بنام خدا

حساب دیفرانسیل آرمان

Arman Calculus

تألیف و ترجمه

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ ـ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ـ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

بنام خدا

حساب دیفرانسیل آرمان

حد و مشتق

فصل اول

حد و پیوستگی

توجه –فرض بر این است که استفاده کنندگان محترم این کتاب ، با مقدمات جبر و مثلثات آشنایی دارند. اگر هم فراموش شده ، قبلا به آن ماخذ ها مراجعه کنند. در این کتاب اگر اعداد با حروف لاتین نوشته شوند ، نماد اعشاری یک نقطه است مانند 3.5 که منظور سه و نیم است. اگر اعداد با حروف فارسی نوشته شوند ، نماد اعشاری خط مورب / است. مانند ۳/ ۵ که منظور سه و نیم است.صفر فارسی هم با نماد ० نشان می دهیم.

۱.۱ – تعریف حد

مبحث حد **Limit** یک موضوع اساسی برای **ریاضیات جامع Calculus** است. لذا بحث خود را از اینجا شروع می کنیم.

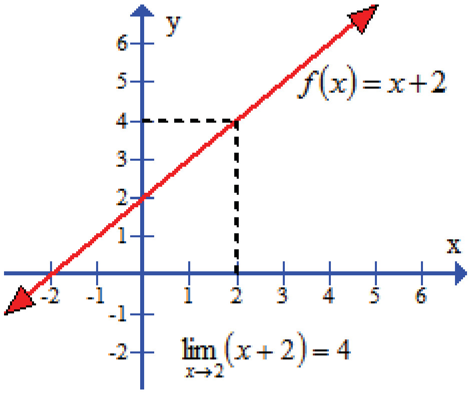
تعریف غیر علمی حد An Intuitive Idea of Limit

وقتی که می گوییم L حد تابع $f(x)$ است هنگامی که x به a نزدیک می شود، منظور ما این است که $f(x)$ به L نزدیک می شود ، زمانی که x به a نزدیک می شود. این ایده را با نماد زیر بیان می کنیم.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

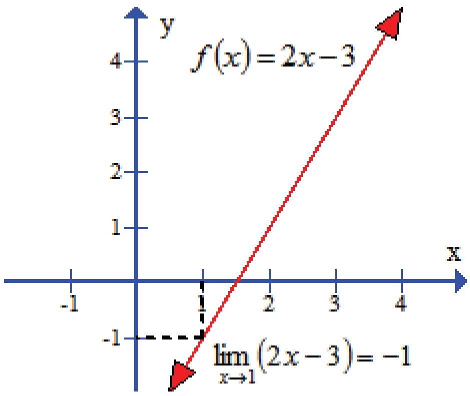
کمیت بعضی از حد ها را می شود به اسانی حدس زد. مثلا ، اگر x به ۲ نزدیک شود ، پس $x+۲$ به ۴ نزدیک می شود. پس می نویسیم

$$\lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴ \qquad (۱)$$



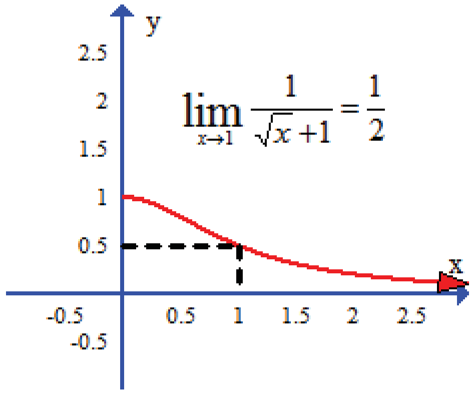
همچنین هنگامی که x به ۱ نزدیک می شود ، $۲x$ به ۲ نزدیک می شود ، و لذا $۲x-۳$ به -۱ نزدیک می شود.پس

$$\lim_{x\to ۱}(۲x-۳)=-۱ \qquad (۲)$$



به همین ترتیب هنگامی که x به ۱ نزدیک می شود ، $\sqrt{x}$ به ۱ نزدیک می شود ، و لذا $\sqrt{x}+۱$ به ۲ نزدیک می شود. یعنی $\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می شود.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲} \qquad (۳)$$



در مثال های بالا توانستیم حد یک تابع را به اسانی پید اکنیم . اما پیدا کردن بعضی حد ها احتیاج به دقت و کار بیشتری دارند. به مثال زیر توجه کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}$$

چون اگر x به ۲ نزدیک شود ، دو عبارت $x^{۲}-۴$ و $x-۲$ به صفر نزدیک میشوند و در نتیجه کسر به $\frac{0}{0}$ تبدیل می شود و می دانیم که این کسر تعریف نشدنی است. پس از طریق دیگری باید عمل کنیم. توجه کنید

$$\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲ \quad \text{برای} \quad x\neq ۲$$

اما از (۱) در بالا اشاره شد ، میدانیم که

$$\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

در نتیجه منطقی بنظر می رسد که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴ \qquad (۴)$$

حد هایی مثل (۴) می تواند از نظر هندسی ما رابه ایده **خط مماس** **Tangent Line** سوق دهد.

بخاطر بیاورید که شیب خط مستقیم که از نقاط $(۲,۴)$ و (x,y) می گذرد ،

$$\frac{y-۴}{x-۲}$$

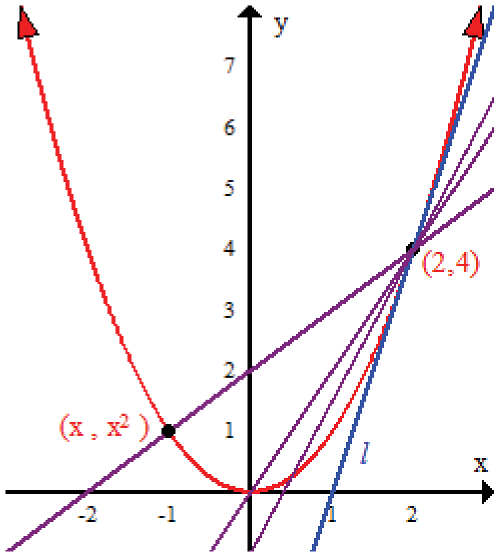
است.

اگر $f(x)=x^{۲}$ باشد ، پس شیب خط مستقیم از نقاط $(۲,۴)$ و $(x,x^{۲})$ روی نمودار f

$$\frac{x^{۲}-۴}{x-۲} \qquad (۵)$$

است.

در شکل زیر ملاحظه می کنید که هنگامی که x به ۲ نزدیک می شود ، خط ها به خط l نزدک تر می شوند. خط l خط مماس با نمودار f است در نقطه $(۲,۴)$



شیب خط l هم حد عبارت شماره (۵) است یعنی

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲} \qquad (۶)$$

خط آبی رنگ ، خط مماس بر f در نقطه $(۲,۴)$ است.

حد های شبیه شماره (۶) درمورد سرعت اجسام هم پیش می آید. در مورد سرعت و خط مماس در بخش های آینده مفصل تر صحبت خواهیم کرد.

برای پیدا کردن حد عبارت زیر هم احتیاج به عملیات جبری داریم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}$$

ساده می کنیم.

$$\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\frac{\sqrt{x}-۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}\quad \text{برای } x\geq ۰, x\neq ۱$$

از شماره (۳) داریم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}\qquad (۷)$$

نگاه دقیق تری به حد ها A Closer Look at Limits

تا کنون در مورد حد هایی صحبت کرده ایم که دست یافتنی بودند. حالا بیایید عبارت زیر را امتحان کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$$

بنا به تعریف سینوس متوجه می شویم که هنگامی که x به صفر نزدیک می شود ، $sinx$ هم به صفر نزدیک می شود. پس به نظر می رسد که حد $\frac{sinx}{x}$ می شود $\frac{0}{0}$ و می دانیم که این کسر **تعریف نشدنی Undefined** است. پس اگر حد وجود داشته باشد ، باید روش دیگری را برای پیدا کردن آن انتخاب کنیم. چون راه ساده ای که ما را در این مورد کمک کند ، وجود ندارد ، پس با کمک ماشین حساب مقادیر $\frac{sinx}{x}$ برای چند مقادیر x نزدیک به صفر پیدا می کنیم.

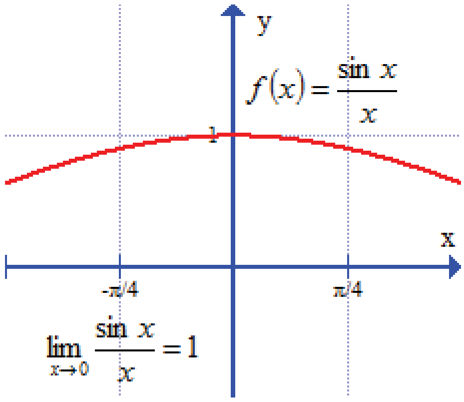
x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳۰}$	$\frac{\pi}{۱۸۰}$	$\frac{\pi}{۹۰۰۰}$
$\frac{sinx}{x}$	۰/۹۰۰۳۱۶	۰/۹۹۸۱۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸

ملاحظه می کنید که هر چه که x به صفر نزدیک تر می شود ، $\frac{sinx}{x}$ به ۱ نزدیک می شود. پس از جدول بالا نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=۱ \qquad (۸)$$

و چون می دانیم که $sin(-x)=-sinx$ پس

$$\frac{sin(-x)}{-x}=\frac{sinx}{x} \quad \text{برای} \quad x\neq ۰$$



در بخش های بعد در مورد فرمول (۸) صحبت خواهیم کرد و نشان میدهیم که تصویر بالا تصویر تقریبا صحیحی از f است.

در ذیل تعریف جامع حد را بیان می کنیم.

تعریف دقیق حد Precise Definition of Limit

تعریف اپسیلن – دلتا Epsilon-Delta Definition of Limit

فرض کنیم $f(x)$ یک تابع تعریف شده در هر نقطه یک بازه بازکه شامل a است ، احتمالا بجز خود a, باشد پس یک عدد مانند L **حد $f(x)$ است هنگامی که x به a نزدیک می شود**

(یا **حد f در a** است)اگر

اگر برای هر عددی مانند $\varepsilon>۰$ یک عدد مانند $\delta>۰$ وجود داشته باشد ، بطوری که هرگاه

$$۰<|x-a|<\delta$$

باشد ، پس

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

است.

اگر L حد $f(x)$ باشد هنگامی که x به a نزدیک می شود ، پس می نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

اگر چنین عددی مانند L را بتوانیم پیدا کنیم ، می گوییم **حد f در نقطه a وجود دارد** ، و یا f در نقطه a یک حد دارد و یا $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد

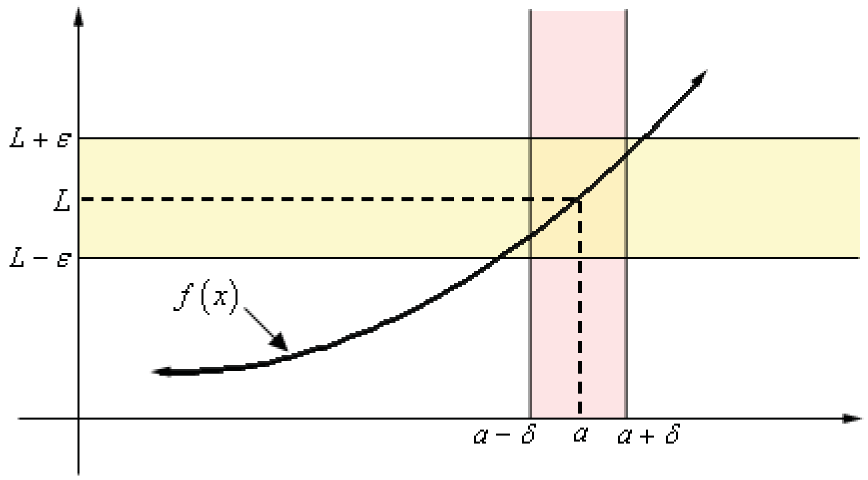
گر چه برای پیدا کردن حد های ۱، ۲، ۳، ۴, ۷ که در بالا ذکر شد نمی توان از تعریف اپسیلن – دلتا استفاده کرد ، اما می توان این تعریف را برای اثبات این که حد های ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ که در بالا پیدا کردیم ، صحیح هستند.

نماد δ خوانده می شود "دلتا "

نماد ε خوانده می شود "اپسیلن "

معنی این تعریف چیست؟

به نمودار تابع زیر نگاه کنید. فرض می کنیم حد وجود دارد.



تعریف بالا به ما می گوید برای هر عددی مانند $\varepsilon > 0$ که انتخاب کنیم ، می توانیم به نمودار برویم و دو خط افقی در $L - \varepsilon$ و در $L + \varepsilon$ رسم کنیم. همان طور که در نمودار بالا ملاحظه می کنید. در

این صورت یک عدد مانند $\delta >0$ وجود دارد ، باید آنرا پیدا کنیم ، که به ما اجازه می دهد دو خط عمودی در $a-\delta$ و $a+\delta$ رسم کنیم.

حال اگر هر عددی مانند x در قسمت نارنجی، یعنی بین $a-\delta$ و $a+\delta$, انتخاب کنیم ، این x به a نزدیک تر است تا به $a-\delta$ و یا $a+\delta$ و یا به گفته دیگر

$$|x-a|<\delta$$

حالا اگر نقطه ای را که این x انتخابی ما روی نمودار f میدهد ، مشخص کنیم ، پس این نقطه روی نمودار، در محل تلاقی قسمت نارنجی و زرد **قرار خواهد داشت.** یعنی این کمیّت $f(x)$ به L نزدیک تر است تا به $L+\varepsilon$ یا $L-\varepsilon$ یا به عبارت دیگر

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

پس اگر هر کمیتی از x در قسمت نارنجی انتخاب کنیم ، نمودار آن کمیت ها در قسمت زرد قرار خواهد داشت.

باید توجه داشت که بی نهایت دلتا وجود دارد که می توانیم انتخاب کنیم. اگر به نمودار توجه کنید ، ملاحظه می کنید که دلتای بزرگ تری می توانیم انتخاب کنیم.

همچنین ، باید توجه داشت که تابع در بازه ای اطراف $x=a$ تعریف شده باشد. اما مهم نیست که تابع در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد. مهم نیست که در نقطه $x=a$ چه می‌گذرد ، مهم اطراف آن نقطه است.

مثال ۱ - با استفاده از تعریف دقیق حد ، ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

پاسخ

در این مثال هم L و هم a هر دو صفر هستند. پس فرض می کنیم $\varepsilon >0$ هر عددی باشد. نگران این نباشید که این اپسیلن چقدر است. اپسیلن یک عدد **اختیاری Arbitrary** است. حالا بر اساس تعریف حد ، اگر این حد صحیح باشد ، باید یک عدد دیگر مانند $\delta >0$ پیدا کنیم بطوری که اگر

$$0<|x-0|<\delta$$

پس

$$\left|x^2-0\right|<\varepsilon$$

ساده می کنیم ، اگر

$$۰< |x| < \delta$$

پس

$$\left|x^۲\right| < \varepsilon$$

معمولا برای پیدا کردن دلتا ، از نا معادله ای که شامل اپسیلن است شروع می کنیم و ساده می کنیم تا به دلتای مورد نظر برسیم. پس

$$|x|^۲ < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

شکل ساده شده بالا می تواند شبیه نا معادله زیر باشد.

$$۰< |x| < \delta$$

پس اگر $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ انتخاب کنیم ، نتیجه ای را که می خواهیم بدست آورده ایم. حالا لازم است نشان دهیم که آیا دلتای انتخابی ما صحیح است.

$$\delta = \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|x^۲\right| = |x|^۲ < \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^۲ = \varepsilon$$

پس اگر

$$۰< |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

باشد ، خواهیم داشت

$$\left|x^۲\right| < \varepsilon$$

مثال ۲ ــ با استفاده از تعریف اپسیلن ـ دلتا ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۲} ۵x - ۴ = ۶$$

پاسخ

فرض می کنیم $۰< \varepsilon$ یک عدد اختیاری باشد ، باید یک عدد مانند $۰< \delta$ پیدا کنیم ، بطوری که اگر

$$\left|(۵x-۴)-۶\right| < \varepsilon$$

باشد ، پس

$$۰< \left|x-۲\right| < \delta$$

باشد.

$$\left|(۵x-۴)-۶\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\ ۵x-۴-۶\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|۵x-۱۰\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$
$$۵\left|x-۲\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|x-۲\right| < \frac{\varepsilon}{۵}$$

پس $\delta = \frac{\varepsilon}{۵}$ را انتخاب می کنیم. حالا نشان می دهیم که انتخاب ما برای مقدار دلتا صحیح است. اگر

$$۰< \left|x-۲\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{۵}$$

باشد ، پس

$$\left|(۵x-۴)-۶\right| = \left|۵x-۴-۶\right| = \left|۵x-۱۰\right| = ۵\left|x-۲\right| < ۵\left(\frac{\varepsilon}{۵}\right) = \varepsilon$$

مثال ۳ ــ با استفاده از تعریف حد نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۱}(۲x-۳) = -۱$$

پاسخ

باید نشان دهیم که برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد ، بطوری که اگر

$$۰< \left|x-۱\right| < \delta$$

باشد ، پس

$$\left|(۲x-۳)-(-۱)\right| < \varepsilon$$

است.

$$\left|(۲x-۳)-(-۱)\right| = \left|۲x-۳+۱\right| = \left|۲x-۲\right| = ۲(x-۱) < \varepsilon$$

پس

$$x-۱ < \frac{\varepsilon}{۲}$$

لذا

$$\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$$

انتخاب می کنیم. حالا نشان می دهیم انتخاب ما صحیح است.

اگر $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ باشد ، پس

$$\left|(۲x-۳)-(-۱)\right| = \left|۲x-۳+۱\right| = \left|۲x-۲\right| = ۲(x-۱) < ۲\frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

قضیه منحصر به فرد بودن حد ها Uniqueness of Limits Theorem

اگر حد یک تابع مانند f در a وجود داشته باشد ، این حد منحصر به فرد است. به عبارت دیگر اگر M و L هر دو حد های f در a باشند ، پس $L = M$ است.

اثبات

قبل از اثبات قضیه بالا یک **اصل موضوع** یا **Lemma** را ثابت می کنیم.

اصل موضوع Lemma

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ برای هر $\varepsilon >$ ۰ یک دلتای مشترک مانند $\delta >$ ۰ وجود دارد ، بطوری که اگر $۰ < |x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x)-L <|\varepsilon \quad \text{و} \quad |g(x)-M| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر می توانیم برای هر دو تابع یک دلتا انتخاب کنیم.

اثبات اصل موضوع – برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta_1 > 0$ وجود دارد ، بطوری که اگر

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

باشد ، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ است.

و یک $\delta_2 > 0$ وجود دارد ، بطوری که اگر

$$0 < |x - a| < \delta_2$$

باشد ، پس $|g(x) - M| < \varepsilon$ است.

حال فرض می کنیم δ مینیمم δ_1 و δ_2 باشد ، پس $\delta > 0$ است. از طرف دیگر ، اگر

$0 < |x - 1| < \delta$ باشد، پس مسلم است که هم $0 < |x - a| < \delta_1$ و هم $0 < |x - a| < \delta_2$ است. بنا بر این

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |g(x) - M| < \varepsilon$$

حالا بر می گردیم به قضیه منحصر به فرد بودن حد.

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ و $f = g$ در اصل موضوع بالا باشد. آن اصل موضوع می گوید که یک دلتای مشترک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x - a| < \delta$ باشد ، پس داریم

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |g(x) - M| < \varepsilon$$

اگر یک x را چنان انتخاب کنیم که $0 < |x - a| < \delta$ پس نتیجه می گیریم که

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$2\varepsilon$$

در نتیجه برای هر $\varepsilon > 0$ فاصله بین L و M کمتر از 2ε است. یعنی $L = M$ است.

تمرینات ۱.۱

با حدس و گمان حد های زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲} ۵$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱} (x+۴)$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \left(۱-\frac{x^۲}{۲}\right)$

۴) $\lim\limits_{x\to -۶} \frac{|x|}{x}$

۵) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{x^۲-۴}{x+۲}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ اگر $f(x)=\begin{cases} ۳ & \text{برای} \quad x\neq ۰ \\ -۲ & \text{برای} \quad x=۰ \end{cases}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{x^۲}$

۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \tan x$

با استفاده از تعریف دقیق حد ، درستی حد های زیر را نشان دهید.

۹) $\lim\limits_{x\to -۱} ۳x=-۳$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۱} (۲x+۱)=۳$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۳} (۲x+۱)=۷$

۱۲) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۳x+۲}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

۱۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x^{۲}+۱}=۰$

۱۴ – فرض کنید $\lim_{x\to ۵} f(x)=۴$ نشان دهید که $\lim_{x\to ۵} f(x)\neq ۲$

۱۵ ـ نشان دهید که عبارت های $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a}|f(x)-L|=۰$ برابر است.
(یعنی یکی و هم ارز هستند)

۱۶ ـ نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}\right)$ وجود ندارد.

پاسخ تمرینات ۱.۱

با حدس و گمان حد های زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۲} ۵ = ۵$

۲) $\lim_{x\to -۱}(x+۴) = ۳$

۳) $\lim_{x\to ۰}\left(۱-\frac{x^۲}{۲}\right) = ۱$

۴) $\lim_{x\to -۶}\frac{|x|}{x} = -۱$

۵) $\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x+۲} = \lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲} = \lim_{x\to -۲}(x-۲) = -۲$ برای $x \neq -۲$

۶) $\lim_{x\to ۰} f(x)$ اگر $f(x) = \begin{cases} ۳ & \text{برای } x \neq ۰ \\ -۲ & \text{برای } x = ۰ \end{cases}$

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۳$$

۷) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}$

حد وجود ندارد.

۸) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

میدانیم که $\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$ و $\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰$ لذا حد وجود ندارد.

با استفاده از تعریف دقیق حد ، درستی حد های زیر را نشان دهید.

۹) $\lim_{x\to -۱} ۳x = -۳$

پاسخ – باید نشان دهیم برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد بطوری که اگر $۰< |x-(-۱)| < \delta$ پس $|۳x-(-۳)| < \varepsilon$ است. برای پیدا کردن این دلتا ، عملیات جبری زیر را انجام می دهم

$$|۳x-(-۳)| = |۳x+۳| = ۳|x+۱| < \varepsilon$$

لذا $\delta = \frac{\varepsilon}{۳}$ را انتخاب می کنیم. حال نشان می دهیم که انتخاب این دلتا صحیح است.

اگر $۰< |x+۱| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت.

$$|۳x+۳| = ۳|x+۱| < ۳\delta = \varepsilon$$

۱۰) $\lim_{x\to ۱}(۲x+۱) = ۳$

پاسخ – باید نشان دهیم برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد بطوری که اگر $۰< |x-۱| < \delta$ پس $|(۲x+۱)-۳| < \varepsilon$ است. برای پیدا کردن این دلتا ، عملیات جبری زیر را انجام می دهم

$$|(۲x+۱)-۳| = |۲x-۲| = ۲|x-۱| < \varepsilon$$

لذا $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ را انتخاب می کنیم. حال نشان می دهیم که انتخاب این دلتا صحیح است.

اگر $۰< |x-۱| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت.

$$|(۲x+۱)-۳| = |۲x-۲| = ۲|x-۱| < ۲\delta = \varepsilon$$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۳}\left(۲x+۱\right)=۷$

پاسخ – باید نشان دهیم برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد بطوری که اگر $۰<|x-۳|<\delta$ پس $\left|\left(۲x+۱\right)-۷\right|<\varepsilon$ است. برای پیدا کردن این دلتا ، عملیات جبری زیر را انجام می دهم

$$\left|\left(۲x+۱\right)-۷\right|=\left|۲x-۶\right|=۲\left|x-۳\right|<\varepsilon$$

لذا $\delta=\frac{\varepsilon}{۲}$ را انتخاب می کنیم. حال نشان می دهیم که انتخاب این دلتا صحیح است.

اگر $۰<\left|x-۳\right|<\delta$ باشد ، خواهیم داشت.

$$\left|\left(۲x+۱\right)-۷\right|=\left|۲x-۶\right|=۲\left|x-۳\right|<۲\delta=\varepsilon$$

۱۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۳x+۲}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

پاسخ – باید نشان دهیم برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد بطوری که اگر $۰<|x-۱|<\delta$ پس $\left|\frac{۳x+۲}{۱۰}-\frac{۱}{۲}\right|<\varepsilon$ است. برای پیدا کردن این دلتا ، عملیات جبری زیر را انجام می دهم

$$\left|\frac{۳x+۲}{۱۰}-\frac{۱}{۲}\right|=\left|\frac{۳}{۱۰}x-\frac{۳}{۱۰}\right|=\frac{۳}{۱۰}\left|x-۱\right|<\varepsilon$$

لذا $\delta=\frac{۱۰}{۳}\varepsilon$ را انتخاب می کنیم. حال نشان می دهیم که انتخاب این دلتا صحیح است.

اگر $۰<\left|x-۱\right|<\delta$ باشد ، خواهیم داشت.

$$\left|\frac{۳x+۲}{۱۰}-\frac{۱}{۲}\right|=\left|\frac{۳}{۱۰}x-\frac{۳}{۱۰}\right|=\frac{۳}{۱۰}\left|x-۱\right|<\frac{۳}{۱۰}\delta=\varepsilon$$

۱۳) $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{x^{۲}+۱} = ۰$

پاسخ – باید نشان دهیم برای هر عددی مانند $\varepsilon > ۰$ یک عدد مانند $\delta > ۰$ وجود دارد بطوری که اگر $۰ < |x - ۰| < \delta$ پس $\left|\frac{x}{x^{۲}+۱} - ۰\right| < \varepsilon$ است. برای پیدا کردن این دلتا ، عملیات جبری زیر را انجام می دهم

$$\left|\frac{x}{x^{۲}+۱} - ۰\right| = \left|\frac{x}{x^{۲}+۱}\right| < \varepsilon$$

لذا $\delta = \varepsilon$ را انتخاب می کنیم. حال نشان می دهیم که انتخاب این دلتا صحیح است.

اگر $۰ < |x| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت.

$$\left|\frac{x}{x^{۲}+۱} - ۰\right| = \left|\frac{x}{x^{۲}+۱}\right| \le |x| < \varepsilon$$

۱۴ – فرض کنید $\lim_{x\to ۵} f(x) = ۴$ نشان دهید که $\lim_{x\to ۵} f(x) \ne ۲$

پاسخ

فرض می کنیم $\varepsilon = ۱$ و $\delta > ۰$ بطوری که $۰ < |x - ۵| < \delta$ پس $|f(x) - ۴| < ۱$

ازطرف دیگربرای $۰ < |x - ۵| < \delta$ خواهیم داشت

$$|f(x) - ۲| = \left|۲ - \left(۴ - f(x)\right)\right| \ge ۲ - |۴ - f(x)| > ۲ - ۱ = ۱$$

لذا هر بازه باز که شامل ۵ باشد و همچنین شامل یک کمیّت x که برای آن

$$|f(x) - ۲| \ge ۱ = \varepsilon$$

پس $\lim_{x\to ۵} f(x) \ne ۲$ خواهد بود.

۱۵ ـ نشان دهید که عبارت های $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a}|f(x) - L| = ۰$ برابر است.

(یعنی یکی و هم ارز هستند)

پاسخ

عبارت $\lim_{x\to a}|f(x)-L|=0$ یعنی برای هر عددی مانند $\varepsilon>0$ یک عدد مانند $\delta>0$ وجود دارد ، بطوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ باشد ، پس $\big||f(x)-L|-0\big|<\varepsilon$ یا به عبارت دیگر ، اگر $0<|x-a|<\delta$ باشد پس $|f(x)-L|<\varepsilon$ که این خود به معنی

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

است.

۱۶ - نشان دهید که $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ وجود ندارد.

پاسخ

برای هر L اگر $0<x<\frac{1}{|L|+1}$ باشد ، پس $\frac{1}{x}>|L|+1$ است. بطوری که

$$\left|\frac{1}{x}-L\right|\geq |L|+1-L\geq 1$$

است. پس هر بازه ای در اطراف صفر شامل کمیّت هایی از x است که برای آن $\left|\frac{1}{x}-L\right|\geq 1$ است. لذا $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\neq L$ بنا بر این نتیجه می گیریم که $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ وجود ندارد.

۱.۲ ـمثال های حد ها Examples of Limits

مثالهایی که در این بخش ملاحظه می کنید ، در حسابان بسیار مهم هستند، اما پیدا کردن حد از طریق استفاده از تعریف حد ، گاهی بسیار سخت و پیچیده است. در بخش های بعدی راههای دیگری را ارائه می دهیم.

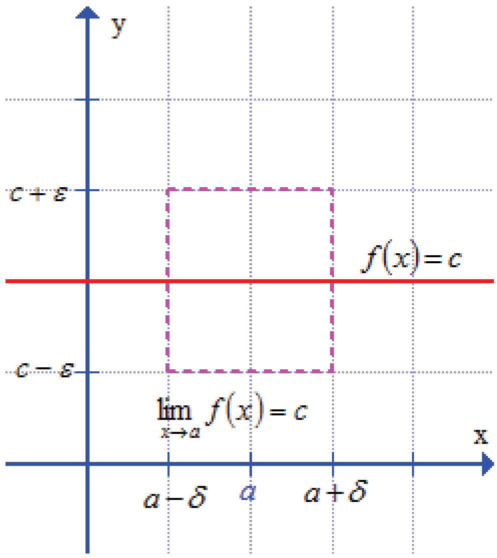
مثال ۱ ـ فرض کنید c یک عدد ثابت است و $f(x) = c$ برای کلیه مقادیر $x \neq a$ نشان دهید $\lim_{x\to a} f(x) = c$ است.

پاسخ

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ پس برای هر عددی مانند $\delta > 0$ اگر $0 < |x - a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

لذا در این مورد برای دلتا هر عدد مثبتی را می توان انتخاب کرد.



از مثال ۱ نتیجه می گیریم که برای هر عددی مانند a و c

$$\boxed{\lim_{x\to a} c = c}$$

چند مثال

$$\lim_{x\to ۳} ۱ = ۱ \qquad \lim_{x\to\sqrt{۲}} \frac{\pi}{۱۷} = \frac{\pi}{۱۷} \qquad \lim_{x\to -۲} (-\pi) = -\pi$$

چون حد یک تابع مانند f در a به مقدار f در a بستگی ندارد ، پس اگر f یک تابع دو مرحله ای مانند زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{اگر} \quad x = 0 \end{cases}$$

پس $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود دارد و مقدار آن هم ۱ است.

مثال ۲ - نشان دهید که $\lim_{x\to a} x = a$

حل

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ باشد. پس باید یک عدد مانند $\delta > 0$ پیدا کنیم بطوری که اگر $0 < |x-a| < \delta$ باشد ،پس $0 < |x-a| < \varepsilon$ است.

اینجا می توانیم دلتا مساوی اپسیلن انتخاب کنیم. یا هر عدد مثبت کوچک تر ، زیرا اگر $0 < |x-a| < \varepsilon$ باشد ، پس $|x-a| < \varepsilon$ خواهد بود. پس

$$\boxed{\lim_{x\to a} x = a}$$

از مثال ۲ ملاحظه می کنید که

$$\lim_{x\to ۴\pi} x = ۴\pi \qquad \lim_{x\to -\sqrt{۲}} x = -\sqrt{۲}$$

مثال ۳ - نشان دهید که برای هر عددی مانند c داریم $\lim_{x\to a} cx = ca$

حل - اگر $c = 0$ باشد ، پس طبق مثال ۱ خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a} cx = \lim_{x\to a} 0 = 0 = 0 * a = c * a$$

اگر $c \neq 0$ پس برای هر $\mathcal{E} > 0$ باید یک $\delta > 0$ پیدا کنیم ، به طوری که اگر

$0 < |x-a| < \delta$ باشد، پس $|cx - ca| < \varepsilon$ است.

چون $|cx-ca| = |c||x-a|$ پس اگر

$0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ باشد، خواهیم داشت

$$|cx-ca| = |c||x-a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

لذا $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$ شرط لازم را بر آورده می کند.در نتیجه

$$\boxed{\lim_{x\to a} cx = ca}$$

برای مثال

$$\lim_{x\to -۶} ۵x = ۵(-۶) = -۳۰ \qquad \lim_{x\to -۳}(-۷x) = (-۷)(-۳) = ۲۱$$

مثال ۴ – نشان دهید که $\lim_{x\to 0} x^{۲} = 0$

حل – فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ باشد ، باید یک $\delta > 0$ پیدا کنیم به طوری که اگر

$0 < |x-0| < \delta$ باشد، پس $\left|x^{۲} - 0\right| < \varepsilon$ باشد. و یا به عبارت دیگر اگر

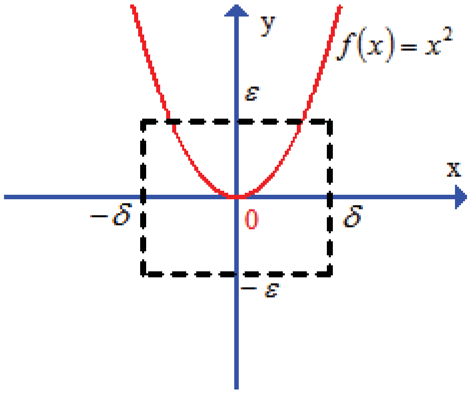
$0 < |x| < \delta$ باشد، پس $\left|x^{۲}\right| < \varepsilon$ خواهد بود.

کافی است که $\delta = \varepsilon^{\frac{۱}{۲}}$ انتخاب کنیم. زیرا

اگر $0 < |x| < \varepsilon^{\frac{۱}{۲}}$ باشد ، پس خواهیم داشت

$$\left|x^{۲}\right| = |x|^{۲} < \left(\varepsilon^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۲} = \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^{۲}=0}$$



مثال ۵ ــ نشان دهید برای هرعدد مثبت a ، $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

پاسخ - فرض می کنیم $\varepsilon>$ ۰ باشد. باید یک $\delta>$ ۰ پیدا کنیم ، به طوری که اگر

$$۰< |x-a| < \delta$$

باشد ، پس $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\,\right| < \varepsilon$ است.

باید توجه داشت که δ انقدر کوچک باشد که اگر $۰< |x-a| < \delta$ یا به عبارت د یگر

$$a-\delta < x < a+\delta$$

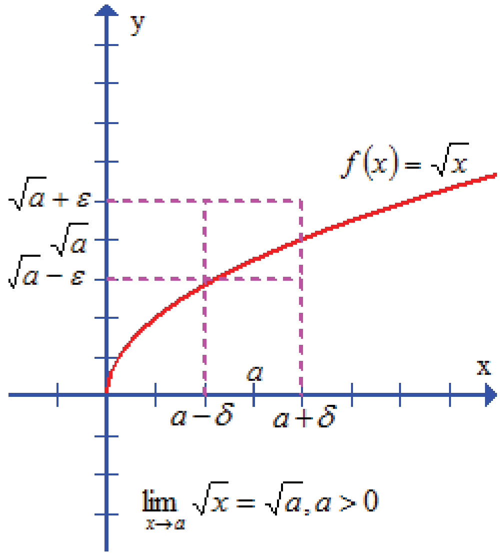
باشد ، $\sqrt{x}$ تعریف شدنی باشد. به این معنی که $x \geq ۰$ باید باشد. در نتیجه باید دلتا را چنان انتخاب کنیم که $۰\leq a-\delta$ یا $\delta \leq ۰$

از طرف دیگر برای $x \geq ۰$ ، داریم

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \left|\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leq |x-a|\frac{۱}{\sqrt{a}}$$

حالا آماده هستیم که دلتا را انتخاب کنیم. برای این کار بین a و $\varepsilon\sqrt{a}$ آن که کوچک تر است برای دلتا انتخاب می کنیم. پس اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| \le |x-a|\frac{۱}{\sqrt{a}} < \sqrt{a}\,\varepsilon\ \frac{۱}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

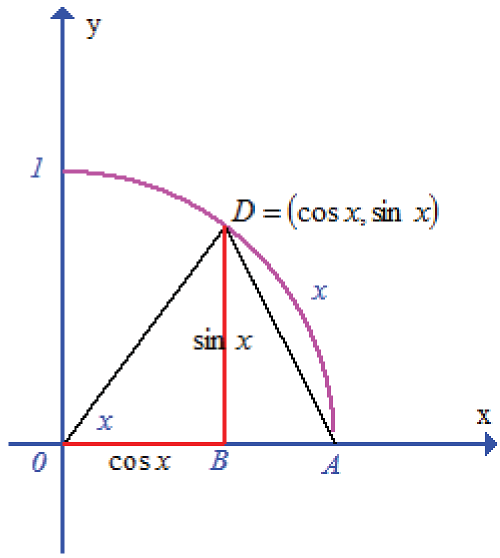


برای مثال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۶}}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{۶}\sqrt{۶}$$

مثال ۶ – نشان دهید که $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ و $\lim_{x\to 0}\cos x = ۱$

پاسخ – شکل زیر نمودار ربع یک دائره با شعاع واحد است. همراه با ره خط های ضمیمه



با توجه به شکل بالا متوجه می شوید که

$$۰\leq \sin x \ \leq |DA| \leq \quad \text{برای} \quad ۰\leq x < \frac{\pi}{۲}$$

بطوری که

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{برای} \quad ۰\leq x < \frac{\pi}{۲}$$

چون $\sin(-x) = -\sin x$ است، و لذا $|\sin(-x)| = |\sin x|$ پس نتیجه می گیریم که

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۲} < x \leq ۰$$

و در نتیجه

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \qquad (۱)$$

حال فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و فرض کنید دلتا یک عدد مثبت باشد کمتر از هم ε و هم $\frac{\pi}{۲}$ لذا از عبارت شماره (۱) بالا نتیجه می شود که اگر

$$۰< |x - ۰| < \delta$$

باشد ، پس $|\sin x - ۰| \leq |x| < \delta < \varepsilon$ است. و لذا نتیجه می گیریم

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0}$$

برای این که نشان دهیم $\lim_{x\to 0} \cos x = ۱$ با توجه به شکل بالا متوجه می شویم که

$$|\cos x - ۱| = |AB| \leq |AD| \leq x \quad \text{برای} \quad ۰\leq x < \frac{\pi}{۲}$$

چون $\cos(-x) = \cos x$ پس نتیجه می گیریم که

$$|\cos x - ۱| \leq |x| \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \qquad (۲)$$

حالا فرض می کنیم $\varepsilon >\circ$ و دلتا هر عدد مثبت کمتر از هم ε و هم $\frac{\pi}{۲}$ باشد ، از عبارت شماره (۲) بالا نتیجه می گیریم که اگر $\circ< |x - \circ| < \delta$ باشد ، پس $\left|\cos x - ۱\right| \le |x| < \varepsilon$ است. و لذا نتیجه می گیریم که

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \cos x = ۱}$$

عدم وجود یک حد Negation of the Existence of a Limit

مثال ۷ – تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{برای} \quad x < 0 \\ 1 & \text{برای} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

نشان دهید که $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

پاسخ – فرض می کنیم L هر عددی باشد. نشان می دهیم که عبارت **" L حد f در نقطه 0 است "** صحیح نیست.

برای این کار فرض می کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ باشد ، نشان می دهیم که برای هر $\delta >\circ$ خواهیم داشت

$$|f(x) - L| \ge \frac{۱}{۲} = \varepsilon \quad \text{و} \quad \circ< |x - \circ| < \delta$$

فرض می کنیم دلتا هر عدد مثبتی باشد ،

اگر $L \le \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس فرض می کنیم $x = \frac{\delta}{۲}$ است و می دانیم که در این صورت $f(x) = ۱$ به طوری که

$$|f(x) - L| = \left|۱ - L\right| = ۱ - L \ge ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \varepsilon$$

به شکل (a) در زیر توجه کنید.

اگر $L > \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس فرض می کنیم $x = -\frac{\delta}{۲}$ باشد ، در این صورت $f(x) =\circ$ است ، به طوری که

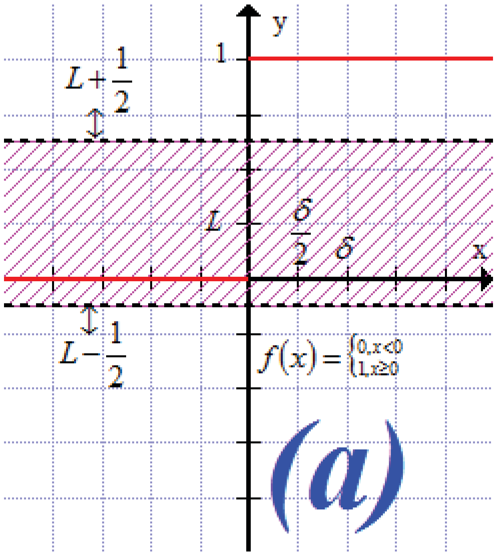
$$|f(x) - L| = |۰ - L| = L > \frac{۱}{۲} = \varepsilon$$

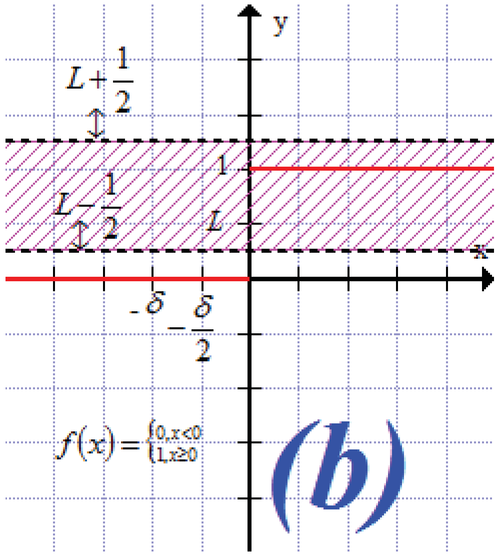
به شکل (b) در زیر توجه کنید.

ملاحظه می کنید که در هر دو حالت نشان داده ایم که برای هر دلتا بزرگ تر از صفر ، یک x پیدا می شود که روابط زیر را بر قرار می کند.

$$۰ < |x - ۰| < \delta \quad و \quad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

لذا برای f در نقطه صفر ، حد وجود ندارد .





تمرینات ۱.۲

با استفاده از مثال های این بخش ، حد های ایر را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x\to -۵} ۰$

۲) $\lim_{x\to ۴} \pi$

۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} ۳x$

۴) $\lim_{x\to ۶} (-x)$

۵) $\lim_{x\to \frac{۱}{۹}} \sqrt{x}$

۶ – اگر $f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{برای} \quad x \neq ۳ \\ ۰ & \text{برای} \quad x = ۳ \end{cases}$ باشد ، مطلوب است $\lim_{x\to ۳} f(x)$

۷ – مطلوب است $\lim_{x\to ۰} \sin ۲x$

۸ – اگر $f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{برای} \quad x \leq ۰ \\ x+۱ & \text{برای} \quad x > ۰ \end{cases}$ باشد ، نشان دهید که $\lim_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد.

۹ – ثابت کنید $\lim_{x\to a}|x| = |a|$

۱۰

با استفاده از نا مساوی $\sqrt{x} - \sqrt{a} \le \sqrt{x-a}$ برای $x \ge a$ نشان دهید که

$\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ برای هر $a > 0$

پاسخ تمرینات ۱.۲

با استفاده از مثال های این بخش ، حد های ایر را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x\to -۵} ۰ = ۰$ مثال 1

۲) $\lim_{x\to ۴} \pi = \pi$ مثال 1

۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} ۳x = ۳ * \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$ مثال 3

۴) $\lim_{x\to ۶} (-x) = -۶$ مثال 3

۵) $\lim_{x\to \frac{۱}{۹}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۳}$ مثال 5

۶ – اگر $f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{برای} \quad x \neq ۳ \\ ۰ & \text{برای} \quad x = ۳ \end{cases}$ باشد ، مطلوب است $\lim_{x\to ۳} f(x)$

پاسخ - چون حد f در نقطه ۳ به $f(۳)$ بستگی ندارد ، پس طبق مثال یک خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱$$

۷ – مطلوب است $\lim_{x\to ۰} \sin ۲x$

پاسخ – برای هر عددی مانند $\varepsilon >۰$ فرض می کنیم $\delta < \frac{\varepsilon}{۲}$ و $\delta < \frac{\pi}{۴}$ باشد ، اگر داشته باشیم

$$۰< |x| < \delta$$

پس طبق مثال ۶ که گفتیم

$$|\sin x| \le |x| \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \qquad (۱)$$

خواهیم داشت

$$\left|\sin ۲x\right| \le \left|۲x\right| < ۲\delta < ۲\left(\frac{\varepsilon}{۲}\right) = \varepsilon$$

پس

$$\lim_{x\to ۰} \sin ۲x = ۰$$

۸ – اگر $f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{برای} \quad x \le ۰ \\ x+۱ & \text{برای} \quad x > ۰ \end{cases}$ باشد ، نشان دهید که $\lim_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد.

