزئی تجزیه کنید.

۱۴) $\frac{۳x}{x^۲+x-۲}$

۱۵) $\frac{۲x^۲+x+۲}{x^۲-۴}$

۱۶) $\dfrac{x^۲ + x - ۱}{x^۳ + x}$

۱۷) $\dfrac{x^۲ + ۲x - ۲}{x^۳ - x^۲ - ۲x}$

۱۸) $\dfrac{x^۳ - ۲x^۲ + x + ۱}{x^۳ - ۲x^۲ + x}$

۱۹) $\dfrac{x + ۲}{۲x^۲ + x}$

۲۰) $\dfrac{x^۴ - ۲x^۳ + ۲x^۲ + ۷x}{(۳x + ۲)(x^۲ + ۲)^۲}$

پاسخ تمرینات دوره ای سری دوم

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int ۲xe^{x^۲}dx$

فرض می کنیم $y = x^۲$ باشد ، پس $dy = ۲xdx$ یا $\frac{۱}{۲}dy = xdx$ است. پس

$$\int ۲xe^{x^۲}dx = \int ۲e^y\left(\frac{۱}{۲}\right)dy = \int e^y dy = e^y + C$$

۲) $\int \sin(x + ۱)dx$

فرض می کنیم $y = x + ۱$ باشد ، پس $dy = dx$ است. لذا

$$\int \sin(x + ۱)dx = \int \sin(y)dy = -\cos(y) + C = -\cos(x + ۱) + C$$

۳) $\int \frac{۱}{x^۲}\ln\left(\frac{۱}{x}\right)dx$

فرض می کنیم $y = \frac{۱}{x}$ باشد ، پس $dy = -\frac{۱}{x^۲}\,dx$ یا $\frac{۱}{x^۲}dx = -dy$ است. پس

$$\int \frac{۱}{x^۲}\ln\left(\frac{۱}{x}\right)dx = -\int \ln(y) = -[y\ln(y) - y] + C$$

$$= -\frac{۱}{x}\ln\left(\frac{۱}{x}\right) + \frac{۱}{x} + C = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{۱}{x} + C$$

۴) $\int_0^{\pi} \cos(۳x)dx$

فرض می کنیم $y = ۳x$ باشد ، پس $dy = ۳dx$ یا $\frac{۱}{۳}dy = dx$ است.
اگر $x = 0$ باشد ، پس $y = 0$ است و اگر $x = \pi$ باشد ، پس $y = ۳\pi$ است. لذا

$$\int_0^{\pi} \cos(۳x)dx = \frac{۱}{۳}\int_0^{۳\pi} \cos(y)dy = \frac{۱}{۳}\sin(y)\Big|_0^{۳\pi} = 0$$

۵) $\int e^{-۲x}\, dx$

فرض می کنیم $y = -۲x$ باشد ، پس $dy = -۲\, dx$ یا $-\frac{۱}{۲}dy = dx$ است. لذا

$$\int e^{-۲x}\, dx = -\frac{۱}{۲}\int e^{y}\, dx = -\frac{۱}{۲}e^{y} + C = -\frac{۱}{۲}e^{-۲x} + C$$

۶) $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\ln(\tan(x))}{\cos^{۲}(x)}dx$

فرض می کنیم $y = \tan(x)$ باشد ، پس $dy = \sec^{۲} x\ dx = \frac{۱}{\cos^{۲} x}dx$ است.
اگر $x = 0$ باشد ، پس $y = 0$ است و اگر $x = \frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس $y = ۱$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\ln(\tan(x))}{\cos^{۲}(x)}dx = \int_0^{۱} \ln(y)dy = (y\ln(y) - y)\Big|_0^{۱} = -۱$$

۷) $\int \sin(\sqrt{x})\, dx$

فرض می کنیم $x = y^{۲}$ باشد ، پس $dx = ۲y\, dy$ است ، لذا

$$\int \sin(\sqrt{x})\, dx = \int ۲y\sin(y)dy = ۲\int y\sin(y)dy$$

حالا از طریق انتگرال جز به جز عمل می کنیم. فرض می کنیم $u = y$ و $dv = \sin(y)\, dy$
باشد ، پس $du = dy$ و $v = -\cos(y)$ است. لذا

$$۲\int y\sin(y)dy = -۲y\cos(y) - ۲\int -\cos(y)dy$$
$$= -۲y\cos(y) + ۲\sin y + C = ۲\sin(\sqrt{x}) - ۲\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C$$

۸) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$

فرض می کنیم $x=\cos(t)$ باشد ، پس

$$x=\cos(t)$$
$$dx=-\sin(t)dt$$
$$x=0\ \Rightarrow t=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$$
$$x=1\ \Rightarrow t=\arccos(1)=0$$
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(t)}\ \sin(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt$$

حالا از فرمول های کاهش توان های سینوس استفاده می کنیم. یاد آوری

$$\int \sin^n(x)dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x)+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

برای $n=2$ داریم.

$$\int \sin^2(x)dx=-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{1}{2}\int 1\ dx=-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{1}{2}x+C$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

در نهایت داریم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt=\frac{1}{2}(t-\sin(t)\cos(t))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

۹) $$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\ \ dx$$

فرض می کنیم $x^3+1=y^2$ باشد

$$x^3+1=y^2$$
$$3x^2dx=2ydy$$
$$x^2dx=\frac{2}{3}ydy$$
$$x=0\Rightarrow y=1$$
$$x=2\Rightarrow y=3$$

پس

$$\int_0^{۲} x^{۲}\sqrt{x^{۳}+۱}\;dx=\int_{۱}^{۳}\frac{۲}{۳}y\sqrt{y^{۲}}\;dy=\frac{۲}{۳}\int_{۱}^{۳}y^{۲}dy=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۳}y^{۳}\right)\Big|_{۱}^{۳}=\frac{۵۲}{۹}$$

۱۰) $\int xe^x\,dx$

از طریق انتگرال گیری جز به جز.

$$u=x \qquad dv=e^x dx$$
$$du=dx \qquad v=e^x$$

پس

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-۱)+C$$

۱۱) $\int x\sin(x)dx$

از طریق انتگرال گیری جز به جز.

$$u=x \qquad dv=\sin(x)dx$$
$$du=dx \qquad v=-\cos(x)$$

پس.

$$\int x\sin(x)dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)dx=-x\cos(x)+\sin(x)+C$$

۱۲) $\int x\ln(۲x)\,dx$

از طریق انتگرال گیری جز به جز.

$$u=\ln(۲x) \qquad dv=xdx$$
$$du=\frac{۲}{۲x}dx=\frac{۱}{x}dx \qquad v=\frac{x^{۲}}{۲}$$

پس

$$\int x\ln(۲x)\,dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln(۲x)-\int\frac{۱}{۲}x^{۲}*\frac{۱}{x}dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln(۲x)-\frac{۱}{۲}\int x\,dx$$
$$\frac{۱}{۲}x^{۲}\ln(۲x)-\frac{۱}{۴}x^{۲}+C$$

۱۳) $\int_0^{۱} x\, e^{-x}\, dx$

از طریق انتگرال گیری جز به جز

$$u = x \qquad dv = e^{-x}$$
$$du = dx \quad v = -e^{-x}$$

پس

$$\int_0^{۱} x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^{۱} + \int_0^{۱} e^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^{۱} - e^{-x}\Big|_0^{۱} = \frac{-۲}{e} + ۱$$

عبارت های گویای زیر را به کسر های جزئی تجزیه کنید.

۱۴) $$\frac{۳x}{x^{۲}+x-۲} = \frac{۳x}{(x-۱)(x+۲)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۲} = \frac{۱}{x-۱} + \frac{۲}{x+۲}$$

۱۵) $$\frac{۲x^{۲}+x+۲}{x^{۲}-۴} = ۲ + \frac{x+۱۰}{(x-۲)(x+۲)} = ۲ + \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۲}$$
$$= ۲ + \frac{۳}{x-۲} - \frac{۲}{x+۲}$$

۱۶) $$\frac{x^{۲}+x-۱}{x^{۳}+x} = \frac{x^{۲}+x-۱}{x(x^{۲}+۱)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^{۲}+۱}$$

طرف راست را به صورت یک کسر می نویسیم.

$$\frac{x^{۲}+x-۱}{x(x^{۲}+۱)} = \frac{x(Bx+C) + \left(x^{۲}+۱\right)A}{x(x^{۲}+۱)}$$

هر دو طرف را در $x\left(x^{۲}+۱\right)$ ضرب می کنیم تا کسر از بین برود.

$$x^{۲}+x-۱ = x(Bx+C) + \left(x^{۲}+۱\right)A$$

پرانتز های طرف راست را از بین می بریم.

$$x^{۲}+x-۱ = x^{۲}A + x^{۲}B + xC + A = x^{۲}(A+B) + xC + A$$

ضریب های جملات مشابه هر دو طرف باید مساوی باشند.

$$A+B = ۱, C = ۱, A = -۱$$

لذا $A = -۱, B = ۲, C = ۱$ است. در نهایت

$$\frac{x^{۲}+x-۱}{x(x^{۲}+۱)} = \frac{-۱}{x} + \frac{۲x+۱}{x^{۲}+۱}$$

۱۷) $$\frac{x^۲+۲x-۲}{x^۳-x^۲-۲x}=\frac{-x^۲-۲x+۲}{x(-x^۲+x+۲)}=\frac{-x^۲-۲x+۲}{x(x-۲)(x+۱)}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۱}+\frac{C}{x-۲}$$

طرف راست را به صورت یک کسر می نویسیم.

$$\frac{x^۲+۲x-۲}{x(x-۲)(x+۱)}=\frac{x(x-۲)B+x(x+۱)C+(x-۲)(x+۱)A}{x(x-۲)(x+۱)}$$

مخرج ها مساوی هستند ، پس صورت ها هم با هم مساوی هستند.

$$x^۲+۲x-۲=x(x-۲)B+x(x+۱)C+(x-۲)(x+۱)A$$

با انجام عمل ضرب پرانتز ها را حذف می کنیم.

$$x^۲+۲x-۲=x^۲A+x^۲B+x^۲C-xA-۲xB+xC-۲A$$

جملات مشابه را تلفیق می کنیم.

$$x^۲+۲x-۲=x^۲(A+B+C)+x(-A-۲B+C)-۲A$$

ضریب های جملات مشابه بیاد مساوی باشند.

$$A+B+C=۱,-A-۲B+C=۲,-۲A=-۲$$

پس $A=۱,B=-۱,C=۱$ است و در نهایت

$$\frac{x^۲+۲x-۲}{x(x-۲)(x+۱)}=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۲}$$

۱۸) $$\frac{x^۳-۲x^۲+x+۱}{x^۳-۲x^۲+x}=\frac{x^۳-۲x^۲+x+۱}{x(x^۲-۲x+۱)}$$

چون درجه صورت کوچک تر از درجه مخرج نیست ، ابتدا عمل تقسیم انجام می دهیم.

$$\frac{x^۳-۲x^۲+x+۱}{x(x^۲-۲x+۱)}=۱+\frac{۱}{x(x^۲-۲x+۱)}$$

حالا با $\frac{۱}{x(x^۲-۲x+۱)}$ کار می کنیم.

$$\frac{۱}{x(x^۲-۲x+۱)}=\frac{۱}{x(x-۱)^۲}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{(x-۱)^۲}$$

$$\frac{۱}{x(x-۱)^۲}=\frac{x(x-۱)B+xC+(x-۱)^۲A}{x(x-۱)^۲}$$

$$۱=x(x-۱)B+xC+(x-۱)^۲A$$
$$۱=x^۲A+x^۲B-۲xA-xB+xC+A$$

$$۱ = x^{۲}(A+B) + x\left(-۲A - B + C\right) + A$$
$$A + B = 0. -۲A - B + C = 0, A = ۱$$
$$A = ۱, B = -۱, C = ۱$$
$$\frac{۱}{x\left(x-۱\right)^{۲}} = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{\left(x-۱\right)^{۲}}$$

در نهایت

$$\frac{x^{۳} - ۲x^{۲} + x + ۱}{x^{۳} - ۲x^{۲} + x} = ۱ + \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{\left(x-۱\right)^{۲}}$$

۱۹)
$$\frac{x+۲}{۲x^{۲}+x} = \frac{x+۲}{x\left(۲x+۱\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{۲x+۱} = \frac{xB + \left(۲x+۱\right)A}{x\left(۲x+۱\right)}$$
$$x + ۲ = xB + \left(۲x+۱\right)A = ۲xA + xB + A = x\left(۲A+B\right) + A$$
$$۲A + B = ۱, A = ۲$$
$$A = ۲, B = -۳$$
$$\frac{x+۲}{x\left(۲x+۱\right)} = \frac{۲}{x} - \frac{۳}{۲x+۱}$$

۲۰)
$$\frac{x^۴-۲x^۳+۲x^۲+۷x}{(۳x+۲)(x^۲+۲)^۲}=\frac{Ax+B}{x^۲+۲}+\frac{Cx+D}{(x^۲+۲)^۲}+\frac{E}{۳x+۲}$$
$$=\frac{(۳x+۲)\left(x^۲+۲\right)(Ax+B)+(۳x+۲)(Cx+D)+\left(x^۲+۲\right)^۲E}{(۳x+۲)(x^۲+۲)^۲}$$
$$x^۴-۲x^۳+۲x^۲+۷x=(۳x+۲)\left(x^۲+۲\right)(Ax+B)+(۳x+۲)(Cx+D)+\left(x^۲+۲\right)^۲E$$
$$x^۴-۲x^۳+۲x^۲+۷x=x^۴(۳A+E)+x^۳(۲A+۳B)+x^۲(۶A+۲B+۳C+۴E)$$
$$+x(۴A+۶B+۲C+۳D)+۴B+۲D+۴E$$
$$۳A+E=۱,۲A+۳B=-۲,۶A+۲B+۳C+۴E=۲$$
$$۴A+۶B+۲C+۳D=۷,۴B+۲D+۴E=0$$
$$A=\frac{۱}{۲},B=-۱,C=۱,D=۳,E=-\frac{۱}{۲}$$
$$\frac{x^۴-۲x^۳+۲x^۲+۷x}{(۳x+۲)(x^۲+۲)^۲}=\frac{\frac{x}{۲}-۱}{x^۲+۲}+\frac{x+۳}{(x^۲+۲)^۲}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{۳x+۲}$$

۴.۳ ـ تمرینات دوره ای سری سوم Review Exercises, Part Three

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int ۳x^{۲} \sin\left(x^{۳}+۱\right) dx$

۲) $\int_{0}^{۳} \frac{x^{۲}}{\sqrt{۱+x}} dx$

۳) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

۴) $\int x^{۲} \sin x \, dx$

۵) $\int \frac{\cos x}{(۲+\sin x)^{۲}} dx$

۶) $\int_{۱}^{۲} \frac{x^{۳}-x}{x^{۲}} dx$

۷) $\int_{0}^{۱} \frac{۱}{x^{۳}-۹} dx$

۸) $\int_{0}^{۱} \sin(۲\pi x) dx$

۹) $\int \frac{\tan^{۳} x}{\cos^{۲} x} dx$

۱۰) $\int \frac{۱}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۲x+۱)} dx$

۱۱) $\int_{۱}^{e} \frac{\ln(x)+۱}{x} dx$

۱۲) $\int x\sqrt{۴-x^{۲}} dx$

۱۳) $\int x(x+۸)^{۶} dx$

۱۴) $\int \frac{۲x^{۲}+۳}{x^{۳}-x^{۲}} dx$

۱۵) $\int \cos^{۵}(x) \sin(x) dx$

۱۶) $\int (۳x+۱)e^{x}\,dx$

۱۷) $\int \frac{۳x^{۲}-۶x+۲}{x^{۳}-۳x^{۲}+۲x}\,dx$

۱۸) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-۱}{\sin^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)}\,dx$

۱۹) $\int \frac{x}{x^{۲}+۲x-۳}\,dx$

۲۰) $\int_{۲}^{۵} \sqrt{x-۱}\,dx$

۲۱) $\int x\ ln^{۲}(x)\,dx$

۲۲) $\int \cos(۳-۲x)\,dx$

۲۳) $\int \frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}\,dx$

۲۴) $\int e^{\pi x-۱}\,dx$

۲۵) $\int_0^{۱} \frac{۹x^{۲}}{(x^{۳}+۱)^{۴}}\,dx$

۲۶) $\int \frac{۲}{x^{۴}-x^{۲}}\,dx$

۲۷) $\int \frac{۱}{x^{۲}}\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\,dx$

۲۸) $\int_0^{۱} (۱-x^{۲})\,e^{x}\,dx$

۲۹) $\int \frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۴}}\,dx$

۳۰) $\int \frac{x+۱}{x^{۳}-۲x^{۲}+x}\,dx$

۳۱) $\int \frac{e^{\tanh(x)}}{\cosh^{۲}(x)}\, dx$

راهنمایی : فرض کنید $y = \tanh(x)$ باشد , پس $dy = \frac{۱}{\cosh^{۲}(x)}\, dx$ است.

۳۲) $\int_{۱}^{۳} \left(۱ - |x - ۲|\right)(x + ۱)\, dx$

راهنمایی : باید ابتدا قدر مطلق را حذف کنید. برای این کار ، انتگرال را به دو قسمت تقسیم کنید.