پاسخ - راه حل مثال ۷ را بکار می بریم.

فرض می کنیم L هر عددی باشد. همچنین فرض می کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ و دلتا هر عدد مثبتی باشد. نشان می دهیم که یک x وجود دارد به طوری که اگر $۰< |x - ۰| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت

$$|f(x) - L| \ge \frac{۱}{۲} = \varepsilon$$

از یک طرف اگر $L \le \frac{۱}{۲}$ باشد ، $x = \frac{\delta}{۲}$ می گیریم به طوری که

$$۰< \frac{\delta}{۲} = |x - ۰| < \delta$$

پس طبق فرض خودمان

$$|f(x)-L|=\left|\frac{\delta}{۲}+۱-L\right|=\frac{\delta}{۲}+۱-L\geq\frac{\delta}{۲}+\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۲}=\varepsilon$$

از طرف دیگر اگر $L>\frac{۱}{۲}$ باشد ، فرض می کنیم $x=-\frac{\delta}{۲}$ باشد ، به طوری که

$$۰<\frac{\delta}{۲}=|x-۰|<\delta$$

بر اساس فرض خودمان

$$|f(x)-L|=|۰-L|=L\geq\frac{۱}{۲}=\varepsilon$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰}f(x)$$

وجود ندارد

۹ – ثابت کنید $\lim_{x\to a}|x|=|a|$

پاسخ

برای هر $\varepsilon>۰$ فرض می کنیم $\varepsilon = \delta$ باشد ، اگر $۰<|x-a|<\delta$ باشد ، پس

$$\big||x|-|a|\big|\leq|x-a|<\delta=\varepsilon$$

لذا $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ است.

۱۰

با استفاده از نا مساوی $\sqrt{x}-\sqrt{a}\leq\sqrt{x-a}$ برای $x\geq a$ نشان دهید که

$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ برای هر $a>0$

پاسخ

برای $\varepsilon>0$ فرض می کنیم $\delta=\varepsilon^{2}$ باشد ،حال اگر $0<|x-a|<\delta$ و $x>a$ باشند ، پس

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\sqrt{x}-\sqrt{a}\leq\sqrt{x-a}<\sqrt{\varepsilon^{2}}=\varepsilon$$

اگر $0<|x-a|<\delta$ و $x<a$ باشند ، پس

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\sqrt{a}-\sqrt{x}\leq\sqrt{a-x}<\sqrt{\varepsilon^{2}}=\varepsilon$$

لذا $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

۱.۳ – قضایای بنیادی حد Basic Limit Theorems

در بخش ۱.۲ حد چند تابع را حساب کردیم. روشی را که بکار بردیم این بود که هر حالت را جدا گانه اثبات کردیم. البته با مراجعه به تعریف اپسیلن – دلتا .

با استفاده از حد هایی که در بخش ۱.۲ حساب کردیم و استفاده از قضایایی که در این بخش خواهد آمد ، قادر خواهیم بود بیشتر حد هایی که به آنها بر خورد می کنیم ، با کمترین زحمت و بدون ارجاع به تعریف اپسیلن – دلتا ، را حساب کنیم.

در قضایای زیر فرض می کنیم که $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد.

اثبات این قضایا به عنوان تمرین به عهده شما گذاشته می شود ، اما اگر مشکلی داشتید ، به پاسخ تمرینات مراجعه کنید.

۱ - قضیه جمع حد ها Sum Theorem For Limits

حد $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

۲- قضیه ضرب عدد ثابت حد ها Constant Multiple Theorem For Limits

برای هر عدد حقیقی c حد $\lim_{x\to a} cf(x)$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$$

۳ – قضیه ضرب حد ها Product Theorem For Limits

حد $\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

۴ - قضیه تقسیم حد ها Quotient Theorem For Limits

اگر $\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}[f(x) \div g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

برای راحتی شما حد هایی که در بخش قبل پیدا کردیم ، مجددا اینجا ذکر می کنیم.

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to a} x = a \qquad (۲)$$

$$\lim_{x\to a} cx = ca \qquad (۳)$$

$$\lim_{x\to ۰} x^{۲} = ۰ \qquad (۴)$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\,,\ \ a > ۰ \qquad (۵)$$

$$\lim_{x\to ۰} \sin x = ۰ \qquad (۶)$$

$$\lim_{x\to ۰} \cos x = ۱ \qquad (۷)$$

مثال ۱ – حد های زیر را پیدا کنید.

$a)\ \lim_{x\to ۰}\left(x^{۲} + \cos x\right)$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x\to ۹}\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$

$c)\ \lim_{x\to ۰} x\cos x$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x}{x^{۲} + \cos x}$

پاسخ

$$a)\ \lim_{x\to ۰}\left(x^{۲} + \cos x\right) = \lim_{x\to ۰} x^{۲} + \lim_{x\to ۰}\cos x = ۰ + ۱ = ۱$$

$$b)\ \lim_{x\to ۹}\frac{۱}{۲}\sqrt{x} = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۹}\sqrt{x} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹} = \frac{۳}{۲}$$

$$c)\ \lim_{x\to ۰} x\cos x = \lim_{x\to ۰} x * \lim_{x\to ۰}\cos x = ۰ * ۱ = ۰$$

$$d)\ \lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x}{x^{۲} + \cos x} = \frac{\lim_{x\to ۰} x\cos x}{\lim_{x\to ۰}(x^{۲} + \cos x)} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

چون $(f-g)(x) = \big(f + (-g)\big)(x)$ و

$$\lim_{x\to a}\big(-g(x)\big) = \lim_{x\to a}(-۱)g(x) = -\lim_{x\to a} g(x)$$

پس

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}\big(f+(-g)\big)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}\big(-g(x)\big)$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$$

و لذا قضیه تفاضل حدها داریم **Difference Theorem For Limits**

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x) \qquad (۸)$$

البته اگر این حد وجود داشته باشد.

مثال ۲ ــ حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to ۰}(\sin x-\cos x)$$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۰}(\sin x-\cos x)=\lim_{x\to ۰}\sin x-\lim_{x\to ۰}\cos x=۰-۱=-۱$$

ازقضیه های بالا نتیجه می شود

(۹)

$$\lim_{x\to a}\left[f_۱(x)+f_۲(x)+\cdots+f_n(x)\right]=\lim_{x\to a}f_۱(x)+\lim_{x\to a}f_۲(x)+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$

(۱۰)

$$\lim_{x\to a}\left[f_۱(x)\times f_۲(x)\times\cdots\times f_n(x)\right]=\lim_{x\to a}f_۱(x)\times\lim_{x\to a}f_۲(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a}f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n\ ,n\in\mathbb{N} \qquad (۱۱)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \qquad (۱۲)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)} \qquad (۱۳)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{x^n}=\frac{۱}{a^n}\quad ,a\neq ۰\qquad (۱۴)$$

$$\lim_{x\to a}x^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{n}}\qquad (۱۵)$$

و در نهایت

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=L \quad \text{اگر فقط و فقط} \quad \lim_{x\to a}[f(x)-L]=۰ \qquad (۱۶)}$$

اثبات (۱۶)

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ باشد ، پس

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=۰$$

از طرف دیگر ، اگر $\lim_{x\to a}[f(x)-L]=۰$ باشد ، پس

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\{[f(x)-L]+L\}=\lim_{x\to a}[f(x)-L]+\lim_{x\to a}L=۰-L=L$$

نکته مهم ـ*هرگاه در قضیه ای عبارت "**اگر فقط و فقط**" داشته باشیم باید هر دو طرف قضیه را ثابت کنیم. همان طور که در اثبات (۱۶) انجام دادیم. بجای "**اگر فقط و فقط**" می توان "**شرط لازم و کافی**" را بکار ببریم.*

پس قضیه (۱۶) به صورت زیر نوشته می شود.

شرط لازم و کافی برای این که $\lim_{x\to a}f(x)=L$ باشد این است که

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L]=۰$$

باشد .

مثال ۳– حد $\lim\limits_{x\to -۱}\left(۴x^۳ - ۶x^۲ - ۹x\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\lim_{x\to -۱}\left(۴x^۳ - ۶x^۲ - ۹x\right) = ۴(-۱)^۳ - ۶(-۱)^۲ - ۹(-۱) = -۴ - ۶ + ۹ = -۱$$

مثال ۴ – حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳ + ۳x + ۱}{x^۲ - ۳\sqrt{۵}\ x}$$

پاسخ

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳ + ۳x + ۱}{x^۲ - ۳\sqrt{۵}\ x} = \frac{(-۲)^۳ + ۳(-۲) + ۱}{(-۲)^۲ - ۳\sqrt{۵}\ (-۲)} = \frac{-۱۳}{۴ + ۶\sqrt{۵}}$$

مثال ۵–

نشان دهید برای هر عددی مانند a خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

اثبات

طبق همانی های مثلثاتی داریم

$$\sin(a+h) = \sin a\cos h + \sin h\cos a$$

$$\cos(a+h) = \cos a\cos h - \sin a\sin h$$

نشان می دهیم که

$$\lim_{h\to ۰}\sin(a+h) = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{h\to ۰}\cos(a+h) = \cos a$$

بااستفاده از همانی مثلثاتی بالا ، داریم

$$\lim_{h\to ۰}\sin(a+h)=\lim_{h\to ۰}(\sin a\cos h+\sin h\cos a)$$

$$=\sin a\ \lim_{h\to ۰}\cos h+\cos a\ \lim_{h\to ۰}\sin h$$

$$=(\sin a)*۱+(\cos a)*۰$$

$$=\sin a$$

به همین طریق

$$\lim_{h\to ۰}\cos(a+h)=\lim_{h\to ۰}(\cos a\cos h-\sin \mathrm{a}\sin h)$$

$$=\cos a\ \lim_{h\to ۰}\cos h-\sin a\lim_{h\to ۰}\sin h$$

$$=(\cos a)*۱-(\sin a)*۰$$

$$=\cos a$$

از مثال ۵ نتیجه می گیریم که برای پیدا کردن حد تابع sin و cos در نقطه a کافی است مقدار تابع را در a پیدا کنیم, مثلا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\cos x=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}}=\tan\frac{\pi}{۳}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

مثال ۶ ــ مطلوب است

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ - ۴}$$

پاسخ

چون $\lim_{x\to -۲}\left(x^۲ - ۴\right) = ۰$ نمی توانیم قضیه خارج قسمت حد ها را بکار بریم ، اما چون

$$x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲ = (x+۲)\left(x^۲ - ۱\right)$$

$$x^۲ - ۴ = (x-۲)(x+۲)$$

پس داریم

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ - ۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)\left(x^۲ - ۱\right)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = \frac{(-۲)^۲ - ۱}{-۲ - ۲}$$

$$= -\frac{۳}{۴}$$

نکته مهم ــتوجه دارید که در مورد قضیه تقسیم حد ها فرض بر این بود که $\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰$

به عبارت دیگر یا $\lim_{x\to a} g(x) > ۰$ است و یا $\lim_{x\to a} g(x) < ۰$

لذا می توانیم دو قضیه زیر را ثابت کنیم

قضیه ۱۷

اگر $\lim_{x\to a} g(x) > ۰$ باشد ، پس $g(x) > ۰$ است برای تمام x ها ای که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.

قضیه ۱۸

اگر $\lim_{x\to a} g(x) < ۰$ باشد ، پس $g(x) < ۰$ است برای تمام x ها ای که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.

اثبات دو قضیه بالا را هم به عنوان تمرین خواهیم گذاشت .

از قضایای ۱۷ و ۱۸ نتیجه می شود که اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq ۰$ باشد ، برای تمام x هایی که به اندازه کافی به a نزدیک باشند و $x \neq a$ باشد. پس $g(x) \neq ۰$ خواهد بود

قضیه جانشینی برای حد ها Substitution Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = c$ و $f(x) \neq c$ است برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a احتمالا بجز خود همچنین فرض کنید $\lim_{y\to c} g(x)$ وجود دارد ، پس

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to c} g(y)$$

اثبات این قضیه را هم در تمرینات خواهیم آورد.

مثال ۷

مطلوب است $\lim_{x\to ۰} \sqrt{۱ - x^۲}$

پاسخ

فرض می کنیم $y = ۱ - x^۲$ باشد. چون عبارت $۱ - x^۲$ به ۱ نزدیک می شود ، هنگامی که x به صفر نزدیک می شود ، پس y به ۱ نزدیک می شود. پس خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{۱ - x^۲} = \lim_{y\to ۱} \sqrt{y} = ۱$$

مثال ۸

مطلوب است $\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \cos\left(x + \frac{\pi}{۶}\right)$

پاسخ

فرض می کنیم $y = x + \frac{\pi}{۶}$ باشد ، چون $x + \frac{\pi}{۶}$ به $\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۳}$ نزدیک می شود ، هنگامی که x به $\frac{\pi}{۳}$ نزدیک می شود ، پس y به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود ، لذا خواهیم داشت

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \cos\left(x + \frac{\pi}{۶}\right) = \lim_{y\to \frac{\pi}{۲}} \cos y = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰$$

مثال ۹

نشان دهید که $\lim_{x\to a} x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ است. برای $a \neq ۰$ و در دامنه $x^{\frac{m}{n}}$ است و m, n اعداد صحیح و $n > ۰$

پاسخ

طبق تعریف ، می دانیم که $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{۱}{n}}$ است. پس می توان فرض کرد که $y = x^m$ باشد ، پس بر اساس فرمول شماره ۱۱ که در بالا ذکر شد ، x^m به a^m نزدیک می شود ، هنگامی که x به a نزدیک می شود و لذا y به a^m نزدیک می شود و بر اساس قضیه جانشینی ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a} x^{\frac{m}{n}} = \lim_{x\to a}(x^m)^{\frac{۱}{n}} = \lim_{y\to a^m} y^{\frac{۱}{n}} = (a^m)^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

مثال ۱۰

مطلوب است $\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} tan^{\frac{۲}{۵}} x$

پاسخ

میدانیم که $tan^{\frac{۲}{۵}}x = (\tan x)^{\frac{۲}{۵}}$ پس فرض می کنیم $y = \tan x$ چون $\tan x$ به -۱ نزدیک می شود ، هنگامی که x به $-\frac{\pi}{۴}$ نزدیک می شود ، پس y به -۱ نزدیک می شود. لذا طبق قضیه جانشینی ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} tan^{\frac{۲}{۵}} x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} (\tan x)^{\frac{۲}{۵}} = \lim_{y\to -۱} y^{\frac{۲}{۵}} = (-۱)^{\frac{۲}{۵}} = ۱$$

مثال ۱۱

مطلوب است $\lim_{x\to \frac{\pi}{۱۲}} \sqrt{\sin ۲x}$

پاسخ

ابتدا فرض می کنیم $y = ۲x$ چون $۲x$ به $\frac{\pi}{۶}$ نزدیک می شود ، هنگامی که x به $\frac{\pi}{۱۲}$ نزدیک می شود ، لذا y به $\frac{\pi}{۶}$ نزدیک می شود. پس

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{12}}\sqrt{\sin 2x} = \lim_{y\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin y}$$

اینک قضیه جانشینی را تکرار می کنیم. حالا فرض می کنیم $z=\sin y$ چون $\sin y$ به $\frac{1}{2}$ نزدیک می شود ، هنگامی که y به $\frac{\pi}{6}$ نزدیک می شود، پس z به $\frac{1}{2}$ نزدیک می شود ، لذا طبق قضیه جانشینی داریم.

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin y} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و در نهایت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{12}}\sqrt{\sin 2x} = \lim_{y\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin y} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\sqrt{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

از قضیه جانشینی نتیجه زیر را می توان استنباط کرد. از چپ به راست بخوانید.

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = c$ و $\lim_{y\to c} g(y) \neq g(c)$ پس $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g(c)$

قضیه ساندویچی Squeezing or Pinching or Sandwich Theorem

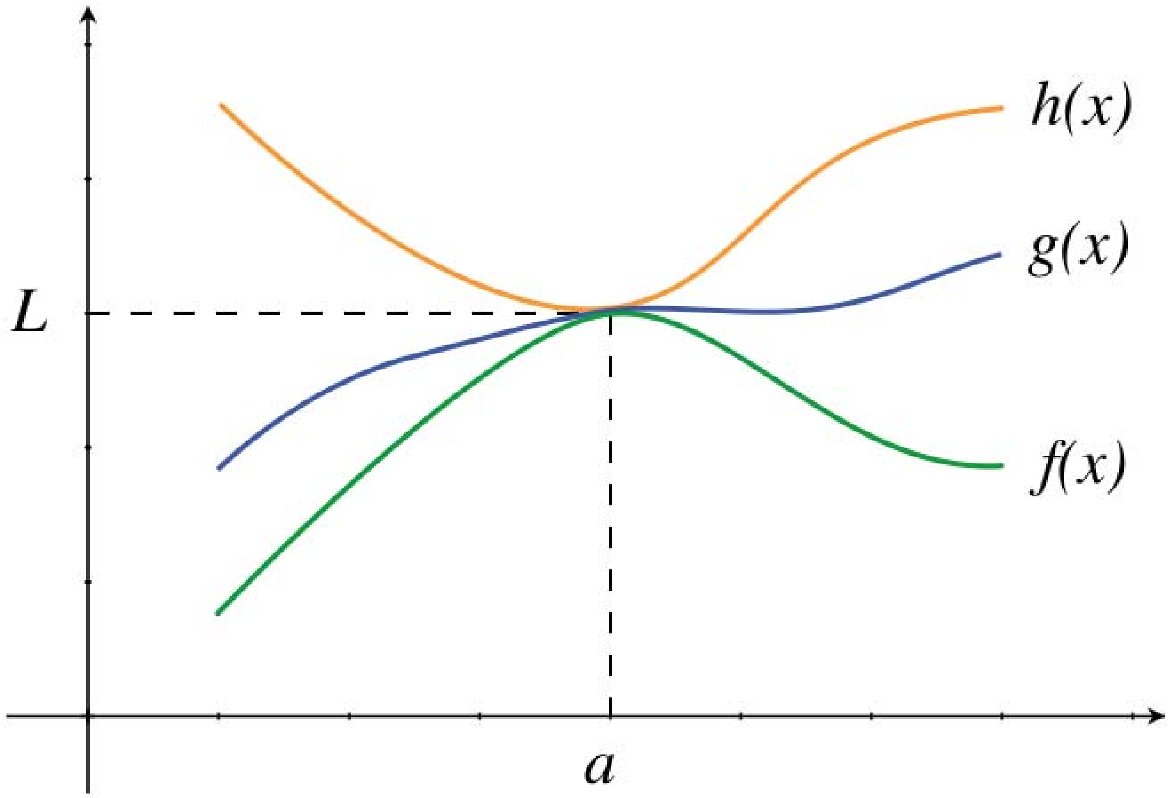
برای درک و یاد آوری این قضیه بد نیست معنی دو لغات بالا را بدانید. این به شما کمک می کند مفهوم این قضیه را بهتر درک کنید.

نیشگون گرفتن – بین دو انگشتتان قرار دادن Pinch

فشردن – چلاندن Squeeze

ساندویچ Sandwich

به نمودار زیر توجه کنید.



این قضیه می گوید اگر نمودار های f و h در یک نقطه مانند a با هم تلاقی کنند و اگرنمودار یک تابع دیگر مانند g بین نمودار های دو تابع f و h با فشار قرار دهیم ، پس نمودار g هم با نمودار های f و h در نقطه a تلاقی می کند.

قضیه ساندویچی Squeezing or Pinching or Sandwich Theorem

فرض کنید داشته باشیم $f(x) \le g(x) \le h(x)$ برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a

، بجز احتمالا خود a ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ باشد پس $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد و $\lim_{x\to a} g(x) = L$

اثبات این قضیه را هم در تمرینات این بخش خواهیم گذاشت .

مثال ۱۲

نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$$

پاسخ

مقدار حد بالا را در بخش ۱.۱ حدس زدیم. حال از طریق قضیه ساندویچی آنرا پیدا می کنیم.

یاد آوری

$$\text{مساحت قطاع دایره} = \left(\frac{\text{اندازه زاویه مرکزی بر حسب رادیان}}{۲\pi}\right)(\text{مساحت دایره})$$

$$Area\ of\ a\ Sector = \pi r^۲\left(\frac{C}{۲\pi}\right) ، \ C\ is\ Ceteral\ Angle\ Measure\ in\ Radian$$

یا

$$\text{مساحت قطاع دایره} = \frac{rL}{۲} = \frac{(\text{طول کمان})(\text{شعاع دایره})}{۲}$$

اینک به اثبات می پردازیم. توجه دارید که نماد | | برای اندازه طول یک خط هم بکار می رود.

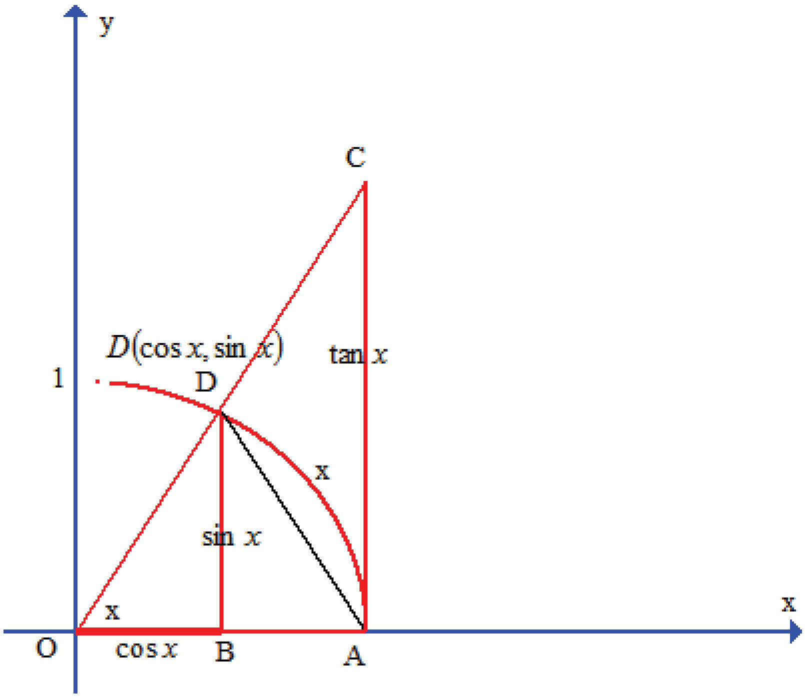
در شک پایین ربع دائره به شعاع یک واحد است. با توجه به شکل زیر

$$\text{مساحت مثلث } OAD = \frac{۱}{۲}|OA| * |BD| = \frac{۱}{۲} * ۱ * \sin x = \frac{\sin x}{۲}$$

$$\text{مساحت قطاع دایره } OAD = \left(\frac{\text{اندازه زاویه مرکزی بر حسب رادیان}}{۲\pi}\right)(\text{مساحت دایره})$$

$$= \frac{x}{۲\pi}\left(\pi * ۱^۲\right) = \frac{x}{۲}$$

$$\text{مساحت مثلث } OAC = \frac{۱}{۲}|OA| * |AC| = \frac{۱}{۲} * ۱ * \tan x = \frac{۱}{۲} * \frac{\sin x}{\cos x}$$



اما چرا $|AC| = \tan x$ است؟

مثلث OBD متشابه Similar مثلث OAC است. پس خواهیم داشت

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AC}$$

و یا

$$\frac{\cos x}{١} = \frac{\sin x}{AC}$$

$$AC * \cos x = \sin x$$

$$AC = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

لذا خواهیم داشت

مساحت مثلث OAD ≤ مساحت قطاع OAD ≤ مساحت مثلث OAC

به طوری که

$$\frac{\sin x}{۲} \le \frac{x}{۲} \le \frac{۱}{۲} * \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{برای}, \quad ۰< x < \frac{\pi}{۲}$$

اگر طرفین $\frac{\sin x}{۲} \le \frac{x}{۲}$ را در $\frac{۲}{x}$ ضرب کنیم ، خواهیم داشت

$$\frac{\sin x}{x} \le ۱ \qquad (۱)$$

اگر طرفین $\frac{x}{۲} \le \frac{۱}{۲} * \frac{\sin x}{\cos x}$ را در $\frac{۲\cos x}{x}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \qquad (۲)$$

با استفاده از دو نا معادله بالا و این حقیقت که

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

خواهیم داشت

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le ۱ \quad \text{برای} \quad ۰< |x| < \frac{\pi}{۲}$$

چون

$$\lim_{x\to ۰} \cos x = ۱ = \lim_{x\to ۰} ۱$$

طبق قضیه ساندویچ ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

مثال ۱۳

نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x - ۱}{x} = ۰$$

پاسخ

می دانید که $\lim_{x\to ۰} x = ۰$ لذا نمی توانیم قضیه تقسیم را مستقیما بکار بریم. اما

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰}\left(\frac{\cos x - ۱}{x}\right)\left(\frac{\cos x + ۱}{\cos x + ۱}\right) = \lim_{x\to ۰}\frac{\cos^{۲} x - ۱}{x(\cos x + ۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{-\sin^{۲} x}{x(\cos x + ۱)} = \lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-\sin x}{\cos x + ۱}\right)$$

طبق مثال ۱۲ می دانیم که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱} = ۱$$

علاوه بر این

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{\cos x + ۱} = \frac{۰}{۱ + ۱} = ۰$$

لذا در نهایت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{\cos x + ۱} = ۱ * ۰ = ۰$$

این فرمول هم بدون اثبات به خاطر بسپارید.

$$\lim_{x\to a}|x| = |a|$$

تمرینات ۱.۳

با استفاده از نتایج این بخش ، حد های زیر را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x\to ۳}(x+۵)$

۲) $\lim_{x\to ۱۶} -\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$

۳) $\lim_{x\to -۱}\left(-۵x^{۲}+۲x-\frac{۱}{۲}\right)$

۴) $\lim_{y\to -۳}(y-|y|)$

۵) $\lim_{y\to ۴}\sqrt{y}\left(-y^{۲}+۲y-۷\right)$

۶) $\lim_{z\to ۲}\left(۲z^{۳}+۱\right)\left(-z^{۳}+\frac{۱}{۲}z^{۲}-۱۵\right)$

۷) $\lim_{z\to -\frac{\pi}{۶}} \frac{z}{\pi}\sin z\, cos\, z$

۸) $\lim_{z\to -۱}\frac{z-۱}{z^{۵}}$

۹) $$\lim_{h\to ۰}\frac{\left(۲h^{۳}-h^{۲}+\sqrt{۲}\right)\left(۳h^{۳}-\sqrt{۲}\right)}{۱-۲h}$$

۱۰) $$\lim_{h\to ۰} sec\, h$$

۱۱) $$\lim_{h\to \pi}\frac{\cos h-۱}{h}$$

۱۲) $$\lim_{x\to ۳}\sqrt{۳x^{۳}}$$

۱۳) $$\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}(x-۱)^{۲}$$

۱۴) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} x\, sin^{۶}\, x$$

۱۵) $$\lim_{x\to ۱}\sqrt{\frac{۲x+۱}{۲x-۱}}$$

۱۶) $$\lim_{w\to \frac{\pi}{۶}} sin^{۳}w\, cos^{۴}w$$

۱۷) $\lim_{t\to\frac{\pi}{۴}} tan^{۴} t$

۱۸) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۱}{۳}}}$

۱۹) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}$

درتمرینات زیرابتدا عبارت ها را ساده کنید و سپس حد ها را پیدا کنید.

۲۰) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}$

۲۱) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}$

۲۲) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x^{۳}-۸}$

۲۳) $\lim_{u\to\frac{۱}{۲}}\frac{۶u-۳}{u(۱-۲u)}$

۲۴) $\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x^{۲}-۲x}$

۲۵) $\lim_{h\to ۰} h\left(۱-\frac{۱}{h}\right)$

۲۶) $\lim_{x\to ۰} \frac{sin^{۲}\, x}{۱-\cos x}$

در تمرینات زیر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **را پیدا کنید.**

۲۵) $f(x)=۲x+۷; a=۳$

۲۶) $f(x)=-۲x^{۳}; a=-۳$

۲۷) $f(x)=\sqrt{x}; a=۱۶$

۲۸) می دانیم که

$$۱\le\frac{\tan x}{x}\le\frac{۱}{\cos x}\qquad \text{برای}\quad -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$$

با استفاده از حقیقت بالا ، حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}$$

۲۹) فرض کنید f تابعی است که برای $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم

$$x^{۲}\left(۱ - cos^{۲}x\right) \leq f(x) \leq x^{۲}\left(۱ + cos^{۲}x\right)$$

حد $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را پیدا کنید.

۳۰) فرض کنید $\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to\sqrt{۲}} (fg)(x) = -\sqrt{۲}$ باشد ، نشان دهید که

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)$$

وجود دارد و

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x) = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

است.

۳۱) دو تابع f و g پیدا کنید ، به طوری که $\lim_{x\to ۱}(f+g)(x)$ وجود داشته باشند ، اما نه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ و نه $\lim_{x\to ۱} g(x)$ وجود داشته باشند.

۳۲) دو تابع f و g پیدا کنید ، به طوری که $\lim_{x\to ۲}(fg)(x)$ وجود داشته باشند ، اما نه $\lim_{x\to ۲} f(x)$ و نه $\lim_{x\to ۲} g(x)$ وجود داشته باشند.

۳۳) فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & \text{برای} \quad x < ۱ \\ ۲x & \text{برای} \quad x > ۱ \end{cases}$$

و

$$g(y)=\begin{cases} ۰ & \text{برای } y\neq ۲ \\ ۱۰۰ & \text{برای } y=۲ \end{cases}$$

باشند ،

الف – یک فرمول برای $g\big(f(x)\big)$ پیدا کنید.

ب – نشان دهید که $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$ و $\lim_{y\to ۲} g(y)=۰$ اما $\lim_{x\to ۱} g\big(f(x)\big)$ وجود ندارد. توضیح دهید که چرا این نتیجه مغایر قضیه جانشینی نیست.

۳۴ – الف - نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=۰$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}|f(x)|=۰$ است.

ب – با استفاده از قضیه جانشینی ، نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$ است .

ج – نشان دهید که عکس قسمت الف صادق است ، اما عکس قسمت ب صادق نیست.

۳۵ – با استفاده از قضیه جانشینی ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to ۰} f(x)=L$ پس برای هر عدد صحیح مثبت n ، خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to a} f(x^n)=L$$

۳۶ – فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M$ باشد ، اگر $f(x)\leq g(x)$ برای کلیه x ها باشد ، ثابت کنید که $L\leq M$ است.

قضایای زیر را ثابت کنید.

۱ - قضیه جمع حد ها Sum Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد ، پس

حد $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

۲ـ قضیه ضرب عدد ثابت حد ها Constant Multiple Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و c هر عدد حقیقی باشد ، پس $\lim_{x\to a} cf(x)$ وجود دارد ، و

$$\lim_{x\to a} c\, f(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$$

۳ – قضیه ضرب حد ها Product Theorem For Limits

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ هر دو وجود دارند ، پس

حد $\lim_{x\to a}[f(x)*g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x)*g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)*\lim_{x\to a} g(x)$$

۴ - قضیه تقسیم حد ها Quotient Theorem For Limits

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ هر دو وجود دارند ، و

$\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ باشد

پس $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

قضیه ۱۷

اگر $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ باشد ، پس $g(x) > 0$ است برای تمام x ها ای که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.

قضیه ۱۸

اگر $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ باشد ، پس $g(x) < 0$ است برای تمام x ها ای که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.

قضیه جانشینی برای حد ها Substitution Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = c$ و $f(x) \neq c$ است برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a احتمالا بجز خود همچنین فرض کنید $\lim_{y\to c} g(x)$ وجود دارد ، پس

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to c} g(y)$$

قضیه ساندویچی Squeezing or Pinching or Sandwich Theorem

فرض کنید داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a ، بجز احتمالا خود a ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ باشد پس $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد و $\lim_{x\to a} g(x) = L$

پاسخ تمرینات ۱.۳

با استفاده از نتایج این بخش ، حد های زیر را پیدا کنید.

۱) $$\lim_{x\to ۳}(x+۵)=\lim_{x\to ۳}x+\lim_{x\to ۳}۵=۳+۵=۸$$

۲) $$\lim_{x\to ۱۶}-\frac{۱}{۲}\sqrt{x}=-\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱۶}\sqrt{x}=-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=-\frac{۱}{۲}*۴=-۲$$

۳) $$\lim_{x\to -۱}\left(-۵x^{۲}+۲x-\frac{۱}{۲}\right)=\lim_{x\to -۱}-۵x^{۲}+\lim_{x\to -۱}۲x+\lim_{x\to -۱}-\frac{۲}{۲}$$

$$=-۵(-۱)^{۲}+۲(-۱)-\frac{۱}{۲}=-۵-۲-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱۵}{۲}$$

۴) $$\lim_{y\to -۳}(y-|y|)=\lim_{y\to -۳}y-\lim_{y\to -۳}|۳|=-۳-|-۳|=-۳-۳=-۶$$

۵) $$\lim_{y\to ۴}\sqrt{y}\left(-y^{۲}+۲y-۷\right)=\lim_{y\to ۴}\sqrt{y}*\left(\lim_{y\to ۴}-y^{۲}+۲\lim_{y\to ۴}y-\lim_{y\to ۴}۷\right)$$

$$=۲(-۱۶+۸-۷)=۲*(-۱۵)=-۳۰$$

۶) $$\lim_{z\to ۲}\left(۲z^{۳}+۱\right)\left(-z^{۳}+\frac{۱}{۲}z^{۲}-۱۵\right)$$

$$=\left(\lim_{z\to ۲}۲z^{۳}+\lim_{z\to ۲}۱\right)\left(\lim_{z\to ۲}-z^{۳}+\lim_{z\to ۲}\frac{۱}{۲}z^{۲}+\lim_{z\to ۲}(-۱۵)\right)$$

$$= (۱۶+۱)(-۸+۲-۱۵) = (۱۷)(-۲۱) = -۳۵۷$$

۷) $$\lim_{z\to-\frac{\pi}{۶}} \frac{z}{\pi}\sin z\, cos\, z = \lim_{z\to-\frac{\pi}{۶}} \frac{z}{\pi} * \lim_{z\to-\frac{\pi}{۶}} \sin(z) * \lim_{z\to-\frac{\pi}{۶}} \cos(z)$$

$$= \left(\frac{-\frac{\pi}{۶}}{\pi}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

۸) $$\lim_{z\to-۱} \frac{z-۱}{z^{۵}} = \frac{-۱-۱}{(-۱)^{۵}} = \frac{-۲}{-۱} = ۲$$

۹) $$\lim_{h\to۰} \frac{\left(۲h^{۳}-h^{۲}+\sqrt{۲}\right)\left(۳h^{۳}-\sqrt{۲}\right)}{۱-۲h}$$

$$= \frac{\left(۲(۰)^{۳}-(۰)^{۲}+\sqrt{۲}\right)\left(۳(۰)^{۳}-\sqrt{۲}\right)}{۱-۲(۰)} = \frac{\left(\sqrt{۲}\right)\left(-\sqrt{۲}\right)}{۱} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

۱۰) $$\lim_{h\to۰} \sec h = \lim_{h\to۰} \frac{۱}{\cos h} = \frac{\lim_{h\to۰} ۱}{\lim_{h\to۰} \cos h} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

۱۱) $$\lim_{h\to\pi} \frac{\cos h-۱}{h} = \frac{\lim_{h\to\pi}(\cos h-۱)}{\lim_{h\to\pi} h} = \frac{\lim_{h\to\pi}\cos h - \lim_{h\to\pi} ۱}{\lim_{h\to\pi} h} = \frac{-۱-۱}{\pi} = -\frac{۲}{\pi}$$

۱۲) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{۳x^۳}$

فرض می کنیم $y=۳x^۳$ چون $۳x^۳$ به ۸۱ نزدیک می شود ، هنگامی که x به ۳ نزدیک می شود ، پس y به ۸۱ نزدیک می شود. طبق قضیه جانشینی خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۳}\sqrt{۳x^۳}=\lim_{y\to ۸۱}\sqrt{y}=\sqrt{۸۱}=۹$$

۱۳) $\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}(x-۱)^۲=\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}*\lim_{x\to ۴}(x-۱)^۲=\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}*\lim_{x\to ۴}\left(x^۲-۲x+۱\right)$

$$=\sqrt{۴}\left((۴)^۲-۲(۴)+۱\right)=۱۸$$

۱۴) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}x\,sin^۶\,x$

فرض می کنیم $y=\sin x$ و می دانیم که $\sin x$ به $\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نزدیک می شود ، هنگامی که x به $\frac{\pi}{۴}$ نزدیک می شود. پس y به $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نزدیک می شود. بر اساس قضیه جانشینی خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}sin^۶\,x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\sin x)^۶=\lim_{y\to\frac{\pi}{۴}}y^۶=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۶=\frac{۱}{۸}$$

و در نهایت طبق قضیه ضرب خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}x\,sin^۶\,x=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}x\right)\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}sin^۶\,x\right)=\left(\frac{\pi}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۸}\right)=\frac{\pi}{۳۲}$$

۱۵) $\lim_{x\to ۱}\sqrt{\frac{۲x+۱}{۲x-۱}}$

فرض می کنیم $y=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ چون y به ۳ نزدیک می شود ، هنگامی که x به ۱ نزدیک می شود پس بر اساس قضیه جانشینی خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{\frac{۲x+۱}{۲x-۱}}=\lim_{y\to ۳}\sqrt{y}=\sqrt{۳}$$

۱۶) $\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} sin^{۳}w\, cos^{۴}w$

فرض می کنیم $y=\sin w$ چون y به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می شود ، هنگامی که w به $\frac{\pi}{۶}$ نزدیک می شود , پس طبق قضیه جانشینی ، خواهیم داشت

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} sin^{۳}w=\lim_{y\to\frac{۱}{۲}} y^{۳}=\frac{۱}{۸}$$

همچنین فرض می کنیم $z=\cos w$ چون z به $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ نزدیک می شود ، هنگامی که w به $\frac{\pi}{۶}$ نزدیک می شود ، پس طبق قضیه جانشینی ، خواهیم داشت

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} cos^{۴}w=\lim_{z\to\frac{\pi}{۶}} z^{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۴}=\frac{۹}{۱۶}$$

و در نهایت طبق قضیه ضرب حد ها ، خواهیم داشت

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} sin^{۳}w\, cos^{۴}w=\left(\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} sin^{۳}w\right)\left(\lim_{w\to\frac{\pi}{۶}} cos^{۴}w\right)=\left(\frac{۱}{۸}\right)\left(\frac{۹}{۱۸}\right)=\frac{۹}{۱۲۸}$$

$$۱۷)\quad \lim_{t\to\frac{\pi}{۴}} tan^۴ t = \frac{\lim_{t\to\frac{\pi}{۴}} sin^۴ t}{\lim_{t\to\frac{\pi}{۴}} cos^۴ t} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴} = ۱$$

از طریق جانشینی هم ممکن است.

$$۱۸)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۱}{۳}}}$$

در مثال شماره ۱۲ نشان دادیم که $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$

فرض می کنیم $y = x^{\frac{۱}{۳}}$ باشد ، چون y به صفر نزدیک می شود ، هنگامی که x به صفر نزدیک می شود ، پس خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۱}{۳}}} = \lim_{y\to ۰} \frac{\sin y}{y} = ۱$$

$$۱۹)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{x}$$

می توان نوشت

$$\frac{\sin ۳x}{x} = \frac{۳}{۳}\left(\frac{\sin ۳x}{x}\right) = ۳\,\frac{\sin ۳x}{۳x} \quad , x \neq ۰$$

پس

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x} = \lim_{x\to ۰} ۳\left(\frac{sin۳x}{۳x}\right) = ۳\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}$$

حال فرض می کنیم $y = ۳x$ چون $۳x$ به صفر نزدیک می شود ، هنگامی که x به صفر نزدیک می شود ، پس y هم به صفر نزدیک می شود. لذا طبق قضیه جانشینی خواهیم داشت

$$۳\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x} = ۳\lim_{y\to ۰}\frac{\sin y}{y} = ۳ * ۱ = ۳$$

درتمرینات زیرابتدا عبارت ها را ساده کنید و سپس حد ها را پیدا کنید.

۲۰) $$\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x - ۱)(x + ۱)}{x + ۱} = \lim_{x\to -۱}(x - ۱) = -۱ - ۱ = -۲$$

۲۱) $$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x - ۱)\left(x^۲ + x + ۱\right)}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱}\left(x^۳ + x + ۲\right) = ۱ + ۱ + ۱$$
$$= ۳$$

۲۲) $$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x - ۲)(x + ۲)}{(x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴)} = \lim_{x\to ۲}\frac{x + ۲}{x^۲ + ۲x + ۴} = \frac{۲ + ۲}{۴ + ۴ + ۴}$$
$$= \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۲۳) $$\lim_{u\to \frac{۱}{۲}}\frac{۶u - ۳}{u(۱ - ۲u)} = -۳\lim_{u\to \frac{۱}{۲}}\frac{۱ - ۲u}{u(۱ - ۲u)} = -۳\lim_{u\to \frac{۱}{۲}}\frac{۱}{u} = -۳\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right) = -۶$$

۲۴) $$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x^{۲}-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{۲}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{۲}\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{۲}\right)}=\frac{۱}{۲\left(\sqrt{۲}+\sqrt{۲}\right)}=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

۲۵) $$\lim_{h\to ۰}h\left(۱-\frac{۱}{h}\right)=\lim_{h\to ۰}(h-۱)=۰-۱=-۱$$

۲۶) $$\lim_{x\to ۰}\frac{sin^{۲}\,x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-cos^{۲}x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}(۱+\cos x)=۱+۱=۲$$

در تمرینات زیر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **را پیدا کنید.**

۲۵) $f(x)=۲x+۷; a=۳$

$$f(۳)=۱۳;\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۳}\frac{(۲x+۷)-۱۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۶}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۲(x-۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}۲=۲$$

۲۶) $f(x) = -۲x^۳; a = -۳$

$$f(-۳) = ۵۴; \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to -۳}\frac{-۲x^۳-۵۴}{x+۳} = -۲\lim_{x\to -۳}\frac{x^۳+۲۷}{x+۳}$$

$$= -۲\lim_{x\to -۳}\frac{(x+۳)(x^۳-۳x+۹)}{x+۳} = -۲\lim_{x\to -۳}(x^۲-۳x+۹)$$

$$= -۲\left[(-۳)^۲-۳(-۳)+۹\right] = -۲(۲۷) = -۵۴$$

۲۷) $f(x) = \sqrt{x}; a = ۱۶$

$$f(۱۶) = ۴; \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt{x}-۴}{x-۱۶} = \lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt{x}-۴}{(\sqrt{x}-۴)(\sqrt{x}+۴)}$$

$$= \lim_{x\to ۱۶}\frac{۱}{\sqrt{x}+۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱۶+۴}} = \frac{۱}{۸}$$

۲۸) می دانیم که

$$۱ \le \frac{\tan x}{x} \le \frac{۱}{\cos x} \qquad \text{برای } -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

با استفاده از حقیقت بالا ، حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}$$

پاسخ

میدانیم که $\lim_{x\to ۰} ۱ = ۱$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{\lim_{x\to ۰}\cos x} = \frac{۱}{۱} = ۱$ لذا بر اساس نا معادله داده شده بالا و قضیه ساندویچی داریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x} = ۱$$

۲۹) فرض کنید f تابعی است که برای $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم

$$x^{۲}\left(۱ - cos^{۲}x\right) \leq f(x) \leq x^{۲}\left(۱ + cos^{۲}x\right)$$

حد $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$\lim_{x\to ۰} x^{۲}\left(۱ - cos^{۲}x\right) = \lim_{x\to ۰} x^{۲} * \lim_{x\to ۰}\left(۱ - cos^{۲}x\right) = (۰)(۰) = ۰$$

همچنین

$$\lim_{x\to ۰} x^{۲}\left(۱ + cos^{۲}x\right) = \lim_{x\to ۰} x^{۲} * \lim_{x\to ۰}\left(۱ + cos^{۲}x\right) = (۰)(۲) = ۰$$

لذا طبق قضیه ساندویچی

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$$

۳۰) فرض کنید $\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to\sqrt{۲}} (fg)(x) = -\sqrt{۲}$ باشد ، نشان دهید که

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)$$

وجود دارد و

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x) = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

است.

پاسخ

چون $f(x) \neq ۰$ ، $g(x) = \frac{(fg)(x)}{f(x)}$ و $\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)$ و $\lim_{x\to\sqrt{۲}}(fg)(x)$ هر دو وجود دارند ، قضیه خارج قسمت حد ها می گوید که $\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)$ وجود دارد. و در نهایت

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x) = \frac{\lim_{x\to\sqrt{۲}}(fg)(x)}{\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

۳۱) دو تابع f و g پیدا کنید ، به طوری که $\lim_{x\to۱}(f+g)(x)$ وجود داشته باشند ، اما نه $\lim_{x\to۱} f(x)$ و نه $\lim_{x\to۱} g(x)$ وجود داشته باشند.

پاسخ

فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{۱}{x-۱}$ و $g(x) = \frac{-۱}{x-۱}$ باشد. پس $\lim_{x\to۱} f(x)$ و $\lim_{x\to۱} g(x)$ وجود ندارد. اما

$$f(x) + g(x) = \frac{۱}{x-۱} + \frac{-۱}{x+۱} = ۰ \quad ، \; x \neq ۱$$

بنا بر این

$$\lim_{x\to۱}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to۱}(۰) = ۰$$

۳۲) دو تابع f و g پیدا کنید ، به طوری که $\lim_{x\to۲}(fg)(x)$ وجود داشته باشند ، اما نه $\lim_{x\to۲} f(x)$ و نه $\lim_{x\to۲} g(x)$ وجود داشته باشند.

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{برای}\quad x<2\\ 1 & \text{برای}\quad x\geq 2\end{cases}\quad \text{و}\quad g(x)=\begin{cases}1 & \text{برای}\quad x<2\\ 0 & \text{برای}\quad x\geq 2\end{cases}$$

باشند. پس

$$\lim_{x\to 2} f(x)\quad \text{و}\quad \lim_{x\to 2} g(x)$$

وجود ندارند اما

$$f(x)g(x)=0\quad \text{برای کلیه مقادیر } x$$

و لذا

$$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2} 0=0$$

۳۳) فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{برای}\quad x<1\\ 2x & \text{برای}\quad x>1\end{cases}$$

و

$$g(y)=\begin{cases}0 & \text{برای}\quad y\neq 2\\ 100 & \text{برای}\quad y=2\end{cases}$$

باشند ،

الف – یک فرمول برای $g\big(f(x)\big)$ پیدا کنید.

ب – نشان دهید که $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ و $\lim_{y\to 2} g(y)=0$ اما $\lim_{x\to 1} g\big(f(x)\big)$ وجود ندارد. توضیح دهید که چرا این نتیجه مغایر قضیه جانشینی نیست.

پاسخ

الف – اگر $x < ۱$ باشد ، پس $f(x) = ۲$ و لذا $g(f(x)) = ۱۰۰$

اگر $x > ۱$ باشد ، پس $f(x) = ۲x \neq ۲$ و لذا $g(f(x)) = ۰$

پس خواهیم داشت

$$g(f(x)) = \begin{cases} ۱۰۰ & \text{برای} \quad x < ۱ \\ ۰ & \text{برای} \quad x > ۱ \end{cases}$$

پاسخ

ب – برای این که نشان دهیم $\lim_{x\to۱} f(x) = ۲$, فرض می کنیم $\varepsilon > ۰$ و $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ باشد ،

اگر $۰ < |x - ۱| < \delta$ و $x < ۱$ باشد ، پس $|f(x) - ۲| = |۲ - ۲| = ۰ < \varepsilon$ است.

اگر $۰ < |x - ۱| < \delta$ و $x > ۱$ باشد ، پس

$$|f(x) - ۲| = |۲x - ۲| = ۲|x - ۱| \leq ۲\delta = \varepsilon$$

پس اگر $۰ < |x - ۱| < \delta$ باشد ، $|f(x) - ۲| < \varepsilon$ است ، و بنا بر این $\lim_{x\to۱} f(x) = ۲$ است.

از طرف دیگر طبق مثال ۱ بخش ۱.۲

$$\lim_{y\to۲} g(y) = ۰$$

اما $\lim_{x\to۱} g(f(x))$ وجود ندارد ، زیرا $g(f(x)) = ۱۰۰$ برای $x < ۱$ و

$$g(f(x)) = ۰ \quad \text{برای} \quad x > ۱$$

به طوری که در هر بازه باز با مرکزیت یک ، $g(f(x))$ مقادیر صفر و صد دارد. این موضوع مغایر قضیه جانشینی نیست ، زیرا $f(x) = ۲$ در هر کدام از بازه ها با مرکزیت یک.

۳۴ ـ الف ـ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}|f(x)| = ۰$ است.

ب – با استفاده از قضیه جانشینی ، نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$ است .

ج – نشان دهید که عکس قسمت الف صادق است ، اما عکس قسمت ب صادق نیست.

پاسخ

الف ـ فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ است ، پس یک عدد مانند $۰< \delta$ باشد ، چون $۰< \varepsilon$ وجود دارد به طوری که اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x)| = |f(x) - ۰| < \varepsilon$$

است. پس اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت $\big||f(x)| - ۰\big| = |f(x)| < \varepsilon$

پس $\lim_{x\to a}|f(x)| = ۰$ است.

پاسخ

ب – چون $\lim_{x\to a} f(x) = L$ است ، پس از قضیه جانشینی نتیجه می شود که

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \lim_{y\to L}|y| = |L|$$

پاسخ

ج – اگر $\lim_{x\to a}|f(x)| = ۰$ باشد ، پس $\lim_{x\to a} -|f(x)| = ۰$ طبق قضیه ضرب عدد ثابت

و چون $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ است ، طبق قضیه ساندویچی خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a} f(x) = ۰$$

و لذا عکس قسمت الف صادق است.

بر عکس ، اگر مثلا داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & \text{برای } x \le ۱ \\ ۱ & \text{برای } x > ۱ \end{cases}$$

پس $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد ، لذا عکس قسمت $\lim_{x\to ۱}|f(x)| = \lim_{x\to ۱} ۱ = ۱$ وجود ندارد ، اما ب به طور کلی غلط است.

۳۵ – با استفاده از قضیه جانشینی ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to ۰} f(x) = L$ پس برای هر عدد صحیح مثبت n ، خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to a} f(x^n) = L$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = x^n$ باشد ، چون x^n به صفر نزدیک می شود ، هنگامی که x به صفر نزدیک می شود ، در نتیجه y به صفر نزدیک می شود. لذا طبق قضیه جانشینی

$$\lim_{x\to ۰} f(x^n) = \lim_{y\to ۰} f(y) = L$$

۳۶ – فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ باشد ، اگر $f(x) \le g(x)$ برای کلیه x ها باشد ، ثابت کنید که $L \le M$ است.

پاسخ

فرض می کنیم $\varepsilon >۰$ باشد. چون داریم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ پس یک عدد مانند $\delta >۰$ وجود دارد به طوری که اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ است و همچنین $|g(x) - M| < \varepsilon$ است. اگر $x_۰$ چنین x ای باشد ، پس

$$L - \varepsilon < f(x_۰) \le g(x_۰) < M + \varepsilon$$

است. و لذا $L < M + ۲\varepsilon$ است ، و چون ε یک عدد مثبت اختیاری است .پس $L \le M$ است.

قضایای زیر را ثابت کنید.

۱ - قضیه جمع حد ها Sum Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد ، پس

حد $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

ابتدا به اصل موضوع زیر توجه کنید

اصل موضوع ۱- Lemma-1 – فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ باشد ، برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد ، به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta$ باشد ، پس

هم $|f(x)-L| < \varepsilon$ و هم $|g(x)-M| < \varepsilon$ است.

اثبات اصل موضوع – برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که اگر

$$0 < |x-a| < \delta_1$$

باشد ، پس $|f(x)-L| < \varepsilon$ است. و همچنین یک $\delta_2 > 0$ وجود دارد به طوری که اگر

$$0 < |x-a| < \delta_2$$

باشد ، پس $|f(x)-M| < \varepsilon$ است. حال فرض می کنیم δ مینیمم δ_1 و δ_2 باشد ، (یعنی هر کدام کوچک تر باشد انتخاب می کنیم) پس $\delta > 0$ است

همچنین اگر $0 < |x-a| < \delta$ باشد ، مسلم است که $0 < |x-a| < \delta_1$ و $0 < |x-a| < \delta_2$ خواهد بود. بنا بر این هم $|f(x)-L| < \varepsilon$ و هم $|g(x)-M| < \varepsilon$ است.

اثبات قضیه جمع حد ها

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $\varepsilon > 0$ باشد ، نشان می دهیم که یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)| < \varepsilon$$

است. فرض کنید بجای ε در اصل موضوع بالا بگذاریم $\frac{\varepsilon}{۲}$

اصل موضوع ۱- می گوید که یک $\delta >۰$ مشترک وجود دارد ، به طوری که اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

است. بنا بر این

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)| = |[f(x)-L]+[g(x-M)]|$$
$$\leq |f(x-L)|+|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

۲- قضیه ضرب عدد ثابت حد ها Constant Multiple Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و c هر عدد حقیقی باشد ، پس $\lim_{x\to a} cf(x)$ وجود دارد ، و

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

اثبات

اگر $c=۰$ باشد ، اثبات خیلی پیش پا افتاده است. زیرا هر دو طرف تساوی صفر است. اگر $c \neq ۰$ باشد ، فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ باشد، و یک عدد دلبخواه $\varepsilon >۰$ انتخاب می کنیم. نشان می دهیم که برای یک عدد مانند $\delta >۰$ اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، پس $|cf(x)-cL| < \varepsilon$

است. میدانیم که $\varepsilon|c| >۰$ است ، پس مربوط به این عدد مثبت یک $\delta >۰$ وجود دارد ، به طوری که اگر $۰< |x-a| < \delta$ باشد ، خواهیم داشت

$$|f(x)-L| < \varepsilon|c|$$

در نتیجه

$$|cf(x)-cL| = |c||f(x)-L| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} - \varepsilon$$

و لذا

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = cL = c \lim_{x\to a} f(x)$$

۳ – قضیه ضرب حد ها Product Theorem For Limits

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ هر دو وجود دارند ، پس حد $\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

ابتدا به اصل موضوع زیر توجه کنید. اصل موضوع-۲ Lemma-2

فرض کنید ، $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ است ، پس

$$\lim_{x\to a} f(x)\ g(x)$$

وجود دارد و

$$\lim_{x\to a} f(x)\ g(x) = 0$$

اثبات اصل موضوع - ۲

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ است. و فرض می کنیم $1 > \varepsilon > 0$ باشد ، و فرض می کنیم در اصل موضوع قبل $L = M = 0$ باشد ، پس آن اصل موضوع می گوید می توان یک $\delta > 0$ پیدا کرد به طوری که اگر $0 < |x - a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \qquad |g(x) - 0| < \varepsilon$$

است و لذا

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x) - 0||g(x) - 0| < \varepsilon * \varepsilon = \varepsilon^2 < \varepsilon$$

حالا می پردازیم به اثبات قضیه ضرب حد ها

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ باشد ، پس طبق قضیه جمع نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x\to a}[f(x) - L] = \lim_{x\to a}[f(x) + (-L)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}(-L) = L + (-L) = 0$$

به همین طریق

$$\lim_{x\to a}[g(x)-M]=0$$

سپس ، ضرب $f(x)g(x)$ را می توان به شکل زیر نوشت.

$$f(x)g(x)=[f(x)-L][g(x)-M]+[Lg(x)+Mf(x)]-LM$$

حال طبق اصل موضوع – ۲ که در ابتدای این قضیه گفتیم

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L][g(x)-M]=0$$

از طرف دیگر ، قضیه ضرب عدد ثابت نتیجه می دهد که

$$\lim_{x\to a}Lg(x)=LM \text{ ، } \lim_{x\to a}f(x)M=LM \quad \text{ ، } \lim_{x\to a}(-LM)=-LM$$

طبق قضیه جمع خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)g(x)&\\ &=\lim_{x\to a}[f(x)-L][g(x)-M]+\lim_{x\to a}Lg(x)+\lim_{x\to a}f(x)M\\ &+\lim_{x\to a}(-LM)=0+LM+LM-LM=LM\end{aligned}$$

۴ - قضیه تقسیم حد ها Quotient Theorem For Limits

فرض می کنیم $\lim_{x\to a}f(x)$ و $\lim_{x\to a}g(x)$ هر دو وجود دارند ، و

$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ باشد ، پس $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)]$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

اصل موضوع –۳ Lemma-3

اگر $\lim_{x\to a}g(x)=M>0$ *باشد ، پس یک* $\delta>0$ *وجود دارد به طوری که اگر*

$$0<|x-a|<\delta$$

باشد ، پس $g(x) > \frac{۱}{۲}M$ *است*

اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M <۰$ *باشد ، پس یک* $\delta >۰$ *وجود دارد به طوری که اگر*

$$۰< |x-a| < \delta$$

باشد ، پس $g(x) < \frac{۱}{۲}M$ *است*

اثبات اصل موضوع ـ۳

فرض کنید $\lim_{x\to a} g(x) = M >۰$ *پس طبق تعریف حد در بخش ۱.۱ با* $\varepsilon = \frac{۱}{۲}M$ *یک* $\delta >۰$ *وجود دارد به طوری که اگر* $۰< |x-a| < \delta$ *باشد ، پس* $|g(x) - M| < \frac{۱}{۲}M$ *خواهد بود. در نتیجه اگر* $۰< |x-a| < \delta$ *باشد ، پس*

$$g(x) = M - \big(M - g(x)\big) \geq M - |M - g(x)| > M - \frac{۱}{۲}M = \frac{۱}{۲}M$$

به همین طریق اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M <۰$ *باشد پس یک* $\delta >۰$ *وجود خواهد داشت به طوری که اگر* $۰< |x-a| < \delta$ *باشد ، پس* $|g(x) - M| < \frac{۱}{۲}M$ *خواهد بود. در نتیجه اگر*

$$۰< |x-a| < \delta$$

باشد ، پس

$$g(x) = (g(x) - M) + M \leq |g(x) - M| + M < -\frac{۱}{۲}M + M = \frac{۱}{۲}M$$

اثبات قضیه تقسیم حد ها

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $g(x) \neq ۰$ باشد از اصلا موضوع ـ۳ نتیجه می شود که یک $\delta >۰$ وجود دارد به طوری که اگر

$$۰< |x-a| < \delta$$

باشد ، پس $|g(x)| > \frac{|M|}{۲}$ است. برای چنین x داریم

$$\left|\frac{۱}{Mg(x)}\right| < \frac{۲}{M^۲}$$

لذا

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = \left|\frac{Mf(x) - Lg(x)}{Mg(x)}\right| = |Mf(x) - Lg(x)|\left|\frac{۱}{Mg(x)}\right|$$
$$\leq |Mf(x) - Lg(x)|\left(\frac{۲}{M^۲}\right)$$

در نتیجه برای $۰ < |x - a| < \delta$ تابع

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right|$$

بین تابع صفر و تابع

$$|Mf(x) - Lg(x)|\left(\frac{۲}{M^۲}\right)$$

ساندویچ می شود ، اما طبق قضیه جمع و ضرب عدد ثابت

$$\lim_{x\to a}[Mf(x) - Lg(x)] = M\lim_{x\to a}f(x) - L\lim_{x\to a}g(x) = ML - LM = ۰$$

پس

$$\lim_{x\to a}|Mf(x) - Lg(x)|\left(\frac{۲}{M^۲}\right) = ۰$$

بنا بر قضیه ساندویچی

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = ۰$$

که معادل

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$$

است.

قضیه ۱۷

اگر $\lim_{x\to a} g(x) >0$ باشد ، پس $g(x) >0$ است برای تمام x ها ای که =nبه اندازه کافی به a نزدیک باشند.

نتیجه مستقیم اصل موضوع ۳-

قضیه ۱۸

اگر $\lim_{x\to a} g(x) <0$ باشد ، پس $g(x) <0$ است برای تمام x ها ای که =nبه اندازه کافی به a نزدیک باشند.

نتیجه مستقیم اصل موضوع ۳-

قضیه جانشینی برای حد ها Substitution Theorem For Limits

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=c$ و $f(x)\neq c$ است برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a احتمالا بجز خود همچنین فرض کنید $\lim_{y\to c} g(x)$ وجود دارد ، پس

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big)= \lim_{y\to c} g(y)$$

اثبات

فرض می کنیم $\varepsilon >0$ باشد ، و فرض کنید $\lim_{y\to c} g(y)=L$باشد ، پس یک $\delta_1 >0$ وجود دارد به طوری که اگر $0< |y-c| < \delta_1$ باشد ، پس $|g(y)-L| < \varepsilon$ است.
چون $\lim_{x\to a} f(x) = c$ است و $\delta_1 >0$ است ، پس یک $\delta >0$ وجود دارد به طوری که اگر

$0< |x-a| < \delta$ باشد، پس $|f(x)-c| < \delta_1$ است. طبق فرضیه ، می توانیم دلتا را بقدری کوچک انتخاب کنیم که اگر $0< |x-a| < \delta_1$ باشد ، پس $f(x)\neq c$ باشد. لذا اگر

$0 < |x - a| < \delta$ باشد، پس $0 < |f(x) - c| < \delta_1$ باشد.

و بنا بر این

$$\left|g\big(f(x)\big) - L\right| < \varepsilon$$

است و در نهایت

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = L = \lim_{y\to c} g(y)$$

قضیه ساندویچی Squeezing or Pinching or Sandwich Theorem

فرض کنید داشته باشیم $f(x) \le g(x) \le h(x)$ برای تمام x ها در یک بازه باز اطراف a ، بجز احتمالا خود a ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ باشد پس $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد و $\lim_{x\to a} g(x) = L$

اثبات

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ باشد ، طبق اصل موضوع -۱یک دلتای مثبت مشترک وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x - a| < \delta$ باشد ، پس x در همان بازه باز خواهد بود و

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |h(x) - L| < \varepsilon$$

است. چون $f(x) \le g(x)$ است ، اولین نا معادله بالا می گوید

$$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \qquad (1)$$

به همین طریق ، چون $|h(x) - L| < \varepsilon$ است و $g(x) \le h(x)$ است ، پس

$$g(x) \le h(x) < L + \varepsilon \qquad (2)$$

رابطه های (1) و (2) با هم می گویند که

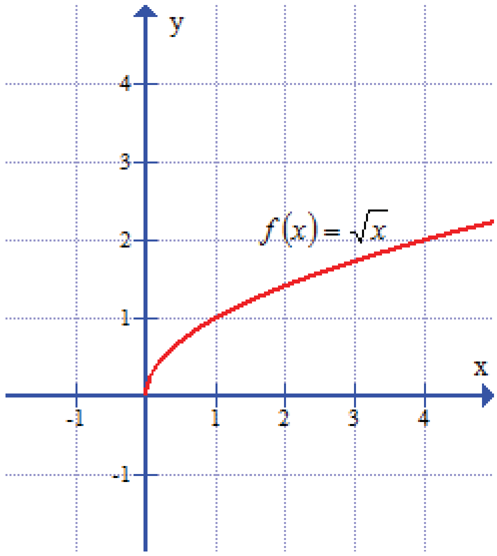
$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

پس

$$|g(x) - L| < \varepsilon$$

۱.۴- حد های یک طرفه One-Sided Limits

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نظر بگیرید. طبق تعریف حد ، $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد ، زیرا $\sqrt{x}$ برای مقادیر $x<0$ تعریف نشدنی است. اما برای مقادیر مثبت x (یعنی مقادیری از x که سمت راست صفر هستند) به صفر نزدیک می شود ، هنگامی که x به صفر نزدیک می شود. به نمودار زیر توجه کنید.



پس $\sqrt{x}$ در نقطه صفر نصف حد دارد ، که می گوییم حد سمت راست در نقطه صفر.

در تعریف حد های سمت راست توابع ، بجای نا معادله $0<|x-a|<\delta$ می نویسیم

$$0<x-a<\delta$$

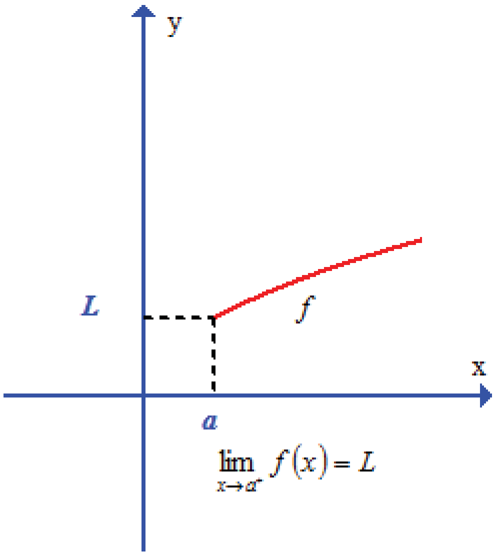
که معادل $0<x<a+\delta$ است ، که می گوید x سمت راست a است. برای حد های سمت چپ هم همین طریق رفتار می کنیم.

تعریف حد سمت راست Right-Hand Limit

فرض می کنیم f یک تابع تعریف شده در یک بازه باز (a,c) باشد. یک عدد L حد $f(x)$ است هنگامی که x از طرف راست به a نزدیک می شود ، اگر برای هر $\varepsilon>0$ یک عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$0<x-a<\delta$$

باشد ، پس $|f(x)-L|<\varepsilon$ باشد ، در این صورت می نویسیم $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ و می گوییم حد سمت راست f در نقطه a وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید.

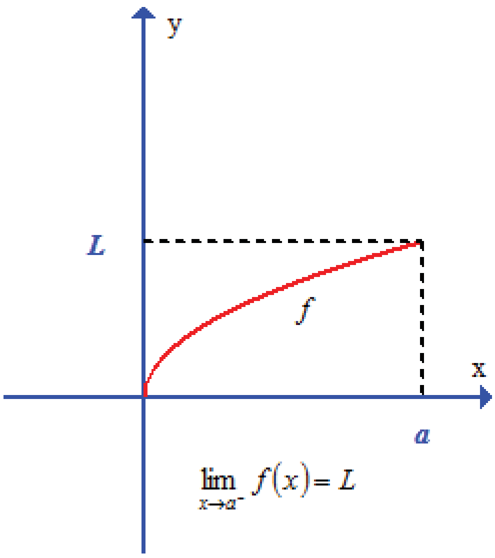


تعریف حد سمت چپ Left-Hand Limit

فرض می کنیم f یک تابع تعریف شده در یک بازه باز (c,a) باشد. یک عدد L حد $f(x)$ است هنگامی که x از طرف چپ به a نزدیک می شود ، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$-\delta < x - a < 0$$

باشد ، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ باشد ، در این صورت می نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ و می گوییم حد سمت چپ f در نقطه a وجود دارد. . به شکل زیر توجه کنید.



حد های سمت راست و حد های سمت چپ را حد های یک طرفه می نامند.

مثال ۱ ــ نشان دهید که $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

پاسخ - برای هر $\varepsilon>0$ فرض می کنیم $\delta=\varepsilon^2$ باشد ، پس اگر $0<x<\delta$ باشد ، خواهیم داشت

$$\left|\sqrt{x}-0\right|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$$

کلیه قضایای بنیادی حد که در بخش ۱.۳ بحث کردیم ، در مورد حد های یک طرفه هم صادق هستند.
همچنین حد های یک طرفه هم منحصر به فرد هستند. به علاوه اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)$ و $\lim_{x\to a^+}g(x)$ وجود داشته باشند ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a^+}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a^+}f(x)+\lim_{x\to a^+}g(x)$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)\lim_{x\to a^+}g(x)$$

اگر $\lim_{x\to a^-}f(x)$ و $\lim_{x\to a^-}g(x)$ وجود داشته باشند ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to a^-}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a^-}f(x)+\lim_{x\to a^-}g(x)$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)\lim_{x\to a^-}g(x)$$

قضایای تقسیم ، جانشینی و ساندویچی هم در مورد حد های یک طرفه صادق هستند.

مثال ۲ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}-3x+2}{x-2\sqrt{x}+1}$$

پاسخ

چون $x^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{x}\right)^3$ و $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ بر اساس قضیه ضرب برای حد های یک طرفه ، داریم
$\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{3}{2}}=0$ لذا

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x^{\frac{۳}{۲}} - ۳x + ۲}{x - ۲\sqrt{x} + ۱} = \frac{۰ - ۰ + ۲}{۰ - ۰ + ۱} = ۲$$

هنگام استفاده از قضیه جانشینی در حد های یک طرفه باید مواظب باشد.

مثال ۳ ـ حد تابع زیر را پیدا کنید.

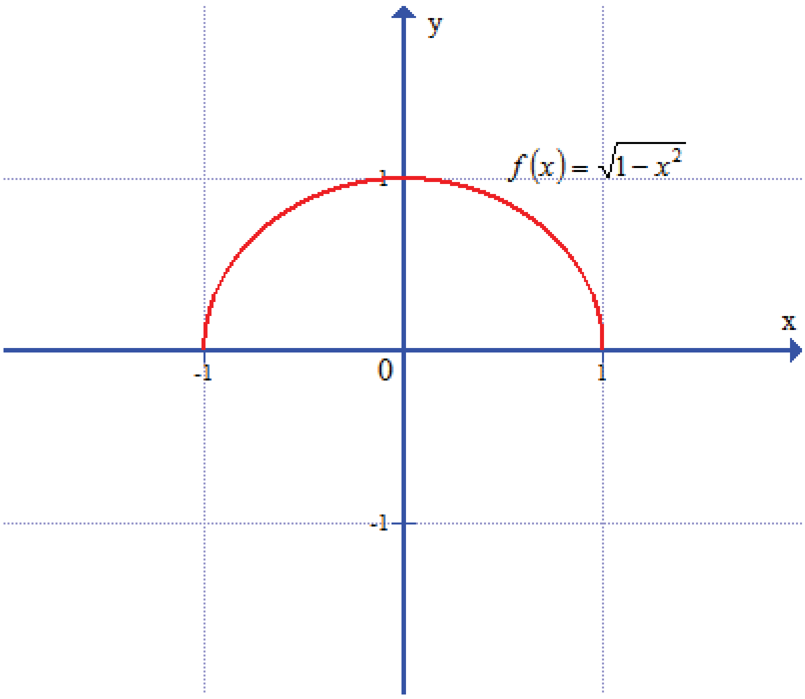
$$\lim_{x\to ۱^-} \sqrt{۱ - x^۲}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = ۱ - x^۲$ باشد ، چون $۱ - x^۲$ از سمت راست به صفر نزدیک می شود ، هنگامی که x از سمت چپ به صفر نزدیک می شود ، پس y از سمت راست به صفر نزدیک می شود ، پس داریم

$$\lim_{x\to ۱^-} \sqrt{۱ - x^۲} = \lim_{y\to ۰^+} \sqrt{y} = ۰$$

به نمودار زیر توجه کنید.



گر چه $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}$ طبق مثال ۳ وجود دارد ، اما $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{1-x^2}$ وجود ندارد. زیرا $1-x^2$ منفی است ، هنگامی که x سمت راست یک قرار دارد و میدانیم که ریشه دوم عدد منفی وجود ندارد.

وجود هم حد سمت چپ و هم حد سمت راست ، وجود حد دو طرفه را تضمین نمی کند. مثال زیر را توجه کنید.

مثال ۴ – حد تابع زیر را هم از سمت راست و هم سمت چپ صفر پیدا کنید. و نشان دهید که f در نقطه صفر هیچ حد دو طرفه ای ندارد.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{برای } x<0\\ 1 & \text{برای } x\ge 0\end{cases}$$

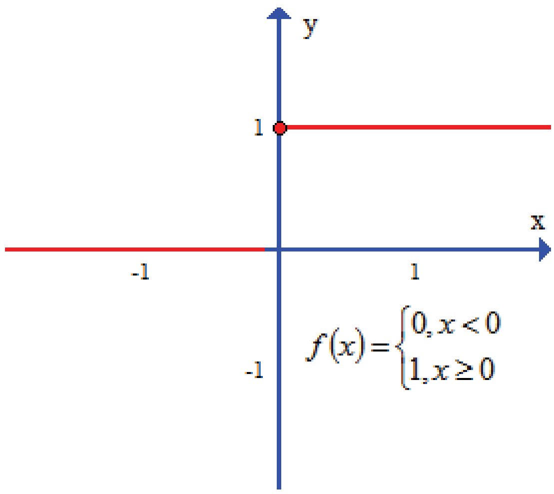
پاسخ

چون $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ پس $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

به همین طریق چون $\lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ پس $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

پس هر دو حد یک طرفه وجود دارند ، اما با هم مساوی نیستند. لذا بر اساس اثبات مثال ۷ بخش ۲.۲ این تابع در نقطه صفر حد دو طرفه ندارد.

در مثال ۴ , تابع f ، هر دو حد یک طرفه در نقطه صفر داشت ، اما هیچ حدی در نقطه صفر نداشت. حد در نقطه صفر وجود ندارد ، زیرا دو حد یک طرفه با هم مساوی نیستند. به نمودار زیر توجه کنید.



قضیه ــشرط لازم و کافی برای وجود حد یک تابع

فرض می‌کنیم f در یک بازه باز اطراف a تعریف شده باشد (البته بجز خود a)

پس $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد ، فقط و فقط اگر هر دو حد یک طرفه وجود داشته باشند ، و

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

اثبات

بر اساس تعریف ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ پس $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

بر عکس ، فرض کنید $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ و فرض کنید $\varepsilon > ۰$ باشد ، پس طبق تعریف حد در بخش ۱.۱ یک $\delta_۱$ و یک $\delta_۲$ وجود دارد ، به طوری که اگر

$$۰ < x - a < \delta_۱$$

باشد، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ است. و اگر

$$-\delta_۲ < x - a < ۰$$

باشد , پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ است.

فرض می کنیم $\delta = min(\delta_۱, \delta_۲)$ باشد (یعنی بین $\delta_۱$ و $\delta_۲$ هر کدام کوچک تر باشد ، انتخاب می کنیم)

پس نتیجه میشود که اگر $۰ < x - a < \delta$ باشد ، پس $|f(x) - L| < \varepsilon$ خواهد بود. یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

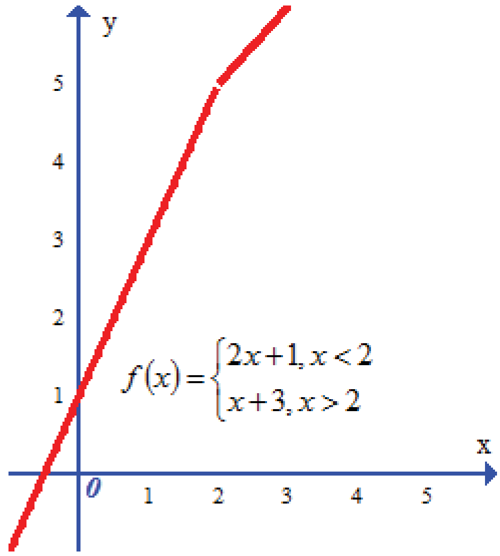
هنگامی که یک تابع چند ضابطه ای داریم ، حد های یک طرفه اغلب برای نشان دادن این که یک حد در یک نقطه ، وجود دارد ، مفید است.

مثال ۵ - تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & \text{برای} \quad x < ۲ \\ x + ۳ & \text{برای} \quad x > ۲ \end{cases}$$

حد $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ



چون $\lim_{x\to ۲}(۲x+۱) = ۵$ و $\lim_{x\to ۲}(x+۳) = ۵$ است، بر اساس قضیه بالا (شرط لازم و کافی برای وجود حد یک تابع)

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۲x+۱) = ۵$$

و

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x+۳) = ۵$$

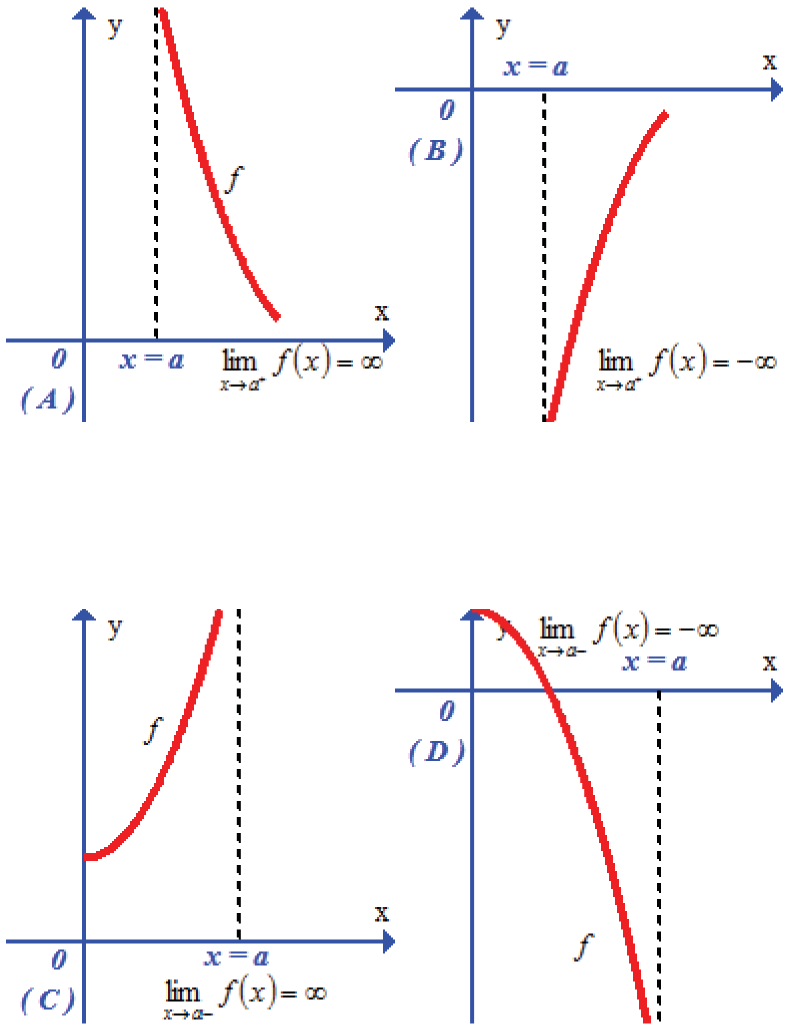
و در نهایت

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = ۵$$

حد های بی نهایت و مجانب های عمودی Infinite Limits and Vertical Asymptotes

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ وجود نداشته باشد ، ممکن است به این علت باشد که هنگام نزدیک شدن x به a از سمت راست ، مقدار $f(x)$ بی نهایت بزرگ (A) ، و یا منفی با قدر مطلق بی نهایت (B) بزرگ شود.

مقدار $f(x)$ ممکن است همین طور عمل کند ، وقتی که حد سمت چپ a وجود نداشته باشد.(C) و (D)



تعریف حد بی نهایت

فرض می کنیم f یک تابع تعریف شده در یک بازه باز (a,c) باشد.

الف – اگر برای هر عددی مانند N یک $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<x-a<\delta$ باشد ، پس $f(x)>N$ است.

در این صورت می گوییم **حد $f(x)$ هنگامی که x به a از سمت راست نزدیک می شود ، ∞ است.** و می نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (شکل (A)

ب - اگر برای هر عددی مانند N یک $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<x-a<\delta$ باشد ، پس $f(x)<N$ است.

در این صورت می گوییم **حد $f(x)$ هنگامی که x به a از سمت راست نزدیک می شود ، $-\infty$ است.** و می نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ **(شکل (B)**

ج –در هر دو حالت بالا ، خط عمودی $x=a$ **مجانب عمودی نمودار f** نامیده می شود. و می گوییم f **در نقطه a از سمت راست حد بی نهایت داد.**

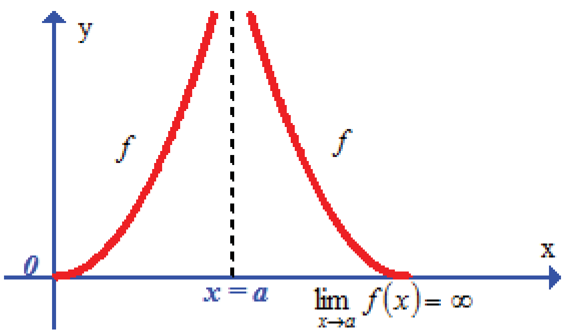
همین تعریف بالا را برای حد های زیر هم بکار می بریم. شکل های (C) و (D)

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

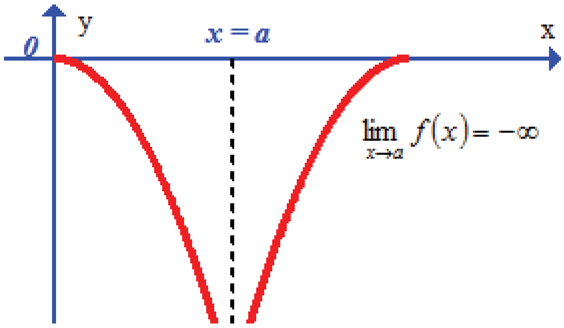
حالا فرض کنید

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$$

بجای دو عبارت بالامی نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ و می گوییم حد $f(x)$ هنگامی که x به a نزدیک می شود ، بی نهایت است. و f در نقطه a حد بی نهایت دارد. شکل زیر



همین موضوع صادق است اگر بجای ∞ داشته باشیم $-\infty$ شکل زیر



توجه – اگر f حد بی نهایت در نقطه a داشته باشد ، آنوقت f حد ی را که در تعریف بخش ۱.۱ کردیم در نقطه a ندارد .

خط $x=a$ یک مجانب عمودی است هر وقت که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ و یا

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

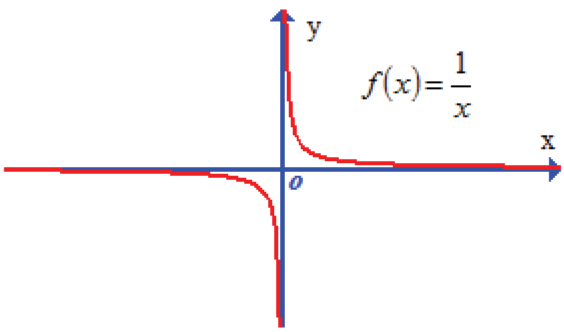
و همچنین هر وقت $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ و یا $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

مثال ۶– نشان دهید که $\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = \infty$ و $\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$ همچنین نشان دهید که خط $x=۰$ یک مجانب عمودی برای نمودار $\frac{۱}{x}$ است.

پاسخ

توجه دارید که برای هر عددی مانند $N>۰$ اگر $۰<x<\frac{۱}{n}$ باشد ، پس $\frac{۱}{x}>N$ خواهد بود. و لذا $\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = \infty$ است. و خط $x=۰$ یک مجانب عمودی نمودار $\frac{۱}{x}$ است.

به همین طریق برای هر عددی مانند $N<۰$ اگر $\frac{۱}{N}<x<۰$ باشد ، پس $\frac{۱}{x}<N$ خواهد بود. و لذا $\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$ است. شکل زیر



چون دو حد یک طرفه در نقطه صفر با هم فرق می کنند ، پس تابع $\frac{1}{x}$ نه حد محدود و نه حد نا محدود دو طرفه در نقطه صفر دارد.

تعریف مجانب عمودی Definition of Vertical Asymptote

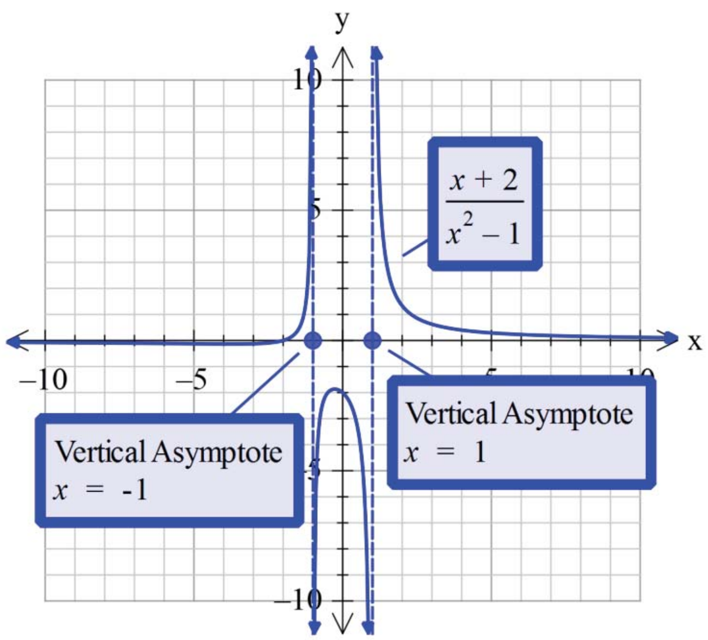
اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ و یا اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ پس می گوییم خط $x = a$ یک مجانب عمودی برای $f(x)$ است.

مثال ۷ – کلیه مجانب های عمودی تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

پاسخ

در شکل زیر نمودار f را ملاحظه می کنید.



اگر a هر عددی بجز ۱ و یا ۱– باشد ، پس $a^2 - 1 \neq 0$ است به طوری که

$$\lim_{x\to a} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a+2}{a^2-1} = \text{یک عدد است}$$

پس تنها مجانب های ممکن ، خطوط $x = 1$ و $x = -1$ هستند. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۲}{x^۲-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۲}{x+۱} * \frac{۱}{x-۱} = \infty$$

و

$$\lim_{x\to -۱^-} \frac{x+۲}{x^۲-۱} = \lim_{x\to -۱^-} \frac{x+۲}{x+۱} * \frac{۱}{x-۱} = \infty$$

پس $x = ۱$ و $x = -۱$ در حقیقت مجانب های عمودی نمودار f هستند. به همین طریق ، می توان نشان داد $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to -۱^+} f(x) = -\infty$ که باز هم نمایان گر این نکته است که $x = ۱$ و $x = -۱$ مجانب های عمودی نمودار f هستند.

تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۵ – ۱ حد های یک طرفه را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x\to -۲^+}\left(x^۳+۳x-۵\right)$

۲) $\lim_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$

۳) $\lim_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲+۳x-۴}{x^۲-۱}$

۴) $\lim_{x\to ۵^+}\dfrac{|x-۵|}{۵-x}$

۵) $\lim_{x\to ۲^-}\left(x-\sqrt{۴-۲x}\right)$

در تمرینات ۱۰ – ۶ حد های بی نهایت را پیدا کنید.

۶) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{۴}{x^۳}$

۷) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-۱}{x^۲}$

۸) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{۳}{x-۲}$

۹) $\lim_{x\to -۱^-} \frac{\pi}{x+۱}$

۱۰) $\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^-} \tan x$

در تمرینات ۲۶ – ۱۱ ، مشخص کنید کدام یک از حد های یک طرفه یا دو طرفه به صورت اعداد وجود دارد ، کدام یک به صورت ∞ و کدام یک به صورت $-\infty$ و کدام یک حد وجود ندارد.