پاسخ تمرینات دوره ای سری سوم

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int ۳x^{۲} \sin\left(x^{۳} + ۱\right) dx = -\cos\left(x^{۳} + ۱\right) + C$

فرض می‌کنیم $y = x^{۳} + ۱$ باشد. پس $dy = ۳x^{۲}\, dx$ است.پس داریم

$$\int ۳x^{۲} \sin\left(x^{۳} + ۱\right) dx = \int \sin y\, dy = -\cos y + C = -\cos\left(x^{۳} + ۱\right) + C$$

۲) $\int_{0}^{۳} \frac{x^{۲}}{\sqrt{۱ + x}} dx = ۲ + \frac{۴۶}{۱۵}$

فرض می‌کنیم $y = ۱ + x$ باشد.

$$\int_{0}^{۳} \frac{x^{۲}}{\sqrt{۱ + x}} dx = \int_{۱}^{۴} \frac{(y - ۱)^{۲}}{\sqrt{y}}\, dy = \int_{۱}^{۴} \frac{y^{۲} - ۲y + ۱}{\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_{۱}^{۴} \left(y^{۲} y^{-\frac{۱}{۲}} - ۲y y^{-\frac{۱}{۲}} + y^{-\frac{۱}{۲}}\right) dy = \int_{۱}^{۴} \left(y^{\frac{۳}{۲}} - ۲y^{\frac{۱}{۲}} + y^{-\frac{۱}{۲}}\right) dy$$

$$= \left(\frac{۲}{۵} y^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۴}{۳} y^{\frac{۳}{۲}} + ۲y^{\frac{۱}{۲}}\right)\Bigg|_{۱}^{۴} = ۲ + \frac{۴۶}{۱۵}$$

۳) $$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = ۲e^{\sqrt{x}} + C$$

فرض می کنیم $y = \sqrt{x}$ باشد ، پس $dy = \frac{dx}{۲\sqrt{x}}$ است و $۲dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ است.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^{y}(۲)\, dy = ۲\int e^{y}dy = ۲e^{y} + C = ۲e^{\sqrt{x}} + C$$

۴) $$\int x^{۲}\sin x\, dx = ۲\cos(x) + ۲x\sin(x) - x^{۲}\cos(x) + C$$

از طریق انتگرال گیری جز به جز :فرض می کنیم $u = x^{۲}$ و $dv = \sin(x)dx$ باشد ، پس $du = ۲x\, dx$ و $v = -\cos(x)$ است. لذا داریم

$$\int x^{۲}\sin x\, dx = -x^{۲}\cos(x) - \int ۲x\cos(x)dx$$

انتگرال گیری جز به جز تکرا ر می کنیم. :فرض می کنیم $u = ۲x$ و $dv = \cos(x)dx$ باشد .پس داریم $du = ۲\, dx$ و $v = \sin(x)$ است. لذا

$$-x^{۲}\cos(x) - \int ۲x\cos(x)dx = -x^{۲}\cos(x) + ۲x\sin(x) - ۲\int \sin(x)dx$$
$$= ۲\cos(x) + ۲x\sin(x) - x^{۲}\cos(x) + C$$

۵) $$\int \frac{\cos x}{(۲+\sin x)^{۲}}\, dx = \frac{-۱}{۲+\sin(x)} + C$$

فرض می کنیم $y = ۲ + \sin x$ باشد ، پس $dy = \cos x\, dx$ است. لذا

$$\int \frac{\cos x}{(۲+\sin x)^{۲}}\, dx = \int \frac{۱}{y^{۲}}\, dy = \int y^{-۲}dy = \frac{-۱}{y} + C = \frac{-۱}{۲+\sin x} + C$$

۶) $$\int_{۱}^{۲} \frac{x^{۳}-x}{x^{۲}}\, dx = \frac{۳}{۲} - \ln(۲)$$

کسر را جدا می کنیم. پس خواهیم داشت $\frac{x^{۳}-x}{x^{۲}} = x - \frac{۱}{x}$

$$\int_{۱}^{۲} \frac{x^{۳}-x}{x^{۲}}\, dx = \int_{۱}^{۲}\left(x - \frac{۱}{x}\right)dx = \left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - \ln|x|\right)\Big|_{۱}^{۲} = ۲ - \ln ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} - \ln(۲)$$

۷) $$\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۲}-۹}\,dx = \frac{۱}{۶}\left[\ln(۲)-\ln(۴)\right] = -\frac{۱}{۶}\ln(۲)$$

از طریق کسر های جزئی :

$$\int_0^{۱} \frac{۱}{x^{۲}-۹}\,dx = \int_0^{۱} \frac{۱}{(x-۳)(x+۳)}dx = \int_0^{۱} \frac{A}{x-۳}+\frac{B}{x+۳}dx$$
$$= \frac{۱}{۶}\int_0^{۱} \frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{x+۳}dx = \frac{۱}{۶}\left[\ln|x-۳|-\ln|x+۳|\right]\Big|_0^{۱}$$
$$= \frac{۱}{۶}\left[\ln(۲)-\ln(۴)\right] = -\frac{۱}{۶}\ln(۲)$$

۸) $$\int_0^{۱} \sin(۲\,\pi\, x)\,dx = 0$$

فرض می کنیم $y = ۲\,\pi x$ باشد ، پس $dy = ۲\,\pi dx$ و یا $\frac{۱}{۲\pi}dy = dx$ است. پس

$$\int_0^{۱} \sin(۲\,\pi\, x)\,dx = \frac{۱}{۲\,\pi}\int_0^{۲\,\pi} \sin(y)dy = \frac{۱}{۲\,\pi}\left[-\cos(y)\right]\Big|_0^{۲\,\pi} = 0$$

۹) $$\int \frac{\tan^{۳} x}{\cos^{۲} x}\,dx = \frac{۱}{۴}\tan^{۴}(x)+C, x \neq \frac{\pi}{۲}+k\pi$$

فرض می کنیم $y = \tan x$ باشد ، پس $dy = \sec^{۲} x\,dx = \frac{۱}{\cos^{۲} x}dx$ است.

$$\int \frac{\tan^{۳} x}{\cos^{۲} x}\,dx = \int y^{۳}dy = \frac{۱}{۴}y^{۴}+C = \frac{۱}{۴}\tan^{۴}(x)+C, x \neq \frac{\pi}{۲}+k\pi$$

۱۰) $$\int \frac{۱}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۲x+۱)}\,dx = \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\right| - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{x+۱}, x \neq -۱$$

از طریق کسر های جزئی :

$$\int \frac{۱}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۲x+۱)}\,dx = \int \frac{۱}{(x^{۲}+۱)(x+۱)^{۲}}dx$$
$$= \int \frac{A}{x+۱}+\frac{B}{(x+۱)^{۲}}+\frac{Cx+D}{x^{۲}+۱}dx$$
$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{x+۱}dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{(x+۱)^{۲}}dx - \frac{۱}{۲}\int \frac{x}{x^{۲}+۱}dx$$

برای انتگرال آخر فرض می کنیم $y = x^{۲} + ۱$ باشد ، پس خواهیم داشت.

$$\frac{۱}{۲}\ln|x+۱| - \frac{۱}{۲} * \frac{۱}{x+۱} - \frac{۱}{۴}\left|x^{۲}+۱\right| + C$$

$$= \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\right| - \frac{۱}{۲} * \frac{۱}{x+۱} + C, x \neq -۱$$

۱۱) $\displaystyle\int_{۱}^{e} \frac{\ln(x)+۱}{x}\ dx = \frac{۳}{۲}$

فرض می کنیم $y = \ln(x) + ۱$ باشد. پس $dy = \frac{۱}{x}dx$ است. اگر $x = ۱$ باشد ، پس $y = ۱$ است و اگر $x = e$ باشد ، پس $y = ۲$ است. لذا

$$\int_{۱}^{e} \frac{\ln(x)+۱}{x}\ dx = \int_{۱}^{۲} y\,dy = \frac{۱}{۲}y^{۲}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲}(۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}(۱)^{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۲) $\displaystyle\int x\sqrt{۴-x^{۲}}\ dx = -\frac{۱}{۳}\left(\sqrt{۴-x^{۲}}\right)^{۳} + C, x \in \langle -۲, ۲\rangle$

فرض می کنیم $y = ۴ - x^{۲}$ باشد.پس $dy = -۲x\,dx$ و یا $-\frac{۱}{۲}dy = x\,dx$ است.

$$\int x\sqrt{۴-x^{۲}}\ dx = \int \sqrt{y}\left(-\frac{۱}{۲}\right)dy = -\frac{۱}{۲}\int y^{\frac{۱}{۲}}dy = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)y^{\frac{۳}{۲}} + C$$

$$= -\frac{۱}{۳}\left(۴-x^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}} + C, x \in [-۲, ۲]$$

۱۳) $\displaystyle\int x(x+۸)^{۶}\ dx = \frac{(x+۸)^{۱۰}}{۱۰} - \frac{۸(x+۸)^{۹}}{۹} + C$

فرض می کنیم $y = x + ۸$ باشد. پس $x = y - ۸$ و $dy = dx$ است. لذا

$$\int x(x+۸)^{۶}\ dx = \int (y-۸)y^{۸}\,dy = \int \left(y^{۹} - ۸y^{۸}\right)dy$$

$$= \frac{y^{۱۰}}{۱۰} - \frac{۸y^{۹}}{۹} + C = \frac{(x+۸)^{۱۰}}{۱۰} - \frac{۸(x+۸)^{۹}}{۹} + C$$

۱۴) $$\int \frac{۲x^۲+۳}{x^۳-x^۲}\,dx = -۳\ln|x| + ۵\ln|x-۱| + \frac{۳}{x} + C, x \neq 0, ۱$$

از طریق کسر های جزئی :

$$\int \frac{۲x^۲+۳}{x^۳-x^۲}\,dx = \int \frac{۲x^۲+۳}{x^۲(x-۱)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{C}{x-۱}dx$$

برای پیدا کردن A, B, C داریم.

$$۲x^۲ + ۳ = Ax(x-۱) + B(x-۱) + Cx^۲$$
$$x = 0 \Rightarrow ۳ = -B; x = ۱ \Rightarrow ۵ = C; x = -۱ \Rightarrow A = -۳$$

پس

$$\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{C}{x-۱}dx = \int \frac{-۳}{x} - \frac{۳}{x^۲} + \frac{۵}{x-۱}dx$$
$$= -۳\ln|x| - ۵\ln|x-۱| + \frac{۳}{x} + C, x \neq 0, ۱$$

۱۵) $$\int \cos^۵(x)\sin(x)\,dx = -\frac{۱}{۶}\cos^۶(x) + C$$

فرض می کنیم $y = \cos x$ باشد. پس $dy = -\sin(x)$ یا $-dy = \sin(x)dx$ است. پس

$$\int \cos^۵(x)\sin(x)\,dx = -\int y^۵ dy = -\frac{۱}{۶}y^۶ + C = -\frac{۱}{۶}\cos^۶(x) + C$$

۱۶) $$\int (۳x+۱)e^x\,dx = ۳xe^x - ۲e^x + C$$

از طریق انتگرال گیری جز به جز : فرض می کنیم $u = ۳x + ۱$ و $dv = e^x\,dx$ باشد .
پس $du = ۳dx$ و $v = e^x$ است . لذا

$$\int (۳x+۱)e^x\,dx = (۳x+۱)e^x - \int ۳e^x dx = ۳xe^x - ۲e^x + C$$

۱۷) $$\int \frac{۳x^۲-۶x+۲}{x^۳-۳x^۲+۲x}\,dx = \ln\left[x^۳-۳x^۲+۲x\right] + C،\ x \neq 0, ۱, ۲$$

فرض می کنیم $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x$ باشد ، پس $dy = \left(۳x^۲-۶x+۲\right)dx$ است. پس

$$\int \frac{۳x^۲-۶x+۲}{x^۳-۳x^۲+۲x}\,dx = \int \frac{۱}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln\left[x^۳-۳x^۲+۲x\right] + C$$
$$x \neq 0, ۱, ۲$$

۱۸) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-۱}{\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}\ dx =?$

فرض می کنیم $y = \frac{x}{۲}$ باشد ، پس $dy = \frac{۱}{۲}\ dx$ یا $۲dy = dx$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-۱}{\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}\ dx = ۲\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\sin^۲(y)}\ dy = -۲\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\sin^۲ y} dy$$

$$= -۲\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \csc^۲ y\, dy = ۲\cot y \Big|_0^{\frac{\pi}{۴}}$$

این انتگرال وا گرا است.

۱۹) $\int \frac{x}{x^۲ + ۲x - ۳}\ dx = \frac{۳}{۴}\ln|x+۳| + \frac{۱}{۴}\ln|x-۱| + C, x \neq -۳, ۱$

از طریق کسر های جزئی

$$\int \frac{x}{x^۲ + ۲x - ۳} dx = \int \frac{x}{(x+۳)(x-۱)} dx = \int \frac{A}{x+۳} + \frac{B}{x-۱} dx = \int \frac{\frac{۳}{۴}}{x+۳} + \frac{\frac{۱}{۴}}{x-۱}$$

$$= \frac{۳}{۴}\ln|x+۳| + \frac{۱}{۴}\ln|x-۱| + C, x \neq -۳, ۱$$

۲۰) $\int_۲^۵ \sqrt{x-۱}\ dx = \frac{۱۴}{۳}$

فرض می کنیمy $y = x - ۱$ باشد ، پس

$$\int_۲^۵ \sqrt{x-۱}\ dx = \int_۱^۴ \sqrt{y}\ dy = \frac{۲}{۳} y^{\frac{۳}{۲}} \Big|_۱^۴ = \frac{۱۶}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

۲۱) $\int x\ ln^۲(x)\, dx = \frac{x^۲}{۲} ln^۲(x) - \frac{x^۲}{۲}\ln(x) + \frac{x^۲}{۴} + C, x > 0$

از طریق انتگرال گیری جز به جز. فرض کنید $u = ln^۲(x)$ و $dv = xdx$ باشد ،

پس $du = \frac{۲\ln(x)}{x}\ dx$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$ است ، پس

$$\int x \ ln^۲(x)\, dx = \frac{x^۲}{۲} ln^۲(x) - \int x \ln(x) dx$$

انتگرال گیری جز به جز تکرار می کنیم. فرض می کنیم $u = \ln(x)$ و $dv = xdx$ باشد ، پس داریم $du = \frac{dx}{x}$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$ است.

$$\frac{x^۲}{۲} ln^۲(x) - \int x \ln(x) dx = \frac{x^۲}{۲} ln^۲(x) - \frac{x^۲}{۲} \ln(x) + \frac{۱}{۲} \int x dx$$

$$= \frac{x^۲}{۲} ln^۲(x) - \frac{x^۲}{۲} \ln(x) + \frac{x^۲}{۴} + C, x > 0$$

۲۲) $\int \boldsymbol{\cos(۳ - ۲x)\, dx}$

فرض می کنیم $y = ۳ - ۲x$ باشد. پس $dy = -۲dx$ و یا $dx = -\frac{۱}{۲} dy$ است. لذا

$$\int \boldsymbol{\cos(۳ - ۲x)\, dx} = -\frac{۱}{۲} \int \cos(y) dy = -\frac{۱}{۲} \sin(y) + C = -\frac{۱}{۲} \sin(۳ - ۲x) + C$$

۲۳) $\int \frac{x^۲}{۱ + x^۲}\, dx = x - \arctan(x) + C$

از طریق کسرهای جزئی ، ابتدد باید عمل تقسیم انجام داد. پس خواهیم داشت

$$\int \frac{x^۲}{۱ + x^۲}\, dx = \int ۱ - \frac{۱}{x^۲ + ۱} dx = x - \arctan(x) + C$$

۲۴) $\int e^{\pi x - ۱}\, dx = \frac{۱}{\pi} e^{\pi x - ۱} + C$

فرض می‌کنیم $y = \pi\, x - ۱$ باشد ، پس $dy = \pi dx$ و یا $\frac{۱}{\pi} dy = dx$ است.

$$\int e^{\pi x - ۱}\, dx = \frac{۱}{\pi} \int e^y dy = \frac{۱}{\pi} e^y + C = \frac{۱}{\pi} e^{\pi\, x - ۱} + C$$

۲۵) $$\int_0^{۱} \frac{۹x^{۲}}{\left(x^{۳}+۱\right)^{۴}}\ dx = \frac{۷}{۸}$$

فرض می کنیم $y = x^{۳} + ۱$ باشد ، پس $dy = ۳x^{۲}dx$ است. اگر $x = 0$ باشد ، پس $y = ۱$ است و اگر $x = ۱$ باشد ، پس $y = ۲$ است.

$$\int_0^{۱} \frac{۹x^{۲}}{\left(x^{۳}+۱\right)^{۴}}\ dx = \int_{۱}^{۲} \frac{۳}{y^{۴}}\ dy = \int_{۱}^{۲} ۳y^{-۴}dy = -y^{-۳}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۷}{۸}$$

۲۶) $$\int \frac{۲}{x^{۴}-x^{۲}}\ dx = \frac{۲}{x} + \ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right| + C, x \neq 0 \pm ۱$$

از طریق کسر های جزئی

$$\int \frac{۲}{x^{۴}-x^{۲}}\ dx = \int \frac{۲}{x^{۲}(x-۱)(x+۱)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^{۲}} + \frac{C}{x+۱} + \frac{D}{x-۱}dx$$
$$= \int \frac{-۲}{x^{۲}}dx + \int \frac{۱}{x+۱}dx - \int \frac{۱}{x-۱}dx = \frac{۲}{x} + \ln|x+۱| - \ln|x-۱| + C$$
$$= \frac{۲}{x} + \ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right| + C, x \neq 0 \pm ۱$$

۲۷) $$\int \frac{۱}{x^{۲}}\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\ dx = \cos\left(\frac{۱}{x}\right) + C, x \neq 0$$

فرض می کنیم $y = \frac{۱}{x}$ باشد ، پس $dy = -\frac{۱}{x^{۲}}dx$ و یا $-dy = \frac{۱}{x^{۲}}dx$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{x^{۲}}\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\ dx = -\int \sin(y)dy = \cos(y) + C$$

۲۸) $$\int_0^{۱} \left(۱-x^{۲}\right) e^{x}\ dx = ۱$$

از طریق جز به جز. فرض می‌کنیم $u = ۱ - x^{۲}$ و $dv = e^{x}$ باشد ، پس $du = -۲dx$ است و $v = e^{x}$ لذا

$$\int_0^{۱} \left(۱-x^{۲}\right) e^{x}\ dx = \left[\left(۱-x^{۲}\right)e^{x}\right]\Big|_0^{۱} + \int_0^{۱} ۲xe^{x}\,dx$$

جز به جز تکرار می کنیم ، فرض می کنیم $u = ۲x$ و $dv = e^{x}dx$ باشد ، پس $du = ۲dx$ و $v = e^{x}$ است. لذا

$$= -۱ + ۲xe^{x}\Big|_{0}^{۱} - \int_{0}^{۱} ۲e^{x}dx = ۱$$

۲۹) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^{۲} - ۴}}\, dx = \sqrt{x^{۲} - ۴} + C, |x| > ۲$$

فرض می کنیم $y = x^{۲} - ۴$ باشد ، پس $dy = ۲x\, dx$ و یا $\frac{۱}{۲}dy = xdx$ است. پس

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^{۲} - ۴}}\, dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sqrt{y}}dy = \frac{۱}{۲}\int y^{-\frac{۱}{۲}}dy = \sqrt{y} + C = \sqrt{x^{۲} - ۴} + C, |x| > ۲$$

۳۰) $$\int \frac{x + ۱}{x^{۳} - ۲x^{۲} + x}\, dx = \ln\left|\frac{x}{x - ۱}\right| + \frac{۲}{x - ۱} + C, x \neq 0, ۱$$

از طریق کسر های جزئی

$$\int \frac{x + ۱}{x^{۳} - ۲x^{۲} + x}\, dx = \int \frac{x + ۱}{x(x - ۱)^{۲}}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x - ۱} + \frac{C}{(x - ۱)^{۲}}dx$$

$$= \int \frac{۱}{x}dx - \int \frac{۱}{x - ۱}dx - ۲\int \frac{۱}{(x - ۱)^{۲}}dx = \ln|x| - \ln|x - ۱| + ۲\frac{۱}{x - ۱} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x - ۱}\right| + \frac{۲}{x - ۱} + C, x \neq 0, ۱$$

۳۱) $$\int \frac{e^{\tanh(x)}}{\cosh^{۲}(x)}\, dx = e^{\tanh(x)} + C$$

فرض می‌کنیم $y = \tanh(x)$ باشد پس $dy = \frac{۱}{\cosh^{۲}(x)}\, dx$ است.

$$\int \frac{e^{\tanh(x)}}{\cosh^{۲}(x)}\, dx = \int e^{y}\, dy = e^{y} + C = e^{\tanh(x)} + C$$

۳۲) $$\int_{۱}^{۳} \left(۱-|x-۲|\right)(x+۱)\, dx = ۳$$

باید ابتدا قدر مطلق را حذف کنیم . برای این کار ، انتگرال را به دو قسمت تقسیم می کنیم .

$$\begin{aligned}
&\int_{۱}^{۳} \left(۱-|x-۲|\right)(x+۱)dx \\
&= \int_{۱}^{۲} \left(۱-|x-۲|\right)(x+۱)dx + \int_{۲}^{۳} \left(۱-|x-۲|\right)(x+۱)dx \\
&= \int_{۱}^{۲} \Big(۱+(x-۲)\Big)(x+۱)dx + \int_{۲}^{۳} \Big(۱-(x-۲)\Big)(x+۱)dx \\
&= \int_{۱}^{۲} (x-۱)(x+۱)dx + \int_{۲}^{۳} (۳-x)(x+۱)dx
\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
&\int_{۱}^{۳} \left(۱-|x-۲|\right)(x+۱)\, dx \\
&= \int_{۱}^{۲} \left(x^{۲}-۱\right) dx + \int_{۲}^{۳} \left(۳+۲x-x^{۲}\right) dx \\
&= \left(\frac{x^{۳}}{۳}-x\right)\Bigg|_{۱}^{۲} + \left(۳x+x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Bigg|_{۲}^{۲} = \frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳} = ۳
\end{aligned}$$

تمرینات دوره ای سری چهارم Review Exercises, Part Four

انتگرال های زیر را پیدا کنید

۱) $\int \left(۴e^{۳x} + ۱\right)\, dx$

۲) $\int x^{۲}\left(۱ - \frac{۱}{x^{۲}}\right)\, dx$

۳) $\int \left(ax^{۲} + bx + c\right) dx$

۴) $\int \left(۲x^{۲} + e^{x}\right)\, dx$

۵) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}\, dx$

۶) $\int \frac{x^{۳} + ۵x^{۲} - ۴}{x^{۲}}\, dx$

۷) $\int \frac{x^{۳} + ۳x + ۴}{\sqrt{x}}\, dx$

۸) $\int \frac{x^{۳} - x^{۲} + x - ۱}{x - ۱} dx$

۹) $\int (۱ - x)\sqrt{x}\,\, dx$

۱۰) $\int \sqrt{x}\left(۳x^{۲} + ۲x + ۳\right) dx$

۱۱) $\int (۲x - ۳\cos x + e^{x}) dx$

۱۲) $\int \left(۲x^{۲} - ۳\sin x + ۵\sqrt{x}\right) dx$

۱۳) $\int \sec x(\sec x + \tan x) dx$

۱۴) $\int \frac{\sec^{۲} x}{\csc^{۲} x} dx$

۱۵) $\int \frac{۲ - ۳\sin x}{\cos^{۲} x} dx$

۱۶) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}\right) dx$

۱۷) $$\int \frac{۲x}{۱+x^{۲}}dx$$

۱۸) $$\int \frac{(\ln|x|)^{۲}}{x}dx$$

۱۹) $$\int \frac{۱}{x+x\ln x}dx$$

۲۰) $$\int \sin x * \sin(\cos x)dx$$

۲۱) $$\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)dx$$

۲۲) $$\int \sqrt{ax+b}\,dx$$

۲۳) $$\int x\sqrt{x+۲}\,dx$$

۲۴) $$\int (۴x+۲)\sqrt{x^{۲}+x+۱}\,dx$$

۲۵) $$\int \frac{۱}{x-\sqrt{x}}\,dx$$

پاسخ تمرینات دوره ای سری چهارم

۱) $$\int \left(۴e^{۳x}+۱\right)\,dx = ۴\int e^{۳x}\,dx + \int ۱\,dx = \frac{۴}{۳}e^{۳x}+x+C$$

۲) $$\int x^{۲}\left(۱-\frac{۱}{x^{۲}}\right)\,dx = \int \left(x^{۲}-۱\right)\,dx = \frac{۱}{۳}x^{۳}-x+C$$

۳) $$\int \left(ax^{۲}+bx+c\right)dx = \frac{a}{۳}x^{۳}+\frac{b}{۲}x^{۲}+cx+C$$

۴) $$\int \left(۲x^{۲}+e^{x}\right)\,dx = \frac{۲}{۳}x^{۳}+e^{x}+C$$

۵) $$\int\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}dx=\int\left(x-۲+\frac{۱}{x}\right)dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x+\ln|x|+C$$

۶) $$\int\frac{x^{۳}+۵x^{۲}-۴}{x^{۲}}\,dx=\int\left(x+۵-۴x^{-۲}\right)dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۵x+\frac{۴}{x}+C$$

۷) $$\int\frac{x^{۳}+۳x+۴}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{۵}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}+۴x^{-\frac{۱}{۲}}\right)dx=\frac{۲}{۷}x^{\frac{۷}{۲}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}+۸\,x^{\frac{۱}{۲}}+C$$

۸) $$\int\frac{x^{۳}-x^{۲}+x-۱}{x-۱}dx=\int\frac{\left(x^{۲}+۱\right)\left(x-۱\right)}{x-۱}dx=\int\left(x^{۲}+۱\right)dx$$
$$=\frac{۱}{۳}x^{۳}+x+C$$

۹) $$\int(۱-x)\sqrt{x}\;dx=\int\left(x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۳}{۲}}\right)dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+C$$

۱۰) $$\int\sqrt{x}\left(۳x^{۲}+۲x+۳\right)dx=\int\left(۳x^{\frac{۵}{۲}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\right)dx$$
$$=\frac{۶}{۷}x^{\frac{۷}{۲}}+\frac{۴}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}+C$$

۱۱) $$\int(۲x-۳\cos x+e^{x})dx=x^{۲}-۳\sin x+e^{x}+C$$

۱۲) $$\int\left(۲x^{۲}-۳\sin x+۵\sqrt{x}\right)dx=\frac{۲}{۳}x^{۳}+۳\cos x+\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+C$$

۱۳) $$\int\sec x(\sec x+\tan x)dx=\int\left(\sec^{۲}x+\sec x\tan x\right)dx$$
$$=\tan x+\sec x+C$$

۱۴) $$\int \frac{\sec^۲ x}{\csc^۲ x}dx = \int \frac{\frac{۱}{\cos^۲ x}}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}dx = \int \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}dx = \int \tan^۲ x\, dx$$
$$= \int \left(\sec^۲ x - ۱\right)dx = \int \sec^۲ x \; dx - \int ۱ \; dx$$
$$= \tan x - x + C$$

۱۵) $$\int \frac{۲ - ۳\sin x}{\cos^۲ x}dx = \int \left(\frac{۲}{\cos^۲ x} - \frac{۳\sin x}{\cos^۲ x}\right)dx$$
$$= \int ۲\sec^۲ x\, dx - ۳\int \tan x \sec x\, dx = ۲\tan x - ۳\sec x + C$$

۱۶) $$\int \left(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{\frac{۱}{۲}}dx + \int x^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + ۲x^{\frac{۱}{۲}} + C$$

۱۷) $$\int \frac{۲x}{۱ + x^۲}dx$$

فرض می کنیم $u = ۱ + x^۲$ باشد ، پس $du = ۲xdx$ است.

$$\int \frac{۲x}{۱ + x^۲}dx = \int \frac{۱}{u}du = \ln|u| + C = \ln\left|۱ + x^۲\right| + C = \ln\left(۱ + x^۲\right) + C$$

۱۸) $$\int \frac{(\ln|x|)^۲}{x}dx$$

فرض می کنیم $u = \ln x$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{x}dx$ است.

$$\int \frac{(\ln|x|)^۲}{x}dx = \int u^۲ du = \frac{۱}{۳}u^۳ + C = \frac{۱}{۳}(\ln|x|)^۳ + C$$

۱۹) $$\int \frac{۱}{x + x\ln x}dx = \int \frac{۱}{x(۱ + \ln x)}dx$$

فرض می کنیم $u = ۱ + \ln x$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{x}\, dx$ است.

$$\int \frac{۱}{x(۱+\ln x)}dx = \int \frac{۱}{u}du = \ln|u| + C = \ln[۱+\ln x] + C$$

۲۰) $\int \sin x * \sin(\cos x)dx$

فرض می کنیم $u = \cos x$ باشد ، پس $du = -\sin x\, dx$ است.

$$\int \sin x * \sin(\cos x)dx = -\int \sin u\, du = -(-\cos u) + C = \cos(\cos x) + C$$

۲۱) $\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)dx = \int \frac{۲\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{۲}$

$$= \int \frac{\sin ۲(ax+b)}{۲}$$

فرض می کنیم $u = ۲(ax+b)$ باشد ، پس $du = ۲a\, dx$ است.

$$\int \frac{\sin ۲(ax+b)}{۲} = \frac{۱}{۲}\int \frac{\sin u}{۲a}du = \frac{۱}{۴a}(-\cos u) + C$$

$$= -\frac{۱}{۴a}\cos ۲(ax+b) + C$$

۲۲) $\int \sqrt{ax+b}\, dx$

فرض می کنیم $u = ax+b$ باشد ، پس $du = a\, dx$ است.

$$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{۱}{a}\int \sqrt{u}\, du = \frac{۱}{a}\int u^{\frac{۱}{۲}}du = \frac{۱}{a}\left(\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\right) + C$$

$$= \frac{۲}{۳a}(ax+b)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

۲۳) $\int x\sqrt{x+۲}\, dx$

فرض می کنیم $u = x+۲$ باشد ، پس $du = dx$ است. و $x = u-۲$ است.

$$\int x\sqrt{x+۲}\, dx = \int (u-۲)\sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{۳}{۲}}du - ۲\int u^{\frac{۱}{۲}}du$$

$$= \frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۴}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} + C = \frac{۲}{۵}(x+۲)^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۴}{۳}(x+۲)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

۲۴) $\int (۴x+۲)\sqrt{x^۲+x+۱}\ dx$

فرض می کنیم $u = x^۲ + x + ۱$ باشد ، پس $du = (۲x+۱)dx$ است.

$$\int (۴x+۲)\sqrt{x^۲+x+۱}\ dx = \int ۲\sqrt{u}\,du = \frac{۴}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} + C$$
$$= \frac{۴}{۳}\left(x^۲+x+۱\right)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

۲۵) $\int \frac{۱}{x-\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}dx$

فرض می کنیم $u = \sqrt{x} - ۱$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\ dx$ است.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}dx = \int \frac{۲}{u}du = ۲\ln|u| + C = ۲\ln\left|\sqrt{x}-۱\right| + C$$

تمرینات دوره ای سری پنجم Review Practice, Part Five

انتگرال های زیر را پیدا کنید.

۱) $\int \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}dx$

۲) $\int_{۴}^{0} x\sqrt{۱+۲x}\ dx$

۳) $\int \sin^{۲} x\ \cos^{۲} x\ dx$

۴) $\int \sin(\sqrt{w})\,dw$

۵) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

۶) $\int \sin t\cos(۲t)dt$

۷) $\int \frac{x+۱}{۴+x^{۲}}dx$

۸) $\int \frac{\sin(\tan\theta)}{\cos^{۲}\theta}\ d\theta$

۹) $\int x\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}\ dx$

۱۰) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۳}} \sin^{۳} z\cos z\,dz$

۱۱) $\int \frac{۱}{۳x^{۲}+۲x+۱}\ dx$

۱۲) $\int \frac{۱}{e^{t}+۱}dt$

۱۳) $\int e^{۳a}\cos(۳a)da$

۱۴) $\int \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$

۱۵) $\int \frac{۱}{t\,(\ln t)^{۲}}dt$

۱۶) $\displaystyle\int \frac{xe^{۲x}}{(۲x+۱)^۲}dx$

۱۷) $\displaystyle\int (\tan x+\cot x)^۲ dx$

۱۸) $\displaystyle\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۴-x^۲}}dx$

۱۹) $\displaystyle\int (۱+\cos\theta)^۲ d\theta$

۲۰) $\displaystyle\int \frac{۱}{x^۳+x}dx$

پاسخ تمرینات دوره ای سری پنجم

۱) $$\int \frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}dx=\int\left(۱+\frac{۲}{x^۲-۱}\right)dx=\int ۱\,dx+\int\frac{۲}{x^۲-۱}dx$$
$$=x+\int\frac{۲}{x^۲-۱}dx$$

برای انتگرال اخری از طریق کسر ها جزئی عمل می کنیم.

$$\frac{۲}{x^۲-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}=\frac{A(x+۱)+B(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}$$
$$=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^۲-۱}$$

پس $A+B=0$ و $A-B=۲$ است. از جمع کردن این دو تساوی خواهیم داشت $۲A=۲$
پس $A=۱$ و $B=-۱$ است. لذا

$$\int\frac{۲}{x^۲-۱}dx=\int\frac{۱}{x-۱}dx-\int\frac{۱}{x+۱}dx$$
$$=\ln|x-۱|-\ln|x+۱+C_۱|$$

و در نهایت

$$\int\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}dx=x+\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|+C$$

۲) $\int_{۴}^{0} x\sqrt{۱+۲x}\ dx$

فرض می کنیم $u=۱+۲x$ باشد ، پس $du=۲dx$ و $x=\frac{u-۱}{۲}$ است. اگر $x=۴$ باشد ، پس $u=۹$ است و اگر $x=0$ باشد ، پس $u=۱$ است. لذا

$$\int_{۴}^{0} x\sqrt{۱+۲x}\ dx=\int_{۹}^{۱}\frac{۱}{۴}(u-۱)\sqrt{u}\,du=\int_{۹}^{۱}\frac{۱}{۴}\left(u^{\frac{۳}{۲}}-u^{\frac{۱}{۲}}\right)du$$
$$=\frac{۱}{۱۰}u^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۱}{۶}u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۹}^{۱}=\left(\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۶}\right)-\left(\frac{۲۴۳}{۱۰}-\frac{۲۷}{۶}\right)=-\frac{۲۹۸}{۱۵}$$