۱۱) $\lim_{x\to \left(\frac{۳}{۲}\right)^-} \sqrt{۳-۲x}$

۱۲) $\lim_{x\to ۵^+} \frac{۱}{\sqrt{x-۵}}$

۱۳) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x\cos ۲x}$

۱۴) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{۱}{x^۲}}$

۱۵) $\lim_{x\to\left(-\frac{۱}{۲}\right)^-} \frac{۴x-۷}{x+\frac{۱}{۲}}$

۱۶) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{۲\left(x^۲-۴\right)}$

۱۷) $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۲-۳}{\left(x-۵\right)^۲}$

۱۸) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{-۱}{\sqrt{۳-x}}$

۱۹) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-۱}$

۲۰) $\lim_{x\to 0^+} \frac{۵+\sqrt{۱+x^۲}}{x}$

۲۱) $\lim_{x\to 0^-} \csc ۲x$

۲۲) $\lim_{x\to 0}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}$

۲۳) $\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{۱}{x-۳}-\frac{۶}{x^{۲}-۹}\right)$

۲۴) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$

۲۵) $\lim_{x\to -۲} f(x)$ اگر $f(x)=\begin{cases}-۱+۴x & \text{اگر } x<-۲\\ -۹ & \text{اگر } x>-۲\end{cases}$

۲۶) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)$ اگر $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}x & \text{اگر } x\le ۳\\ ۳+\frac{۱}{x-۳} & \text{اگر } x>۳\end{cases}$

در تمرینات ۳۳ – ۲۷ کلیه مجانب های عمودی ، اگر وجود داشته باشند ، پیدا کنید.

۲۷) $f(x)=\frac{۱}{x+۴}$

۲۸) $f(x)=\frac{۲x-۹}{x+\sqrt{۲}}$

۲۹) $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۴}$

۳۰) $f(x) = \frac{-۵x + \frac{۲}{۳}}{(x^۲ - ۱۶)(x^۲ + ۱)}$

۳۱) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

۳۲) $f(x) = \tan x$

پاسخ تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۵ – ۱ حد های یک طرفه را پیدا کنید.

۱)
$$\lim_{x\to -۲^+}\left(x^۳+۳x-۵\right)=\lim_{x\to -۲}\left(x^۳+۳x-۵\right)=(-۲)^۳+۳(-۲)-۵$$
$$=-۱۹$$

۲)
$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}(x+۲)=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

۳)
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۴)}{(x+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۴}{x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۴}{x+۱}=\frac{۵}{۲}$$

۴)
$$\lim_{x\to ۵^+}\frac{|x-۵|}{۵-x}$$

چون x ازسمت راست به پنج نزدیک می‌شود ، پس $x-۵>۰$ است. پس

$$\lim_{x\to ۵^+}\frac{|x-۵|}{۵-x}=\lim_{x\to ۵^+}\frac{x-۵}{۵-x}=\lim_{x\to ۵^+}(-۱)=-۱$$

۵)
$$\lim_{x\to ۲^-}\left(x-\sqrt{۴-۲x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}x-\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-۲x}=۲-\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-۲x}$$

حالا فرض می کنیم $y=۴-۲x$ باشد. هنگامی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می شود ، $-۲x$ به -۴ نزدیک می شود از سمت راست. لذا $۴-۲x$ و y از سمت راست به صفر نزدیک می شوند. طبق قضیه جانشینی برای حد های یک طرفه داریم

$$\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-۲x}=\lim_{y\to 0^+}\sqrt{y}=0$$

و در نهایت

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(x-\sqrt{۴-۲x}\right)=۲-0=۲$$

در تمرینات ۱۰ – ۶ حد های بی نهایت را پیدا کنید.

۶) $\lim_{x\to 0^-}\frac{۴}{x^۳}$

اگر $x<۰$ باشد ، پس $x^۳<۰$ است. و لذا $\frac{۴}{x^۳}<۰$ خواهد بود. و در نتیجه $\lim_{x\to 0^-}\frac{۴}{x^۳}=-\infty$

۷) $\lim_{x\to 0}\frac{-۱}{x^۲}$

برای کلیه مقادیر x بجز $x=۰$ خواهیم داشت $\frac{-۱}{x^۲}<۰$ پس

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-۱}{x^۲}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-۱}{x^۲}=-\infty$$

پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{-۱}{x^۲}=-\infty$$

۸) $\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳}{x-۲}$

اگر $x<۲$ باشد ، پس $x-۲<۰$ است , و لذا $\frac{۳}{x-۲}<۰$ خواهد بود. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳}{x-۲}=-\infty$$

۹) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\frac{\pi}{x+۱}$

اگر $x < -۱$ باشد، پس $x+۱ <۰$ است ، پس $\frac{\pi}{x+۱} <۰$ خواهد بود. لذا

$$\lim_{x\to -۱^-}\frac{\pi}{x+۱} = -\infty$$

۱۰) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\tan x$

می دانیم $\tan x >۰$ است برای $۰< x < \frac{\pi}{۲}$

و چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\cos x =۰$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x = ۱$ لذا $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\tan x = \infty$

است.

در تمرینات ۲۶ — ۱۱ ، مشخص کنید کدام یک از حد های یک طرفه یا دو طرفه به صورت اعداد وجود دارد ، کدام یک به صورت ∞ و کدام یک به صورت $-\infty$ و کدام یک حد وجود ندارد.

۱۱) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{۳}{۲}\right)^-}\sqrt{۳-۲x}$

برای $x < \frac{۳}{۲}$ داریم $۳-۲x >۰$ پس بر اساس قضیه جانشینی برای حد های یک طرفه ، داریم

$$\lim_{x\to\left(\frac{۳}{۲}\right)^-}\sqrt{۳-۲x} = \lim_{y\to 0}\sqrt{y} = 0$$

۱۲) $\lim_{x\to ۵^+} \frac{۱}{\sqrt{x-۵}}$

اگر $x > ۵$ باشد ، پس $x - ۵ > ۰$ است. و لذا $\sqrt{x-۵} > ۰$ خواهد بود. طبق قضیه جانشینی برای حد های یک طرفه داریم.

$$\lim_{x\to ۵^+} \sqrt{x-۵} = \lim_{y\to 0^+} \sqrt{y} = 0$$

و در نهایت

$$\lim_{x\to ۵^+} \frac{۱}{\sqrt{x-۵}} = \infty$$

۱۳) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x\cos ۲x}$

بر اساس قضیه ضرب و قضیه جانشینی برای حد های یک طرفه

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x\cos ۲x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} * \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\cos ۲x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} * \lim_{y\to 0^+} \sqrt{\cos y}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} * \lim_{z\to ۱^-} \sqrt{z} = 0 * ۱ = 0$$

۱۴) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\to 0} \frac{۱}{\sqrt{x^۲}} = \lim_{x\to 0} \frac{۱}{|x|} = \infty$

۱۵) $\lim_{x\to\left(-\frac{۱}{۲}\right)^-} \frac{۴x-۷}{x+\frac{۱}{۲}}$

اگر $x < -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $x + \frac{۱}{۲} <۰$ است و همچنین $۴x - ۷ <۰$ است. پس $\frac{۴x-۷}{x+\frac{۱}{۲}} >۰$ خواهد بود. لذا

$$\lim_{x\to\left(-\frac{۱}{۲}\right)^-} \frac{۴x-۷}{x+\frac{۱}{۲}} = \lim_{x\to\left(-\frac{۱}{۲}\right)^-} (۴x-۷) * \frac{۱}{x+\frac{۱}{۲}} = \infty$$

۱۶) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{۲(x^۲-۴)}$

اگر $۰< x < ۲$ باشد ، پس $x + ۱ >۰$ است و $x^۲ - ۴ <۰$ است و لذا $\frac{x+۱}{x^۲-۴} <۰$ خواهد بود.
و لذا

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۱}{۲(x^۲-۴)} = \lim_{x\to ۲^-} \left[\frac{x+۱}{۲} * \frac{۱}{x^۲-۴}\right] = -\infty$$

۱۷) $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۲-۳}{(x-۵)^۲}$

اگر $۴ < x < ۶$ و $x \neq ۵$ باشد ، پس $x^۲ - ۳ >۰$ و $(x-۵)^۲ >۰$ خواهد بود. در نتیجه $\frac{x^۲-۳}{(x-۵)^۲} >۰$ است و لذا

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۳}{(x-۵)^۲}=\lim_{x\to ۵}\left[\left(x^۲-۳\right)*\frac{۱}{(x-۵)^۲}\right]=\infty$$

۱۸) $\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۱}{\sqrt{۳-x}}$

اگر $x<۳$ باشد ، پس $۳-x>۰$ است. و $\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۳-x}=۰$ و لذا

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۱}{\sqrt{۳-x}}=-\infty$$

۱۹) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-۱}$

اگر $-۱<x<۱$ باشد ، پس $۱+x>۰$ و $۱-x>۰$ است. پس

$$\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-۱}=\frac{\sqrt{۱+x}*\sqrt{۱-x}}{-(۱+x)}=\frac{-\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱-x}}\leq ۰$$

لذا

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\left[\left(-\sqrt{۱+x}\right)*\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}\right]=-\infty$$

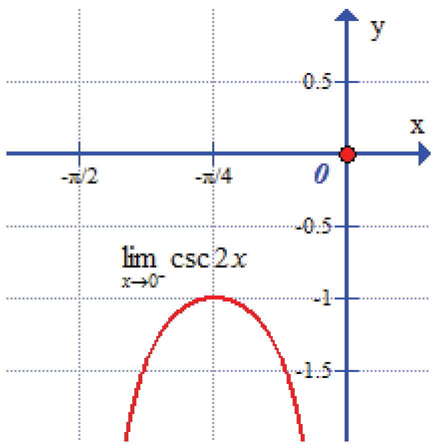
۲۰) $\lim_{x\to 0^+} \frac{۵+\sqrt{۱+x^۲}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[۵+\sqrt{۱+x^۲} * \frac{۱}{x}\right] = \infty$

۲۱) $\lim_{x\to 0^-} \csc ۲x$

اگر $-\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ باشد ، پس $\sin ۲x < ۰$ و $\lim_{x\to 0^-} \sin ۲x = 0$ است. پس

$$\lim_{x\to 0^-} \csc ۲x = \lim_{x\to 0^-} \frac{۱}{\sin ۲x} = -\infty$$

برای این که تصوری عینی از این حد داشته باشید ، نمودار زیر را ملاحظه کنید.



۲۲) $\lim_{x\to 0} \frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{۱-\cos x}{x^۲} * \frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^۲ x}{x^۲} \circ \frac{۱}{۱+\cos x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0}\frac{۱}{۱+\cos x} = ۱ * ۱ * \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۲۳) $\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{۱}{x-۳}-\frac{۶}{x^۲-۹}\right)$

برای $x \neq -۳$ و $x \neq ۳$ داریم

$$\frac{۱}{x-۳}-\frac{۶}{x^۲-۹}=\frac{x+۳}{(x-۳)(x+۳)}-\frac{۶}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{x-۳}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۱}{x+۳}$$

لذا

$$\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{۱}{x-۳}-\frac{۶}{x^۲-۹}\right)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۱}{x+۳}=\frac{۱}{۶}$$

۲۴) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$

چون $\lim_{x\to 0^+}(۱-\sqrt{x})=۱$ پس خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{۱}{x}(۱-\sqrt{x})=\infty$$

۲۵) $\lim_{x\to -۲}f(x)$ اگر $f(x)=\begin{cases}-۱+۴x & \text{اگر } x<-۲\\ -۹ & \text{اگر } x>-۲\end{cases}$

چون $\lim_{x\to -۲^-}f(x)=\lim_{x\to -۲^-}(-۱+۴x)=-۹$ و $\lim_{x\to -۲^+}=\lim_{x\to -۲^+}(-۹)=-۹$ پس

$$\lim_{x\to -۲}f(x)=-۹$$

۲۶) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)$ اگر $f(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & \text{اگر } x\leq ۳ \\ ۳+\frac{۱}{x-۳} & \text{اگر } x>۳ \end{cases}$

$$\lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{+}}\left(۳+\frac{۱}{x-۳}\right)=\lim_{x\to ۳^{+}}\frac{۳x-۸}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^{+}}\left[\left(۳x-۸\right)*\frac{۱}{x-۳}\right]=\infty$$

در تمرینات ۳۳ – ۲۷ کلیه مجانب های عمودی ، اگر وجود داشته باشند ، پیدا کنید.

۲۷) $f(x)=\frac{۱}{x+۴}$

$$\lim_{x\to ۴^{+}}\frac{۱}{x+۴}=\infty$$

پس $x=-۴$ یک مجانب عمودی است.

۲۸) $f(x)=\frac{۲x-۹}{x+\sqrt{۲}}$

$$\lim_{x\to -\sqrt{۲}^{+}}\frac{۲x-۹}{x+\sqrt{۲}}-\infty$$

پس $x=-\sqrt{۲}$ یک مجانب عمودی است.

۲۹) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴}$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴}=\infty=\lim_{x\to -۲^{-}}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴}$$

پس $x=-۲$ و $x=۲$ مجانب های انودی هستند.

۳۰) $f(x)=\dfrac{-۵x+\frac{۲}{۳}}{(x^{۲}-۱۶)(x^{۲}+۱)}$

$$\lim_{x\to ۴^{-}}f(x)=\infty=\lim_{x\to -۴^{+}}f(x)$$

پس $x=-۴$ و $x=۴$ مجانب های عمودی هستند. و چون $x^{۲}+۱>۰$ است برای کلیه مقادیر x پس مجانب های دیگری وجود ندارند.

۳۱) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

چون $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ پس هیچ مجانب عمودی وجود ندارد.

۳۲) $f(x)=\tan x$

چون

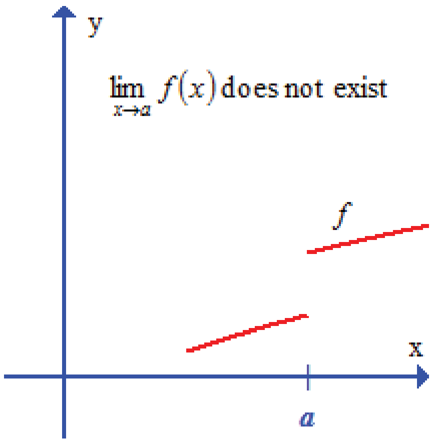
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}+n\pi\right)^{-}}\tan x=\infty\quad,\quad n\in\mathbb{Z}$$

پس $x=\frac{\pi}{۲}+n\pi$ مجانب های عمودی هستند در صورتی که n یک عدد صحیح باشد.

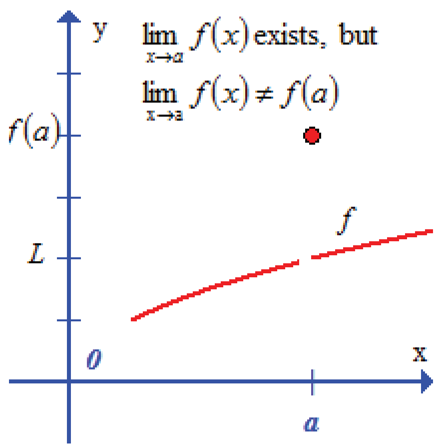
۱.۵- پیوستگی Continuity

فرض می کنیم f تابعی باشد که در نقطه اختیاری a تعریف شده باشد. سه حالت ممکن برای رفتار f در نقطه a وجود دارد.

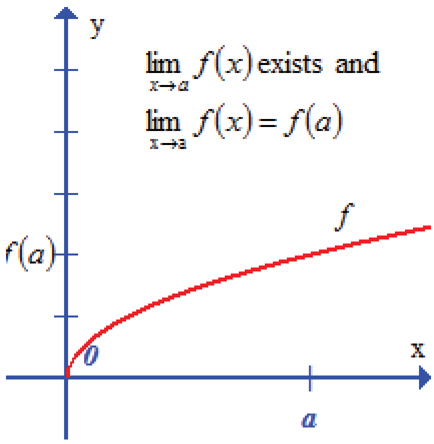
الف - $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد. مانند شکل زیر.



ب - $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد ، اما $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ مانند شکل زیر.



ج - $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دار و $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ مانند شکل زیر.



ملاحظه می کنید که در شکل های الف و ب نمودار در نقطه a پاره شده است. در صورتی که در شکل ج نمودار در نقطه a پاره نشده است. و به نظر می رسد که $f(x)$ به $f(a)$ نزدیک می شود ، هنگامی که x به a نزدیک می شود. این نوع سوم رفتار در حسابان خیلی مهم است.

تعریف پیوستگی Definition of Continuity

تابع f در نقطه a در دامنه اش **پیوسته** **Continuous** است ، اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

تابع f در نقطه a در دامنه اش **نا پیوسته** **Discontinuous** است ، اگر f در نقطه a در دامنه اش ، پیوسته نباشد.

برای این که نشان دهیم تابع f در نقطه a پیوسته است ،باید نشان دهیم

الف - f در نقطه a تعریف شده است.

ب - $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد.

ج - $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ است.

چون پیوستگی بر حسب حد تعریف می شود ، پس می توانیم از طریق قضایای حد که قبلا یاد گرفته ایم , اطلاعاتی در مورد پیوستگی یک تابع پیدا کنیم .مثلا می دانیم که اگر a در دامنه یک تابع گویا مانند

f باشد ، پس $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ است. و لذا هر تابع گویا در کلیه نقاط دامنه اش ، پیوسته است. به همین طریق هر شش توابع مثلثاتی در دامنه شان ، پیوسته هستند.

مثال ۱ – تابع

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۵x + ۴}{x^۲ - ۹}$$

در نظر بگیرید. مشخص کنید در کدام نقاط f پیوسته است.

پاسخ

ملاحظه می کنید که f یک تابع گویا است. چون f در نقاط $x = -۳$ و $x = ۳$ صفر است ، پس این تابع در کلیه نقاط بجز -۳ و ۳ تعریف شده است و لذا در کلیه نقاط بجز -۳ و ۳ پیوسته است.

مثال ۲– مشخص کنید که تابع

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ + ۵x - ۶}$$

در کدام نقاط پیوسته است؟

پاسخ

مخرج کسر در نقاط $x = -۶$ و $x = ۱$ صفر است و لذا تابع فوق در کلیه نقاط بجز -۶ و ۱ تعریف شده است و در نتیجه در کلیه نقاط بجز -۶ و ۱ پیوسته است.

مثال ۳– مشخص کنید تابع زیر در کدام نقاط پیوسته است.

$$f(x) = \frac{x^۲}{۱ + x^۲}$$

پاسخ - چون مخرج این کسر هرگز صفر نمی شود ، پس این تابع در کلیه نقاط پیوسته است.

قضیه پیوستگی جمع ، ضرب و تقسیم توابع

Continuity of Sum , Product and Quotient of Functions Theorem

اگر g و f در نقطه a پیوسته باشند ، و c هر عددی ، پس fg , cf ، $f+g$ در نقطه a پیوسته هستند و اگر $g(a)\neq 0$ باشد ، پس $\frac{f}{g}$ هم در نقطه a پیوسته است.

اثبات

طبق قضیه جمع حد ها داریم

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)$$
$$=(f+g)(a)$$

لذا $f+g$ در نقطه a پیوسته است.

قسمت های دیگر هم به همین طریق می توان ثابت کرد.

مثال ۴

اگر $f(x)=x\sin x+1$ باشد ، نشان دهید که f در کلیه نقاط ، پیوسته است.

پاسخ

میدانیم که توابع ۱ و $\sin x$ ، x در کلیه نقاط پیوسته هستند. چون تابع f از حاصل ضرب توابع $\sin x$ و x و سپس جمع $x\sin x+1$ تشکیل شده است ، پس طبق قضیه های ضرب و جمع f در کلیه نقاط پیوسته است.

قضیه پیوستگی توابع مرکب Continuity of Composite Functions Theorem

اگر f در نقطه a پیوسته باشد ، و g در نقطه $f(a)$ پیوستهه باشد ، پس

$$\lim_{x\to a}g\big(f(x)\big)=g\big(f(a)\big)$$

پس $g\circ f$ در نقطه a پیوسته است.

اثبات

یاد آوری –در بخش ۱.۳ بعد از قضیه جانشینی گفتیم

از قضیه جانشینی نتیجه زیر را می توان استنباط کرد. از چپ به راست بخوانید.

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = c$ و $\lim_{y\to c} g(y) \neq g(c)$ پس $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g(c)$

چون g در نقطه $f(a)$ پیوسته است ، در یاد آوری بالا $c = f(a)$ است ، پس داریم

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\big(f(a)\big)$$

پس $g\circ f$ در نقطه a پیوسته است.

مثال ۵ – اگر $h(x) = \sqrt{x-۱}$ باشد ، نشان دهید که h در نقطه ۲ پیوسته است.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = x - ۱$ باشد. و $g(y) = \sqrt{y}$ باشد ، پس $h = g\circ f$ است.می دانیم که f در نقطه ۲ پیوسته است ، و g در $f(۲) = ۱$ پیوسته است. زیرا تابع ریشه دوم برای کلیه اعداد مثبت پیوسته است. پس طبق قضیه پیوستگی توابع مرکب ، h پیوسته است.

مثال ۶ – اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ باشد ، یک تابع به نام $f_۰$ را پیدا کنید ، به طوری که $f_۰$ پیوسته باشد ، و $f_۰(x) = f(x)$ باشد برای کلیه $x \neq ۰$

پاسخ

چون

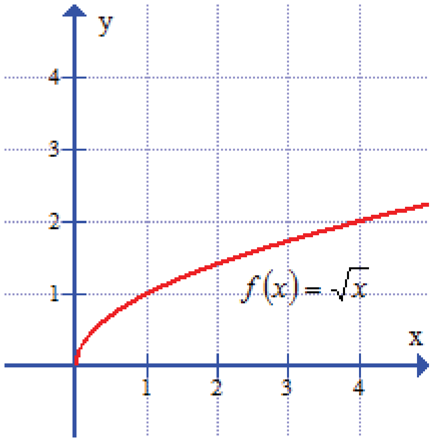
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ۱$$

پس فرض می کنیم

$$f_\circ(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{برای} \quad x\neq \circ \\ ۱ & \text{برای} \quad x=\circ\end{cases}$$

ملاحظه می کنید که $f_\circ$ در نقطه صفر پیوسته است ، زیرا $\lim_{x\to 0} f_\circ(x)=۱=f_\circ(0)$ است. به علاوه همان طور که مساله خواسته $x\neq 0$ برای $f_\circ(x)=f(x)$

در مثال شماره ۵ بخش ۱.۲ نشان دادیم که $a>\circ$ برای $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ است. این یعنی تابع ریشه دوم برای کلیه اعداد مثبت ، پیوسته است. شکل زیر



اما همان طور که در ابتدای بخش ۱.۴ گفتیم ، $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد. در نتیجه تابع ریشه دوم در نقطه صفر پیوسته نیست. اما این تابع در نقطه صفر حد سمت راست دارد. در حقیقت

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=\sqrt{0}$$

پس می گوییم تابع ریشه دوم از سمت راست صفر ، پیوسته است.

تعریف پیوستگی یک طرفه Definition of One-sided Continuity

یک تابع مانند f از سمت راست نقطه a در دامنه اش پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

یک تابع مانند f از سمت چپ نقطه a در دامنه اش پیوسته است ، اگر

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال ۷ – نشان دهید که تابع زیر از سمت راست صفر پیوسته است ، اما از سمت چپ صفر پیوسته نیست.

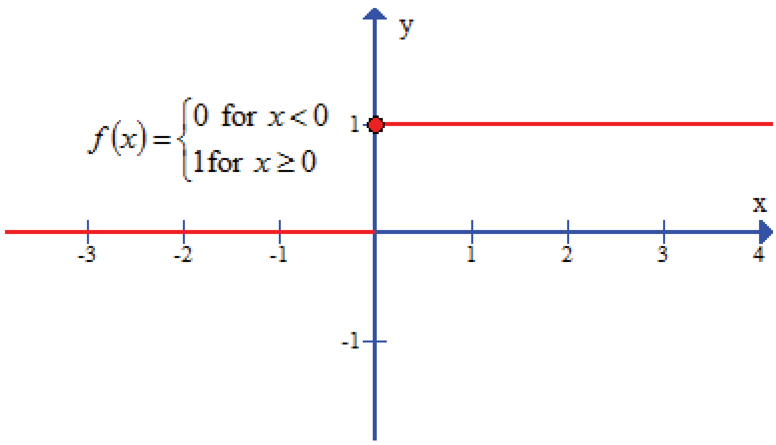
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{برای} \quad x < 0 \\ 1 & \text{برای} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

پاسخ

چون $\lim_{x \to 0^+} f(x) = ۱ = f(0)$ پس f از سمت راست صفر پیوسته است. و چون

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$$

پس f از سمت چپ صفر پیوسته نیست.



پس یک تابع در نقطه a پیوسته است اگر فقط و فقط هم از سمت راست و هم از سمت چپ a پیوسته باشد. این موضوع از قضیه بخش ۱.۴ که در ذیل مجددا می آوریم ، نتیجه می شود.

یاد آوری

قضیه –شرط لازم و کافی برای وجود حد یک تابع

فرض می‌کنیم f در یک بازه باز اطراف a تعریف شده باشد (البته بجز خود a)

پس $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد ، فقط و فقط اگر هر دو حد یک طرفه وجود داشته باشند ، و

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

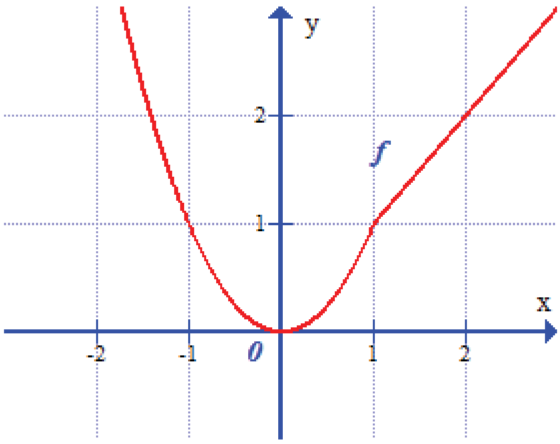
در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

مثال ۸ ـ نشان دهید که تابع زیر در نقطه ۱ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{برای} \quad x \le ۱ \\ x & \text{برای} \quad x > ۱ \end{cases}$$

پاسخ



چون $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} x^۲ = ۱ = f(۱)$

و $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} x = ۱ = f(۱)$

پس f هم از سمت راست و هم از سمت چپ ۱ پیوسته است ، لذا f در نقطه ۱ پیوسته است.

تعریف پیوستگی در بازه ها Definition of Continuity on Intervals

یک تابع در **بازه باز** (a,b) **پیوسته است** ، اگر در کلیه نقاط (a,b) پیوسته باشد

یک تابع در **بازه بسته** $[a,b]$ **پیوسته است** ، اگر در کلیه نقاط $[a,b]$ پیوسته باشد و همچنین از سمت راست a و از سمت چپ b پیوسته باشد.

چنین تعریف هایی هم برای پیوستگی در بازه های نیمه باز مانند
$(a,\infty), [a,\infty), (-\infty,a), (-\infty,a], (-\infty,\infty)$

هم صادق است.

مثلا تابع ریشه دوم در بازه $[0,\infty)$ پیوسته است. زیرا این تابع در کلیه نقاط در $[0,\infty)$ پیوسته است و از سمت راست صفر هم پیوسته است.

علاوه بر این تمام توابع چند جمله ای در بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته هستند. همچنین تمام توابع گویا ، توابع مثلثاتی ، توابع به شکل $x^{\frac{m}{n}}$ در هر بازه بازی که در آنها ، آن توابع تعریف شده باشند ، پیوسته هستند.

مثال ۹ - نشان دهید که تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ در بازه $[-۲,۲]$ پیوسته است.

پاسخ

چون تابع $\sqrt{x}$ برای $x\geq ۰$ تعریف شده است ، و چون $۴-x^۲\geq ۰$ است فقط و فقط اگر $-۲\leq x\leq ۲$ باشد ، پس نتیجه می شود که دامنه f بازه $[-۲,۲]$ است. از طرف دیگر ملاحظه می کنیم که

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{۴-x^۲}=\sqrt{۴-a^۲}=f(x) \quad \text{اگر} \quad -۲<a<۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-x^۲}=\sqrt{۴-۲^۲}=۰=f(۲)$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^+}\sqrt{۴-x^۲}=\sqrt{۴-(-۲)^۲}=۰=f(-۲)$$

لذا f در بازه $[-۲,۲]$ پیوسته است.

بسیاری از توابع که در زندگی روز مره کاربرد دارند ، در بازه های بسته تعریف شده و پیوسته هستند.
مانند چند مثال زیر

۱ – درجه سانتی گراد به صورت تابعی از درجه فارنهایت

$$C(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲) \quad \text{برای} \quad x \geq -۲۷۳.۱۵$$

۲ – حجم یک کره به صورت تابعی از شعاع آن.

$$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \quad \text{برای} \quad r \geq ۰$$

۳ – سرعت توپ تنیس که برای سرویس زدن به بالا پرتاب می شود به صورت تابعی از زمان

$$v(t) = ۱۶ - ۳۲t \quad ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲}$$

۴ – پاسخ یک عضو به یک دارو به صورت تابعی از قدرت دارو

$$R(x) = \frac{x}{a + bx} \quad \text{برای} \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

$$a > ۰ \quad ، \quad b > ۰$$

۵ – هزینه تولید به صورت تابعی از مقدار تولید.

$$C(x) = ۴\sqrt{x + ۳} \quad ۰ \leq x \leq ۵۰$$

تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۸ – ۱ مشخص کیند آیا f در نقطه a پیوسته است یا نه. اگر تابع در نقطه a پیوسته است ، مشخص کنید که آیا تابع از سمت راست و یا از سمت چپ a پیوسته است و یا هیچ کدام از این دو حالت.

۱) $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳; a = ۲$

۲) $f(x) = \dfrac{x^{۴} + x^{۲-۲}}{x^{۲} - ۱}; a = ۰$

۳) $f(x) = \begin{cases} ۳ & \text{پرای } x \neq -۱ \\ 0 & \text{پرای } x = -۱ \end{cases}$ ؛ $a = -۱$

۴) $f(x) = \begin{cases} -۱ & \text{پرای } x < ۰ \\ 0 & \text{پرای } x = ۰ \\ ۱ & \text{پرای } x > ۰ \end{cases}; a = ۰$

۵) $f(x) = \sqrt{۱ - x}; a = \frac{۱}{۲}, ۱$

۶) $f(t) = t^{۲}\sqrt{t^{۲} - t^{۴}}; a = ۰, ۱$

۷) $f(z) = \tan\sqrt{z - \frac{\pi}{۲}}; a = \frac{\pi}{۲}$

۸) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۱+\tan z} & \text{پرای } ۰< z<\dfrac{\pi}{۲}\\ 0 & \text{پرای } z\geq\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$ ؛ $a=\dfrac{\pi}{۲}$

در تمرینات ۱۵ – ۹ توضیح دهید که چرا f در بازه های داده شده ، پیوسته است.

۹) $f(x)=\sqrt{۲}-\pi x^{۴}+x^{۱۰};(-\infty,\infty)$

۱۰) $f(x)=\sqrt{x+۳};[-۳,\infty)$

۱۱) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{پرای } x\neq ۰\\ ۱ & \text{پرای } x=۰\end{cases}$ $;(-\infty,\infty)$

۱۲) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}-x^{۴}}};(۰,۱)$

۱۳) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۱-x}{۳x-۲}};(\dfrac{۲}{۳},۱]$

۱۴) $f(x)=\tan x;\left(-\dfrac{\pi}{۲},\dfrac{\pi}{۲}\right)$

۱۵) $\cot\left(\frac{1}{x}\right); \left(\frac{1}{\pi}, \infty\right)$

۱۶ – تابع بزرگترین عدد صحیح $f(x) = \lfloor x \rfloor$ کجا نا پیوسته است؟ (کجا گسسته است؟)

۱۷ – فرض کنید g در نقطه a پیوسته است. فرض کنید $h(x) = g(x+b)$ است ، برای تمام x ها ، بطوری که $x+b$ در دامنه g باشد. نشان دهید که h در $a-b$ پیوسته است.

۱۸ – نشان دهید که عبارت f در نقطه a پیوسته است ، معادل شرط زیر است.

برای هر $\varepsilon > 0$, یک عدد مانند $\delta > 0$

وجود دارد بطوری که اگر $|x-a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

است.

۱۹ – تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 1 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

نشان دهید که f برای هر عدد حقیقی نا پیوسته است.(پیوسته نیست)

۲۰

فرض کنید یک عدد غیر از صفر مانند M وجود دارد ، بطوری که برای کلیه x ها در یک بازه باز که شامل a است ، داشته باشیم

$$|f(x) - f(a)| \le M|x-a|$$

نشان دهید که f در نقطه a پیوسته است.

پاسخ تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۸ – ۱ مشخص کیند آیا f در نقطه a پیوسته است یا نه. اگر تابع در نقطه a پیوسته است ، مشخص کنید که آیا تابع از سمت راست و یا از سمت چپ a پیوسته است و یا هیچ کدام از این دو حالت.

۱) $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳; a = ۲$

پاسخ - تابع چند جمله ای داریم ، لذ ا در کلیه نقاط در دامنه اش از جمله در ۲ پیوسته است.

۲) $f(x) = \dfrac{x^۴ + x^{۲-۲}}{x^۲ - ۱}; a =۰$

پاسخ - چون تابع گویا داریم و مخرج کسر در نقطه صفر، $x^۲ - ۱ = 0^۲ - ۱ = -۱ \neq 0$است ، پس در نقطه صفر پیوسته است.

۳) $f(x) = \begin{cases} ۳ & \text{پرای } x \neq -۱ \\ 0 & \text{پرای } x = -۱ \end{cases}$ ؛ $a = -۱$

پاسخ - پیوسته نیست ، نه از سمت چپ و نه از سمت راست ۱−

۴) $f(x) = \begin{cases} -۱ & \text{پرای } x <۰ \\ 0 & \text{پرای } x =۰ \\ ۱ & \text{پرای } x >۰ \end{cases}; a =۰$

پاسخ - پیوسته نیست ، نه از سمت راست و نا از سمت چپ صفر.

۵) $f(x) = \sqrt{۱ - x}; a = \frac{۱}{۲}, ۱$

پاسخ - در $\frac{۱}{۲}$ پیوسته است. از سمت چپ ۱ هم پیوسته است.

۶) $f(t) = t^۲\sqrt{t^۲ - t^۴}; a = ۰, ۱$

پاسخ - در نقطه صفر پیوسته است. از سمت چپ ۱ هم پیوسته است.

۷) $f(z) = \tan\sqrt{z - \frac{\pi}{۲}}; a = \frac{\pi}{۲}$

پاسخ - پیوسته است

۸) $f(z) = \begin{cases} \frac{۱}{۱ + \tan z} & \text{پرای } ۰ < z < \frac{\pi}{۲} \\ 0 & \text{پرای } z \geq \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ ؛ $a = \frac{\pi}{۲}$

پاسخ - در $a = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

در تمرینات ۱۵ — ۹ توضیح دهید که چرا f در بازه های داده شده ، پیوسته است.

۹) $f(x) = \sqrt{۲} - \pi x^۴ + x^{۱۰}; (-\infty, \infty)$

پاسخ - تابع f یک چند جمله ای است ، پس در $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

۱۰) $f(x) = \sqrt{x + ۳}; [-۳, \infty)$

پاسخ - چون $x + ۳$ در $(-\infty, \infty)$ پیوسته است ، تابع ریشه دوم در $[0,, \infty)$ پیوسته است ، و $x + ۳ \geq 0$ است برای x در بازه $[-۳, \infty)$ بنا بر این طبق قضیه توابع مرکب ، f در $[-۳, \infty)$ پیوسته است.

$$۱۱)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{برای } x\neq ۰\\ ۱ & \text{برای } x=۰\end{cases}\quad ;(-\infty,\infty)$$

پاسخ - چون $\sin x$ و x هر دو در $(-\infty,\infty)$ پیوسته هستند ، و چون $x\neq 0$ است در $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ پس طبق قضیه پیوستگی جمع ، ضرب و تقسیم توابع ، f در $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ پیوسته است. همچنین چون

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=۱=f(0)$$

پس f در نقطه صفر هم پیوسته است ، و لذا f در $(-\infty,\infty)$ پیوسته است.

$$۱۲)\quad f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-x^۴}};(۰,۱)$$

پاسخ - چون $x^۲-x^۴$ در بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است و تابع ریشه دوم در بازه $[0,\infty)$ پیوسته است و $x^۲-x^۴>0$ برای x در بازه $(0,۱)$ ، و قضیه پیوستگی توابع مرکب می گوید $\sqrt{x^۲-x^۴}$ در بازه $(0,۱)$ پیوسته است.

تابع ثابت ۱ در بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است ، قضیه جمع ، ضرب و تقسیم حد ها می گوید که f در بازه $(0,۱)$ پیوسته است.

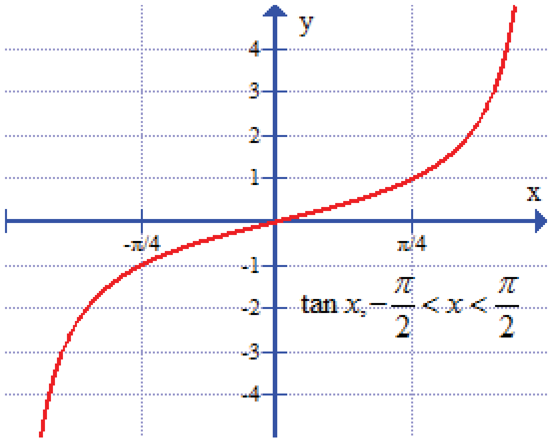
$$۱۳)\quad f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{۳x-۲}};\left(\frac{۲}{۳},۱\right]$$

پاسخ – برای $\frac{۲}{۳}<x\leq ۱$ عبارت های $۱-x\geq 0$ و $۳x-۲>0$ هستند , و بنا بر این برای $\frac{۲}{۳}<x\leq ۱$ عبارت $\frac{۱-x}{۳x-۲}\geq 0$ است. چون $\frac{۱-x}{۳x-۲}$ یک تابع گویا است ، پس در بازه $\left(\frac{۲}{۳},۱\right]$

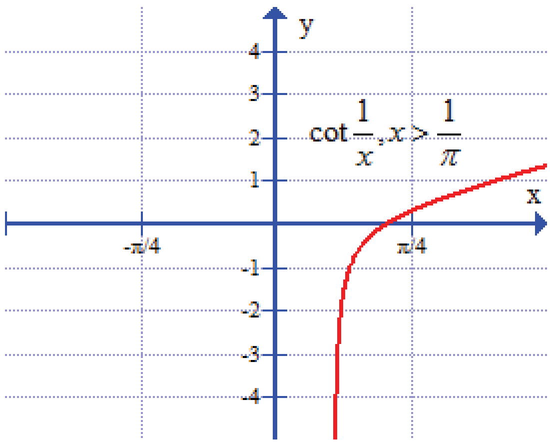
پیوسته است و چون تابع ریشه دوم در بازه $[0,\infty)$ پیوسته است ، طبق قضیه پیوستگی توابع مرکب ، f در بازه $\left(\frac{۲}{۳},۱\right]$ پیوسته است.

۱۴) $f(x) = \tan x; \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$

پاسخ –چون $\cos x \neq 0$ است در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ و چون هم $\sin x$ و هم $\cos x$ در این بازه ، پیوسته هستند ، پس طبق قضیه تقسیم حد ها ، f در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ پیوسته است. به شکل زیر توجه کنید.



۱۵) $\cot\left(\frac{۱}{x}\right); \left(\frac{۱}{\pi}, \infty\right)$



پاسخ –چون $\frac{۱}{x}$ در بازه $(0,\infty)$ پیوسته است و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ در بازه $(0,\pi)$ پیوسته است و $0 < \frac{۱}{x} < \pi$ است اگر x در بازه $\left(\frac{۱}{\pi},\infty\right)$ باشد ، لذا طبق قضیه حد توابع مرکب f در بازه $\left(\frac{۱}{\pi},\infty\right)$ پیوسته است. به شکل بالا توجه کنید.

۱۶ – تابع بزرگترین عدد صحیح $f(x) = \lfloor x \rfloor$ کجا نا پیوسته است؟ (کجا گسسته است؟)

پاسخ - تابع بزرگترین عدد صحیح برای کلیه اعداد صحیح نا پیوسته است.

اثبات - فرض می کنیم k هر عدد صحیحی باشد. نشان می دهیم که

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k - ۱$$

و

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

برای رابطه اول فرض می کنیم (x_n) هر دنباله ای باشد همگرا به طرف k با $x_n < k$ برای تمام n ها. پس $x_n > k - ۱$ است برای تمام n های به اندازه کافی بزرگ ، و برای چنین n ی داریم $\lfloor x_n \rfloor = k - ۱$ و لذا $\lfloor x_n \rfloor \longrightarrow k - ۱$ در نتیجه خواهیم داشت

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k - ۱$$

برای رابطه دوم فرض می کنیم (x_n) هر دنباله ای باشد همگرا به طرف k با $x_n > k$ برای تمام n ها پس برای چنین n ی داریم $\lfloor x_n \rfloor = k$ و لذا $\lfloor x_n \rfloor \longrightarrow k$ در نتیجه خواهیم داشت

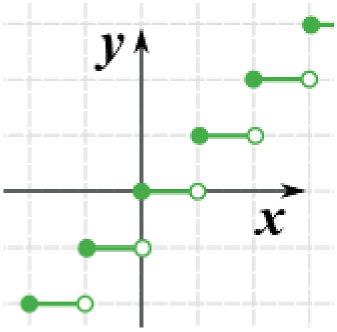
$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

ملاحظه می شود

$$\lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor$$

یعنی حد سمت راست k با حد سمت چپ مساوی نیست و در نتیجه تابع بزرگترین عدد صحیح برای کلیه اعداد صحیح ناپیوسته است.

از طرف دیگر اگر c یک عدد غیر صحیح باشد ، فرض می کنیم δ یک عدد مثبت کوچکتر از اعداد $(k+۱)-c$ و $c-k$ باشد ، پس $k < c-\delta < c+\delta, k+۱$ است به طوری که $f(x)=k$ است برای کلیه x ها در $(c-\delta, c+\delta)$ پس طبق قضیه پیوسته بودن توابع ثابت ، f در c پیوسته است. و در نتیجه f دقیقا برای اعداد صحیح ناپیوسته است.به شکل زیر مراجعه کنید.



۱۷ – فرض کنید g در نقطه a پیوسته است. فرض کنید $h(x)=g(x+b)$ است ، برای تمام x ها ، بطوری که $x+b$ در دامنه g باشد. نشان دهید که h در $a-b$ پیوسته است.

پاسخ – اگر $f(x)=x+b$ باشد ، پس $h=g\circ f$ است. چون f در $a-b$ پیوسته است ، و g در $a=f(a-b)$ پیوسته است ، لذا h در $a-b$ پیوسته است ، طبق قضیه پیوستگی توابع مرکب.

۱۸ – نشان دهید که عبارت f در نقطه a پیوسته است ، معادل شرط زیر است.

برای هر $\varepsilon >۰$,یک عدد مانند $\delta >۰$

وجود دارد بطوری که اگر $|x-a|<\delta$ باشد ، پس

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

است.

پاسخ – عبارت f در نقطه a پیوسته است ، معادل رابطه $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ می باشد. که باز هم معادل جمله زیر است.

" برای هر $\varepsilon >۰$ یک $\delta >۰$ وجود دار ، بطوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ باشد ، پس $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ است. "

و چون $f(x) = f(a)$ است هنگامی که $x = a$ باشد ، می توان بجای عبارت

$$0 < |x - a| < \delta$$

نوشت

$$|x - a| < \delta$$

۱۹ – تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ ۱ & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

نشان دهید که f برای هر عدد حقیقی نا پیوسته است.(پیوسته نیست)

پاسخ –فرض می کنیم a هر عدد حقیقی باشد و فرض کنیم $0 < \varepsilon < ۱$ باشد. اگر دلتا هر عدد مثبتی باشد ، پس در بازه $(a - \delta, a + \delta)$ یک عدد گنگ مانند x و یک عدد گویا مانند y وجود دارد. اگر a گویا باشد ، پس $\varepsilon > \left|0 - ۱\right| = |f(x) - f(a)|$ است. در صورتی که a گنگ باشد ، پس $\varepsilon < \left|۱ - 0\right| = |f(y) - f(a)|$ است و لذا f در نقطه a پیوسته نیست.