۳) $\int \sin^{۲}x\ \cos^{۲}x\ dx$

یاد آوری : فرمول های توان دوم سینوس و کسینوس

$$\sin^{۲}x=\frac{۱-\cos(۲x)}{۲};\cos^{۲}x=\frac{۱+\cos(۲x)}{۲}$$

پس داریم

$$\int\sin^{۲}x\ \cos^{۲}x\ dx=\int\frac{۱}{۴}(۱-\cos(۲x))\,(۱+\cos(۲x))dx$$
$$=\int\frac{۱}{۴}\left(۱-\cos^{۲}(۲x)\right)dx=\int\frac{۱}{۴}\ dx-\int\frac{۱}{۴}\cos^{۲}(۲x)dx$$
$$=\frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴}\int\cos^{۲}(۲x)dx$$

برای انتگرال آخری ، فرمول توان دوم کسینوس را دو باره بکار می بریم. پس

$$\int\cos^{۲}(۲x)dx=\int\frac{۱+\cos(۴x)}{۲}\ dx=\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۸}\sin(۴x)+C$$

و در نهایت

$$\int\sin^{۲}x\ \cos^{۲}x\ dx=\frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴}\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۸}\sin(۴x)\right)+C$$
$$=\frac{x}{۸}-\frac{۱}{۳۲}\sin(۴x)+C$$

۴) $\int \sin(\sqrt{w})\, dw$

فرض می کنیم $t = \sqrt{w}$ باشد ، پس $dt = \frac{۱}{۲\sqrt{w}}\, dw$ و یا $dw = ۲\sqrt{w}\, dt$ است.

$$\int \sin(\sqrt{w})\, dw = \int ۲t \sin t\, dt$$

حالا از طریق انتگرال گیری جز به جز عمل می کنیم. فرض می کنیم $u = ۲t$ و $dv = \sin t\, dt$ باشد ، پس $du = ۲dt$ و $v = -\cos t$ است. لذا

$$\int ۲t \sin t\, dt = -۲t \cos t + \int ۲\cos t\, dt = -۲t\cos t + ۲\sin t + C$$

در نهایت

$$\int \sin(\sqrt{w})\, dw = -۲\sqrt{w}\cos(\sqrt{w}) + ۲\sin(\sqrt{w}) + C$$

۵) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

فرض می کنیم $u = \ln(x)$ باشد ، پس $du = \frac{۱}{x} dx$ است. لذا

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u\, du = \frac{u^۲}{۲} + C = \frac{۱}{۲}(\ln(x))^۲ + C$$

۶) $\int \sin t \cos(۲t) dt$

یاد آوری : فرمول زاویه مضاعف $\cos(۲t) = ۲\cos^۲ t - ۱$

$$\int \sin t \cos(۲t) dt = \int \sin t \left(۲\cos^۲ t - ۱\right) dt = \int ۲\sin t\, \cos^۲ t\, dt - \int \sin t\, dt$$
$$= \int ۲\sin t\, \cos^۲ t\, dt + \cos t$$

برای انتگرال آخری ، عمل جانشینی را انجام می دهیم. فرض می کنیم $u = \cos t$ باشد ، پس $du = -\sin t\, dt$ است. لذا

$$\int ۲\sin t\, \cos^۲ t\, dt = \int -۲u^۲ du = -\frac{۲}{۳}u^۳ + C = -\frac{۲}{۳}\cos^۳ t + C$$

و در نهایت

$$\int \sin t \cos(۲t) dt = -\frac{۲}{۳}\cos^۳ t + \cos t + C$$

۷) $\int \frac{x + ۱}{۴ + x^۲} dx = \int \frac{x}{۴ + x^۲} dx + \int \frac{۱}{۴ + x^۲} dx$

برای انتگرال سمت چپ ، فرض می کنیم $u = ۴ + x^۲$ باشد ، پس $du = ۲x\,dx$ است.

$$\int \frac{x}{۴ + x^۲} dx = \int \frac{۱}{۲u} du = \ln|۲u| + C = \ln\left(۸ + ۲x^۲\right) + C$$

برای انتگرال سمت راست فرض می کنیم $۲\tan t = x$ باشد ، پس $۲\sec^۲ t\,dt = dx$ و $t = \arctan\left(\frac{x}{۲}\right)$ است.

$$\int \frac{۱}{۴ + x^۲} dx = \int \frac{۱}{۴ + ۴\tan^۲ t} ۲\sec^۲ t\,dt = \int \frac{۲\sec^۲ t}{۴\sec^۲ t} dt$$
$$= \int \frac{۱}{۲} dt = \frac{t}{۲} + C = \frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{x}{۲}\right) + C$$

و در نهایت

$$\int \frac{x + ۱}{۴ + x^۲} dx = \int \frac{x}{۴ + x^۲} dx + \int \frac{۱}{۴ + x^۲} dx = \ln\left(۸ + ۲x^۲\right) + \frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{x}{۲}\right) + C$$

۸) $$\int \frac{\sin(\tan\theta)}{\cos^۲\theta}\, d\theta$$

فرض می کنیم $u = \tan\theta$ باشد ، پس $du = \sec^۲\theta\, d\theta$ است. لذا

$$\int \frac{\sin(\tan\theta)}{\cos^۲\theta}\, d\theta = \int \sec^۲\theta \sin(\tan\theta) d\theta = \int \sin u du$$
$$= -\cos u + C = -\cos(\tan\theta) + C$$

۹) $$\int x\sqrt{۳ - ۲x - x^۲}\, dx$$

ابتدا عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می کنیم.

$$۳ - ۲x - x^۲ = ۴ - (x + ۱)^۲$$

حالا فرض می کنیم $u = x + ۱$ باشد ، پس $du = dx$ است. لذا

$$\int x\sqrt{۳ - ۲x - x^۲}\, dx = \int (u - ۱)\sqrt{۴ - u^۲}\, du$$
$$= \int u\sqrt{۴ - u^۲}\, du - \int \sqrt{۴ - u^۲}\, du$$

برای انتگرال سمت چپ ، فرض می کنیم $t = ۴ - u^۲$ باشد ، پس $dt = -۲u\, du$ است.

$$\int u\sqrt{۴ - u^۲}\, du = \int -\frac{۱}{۲}\sqrt{t}\, dt = -\frac{۱}{۳}t^{\frac{۳}{۲}} + C = -\frac{۱}{۳}\left(۴ - u^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} + C$$

برای انتگرال سمت راست ، فرض می کنیم $۲\sin s = u$ باشد ، پس $s = \arcsin\left(\frac{u}{۲}\right)$ و $۲\cos s ds = du$ است. لذا

$$\int \sqrt{۴ - u^۲}\, du = \int \sqrt{۴ - ۴\sin^۲ s}\ \ ۲\cos s\, ds = \int ۴\cos^۲ s\, ds$$
$$= \int (۲ + ۲\cos(۲s))ds = ۲s + \sin(۲s) + C = ۲s + ۲\sin s \cos s + C$$
$$= ۲\arcsin\left(\frac{u}{۲}\right) + ۲\sin\left(\arcsin\left(\frac{u}{۲}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{u}{۲}\right)\right) + C$$
$$= ۲\arcsin\left(\frac{u}{۲}\right) + u\left(\frac{\sqrt{۴ - u^۲}}{۲}\right) + C$$

و در نهایت

$$\int x\sqrt{۳ - ۲x - x^۲}\ dx = \int u\sqrt{۴ - u^۲}\, du - \int \sqrt{۴ - u^۲}\, du$$
$$= -\frac{۱}{۳}\left(۴ - u^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} - ۲\arcsin\left(\frac{u}{۲}\right) - u\left(\frac{\sqrt{۴ - u^۲}}{۲}\right) + C$$
$$= -\frac{۱}{۳}\left(۴ - (x + ۱)^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} - ۲\arcsin\left(\frac{x + ۱}{۲}\right) - (x + ۱)\left(\frac{\sqrt{۴ - (x + ۱)^۲}}{۲}\right) + C$$

۱۰) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{۳}} \sin^۳ z \cos z\, dz$

فرض می کنیم $u = \sin z$ باشد ، پس $du = \cos z\, dz$ است. اگر $z = 0$ باشد ، $u = 0$ است و اگر $z = \frac{\pi}{۳}$ باشد پس $u = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. لذا

$$\int_0^{\frac{\pi}{۳}} \sin^۳ z \cos z\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} u^۳ du = \frac{u^۴}{۴}\Bigg|_0^{۱۰} = \frac{۹}{۶۴}$$

۱۱) $\displaystyle\int \frac{۱}{۳x^۲ + ۲x + ۱}\, dx$

مخرج را مربع کامل می کنیم.

$$3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1\right)$$

حالا فرض می کنیم $u=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$ باشد ، پس $du=\frac{3}{\sqrt{2}}\,dx$ است. لذا

$$\int\frac{1}{3x^2+2x+1}\,dx=\int\frac{3}{2\left(\frac{9}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1\right)}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2}\,(u^2+1)}\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)+C$$

۱۲) $\displaystyle\int\frac{1}{e^t+1}dt$

فرض می کنیم $u=e^t+1$ باشد ، پس $du=e^t dt$ و $dt=\frac{1}{e^t}du=\frac{1}{u-1}du$ است. لذا

$$\int\frac{1}{e^t+1}dt=\int\frac{1}{u(u-1)}du$$

با استفاده از کسر های جزئی داریم .

$$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}=\frac{A(u-1)+Bu}{u(u-1)}=\frac{(A+B)u+(-A)}{u(u-1)}$$

پس $A+B=0$ و $-A=1$ است ، لذا $A=-1$ و $B=1$ است. پس داریم

$$\int\frac{1}{u(u-1)}du=\int\frac{-1}{u}du+\int\frac{1}{u-1}du$$

$$=-\ln|u|+\ln|u-1|+C$$

و در نهایت

$$\int\frac{1}{e^t+1}dt=-\ln\left|e^t+1\right|+\ln|e^t|+C=-\ln\left|e^t+1\right|+t+C$$

۱۳) $\int e^{۳a}\cos(۳a)da$

فرض می کنیم $t = ۳a$ باشد ، پس $dt = ۳da$ است. لذا

$$\int e^{۳a}\cos(۳a)da = \int \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t\,dt$$

حالا از طریق انتگرال گیری جز به جز عمل می کنیم. فرض می کنیم $u = \cos t$ و $dv = e^{t}dt$ باشد ، پس $du = -\sin t\,dt$ و $v = e^{t}$ است. لذا

$$\int \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t\,dt = \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t + \frac{۱}{۳}\int e^{t}\sin t dt$$

انتگرال گیری جز به جز را تکرار می کنیم.فرض می کنیم $u_۱ = \sin t$ و $dv_۱ = e^{t}dt$ باشا پس $du_۱ = \cos t dt$ و $v_۱ = e^{t}$

$$\frac{۱}{۳}\int e^{t}\sin t dt = \frac{۱}{۳}\sin t\, e^{t} - \frac{۱}{۳}\int e^{t}\cos t\,dt$$

$$\int \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t dt = \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t + \frac{۱}{۳}\sin t\, e^{t} - \frac{۱}{۳}\int e^{t}\cos t\,dt$$

انتگرال اولیه تکرار شد. به هر دو طرف معادله بالا $\int \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t\,dt$ اضافه می کنیم. پس خواهیم داشت

$$\int \frac{۱}{۳}e^{t}\cos t\,dt = \frac{۱}{۶}e^{t}\cos t + \frac{۱}{۶}e^{t}\sin t + C$$

و در نهایت

$$\int e^{۳a}\cos(۳a)da = \frac{۱}{۶}e^{۳a}\cos(۳a) + \frac{۱}{۶}e^{۳a}\sin(۳a) + C$$

۱۴) $\int \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۶}}dx$

فرض می کنیم $u = x^{۳}$ باشد ، پس $du = ۳x^{۲}dx$ است.

$$\int \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۶}}dx = \int \frac{۱}{۳(۱ + u^{۲})}du = \frac{۱}{۳}\arctan u + C$$
$$= \frac{۱}{۳}\arctan\left(x^{۳}\right) + C$$

۱۵) $\int \frac{۱}{t\left(\ln t\right)^{۲}}dt$

فرض می کنیم $u=\ln t$ باشد ، پس $du=\frac{۱}{t}\,dt$ است.

$$\int \frac{۱}{t\left(\ln t\right)^{۲}}dt=\int \frac{۱}{u^{۲}}\,du=-\frac{۱}{u}+C=-\frac{۱}{\ln t}+C$$

۱۶) $\int \frac{xe^{۲x}}{\left(۲x+۱\right)^{۲}}dx$

فرض می کنیم $u=xe^{۲x}$ و $dv=\left(۲x+۱\right)^{-۲}dx$ باشد ، پس $du=\left(e^{۲x}+۲xe^{۲x}\right)dx$ و $v=-\frac{۱}{۲(۲x+۱)}$ است. لذا

$$\int \frac{xe^{۲x}}{\left(۲x+۱\right)^{۲}}dx=-\frac{xe^{۲x}}{۲\left(۲x+۱\right)^{۲}}+\int \frac{e^{۲x}+۲xe^{۲x}}{۲\left(۲x+۱\right)}dx$$

برای انتگرال باقیمانده فرض می کنیم $u=۲x+۱$ باشد ، پس $du=۲\,dx$ است.

$$\int \frac{e^{۲x}+۲xe^{۲x}}{۲\left(۲x+۱\right)}dx=\int \frac{e^{u-۱}+\left(u-۱\right)e^{u-۱}}{۴u}du$$

$$=\int \frac{۱}{۴}e^{u-۱}du=\frac{۱}{۴}e^{u-۱}+C=\frac{۱}{۴}e^{۲x}+C$$

و در نهایت

$$\int \frac{xe^{۲x}}{\left(۲x+۱\right)^{۲}}dx=-\frac{xe^{۲x}}{۲\left(۲x+۱\right)}+\frac{۱}{۴}e^{۲x}+C=\frac{e^{۲x}}{۴\left(۲x+۱\right)}+C$$

۱۷) $\int (\tan x+\cot x)^{۲}dx=\int \left(\tan^{۲}x+۲\tan x\cot x+\cot^{۲}x\right)dx$

$$=\int \left(\sec^{۲}x-۱+۲+\csc^{۲}x-۱\right)dx=\int \left(\sec^{۲}x+\csc^{۲}x\right)dx$$

$$=\tan x-\cot x+C$$

۱۸) $\int \frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}}dx$

فرض می کنیم $x = ۲\sin y$ و یا $y = \arcsin\left(\frac{x}{۲}\right)$ و $dx = ۲\cos y dy$ باشد ، پس

$$\int \frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۴ - x^{۲}}}dx = \int \frac{۲\cos y}{۴\sin^{۲} y\sqrt{۴ - ۴\sin^{۲} y}}dy = \int \frac{۲\cos y}{۴\sin^{۲} y(۲\cos y)}dy$$

$$= \int \frac{۱}{۴}\csc^{۲} y dy = -\frac{۱}{۴}\cot y + C = -\frac{۱}{۴}\cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{۲}\right)\right) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{۴ - x^{۲}}}{۴x} + C$$

۱۹) $$\int (۱ + \cos\theta)^{۲} d\theta = \int \left(۱ + ۲\cos\theta + \cos^{۲}\theta\right)d\theta$$

$$= \int d\theta + ۲\int \cos\theta d\theta + \int \cos^{۲}\theta d\theta$$

$$= \theta + ۲\sin\theta + \int \left(\frac{۱ + \cos(۲\theta)}{۲}\right)d\theta$$

$$= \theta + ۲\sin\theta + \frac{\theta}{۲} + \frac{\sin(۲\theta)}{۴} + C$$

$$= \frac{۳}{۲}\theta + ۲\sin\theta + \frac{۱}{۴}\sin(۲\theta) + C$$

۲۰) $$\int \frac{۱}{x^{۳} + x}dx$$

با استفاده از کسرهای جزئی داریم.

$$\frac{۱}{x^{۳} + ۳} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^{۲} + ۱} = \frac{A\left(x^{۲} + ۱\right) + (Bx + C)x}{x^{۳} + x} = \frac{(A + B)x^{۲} + Cx + A}{x^{۳} + x}$$

پس $A + B = 0, C = 0, A = ۱$ و $B = -۱$ لذا

$$\int \frac{۱}{x^{۳} + x}dx = \int \frac{۱}{x}dx - \int \frac{x}{x^{۲} + ۱}dx = \ln|x| - \int \frac{x}{x^{۲} + ۱}dx$$

برای انتگرال آخر ، فرض می کنیم $u = x^{۲} + ۱$ باشد ، پس $du = ۲x dx$ است.

$$\int \frac{x}{x^{۲} + ۱}dx = \int \frac{۱}{۲u}du = \frac{۱}{۲}\ln|u| + C = \frac{۱}{۲}\ln\left(x^{۲} + ۱\right) + C$$

و در نهایت

$$\int \frac{۱}{x^{۳} + x}dx = \ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln\left(x^{۲} + !\right) + C$$

فصل پنجم ضمایم
Appendix

فرمول ها و قواعد جبری

عملیات جبری

$$ab + ac = a(b+c) \qquad a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{ab+ac}{a} = b + c, a \neq 0 \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

خواص نا مساوی ها

اگر $a < b$ باشد ، پس $a + c < b + c$ و $a - c < b - c$ است.

اگر $a < b$ و $c > 0$ باشد ، پس $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ است.