۲۰

فرض کنید یک عدد غیر از صفر مانند M وجود دارد ، بطوری که برای کلیه x ها در یک بازه باز که شامل a است ، داشته باشیم

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$$

نشان دهید که f در نقطه a پیوسته است.

پاسخ – فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ و $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ باشد. اگر $|x - a| < \delta$ باشد ، پس

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a| < M\delta = M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon$$

لذا $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ و در نتیجه f در نقطه a پیوسته است.

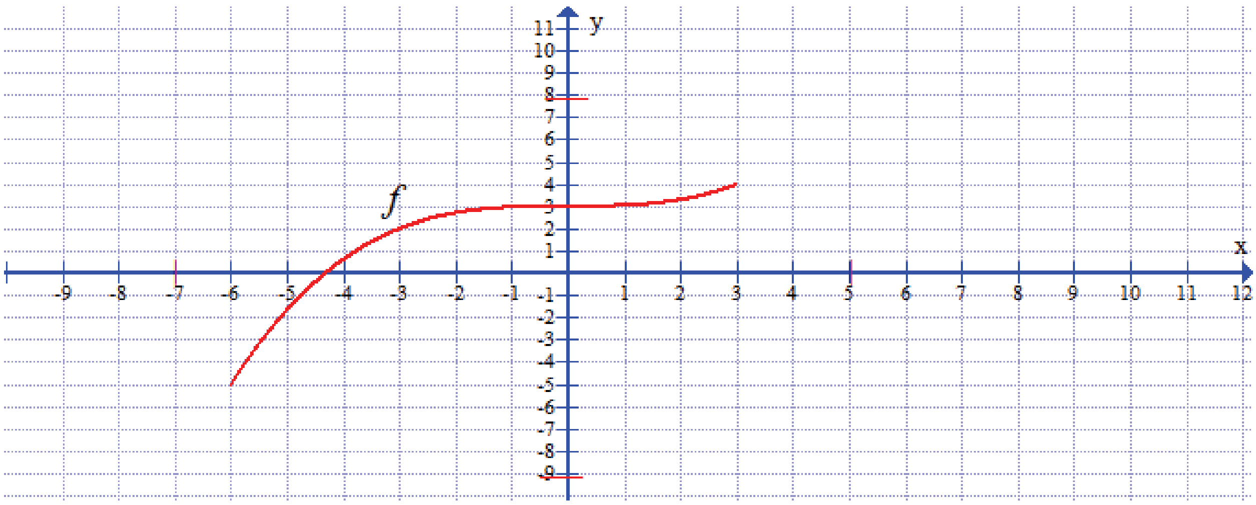
۱.۶ - قضیه مقدار میانی Intermediate Value Theorem

این بخش آخر فصل اول اختصاص دارد به یک قضیه مهم در مورد توابع پیوسته. یعنی قضیه مقدار میانی .

همانطور که خواهیم دید ، قضیه مقدار میانی را می توان بکار برد که نشان دهیم هر عدد نا منفی ، یک ریشه دوم دارد.

همچنین این قضیه را می توان برای مشخص کردن این که توابع پیوسته ، کجا مثبت ، کجا منفی و کجا صفر هستند بکار برد.

این قضیه تاکید می کند که برد یک تابع پیوسته در یک بازه بسته نمی تواند هیچ یک از مقادیر میانی را حذف کند و نا دیده بگیرد. مثلا اگر یک تابع مانند f در بازه $[-۶,۳]$ پیوسته باشد و اگر $f(-۶) = -۵$ و $f(۳) = ۴$ باشد ، پس هر عددی بین -۵ و ۴ باید در برد f باشد. شکل زیر.



قضیه مقدار میانی Intermediate Value Theorem

فرض کنید f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته است. فرض کنید p هر عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد , بطوری که $f(a) \leq p \leq f(b)$ و یا $f(b) \leq p \leq f(a)$ باشد. پس یک عدد مانند c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که $f(c) = p$ است.

از نظر تصویری ، قضیه مقدار میانی ، می گوید که نمودار یک تابع پیوسته نمی تواند از روی یک خط افقی بپرد. Figure (A) شکل (A)

به زبان فیزیک ، می‌توان قضیه مقدار میانni این طور تصور کرد که شما نمی توانید از یک رود خانه بی نهایت طولانی عبور کنید ، بدون این که خیس شود و یا از روی آن بپرید. Figure (B) شکل (B)

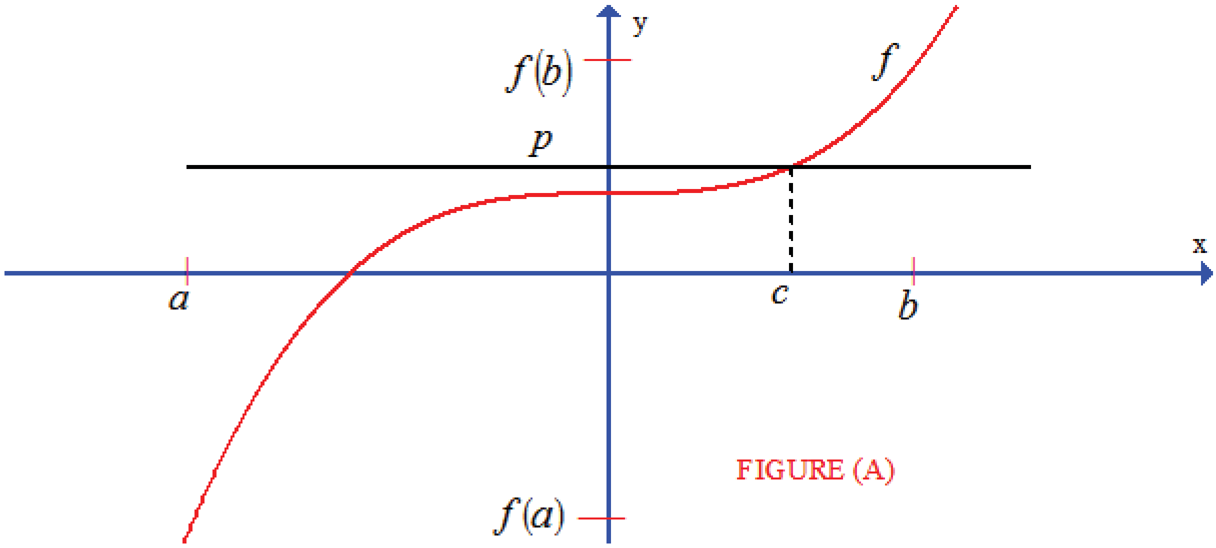


FIGURE (A)

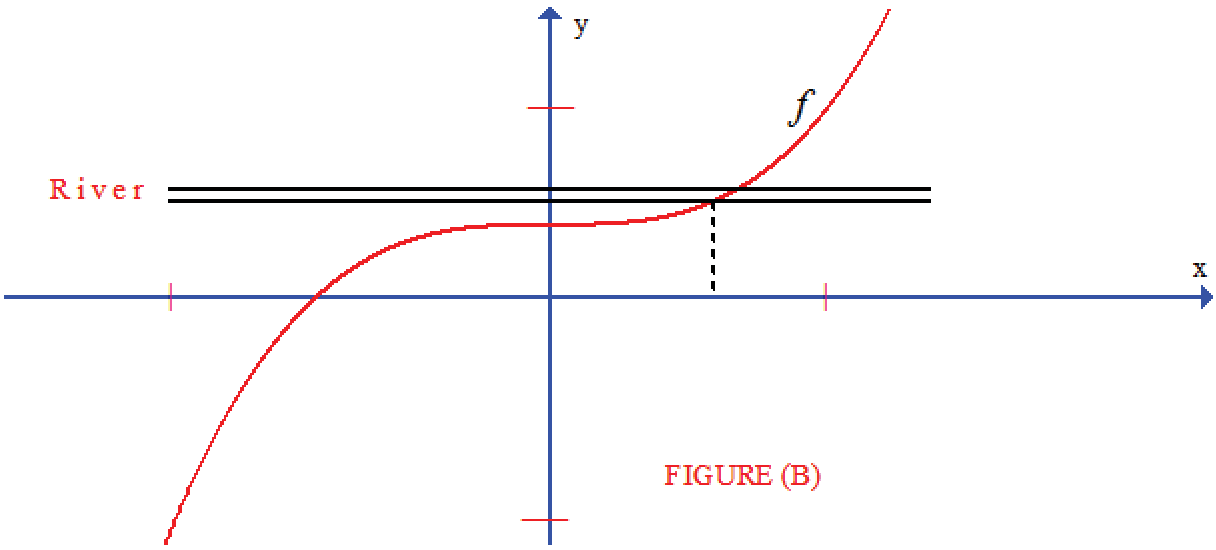


FIGURE (B)

دوتعریف مهم : قبل از اثبات قضیه مقدار میانی به دو تعریف زیر توجه کنید.

Definition of Upper bound and Lower Bound تعریف بالا کران و پایین کران

الف – یک مجموعه از اعداد بنام S **از طرف بالا کران دار** است **Bounded Above**

اگر یک عدد مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای تمام x ها در S داشته باشیم

$x \leq M$

به چنین عدد M گفته می شود **بالا کران** S

ب – یک مجموعه از اعداد بنام S **از طرف پایین کران دار** است **Bounded below**

اگر یک عدد مانند m وجود داشته باشد به طوری که برای تمام x ها در S داشته باشیم

$$m \leq x$$

به چنین عدد m گفته می شود **پایین کران** S

ج –یک مجموعه را **کران دار** **Bounded** می گویند اگر از بالا و از پایین محدود باشد.

تعریف کوچک ترین کران بالا Definition of Least Upper Bound

یک عدد مانند M کوچک ترین کران بالای یک مجموعه مانند S است اگر M یک کران بالای S باشد و هیچ بالا کران S از M کوچک تر نباشد.

تعریف بزرگ ترین کران پایین Definition of Greatest Lower Bound

یک عدد مانند m بزرگ ترین کران پایین یک مجموعه مانند S است اگر m یک کران پایینی S باشد و هیچ پایین کران S از m بزرگ تر نباشد.

اثبات قضیه مقدار میانی

اگر $f(a) = p$ و یا $f(b) = p$ باشد، پس فرض می کنیم $c = a$ و یا $c = b$ است. در غیر این صورت ، یا $f(a) < p < f(b)$ است و یا $f(b) < p < f(a)$ است. اثبات هر یک از این دو حالت شبیه هم است ، پس حالت $f(a) < p < f(b)$ را انتخاب می کنیم.

فرض می کنیم S مجموعه ای از تمام x ها در بازه $[a, b]$ باشد ، به طوری که $f(x) < p$ باشد. پس a در S است و b کران بالایی S است. طبق تعریف کوچک ترین کران بالا ، S یک کوچک ترین کران بالا دارد ، که ما آنرا c می نامیم. توجه دارید که $a \leq c \leq b$ است. یا $f(x) < p$ یا $f(c) > p$ و یا $f(c) = p$ است. اگر $f(c) < p$ باشد ، پس $c < b$ چون طبق فرض خودمان $p < f(b)$ است. و $f(c) + \varepsilon < p$ برای یک اپسیلن بقدر کافی کوچک. چون f درنقطه c پیوسته است ، یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $|x - c| < \delta$ باشد ، پس x در $[a, b]$ است و $|f(c) - f(x)| < \varepsilon$ است. اگر $x = x + \frac{\delta}{۲}$ فرض کنیم ، پس داریم $\left|f(c) - f\left(c + \frac{\delta}{۲}\right)\right| < \varepsilon$ است و یا $f\left(c + \frac{\delta}{۲}\right) < f(c) + \varepsilon < p$

اما $c + \frac{\delta}{۲}$ در S است ، بنا بر این c کوچک ترین کران بالای S نیست. در نتیجه فرض ما در مورد $f(c) < p$ غلط است. و به همین ترتیب فرض ما در مورد $f(x) > p$ هم غلط است. پس $f(c) = p$ است.

قضیه مقدار میانی تلویحا می گوید که دامنه تابع ریشه دوم شامل تمام اعداد نا منفی است. برای اثبات این موضوع ، یک عدد نامنفی مانند p انتخاب می کنیم و نشان می دهیم که یک عدد مانند c وجود دارد به طوری که $c \geq 0$ و $c^{۲} = p$ است. برای این کار فرض می کنیم

$f(x) = x^{۲}$، $x \geq 0$ ملاحظه می کنید که f پیوسته است و

$$f(0) = 0 \leq p \leq p^{۲} + ۲p + ۱ = (p + ۱)^{۲} = f(p + ۱)$$

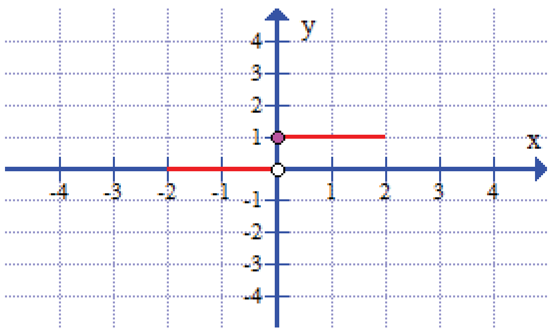
پس $f(0) \leq p \leq f(p + ۱)$ است و طبق قضیه مقدار میانی ، یک عدد مانند c در $[0, p + ۱]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = p$ و یا $c^{۲} = p$ و لذا p یک ریشه دوم دارد. چون p یک عدد اختیاری نا منفی انتخاب شده بود ، نتیجه میشود که ریشه دوم برای کلیه اعداد نا منفی تعریف شده است.

همین استدلال را می توان برای توابع ریشه های دیگر بکار برد.

در قضیه مقدار میانی ، فرض این که f پیوسته است بسیار مهم است. مثلا اگر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{برای } -۲ \leq x < 0 \\ ۱ & \text{برای } 0 \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

پس ملاحظه می کنید که برد f شامل تمام اعداد بین 0 و ۱ نمی شود .در حقیقت هیچ کدام از آنها را در بر نمی گیرد. مسلم است که f در بازه $[-۲, ۲]$ پیوسته نیست ، زیرا در نقطه صفر پیوسته نیست. به همین دلیل نمودار آن بین صفر و یک می تواند جهش کند.



مقدار مثبت و منفی توابع Positive and Negative Values of Functions

اگر عدد d در دامنه تابع f باشد ، بطوری که $f(d)=0$ باشد ، پس d را صفر و یا ریشه f می نامند ، مثلا اگر دسته باشیم

$$f(x)=x^{۲}-۴x-۵=(x-۵)(x+۱)$$

پس $f(x)=0$ است برای $x=-۱$ و $x=۵$ در نتیجه ، صفر f اعداد ۵ و ۱− هستند.

صفر تابعی به شکل

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c \qquad , \quad a\neq 0$$

بوسیله فرمول درجه دوم بدست می آید. **یاد آوری فرمول درجه دوم**

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}}$$

اما برای توابع و چند جمله ای های درجه ای بالا تر ، فرمول ساده ای برای پیدا کردن یک صفر وجود ندارد.

حال فرض می کنیم f تابعی است که در بازه I پیوسته است. اگر f هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی در بازه I داشته نشد ، پس قضیه مقدار میانی تلویحا می گوید $f(x)=0$ خواهد بود برای یک x در بازه I یا به عبارت دیگر f یک صفر در بازه I دارد. و در نهایت ، اگر f در بازه I هیچ صفری نداشته باشد ، پس $f(x)>0$ است برای تمام x ها در بازه I و یا $f(x)<0$

است برای تمام x ها در بازه I

این موضوع کمک می کند که در یابیم در کدام بازه ها تابع پیوسته f مثبت است و در کدام بازه ها منفی.

مثال ۱ – فرض کنید $f(x)=(x+۱)^{۲}(x-۲)(x-۳)$ باشد. بازه هایی که در آنها f مثبت است و بازه هایی که f منفی است مشخص کنید.

پاسخ - واضح است که صفر های f عبارتند از $-۱,۲,۳$ لذا علامت تابع را در بازه های

$$(-\infty,-۱),(-۱,۲),(۲,۳),(۳,\infty)$$

پیدا می کنیم.

علامت $f(x)$ در بازه	$f(c)$	c در بازه	بازه
$+$	۲۰	-۲	$(-\infty,-۱)$
$+$	۶	0	$(-۱,۲)$
$-$	$-\frac{۴۹}{۱۶}$	$\frac{۵}{۲}$	$(۲,۳)$
$+$	۵۰	۴	$(۳,\infty)$

در نتیجه f در بازه های $(-\infty,-۱)(-۱,۲),(۳,\infty)$ مثبت است و در بازه $(۲,۳)$ منفی است.

مثال ۲ – تابع زیر را در نظر بگیرید. مشخص کنید کجا f مثبت و کجا منفی است.

$$f(x) = \frac{x(x-۲)\left(x^{۲}+۲x+۴\right)}{x^{۳}+۱}$$

پاسخ – چون $x^{۳}+۱-0$ است ، اگر $x=-۱$ باشد ، پس دامنه این تابع $(-\infty,-۱)$ و $(-۱,\infty)$ است. از طرف دیگر

$$x^{۲}+۲x+\left(x^{۲}+۲x+۱\right)+۳ = \left(x+۱\right)^{۲}+۳ > 0$$ برای تمام x ها

بنا بر این $f(x)=0$ است ، برای $x=0$ و $x=۲$

پس در بازه های

$$(-\infty,-۱),(-۱,0),(0,۲),(۲,\infty)$$

علامت تابع را پیدا می کنیم.

بازه	c در بازه	$f(c)$	علامت $f(x)$ در بازه
$(-\infty,-۱)$	-۲	$-\frac{۳۲}{۷}$	$-$
$(-۱,0)$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۶۵}{۱۴}$	$+$
$(0,۲)$	۱	$-\frac{۷}{۲}$	$-$
$(۲,\infty)$	۳	$\frac{۵۷}{۲۸}$	$+$

در نتیجه f در بازه های $(-۱,0)$ و $(۲,\infty)$ مثبت است و در بازه های $(-\infty,-۱)$ و $(0,۲)$ منفی است.

مشخص کردن این که تابع f در کدام بازه ها مثبت و در کدام بازه ها منفی است ، مثل این است که بگوییم نا معادله های $f(x)>0$ و یا $f(x)<0$ را حل کنید. پس مثال ۲ را می توان به این صورت بیان کرد "نا معادله های زیر را حل کنید."

$$\frac{x(x-۲)\left(x^۲+۲x+۴\right)}{x^۳+۱}>0 \quad و \quad \frac{x(x-۲)\left(x^۲+۲x+۴\right)}{x^۳+۱}<0$$

روش نصف کردن بازه Bisection Method

فرض کنید تابع g سود حاصل از فروش یک نوع غله را نشان می دهد.

$$g(x)=x^۵+x^۳+x^۲-۱ \quad ، \quad x\in[0,۱]$$

در این تابع $g(x)$ بر حسب میلیون تومان و x بر حسب تن است. چون g پیوسته است و چون $g(0)=-۱$ و $g(۱)=۲$ پس قضیه مقدار میانی تضمین می کند که یک عدد مانند d در $[0,1]$ وجود دارد به طوری که $g(d)=0$ است. این عدد d نمایانگر نقطه سر بسر Break-even است. سر بسر یعنی زمانی که دخل و خرج مساوی است. برای پیدا کردن d ممکن است سعی کنیم از $g(x)$ فاکتور بگیریم. اما اینکار بیهوده است. پس پیدا کردن جواب دقیق برای $g(x)=0$ غیر ممکن بنظر می رسد. پس باید راضی شویم اگر بتوانیم مقدار تقریبی d را پیدا کنیم. یک راه برای پیدا کردن مقدار تقریبی d موسوم است به **روش نصف کردن بازه**

روش نصف کردن بازه بر اساس ضرب المثل قدیمی رومی است که می گوید

"جدایی انداز و تسخیر کن Divide and Conquer"

این روش برای هر تابعی مانند f که در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامت های متفاوت هستند قابل استفاده است. منظور از علامت های متفاوت یعنی یا $f(a) < 0$ و

$f(b) > 0$ باشد و یا $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ باشد.

چون f در $[a,b]$ پیوسته است و $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامت های متفاوت هستند ، قضیه مقدار میانی تضمین می کند که f در بازه $[a,b]$ یک صفر دارد.

فرض کنید c وسط Midpoint بازه $[a,b]$ باشد. اگر $f(c) = 0$ باشد ، پس c صفر f در بازه $[a,b]$ است. و جستجو خاتمه می یابد. اگر $f(c) \neq 0$ پس یا

$f(a)$ و $f(c)$ دارای علامت های متفاوت هست ، پس فرض می کنیم $I_۱ = [a,c]$

و یا

$f(c)$ و $f(b)$ دارای علامت های متفاوت هست ، پس فرض می کنیم $I_۱ = [c,b]$

در هر کدام از دو حالت بالا که $I_۱$ نیمه بازه $[a,b]$ بشود ، میدانیم که بر اساس قضیه مقدار میانی ، $I_۱$ شامل یک صفر f است. این کار را که ادامه دهیم به بازه های کوچکتر و کوچکتر $I_۲, I_۳، ...$

میرسیم که ممکن است شامل یک صفر f باشد. چون این مراحل مختلف شامل نصف کردن بازه ها است به روش **نصف کردن بازه** موسوم است.

این مراحل ممکن است تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند، پس باید راهی داشته باشیم که بدانیم کجا عمل نصف کردن را متوقف کنیم. یعنی هنگامی که یک c^* پیدا کردیم که به اندازه کافی به صفر f نزدیک است.

فرض می کنیم $0 < \varepsilon$ است. و فرض می کنیم می خواهیم یک عدد مانند c^* پیدا کنیم که صفر f

را با ضریب اشتباه کمتر از اپسیلن ، تخمین بزند. یعنی می خواهیم

$$|c^* - d| < \varepsilon$$

باشد.

چون هر بازه متوالی ، نصف بازه قبلی است ، پس در نهایت یک بازه I_n پیدا می کنیم که طول آن کمتر از ۲ε است. پس وسط I_n کار c^* را انجام می دهد چون d در I_n است و لذا

$$|c^* - d| \leq \text{نصف طول } I_n < \frac{۱}{۲}(۲\varepsilon) = \varepsilon$$

بنا بر این هنگام استفاده از روش نصف کردن بازه ، مراحل مسلسلی را طی می کنیم که به آن **الگاریتم** **Algorithm** می نامند.

مراحل و یا الگاریتم نصف کردن بازه

قدم اول – فرض می کنیم $[a,b]$ بازه I باشد. حرف I حرف اول کلمه Interval است که به معنی بازه است.

قدم دوم – فرض می کنیم c وسط $[a,b]$ باشد.

قدم سوم – طول I را حساب می کنیم و آنرا L می نامیم. L حرف اول کلمه $Length$ است به معنی طول. اگر $L < ۲\varepsilon$ باشد ، پس c یک تخمینی برای صفر f است با ضریب اشتباه کمتر از اپسیلن. **کار را متوقف کنید**. در غیر این صورت **ادامه** دهید.

قدم چهارم - $f(c)$ را حساب کنید. اگر $f(c) = 0$ است ، پس c یک صفر f است. پس **توقف کنید** ، در غیر این صورت **ادامه** دهید.

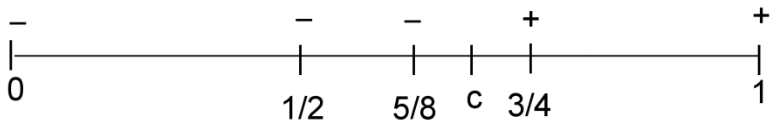
قدم پنجم – اگر $f(a)$ و $f(c)$ علامت های متفاوت دارند ، بجای I بگذارید $[a,c]$ در غیر این صورت بجای I بگذارید $[c,b]$

قدم ششم – قدم های دو تا پنج را برای بازه جدید I انجام دهید.

مثال ۳ – فرض کنید $f(x) = x^۵ + x^۳ + x^۲ - ۱$ است. با استفاده از روش نصف کردن بازه ، یک عدد در $[0,1]$ پیدا کند که صفر تقریبی f با ضریب اشتباه کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ باشد.

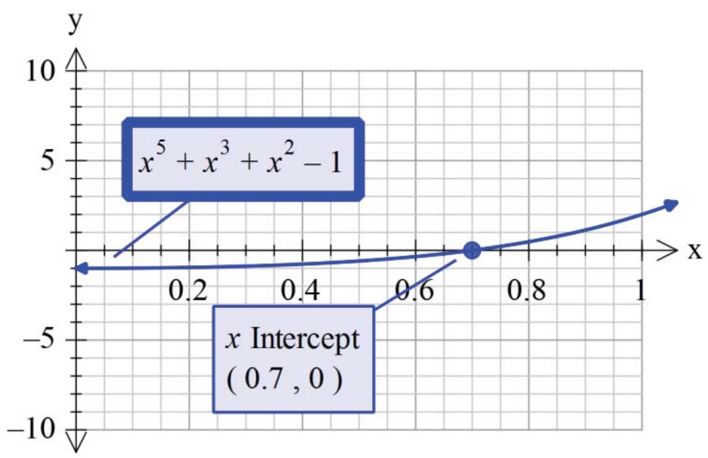
پاسخ

چون $f(0) = -۱$ و $f(۱) = ۲$ است ، می توان با $a = 0$ شروع کنیم و می دانیم که $b = ۱$ است. با بکار بردن الگاریتم ، جدول و نمودار زیر را بسازیم.



بازه	طول	c یا وسط	$f(c)$
$[0,۱]$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱۹}{۳۲}$
$\left[\frac{۱}{۲},۱\right]$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۲۲۷}{۱۰۲۴}$
$\left[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۸}$	$-\frac{۸۸۴۳}{۳۲۷۶۸}$
$\left[\frac{۵}{۸},\frac{۳}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۸}$		

چون طول $\left[\frac{۵}{۸},\frac{۳}{۴}\right]$ برابر است با $\frac{۱}{۸}$ و نه $\frac{۵}{۸}$ و نه $\frac{۳}{۴}$ یک صفر f نیست ، نقطه وسط $\left[\frac{۵}{۸},\frac{۳}{۴}\right]$ که $\frac{۱۱}{۱۶}$ است کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ از صفر f فاصله دارد.



تمرینات ۱.۶

درتمرینات ۴ – ۱ نشان دهید که معادله حد اقل یک جواب در بازه داده شده دارد.

۱) $x^{۴} - x - ۱ = ۰; [-۱, ۱]$

۲) $x^{۲} + \frac{۱}{x} = ۱; \left[-۲, -\frac{۱}{۲}\right]$

۳) $x^{۳} + x^{۲} + x - ۲ = ۰; [-۱, ۱]$

۴) $\cos x = x \left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$

در تمرینات ۸ – ۵ نا معادلات را بر حسب x حل کنید.

۵) $(۲ - x)^{۲}(۴۰ - ۸x) > ۰$

۶) $\left(x^{۴} + x\right)(x + ۳) \leq ۰$

۷) $\frac{(x - ۱)(x - ۳)}{(۲x + ۱)(۲x - ۱)} \geq ۰$

۸) $\frac{-۲(x - ۱)\left(x^{۲} + ۲x + ۴\right)}{۲۷ - x^{۳}} < ۰$

در تمرینات ۱۱ – ۹ با استفاده از روش نصف کردن بازه ، یک صفر f با ضریب اشتباه کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ تخمین بزنید.

۹) $f(x) = x^{۲} - ۲$

۱۰) $f(x) = x^{۳} - ۳$

۱۱) $f(x) = \cos x - x$

در تمرینات ۱۳ – ۱۲ با استفاده از روش نصف کردن بازه مقدار تقریبی اعداد داده شده را با ضریب اشتباه کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ را پیدا کنید.

۱۲) $\sqrt{۵}$

۱۳) $\sqrt{۰/۷}$

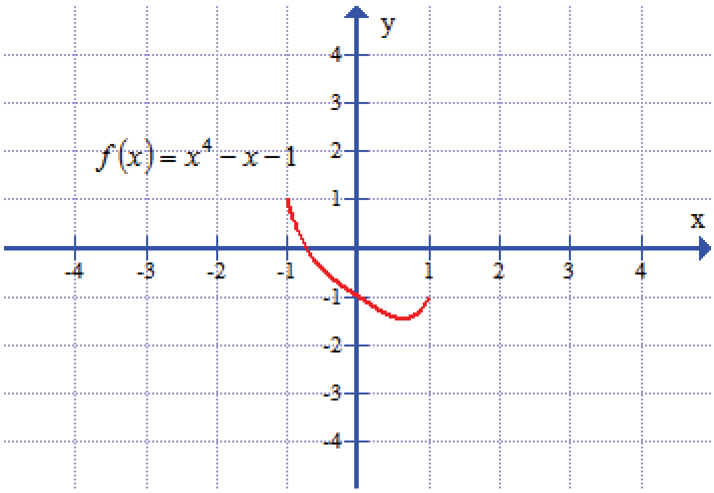
۱۴ – با استفاده از قضیه مقدار میانی نشان دهید که بین تمام دایره هایی که شعاع آنها بیشتر از ۱۰ سانتی متر نیست ، یک دائره وجود دارد که مساحت آن ۲۰۰ سانتی متر مربع است.

پاسخ تمرینات ۱.۶

درتمرینات ۴ — ۱ نشان دهید که معادله حد اقل یک جواب در بازه داده شده دارد.

۱) $x^{۴}-x-۱=۰;[-۱,۱]$

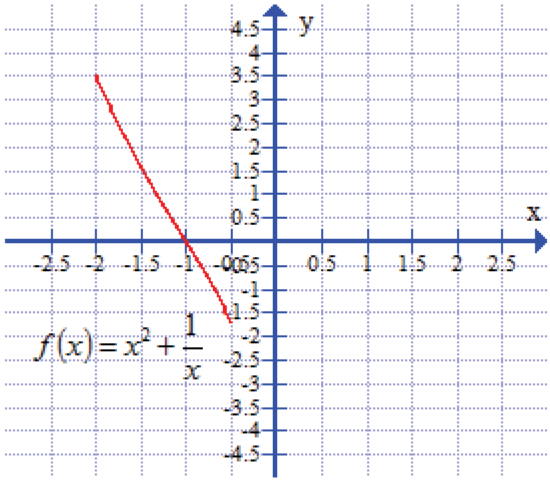
فرض می کنیم $f(x)=x^{۴}-x-۱$ باشد ، پس f در بازه $[-۱,۱]$ پیوسته است. چون $f(-۱)=۱$ و $f(۱)=-۱$ است ، قضیه مقدار میا نی می گوید یک c در بازه $[-۱,۱]$ وجود دارد بطوری که $f(c)=۰$ است ، یعنی $c^{۴}-c-۱=۰$

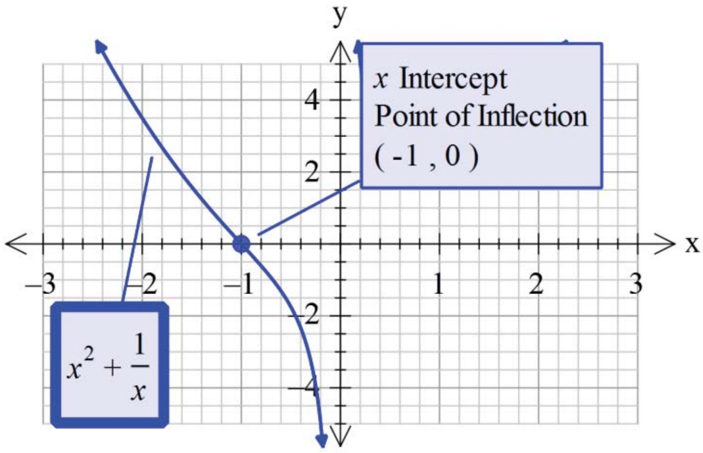


۲) $x^{۲}+\frac{۱}{x}=۱;\left[-۲,-\frac{۱}{۲}\right]$

فر می کنیم $f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x}$ باشد. پس f در بازه $\left[-۲,-\frac{۱}{۲}\right]$ پیوسته است. چون $f(-۲)=\frac{۷}{۲}$ و $f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۷}{۴}$ است ، پس قضیه مقدار میانی می گوید یک عدد مانند c در بازه $\left[-۲,-\frac{۱}{۲}\right]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=۱$ است. یعنی

$$c^{۲}+\frac{۱}{c}=۱$$





۳) $x^{۳} + x^{۲} + x - ۲ = ۰; [-۱, ۱]$

فرض می کنیم $f(x) = x^{۳} + x^{۲} + x - ۲$ باشد. پس f در بازه $[-۱, ۱]$ پیوسته است. چون $f(-۱) = -۳$ و $f(۱) = ۱$ لذا قضیه مقدار میانی می گوید در بازه $[-۱, ۱]$ یک عدد مانند c وجود دارد ، به طوری که

$$c^{۳} + c^{۲} + c - ۲ = ۰$$

۴) $\cos x = x \left[۰, \frac{\pi}{۲} \right]$

فرض می کنیم $f(x) = \cos x - x$ باشد. پس f در بازه $\left[۰, \frac{\pi}{۲} \right]$ پیوسته است. چون

$f(۰) = ۱$ و $f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -\frac{\pi}{۲}$ پس قضیه مقدار میانی می گوید که در بازه $\left[۰, \frac{\pi}{۲} \right]$ یک عدد مانند c وجود دارد ، به طوری که $\cos c = c$ است.

در تمرینات ۵ – ۸ تا معادلات را بر حسب x حل کنید.

۵) $(۲ - x)^۲ (۴۰ - ۸x) > ۰$

فرض می کنیم $f(x) = (۲ - x)^۲ (۴۰ - ۸x)$ باشد. پس

$$f(x) = ۸(۲ - x)^۲ (۵ - x) = ۰$$

است اگر $x = ۲$ و یا $x = ۵$ باشد. برای پیدا کردن علامت های این تابع در بازه های

$(-\infty, ۲), (۲, ۵), (۵, \infty)$

جدولزیر را تشکیل می دهیم.

بازه	c	$f(c)$	علامت $f(x)$
$(-\infty, ۲)$	۰	۱۶۰	$+$
$(۲, ۵)$	۳	۱۶	$+$
$(۵, \infty)$	۶	-۱۲۸	$-$

بنا بر این $(۲ - x)^۲ (۴۰ - ۸x) > ۰$ است در $(۲, ۵) \cup (-\infty, ۲)$

۶) $\left(x^{۴}+x\right)\left(x+۳\right)\leq ۰$

فرض می کنیم $f(x)=\left(x^{۴}+x\right)\left(x+۳\right)$ باشد ، پس

$$f(x)=x\left(x^{۳}+۱\right)\left(x+۳\right)=۰$$

است اگر $x=۰$ یا $x=-۱$ یا $x=-۳$ باشد. جدول زیر را تشکیل می دهیم.

بازه	c	$f(c)$	علامت $f(x)$
$(-\infty,-۳)$	-۴	-۲۵۲	$-$
$(-۳,-۱)$	-۲	۱۴	$+$
$(-۱,۰)$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۳۵}{۳۲}$	$-$
$(۰,\infty)$	۱	۸	$+$

لذا $\left(x^{۴}+x\right)\left(x+۳\right)\leq ۰$ خواهد بود برای $(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰]$

۷) $\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{(۲x+۱)(۲x-۱)}\geq ۰$

فرض می کنیم $f(x)=\frac{(x-۱)(x-۳)}{(۲x+۱)(۲x-۱)}$ باشد ، پس $(۲x+۱)(۲x-۱)=۰$ است اگر

$x=\frac{۱}{۲}$ یا $x=-\frac{۱}{۲}$ باشد. لذا دامنه f

$$\left(-\infty,-\frac{۱}{۲}\right)\cup\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)\cup\left(\frac{۱}{۲},\infty\right)$$

است. از طرف دیگر $f(x)=۰$ است اگر $x=۳$ یا $x=۱$ باشد. جدول تشکیل می دهیم.

علامت $f(x)$	$f(c)$	c	بازه
$+$	$\frac{۸}{۳}$	-۱	$\left(-\infty,-\frac{۱}{۲}\right)$
$-$	-۳	۰	$\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$
$+$	$\frac{۹}{۲۰}$	$\frac{۲}{۴}$	$\left(\frac{۱}{۲},۱\right)$
$-$	$-\frac{۱}{۱۵}$	۲	$(۱,۳)$
$+$	$\frac{۱}{۲۱}$	۴	$(۳,\infty)$

لذا $\frac{(x-۱)(x-۳)}{(۲x+۱)(۲x-۱)}\geq ۰$ است در

$$\left(-\infty,-\frac{۱}{۲}\right)\cup\left(\frac{۱}{۲},۱\right]\cup\left[۳,\infty\right)$$

۸) $$\frac{-۲(x-۱)\left(x^{۲}+۲x+۴\right)}{۲۷-x^{۳}}<۰$$

فرض می کنیم $f(x)=\frac{-۲(x-۱)\left(x^{۲}+۲x+۴\right)}{۲۷-x^{۳}}$ باشد. پس $۲۷-x^{۳}=۰$ است ، اگر $x=۳$ باشد ، بنا بر این دامنه f

$$(-\infty,۳)\cup(۳,\infty)$$

است. از طرف دیگر چون $x^{۲}+۲x+۴=(x+۱)^{۲}+۳>۰$ است برای تمام x ها ، $f(x)=۰$ اگر $x=۱$ باشد. جدول تشکیل می دهیم.

بازه	c	$f(c)$	علامت $f(x)$
$(-\infty,۱)$	۰	$\frac{۸}{۲۷}$	$+$
$(۱,۳)$	۲	$-\frac{۲۴}{۱۹}$	$-$
$(۳,\infty)$	۴	$\frac{۱۶۸}{۳۷}$	$+$

لذا $\frac{-۲(x-۱)(x^{۲}+۲x+۴)}{۲۷-x^{۳}}<۰$ است در بازه $(۱,۳)$

در تمرینات ۱۱ — ۹ با استفاده از روش نصف کردن بازه ، یک صفر f با ضریب اشتباه کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ تخمین بزنید.

۹) $f(x)=x^{۲}-۲$

چون $f(۱)<۰$ است و $f(۲)>۰$ پس فرض می کنیم $a=۱$ و $b=۲$ باشد. جدول زیر را تشکیل می دهیم.

بازه	طول	نقطه میانی c	$f(c)$
$[۱,۲]$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$
$\left[۱,\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۷}{۱۶}$
$\left[\frac{۵}{۴},\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱۱}{۸}$	$-\frac{۷}{۶۴}$
$\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۸}$		

چون طول $\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$ می شود $\frac{۱}{۸}$ و نه $\frac{۱۱}{۸}$ و نه $\frac{۳}{۲}$ یک صفر f نیستند ، پس نقطه میانی $\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$ که می شود $\frac{۲۳}{۱۶}$ کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ از صفر f فاصله دارد.

۱۰) $f(x) = x^{۳} - ۳$

چون $f(۱) < ۰$ و $f(۲) > ۰$ است پس فرض می کنیم $a = ۱$ و $b = ۲$ و جدول تشکیل ای دهیم.

بازه	طول	نقطه میانی c	$f(c)$
$[۱,۲]$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۸}$
$\left[۱,\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۶۷}{۶۴}$
$\left[\frac{۵}{۴},\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱۱}{۸}$	$-\frac{۲۰۵}{۵۱۲}$
$\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۸}$		

چون طول $\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$میشود $\frac{۱}{۸}$ و چون نه $\frac{۱۱}{۸}$ و نه $\frac{۳}{۲}$ یک صفر f نیستند ، نقطه میانی $\frac{۲۳}{۱۶}$ از بازه $\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۳}{۲}\right]$ کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ از صفر f فاصله دارد.

۱۱) $f(x) = \cos x - x$

چون $f(۰) = ۱ > ۰$ و $f(۱) = -۱ < ۰$ است ، پس فرض می کنیم $a = ۰$ و $b = ۱$ است .
جدول تشکیل می دهیم.

بازه	طول	نقطه میانی c	$f(c)$
$[۰, ۱]$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\left(\cos\frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱}{۲} \approx ۰/۳۷۸$
$\left[\frac{۱}{۲}, ۱\right]$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\left(\cos\frac{۳}{۴}\right) - \frac{۳}{۴} \approx -۰/۰۱۸$
$\left[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۸}$	$\left(\cos\frac{۵}{۸}\right) - \frac{۵}{۸} \approx ۰/۱۸۶$
$\left[\frac{۵}{۸}, \frac{۳}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۸}$		

چون طول $\left[\frac{۵}{۸}, \frac{۳}{۴}\right]$ می شود $\frac{۱}{۸}$ و نه $\frac{۵}{۸}$ و نه $\frac{۳}{۴}$ یک صفر f نیستند پس نقطه میانی $\frac{۱۱}{۱۶}$ از بازه $\left[\frac{۵}{۸}, \frac{۳}{۴}\right]$ کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ از صفر f فاصله دارد.

در تمرینات ۱۳ – ۱۲ با استفاده از روش نصف کردن بازه مقدار تقریبی اعداد داده شده را با ضریب اشتباه کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ را پیدا کنید.

۱۲) $\sqrt{۵}$

فرض می کنیم $f(x) = x^۲ - ۵$ باشد. پس $\sqrt{۵}$ یک صفر f است. چون $f(۲) = -۱ < ۰$ و $f(۳) = ۴ > ۰$ است ، پس صفر در $(۲,۳)$ قرار دارد. فرض می کنیم $a = ۲$ و $b = ۳$ است. جدول تشکیل می دهیم.

بازه	طول	نقطه میانی c	$f(c)$
$[۲,۳]$	۱	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$
$\left[۲,\frac{۵}{۲}\right]$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	$\frac{۱}{۱۶}$
$\left[۲,\frac{۹}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱۷}{۸}$	$-\frac{۳۱}{۶۴}$
$\left[\frac{۱۷}{۸},\frac{۹}{۴}\right]$	$\frac{۱}{۸}$		

چون طول $\left[\frac{۱۷}{۸},\frac{۹}{۴}\right]$ می شود $\frac{۱}{۸}$ و نه $\frac{۱۷}{۸}$ و نه $\frac{۹}{۴}$ یک صفر f نیستند ، پس نقطه میانی $\frac{۳۵}{۱۶}$ از بازه $\left[\frac{۱۷}{۸},\frac{۹}{۴}\right]$کمتراز $\frac{۱}{۱۶}$ تا $\sqrt{۵}$ فاصله دارد.

۱۳) $\sqrt{۰/۷}$

فرض می کنیم $f(x) = x^۲ - ۰/۷$ باشد ، پس $\sqrt{۰/۷}$ یک صفر f است.

چون $f(۰) = -۰/۷ < ۰$ و $f(۱) = ۰/۳ > ۰$ است ، پس فرض می کنیم $a = ۰$ و $b = ۱$ جدول تشکیل می دهیم.

$f(c)$	نقطه میانی c	طول	بازه
$-\frac{۹}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$[۰,۱]$
$-\frac{۱۱}{۸۰}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\left[\frac{۱}{۲},۱\right]$
$\frac{۲۱}{۳۲۰}$	$\frac{۷}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\left[\frac{۳}{۴},۱\right]$
		$\frac{۱}{۸}$	$\left[\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸}\right]$

چون طول $\left[\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸}\right]$ می شود $\frac{۱}{۸}$ و نه $\frac{۳}{۸}$ و نه $\frac{۷}{۸}$ یک صفر f نیستند ، نقطه میانی $\frac{۱۳}{۱۶}$ از بازه $\left[\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸}\right]$ کمتر از $\frac{۱}{۱۶}$ از $\sqrt{۰/۷}$ فاصله دارد.