اگر $a < b$ و $c < 0$ باشد ، پس $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ است.

خواص قدر مطلق

$$|a| \begin{cases} a & \text{اگر} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{اگر} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$|a| \geq 0 \qquad |-a| =$$

$$|ab| = |a||b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$ نامساوی مثلثی

خواص توان ها

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{۱}{a^{m-n}}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \qquad a^0 = ۱, a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \qquad \frac{۱}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \qquad a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{۱}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{۱}{m}}$$

اگر $a^m = a^n$ باشد و $a \neq ۱, a \neq 0$ پس $m = n$ است.
اگر $a^n = b^n$ باشد و $n \neq 0$ پس $a = \pm b$ است.

خواص رادیکال ها

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{n}} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$ اگر n فرد باشد

فرمول مسافت

اگر نقطه $P_۱ = (x_۱, y_۱)$ و نقطه $P_۲ = (x_۲, y_۲)$ باشد ، پس فاصله بین این دو نقطه مطابق زیر است.

$$d(P_۱, P_۲) = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

لگاریتم ها و خواص آنها

تعریف لگاریتم

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$$

مثال

$$\log_۵ ۱۲۵ = ۳ \text{ زیرا } ۵^۳ = ۱۲۵$$

$$\log_b b = ۱ \qquad \log_b ۱ = 0$$

$$\log_b b^x = x \log_b b = x \qquad b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$$

$$\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$$

دامنه $\log_b x$ کلیه اعداد مثبت است ، یعنی $x > 0$

$\ln x = \log_e x$ لگاریتم طبیعی

$$\log x = \log_{۱۰} x$$

اتحاد ها و فاکتور ها

$$x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y)$$

$$(x + y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

$$(x - y)^۲ = x^۲ - ۲xy + y^۲$$

$$(x + y)^۳ = x^۳ + ۳yx^۲ + ۳y^۲x + y^۳$$

$$(x-y)^۳ = x^۳ - ۳yx^۲ + ۳y^۲x - y^۳$$
$$x^۳ + y^۳ = (x+y)\left(x^۲ - xy + y^۲\right)$$
$$x^۳ - y^۳ = (x-y)\left(x^۲ + xy + y^۲\right)$$
$$x^{۲n} - y^{۲n} = (x^n - y^n)(x^n + y^n)$$
$$x^۲ + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

حل معادله درجه دوم

۱ - از طریق فرمول درجه دوم

$$ax^۲ + bx + c = 0،\ a \neq 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

اگر $b^۲ - ۴ac > 0$ باشد دو ریشه حقیقی دارد.

اگر $b^۲ - ۴ac = 0$ باشد دو ریشه حقیقی مانند هم دارد .و یا بهتر است بگوییم یک ریشه حقیقی دارد.

اگر $b^۲ - ۴ac < 0$ باشد دو ریشه مختلط دارد.یعنی پاسخ مانند زیر است.

$$x = a \pm bi$$

اینجا a و b اعداد حقیقی هستند و i یک عدد مهوم یا تصوری است.

اعداد مختلط

$$i = \sqrt{-۱} \quad i^۲ = -۱ \qquad \sqrt{-a} = i\sqrt{a}\ ,a \geq 0$$
$$(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i$$
$$(a+bi) - (c+di) = a - c + (b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$
$$(a+bi)(a-bi) = a^۲ - b^۲$$
$$(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i$$

خاصیت ریشه دوم

اگر $x^۲ = p$ باشد ، پس $x = \pm\sqrt{p}$ است.

مربع کامل کردن

معادله $۲x^۲ - ۶x - ۱۰ = ۰$ را با روش مربع کلمل حل کنید.

۱ - معادله را بر ضریب $x^۲$ تقسیم کنید. پس داریم $x^۲ - ۳x - ۵ = ۰$

۲ - عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل کنید. پس داریم $x^۲ - ۳x = ۵$

۳ - ضریب x را بر دو تقسیم کنید ، آنرا مربع کنید و حاصل را به هر دو طرف اضافه کنید. پس داریم

$$x^{۲} - ۳x + \left(-\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = ۵ + \left(-\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = ۵ + \frac{۹}{۴} = \frac{۲۹}{۴}$$

۴ - از عبارت سمت چپ فاکتور بگیرید. پس داریم $\left(x - \frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۲۹}{۴}$

۵ - از خاصیت ریشه دوم استفاده کنید. پس داریم $x - \frac{۳}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۲۹}{۴}} = \pm\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

۶ - معادله بدست آمده را برای x حل کنید. پس داریم $x = \frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{۲۹}}{۲} = \frac{۳+\sqrt{۲۹}}{۲}$

خط و تابع خطی

$$y = mx + b \text{ یا } f(x) = mx + b$$

نمودار معادله بالا یک خط راست است از نقطه $(0, b)$ می‌گذرد و دارای شیب m است.

شیب

پیدا کردن شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه روی خط.

$$m = \frac{y_{۲} - y_{۱}}{x_{۲} - x_{۱}}$$

معادله خط به شکل نقطه شیب

$$y - y_{۱} = m(x - x_{۱})$$

تابع درجه دوم /سهمی

$$y = a(x-h)^{۲} + k \quad \text{یا} \quad f(x) = a(x-h)^{۲} + k$$

نمودار معادله بالا یک سهمی است که به طرف بالا باز می شود اگر $a > 0$ باشد و به طرف پایین باز می شود اگر $a < 0$ باشد. مختصات راس (h, k) است.

شکل دیگر تابع درجه دوم

$$y = ax^{۲} + bx + c \quad \text{یا} \quad f(x) = ax^{۲} + bx + c$$

نمودار معادله بالا هم یک سهمی است. اگر $a > 0$ به طرف بالا و اگر $a < 0$ باشد ، به طرف پایین باز می شود. مختصات راس هم

$$\left(-\frac{b}{۲a}, f\left(-\frac{b}{۲a}\right)\right)$$

است.

دائره

$$(x-h)^{۲} + (y-k)^{۲} = r^{۲}$$

نمودار معادله بالا یک دائره است به شعاع r که مختصات مرکز آن (h, k) است.

بیضی

$$\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}} + \frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

نمودار معادله بالا یک بیضی است که مختصات مرکز آن (h,k) است ، و راس های آن a واحد سمت چپ و سمت راست مرکز ، و b واحد بالا و پایین مرکز.

هذلولی

$$\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

نمودار معادله بالا یک هذلولی است که به طرف راست و چپ باز می شود با مرکز (h,k) و راس های a واحد سمت راست و چپ مرکز ، و مجانب هایی که از مرکز عبور می کند با شیب های $\pm\frac{b}{a}$

$$\frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}}-\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

نمودار معادله بالا یک هذلولی است که به طرف بالا و پایین باز می شود با مرکز (h,k) و راس های b واحد بالا و پایین مرکز ، و مجانب هایی که از مرکز عبور می کند با شیب های $\pm\frac{b}{a}$

دنباله ها و سری ها

برای یک دنباله حسابی اگر اولین جمله a است و تفاضل مشترک d است ، پس جمله انم

$$t_n=a+(n-۱)d$$

برای یک دنباله حسابی ، مجموع n جمله اول

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

برای یک دنباله هندسی اگر اولین جمله a و نسبت مشترک یا خارج قسمت مشترک r بعهد ، پس جمله انم

$$t_n=ar^{n-۱}$$

برای یک دنباله هندسی مجموع n جمله اول

$$S_n=\frac{a(۱-r^n)}{۱-r}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} j=۱+۲++۳+\cdots+n=\frac{n}{۲}(n+۱)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} j^{۲}=۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\cdots+n^{۲}=\frac{n}{۶}(n+۱)(۲x+۱)$$

$$\sum_{۱}^{n} j^{۳}=۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+\cdots n^{۳}=\frac{n^{۲}}{۴}(n+۱)^{۲}$$

$$n!=۱*۲*۳*\cdots*(n-۱)*n=n*(n-۱)(n-۲)!$$

$$0!=۱$$

فرمول ها و قواعد مثلثاتی

$$180^\circ = \pi\, radians \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \qquad 1\, radian = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

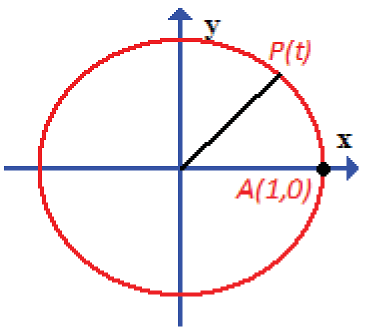
اگر θ یک زاویه مرکزی یک دائره به شعاع r باشد و طول کمان روبروی آن s باشد ، پس

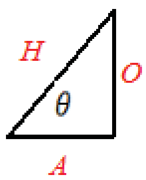
$$\theta = \frac{s}{r}$$

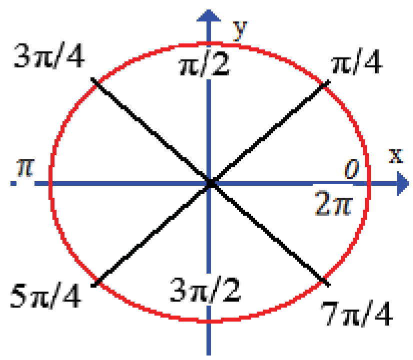
The Trigonometric Functions توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی را به دو صورت می توان تعریف کرد.

۱ – از طریق دائره واحد. اگر نقطه $P(t)$ روی دائره به شعاع واحد باشد ، مختصات (x, y) نقطه P را برای تعریف توابع مثلثاتی بکار می بریم. نقطه $A(۱, 0)$ را خلاف جهت عقربه ساعت حرکت می دهیم.





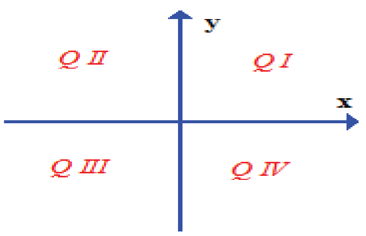


$$\sin t = y, \cos t = x\,, \tan t = \frac{y}{x}\,, \cot t = \frac{x}{y}.\ \csc t = \frac{۱}{y}(y \neq 0)\,, \sec t = \frac{۱}{x}(x \neq 0)$$

اگر از طریق مثلث قائم الزاویه تعریف کنیم

$$\sin\theta = \frac{O}{H} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\ ، \quad \cos\theta = \frac{A}{H} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}\ ، \quad \tan\theta = \frac{O}{A} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

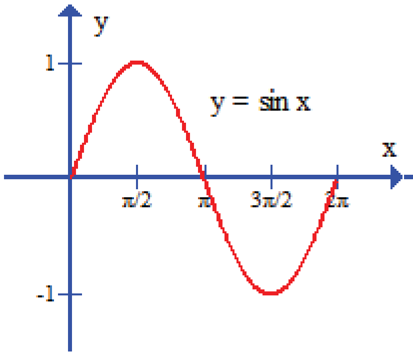
$$\csc\theta = \frac{H}{O} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}\ ، \quad \sec\theta = \frac{H}{A} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}\ ، \quad \cot\theta = \frac{A}{O} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

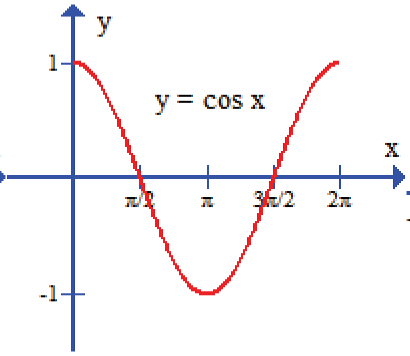


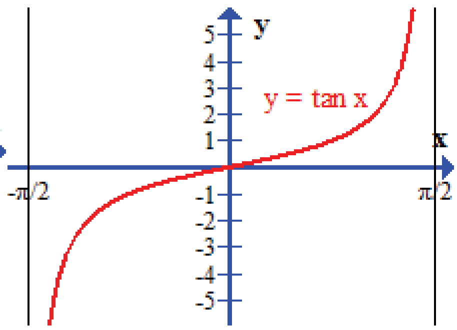
در $Q\ I$ تمام توابع مثلثاتی مثبت هستند. در $Q\ II$ توابع $\sin x$ و $\csc x$ مثبت هستند و بقیه منفی هستند. در $Q\ III$ توابع $\tan x$ و $\cot x$ مثبت هستند و بقیه منفی هستند. در $Q\ IV$ توابع $\cos x$ و $\sec x$ مثبت هستند و بقیه منفی هستند.

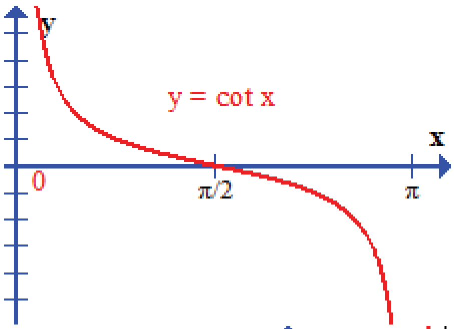
زاویه به درجه	0	30	45	60	90
زاویه به رادیان	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
$\cot x$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

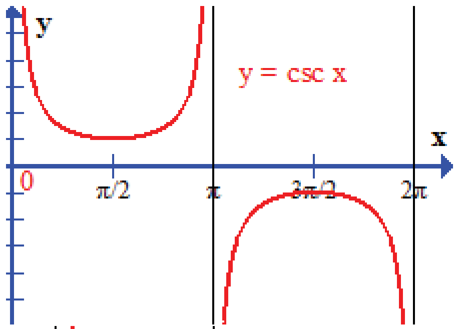
اشکال زیر نمودار های توابع مثلثاتی در یک دوره تناوب است.

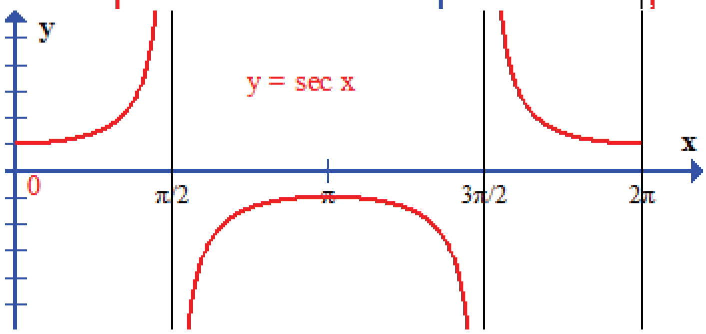












خواص توابع مثلثاتی

سینوس $f(x) = \sin x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی

برد : $[-۱, ۱]$

دوره تناوب : ۲π

محل تلاقی با محورافقی : $x = n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$

محل تلاقی با محور عمودی : $y = 0$

نقاط ماکسیمم : $\left(\frac{\pi}{۲} + ۲n\pi, ۱\right)$ ، $n \in \mathbb{Z}$

نقاط مینیمم $\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۲n\pi, -۱\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

کسینوس $f(x) = \cos x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی

برد : $[-۱, ۱]$

دوره تناوب : ۲π

محل تلاقی با محورافقی : $x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

محل تلاقی با محور عمودی : $y = ۱$

نقاط ماکسیمم : $(۲n\pi, ۱)$ ، $n \in \mathbb{Z}$

نقاط مینیمم $(\pi + ۲n\pi, -۱)$, $n \in \mathbb{Z}$

تانژانت $f(x) = \tan x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی بجز $\frac{\pi}{۲} + n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$

برد : کلیه اعداد حقیقی

دره تناوب : π

تلاقی با محور افقی $x = n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

تلاقی با محور عمودی : $y = 0$

مجانب عمودی : $x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

کتانژانت $f(x) = \cot x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی بجز $n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$

برد : کلیه اعداد حقیقی

دره تناوب : π

تلاقی با محور افقی : $x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

مجانب عمودی : $x = n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

سکانت $f(x) = \sec x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی بجز $\frac{\pi}{۲} + n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$

برد : $(-\infty, -۱] \cup [۱, \infty)$

دره تناوب : ۲π

تلاقی با محور عمودی : $y = ۱$

مجانب عمودی : $x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

کسکانت $f(x) = \csc x$

دامنه : کلیه اعداد حقیقی بجز $n\pi$، $n \in \mathbb{Z}$

برد : $(-\infty, -۱] \cup [۱, \infty)$

دره تناوب : ۲π

مجانب عمودی : $x = n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

Function	Domain	Range
y = arcsin(x)	-1 ≤ x ≤ 1	-π/2 ≤ y ≤ π/2
y = arccos(x)	-1 ≤ x ≤ 1	0 ≤ y ≤ π
y = arctan(x)	-∞ < x < ∞	-π/2 < y < π/2
y = arccsc(x)	x ≤ -1 or x ≥ 1	-π/2 ≤ y ≤ π/2, y ≠ 0
y = arcsec(x)	x ≤ -1 or x ≥ 1	0 ≤ y ≤ π, y ≠ π/2
y = arccot(x)	-∞ < x < ∞	0 < y < π

همانی های وارونه

$$\csc x = \frac{۱}{\sin x} \quad ، \quad \sec x = \frac{۱}{\cos x} \;, \quad \cot x = \frac{۱}{\tan x}$$

فرمول های جمع و تفریق

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{۱ \mp \tan x \tan y}$$

همانی های تانژانت و کتانژنت

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad ، \quad \cot x = \frac{\cos x}{\tan x}$$

همانی های فیثاغورثی

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

$$۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x \quad ، \quad ۱ + \cot^۲ x = \csc^۲ x$$

فرمول های زاویه مضاعف

$$\sin ۲x = ۲\sin x\cos x$$
$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$
$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x}$$

فرد یا زوج

$\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ $\csc(-x) = -\csc x$

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sec(-x) = \sec x$

$\tan(-x) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(-x) = -\cot x$

فرمول های نصف زاویه

$$\sin\frac{x}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \cos x}{۲}} \qquad \cos\frac{x}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ + \cos x}{۲}}$$
$$\tan\frac{x}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}} = \frac{۱ - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$$

فرمول های حاصل ضرب

$$\sin x\cos y = \frac{۱}{۲}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
$$\cos x\sin y = \frac{۱}{۲}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$
$$\sin x\sin y = \frac{۱}{۲}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{۱}{۲}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

توان های مثلثاتی

$$\sin^۲ u = \frac{۱ - \cos ۲u}{۲}, \cos^۲ u = \frac{۱ + \cos ۲u}{۲}, \tan u = \frac{۱ - \cos ۲u}{۱ + \cos ۲u}$$

فرمول ها و قواعد حسابان

فرمول ها و قواعد حد

فرمول های اساسی حد

۱) $\lim_{x\to a} c = c\,; \lim_{x\to a} x = a; \lim_{x\to a} cx = ca; \lim_{x\to 0} x^{۲} = 0; \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\,, a > 0$

۲) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$　　$f(x)$ یک تابع چند جمله ای یا تابع گویا

۳) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

۴) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x)$

۵) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

۶) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

۷) $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

۸) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

۹) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

۱۰) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ ، $n \in \mathbb{N}$

۱۱) $\lim_{x\to a} \frac{۱}{x^n} = \frac{۱}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$

۱۲) $\lim_{x\to a} x^{۱/n} = a^{۱/n}$

۱۳) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0; \lim_{x\to 0} \cos x = ۱$

۱۴) اگر $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ ، پس $g(x) > 0$ برای تمام x ها نزدیک به a

۱۵) اگر $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ ، پس $g(x) < 0$ برای تمام x ها نزدیک به a

مثال برای قضیه جانشینی ها

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{۱ - x^{۲}} = \lim_{y\to ۱} \sqrt{y} = ۱$$

حد سمت راست

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

حد سمت چپ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

اگر f در a پیوسته باشد و g در $f(a)$ پیوسته باشد ، پس

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\big(f(a)\big)$$

پیوسته از سمت راست

یک تابع f از سمت راست یک نقطه a پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

پیوسته از سمت راست

یک تابع f از سمت چپ یک نقطه a پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

خط مماس در یک نقطه

فرض کنید f یک تابع باشد و فرض کنید a در دامنه f باشد ، اگر

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وجود داشته باشد ، می گییم نمودار f **یک خط مماس در** $\boldsymbol{\big(a, f(a)\big)}$ دارد. در این صورت خط مماس بر نمودار f در $\big(a, f(a)\big)$ خطی است که از $\big(a, f(a)\big)$ می گذرد و شیب آن حد بالا است.

شیب خط مماس

اگر حد بالا وجود داشته باشد ، آنرا با نماد m_a نشان می دهیم ، پس

$$m_a = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

معادله خط مماس

معادله نقطه –شیب خط مماس بر نمودار f در $\big(a, f(a)\big)$ مطابق زیر است.

$$y - f(a) = m_a(x-a)$$

خط مماس عمودی

فرض می کنیم f در a پیوسته باشد ، اگر

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

باشد ، می گوییم نمودار f **یک خط مماس عمودی در** $\boldsymbol{\big(a, f(a)\big)}$ دارد. در این صورت خط عمودی $x = a$ **خط مماس عمودی نمودار** $\boldsymbol{f}$ **در** $\boldsymbol{a}$ است.

تعریف مجانب عمودی

اگر $\boldsymbol{\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty}$ **و یا اگر** $\boldsymbol{\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty}$ **پس می گوییم خط** $\boldsymbol{x = a}$ **یک مجانب عمودی برای** $\boldsymbol{f(x)}$ **است.**

سرعت

اگر $f(t)$ نشانگر مختصات یک شئی باشد که در طول یک خط در زمان t در حال حرکت است ، پس سرعت شئی در زمان t_0 و یا سرعت لحظه ای شئی در زمان t_0 مطابق زیر است. اگر حد زیر

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$ اگر این حد وجود باشد

هزینه متوسط یا هزینه میانگین

فرض می کنیم $C(x)$ نمایانگر هزینه تولید x واحد و $R(x)$ درامد حاصل از فروش x واحد تولید شده باشد ، پس میانگین هزینه هر واحد بین واحد a و b مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\frac{C(b) - C(a)}{b - a}$$

و در آمد متوسط هر واحد فروخته شده بین واحد a و واحد b متبق فرمول زیر بدست می آید.

$$\frac{R(b) - R(a)}{b - a}$$

هزینه نهایی در a

$$m_C(a) = \lim_{x\to a} \frac{C(x) - C(a)}{x - a}$$

در آمد نهایی در a

$$m_R = \lim_{x\to a} \frac{R(x) - R(a)}{x - a}$$

Squeeze Theorem قضیه ساندویچی

اگر حد توابع f و h را بدانیم ولی پیدا کردن حد g مشکل باشد ، و داشته باشیم

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad و \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

پس $\lim_{x\to a} g(x) = L$ است.

The Intermediate Theorem قضیه مقدار میانی

فرض کنید f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد ، و فرض کنید p هر عددی باشد بین $f(a)$ و $f(b)$ بطوری که $f(a) \le p \le f(b)$ و یا $f(b) \le p \le f(a)$ باشد. پس یک عدد مانند c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که $f(c) = p$ است.

Continuity پیوستگی

یک تابع f در یک نقطه a در دامنه اش پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

یک تابع f در نقطه a در دامنه اش نا پیوسته است ، اگر f در a پیوسته نباشد.

قضیه پیوستگی جمع ، ضرب و تقسیم توابع

اگر g و f در نقطه a پیوسته باشند ، و c هر عددی ، پس fg , cf ، $f+g$ در نقطه a پیوسته هستند و اگر $g(a) \neq 0$ باشد ، پس $\frac{f}{g}$ هم در نقطه a پیوسته است.

قضیه پیوستگی توابع مرکب

اگر f در نقطه a پیوسته باشد ، و g در نقطه $f(a)$ پیوستهه باشد ، پس

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\big(f(a)\big)$$

پس $g\circ f$ در نقطه a پیوسته است.

تعریف پیوستگی یک طرفه

یک تابع مانند f از سمت راست نقطه a در دامنه اش پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

یک تابع مانند f از سمت چپ نقطه a در دامنه اش پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

حد در بی نهایت

Basic Limit Evaluations at $\pm\infty$

$\frac{a}{\infty} = 0$ ، $\frac{a}{0} = \infty \,, a\times\infty = \infty \,, 0\times\infty = 0 \quad (a\neq 0\,, a<\infty)$

۱) $\lim_{x\to\infty} ax = a\lim_{x\to\infty} x = a\times\infty = \infty \quad (a<\infty)$

۲) $\lim_{x\to\infty} a = a$

۳) $\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{x^n} = \frac{۱}{\infty} = 0$

۴) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ مجانب افقی وجود ندارد

۵) $\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n, + \cdots + a_۱\right) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$ بیشترین توان

۶) $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^a}{nx^b} = 0 \quad (a<b)$

۷) $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^a}{nx^b} = \frac{m}{n} \quad (a=b)$

۸) $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^a}{nx^b} = \infty \quad (a>b)$ مجانب عمودی وجود ندارد

$(m,n,a,b\in\mathbb{R})$

۹) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

۱۰) $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} \ln(x) = -\infty$

۱۱) $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ مجانب عمودی در c

اگر تابع گویا باشد ، ابتدا کسر را به صورت ساده ترین شکل بنویسید ، سپس مخرج را مساوی صفر قرار دهید، معادله را حل کنید. $x=a$ مجانب عمودی است.

۱۲) $\lim_{x\to\infty} f(x) = d$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = d$ مجانب افقی در d

Limit of Trigonometric Functions حد توابع مثلثاتی

۱) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=۱ \qquad \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{\sin\theta}=۱$

۲) $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta=0$

۳) $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=۱ \qquad \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{۱}{\cos\theta}=۱$

۴) $\lim\limits_{\theta\to 0}\tan\theta=0 \qquad \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=۱$

۵) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta-۱}{\theta}=0$

۶) $\lim\limits_{\theta\to 0}\sec\theta=۱$

۷) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin a\theta}{\sin b\theta}=\dfrac{a}{b} \qquad \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan a\theta}{\tan b\theta}=\dfrac{a}{b}$

Continuity پیوستگی

تابع $f(x)$ در a پیوسته است اگر

۱) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

۲) اگر $f(a)$ وجود داشته باشد

۳) اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد

۴) اگر $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ باشد

تعریف e

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182818$$

اشکال مبهم یا نا معین یا نا مشخص Indeterminate Forms

$\dfrac{0}{0}$ ، $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $(-\infty,\infty)$ ، $(0\times\infty)$ ، ۱^{∞} ، 0^0 ، ∞^0

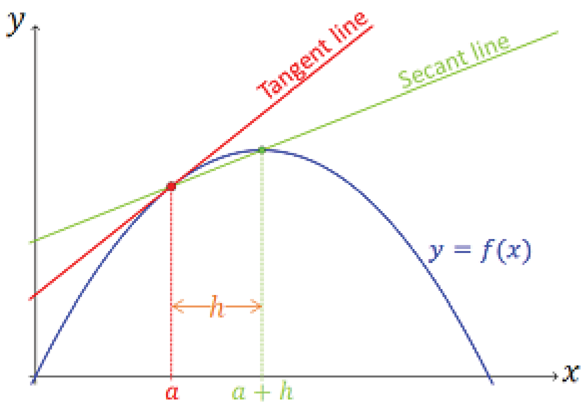
هنگامی که حد یک تابع گویا ، شکل مبهم دارد ، از صورت و مخرج فاکتور بگیرید و عوامل مشترک در صورت و مخرج حذف کنید تا کسر به صورت ساده ترین شکل ممکن در آید. اگر صورت را $f(x)$ فرض کنیم و مخرج را $g(x)$ و اگر داشته باشیم

$$\lim_{x\to a}f(x)=L=\lim_{x\to a}g(x)$$

باشد ، پس

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

شیب m



اگر $m > 0$ باشد ، خط از چپ به راست صعودی است.
اگر $m < 0$ باشد ، خط از چپ به راست نزولی است.
اگر $m = 0$ باشد ، خط افقی است.
اگر $m = \infty$ باشد ، خط عمودی است.
خط قاطع Secant Line
خط مماس Tangent Line

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر بجای a متغیر x بکار ببریم

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

فرمول ها و قواعد مشتق

تعریف مشتق

فرض می کنیم a در دامنه یک تابع مانند f باشد. اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وجود داشته باشد ، این حد را مشتق f در a می نامیم و می نویسیم

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق f نسبت به x

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

فرمول های اساسی مشتق

۱) $\frac{d}{dx}c=0$

۲) $\frac{d}{dx}x=۱$

۳) $\frac{d}{dx}cf(x)=cf'(x)$

۴) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=f'(x)\pm g'(x)$

۵) $\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-۱}\quad (r\in\mathbb{R})$

۶) $\frac{d}{dx}[f(x)*g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

۷) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^۲}$

۸) $\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)=f'\big(g(x)\big)*g'(x)$ قاعده زنجیره ای

۹) $\frac{d}{dx}[f(x)]^n=n[f(x)]^{n-۱}*f'(x)$

۱۰) $\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right]=e^{f(x)}*f'(x)$

۱۱) $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

۱۲) $\frac{d}{dx}a^x=\ln a*a^x\quad (a\neq e)$

۱۳) $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{۱}{x} \qquad (x > 0)$
۱۴) $\frac{d}{dx}log_a^x = \frac{۱}{x\ln a} \qquad (a > 0)$
۱۵) $\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
۱۶) $\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-۱}\frac{dy}{dx}$
۱۷) $(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$
۱۸) $(g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$

شتاب

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = v'(t_0)$$

بسیاری از توابع که در حسابان به آنها بر خورد می کنیم ، مشتق هستند.
در حقیقت تا به حال دیده ایم که

سرعت مشتق تابع مکان است $v(x) = f'(x)$
در آمد نهایی مشتق تابع در آمد است $m_R(x) = R'(x)$
هزینه نهایی مشتق تابع هزینه است $m_C(x) = C'(x)$

مشتق های توابع مثلثاتی

۱) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
۲) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
۳) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$
۴) $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$
۵) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x = \frac{\sin x}{\cos^۲ x}$
۶) $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^۲ x = \frac{-۱}{\sin^۲ x}$
۷) $\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x = \frac{\cot x - ۱}{\csc x}$

۸) $\frac{d}{dx}\sin(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{۱-\cos(x+y)}$

۹) $\frac{d}{dx}\cos(x+y)=\frac{-\sin(x+y)}{۱+\sin(x+y)}$

مشتق های توابع مثلثاتی معکوس

۱) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{-۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۲) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۳) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$

۴) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-۱}{|x|\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۵) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{۱}{|x|\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۶) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$

Hyperbolic Functions توابع هیپربالیک

۱) $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}$

۲) $\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$

۳) $\tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{\sinh x}{\cosh x}$

۴) $\operatorname{csch} x=\frac{۱}{\sinh x}$

۵) $\operatorname{sech} x=\frac{۱}{\cosh x}$

۶) $\coth x = \frac{۱}{\tanh x}$

Derivatives of Hyperbolic Functions مشتق های توابع هیپر بالیک

۱) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

۲) $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

۳) $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^{۲} x$

۴) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x\ \coth x$

۵) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\ \tanh x$

۶) $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^{۲} x$

Inverse Hyperbolic Functions توابع معکوس هیپر بالیک

۱) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۱}\right) \qquad (-\infty, \infty)$

۲) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۱}\right) \qquad (۱, \infty)$

۳) $\tanh^{-1} x = \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right) \qquad (-۱, ۱)$

۴) $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{۱}{x} + \frac{\sqrt{۱ + x^{۲}}}{|x|}\right) \qquad (-\infty 0) \cup (0, \infty)$

۵) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}{x}\right) \qquad (0, ۱]$

۶) $\coth^{-1} x = \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right) \qquad (-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$

Derivatives of Inverse Hyperbolic Functions مشتق های معکوس توابع هیپر بالیک

۱) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$

۲) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$

۳) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{۱}{۱ - x^۲}$

۴) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = \frac{-۱}{|x|\sqrt{۱ + x^۲}}$

۵) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-۱}{x\sqrt{۱ - x^۲}}$

L'Hopital 's Rule قانون لا پیتال

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همانی های هیپر بالیک

۱) $\cosh x + \sinh x = e^x$

۲) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

۳) $\sinh(-x) = -\sinh x$

۴) $\cosh(-x) = \cosh x$

۵) $\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$

۶) $\tanh^۲ x + \operatorname{sech}^۲ x = ۱$

۷) $\coth^۲ x - \operatorname{csch}^۲ x = ۱$

۸) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

۹) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

۱۰) $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{۱ + \tanh x \tanh y}$

۱۱) $\sinh^۲ x = \frac{-۱ + \cosh ۲x}{۲}$

۱۲) $\cosh^{۲} x = \dfrac{۱ + \cosh ۲x}{۲}$

۱۳) $\sinh ۲x = ۲ \sinh x \cosh x$

۱۴) $\cosh ۲x = \cosh^{۲} x + \sinh^{۲} x$

۱۵) $\dfrac{۱ + \tanh x}{۱ - \tanh x} = e^{۲x}$

۱۶) $(\sinh x + \cosh x)^{n} = \sinh nx + \cosh nx \qquad (n \nless\in \mathbb{R})$

فرمول ها و قواعد انتگرال

Basic Integral انتگرال های اساسی

۱) $\int cdx = cx + C$

۲) $\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} \quad (n \neq -۱)$

۳) $\int x^{-۱} dx = \int \frac{۱}{x} dx = \ln|x| + C$

۴) $\int e^x dx = e^x + C$

۵) $\int e^{kx} dx = \frac{۱}{k} e^{kx} + C \quad (k \neq 0)$

۶) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

۷) $\int ydx = xy - \int ydx$

۸) $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

۹) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

۱۰) $\int_a^b xdx = \frac{۱}{۲}(b^۲ - a^۲)$

۱۱) $\int_a^b xdx = \frac{۱}{۲}(b^۲ - a^۲)$

۱۲) $\int_a^b cdx = c(b-a)$

۱۳) $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (۶)$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها

Theorem 1.11 Mean Value Theorem for Integrals

فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. پس یک عدد مانند c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

قضیه ۱.۱۴ قضیه اساسی حسابان Theorem 1.14 Fundamental Theorem of Calculus

فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

الف - پس f یک ضد مشتق در $[a,b]$ دارد.

ب – اگر F یک ضد مشتق f در $[a,b]$ باشد ، پس

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

قضیه

فرض می کنیم f و g توابعی باشند که هم $g\circ f$ و هم f' در یک بازه مانند I پیوسته باشند.