۱۴ – با استفاده از قضیه مقدار میانی نشان دهید که بین تمام دایره هایی که شعاع آنها بیشتر از ۱۰ سانتی متر نیست ، یک دائره وجود دارد که مساحت آن ۲۰۰ سانتی متر مربع است.

پاسخ – فرض می کنیم $f(x) = \pi x^۲$ باشد. ملاحظه می کنید که f پیوسته است ، با $f(۰) = ۰$ و $f(۱۰) = ۱۰۰\pi > ۳۰۰$ بر اساس قضیه مقدار میا نی یک عدد مانند c در بازه $[۰,۱۰]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = ۲۰۰$

فصل دوم

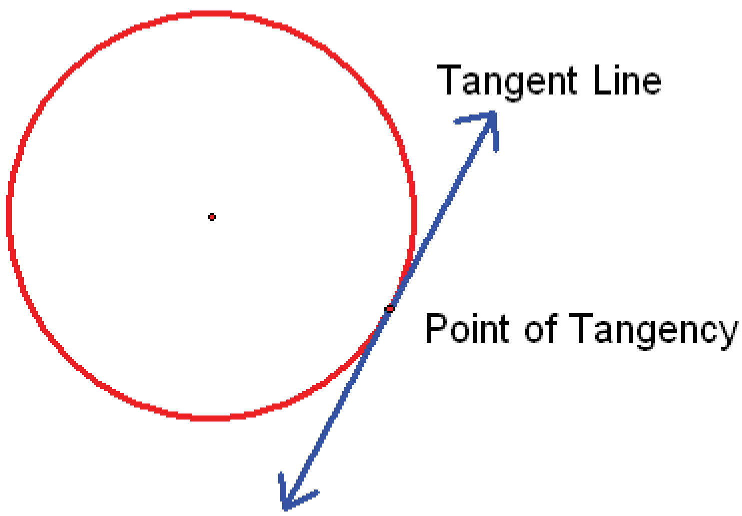
مشتق

۲.۱ - خطوط مماس Tangent Lines

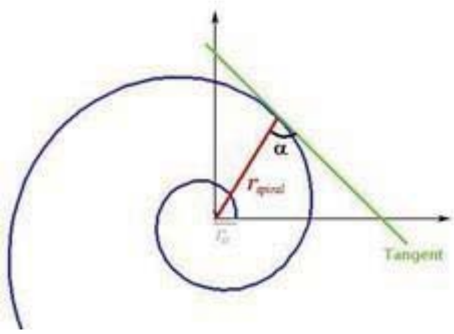
پس از مطالعه مقدمات جبر و فصل اول حسابان ، اینک آماده ایم که به موضوع اصلی حسابان ، یعنی مشتق یک تابع بپردازیم. برای شروع کار ، ابتدا خطوط مماس بر منحنی ها را مورد مطالعه قرار میدهیم. مشخص کردن خطوط مماس بوسیله حد ها ، به تعریف مشتق یک تابع می رسیم. مشتق کار برد های مهمی در رابطه با سرعت ، شتاب و موضوعات مربوط به اقتصاد دارد.

از زمان یونان قدیم ، ریاضی دانان علاقمند به خطوط مماس بوده اند. ریاضی دانان اولیه خطوط مماس بر منحنی های ساده مانند دائره ها و مارپیچ ها را مطالعه می کردند.

خط مماس با دائره



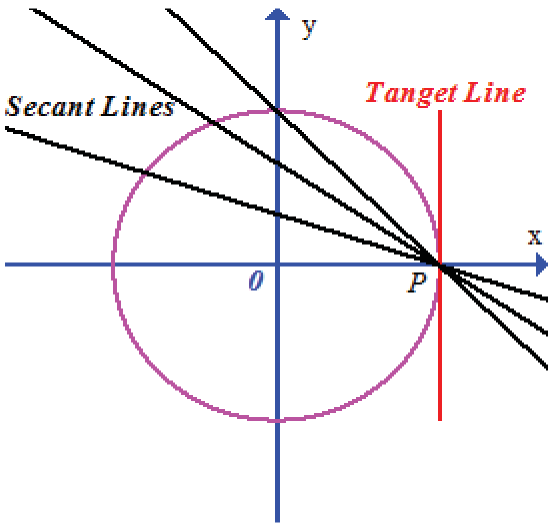
خط مماس با مارپیچ



در هندسه اقلیدسی خط مماس بر دائره یعنی خطی که فقط در یک نقطه با دائره تماس داشته باشد.

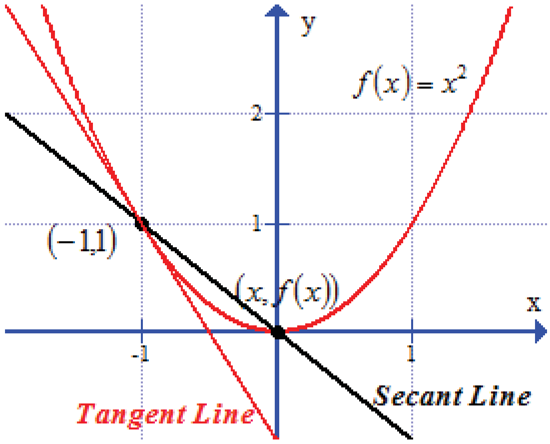
در جبر و حسابان خط مماس بر یک دائره در نقطه P چنین تعریف می شود. حد خطوط قاطع که از P می گذرند به نحوی که شیب خط قاطع به شیب خط مماس نزدیک می شود ، هنگامی که نقاط دیگر تقاطع با دائره به P نزدیک می شوند.

در شکل زیر خطوط سیاه رنگ ، خطوط قاطع Secant Lines هستند. خط قرمز رنگ ، خط مماس است و P نقطه مماس Point of Tangency است.



عقیده کلی خط مماس - می خواهیم یک عقیده کلی از خط مماس به نمودار یک تابع f دریک نقطه $(a,\ f(a))$ برای شما بیان کنیم. این کار را با کمک خطوط قاطع انجام می دهیم. ابتدا تابع

$f(x) = x^۲$ را در نظر بگیرید. و فرض کنید $(-۱,۱) = \big(-۱, f(-۱)\big)$ نقطه ای است که می خواهیم یک خط مماس بر آن رسم کنیم . **شکل زیر**



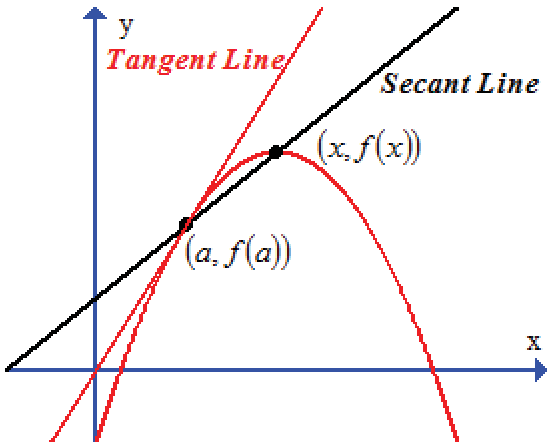
اگر $(x,f(x))$ یک نقطه دیگر روی نمودار f باشد ، پس شیب خط قاطع که از نقاط $(-۱,۱)$ و $(x,f(x))$ می گذرد مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}=\frac{x^۲-(-۱)^۲}{x+۱}=\frac{(x+۱)(x-۱)}{x+۱}=x-۱ \qquad (۱)$$

هنگامی که x به -۱ نزدیک می شود ، شیب خط قاطع به -۲ نزدیک می شود ، و به نظر می رسد که شب خط قاطع تند تر و تند تر می شود. به طور کلی اگر f هر تابعی باشد ، پس شب خط قاطع که از نقاط $(a,f(a))$ و $(x,f(x))$ می گذرد ، مطابق فرمول زیر است.

$$m=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۲)$$

در صورتی که حد این شیب ها وجود داشته باشند ، هنگامی که x به a نزدیک می شود ، این حد را برای تعریف خط مماس بر f در نقطه $(a,f(a))$ بکار می بریم. **شکل زیر**



تعریف خط مماس – فرض می کنیم f یک تابع باشد ، و فرض می کنیم a در دامنه f باشد. اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۳)$$

وجود داشته باشد ، می گوییم نمودار f **یک خط مماس در نقطه $(a,f(a))$ دارد.** در این صورت **خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a,f(a))$** چنین تعریف می شود

"خطی که از نقطه $(a,f(a))$ می گذرد و شیب آن خط ، حد عبارت شماره (۳) است "

چون حد یک تابع منحصر به فرد است ، پس فقط یک خط مماس بر نمودار یک تابع در یک نقطه مشخص ، وجود دارد.

در صورتی که حد در تعریف بالا وجود داشته باشد ، آنرا با نماد m_a نشان می دهیم. پس

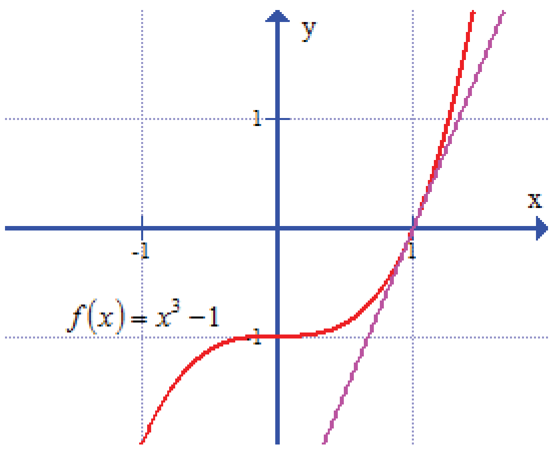
$$m_a=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۴)$$

و معادله شیب - نقطه خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a,f(a))$ مطابق زیر است.

$$y-f(a)=m_a(x-a) \qquad (۵)$$

مثال ۱ـ اگر داشته باشیم $f(x)=x^۳-۱$ نشان دهید که یک خط مماس بر نمودار f در نقطه $(۱,0)$ وجود دارد و معادله آنرا پیدا کنید.

پاسخ



بر اساس تعریف ، خط مماس وجود دارد ، اگر

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$$

وجود داشته باشد. امتحان می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۳-۱)-(۱^۳-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x^۲+x+۱)=۳$$

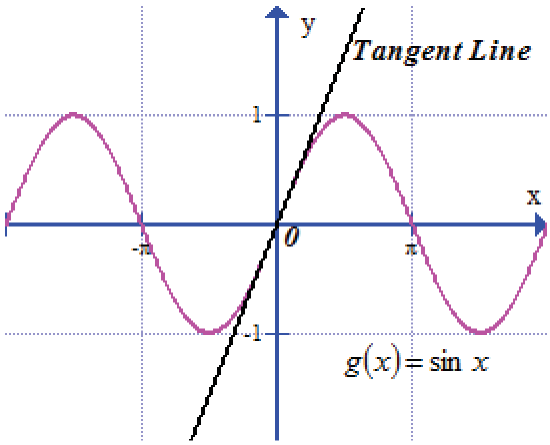
در نتیجه نمودار f در نقطه $(۱,0)$ یک خط مماس دارد و معادله خط مماس به طریق زیر بدست می آوریم.

$$y-٥=۳(x-۱)$$

$$y=۳x-۳$$

مثال ۲ – اگر $g(x)=\sin x$ باشد ، معادله خط مماس بر این تابع در نقطه $(0,0)$ را پیدا کنید.

پاسخ



اگر $g(x)=\sin x$ باشد ، یک خط مماس در نقطه $(0,0)$ بر نمودار آن وجود دارد اگر

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

قبلا ثابت کردیم که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ۱$$

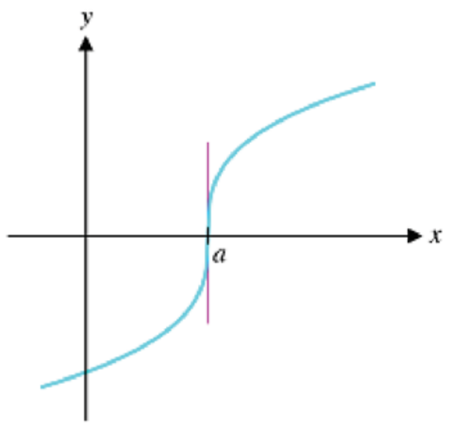
پس خط مماس وجود دارد ، و معادله آن ازطریق زیر بدست می آوریم.

$$y - 0 = ۱(x - 0) \quad \text{و یا} \quad y = x$$

اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بی نهایت باشد ، پس تعریف بالا در مورد خط مماس بر f در نقطه $(a, f(a))$ قابل استفاده نیست.
اما اگر حد بی نهایت باشد و به علاوه ، تابع در نقطه a پیوسته باشد ، می توانیم خط عمود $x = a$ را مماس بر f در نقطه a در نظر بگیریم. **شکل زیر**



تعریف خط مماس عمودی – فرض می کنیم f در نقطه a پیوسته باشد ، اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty \quad \text{و یا} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

باشد ، پس می گوییم نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ **یک خط مماس عمودی دارد.** در این صورت ، خط عمود $x = a$ **خط مماس نمودار f در نقطه a** نامیده می شود.

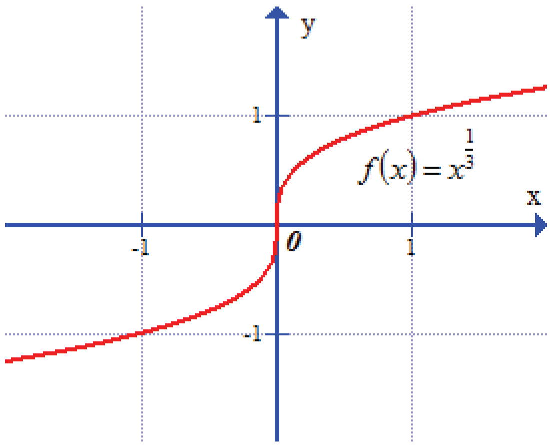
مثال ۳ – فرض کنید $f(x) = x^{\frac{۱}{۳}}$ باشد. نشان دهید که نمودار f در نقطه $(0,0)$ یک خط مماس عمودی دارد. معادله این خط مماس را پیدا کنید.

پاسخ

ملاحظه می شود که f در نقطه صفر ، پیوسته است. همچنین

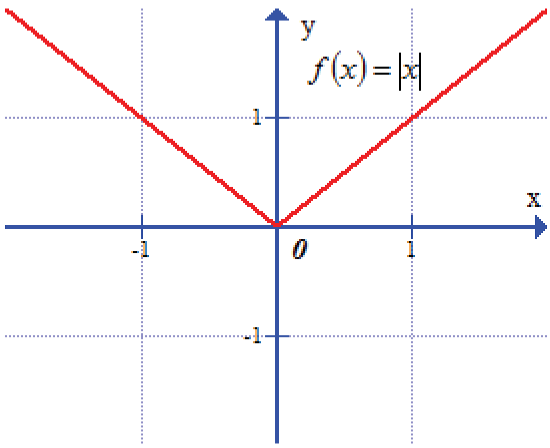
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{۱}{۳}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{-۲}{۳}}=\infty$$

طبق تعریف ، نمودار در نقطه $(0,0)$ یک خط مماس عمودی دارد.



در بعضی موارد ، هیچ نوع خط مماس بر یک نمودار ، اعم از عمودی ، یا افقی و یا مورب ، وجود ندارد.

مثال ۴ – فرض کنید $f(x)=|x|$ باشد. نشان دهید که هیچ نوع خط مماس بر نمودار f در نقطه $(0,0)$ وجود ندارد.



پاسخ – حد سمت راست صفر مطابق زیر است.

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0} = ۱$$

حد سمت چپ صفر مطابق زیر است.

$$\lim_{x\to 0^-} = \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{-x-0} = -۱$$

پس $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}$ وجود ندارد ، و بی نهایت هم نیست. پس نمودار f در $(0,0)$ خط مماس ندارد.

همان طور که در بالا نشان دادیم ، نمودار تابع قدر مطلق Absolute Function هیچ خط ممسی در نقطه $(0,0)$ ندارد.

از شکل مربوط به مثال ۴ متوجه می شوید که نمودار ، یک گوشه تند Sharp Corner در نقطه $(0,0)$ دارد. به طور کلی می توان گفت ، اگر نمودار یک تابع در نقطه $(a, f(a))$ داشته باشد ، هیچ خط مماسی در نقطه $(a, f(a))$ وجود ندارد .

گر چه حد فرمول شماره (۳) در بالا به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در a تعبیر کردیم ، این حد در موارد دیگری مانند مطالعه

سرعت لحظه ای Instantaneous Velocity

در آمد نهایی Marginal Revenue

هزینه نهایی Marginal Cost

هم بکار می رود.

سرعت لحظه ای Instantaneous Velocity

فرض کنید یک شئی مانند یک اتومبیل ، یک سفینه فضایی ، یا یک الکترون در یک خط مستقیم حرکت می کند. می خواهیم سرعت شئی را در یک زمان معین تعریف کنیم. در مورد اتومبیل ، سرعت لحظه ای مورد نظر ما ، عددی است که سرعت سنج در آن لحظه معین نشان می دهد. بدون یک سرعت سنج ، راننده اتومبیل می تواند ، سرعت متوسط Average Velocity را با تقسیم کردن مسافت طی شده بر طول زمان بدست آورد.

برای بدست آوردن سرعت لحظه ای ، یک محور مختصات بر روی خط حرکت شئی ترسیم می کنیم، و مبدا مختصات را در محل شئی در زمان صفر قرار می دهیم. سپس فرض می کنیم $f(t)$ نمایانگر مکان شئی در زمان t باشد. (به عبارت دیگر محور افقی نمایانگر زمان t است و محور عمودی نمایانگر مکان شئی در زمان t یعنی $f(t)$ است.)

سرعت متوسط Average Velocity شئی طی بازه زمانی $t = t_0$ تا $t = t_۱$ چنین تعریف میشود. t_0 یعنی زمان صفر ویا زمان شروع

$$\frac{f(t_۱) - f(t_0)}{t_۱ - t_0} = \frac{\text{مکان شئی در } t_0 - \text{مکان شئی در } t_۱}{t_۱ - t_0} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان سپری شده}}$$

حال اگرطول بازه زمانی یعنی $[t_o, t_۱]$ آنقدر کوچک شود که به صفر نزدیک شود ، آن فقط سرعت لحظه ای خواهیم داشت.

پس ، سرعت لحظه ای را در زمان t_0 به حد سرعت متوسط تعریف می کنیم ، هنگامی که طول بازه زمانی به صفر نزدیک می شود.

تعریف سرعت لحظه ای Definition of Instantaneous Velocity

اگر $f(t)$ دلالت بر مکان یک شئی متحرک در زمان t در طول یک خط مستقیم کند ، پس **سرعت لحظه ای Instantaneous Velocity** شئی در زمان t_0 مطابق فرمول زیر تعریف می شود.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \qquad (۶)$$

در صورتی که حد بالا وجود داشته باشد.

برای این که مفهوم سرعت لحظه ای را توضیح دهیم ، آزمایش گالیله را در مورد رها کردن یک شئی از یک ساختمان به عنوان یک مثال می آوریم. ثابت شده است که در سقوط آزاد یک شئی ، اگرتنها نیروی وارد بر شئی ، فقط نیروی جاذبه باشد ، پس ارتفاع $h(t)$ شئی تا زمین بر حسب فوت ، بعد از t ثانیه مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$h(t) = -۱۶t^۲ + v_0 t + h_0 \quad (۷).$$

در فرمول بالا h_0 ارتفاع اولیه و v_0 صورت اولیه است.

نکته مهم –از نظر لغوی دو کلمه Speed و Velocity هردو به معنی سرعت ترجمه می شود. اما این دو کلمه در فیزیک و حسابان دو مفهوم جداگانۀ دارند. Velocity یک کمیّت برداری است ، یعنی مثل یک پیکان و یا بردار Arrow جهت دارد. به عبارت دیگر برای تعریف کردن Velocity هم مقدار و هم جهت لازم است. قدر مطلق Velocity را Speed می گویند.

مثلا هنگامی که Velocity یک شئی هنگام سقوط آزاد محاسبه می کنیم، منفی است اما اگر یک شئی را به طرف بالا پرتاب کنیم Velocity مثبت است.

مثال دیگری می زنیم. اگر شخصی از نقطه ای شروع به حرکت کند و باز به همان نقطه برسد ، Velocityاین شخص صفر است. مثلا حول یک دائره. اما سرعت این شخص یعنی Speed او صفر نیست. سرعت متوسط و یا Average Speedبا تقسیم کردن محیط دائره بر زمان طی شده بدست می آید.

مثال ۵ – یک شئی از ارتفاع ۴۰۰ فوتی رها می شود. سرعت لحظه ای شئی بعد از سه ثانیه چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم مبدا مختصات ، سطح زمین باشد. و فرض می کنیم زمان $t = 0$ لحظه رها کردن شئی باشد. و باز فرض می کنیم $h(t)$ ارتفاع شئی در زمان t باشد. طبق فرض مساله $h_0 = ۴۰۰$ و $v_0 = 0$ باشد ، پس

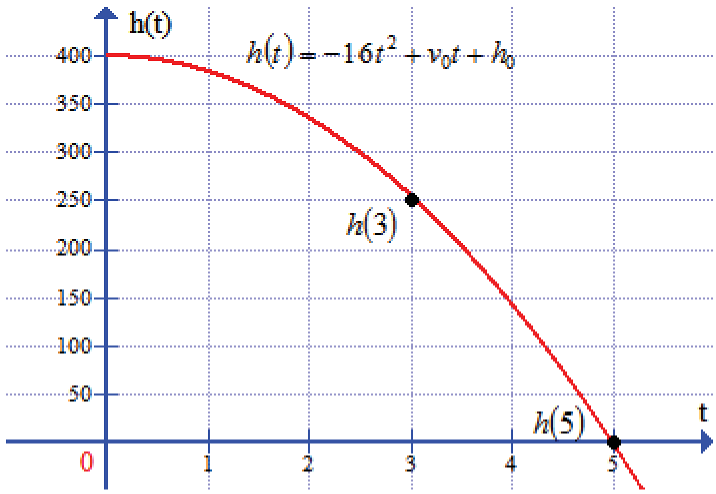
$$h(t) = -۱۶t^{۲} + 0 * t + ۴۰۰ = ۴۰۰ - ۱۶t^{۲}$$

لذا سرعت لحظه ای بعد از سه ثانیه طبق فرمول شماره (۶) مطابق زیر خواهد بود.

$$v(۳) = \lim_{t \to ۳} \frac{h(t) - h(۳)}{t - ۳} = \lim_{t \to ۳} \frac{\left(۴۰۰ - ۱۶t^{۲}\right) - \left(۴۰۰ - ۱۶ * ۳^{۲}\right)}{t - ۳}$$

$$= \lim_{t \to ۳} \frac{-۱۶\left(t^{۲} - ۳^{۲}\right)}{t - ۳} = \lim_{t \to ۳} \frac{-۱۶(t - ۳)(t + ۳)}{t - ۳} = \lim_{t \to ۳} -۱۶(t + ۳) = -۹۶$$

پس سرعت لحظه ای شئی در ثانیه سوم ۹۶– فوت در ثانیه است.



ملاحظه می کنید که سرعت لحظه ای در مثال پنج ، منفی است. زیرا جهت مثبت محور $h(t)$ یا همان محور y به طرف بالا قرار دادیم ، اما جهت حرکت شئی به طرف پایین است. اگر فقط به مقدار سرعت Velocity در ثانیه سوم علاقمند باشیم ، پس سرعت Speed را می خواهیم ، که باید قدرمطلق پاسخ بدست آمده را در نظر بگیریم.

هزینه نهائی و در آمد نهائی Marginal Cost and Marginal Revenue

روشی را که برای تعریف سرعت لحظه ای بکار بردیم ، در مورد دو موضوع مهم اقتصاد ، یعنی هزینه نهائی و در آمد نهائی هم می توان بکار برد.

برای تولید کنندگان کالا ، مهم است که بدانند هزینه تولید هر واحد اضافی کالا در هر زمان چقدر است.

در آمد حاصل از فروش هر واحد از این تولیدات اضافی هم مورد علاقه تولید کننده کالا است.

فرض می کنیم $C(x)$ نشانگر تولید x واحد کالا باشد. همچنین $R(x)$ نشانگر در آمد از فروش x واحد از کالا باشد. پس عبارت زیر

$$\frac{C(b) - C(a)}{b - a}$$

عبارت است از هزینه متوسط تولید هر واحد کالا بین واحد شماره a و شماره b و عبارت زیر

$$\frac{R(b) - R(a)}{b - a}$$

عبارت است از در آمد متوسط از فروش یک واحد ، بین واحد شماره a و شماره b

حالا **هزینه نهایی Marginal Cost** که با نماد m_C نشان می دهیم ، چنین تعریف می کنیم.

$$m_C(a)=\lim_{x\to a}\frac{C(b)-C(a)}{b-a} \qquad (۸)$$

در نماد m_c حرف m حرف اول $Marginal$ است و حرف C حرف اول $Cost$ است.

و **در آمد نهائی Marginal Revenue** که با نماد m_R نشان می دهیم ، چنین تعریف می کنیم.

$$m_R(a)=\lim_{x\to a}\frac{R(b)-R(a)}{b-a} \qquad (۹)$$

حرف R حرف اول $Revenue$ است.

نظر نگارنده این کتاب :به نظر من ترجمه هزینه نهایی که در کتب فارسی در ایران

برای Marginal Cost آمده صحیح نیست. بهتر است گفته شود هزینه حاشیه ای زیرا مثلا اگر یک تولید کننده ، هزینه تولید بین یک تن کالا و سه تن کالا بداند ، می خواهد هزینه تولید دو تن کالا را حساب کند ، این می شود هزینه حاشیه ای .همین طور در آمد نهایی Marginal Revenue که باید گفته شود درامد حاشیه ای به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶ – فرض کنید $0\le x\le ۳$ برای $C(x)=۱+۸x-x^۲$ باشد. هزینه نهائی برای ۲ چقدر است؟

پاسخ – با استفاده از فرمول (۸) بالا ، خواهیم داشت.

$$m_C(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{C(x)-C(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left(۱+۸x-x^۲\right)-\left(۱+۸*۲-۲^۲\right)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^۲+۸x-۱۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)(x-۶)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}-(x-۶)=۴$$

تمرینات ۲.۱

در تمرینات ۶ – ۱ معادله خط مماس بر نمودار تابع داده شده در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵; (-۱, ۵)$

۲) $f(x) = ۴ - ۳x; (0, ۴)$

۳) $f(x) = x^{۲} + ۲x; (-۳, ۳)$

۴) $g(x) = x^{۳} + ۲; (0, ۲)$

۵) $g(x) = -۲ \sin x; (0,0)$

۶) $f(x) = \sqrt{x}; (۱, ۱)$

در تمرینات ۶ و ۷ نشان دهید که f یک خط مماس عمودی در نقطه داده شده دارد. معادله خط مماس را پیدا کنید.

۷) $f(x) = x^{\frac{۱}{۵}}; (0,0)$

۸) $f(x) = ۱ - ۵x^{\frac{۳}{۵}}; (0, ۱)$

در تمرینات ۱۲ – ۹ مشخص کنید که آیا f در نقطه داده شده یک خط مماس دارد و یا نه. اگر دارد معادله آنرا پیدا کنید.

۹) $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & \text{برای} \quad x \leq 0 \\ x^{۳} & \text{برای} \quad x > 0 \end{cases} \qquad (0,0)$

۱۰) $f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ۲ & \text{برای} \quad x \leq ۲ \\ ۴x - ۲ & \text{برای} \quad x > ۲ \end{cases} \qquad (۲,۶)$

۱۱) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{برای} \quad 0 \leq x \leq ۱ \\ x & \text{برای} \quad x > ۱ \end{cases} \qquad (۱,۱)$

۱۲) $f(x) = |x + ۲|; (۲,۴)$

۲۵ـ نشان دهید که دو تابع زیر در نقاط داده شده ، دارای خطوط مماس موازی هستند.

$$f(x) = ۲\sin x; (0,0)$$

و

$$g(x) = -\frac{۱}{x^{۲}}; (۱,-۱)$$

۲۶ ـ نشان دهید که دو تابع زیر در نقاط داده شده ، دارای یک خط مماس مشترک هستند.

$(a) \quad f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = x^{۳}$ در نقطه $(0,0)$

$(b) \quad f(x) = x^{۲} + ۱$ و $g(x) = -x^{۲} + ۱$ در نقطه $(0,۱)$

۲۷ – فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، نشان دهید که خط $۴y=x+۴$ مماس بر f است. نقطه مماس را پیدا کنید.

۲۸ – فرض کنید نمودار f یک خط مماس غیر عمودی در نقطه $\big(a,f(a)\big)$ دارد. نشان دهید که شیب m_a آن خط مماس به صورت فرمول زیر است.

$$m_a=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۲۹ – فرض کنید f یک تابع زوج باشد. یعنی $f(-x)=f(x)$ و فرض کنید خط مماس بر f در نقطه (a,b) دارای شیب m_a است. نشان دهید که نمودار f ، یک خط مماس در نقطه $(-a,b)$ دارد. شیب آن خط مماس را پیدا کنید.

۳۰

فرض کنید $f(x)=x^۲$ باشد.

الف – نشان دهید که هر خط مماس بر نمودار f زیر نمودار f قرار دارد ، بجز در نقطه مماس.

ب – ثابت کنید هر دو خط متمایز که بر نمودار f مماس باشند ، یکدیگر را قطع می کنند.

۳۱ – دائره ای را در نظر بگیرید که مرکز آن روی نقطه مبدا مختصات است و دارای شعاع ۲ واحد است. معادله خط مماس بر دائره در نقطه $\left(-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right)$ را پیدا کنید.

۳۲ – فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ باشد. مساحت مثلث واقع در ربع دوم که تشکیل شده است از محور های مختصات و خط مماس بر f در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲},۴\right)$ را پیدا کنید.

۳۳ – فرض کنید $f(x) = x^{۲}$ باشد. نشان دهید هر خط قائم بر نمودار f بجز خط قائم که از مبدا مختصات می گذرد ، نمودار f را در دو نقطه قطع می کند.

توضیح :خط قائم بر منحنی Normal Line خطی است که بر خط مماس در نقطه مماس عمود باشد.

۳۴ – سرعت شئی رها شده در مثال ۵ در ثانیه دوم چقدر است؟

۳۵ – یک سنگ از بالای یک پل رها می شود و بعد از ۶ ثانیه به سطح آب می‌رسد.

الف –چه مسافتی را سنگ از پل تا سطح آب طی می کند؟

ب –با چه سرعتی سنگ با آب بر خورد می کند؟

۳۶ – فرض کنید درامد حاصل از فروش x بشکه عسل $R(x)$ تومان است. در صورتی که

$$R(x) = ۴۵۰x \quad \text{برای} \quad x \geq ۰$$

باشد. در آمد نهایی برای ۴۰ بشکه را پیدا کنید.

۳۷ – فرض کنید $C(x)$ هزار تومان هزینه تولید x هزار گالن رنگ باشد. در صورتی که

$$C(x) = ۱۵ + ۱۲x - x^{۳} \quad \text{برای} \quad 0 \leq x \leq ۲$$

باشد. همچنین فرض کنید در آمد حاصل از فروش x هزار گالن رنگ $R(x)$ هزار تومان باشد. در صورتی که

$$R(x) = \frac{۴۵}{۴}x$$

باشد. مقدار a را پیدا کنید به طوریکه $m_C = m_R$ باشد.

پاسخ تمرینات ۲.۱

تمرینات ۲.۱

در تمرینات ۶ – ۱ معادله خط مماس بر نمودار تابع داده شده در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵; (-۱, ۵)$

پاسخ

$$\lim_{x\to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x - (-۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{۵ - ۵}{x + ۱} = 0$$

معادله خط مماس مطابق زیر بدست می آوریم.

$$l:\ y - ۵ = 0\left(x - (-۱)\right) \quad \text{یا} \quad y = ۵$$

۲) $f(x) = ۴ - ۳x; (0, ۴)$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{(۴ - ۳x) - ۴}{x} = \lim_{x\to 0} -۳ = -۳$$

$$l:\ y - ۴ = -۳(x - 0) \quad \text{یا} \quad y = ۴ - ۳x$$

۳) $f(x) = x^۲ + ۲x; (-۳, ۳)$

پاسخ

$$\lim_{x\to -۳} \frac{f(x) - f(-۳)}{x - (-۳)} = \lim_{x\to -۳} \frac{(x^۲ + ۲x) - ۳}{x + ۳} \lim_{x\to -۳} \frac{(x + ۳)(x - ۱)}{x + ۳}$$
$$= \lim_{x\to -۳} (x - ۱) = -۴$$

$$l:\ y - ۳ = -۴\left(x - (-۳)\right) \quad \text{یا} \quad y = -۴x - ۹$$

۴) $g(x) = x^{۳} + ۲; (0, ۲)$

پاسخ

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{۳} + ۲ - ۲}{x} = \lim_{x \to 0} x^{۲} = 0$$

$l:\ y - ۲ = 0(x - 0)$ یا $y = ۲$

۵) $g(x) = -۲\sin x; (0,0)$

پاسخ

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-۲\sin x - 0}{x} = -۲\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -۲ * ۱ = -۲$$

$l:\ y - 0 = -۲(x - 0)$ یا $y = -۲x$

۶) $f(x) = \sqrt{x}; (۱, ۱)$

پاسخ

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt{x} - ۱}{(\sqrt{x} - ۱)(\sqrt{x} + ۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱}$$
$$= \frac{۱}{۲}$$

$l:\ y - ۱ = \frac{۱}{۲}(x - ۱)$ یا $y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}$

در تمرینات ۶ و ۷ نشان دهید که f یک خط مماس عمودی در نقطه داده شده دارد. معادله خط مماس را پیدا کنید.

۷) $f(x) = x^{\frac{۱}{۵}}; (0,0)$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{۱}{۵}} - 0^{\frac{۱}{۵}}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{۱}{x^{\frac{۴}{۵}}} = \infty$$

$l:\ x = 0$

۸) $f(x) = ۱ - ۵x^{\frac{۳}{۵}}; (0,۱)$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(۱ - ۵x^{\frac{۳}{۵}}\right) - ۱}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-۵}{x^{\frac{۲}{۵}}} = \infty$$

$l:\ x = 0$

در تمرینات ۱۲ – ۹ مشخص کنید که آیا f در نقطه داده شده یک خط مماس دارد و یا نه. اگر دارد معادله آنرا پیدا کنید.

۹) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{برای } x \le 0 \\ x^۳ & \text{برای } x > 0 \end{cases}$ $(0,0)$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^۲-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^۳-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^۲ = 0$$

لذا

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

l: $y-0=0(x-0)$ یا $y=0$

۱۰) $f(x) = \begin{cases} x^۲+۲ & \text{برای } x \le ۲ \\ ۴x-۲ & \text{برای } x > ۲ \end{cases}$ $(۲,۶)$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x^۲+۲)-۶}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} (x+۲) = ۴$$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۴x-۲)-۶}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۴x-۸}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۴(x-۲)}{x-۲}$$
$$= \lim_{x\to ۲^+} ۴ = ۴$$

لذا

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۴$$

$l:\ y-۶=۴(x-۲)$ یا $y=۴x-۲$

۱۱) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{برای } 0\le x\le ۱\\ x & \text{برای } x>۱\end{cases}$ $(۱,۱)$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}$$
$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}۱=۱$$

چون $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ نه مساوی یک عدد است و نه بی نهایت ، پس هیچ خط مماسی وجود ندارد.

۱۲) $f(x)=|x+۲|;(۲,۴)$

پاسخ

چون $x+۲>0$ است در بازه باز I که شامل ۲ است ، پس خواهیم داشت

$$f(x)=x+۲ \quad \text{برای} \quad x\in I$$

پس

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x-۲}=۱$$

$l:\ y-۴=۱(x-۲)$ یا $y=x+۲$

۲۵- نشان دهید که دو تابع زیر در نقاط داده شده ، دارای خطوط مماس موازی هستند.

$$f(x) = ۲\sin x; (0,0)$$

و

$$g(x) = -\frac{۱}{x^{۲}}; (۱,-۱)$$

پاسخ

$$m_{۱} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{۲\sin x - 0}{x-0} = 2$$

$$m_{۲} = \lim_{x\to ۱}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{-\frac{۱}{x^{۲}}-(-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}(x-۱)} = \lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{x^{۲}}$$
$$= ۲$$

چون $m_{۱} = m_{۲}$ است ، پس خطوط مماس با هم موازی هستند.

۲۶ – نشان دهید که دو تابع زیر در نقاط داده شده ، دارای یک خط مماس مشترک هستند.

(a) $\quad f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = x^{۳}$ در نقطه $(0,0)$

(b) $\quad f(x) = x^{۲}+۱$ و $g(x) = -x^{۲}+۱$ در نقطه $(0,۱)$

پاسخ

(a) $\quad f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = x^{۳}$ در نقطه $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{۲}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{۳}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{۲} = 0$$

چون خط های مماس که از نقطه $(0,0)$ می گذارند دارای یک شیب هستند ، پس آنها یکی هستند.

$(b)\quad f(x) = x^{۲} + ۱$ و $g(x) = -x^{۲} + ۱$ در نقطه $(0,۱)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{۲}+۱-۱}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^{۲}+۱-۱}{x-0} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

چون خط های مماس که از نقطه $(0,۱)$ می گذارند دارای یک شیب هستند ، پس آنها یکی هستند.

۲۷ ــ فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، نشان دهید که خط $۴y = x + ۴$ مماس بر f است. نقطه مماس را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا نقطه تقاطع خط و نمودار f را پیدا می کنیم.

$$\sqrt{x} = \frac{x+۴}{۴}$$

$$۴\sqrt{x} = x + ۴$$

$$۱۶x = x^{۲} + ۸x + ۱۶$$

$$x^{۲} - ۸x + ۱۶ = ۰$$

$$(x-۴)^{۲} = ۰$$

$$x = ۴$$

$$f(۴) = ۲$$

پس نقطه مماس $(۴,۲)$ است.

چون

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \lim_{x\to ۴}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲} = \frac{۱}{۴}$$

پس معادله خط مما س در نقطه $(۴,۲)$ از طریق زیر بدست می آوریم.

$$y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۴) \quad \text{یا} \quad ۴y=x+۴$$

۲۸ ـ فرض کنید نمودار f یک خط مماس غیر عمودی در نقطه $(a,f(a))$ دارد. نشان دهید که شیب m_a آن خط مماس به صورت فرمول زیر است.

$$m_a=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

پاسخ

طبق فرمول شیب خط مماس داریم

$$m_a=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بجای x می گذاریم $a+h$ پس فرمول بالا به صورت زیر در می آید.

$$m_a=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۲۹ ـ فرض کنید f یک تابع زوج باشد. یعنی $f(-x)=f(x)$ و فرض کنید خط مماس بر f در نقطه (a,b) دارای شیب m_a است. نشان دهید که نمودار f ، یک خط مماس در نقطه $(-a,b)$ دارد. شیب آن خط مماس را پیدا کنید.

پاسخ

چون $f(-x)=f(x)$ است ، پس خواهیم داشت

$$\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a}\frac{f(-x)-f(a)}{x+a}=\lim_{x\to -a}\frac{-\big(f(-x)-f(a)\big)}{-x-a}$$
$$=-\lim_{x\to -a}\frac{f(-x)-f(a)}{-x-a}$$

بر اساس قضیه جانشینی

$$-\lim_{x\to -a}\frac{f(-x)-f(a)}{-x-a}=-\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a}=-m_a$$

چون $f(-a)=f(a)=b$ است ، پس f یک خط مماس در نقطه $(-a,b)$ دارد و شیب آن $-m_a$ است.

۳۰

فرض کنید $f(x)=x^۲$ باشد.

الف – نشان دهید که هر خط مماس بر نمودار f زیر نمودار f قرار دارد ، بجز در نقطه مماس.

پاسخ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^۲-a^۲}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=۲a$$

پس خط مماس در نقطه $(a,a^۲)$ خط زیر است

$$y-a^۲=۲a(x-a) \quad \text{یا} \quad y=۲ax-a^۲$$

برای نشان دادن این که خط مماس زیر نمودار f است ، بجز در نقطه مماس ، نشان می دهیم

$$۲ax-a^۲<x^۲ \quad \text{برای} \quad x\neq a$$

است. ملاحظه می کنید که $۲ax-a^۲<x^۲$ معادل است با $x^۲-۲ax+a^۲>۰$ است و یا $(x-a)^۲>۰$ است و این در صورتی صحیح است که $x\neq a$ باشد.

ب – ثابت کنید هر دو خط متمایز که بر نمودار f مماس باشند ، یکدیگر را قطع می کنند.

پاسخ

فرض می کنیم $x_۱\neq x_۲$ باشد. پس $l_۱$ خط مماس با سهمی در نقطه $(x_۱,x_۱^۲)$ دارای شیب $۲x_۱$ است. در صورتی که خط $l_۲$ مماس با سهمی در نقطه $(x_۲,x_۲^۲)$ دارای شیب $۲x_۲$ است.
دلیل آن واضح است. از فرمول شیب خط مماس استفاده کنید.

چون شیب ها با هم متفاوت هستند ، پس l_1 و l_2 با هم موازی نیستند، و لذا یک دیگر را قطع می کنند.

۳۱ – دائره ای را در نظر بگیرید که مرکز آن روی نقطه مبدا مختصات است و دارای شعاع ۲ واحد است. معادله خط مماس بر دائره در نقطه $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد ، پس نمودار f نیم دائره بالایی است. شیب خط مماس در نقطه $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ مطابق زیر بدست می آوریم.

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{f(x)-f\left(-\sqrt{2}\right)}{x-\left(-\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2}}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{\left(4-x^2\right)-2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{-\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\sqrt{۲}} \frac{-\left(x-\sqrt{۲}\right)}{\sqrt{۴-x^{۲}}+\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = ۱$$

معادله خط مماس هم از طریق زیر بدست می آوریم.

$$y-\sqrt{۲} = ۱\left(x-\left(-\sqrt{۲}\right)\right) \quad \text{یا} \quad y = x + ۲\sqrt{۲}$$

۳۲ – فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$ باشد. مساحت مثلث واقع در ربع دوم که تشکیل شده است از محور های مختصات و خط مماس بر f در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲},۴\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

شیب خط مماس با نمودار در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲},۴\right)$ را بدست می آوریم.

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{f(x)-f\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{x-\left(-\frac{۱}{۲}\right)} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)-۴}{x+\frac{۱}{۲}} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{۲\left(۱-۴x^{۲}\right)}{x^{۲}\left(۲x+۱\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۲\left(۲x+۱\right)\left(۲x-۱\right)}{x^{۲}\left(۲x+۱\right)} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۲\left(۲x-۱\right)}{x^{۲}} = ۱۶$$

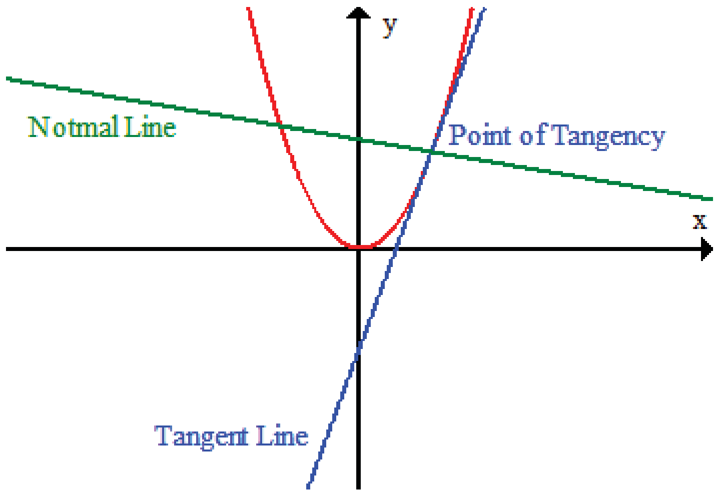
و معادله خط مماس در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲},۴\right)$ مطابق زیر بدست می آوریم.

$$y-۴ = ۱۶\left(x-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right) \quad \text{یا} \quad y = ۱۶x + ۱۲$$

مکان تلاقی با محور x و y به ترتیب $-\frac{۳}{۴}$ و ۱۲ است. لذا مساحت مثلث خواسته شده را بدست می آوریم. $A = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)(۱۲) = \frac{۹}{۲}$

۳۳ – فرض کنید $f(x) = x^۲$ باشد. نشان دهید هر خط قائم بر نمودار f بجز خط قائم که از مبدا مختصات می گذرد ، نمودار f را در دو نقطه قطع می کند.