اگر G یک انتگرال نا معین g در I باشد ، پس

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)dx = G\big(f(x)\big) + C$$

Exponential and Logarithmic Forms اشکال لگاریتمی و نمایی

۱) $\displaystyle\int xe^{ax}dx = \frac{۱}{a^۲}(ax-۱)e^{ax} + C$

۲) $\displaystyle\int x^n e^{ax}dx = \frac{۱}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-۱}e^{ax}dx$

۳) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(\mathrm{a}\sin bx - b\cos bx) + C$

۴) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(\mathrm{a}\cos bx + b\sin bx) + C$

۵) $\displaystyle\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲}\left[(n+۱)\ln x - ۱\right] + C$

۶) $\displaystyle\int \frac{۱}{x\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$

۷) $\displaystyle\int \frac{۱}{ax+b}dx = \frac{۱}{a}\ln|ax+b| + C \qquad (a\neq 0)$

۸) $\displaystyle\int \frac{x}{ax^۲ \pm b}dx = \frac{۱}{۲a}\ln\left|ax^۲ \pm b\right| + C \qquad (a\neq 0)$

۹) $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln(x) - x + C$

۱۰) $\displaystyle\int \frac{۱}{a^۲ - x^۲}\, dx = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

۱۱) $\int \frac{۱}{x^۲ - a^۲}\, dx = \frac{۱}{۲a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Trigonometric Forms اشکال مثلثاتی

۱) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

۲) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

۳) $\int \sec^۲ x\, dx = \tan x + C$

۴) $\int \csc^۲ x\, dx = -\cot x + C$

۵) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

۶) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

۷) $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C = -\ln|\cos x| + C$

۸) $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$

۹) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

۱۰) $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

۱۱) $\int \frac{۱}{x^۲ + ۱}\, dx = \tan^{-1} x + C$

۱۲) $\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}\, dx = \sin^{-1} x + C \quad \left(x^۲ < ۱\right)$

۱۳) $\int \frac{۱}{a^۲ + x^۲}\, dx = \frac{۱}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۱۴) $\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \left(x^۲ < a^۲\right)$

۱۵) $\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}}\, dx = \frac{۱}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \left(x^۲ > a^۲\right)$

۱۶) $\int \sin ax\, dx = \frac{-\cos ax}{a} + C$

۱۷) $\int cos^{۲} xdx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$

۱۸) $\int sin^{۲} xdx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$

۱۹) $\int sin^{n} x\, dx = -\frac{۱}{n} sin^{n-۱} x \cos x + \frac{n-۱}{n}\int sin^{n-۲} xdx$

۲۰) $\int cos^{n} xdx = \frac{۱}{n} cos^{n-۱} x \sin x + \frac{n-۱}{n}\int cos^{n-۲} xdx$

۲۱) $\int \sec^{۳} x\, dx = \frac{۱}{۲}\sec x \tan x + \frac{۱}{۲}\ln|\sec x + \tan x| + C$

قاعده ذوزنقه

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{۲n}\left[f(x_0) + ۲f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + ۲f(x_{n-۱}) + f(x_n)\right]$$

قاعده سیمپسون

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{۳n}\left[f(x_0) + ۴f(x_۱) + ۲f(x_۲) + ۴f(x_۳) + \cdots + ۲f(x_{n-۲}) + ۴f(x_{n-۱}) + f(x_n)\right]$$

Hyperbolic Forms اشکال هیپر بالیک

۱) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

۲) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

۳) $\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C$

۴) $\int \coth x\, dx = \ln|\sinh x| + C$

۵) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \tan^{-1}|\sinh x| + C$

۶) $\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh \frac{۱}{۲}x\right| + C$

۷) $\int \operatorname{sech}^{۲} x\, dx = \tanh x + C$

۸) $\int \operatorname{csch}^{۲} x\, dx = -\coth x + C$

۹) $\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C$

۱۰) $\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$

Integration by Substitution انتگرال گیری از طریق جانشینی

اگر داشته باشیم $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$

فرض می کنیم $g(x) = u$ باشد ، پس $du = g'(x)dx$ است.

مثال اگر داشته باشیم $\int e^{-x}\, dx$ فرض می کنیم $u = -x$ است ، پس $du = -dx$ است. لذا

$$\int e^{-x} dx = \int e^{u}(-1) du = -\int e^{u} du = -e^{u} + C = -e^{-x} + C$$

_انتگرال گیری جزء به جزء

فرض کنید F و G در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر باشند ، فرض کنید F' و G' در $[a,b]$ پیوسته باشند. پس

$$\int F(x)G'(x) = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx$$

و

$$\int_a^b F(x)G'(x) = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$$

کار برد های انتگرال

اگر مساحت برش عرضی یا مساحت سطح مقطع یک جسم را یعنی $A(x)$ و حدود انتگرال را بدانیم ، حجم آن جسم از طریق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)dx}$$

می توان نقش های محور های x و y را جا بجا کرد. و انتگرال را نسبت به y محاسبه نمود.

$$\boxed{V = \int_c^d A(y)dy}$$

روش دیسک Disk Method

هنگامی که نمودار یک تابع پیوسته و نا منفی در بازه $[a,b]$ حول محور x می چرخد ، یک ناحیه سه بعدی ایجاد می کند که دارای سطح مقطع مدور است .
و لذا حجم آن

$$V(x) = \int_a^b \pi\,(f(x))^۲\,dx$$

روش واشر The Washer Method

فرض کنید f و g دو تابع باشند ، بطوری که

$$0 \le g(x) \le f(x) \quad ، \quad a \le x \le b$$

باشد. پس ناحیه بین نمودار f و محور x در $[a,b]$ ، شامل ناحیه بین نمودار های f و g در $[a,b]$ است و همچنین شامل ناحیه بین نمودار g و محور x در $[a,b]$ است. لذا حجم ناحیه سه بعدی که از دوران تمام ناحیه حول محور x ایجاد می شود ، باید مساوی مجموع حجم های دو ناحیه ایجاد شده از دوران حول محور x باشد. یعنی

$$V = \int_a^b \pi\left[(f(x))^۲ - (g(x))^۲\right]dx$$

محاسبه حجم با روش غشای استوانه ای یا روش شل Shell Method

اگر نمودار حول محور x دوران کند روش دیسک Disk Method و اگر حول محور y دوران کند روش غشای استوانه ای Shell Method داریم

$$V = \int_a^b ۲\,\pi\,x\,f(x)\,dx$$

طول منحنی

فرض می کنیم f در $[a,b]$ یک مشتق پیوسته داشته باشد. پس **طول** نمودار f در بازه $[a,b]$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{۱ + [f'(t_k)]^۲}\,dx$$

طول یک منحنی که به صورت پارا متری داده شده است

فرض می کنیم یک منحنی C توسط فرمول های زیر پارا متری شده است.

$$x = f(t) \quad و \quad y = g(t) \qquad برای \quad a \le t \le b$$

و فرض می کنیم f و g در $[a,b]$ مشتق های پیوسته داشته باشند، پس طول منحنی C را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^۲ + [g'(t)]^۲}\,dt$$

محاسبه مساحت جانبی

فرض می کنیم f در $[a,b]$ نا منفی ، پیوسته و مشتق پذیر باشد. **مساحت جانبی** سطحی که از دوران نمودار f حول محور x ایجاد می شود ، مطابق زیر تعریف میشود.

$$S = \int_a^b ۲\,\pi\, f(x)\,\sqrt{۱ + [f'(x)]^۲}\quad dx$$

اگر منحنی که باید حول محور x دوران کند و ایجاد یک سطح شود ، پارا متری داده شود ، یعنی
$x = f(t)$ و $y = g(t)$ برای $a \leq t \leq b$ ، $g \neq 0$
پس فرمول قرینه زیر برای مساحت جانبی بدست می آید. یعنی

$$\boxed{S = \int_a^b ۲\,\pi g(t)\sqrt{[f'(t)]^۲ + [g'(t)]^۲}\ dt}$$

کار

فرض کنید یک شئی در اثر نیروی وارد بر آن یعنی f از نقطه a به نقطه b حرکت می کند.
f در $[a,b]$ یک تابع پیوسته است. پس کار انجام شده بوسیله نیروی وارد بر شئی مطابق زیر تعریف می شود.

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

قانون هوک

مقدار کار لازم برای کشیدن یک فنر از واحد a تا واحد b
طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$W = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b kx\,dx$$

گشتاور M_y را چنین تعریف می کنیم.
مجموعه جرم های نقطه ای **حول محور** y عبارت است از
جمع هر یک از جرم های نقطه ای حول محور y

$$M_y = m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots m_nx_n$$

همچنین می توان **گشتاور** M_x **حول محور** x را چنین تعریف کرد.

$$M_x = m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + \cdots + m_ny_n$$

نقطه $(\overline{x}, \overline{y})$ را **مرکز ثقل** **Center of Gravity** مجموعه جرم های نقطه ای داده شده می نامند.

$$\overline{x} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots + m_nx_n}{m} = \frac{M_y}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + \cdots + m_ny_n}{m} = \frac{M_x}{m}$$

فرض می کنیم f و g در $[a,b]$ پیوسته باشند ، و

$$g(x) \leq f(x)\ ،\ \ a \leq x \leq b$$

و فرض می کنیم R ناحیه بین نمودار های f و g در $[a,b]$ باشد. پس **گشتاور** R **حول محور** x مطابق زیر است.

$$M_x = \int_a^b \frac{۱}{۲}\left\{[f(x)]^۲ - [g(x)]^۲\right\} dx$$

و گشتاور R حول محور y مطابق زیر است.

$$M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

اگر R دارای مساحت مثبت A باشد ، پس **مرکز ثقل یا مرکز جرم** مطابق زیر تعریف می شود.

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} \quad ، \quad \overline{y} = \frac{M_x}{A}$$

فشار هیدرو استاتیک بر یک صفحه عمودی

فرض می کنیم یک صفحه عمودی بطور کامل یا قسمتی از آن در آب قرار دارد، و سطح آب $x = c$ است. فرض می کنیم آن قسمت از صفحه که در آب قرار دارد ، از a یا b روی محور x باشد.
فرض می کنیم $w(x)$ عرض صفحه برای $a \le x \le b$ باشد. و فرض می کنیم w در $[a, b]$ پیوسته باشد. پس **فشار هیدرو استاتیک** $\boldsymbol{F}$ بر صفحه توسط آب مطابق زیر است.

$$F = \int_a^b (۶۲ / ۵)(c - x)w(x)dx$$

اگر بجای آب مایع دیگر ی مثلا بنزین داشته باشیم ، پس باید ۵ / ۶۲ را با وزن یک فوت مکعب آن مایع عوض کنیم.

تبدیل مختصات دکارتی و قطبی به یک دیگر

Conversion Between Cartesian and Ploar Coordinates

هر نقطه ای روی صفحه ، هم مختصات دکارتی دارد و هم مختصات قطبی . فرض کنید یک نقطه P دارای مختصات قطبی (r, θ) است و دارای مختصات دکارتی (x, y) است. بر اساس تعریف سینوس و کسینوس نتیجه می گیریم که

$$x = r\cos\theta \quad و \quad y = r\sin\theta \qquad (۲)$$

است برای تمام مقادیر r و θ.

مساحت ناحیه ای که شامل تمام نقاط روی صفحه مختصات با مختصات قطبی (r, θ) و با شرایط زیر

$$0 \le r \le f(\theta) \quad و \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

باشد ، مطابق زیر است.

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \frac{۱}{۲}[f(\theta)]^۲ d\theta}$$

بنام خدا

واژه نامه ریاضی انگلیسی به فارسی

English to Persian Mathematics Dictionary

تألیف و ترجمه

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ ـ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ـ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

Abolish	محو کردن
About	در هر دو طرف - اطراف
Abscissa	طول
Absolute Value	قدر مطلق
Accumulated Value	مقدار جمع شده - مقدار ذخیره شده - مقدار افزوده شده
Accuracy	صحت - دقت
Add	جمع کردن - اضافه کردن
addend	عدد افزوده شده - عدد مضاعف
Additive Identity	عدد خنثی در جمع
Additive Inverse	قرینه - مخالف
Admit	قبول کردن - پذیرفتن
Algebraic Expression	عبارت جبری
Algebraically	به زبان جبری
Algorithm	الگوریتم -هر شیوه علمی برای حل مسائل
Align	تنظیم کردن یا شدن
Along	در امتداد یا در طول
Alternate	تناوب - یک درمیانی
Altitude	ارتفاع - فراز - بلندی
Analyze	تجزیه و تحلیل کردن
Angle Measure	اندازه زاویه
Antiderivative	ضد مشتق
Approach	نزدیک شدن
Approximate	تخمین زدن
Arbitrary	اختیاری
Arch	طاق
Architecture	معماری
Area	مساحت
Arithmetic Sequence	دنباله حسابی
Arrangement	ارایش - قرار دادن
Array	آرایه - آرایش منظم شماره ها در ردیف یا ستون است
Assert	تصریح کردن - تآیید کردن

Assign	تخصیص دادن
Assign	تعین کردن - اختصاص دادن
Assign	تعیین کردن تخصیص دادن
Associative Property	خاصیت شرکت پذیری
Astronomy	ستاره شناسی
Asymptote	خط مجانب - تانژانت منحنی در بینهایت
At Least	حد اقل
At Most	حد اکثر
Average	معدل - میانگین
Axes	محورها
Axis	محور
Bar Graph	نمودار میله ای
Base	قاعده
Base	پایه
Basic	پایه - اصلی - ساده
Basic	بنیادی
Behavior	عمل کردن - رفتار کردن
Between	ما بین
Binomial	دو جمله ای
Binomial Coefficient	ضریب دو جمله ای
Bisection Method	روش نصف کردن بازه
Boundary Line	خط مرزی
Bounded	کران دار
Bounded Above	از طرف بالا کران دار
Bounded Below	از طرف پائین کران دار
Braces	آکولاد ها { }
Brackets	کروشه ها [ ]
Break Even	بی سود و زیان شدن
Buoyant Force	نیروی شناور
Calculate	محاسبه - حساب کردن
Calculus	حسابان
Calculus	ریاضیات جامع - حسابان
Cancel	حذف کردن

Carbon Dating	تعیین قدمت اجسام کربن دار
Cartesian Coordinate System	محورهای مختصات
Center	مرکز
Center of Gravity	مرکز ثقل
Central Angle	زاویه مرکزی
Circuit	مدار
Circumference	محیط (دایره)
Circumscribe	محیط کردن
Closed Interval	بازه بسته
Coefficient	ضریب
Coincide	منطبق بودن
Coincide	منطبق بودن
Coincident	منطبق
Column	ستون
Combination	ترکیب
Combine	با هم پیوستن - توأم کردن - تلفیق کردن
Combine	ادغام کردن - تلفیق کردن - یکی کردن
Combine	تلفیق کردن
Combined	ترکیبی - مرکب
Comet	ستاره دنباله دار
Common	مشترک
Common	مشترک
Common Ratio	نسبت مشترک - خارج قسمت مشترک
Commutative Property	خاصیت جابجائی
Complement	متمم - مکمل
Complex Fraction	کسر مرکب
Complex Numbers	اعداد مرکب
Complex Rational Expression	عبارت گویای مرکب
Complicated	پیچیده - بغرنج
Component	مؤلفه - بخش - جز - سلزنده
Component	مؤلفه
Composed with	ترکیب شده با
Composite Function	تابع مرکب - تابع ترکیبی

Compound	مرکب - بهره پول و بهره متعلق به بهره آن را حساب کردن
Compound Interest	ربح مرکب
Compression	فشردگی - تراکم
Compute	محاسبه کردن - حساب کردن
Concept	مفهوم
Conic Sections	مقاطع مخروطی
Conjugate	مزدوج
Connection	رابطه - پیوند
Consecutive	متوالی - پشت سر هم
Consistent	بی تنلقض - سازگار
Constant	عدد ثابت - مقدار ثابت
Constant Term	جمله ثابت
Construct	ساختن
Contain	شامل بودن - دارا بودن
Continuity	پیوستگی
Continuous	پیوسته
Contradiction	تناقض
Convergent	همگرا
Coordinate	مختصات
Coordinate Plane	صفحه مختصات
Correspondence	مطابقت
Corresponding	هم نظیر - متناظر
Corresponding	متناظر
Cross Product	طرفین وسطین کردن
Cross Section	برش عرضی - مقطع
Cross Section Area	مساحت سطح مقطع
Cube	مکعب
Cube	مکعب
Cube Root	ریشه سوم
Cubed	توان سوم
Curve	منحنی
Cycloid	چرخ نما - سیکلوئید

Cylinder	استوانه
Dashed Line	خط چین
Deal with	پرداختن به
Decay	فرو کاست (مواد رادیو اکتیو) - کاهش
Decimal Places	ارقام اعشاری
Decompose	تجزیه کردن
Decrease	کم شدن - نزول کردن
Deduce	استنتاج کردن - نتیجه گرفتن
Define	تعریف کردن - معنی کردن
Define	مشخص کردن
Definite	مشخص - معین - داری حدود
Degree	درجه
Denominator	مخرج
Dependent	وابسته
Dependent Variable	متغیر وابسته
Derivative	مشتق
Derive	استنتاج کردن - اشتقاق یافتن - استنباط کردن
Descending Order	به ترتیب نزولی
Design	طراحی
Designate	مشخص کردن
Determinant	مبین - دیترمینانت
Determine	تعیین کردن - حکم دادن
Develop	بسط دادن
Diagonal	قطر - مورب - اریب
Diagram	نمودار
Diameter	قطر
Die	طاس تخته نرد
Differentiability	دیفرانسیلی
Differentiable	مشتق پذیر - قابل مشتق گیری
Discontinuous	نا پیوسته - گسسته
Discriminant	مشخص کننده - مجزا کننده
Discriminate	مشخص کردن - مجزا کردن
Disjoint	مجزا

Disk	دیسک صفحه گرد
Distance	فاصله - مسافت
Distinct	متفاوت - مجزا - متمایز
Distribute	پخش کردن - توزیع کردن
Distributive Property	خاصیت توزیعی
Divergent	واگرا
Diverse	متنوع - گوناگون
Divide	تقسیم کردن
Divide and Conquer	جدائی انداز و تسخیر کن
Dividend	مقسوم - بخشی
Divisor	مقسوم علیه - بخشیاب
Domain	دامنه
Double	مضاعف
Double Angle Formula	فرمول زاویه مضاعف
Downward	به طرف پائین
Due	سر رسید - موعد پرداخت
Elastic Force	نیروی کشسائی
Element	عضو - عنصر
Eliminate	حذف کردن
Elimination	حذف
Ellipse	بیضی
Empty Set	مجموعه تهی
End Behavior	وضع انتهائی
Endpoint	نقطه انتهائی
Engage	پرداختن به
Equality	تساوی
Equally Likely Outcomes	پیش آمد های هم شانس - پیش آمد های با شانس مساوی
Equation	معادله - تساوی
Equator	خط استوا
Equilateral Triangle	مثلث متساوی الاضلاع
Equilibrium	تعادل
Equivalent	معادل - هم ارز - متشابه
Equivalent Equations	معادله های هم ارز - معادله های معادل

Establish	ثابت کردن - محقق کردن
Evaluate	ارزیابی کردن - مقدار عددی پیدا کردن
Even	زوج
Event	اتفاق
Exclude	در نظر نگرفتن
Exclusive	صرف - تنها - محض
Exert	اعمال کردن
Exhaustion	جزء به جزء
Expand	پسط دادن
Expand	بسط دادن - گستردن
Explicitly	بطور صریح بیان کردن
Exponent	توان
Exponential Equation	معادله مجهول القوه
Exponential Expression	عبارت توان دار - توان
Exponential Function	تابع مجهول القوه
Exponential Probability	احتمال مجهول القوه
Extraneous	نا مربوط
Factor	عامل
Factor	عامل - فاکتور - عامل مشترک - فاکتور گرفتن
Factorization	فاکور گیری
Fair	سالم - بی عیب
False	غلط
Figure	شکل - تصویر
Finance	مالی - امور مالی
Finite Sum	جمع تعداد محدودی
Fit	جور کردن
Flatten	پهن شدن - صاف شدن
Foci	کانون ها
Focus	کانون
Formula	فرمول
Fraction	کسر
Frustum of a cone	مخروط سر و ته بریده - مخروط ناقص
Function	تابع

Fundamental	اساسی
Future Value	ارزش آینده
Gear	چرخ دنده
General Term	جمله عمومی
Geometric	هندسی
Geometric Sequence	دنباله هندسی
Globe	کره زمین
Golden Ratio	نسبت طلائی - عدد طلائی
Graph	نمودار - نمایش هندسی
Greater Than	بزرگ تر از
Greatest Lower Bound	بزرگ ترین کران پائین
Group	گروه - گروه بندی کردن - دسته بندی کردن
Growth	رشد - رویش
Half-life	نیمه عمر (یک ماده رادیو اکتیو)
Half-Planes	نیم صفحه ها
Head	سر
Height	ارتفاع
Hemisphere	نیم کره
Hexagon	شش ضلعی
Horizontal	افقی
Horizontal Shift	جابجائی افقی
Hydrostatic Force	فشار هیدرو استاتیک
Hyperbola	هذ لولی
Identical	کاملا همانند
Identity	این همانی - خنثی
Image	تصویر - انعکاس - باز تاب
Imaginary Unit	واحد تصوری - واحد موهومی
Implicitly	بطور ضمنی بیان کردن
Improper	نا جور - غیر حقیقی - ناسره
In Term of	بر حسب
Include	به حساب آوردن
Included	گنجانده شده - شامل شده - به حساب آمده
Inclusive	شامل - به حساب امده

Inconsistent	متناقص
Increase	زیاد شدن - صعود کردن
Independent Variable	متغیر مستقل
Index	نما - شاخص
Individual	شخصی
Individual Retirement Account	حساب باز نشستگی شخصی
Inequality	نا معادله - نا مساوی
Infinite	بی نهایت
Initial Side	ضلع اولیه
Input	ورودی
Inscribe	محاط کردن
Instantaneous Velocity	سرعت لحظه ای
Integers	اعداد صحیح
Integrand	عبارت داخل انگرال - انتگراند
Integration by Parts	انتگرال گیری جزء به جزء
Intensity	شدت - میزان - مقدار
Intercept	قطع کردن - میان بر - تقاطع
Interest	بهره - سود
Interest Compounded Monthly	بهره مرکب ماهانه
Interest Compounded Quarterly	بهره مرکب سه ماهه
Interest Compounded Semiannually	بهره مرکب شش ماهه
Interest Compounded Yearly	بهره مرکب سالانه
Intermediate Value	مقدار میانی
Interpret	تفسیر کردن - توضیح دادن
Interpretation	تفسیر
Intersection	اشتراک
Intersection of Sets	اشتراک مجموعه ها
Intervals	بازه ها - میانین - فاصله
Introduction	مقدمه
Inverse Function	تابع معکوس
Invest	سرمایه گذاری کردن
Irrational Numbers	اعداد گنگ

Is Equal to	مساوی است با
Is not Equal to	مساوی نیست با
Isosceles Triangle	مثلث متساوی الساقین
Joint	مشترک
Launch	پرتاب کردن
LCD	کوچک ترین مخرج مشترک
Least	کوچک ترین
Least Upper Bound	کوچک ترین کران بالا
Left-Hand Limit	حد سمت چپ
Lemma	اصل موضوع - گزاره ای که درست فرض میشود
Length	طول
Less Than	کوچک تر از
Like Radicals	رادیکال های متشابه
Like Terms	جمله های متشابه
Likelihood	امکان - احتمال
Limit	حد
Line Segment	پاره خط
Linear	خطی
Linear Equations	معادله های خطی
Linear Equations in one Variable	معادله های خطی یک مجهولی
Linear Programming	برنامه ریزی خطی
Local Maxima	ما گزیمم محلی
Local Minima	مینیمم محلی
Locate	مشخص کردن - تعیین کردن - نشان دادن
Location	مکان هندسی
Logarithmic Function	تابع لگاریتمی
Long Period	پروسه طولانی - دوره طولانی
Lower Bound	پائین کران
Lower Sum	مجموع پائین
Lowest Term	ساده ترین شکل (کسر)
Major	اصلی
Marginal Cost	هزینه نهائی
Marginal Revenue	درامد نهائی

Matrices	متریس ها جمع متریکس
Matrix	متریکس
Method of Exhaustion	روش جزء به جزء
Midpoint	نقطه میانی
Minor	فرعی
Model	انگاره - مدل
Model	الگو - نمونه - انگاره
Moment	گشتاور
Monomial	یک جمله ای
Multiple	مضرب
Multiple	ضریب
Multiplicative Identity	عدد خنثی در ضرب
Multiplicative Inverse	عدد وارونه در ضرب
Multiply	ضرب کردن
Mutually Exclusive Events	اتفاق های ناسازگار
Natural Numbers	اعداد طبیعی
Negation	نفی - انکار
Negative	منفی
Negative Square Root	ریشه دوم منفی
No Less Than	نه کمتر از
No More Than	نه بیشتر از
None Empty	نا تهی
Nonlinear	غیر خطی
Nonzero	غیر از صفر - بجز صفر
Norm	حد متوسط - میانگین
Normal Line	خط قائم بر منحنی (در نقطه مماس)
Notation	نماد
nth Root	ریشه انم
Number Line	محور اعداد
Oblique	مورب
Observation	مشاهده علمی
Odd	فرد (مانند عدد فرد)
One-Sided	یک طرفه

One-to-one Function	تابع یک به یک
Open Interval	بازه باز
Operations	انجام عملیات (جمع - تفریق - ضرب - تقسیم)
Operations	عملیات
Opposite	قرینه - مخالف
Orbit	چرخیدن - دور زدن
Orbit	مدار - دور زدن - در مدار چرخیدن
Order	ترتیب
Ordered Pair	دو گانه مرتب
Ordered Triple	سه تائی مرتب
Ordinate	عرض
Origin	مبدأ
Outcome	نتیجه - پیامد - بازده
Output	خروجی
Overlap	تداخل کردن - ری هم افتادن
Pair	زوج - جفت
Pane	شیشه - جام
Parabola	سهمی
Parallel	موازی
Parametric	پارامتری
Parametrize	پارامتری کردن
Parentheses	پرانتز ها ( )
Partition	پارش - تقسیم بندی
Path	مسیر
Pattern	الگو - نمونه - طرح
Payment Period	دوره پرداخت
Pendulum	پاندول
Perfect Square	مربع کامل
Perimeter	پیرامون - محیط
Perimeter	محیط
Period	دوره - دوره تناوب
Periodic	تناوبی
Permutation	جایگشت

Phenomena	پدیده ها
Phenomena	پدیده ها
Phenomenon	پدیده
Phenomenon	پدیده
Phenomenon	پدیده
Piecewise-defined function	تابع چند ضابطه ای
Plane	صفحه
Planet	سیاره
Plot	نشان دادن ی تعیین کردن
Point of Intersection	نقطه تقاطع
Point of Tangency	نقطه مماس
Polar Coordinate	دستگاه مختصات قطبی
Polygonal	چند گوشه
Polynomial	چند جمله ای
Portion	قسمت
Positive	مثبت
Positive Square Root	ریشه دوم مثبت
Power	توان در توان
Precise	دقیق
Prime Polynomial	چند جمله ای اول (غیر قابل فاکتور گیری)
Principal	سرمایه
Principal Square Root	ریشه دوم مثبت
Probability	احتمال
Probability Model	مدل احتمال
Problem	مسآله
Procedure	روش - اصلوب
Process	عمل - جریان - مرحله
Projectile	پرتاب کردنی - پرتابی
Proper	حقیقی - سره - محض
Properties	خواص
Property	خاصیت - خصوصیت
Property	خصوصیت - خاصیت
Punch	بین دو انگشت قرار دادن - نیشگون گرفتن

Quadrant	ربع صفحه - ربع دایره
Quadratic Equation	معادله درجه دو
Quadrilateral	چهار ضلعی
Quantity	کمیت
Quotient	خارج قسمت
Quotient	خارج قسمت - بهره
Radical	راد یکال
Radicand	عدد زیر راد یکال
Radius	شعاع (دایره)
Random	تصادفی
Range	برد
Rate	نرخ - میزان - حد متوسط - سرعت متوسط
Rate	نسبت - میزان - نرخ - مقدار
Ratio	نسبت
Ratio	نسبت - خارج قسمت
Rational Exponent	توان کسری - توان گویا
Rational Numbers	اعداد گویا
Rationalize	گویا کردن
Rationalizing the Denominator	گویا کردن مخرج کسر
Real Numbers	اعداد حقیقی
Reasonable	منطقی
Reciprocal	وارونه - معکوس
Rectangle	مستطیل
Rectangular Coordinate System	محورهای مختصات
Recursive	باز گشتی
Reduce	ساده کردن
Reference	ارجاع - رجوع - مراجعه
Reflection	انعکاس
Reflector	منعکس کننده
Region	بخش - منطقه
Regression	انعکاس - رگراسیون
Regular Pattern	الگوی منظم
Related	مربوطه

Relation	رابطه
Remainder	باقیمانده
Remarkable	قابل توجه
Represent	نشان دادن - مجسم کردن - بجای چیزی بکار رفتن
Resistance	مقاومت
Resistor	مقاوم
Restricted	محدود شده - کنترل شده
Reverse	عکس - معکوس - وارونه - ضد
Review	دوره کردن - مرور کردن
Right-Hand Limit	حد سمت راست
Rise	بالا رفتن - صعود کردن
Roll Die	طاس ریختن
Root	ریشه
Root	ریشه
Roster Form	فهرست وار (برای مشخص کردن مجموعه)
Rotate	بر محور خود چرخیدن
Row	ردیف
Rule	قاعده
Sample Space	فضای نمونه
Sandwich	ساندویچ
Satellite	ماهواره
Satisfy	شرائط یا الزامات چیزی را برآوردن
Scatter	پراکنده
Scatter Diagram	نمودار پراکندگی
Scientific Notation	عدد نویسی علمی - نماد علمی
Secant	خط قاطع - سکانت
Second Degree Equation	معادله درجه دوم
Section	بخش - قسمت
Sector	قطاع دایره
Sector	قطاع
Sequence	دنباله
Set	مجموعه
Set Builder Notation	توصیف مجموعه (برای مشخص کردن مجموعه)

Sharp Corner	نقطه مماس
Shift	تغیر مکان دادن - جا بجا شدن
Side	ضلع
Similar	متشابه
Simple Interest	ربح ساده
Simplify	ساده کردن
Situation	موقعیت
Slant	اریب - کج - یک وری
Slope	شیب - شتاب
Slope-Intercept Form	شکل شیب-تقاطع - شکل شیب-برخوردگاه
Smooth Curve	منحنی یک دست - منحنی صاف
Solid	جامد - سه بعدی
Solid	جسم جامد - جسم سه بعدی
Solid Line	خط کامل
Solution	حل - راه حل - جواب
Solution Region	منطقه جواب
Solve	حل کردن
Space	فضا
Spandrel	سه گوش قوسی
Special	مخصوص
Special Products	اتحاد های مهم - حاصل ضرب های مخصوص
Specified	مشخص - معین - معلوم
Specify	مشخص کردن
Sphere	کره
Square	مربع
Square	مربع
Square Root	ریشه دوم - جذر
Square Root Function	تابع جذری - تابع ریشه دوم
Squeeze	فشردن - چلاندن
Statement	بیان - اظهار - بیان کردن
Statistics	آمار
Steepness	سرازیری - سراشیبی
Step Function	تابع پلکانی

Straight Angle	زاویه نیم صفحه که مساوی صد و هشتاد درجه است
Stretch	کش آمدن - کشیده شدن
Sub Set	زیر مجموعه
Subinterval	بازه فرعی
Submerge	غوطه ور
Subscripted	زیر نویس دار
Substitution	جانشینی - جای گزین کردن
Subtract	تفریق کردن - کسر کردن
Successive	پیا پی - بعدی - پشت سر هم - متوالی
Sum	جمع - افزانه
Summand	جمع وند
Support	نگهداشتن
Surface Area	سطح جانبی – رویه جانبی
Survey	بررسی - مطالعه
Swing	نوسان - حرکت پاندولی - حرکت تاب
Symbol	نماد
Symmetric	هم اندازه - متقارن - قرینه
Symmetry	تقارن
System	دستگاه
Tail	دم
Tangent Line	خط مماس
Technique	روش - تکنیک
Tendency	گرایش
Term	اصطلاح - کلمه - جمله
Terminal Side	ضلع ثانوی
Test Point	نقطه آزمایش
The Same Number	یک عدد - همان عدد
Theorem	قضیه
Three Dimensional	سه بعدی
Tilt	کج شدن - کج کردن - کجی - سرازیری
Time	زمان - وقت - مدت
Time Value of Money	ارزش زمانی پول
Torus	چنبره - چیزی شبیه لاستیک باد شده

Toss	شیر یا خط کردن
Toss	بالا انداختن مانند شیر یا خط کردن
Toss a Coin	شیر یا خط کردن
Trace	اثر - ترسیم کردن
Transformation	تبدیل - تغیر
Trapezoid	ذوزنقه
Traverse	در امتداد چیزی حرکت کردن
Trigonometric Identities	همانی های مثلثاتی
Trinomial	سه جمله ای
True	صحیح
Turning Point	نقطه عطف
Two Dimensional	دو بعدی
Unbounded	نا محدود - لا یتناهی
Undefined	نا معین
Uniformly	بطور یکسان
Uninhibited Decay	فرو کاست نا محدود
Uninhibited Growth	رشد نا محدود
Union	اجتماع
Union of Sets	اجتماع مجموعه ها
Unique	منحصربه فرد یکتا - یگانه
Uniqueness	منحصر به فرد بودن
Unit	واحد
Universal	جامع
Upper Bound	بالا کران
Upper Sum	مجموع بالا
Upward	به طرف بالا
Utility	وسیله - ابزار
Value	مقدار - کمیت -قدر
Variable	متغیر
Variation	وردش - تغییر - واریانس
Vault	گنبد
Velocity	سرعت
Verify	درستی چیزی را ثابت کردن

Vertex	منحنی یک دست - منحنی صاف
Vertical	عمودی - قائم
Vertical	عمودی
Vertical Shift	جابجائی عمودی
Voltage	ولتاژ
Volume	حجم
Washer	واشر- حلقه فلزی - پوسته
Weight	وزن
Whole	تمام
Whole Numbers	اعداد حسابی
Width	عرض
With Respect to	نسبت به
x-intercept	محل بر خورد نمودار با محور اکس
y-intercept	محل برخوردنمودار با محور وای
Zero Factor Property	خاصیت عامل صفر
Zero of a Polynomial	صفر یک چند جمله ای