توضیح: خط قائم بر منحنی Normal Line خطی است که بر خط مماس در نقطه مماس عمود باشد.



پاسخ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^۲-a^۲}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = ۲a$$

بنا بر این شیب خط مماس در نقطه $\left(a, a^۲\right)$ می شود $۲a$ اگر $a = 0$ باشد ، معادله خط مماس می شود $y = 0$ یعنی محور x ها و لذا خط قائم ، عمودی است و در نتیجه نمودار f را فقط در نقطه $(0,0)$ قطع می کند.

اگر $a \neq 0$ باشد ، خط قائم در نقطه $\left(a, a^۲\right)$ دارای شیب $-\frac{۱}{۲a}$ است. می دانید چرا ؟ زیرا حاصل ضرب شیب های دو خط عمود بر هم -۱ است. در نتیجه معادله خط قائم می شود

$$y - a^۲ = -\frac{۱}{۲a}(x-) \quad \text{یا} \quad y = \frac{-x}{۲a} + a^۲ + \frac{۱}{۲}$$

برای پیدا کردن نقاط تلاقی این خط با نمودار f معادله زیر را حل می کنیم.

$$x^۲ = \frac{-x}{۲a} + a^۲ + \frac{۱}{۲}$$

$$x^۲ + \frac{x}{۲a} - a^۲ - \frac{۱}{۲} = 0$$

$$(x-a)\left(x + a + \frac{۱}{۲a}\right) = 0$$

پس اگر $a \neq 0$ باشد ، خط قائم ، نمودار f را در نقاط

$$\left(a, a^۲\right) \quad و \quad \left(-a - \frac{۱}{۲a}, \left(-a - \frac{۱}{۲a}\right)^۲\right)$$

قطع می کند.

۳۴ ـ سرعت شئی رها شده در مثال ۵ در ثانیه دوم چقدر است؟

پاسخ

$$v(۲) = \lim_{t\to ۲} \frac{h(t) - h(۲)}{t - ۲} = \lim_{t \to ۲} \frac{\left(۴۰۰ - ۱۶t^۲\right) - \left(۴۰۰ - ۶۴\right)}{t - ۲}$$

$$= \lim_{t\to ۲} \frac{۱۶\left(۴ - t^۲\right)}{t - ۲} = \lim_{t\to ۲} - ۱۶(t + ۲) = -۶۴$$

پس $v(۲) = -۶۴$ فوت در ثانیه است.

۳۵ ـ یک سنگ از بالای یک پل رها می شود و بعد از ۶ ثانیه به سطح آب می‌رسد.

پاسخ

فرض می کنیم مبدا مختصات ، سطح رود خانه باشد .پس $v_0 = 0$ است و لذا مکان سنگ بعد از t ثانیه می شود $h(t) = -۱۶t^۲ + h_0$, در این معادله ، h_0 فاصله بین سطح رود خانه و بالای پل است.

الف ـچه مسافتی را سنگ از پل تا سطح آب طی می کند؟

چون سنگ بعد از شش ثانیه وارد آب می شود ، پس $h(۶) = 0$ است. و لذا

$$0 = -۱۶ * ۶^۲ + h_0$$

$$-۵۷۶ + h_0 = 0$$

$$h_0 = ۵۷۶ \text{ فوت}$$

ب ـبا چه سرعتی سنگ با آب بر خورد می کند؟

$$v(۶) = \lim_{t\to ۶} \frac{h(t) - h(۶)}{t - ۶} = \lim_{t\to ۶} \frac{\left(-۱۶t^۲ + ۵۷۶\right) - 0}{t - ۶} = \lim_{t\to ۶} \frac{-۱۶\left(t^۲ - ۳۶\right)}{t - ۶}$$

$$= \lim_{t\to ۶} - ۱۶(t + ۶) = -۱۹۲$$

پس سنگ با سرعت ۱۹۲ فوت در ثانیه به آب بر خورد می کند.

۳۶ ـ فرض کنید درامد حاصل از فروش x بشکه عسل $R(x)$ تومان است. در صورتی که

$$R(x) = ۴۵۰x \quad \text{برای} \quad x \geq ۰$$

باشد. در آمد نهایی برای ۴۰ بشکه را پیدا کنید.

پاسخ

$$m_R = \lim_{x\to ۴۰} \frac{R(x) - R(۴۰)}{x - ۴۰} = \lim_{x\to ۴۰} \frac{۴۵۰x - ۴۵۰ * ۴۰}{x - ۴۰} = \lim_{x\to ۴۰} ۴۵۰ = ۴۵۰ \text{ تومان}$$

۳۷ – فرض کنید $C(x)$ هزار تومان هزینه تولید x هزار گالن رنگ باشد. در صورتی که

$$C(x) = ۱۵ + ۱۲x - x^۳ \quad \text{برای} \quad 0 \le x \le ۲$$

باشد. همچنین فرض کنید در آمد حاصل از فروش x هزار گالن رنگ $R(x)$ هزار تومان باشد. در صورتی که

$$R(x) = \frac{۴۵}{۴}x$$

باشد. مقدار a را پیدا کنید به طوریکه $m_C = m_R$ باشد.

پاسخ

برای $0 < a < ۲$ خواهیم داشت.

$$m_C(a) = \lim_{x\to a}\frac{C(x)-C(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(۱۵+۱۲x-x^۳\right)-\left(۱۵+۱۲a-a^۳\right)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{۱۲(x-a)-\left(x^۳-a^۳\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[۱۲-\left(x^۲+ax+a^۲\right)\right]$$

$$= ۱۲ - ۳a^۲$$

و

$$m_R(a) = \lim_{x\to a}\frac{R(x)-R(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{۴۵}{۴}\right)x-\left(\frac{۴۵}{۴}\right)a}{x-a} = \frac{۴۵}{۴}$$

اگر قرار است $m_C = m_R$ باشد ، پس خواهیم داشت

$$۱۲ - ۳a^۲ = \frac{۴۵}{۴}$$

$$۳a^۲ = \frac{۳}{۴} \quad \text{یا} \quad a = \frac{۱}{۲}$$

۲.۲ – مشتق The Derivative

در بخش ۲.۱ خط مماس بر نمودار یک تابع f را در نقطه $(a, f(a))$ را تعریف کردیم. هنگامی که خط مماس ، عمودی نیست ، شیب آن بر اساس تعریف از فرمول زیر بدست آوردیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۱)$$

در صورتی که حد بالا وجود داشته باشد. حد های مانند فرمول شماره (۱) بالا در تعریف های سرعت ، در آمد نهایی ، و هزینه نهایی هم پیدا شد. چون حد فرمول شماره (۱) بالا تعاریف متعدد ممکن است داشته باشد ، لذا می توان گفت حد یک مفهوم کلی است . یا به عبارت دیگر مفهوم حد از مفهوم مشتق کلی تر است.

تعریف مشتق Definition of Derivative

فرض می کنیم a یک عدد در دامنه یک تابع f باشد. اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وجود داشته باشد ، این حد را **مشتق تابع** $\boldsymbol{f}$ **در** $\boldsymbol{a}$ می نامیم و می نویسیم $f'(a)$ پس

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۲)$$

اگر حد شماره (۲) بالا وجود داشته باشد ، می گوییم f **یک مشتق در** $\boldsymbol{a}$ **دارد** ، یا $\boldsymbol{f}$ **در** $\boldsymbol{a}$ **قابل** دیفرانسیل گیری است ، یا $\boldsymbol{f'(a)}$ **وجود دارد.**

هرسه عبارت های بالا در تعاریف مشتق ، عموما مورد استفاده قرار می گیرند ، ما هم در این کتاب ، هر سه را بکار خواهیم برد. عبارت $f'(a)$ خوانده می شود " مشتق f در a " و یا "اف پریم a "

توجه

دو حد زیر کاملا با هم تفاوت دارند.

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثلا اگر $f(x)=x^{۲}$ باشد ، پس

$$\lim_{x\to a} x^{۲} = a^{۲}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^{۲}-a^{۲}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = ۲a$$

مثال ۱ ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۲}+۱$ باشد ، $f'(-۱)$ و $f'(۳)$ را پیدا کنید. خطوط مماس بر نمودار f در این دو نقطه را رسم کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول شماره (۲) داریم

$$f'(-۱) = \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to -۱}\frac{\left(\frac{۱}{۴}x^{۲}+۱\right)-\frac{۵}{۴}}{x-(-۱)}$$

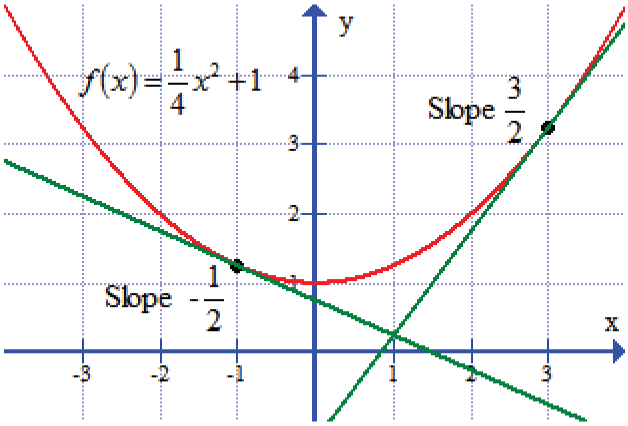
$$= \lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۱}{۴}x^{۲}-\frac{۱}{۴}}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۱}{۴}\left(x^{۲}-۱\right)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۱}{۴}(x+۱)(x-۱)}{x+۱}$$

$$= \lim_{x\to -۱}\frac{۱}{۴}(x-۱) = -\frac{۱}{۲}$$

همچنین

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳}\frac{\left(\frac{۱}{۴}x^{۲}+۱\right)-\frac{۱۳}{۴}}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{۴}x^{۲}-\frac{۹}{۴}}{x-۳}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۱}{۴}\left(x^{۲} - ۹\right)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۱}{۴}(x - ۳)(x + ۳)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{۴}(x + ۳) = \frac{۳}{۲}$$



بر اساس توضیح داده شده قبل در مورد تعاریف مشتق ، $f'(a)$ نمایانگر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ است. گاهی اوقات $f'(a)$ را به عنوان **شیب** $\boldsymbol{f}$ در a بکار می بریم.

در مثال بالا $f'(-۱) = -\frac{۱}{۲}$ پیدا کردیم و $f'(۳) = \frac{۳}{۲}$ پس شیب f در -۱ می شود $-\frac{۱}{۲}$ و شیب f در ۳ می شود $\frac{۳}{۲}$

اگر قدر مطلق $f'(a)$ بزرگ باشد ، نمودار آن در نزدیکی $(a, f(a))$ شیب تند دارد و اگر قدر مطلق $f'(a)$ کوچک باشد ، نمودار آن در نزدیکی $(a, f(a))$ تقریبا افقی است.

بدون در نظر گرفتن این که قدر مطلق $f'(a)$ بزرگ باشد و یا کوچک ، اگر $f'(a)$ مثبت باشد ، نمودار f از چپ به راست صعودی است و اگر $f'(a)$ منفی باشد ، نمودار f نزولی است. لذا مشتق یک تابع می تواند به ما اطلاعاتی بدهد که در رسم نمودار کمک کند.

فعلا ، می گوییم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد ، پس حرف x در تعریف شماره (۲) میتواند با حروف دیگری جانشین شود. مثلا می توان نوشت

$$\boxed{f'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \qquad (۳)}$$

حالا فرض کنید یک شئی در طول یک خط مستقیم حرکت می کند بطوری که آن خط روی محور های مختصات قرار دارد ، و فرض می کنیم $f(t)$ مکان شئی در زمان t باشد. در بخش ۲.۱ سرعت $v(t_0)$ شئی در زمان t_0 به صورت فرمول زیر تعریف کردیم.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

به زبان مشتق این فرمول بالا را می توان مطابق زیر بیان کرد.

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

به همین طریق برای هزینه نهایی و در آمد نهایی

$$m_C(a) = C'(a) \quad \text{و} \quad m_R(a) = R'(a)$$

در صورتی که R و C در a قابل دیفرانسیل گیری باشند

در حقیقت اگر f یک تابع قابل دیفرانسیل گیری باشد ، می توان $f'(a)$ را میزان تغیرات f در a تصور کرد.

مشتق به عنوان یک تابع The Derivative as a Function

تقریبا تمام توابعی که در آینده به آنها برخورد می کنیم ، در تمام نقاط دامنه شان قابل دیفرانسیل گیری هستند ، و یا در تمام نقاط بجز تعداد محدودی .

تابع f' که هنگام مشتق گرفتن f در چنین اعدادی بدست می آید ، **مشتق f و یا مشتق f نسبت به x نامیده می شود.**

لذا f' یک تابع است که دامنه اش مجموعه اعدادی است که در آنها f قابل دیفرانسیل گیری است و مقدارش در هر کدام از این اعداد x از فرمول زیر بدست می ید.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (۴)$$

توجه داشته باشید که در فرمول (۴) بالا x هر عددی است که در آن f قابل دیفرانسیل گیری است. اما ، وقتی که حد سمت راست در فرمول (۴) ارز یابی می شود ، t متغیر است و x عدد ثابت.

مثال ۲– فرض کنید $f(x) = x^{۲}$ باشد. نشان دهید که $f'(x) = ۲x$ است برای تمام x ها.

پاسخ

با استفاده از فرمول شماره (۴) خواهیم داشت.

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^{۲}-x^{۲}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t+x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}(t+x) = ۲x$$

مثال ۳ – فرض کنید $f(x) = x^{\frac{۱}{۲}}$ است. نشان دهید که $f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$ است برای $x >۰$

پاسخ

با استفاده از (۴) برای $x >۰$ خواهیم داشت.

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}}}{t-x} = \lim_{t\to x}\left(\frac{t^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}}}{t-x} * \frac{t^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۱}{۲}}}{t^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۱}{۲}}}\right)$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{t-x}{(t-x)\left(t^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۱}{۲}}\right)} = \lim_{t\to x}\frac{۱}{t^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۲x^{\frac{۱}{۲}}}$$

پس

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

بسیاری از توابع که در حسابان به آنها بر خورد می کینم ، مشتق هستند.

در حقیقت تا به حال دیده ایم که

سرعت مشتق تابع مکان است $v(x) = f'(x)$
در آمد نهایی مشتق تابع در آمد است $m_R(x) = R'(x)$
هزینه نهایی مشتق تابع هزینه است $m_C(x) = C'(x)$

نماد های دیگر برای مشتق – علاوه بر نمادی که تا بحال برای مشتق بکار بردیم ، نماد های دیگری هم بکار می دود. اهم آنها در ذیل می آید.

$$u' \ , \quad \frac{dy}{dx} \quad , \frac{d}{dx}f(x)$$

مثال

مشتق در یک نقطه	مشتق به عنوان یک تابع	تابع
$f'(۴) = ۸$	$f'(x) = ۲x$	$f(x) = x^۲$
$\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=۴} = ۸$	$\frac{dy}{dx} = ۲x$ یا $\frac{d}{dx}(x^۲) = ۲x$	$y = x^۲$
$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right\vert_{x=۴} = ۸$	$\frac{d}{dx}f(x) = ۲x$	$f(x) = x^۲$
$u'\vert_{x=۴} = ۸$	$u' = ۲t$	$u = t^۲$

تمرینات ۲.۲

در تمرینات ۶ – ۱ با استفاده از تعریف مشتق $f'(a)$ را برای مقدار داده شده a پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵; a = ۴$

۲) $f(x) = ۲x + ۳; a = ۱$

۳) $f(x) = x^۲ - ۲; a = -۱$

۴) $f(x) = \frac{۱}{x}; a = -۲$

۵) $f(x) = |x|; a = \sqrt{۲}$

۶) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{برای} \quad x < ۲ \\ ۴x - ۴ & \text{برای} \quad x \geq ۲ \end{cases}; a = ۲$

در تمرینات ۱۰ – ۷ با استفاده از فرمول شماره (۴) مشتق توابع زیر را پیدا کنید.

۷) $f(x) = -\pi$

۸) $f(x) = -۵x^۲$

۹) $g(x) = x^{۳}$

۱۰) $k(x) = \frac{۱}{x^{۲}} - \sqrt{۷}$

در تمرینات ۱۲ – ۱۱ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

۱۱) $y = \frac{۷}{۳}$

۱۲) $y = ۳x^{۲} + ۱$

در تمرینات ۱۶ – ۱۳ با استفاده از تعریف مشتق فرمول شماره (۲) مشخص کنید آیا تابع در a مشتق دارد و یا نه ، اگر دارد آنرا پیدا کنید.

۱۳) $f(x) = x^{\frac{۱}{۳}}; a = 0$

۱۴) $f(x) = |x| - x; a = 0$

۱۵) $g(x) = |x + ۳|; a = ۳$

۱۶) $k(x) = \begin{cases} -x^{۲} + ۴x & \text{برای } x < 0 \\ x^{۲} - ۱ & \text{برای } x \geq 0 \end{cases} \quad ; a = 0$

در تمرینات ۱۸ – ۱۷ معادله خط مماس بر f در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱۷) $f(x) = x^{۲}; (-۲, ۴)$

۱۸) $f(x) = \sqrt{x}; (۴, ۲)$

۱۹ -هر کدام از حد های زیر (a, b, c) به شکل زیر هستند. (برای یک تابع مناسب f و یک نقطه مناسب a)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای هر یک از آنها ، یک فرمول مناسب برای f پیدا کنید و $f'(a)$ را محاسبه نمائید.

$$a) \quad \lim_{x\to ۱} \frac{x^{۳} - ۱}{x - ۱}$$

$$b) \quad \lim_{x\to ۲} \frac{x^{۴} - ۱۶}{x - ۲}$$

$$c) \quad \lim_{x\to ۲} \left(x^{۳} + ۲x^{۲} + ۴x + ۸\right)$$

۲۰

فرض کنید $f'(a)$ وجود دارد. عبارت زیر را

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

بر حسب $f'(a)$ بنویسید.

۲۱ –

الف - فرض کنید f یک تابع زوج است. اگر $f'(a) = ۲$ باشد ، $f'(-a)$ را پیدا کنید.

ب - فرض کنید f یک تابع فرد است. اگر $f'(a) = ۲$ باشد ، $f'(-a)$ را پیدا کنید

۲۲ – فرض کنید f و g دو تابع هستند ، به طوری که $f(a) = g(a)$ و فرض کنید $f'(a)$ وجود داشته باشد. آیا می توان نتیجه گرفت $f'(a) = g'(a)$ است؟ توضیح دهید.

۲۳ – فرض کنید $y = ۸x - ۲۳$ معادله خط مماس با نمودار یک تابع مانند f در نقطه $(۵, ۱۷)$ است. مطلوب است $f'(۵)$

۲۴ – یک توپ از ارتفاع ۲۵۶ فوت نسبت به زمین رها می شود. سرعت توپ را در زمانهای زیر پیدا کنید.

الف – بعد از یک ثانیه

ب –بعد از دو ثانیه

۲۵ – فرض کنید تابع هزینه مطابق رابطه زیر است.

$$C(x) = ۱۰۰۰۰ + \frac{۳}{x} \quad \text{برای} \quad ۱ \le x \le ۱۰۰$$

هزینه نهایی در ۵۰ را پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۲

در تمرینات ۶ ــ ۱ با استفاده از تعریف مشتق $f'(a)$ را برای مقدار داده شده a پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵; a = ۴$

$$f'(۴) = \lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴}\frac{۵-۵}{x-۴} = \lim_{x\to ۴}0 = 0$$

۲) $f(x) = ۲x + ۳; a = ۱$

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(۲x+۳)-(۵)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{x-۱}$$
$$= \lim_{x\to ۱}\frac{۲(x-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}۲ = ۲$$

۳) $f(x) = x^۲ - ۲; a = -۱$

$$f'(-۱) = \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)} = \lim_{x\to -۱}\frac{\left(x^۲-۲\right)-\left((-۱)^۲-۲\right)}{x+۱}$$
$$= \lim_{x\to -۱}\frac{\left(x^۲-۲\right)+۱}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-۱}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}$$
$$= \lim_{x\to -۱}(x-۱) = -۲$$

۴) $f(x) = \frac{۱}{x}; a = -۲$

$$f'(-۲) = \lim_{x\to -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{x - (-۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{\left(\frac{۱}{x}\right) - \left(\frac{۱}{-۲}\right)}{x + ۲} = \lim_{x\to -۲} \frac{\frac{x + ۲}{۲x}}{x + ۲}$$

$$= \lim_{x\to -۲} \frac{x + ۲}{۲x(x + ۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{۱}{۲x} = -\frac{۱}{۴}$$

۵) $f(x) = |x|; a = \sqrt{۲}$

برای x نزدیک $\sqrt{۲}$ خواهیم داشت $f(x) = x$

$$f'\sqrt{۲} = \lim_{x\to \sqrt{۲}} \frac{f(x) - f\left(\sqrt{۲}\right)}{x - \sqrt{۲}} = \lim_{x\to \sqrt{۲}} \frac{x - \sqrt{۲}}{x - \sqrt{۲}} = \lim_{x\to \sqrt{۲}} (۱) = ۱$$

۶) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{برای} \quad x < ۲ \\ ۴x - ۴ & \text{برای} \quad x \geq ۲ \end{cases}; a = ۲$

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^-} (x + ۲)$$
$$= ۴$$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۴x - ۴) - (۴)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۴x - ۸}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۴(x - ۲)}{x - ۲}$$
$$= ۴$$

پس

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = ۴$$

در تمرینات ۱۰ – ۷ با استفاده از فرمول شماره (۴) مشتق توابع زیر را پیدا کنید.

۷) $f(x) = -\pi$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-\pi-(-\pi)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{0}{t-x} = 0$$

۸) $f(x) = -۵x^{۲}$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\left(-۵t^{۲}\right)-\left(۵x^{۲}\right)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-۵\left(t^{۲}-x^{۲}\right)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{-۵(t-x)(t+x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\left[-۵(t+x)\right] = -۵\lim_{t\to x}(t+x)$$
$$= -۱۰x$$

۹) $g(x) = x^{۳}$

$$g'(x) = \lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^{۳}-x^{۳}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t^{۲}+tx+x^{۲}\right)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\left(t^{۲}+tx+x^{۲}\right) = \left(x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}\right) = ۳x^{۲}$$

۱۰) $k(x) = \frac{۱}{x^{۲}} - \sqrt{۷}$

$$k'(x) = \lim_{t\to x}\frac{k(t)-k(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\left(\frac{۱}{t^{۲}}-\sqrt{۷}\right)-\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\sqrt{۷}\right)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{\frac{۱}{t^{۲}}-\sqrt{۷}-\frac{۱}{x^{۲}}+\sqrt{۷}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\frac{x^{۲}-t^{۲}}{t^{۲}x^{۲}}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-(t-x)(t+x)}{t^{۲}x^{۲}(t-x)}$$

$$-\lim_{t\to x}\frac{t+x}{t^{۲}x^{۲}}=-\frac{۲x}{x^{۴}}=-\frac{۲}{x^{۳}}$$

در تمرینات ۱۲ – ۱۱ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

۱۱) $y=\frac{۷}{۳}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to x}\frac{\frac{۷}{۳}-\frac{۷}{۳}}{t-x}=\lim_{t\to x}0=0$$

۱۲) $y=۳x^{۲}+۱$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to x}\frac{\left(۳t^{۲}+۱\right)-\left(۳x^{۲}+۱\right)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{۳\left(t^{۲}-x^{۲}\right)}{t-x}=۳\lim_{t\to x}(t+x)=۶x$$

در تمرینات ۱۶ – ۱۳ با استفاده از تعریف مشتق فرمول شماره (۲) مشخص کنید آیا تابع در a **مشتق دارد و یا نه ، اگر دارد آنرا پیدا کنید.**

۱۳) $f(x)=x^{\frac{۱}{۳}};a=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{۱}{۳}}-0^{\frac{۱}{۳}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{۱}{x^{\frac{۲}{۳}}}=\infty$$

تابع فوق در صفر مشتق ندارد.

۱۴) $f(x)=|x|-x;a=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x-x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(-۲)=-۲$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}0=0$$

تابع فوق در صفر مشتق ندارد.

۱۵) $g(x)=|x+۳|;a=۳$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)-g(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)-۶}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}۱=۱$$

پس $g'(۳)=۱$ است.

۱۶) $k(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & \text{برای } x<0\\ x^۲-۱ & \text{برای } x\geq 0\end{cases}\quad ;a=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x^۲+۴x)-(-۱)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-x+۴+\frac{۱}{x}\right)=-\infty$$

پس تابع فوق در صفر مشتق ندارد.

در تمرینات ۱۸ – ۱۷ معادله خط مماس بر f در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱۷) $f(x)=x^۲;(-۲,۴)$

بر اساس مثال ۲ داریم $f'(-۲)=۲(-۲)=-۴$ و لذا

$$l:\ y-۴=-۴(x+۲)$$

$$y=-۴x-۴$$

۱۸)　$f(x) = \sqrt{x}; (۴, ۲)$

بر اساس مثال ۳ داریم $f'(۴) = \frac{۱}{۲} * ۴^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}$ و لذا

$$l:\ y - ۲ = \frac{۱}{۴}(x - ۴)$$

$$y = \frac{۱}{۴}x + ۱$$

۱۹ -هر کدام از حد های زیر به شکل زیر هستند. (a, b, c) (برای یک تابع مناسب f و یک نقطه مناسب a)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای هر یک از آنها ، یک فرمول مناسب برای f پیدا کنید و $f'(a)$ را محاسبه نمائید.

$$a) \quad \lim_{x \to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱}$$

$$f(x) = x^۳; a = ۱$$

$$f'(۱) = \lim_{x \to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \left(x^۲ + x + ۱\right) = ۳$$

$$b) \quad \lim_{x \to ۲} \frac{x^۴ - ۱۶}{x - ۲}$$

$$f(x) = x^۴; a = ۲$$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{(x - ۲)(x + ۲)\left(x^۲ + ۴\right)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۳} (x + ۲)\left(x^۲ + ۴\right) = ۳۲$$

$$c)\quad \lim_{x\to ۲}\left(x^۳+۲x^۲+۴x+۸\right)$$

$$x^۳+۲x^۲+۴x+۸=\frac{\left(x^۳+۲x^۲+۴x+۸\right)\left(x-۲\right)}{x-۲}=\frac{x^۴-۱۶}{x-۲}$$

$$f(x)=x^۴;a=۲$$

$f'\left(۲\right)=۳۲$ بر اساس قسمت b

۲۰

فرض کنید $f'(a)$ وجود دارد. عبارت زیر را

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$$

بر حسب $f'(a)$ بنویسید.

پاسخ

بر اساس قضیه جانشینی با $x=a-h$ خواهیم داشت.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)$$

۲۱ـ

الف ـ فرض کنید f یک تابع زوج است. اگر $f'(a)=۲$ باشد ، $f'\,(-a)$ را پیدا کنید.

پاسخ

چون $f(-a)=f(a)$ است ، با استفده از حل تمرین شماره ۲۰ نتیجه می گیریم که

$$f'(-a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f(a-h)-f(a)}{h}=-f'(a)$$
$$=-۲$$

ب - فرض کنید f یک تابع فرد است. اگر $f'(a)=۲$ باشد ، $f'(-a)$ را پیدا کنید

پاسخ

چون $f(-a)=-f(a)$ است ، با استفاده از حل تمرین شماره ۲۰ نتیجه می گیریم که

$$f'(-a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=f'(a)=۲$$

۲۲ – فرض کنید f و g دو تابع هستند ، به طوری که $f(a)=g(a)$ و فرض کنید $f'(a)$ وجود داشته باشد. آیا می توان نتیجه گرفت $f'(a)=g'(a)$ است؟ توضیح دهید.

پاسخ

نه ؛فرض می کنیم $f(x)=۱$ و $g(x)=x$ برای تمام x ها. ملاحظه می کنید که

$$f(۱)=۱=g(۱)$$

اما

$$f'(۱)=0 \quad و \quad g'(۱)=۱$$

۲۳ – فرض کنید $y = ۸x - ۲۳$ معادله خط مماس با نمودار یک تابع مانند f در نقطه $(۵, ۱۷)$ است. مطلوب است $f'(۵)$

پاسخ

شیب خط مماس ۸ است. پس $f'(۵) = ۸$ است.

۲۴ – یک توپ از ارتفاع ۲۵۶ فوت نسبت به زمین رها می شود. سرعت توپ را در زمانهای زیر پیدا کنید.

پاسخ

سرعت در زمان t_0 داریم $v(t_0) = h'(t_0)$ به خاطر بیاورید که گفتیم

سرعت مشتق تابع مکان است $v(x) = f'(x)$

لذا خواهیم داشت

$$h'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\left(۲۵۶ - ۱۶t^{۲}\right) - \left(۲۵۶ - ۱۶t_0^{۲}\right)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t\to t_0} - ۱۶(t + t_0) = -۱۶\left(۲t_0\right) = -۳۲t_0$$

بنا بر این داریم $v(t_0) = ۳۲t_0$ و در نتیجه

الف – بعد از یک ثانیه

$$v\left(۱\right) = -۳۲ \quad \text{فوت در ثانیه}$$

ب –بعد از دو ثانیه

$$v\left(۲\right) = -۶۴ \quad \text{فوت در ثانیه}$$

۲۵ ــ فرض کنید تابع هزینه مطابق رابطه زیر است.

$$C(x) = ۱۰۰۰۰ + \frac{۳}{x} \quad \text{برای} \quad ۱ \leq x \leq ۱۰۰$$

هزینه نهایی در ۵۰ را پیدا کنید.

پاسخ

$$m_C(۵۰) = C'(۵۰) = \lim_{x\to ۵۰} \frac{C(x) - C(۵۰)}{x - ۵۰}$$

$$= \lim_{x\to ۵۰} \frac{\left(۱۰۰۰۰ + \frac{۳}{x}\right) - \left(۱۰۰۰۰ + \frac{۳}{۵۰}\right)}{x - ۵۰} = \lim_{x\to ۵۰} \frac{۳(۵۰ - x)}{۵۰x(x - ۵۰)} = \lim_{x\to ۵۰} \frac{-۳}{۵۰x}$$

$$= -\frac{۳}{۲۵۰۰}$$

۲.۳ – توابع مشتق پذیر و دیفرانسیلی
Differentiable Functions and Differentiability

در این بخش شروع می‌کنیم به پیدا کردن مشتق های چند تابع ، که هر کدام در هر یک از اعداد دامنه شان مشتق پذیر هستند. توابعی که این خاصیت را دارند ، توابع مشتق پذیر نامیده می شوند.

تعریف تابع مشتق پذیر Definition of Differentiable Function
اگر f در هر یک از اعداد در دامنه اش مشتق پذیر باشد ، پس f یک **تابع مشتق پذیر** است.

مثال ۱ – فرض کنید $f(x) = c$ باشد. و فرض کنید c یک عدد ثابت. نشان دهید که $f'(x) = 0$ است ، برای تمام x ها.
پاسخ
طبق تعریف مشتق خواهیم داشت.

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{c-c}{t-x} = \lim_{t\to x}0 = 0$$ برای تمام x ها

مثال ۲– فرض کنید $f(x) = x$ باشد. نشان دهید که $f'(x) = ۱$ است ، برای تمام x ها.
پاسخ
طبق تعریف مشتق خواهیم داشت.

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t-x}{t-x} = \lim_{t\to x}۱ = ۱$$ برای تمام x ها

در بخش قبل مشتق تابع $x^۲$ را پیدا کردیم. حالا مشتق تابع x^n را پیدا می کنیم. در این تابع n هر عدد صحیح مثبت می تواند ، باشد.
فرض می کنیم $f(x) = x^n$ باشد. چون داریم

$$t^n - x^n = (t-x)\left(t^{n-۱} + t^{n-۲}x + t^{n-۳}x^۲ + \cdots + tx^{n-۲} + x^{n-۱}\right)$$

پس

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t^{n-۱} + t^{n-۲}x + t^{n-۳}x^۲ + \cdots + tx^{n-۲} + x^{n-۱}\right)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}\left(t^{n-۱} + t^{n-۲}x + t^{n-۳}x^۲ + \cdots + tx^{n-۲} + x^{n-۱}\right) \\ &= \overbrace{x^{n-۱} + x^{n-۲} * x + x^{n-۳} * x^۲ + \cdots x * x^{n-۲} + x^{n-۱}}^{n\ terms} \\ &= nx^{n-۱} \end{aligned}$$

پس

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-۱}\ ,\ \{n|n\in\mathbb{Z}, n>0\} \quad (۱)}$$

مثلا اگر $f(x) = x^{۱۷}$ باشد ، پس $f'(x) = ۱۷x^{۱۶}$ است.

بخاطر بیاورید که در بخش ۲.۲ گفتیم که گاهی اوقات $f'(a)$ را میزان یا نرخ تغییرات f در a نامیدیم .

این اصطلاح میزان تغییرات f در a بیشتر برای توابعی بکار می روند که از نظر فیزیکی و یا هندسی بخواهیم تفسیر کنیم. اگر مثلا یک تابع به صورت یک متغیر y بر حسب یک متغیر x بیان شده است ، **مشتق** $\frac{dy}{dx}$ **را میزان تغییر** y **نسبت به** x **می نامیم.**

در مثال بعدی ، فرمول شماره (۱) را برای پیدا کردن میزان تغییر بکار می بریم.

مثال ۳

میزان تغییر حجم یک مکعب نسبت به طول یک ضلع را پیدا کنید.

پاسخ

اگر حجم Volumeمکعب را V و ضلع Side آنرا s بنامیم ، خواهیم داشت.

$$\text{مکعب ضلع} = \text{حجم}$$

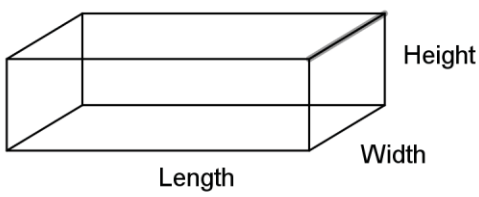
$$V = s^{۳}$$

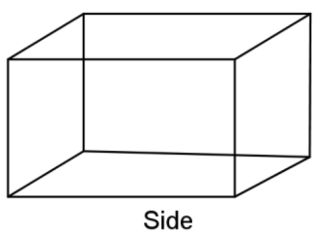
باید $\frac{dV}{ds}$ را پیدا کنیم. با استفاده از فرمول (۱) خواهیم داشت.

$$\frac{dV}{ds} = ۳s^{۲}$$

پس میزان تغییرات حجم یک مکعب نسبت به طول ضلعش $۳s^{۲}$ است و یا به عبارت دیگر میزان تغییرات حجم یک مکعب نسبت به طول ضلعش مساوی است با سه برابر مساحت یک جانب آن.

نکته –یک مکعب سه ضلع دارد ، طول ،عرض و بلندی یا ضخامت که در یک مکعب هر سه باهم برابر هستند. اما در یک مکعب مستطیل ، این اضلاع با هم برابر نیستند. از طرف دیگر هر مکعب یا مکعب مستطیل ، شش جانب یا رویه دارد. در مکعب هر جانب ، یک مربع است، اما در مکعب مستطیل ، هر جانب ، یک مستطیل است. پس به اختلاف ضلع و جانب در مکعب و مکعب مستطیل توجه کنید.





فرمول دیگری هم می توان برای محاسبه مشتق یک تابع بکار برد. اگر در فرمول شماره ۴ بخش ۲.۲ بجای t بگذاریم $x+h$ خواهیم داشت.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (۲)$$

یاد آوری فرمول شماره (۴) بخش ۲.۲

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

فرمول شماره (۴) بخش ۲.۲ را برای توابع جبری و فرمول شماره (۲) بالا را برای توابع مثلثاتی بکار می بریم.

برای پید کردن مشتق های sin و cos از حد هایی که در مثال های ۱۲ و ۱۳ بخش ۱.۳ بدست آوردیم ، استفاده می کنیم. در آن مثال ها بجای x می گذاریم h که نتیجه می شود.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=۱ \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-۱}{h}=0$$

حال فرض می کنیم $f(x)=\sin x$ باشد. با استفاده از فرمول شماره (۲) همین بخش و حد های بالا ، خواهیم داشت.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-۱)}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\right)$$

$$=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-۱}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=(\sin x)*0+(\cos x)*۱=\cos x$$ برای تمام x ها

در نتیجه

$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ برای تمام x ها (۳)

حالا فرض می کنیم $f(x)=\cos x$ همان روش که برای sin استفاده کردیم بکار می بریم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x(\cos h-۱)}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}\right)$$

$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-۱}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=(\cos x)*0-(\sin x)*۱=-\sin x$$ برای تمام x ها

در نتیجه

$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ برای تمام x ها (۴)

پس توابع c و x^n و $\sin x$ و $\cos x$ که در این بخش بحث کردیم ، مشتق پذیر هستند. اما توابعی هم هستند که مشتق پذیر نیستند. همان طور که در مثال بعد نشان می دهیم.

مثال ۴ – فرض می کنیم $f(x) = |x|$ باشد. نشان دهید که f مشتق پذیر نیست. برای این کار ثابت کنید که f یک مشتق در x دارد ، فقط و فقط به شرطی که $x \neq 0$ باشد.

پاسخ

ابتدا حالت $x > 0$ را در نظر می گیریم. در این صورت $f(x) = x$ است. و لذا وقتی که t به اندازه کافی به x نزدیک است ، $t > 0$ خواهد بود. لذا $f(t) = t$ است. پس خواهیم داشت

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t-x}{t-x} = \lim_{t\to x} ۱ = ۱ \quad \text{برای} \quad x > 0$$

حالا حالت $x < 0$ را در نظر می گیریم. در این صورت $f(x) = -x$ است. و لذا وقتی که t به اندازه کافی به x نزدیک است ، $t < 0$ خواهد بود. لذا $f(t) = -t$ است. پس خواهیم داشت

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-t-(-x)}{t-x} = \lim_{t\to x}(-۱) = -۱ \quad \text{برای} \quad x < 0$$

در نتیجه f برای تمام x هایی که مخالف صفر باشند ، یک مشتق دارد. در نهایت مثال شماره ۴ بخش ۲.۱ را بخاطر بیاورید که گفتیم

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}$$

وجود ندارد. پس f در صفر ، مشتق ندارد ، و لذا f یک تابع مشتق پذیر نیست.

مشتق پذیری در بازه ها Differentiability on Intervals

در مثال ۴ نشان دادیم که اگر $f(x) = |x|$ باشد ، پس $f'(x)$ وجود دارد فقط و فقط اگر $x \neq 0$ باشد. اما در رابطه مشتق و خط مماس ، این یعنی نمودار f در $(x, f(x))$ یک خط مماس دارد فقط و فقط اگر $x \neq 0$ باشد.

گر چه $|x|$ یک تابع مشتق پذیر نیست ، اما برای تمام اعداد در $(-\infty, 0)$ یا $(0, \infty)$ مشتق پذیر است. اگر I یک بازه باز باشد ، پس می گوییم **f در بازه I مشتق پذیر است** ، اگر f در کلیه نقاط I مشتق پذیر باشد.

در نتیجه $|x|$ در $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ مشتق پذیر است.

اگر I یک بازه بسته $[a, b]$ باشد و $a < b$ در این صورت می گوییم **f در I مشتق پذیر است** اگر f در (a, b) مشتق پذیر باشد و حد های زیر

$$\lim_{t \to a^-} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad و \quad \lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \qquad (۵)$$

هر دو وجود داشته باشند. البته ، اگر f در a و یا b مشتق پذیر باشد ، پس حد یک طرفه مربوطه در شماره (۵) وجود دارد. اما توابعی هستند که برای آنها حد های یک طرفه وجود دارند ، گر چه f در a و یا b مشتق پذیر نیست. تابع قدر مطلق یک مثال از این نوع است. می دانیم که تابع قدر مطلق برای تمام اعداد $x \neq 0$ مشتق پذیر است ، چون

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} ۱ = ۱$$

پس نتیجه می شود که تابع قدر مطلق در هر بازه ای به شکل $[0, d]$ در صورتی که $d > 0$ باشد ، مشتق پذیر است. به همین ترتیب چون

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (-۱) = -۱$$

پس نتیجه می شود که تابع قدر مطلق در هر بازه ای به شکل $[c,0]$ در صورتی که $c<0$ باشد ، مشتق پذیر است.

مشتق پذیری در یک بازه بی کاران هم به همین طریق می توان تعریف کرد. می گوییم یک تابع در بازه $[a,\infty)$ مشتق پذیر است اگر f در هر یک از اعداد در (a,∞) مشتق پذیر باشد , و اگر اولین حد یک طرفه شماره (۵) وجود داشته باشد. به همین طریق می گوییم یک تابع در بازه $(-\infty,b]$ مشتق پذیر است اگر f در هر یک از اعداد در $(-\infty,b)$ مشتق پذیر باشد , و اگر دومین حد یک طرفه شماره (۵) وجود داشته باشد.

مثلا تابع قدر مطلق در $(\infty,0]$ و $[0,\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال ۵

فرض کنید $f(x)=x^{\frac{۱}{۲}}$ باشد. نشان دهید که f در بازه مشتق پذیر است اما در بازه $[0,\infty)$ مشتق پذیر نیست.

پاسخ

طبق مثال ۳ بخش ۲.۲ داریم

$$f^{\prime}(x)=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}} \quad \text{برای} \quad x>0$$

در نتیجه f در بازه $(0,\infty)$ مشتق پذیر است ، زیرا برای $x=0$ داریم.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{t}=\lim_{t\to 0^+}t^{-\frac{۱}{۲}}=\infty$$

چون حد سمت راست صفر وجود ندارد ، نتیجه می گیریم که f در بازه $[0,\infty)$ مشتق پذیر نیست.

تمرینات ۲.۳

در تمرینات ۵ – ۱ با استفاده از نتایج این بخش ، مشتق تابع داده شده برای عدد داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = -۲; a = ۱$

۲) $f(x) = x^{۲}; a = \frac{۳}{۲}, 0$

۳) $f(x) = x^{۴}; a = \sqrt[۳]{۲}$

۴) $f(x) = x^{۱0}; a = ۱$

۵) $f(x) = \cos t; a = 0, -\frac{\pi}{۳}$

در تمرینات ۱۲ – ۶ با استفاده از تعریف مشتق و یا تعریف شماره (۲) مشتق توابع داده شده را پیدا کنید.

۶) $f(x) = -۲x - ۱$

۷) $f(x) = x^{۵}$

۸) $f(x) = x^{۲} + x$

۹) $f(x) = \frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۱}$

۱۰) $y = -۳\cos\ x$

۱۱) $y = x^{\frac{۲}{۳}}$

۱۲) $y = \sqrt{x - ۱}$

در تمرینات ۱۵ ــ ۱۳ نشان دهید که f در بازه داده شده ، مشتق پذیر است.

۱۳) $f(x) = x^{۲} + x; (-\infty, \infty)$

۱۴) $f(x) = \frac{۱}{۴ - x}\ ; (۴, \infty)$

۱۵) $f(x) = |x - ۱|; [۱, \infty)$

۱۶ در هر یک از حالت های زیر ، a را پیدا کنید.

$a)$ $f(x) = -۲x^۲; f'(a) = ۱۲$

$b)$ $f(x) = ۳x + x^۲; f'(a) = ۱۳$

$c)$ $f(x) = \frac{۱}{x}; f'(a) = -\frac{۱}{۹}$ دو مقدار ممکن است

$d)$ $f(x) = \sin x; f'(a) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بینهایت مقدار ممکن است

۱۷ – فرض کنید $f(t) = -۳\sin t$ تابع یک شئی است که در طول محور x ها در حال حرکت است. یک فرمول برای سرعت $v(t)$ پیدا کنید. سپس $v\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ را پیدا کنید.

۱۸ – فرض کنید $R(x)$ در آمد به میلیون تومان از فروش x هزار کیسه گندم باشد و فرض کنید

$$R(x) = \begin{cases} ۱۴۳۲x & \text{برای} \quad 0 < x < ۶ \\ ۸۵۹۲ & \text{برای} \quad x \geq ۶ \end{cases}$$

باشد. نشان دهید R در $(0,۶)$ و $(۶,\infty)$ مشتق پذیر است ، اما در ۶ مشتق پذیر نیست.

۱۹ – میزان تغییر مساحت دائره بر حسب شعاع آن پیدا کنید.

۲۰

الف ـ میزان تغییر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع را بر حسب طول یک ضلع آن حساب کنید.

ب ـ فرض کنید $A(x)$ نشانگر مساحت مثلث متساوی الاضلاع باشد وقتی که طول یک ضلع آن x است. یک مقدار برای x پیدا کنید ، به طوری که $A'(x) = A(x)$ باشد.

پاسخ تمرینات ۲.۳

در تمرینات ۵ – ۱ با استفاده از نتایج این بخش ، مشتق تابع داده شده برای عدد داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = -۲; a = ۱$

بر اساس مثال یک ، $f'(x) = 0$ است برای تمام x ها ، پس $f'(۱) = 0$ است.

۲) $f(x) = x^۲; a = \frac{۳}{۲}, 0$

$$f'(x) = ۲x$$

$$f'\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۲ * \frac{۳}{۲} = ۳$$

$$f'(0) = 0 * ۲ = 0$$

۳) $f(x) = x^۴; a = \sqrt[۳]{۲}$

$$f'(x) = ۴x^۳$$

$$f'\left(\sqrt[۳]{۲}\right) = ۴\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۳ = ۴ * ۲ = ۸$$

۴) $f(x) = x^{۱۰}; a = ۱$

$$f'(x) = ۱۰x^{۹}$$

$$f'(۱) = ۱۰ * (۱)^{۹} = ۱۰$$

۵) $f(x) = \cos t; a = 0, -\frac{\pi}{۳}$

$$f'(t) = -\sin t$$

$$f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در تمرینات ۱۲ – ۶ با استفاده از تعریف مشتق و یا تعریف شماره (۲) مشتق توابع داده شده را پیدا کنید.

۶) $f(x) = -۲x - ۱$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t\to x}\frac{(-۲t - ۱) - (-۲x - ۱)}{t - x} = \lim_{t\to x}\frac{-۲t + ۲x}{t - x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{-۲(t - x)}{t - x} = \lim_{t\to x} -۲ = -۲$$

۷) $f(x) = x^{۵}$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^{۵}-x^{۵}}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t^{۴}+t^{۳}x+t^{۲}x^{۲}+tx^{۳}+x^{۴}\right)}{t-x} = ۵x^{۴}$$

۸) $f(x) = x^{۲} + x$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{\left(t^{۲}+t\right)-\left(x^{۲}+x\right)}{t-x}\lim_{t\to x}\frac{t^{۲}-x^{۲}+t-x}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t+x)+(t-x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t+x+۱\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\left(t+x+۱\right) = ۲x+۱$$

۹) $$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}=\lim_{t\to x}\frac{\frac{t^{۲}-۱}{t^{۲}+۱}-\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{\left(t^{۲}-۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)-\left(x^{۲}-۱\right)\left(t^{۲}+۱\right)}{(t^{۲}+۱)(x^{۲}+۱)}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\left(t^{۲}x^{۲}+t^{۲}-x^{۲}-۱\right)-\left(t^{۲}x^{۲}+x^{۲}-t^{۲}-۱\right)}{\left(t^{۲}+۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)(t-x)}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{۲(t-x)(t+x)}{\left(t^{۲}+۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)(t-x)}\lim_{t\to x}\frac{۲(t+x)}{\left(t^{۲}+۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)}=\frac{۴x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}$$

۱۰) $y=-۳\cos\ x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-۳\cos(x+h)-\left(-۳\cos x\right)}{h}$$

$$=-۳\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-۳(-\sin x)=۳\sin x$$

بر اساس بحثی که قبل از فرمول ۴ همین بخش داشتیم. برای یاد آوری در زیر می آوریم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\left(\cos h-۱\right)}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}\right)$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - ۱}{h} - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= (\cos x) * 0 - (\sin x) * ۱ = -\sin x$$ برای تمام x ها

۱۱) $y = x^{\frac{۲}{۳}}$

اگر $x \neq 0$ باشد ، پس خواهیم داشت.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to x}\frac{t^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}}{t - x} = \lim_{t\to x}\frac{\left(t^{\frac{۱}{۳}} - x^{\frac{۱}{۳}}\right)\left(t^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۱}{۳}}\right)}{\left(t^{\frac{۱}{۳}} - x^{\frac{۱}{۳}}\right)\left(t^{\frac{۲}{۳}} + t^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}\right)} = \lim_{t\to x}\frac{t^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۱}{۳}}}{t^{\frac{۲}{۳}} + t^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}}$$

$$= \frac{۲x^{\frac{۱}{۳}}}{۳x^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲}{۳x^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

۱۲) $y = \sqrt{x - ۱}$

اگر $x > ۱$ باشد ، پس

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to x}\frac{\sqrt{t-۱}-\sqrt{x-۱}}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\sqrt{t-۱}-\sqrt{x-۱}}{t-x}*\frac{\sqrt{t-۱}+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{t-۱}+\sqrt{x-۱}}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-۱)-(x-۱)}{(t-x)\left(\sqrt{t-۱}+\sqrt{x-۱}\right)}=\lim_{t\to x}\frac{۱}{\sqrt{t-۱}+\sqrt{x-۱}}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}$$

در تمرینات ۱۵ ـــ ۱۳ نشان دهید که f در بازه داده شده ، مشتق پذیر است.

۱۳) $f(x)=x^{۲}+x;(-\infty,\infty)$

برای تمام x ها داریم.

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\left(t^{۲}+t\right)-\left(x^{۲}+x\right)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\left(t^{۲}-x^{۲}\right)+(t-x)}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t+x)+(t-x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t+x+۱\right)}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(t+x+۱\right)=۲x+۱$$

لذا f در $(-\infty,\infty)$ مشتق پذیر است.

۱۴)	$f(x) = \frac{۱}{۴ - x}\ ; (۴, \infty)$

برای $x > ۴$ داریم.

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{۱}{۴ - t} - \frac{۱}{۴ - x}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{(۴ - x) - (۴ - t)}{(۴ - t)(۴ - x)}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{t - x}{(t - x)(۴ - t)(۴ - x)} = \lim_{t \to x} \frac{۱}{(۴ - t)(۴ - x)} = \frac{۱}{(۴ - x)^۲}$$

لذا f در بازه $(۴, \infty)$ مشتق پذیر است.

۱۵)	$f(x) = |x - ۱|; [۱, \infty)$

برای $x \geq ۱$ داریم $f(x) = x - ۱$ و برای $x > ۱$ داریم

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t - ۱) - (x - ۱)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t - x}{t - x} = \lim_{t \to x} ۱ = ۱$$

لذا f در بازه $(۱, \infty)$ مشتق پذیر است ، همچنین

$$\lim_{t \to ۱^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to ۱^+} \frac{t - ۱ - 0}{t - ۱} = ۱$$

لذا f در بازه $[۱, \infty)$ مشتق پذیر است.

۱۶ در هر یک از حالت های زیر ، a را پیدا کنید.

$a)\qquad f(x) = -۲x^{۲}; f'(a) = ۱۲$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-۲t^{۲}+۲x^{۲}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-۲\left(t^{۲}-x^{۲}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{-۲(t-x)(t+x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\left[-۲(t+x)\right] = -۴x$$

چون داریم $f'(a) = ۱۲$ است. پس $-۴a = ۱۲$ و یا $a = -۳$

$b)\qquad f(x) = ۳x + x^{۲}; f'(a) = ۱۳$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\left(۳t+t^{۲}\right)-\left(۳x+x^{۲}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{\left(t^{۲}-x^{۲}\right)+۳(t-x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t+x)+۳(t-x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{(t-x)\left(t+x+۳\right)}{t-x} = \lim_{t\to x}\left(t+x+۳\right) = ۲x+۳$$

چون داریم $f'(a) = ۱۳$ است. پس $۲x + ۳ = ۱۳$ و یا $a = ۵$

$c)\qquad f(x) = \frac{۱}{x}; f'(a) = -\frac{۱}{۹}$ دو مقدار ممکن است

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\frac{۱}{t}-\frac{۱}{x}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\frac{x-t}{tx}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{-(t-x)}{tx(t-x)}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{-۱}{tx} = -\frac{۱}{x^{۲}}$$

چون داریم $f'(a) = -\frac{۱}{۹}$ است. پس $-\frac{۱}{a^۲} = -\frac{۱}{۹}$ و یا $a = \pm ۳$

$d)$ $f(x) = \sin x; f'(a) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بینهایت مقدار ممکن است

طبق فرمول شماره (۳) داریم $f'(x) = \cos x$ است و چون $f'(a) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است ، پس خواهیم داشت

$$\cos a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$a = \frac{\pi}{۶} + ۲n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

۱۷ – فرض کنید $f(t) = -۳ \sin t$ تابع یک شئی است که در طول محور x ها در حال حرکت است. یک فرمول برای سرعت $v(t)$ پیدا کنید. سپس $v\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-۳\sin(t+h) - (-۳\sin t)}{h} \\ &= -۳\lim_{h\to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} = -۳\cos t \end{aligned}$$

طبق بحث ما قبل از فرمول (۳) و لذا

$$v\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -۳\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۸ – فرض کنید $R(x)$ در آمد به میلیون تومان از فروش x هزار کیسه گندم باشد و فرض کنید

$$R(x) = \begin{cases} ۱۴۳۲x & \text{برای} \quad 0 < x < ۶ \\ ۸۵۹۲ & \text{برای} \quad x \geq ۶ \end{cases}$$

باشد. نشان دهید R در $(0,۶)$ و $(۶,\infty)$ مشتق پذیر است ، اما در ۶ مشتق پذیر نیست.

پاسخ

اگر $0 < x < ۶$ باشد ، پس

$$R'(x) = \lim_{t\to x} \frac{۱۴۳۲t - ۱۴۳۲x}{t - x} = ۱۴۳۲$$

پس R در $(0,۶)$ مشتق پذیر است. اگر $x > ۶$ باشد ، پس

$$R'(x) = \lim_{t\to x} \frac{۸۵۹۲ - ۸۵۹۲}{t - x} = 0$$

پس R در بازه $(۶,\infty)$ هم مشتق پذیر است. اما

$$\lim_{x\to ۶^-} \frac{R(x) - R(۶)}{x - ۶} = \lim_{x\to ۶^-} \frac{۱۴۳۲x - ۸۵۹۲}{x - ۶} = \lim_{x\to ۶^-} ۱۴۳۲ = ۱۴۳۲$$

و

$$\lim_{x\to ۶^+} \frac{R(x) - R(۶)}{x - ۶} = \lim_{x\to ۶^+} \frac{۸۵۹۲ - ۸۵۹۲}{x - ۶} = 0$$

پس R در ۶ مشتق پذیر نیست.

۱۹ – میزان تغییر مساحت دائره بر حسب شعاع آن پیدا کنید.

پاسخ

مساحت دائره با شعاع r می شود $r > 0$ ، $A(r) = \pi r^{۲}$ است. پس

$$A'(r) = \lim_{t\to r}\frac{A(t)-A(r)}{t-r} = \lim_{t\to r}\frac{\pi t^{۲} - \pi r^{۲}}{t-r} = \lim_{t\to r}\pi(t+r) = ۲\pi r$$

که این مقدار ، محیط دائره است.

۲۰

الف - میزان تغییر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع را بر حسب طول یک ضلع آن حساب کنید.

پاسخ

ارتفاع مثلث که طول هر ضلع آن x باشد ، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$ است. پس مساحت مثلث مطابق زیر بدست می آید.

$$A(x) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right)(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$$

و لذا

$$A'(x) = \lim_{t\to x}\frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)t^{۲} - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)x^{۲}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\sqrt{۳}}{۴}(t+x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x \quad ، \quad x > 0$$

ب –فرض کنید $A(x)$ نشانگر مساحت مثلث متساوی الاضلاع باشد وقتی که طول یک ضلع آن x است. یک مقدار برای x پیدا کنید ، به طوری که $A'(x) = A(x)$ باشد.

پاسخ

اگر قرار است $A'(x) = A(x)$ و $x > 0$ باشد ، پس باید

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$$

$$۲x = x^{۲}$$

$$x = ۲$$

باشد.

۲.۴ - مشتق جمع ، ضرب و تقسیم توابع

همان طور که قضایایی برای حد جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم توابع داریم ، طبیعی به نظر می رسد که سئوال کنیم آیا قضایایی هم برایمشتق جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم توابع هم داریم.

چنین قضایایی داریم ، اما فرمول های مربوط به مشتق جمع ، ضرب و تقسیم توابع تقریبا پیچیده هستند . برای روشن شدن موضوع مثالی می زنیم. فرض کنید مکان یک شئی در حال سقوط در هر زمان t مطابق فرمول زیر باشد.

$$f(t) = -۱۶t^۲ + ۲۴t + ۱۶۰$$

باشد. فرمول بالا کمی بغرنج است. و پیدا کردن $f'(t)$ مستقیما از تعریف مشتق ، کار سختی است. اما اگر بدانیم چگونه مشتق ترکیب توابع را از تک تک توابع بدست آوریم ، پس پیدا کردن $f'(t)$ خیلی آسان تر خواهد بود.

ابتدا یک قضیه ساده را ثابت می کنیم .

قضیه پیوسته بودن یک تابع Continuity of a Function Theorem

اگر f در a مشتق پذیر باشد ، پس f در a پیوسته است. یعنی

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$

اثبات ــبرای اینکه نشان دهیم f در a پیوسته است ، کافی است نشان دهیم

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a) \quad \text{یا} \quad \lim_{t\to a}[f(t) - f(a)] = 0$$

است.

توجه دارید که طبق فرض مساله $f'(a)$ وجود دارد. پس طبق قضایای حد ، خواهیم داشت.

$$\lim_{t\to a}[f(t) - f(a)] = \lim_{t\to a}\frac{f(t) - f(a)}{t - a} * (t - a) = \lim_{t\to a}\frac{f(t) - f(a)}{t - a} * \lim_{t\to a}(t - a)$$
$$= f'(a) * 0 = 0$$

عکس قضیه بالا صحیح نیست. یک تابع می تواند پیوسته باشد ، اما در یک نقطه مشتق پذیر نباشد. مثلا اگر $f(x) = |x|$ باشد ، می دانیم که f پیوسته است ، اما در نقطه صفر مشتق پذیر نیست. به مثال ۴ بخش ۲.۳ مراجعه کنید.

قضیه مشتق یک جمع Derivative of a Sum Theorem

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر در a باشند ، پس $f + g$ هم در a مشتق پذیر است ، و

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

اثبات ــبا استفاده از قضایای حد داریم.

$$(f+g)'(a) = \lim_{t\to a}\frac{(f+g)(t)-(f+g)(a)}{t-a}$$
$$= \lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}+\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right)$$
$$= \lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}+\lim_{t\to a}\frac{g(t)-g(a)}{t-a} = f'(a)+g'(a)$$

قضیه بالا می گوید که مشتق مجموع دو تابع در یک عدد داده شده عبارت است از جمع مشتق ها ، به شرطی که هر دو تابع در آن عدد مشتق پذیر باشند. به تعریف دیگر می توان گفت

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)}$$

برای تمام x هایی که هم f و هم g در آنها مشتق پذیر هستند.

مثال ۱ - فرض کنید $k(x) = x+\sin x$ باشد. یک فرمول برای $k'(x)$ پیدا کنید و $k'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = x$ و $g(x) = \sin x$ باشد ، پس $k = f+g$ است. بر اساس مثال ۲ و فرمول (۳) بخش ۲.۳ داریم

$$f'(x) = ۱ \qquad g'(x) = \cos x$$

لذا

$$k'(x) = f'(x)+g'(x) = ۱+\cos x \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

برای $x = \frac{\pi}{۴}$ خواهیم داشت.

$$k'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۱+\cos\frac{\pi}{۴} = ۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

قضیه مشتق جمع ها را هم می توان با نماد لا یب نیز Leibniz بیان کرد. اگر فرض کنیم u و v دو متغیر وابسته به x باشند ، خواهیم داشت.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}}$$

مثال ۲- $\frac{d}{dx}(sin\ x + cos\ x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس فرمول های (۳) و (۴) بخش ۲.۳ داریم

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

لذا

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) = \frac{d}{dx}\sin x + \frac{d}{dx}\cos x = \cos x - \sin x$$

با تمرین و ممارست ، شما خواهید توانست ، بدون قدم های واسطه ، مشتق جمع ها را پیدا کنید. مثلا

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x$$

نکتهـ توجه داشته باشید که $(f+g)'(a)$ ممکن است وجود داشته باشد ، در صورتی که $f'(a)$ و یا $g'(a)$ وجود نداشته باشد. قضیه بالا نمی گوید که $(f+g)'(a)$ می تواند وجود داشته باشد فقط اگر $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند. بر عکس می گوید اگر $f'(a)$ و $g'(a)$ هر دو وجود داشته باشند ، پس $(f+g)'(a)$ وجود دارد. در تمرین شماره ۲۸ خواهیم دید که ممکن است

$$(f+g)'(x)$$

وجودداشته باشد , اما $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود نداشته باشد .

قضیه بالا را می توان به بیش از دو تابع تعمیم داد.

$$\boxed{(f_۱ + f_۲ + \cdots + f_n)'(a) = f_۱'(a) + f_۲'(a) + \cdots + f_n'(a)}$$

لذا اگر داشته باشیم

$$f(x) = x^۲ + x - ۱۲ + \sin x$$

پس

$$f'(x) = ۲x + ۱ + \cos x$$

قضیه مشتق ضرب یک عدد ثابت با یک تابع

Derivative of a Constant Multiple of a Function Theorem

اگر f یک تابع مشتق پذیر در a باشد ، پس
برای هر عدد c, تابع cf در a مشتق پذیر است ، و
$(cf)'(a) = cf'(a)$

اثبات

طبق تعریف مشتق پذیری در a داریم.

$$(cf)'(a) = \lim_{t\to a}\frac{\big(cf(t)\big)-\big(cf(a)\big)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{cf(t)-cf(a)}{t-a}$$
$$= c\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = cf'(a)$$

قضیه بالا را هم می توان چنین تفسیر کرد.

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

برای تمام x ها که در آن f مشتق پذیر است.

مثال ۳ – اگر $k(x) = ۴\sqrt{x}$ باشد ، $k'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد پس, $k(x) = ۴f(x)$ است. چون $f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$ است ، پس

$$k'(x) = ۴f'(x) = ۴\left(\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\right) = ۲x^{-\frac{۱}{۲}}$$

همچنین می توان نوشت

$$\frac{d}{dx}\left(۴\sqrt{x}\right) = ۴\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = ۲x^{-\frac{۱}{۲}}$$

قضیه های مشتق جمع و ضرب عدد ثابت می‌گویند تمام چند جمله ای ها ، توابع مشتق پذیر هستند. و فرمول زیر برای مشتق هر چند جمله ای صادق است .

$$\frac{d}{dx}\left(c_n x^n + c_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + c_۱ x + c_0\right)$$
$$= nc_n x^{n-۱} + (n-۱)c_{n-۱} x^{n-۲} + \cdots + ۲c_۲ x + c_۱ \qquad (۱)$$

مثال ۴ مشتق زیر را برای $x = -۱$ پیدا کنید.

$$\frac{d}{dx}\left(۳x^۸ - \sqrt{۲}\ x^۵ + \frac{۳}{۲}x^۳ + ۲۰x + ۱\right)$$

پاسخ

$$\frac{d}{dx}\left(۳x^۸ - \sqrt{۲}\ x^۵ + \frac{۳}{۲}x^۳ + ۲۰x + ۱\right)$$
$$= ۳\left(۸x^۷\right) - \sqrt{۲}\ \left(۵x^۴\right) + \frac{۳}{۲}\left(۳x^۲\right) + ۲۰ = ۲۴x^۷ - ۵\sqrt{۲}\ x^۴ + \frac{۹}{۲}x^۲ + ۲۰$$

برای $x = -۱$ خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dx}\left(۳x^۸ - \sqrt{۲}\ x^۵ + \frac{۳}{۲}x^۳ + ۲۰x + ۱\right)\Bigg|_{x=-۱}$$
$$= ۲۴(-۱)^۷ - ۵\sqrt{۲}\ (-۱)^۴ + \frac{۹}{۲}(-۱)^۲ + ۲۰ = -۲۴ - ۵\sqrt{۲} + \frac{۹}{۲} + ۲۰$$
$$= \frac{۱}{۲} - ۵\sqrt{۲}$$

مثال ۵ - شخصی از ارتفاع ۱۶۰ فوتی نسبت به زمین ، یک توپ را با سرعت ۲۴ فوت در ثانیه عمودی به طرف بالا پرتاب می کند. فرمولی برای سرعت توپ پیدا کنید و مشخص کنید چه زمانی سرعت توپ صفر می شود.

پاسخ

فرمول زیر را به خاطر دارید ، که برای اجسام در حال حرکت عمودی بالای سطح زمین است.بخش ۲.۱ فرمول شماره (۷)

$$h(t) = -۱۶t^۲ + v_0 t + h_0$$

در فرمول بالا v_0 سرعت اولیه و h_0 ارتفاع اولیه نسبت به زمین و $h(t)$ فاصله شئی نسبت به زمین بعد از t ثانیه است.

چون $v_0 = ۲۴$ و $h_0 = ۱۶۰$ است ، پس وقتی که توپ به زمین بر خورد می کند ، ارتفاع آن

$$h(t) = -۱۶t^۲ + ۲۴t + ۱۶۰$$

است. چون سرعت مشتق تابع ارتفاع است ، پس

$$v(t) = h'(t) = -۳۲t + ۲۴$$

پس $v(t) = 0$ است ، هنگامی که $-۳۲t + ۲۴ = 0$ است. یعنی ثانیه $t = \frac{۳}{۴}$

نتیجه دوم قضیه های جمع و ضرب عدد ثابت مشتق ها ، قاعده تفریق مشتق ها است.

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) \qquad (۳)$$

برای تمام x هایی که f و g در آنها مشتق پذیر هستند.

یکی از کار برد های مهم تفاضل مشتق ها در اقتصاد است. به خاطر بیاورید که گفتیم R و C به ترتیب توابع درامد و هزینه هستند. و گفتیم در آمد نهایی و هزینه نهایی مطابق فرمول های زیر است.

$$m_R(x) = R'(x) \quad و \quad m_C(x) = C'(x)$$

است ، برای تمام x ها که در آنها R و C مشتق پذیر باشند. حال اگر P تابع سود باشد ، که طبق فرمول زیر تعریف شود

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

برای تمام x ها که در دامنه هم R و هم C هستند. پس **سود نهایی Marginal Profit** مطابق زیر تعریف می شود.

$$m_P(x) = P'(x)$$

و لذا طبق فرمول (۳) بالا خواهیم داشت

$$m_P(x) = R'(x) - C'(x) = m_R(x) = m_C(x)$$

برای تمام x هایی که در آنها m_R و m_C تعریف شده اند.

مثال ۶ – فرض کنید توابع در آمد و هزینه مطابق ذیل باشند.

$$R(x) = ۳x \quad و \quad C(x) = ۴\sqrt{x} \quad برای \quad x > 0$$

یک فرمول برای سود نهایی پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس فرمول (۱) و مثال شماره ۳ می دانیم که $m_R(x) = ۳$ و $m_C(x) = ۲x^{-\frac{۱}{۲}}$ است.

پس نتیجه می گیریم

$$m_P(x) = m_R(x) - m_C(x) = ۳ - ۲x^{-\frac{۱}{۲}}$$

مشتق ضرب توابع Derivative of a Product

دیدیم که مشتق جمع توابع مساوی است با جمع مشتق ها ، و مشتق تفاضل توابع مساوی است با تفاضل مشتق ها ، اما مشتق حاصل ضرب توابع مساوی با ضرب مشتق ها نیست.

قضیه مشتق ضرب توابع Derivative of a Product Theorem

اگر f و g در a مشتق پذیر باشند ، پس fg هم در a مشتق پذیر هستند ، و
$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

اثبات

$$(fg)'(a) = \lim_{t\to a}\frac{(fg)(t)-(fg)(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(t)-f(a)g(a)}{t-a}$$

$$= \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(t)\overbrace{-f(a)g(t)+f(a)g(t)}^{=0}-f(a)g(a)}{t-a}$$

$$= \lim_{t\to a}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a} * g(t)\right] + \lim_{t\to a}\left[f(a) * \frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right]$$

$$= \lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} * \lim_{t\to a} g(t) + f(a)\lim_{t\to a}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}$$

چون g مشتق پذیر است ، قضیه پیوسته بودن تابع که در ابتدای این بخش آمد ، می گوید که $\lim_{t\to a} g(t) = g(a)$ است و لذا طبق تعریف مشتق در بخش ۲.۲ می توان گفت که

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

و بطور کلی

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

است برای تمام x هایی که در آنها f و g مشتق پذیر هستند.

مثال ۷ – اگر $k(x) = x\sin x$ باشد ، $k'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \sin x$ باشد ، پس $k = fg$ است و چون $f'(x) = ۱$ و $g'(x) = \cos x$ است ، پس خواهیم داشت.

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \sin x + x\cos x$$

با نماد لا یب نیز Leibniz اگر u و v متقییر هایی نسبت به x باشند ، پس

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \qquad (۴)$$

مثال ۸ – مشتق زیر را پیدا کنید.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\cos x\right)$$

پاسخ

چون داریم

$$\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right) = ۲x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

پس با استفاده از فرمول (۴) خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\cos x\right) = \left[\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right)\right]\cos x + x^{۲}\left[\frac{d}{dx}(\cos x)\right]$$
$$= ۲x\cos x - x^{۲}\sin x$$

میتوانیم قضیه حاصل ضرب را به مشتق حاصل ضرب بیش از دو تابع توسعه دهیم ، اما هر چه تعداد تابع ها زیاد تر شود ، فرمول بغرنج تر می شود. برای سه تابع h ، g ، f داریم

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \qquad (۵)$$

مثال ۹ – اگر $k(x) = x^{۲} \sin x \cos x$ باشد ، $k'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ –اگر فرض کنیم $f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = \sin x$ و $h(x) = \cos x$ باشد ، پس

$$f'(x) = ۲x \quad \text{و} \quad g'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad h'(x) = -\sin x$$

خواهد بود. پس

$$k'(x) = ۲x \sin x \cos x = x^{۲}\, cos^{۲}\, x - x^{۲} sin^{۲} x$$

قضیه مشتق تقسیم توابع Derivative of a Quotient Theorem

اگر f و g در a مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ پس $\frac{f}{g}$ هم در a مشتق پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^{۲}}$$

اثبات

چون $g'(a)$ طبق فرض مساله وجود دارد ، پس طبق قضیه پیوسته بودن تابع ، g در a پیوسته است و لذا $\lim_{t\to a} g(t) = g(a)$ است. چون طبق فرض مساله $g(a) \neq 0$ است ، پس بر اساس قضایای ۱۷ و ۱۸ بخش ۱.۳ می دانیم که $g(t) \neq 0$ است برای تمام t ها در یک بازه باز اطراف a بنا بر این $\frac{f}{g}$ در یک بازه باز اطراف a تعریف شده است. و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{t\to a}\frac{\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(a) - f(a)g(t)}{(t-a)g(a)g(t)}$$

$$= \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(a)\overbrace{-f(a)g(a) + f(a)g(a)}^{=0} - f(a)g(t)}{(t-a)g(a)g(t)}$$

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)g(a) - f(a)g(a)}{(t-a)g(a)g(t)} + \lim_{t\to a}\frac{f(a)g(a) - f(a)g(t)}{(t-a)g(a)g(t)}$$

$$= \lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a} * \frac{g(a)}{g(a)g(t)}\right) - \lim_{t\to a}\left(\frac{f(a)}{g(a)g(t)} * \frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right)$$

$$= \frac{f'(a)g(a)}{[g(a)]^{۲}} - \frac{f(a)g'(a)}{[g(a)]^{۲}} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^{۲}}$$

و به طور کلی می توان گفت

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^{۲}}}$$

برای تمام x هایی که در آنها هم f و هم g مشتق پذیر هستند و $g(x) \neq 0$ است.

تمام کسر های گویا ، عبارت است از تقسیم دو چند جمله ای . چون چند جمله ای ها برای تمام اعداد حقیقی مشتق پذیر هستند ، قاعده خارج قسمت که در بالا ذکر کردیم ، نشان می دهد که تمام کسر های گویا برای تمام اعداد در دامنه شان مشتق پذیر هستند.

مثال ۱۰

اگر داشته باشیم

$$k(x) = \frac{۹x^{۷}}{x^{۲} + ۱}$$

مطلوب است

$$k'(x)$$

پاسخ

اگر فرض کنیم $f(x) = ۹x^{۷}$ و $g(x) = x^{۲} + ۱$ باشد ، پس $k = \frac{f}{g}$ و $f'(x) = ۶۳x^{۶}$ و $g'(x) = ۲x$ است و لذا

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^{۲}} = \frac{۶۳x^{۶}\left(x^{۲} + ۱\right) - \left(۹x^{۷}\right)(۲x)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}}$$

$$= \frac{۴۵x^{۸} + ۶۳x^{۶}}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}}$$

با نماد لا یب نیز Leibniz ، اگر u و v متغیر های وابسته به x باشند ، پس

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^{۲}} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^{۲}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^{۲}} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^{۲}}}$$

مثال ۱۱ – نشان دهید که $\frac{d}{dx}tan\,x = sec^{۲}x$

پاسخ

چون $\frac{\sin x}{\cos x}$ $\tan x$ است ، پس

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\sin x - \sin x \frac{d}{dx}\cos x}{cos^{۲}\, x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{cos^{۲}x}$$

$$= \frac{cos^{۲}x + sin^{۲}x}{cos^{۲}x} = \frac{۱}{cos^{۲}x} = sec^{۲}x$$

به همین طریق می توان نشان داد که

$$\frac{d}{dx}\cot x = -csc^{۲}x$$

اگر $f(x) = ۱$ پس مشتق خارج قسمت خلاصه تر می شود.

$$\boxed{\left(\frac{۱}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^{۲}} \qquad (۶)}$$

و یا با نماد لا یب نیز برای $u = ۱$ خواهیم داشت.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{v}\right) = \frac{-۱}{v^{۲}}\frac{dv}{dx}}$$

مثال ۱۲ – نشان دهید که $\frac{d}{dx}(secx) = \sec x \tan x$

پاسخ

از فرمول شماره (۶) بالا ، داریم

$$\frac{d}{dx}(secx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{\cos x}\right) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^{۲}x} = \frac{۱}{\cos x} * \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

به همین طریق داریم

$$\frac{d}{dx}(cscx) = -\csc x \cot x$$

مثال ۱۳ ـ نشان دهید که $\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$ است ، در صورتی که n یک عدد صحیح مثبت باشد.

پاسخ

با تلفیق فرمول شماره (۶) همین بخش و شماره (۱) بخش ۲.۳ داریم.

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

مثلا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(x^{-17}\right) = -17x^{-18}$$

تابع x^{-2} در قانون جاذبه نیو تن دیده می شود.

با تلفیق مثال ۱۳ بالا و فرمول شماره (۱) بخش ۲.۳ خواهیم داشت.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad ,\{n|n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \qquad (7)}$$

تمرینات ۲.۴

در تمرینات ۱۶ — ۱ مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = -۴x^۳$

۲) $f(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۲$

۳) $f(x) = ۴x^۴ + ۳x^۳ + ۲x^۲ + x$

۴) $f(t) = -\frac{۴}{t^۹}$

۵) $g(x) = (۲x - ۳)(x + ۵)$

۶) $g(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\left(۲ - \frac{۱}{x}\right)$

۷) $g(x) = -۴x^{-۳} + ۲\cos x$

۸) $f(z) = -۲z^۳ + ۴\sec z$

۹) $f(z) = z^۲ \sin z$

۱۰) $f(x) = sin^۲ x$

۱۱) $f(x) = -۴x tan\, x \sec x$

۱۲) $f(x) = \frac{۲x + ۳}{۴x - ۱}$

۱۳) $f(t) = \frac{t+۲}{t^{۲}+۴t+۴}$

۱۴) $f(t) = \frac{t^{۲}+۵t+۴}{t^{۲}+t-۲۰}$

۱۵) $f(x) = \cot x$

۱۶) $f(y) = \sqrt{y}\sec y$

در تمرینات ۲۲ – ۱۶ متغیر y وابسته است و متغیر x مستقل است. $\frac{dy}{dx}$ توابع را پیدا کنید.

۱۷) $y = (۳x+۱)\left(۲x^{۲}-۵x\right)$

۱۸) $y = x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$

۱۹) $y = \frac{۲x-۱}{۵-۳x}$

۲۰) $y = \frac{x^{۳}-۱}{x^{۴}+۱}$

۲۱) $y = \csc x \sec x$

۲۲) $y = \frac{x\sin x}{x^{۲}+۱}$

در تمرینات ۲۵ – ۲۳ مطلوب است $f'(a)$

۲۳) $f(x) = \frac{-۷}{x^{۹}}; a = ۱$

۲۴) $f(x) = \frac{۱}{\pi}\left(۳x^{۲} - ۴x\right); a = -۲$

۲۵) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; a = \frac{\pi}{۲}$

در تمرینات ۲۷ – ۲۶ معادله خط مماس در نقطه داده شده با نمودار f پیدا کنید.

۲۶) $f(x) = x^{۲} - ۳x - ۴; (۲, -۶)$

۲۷) $f(x) = \sin x - \cos x; \left(\frac{\pi}{۲}, ۱\right)$

۲۸ – فرض کنید $f(x) = |x|$ و $g(x) = -|x|$ باشد. یک فرمول ساده برای $f + g$ پیدا کنید. سپس نشان دهید که $(f + g)'(x)$ برای تمام x ها وجود دارد ، اما $f'(x)$ و $g'(x)$ فقط برای مقادیر $x \neq 0$ وجود دارد.

۲۹ – فرض کنید $g'(a)$ و $(fg)'(a)$ وجود داشته باشد و $g(a) \neq 0$ است. ثابت کنید که $f'(a)$ وجود دارد.

۳۰

ثابت کنید اگر $h'(a)$ ، $g'(a)$ ، $f'(a)$ وجود داشته باشد ، پس

$$(fgh)'(a) = f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)$$

۳۱

الف ـ سرعت توپ در مثال ۵ هنگامی که $t = ۱$ و $t = ۲$ است ، پیدا کنید.

ب ـ فرض کنید توپ در مثال ۵ با سرعت ۴۸ فوت در ثانیه به بالا پرتاب شود ، سرعت توپ وقتی که $t = ۱$ است ، را پیدا کنید.

۳۲ ـ فرض کنید یک توپ با سرعت ۱۲۸ فوت در ثانیه از سطح زمین به طور عمودی به طرف بالا پرتاب شود.

الف ـ حد اکثر ارتفاعی که توپ بالا می رود را پیدا کنید.

ب ـ سرعت توپ را هنگامی که با زمین بر خورد می کند ، پیدا کنید.

۳۳ – اگر یک توپ با سرعت ۱۶ فوت در ثانیه از یک ساختمان به ارتفاع ۹۶ فوت نسبت به سطح زمین ، به طرف پایین پرتاب شود ، یک فرمول برای سرعت توپ در زمان t پیدا کنید.

۳۴ – فرض کنید یک چلچراغ به طول ۵ فوت از سقف به ارتفاع ۱۰۰ فوت جدا می شود و شما با قامت ۶ فوت زیر آن قرار دارید.

الف –چقدر وقت دارید که از مسیر افتادن چراغ فرار کنید؟

ب - اگر بد شانسی آوردید و نتوانستید به موقع فرار کنید ، چلچراغ با چه سرعتی به سر شما اصابت می کند؟

ج – اگر شما ۵ فوت قد داشتید ، سرعت چلچراغ چقدر زیاد تر بود ، هنگامی که به سر شما اصابت می کرد؟

۳۵ – تابع هزینه و در آمد یک شرکت مطابق زیر است.

$$C(x) = \frac{x+۳}{\sqrt{x}+۱} \quad \text{و} \quad R(x) = \sqrt{x} \quad \text{برای} \quad ۱ \le x \le ۱۵$$

مقداری برای x پیدا کنید ، که سود صفر باشد. و نشان دهید که برای هیچ مقداری از x سود نهایی یعنی $m_P(x)$ صفر نیست.

پاسخ تمرینات ۲.۴

در تمرینات ۱۶ – ۱ مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = -۴x^{۳}$

$$f'(x) = -۱۲x^{۲}$$

۲) $f(x) = ۳x^{۲} - ۴x + ۲$

$$f'(x) = ۶x - ۴$$

۳) $f(x) = ۴x^{۴} + ۳x^{۳} + ۲x^{۲} + x$

$$f'(x) = ۱۶x^{۳} + ۹x^{۲} + ۴x + ۱$$

۴) $f(t) = -\frac{۴}{t^{۹}}$

$$f'(t) = -\frac{-۴\left(۹t^{۸}\right)}{\left(t^{۹}\right)^{۲}} = \frac{۳۶t^{۸}}{t^{۱۸}} = \frac{۳۶}{t^{۱۰}}$$

۵) $g(x) = (۲x - ۳)(x + ۵)$

$$g'(x) = (۲x - ۳)'(x + ۵) + (۲x - ۳)(x + ۵)'$$
$$= ۲(x + ۵) + ۲x - ۳ = ۴x + ۷$$

۶) $g(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\left(۲ - \frac{۱}{x}\right)$

$$g'(x) = \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)'\left(۲ - \frac{۱}{x}\right) + \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\left(۲ - \frac{۱}{x}\right)'$$
$$= -\frac{۱}{x^{۲}}\left(۲ - \frac{۱}{x}\right) + \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\frac{۱}{x^{۲}}$$
$$= -\frac{۲}{x^{۲}} + \frac{۱}{x^{۳}} + \frac{۱}{x^{۲}} + \frac{۱}{x^{۳}} = -\frac{۱}{x^{۲}} + \frac{۲}{x^{۳}}$$

۷) $g(x) = -۴x^{-۳} + ۲\cos x$

$$g'(x) = ۱۲x^{-۴} - ۲\sin x$$

۸) $f(z) = -۲z^{۳} + ۴\sec z$

$$f'(z) = \left(-۲z^{۳}\right)' + \left(\frac{۴}{\cos z}\right)'$$

$$= -۶z^{۲} + \frac{-۴\,(-\sin z)}{cos^{۲}z} = -۶z^{۲} + ۴\,\frac{\sin z}{\cos z} * \frac{۱}{\cos z}$$

$$= -۶z^{۲} + ۴\tan z\sec z$$

۹) $f(z) = z^{۲}\sin z$

$$f'(z) = ۲z\sin z + z^{۲}\cos z$$

۱۰) $f(x) = sin^{۲}x = \sin\ x\sin\ x$

$$f'(x) = \cos x\sin x + \sin x\cos x = ۲\sin x\cos x = \sin ۲x$$

۱۱) $f(x) = -۴xtan\,x\sec x$

$$f'(x) = -۴\tan x\sec x + \left(-۴x\right)sex^{۲}x\sec x + \left(-۴x\right)\tan x\sec x\tan x$$

$$= -۴\tan x\sec x - ۴sec^{۳}x - ۴xtan^{۲}x\sec x$$

۱۲) $f(x) = \dfrac{۲x + ۳}{۴x - ۱}$

$$f'(x) = \frac{۲\left(۴x - ۱\right) - \left(۲x + ۳\right)۴}{\left(۴x - ۱\right)^{۲}}$$

$$= \frac{۸x - ۲ - ۸x - ۱۲}{\left(۴x - ۱\right)^{۲}} = -\frac{۱۴}{\left(۴x - ۱\right)^{۲}}$$

۱۳) $f(t)=\dfrac{t+۲}{t^{۲}+۴t+۴}$

$$f'(t)=\frac{۱\left(t^{۲}+۴t+۴\right)-(۲t+۴)(t+۲)}{\left(t^{۲}+۴t+۴\right)^{۲}}$$

$$=\frac{t^{۲}+۴t+۴-۲t^{۲}-۴t-۴t-۸}{\left(t^{۲}+۴t+۴\right)^{۲}}$$

$$=\frac{-۲t-۴t-۴}{\left(t^{۲}+۴t+۴\right)^{۲}}=-\frac{۱}{t^{۲}+۴t+۴}$$

۱۴) $f(t)=\dfrac{t^{۲}+۵t+۴}{t^{۲}+t-۲۰}$

$$f'(t)=\frac{(۲t+۵)\left(t^{۲}+t-۲۰\right)-\left(t^{۲}+۵t+۴\right)(۲t+۱)}{\left(t^{۲}+t-۲۰\right)^{۲}}$$

$$=\frac{-۴\left(t^{۲}+۱۲t+۲۶\right)}{\left(t^{۲}+t-۲۰\right)^{۲}}$$

۱۵) $f(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$f'(x)=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{sin^{۲}x}$$

$$=\frac{-sin^{۲}x-cos^{۲}x}{sin^{۲}x}=\frac{-۱}{sin^{۲}x}=-csc^{۲}x$$

۱۶) $f(y)=\sqrt{y}\sec y$

$$f'(y)=\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\sec y+\sqrt{y}\sec y\tan y$$

در تمرینات ۲۲ – ۱۶ متغیر y وابسته است و متغیر x مستقل است. $\frac{dy}{dx}$ توابع را پیدا کنید.

۱۷) $y = (۳x+۱)(۲x^{۲}-۵x)$

$$\frac{dy}{dx} = ۳(۲x^{۳}-۵x) + (۳x+۱)(۴x-۵)$$
$$= ۶x^{۲} - ۱۵x + ۱۲x^{۲} - ۱۵x + ۴x - ۵$$
$$= ۱۸x^{۲} - ۲۶x - ۵$$

۱۸) $y = x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} = x^{۲} + x^{-۲}$

$$\frac{dy}{dx} = ۲x - ۲x^{-۳} = ۲x - \frac{۲}{x^{۳}}$$

۱۹) $y = \frac{۲x-۱}{۵-۳x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲(۵-۳x)-(-۳)(۲x-۱)}{(۵-۳x)^{۲}}$$
$$= \frac{۱۰ - ۶x + ۶x - ۳}{(۵-۳x)^{۲}} = \frac{۷}{(۵-۳x)^{۲}}$$

۲۰) $y = \frac{x^{۳}-۱}{x^{۴}+۱}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳x^{۲}(x^{۴}+۱) - ۴x^{۳}(x^{۳}-۱)}{(x^{۴}+۱)^{۲}}$$
$$= \frac{۳x^{۶} + ۳x^{۲} - ۴x^{۶} + ۴x^{۳}}{(x^{۴}+۱)^{۲}} = \frac{-x^{۶} + ۴x^{۳} + ۳x^{۲}}{(x^{۴}+۱)^{۲}}$$

۲۱) $y = \csc x \sec x$

$$\frac{dy}{dx} = (-\csc x \cot x)\sec x + \csc x(\sec x \tan x) = -csc^{۲}x + sec^{۲}x$$

۲۲) $y = \frac{x \sin x}{x^{۲} + ۱}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x + xcos\ x)\left(x^{۲} + ۱\right) - x\sin x(۲x)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}}$$

$$= \frac{\left(x^{۳} + x\right)\cos x + \left(۱ - x^{۲}\right)\sin x}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}}$$

در تمرینات ۲۵ – ۲۳ مطلوب است $f'(a)$

۲۳) $f(x) = \frac{-۷}{x^{۹}}; a = ۱$

$$f'(x) = \frac{-(-۷)۹x^{۸}}{x^{۱۸}} = \frac{۶۳}{x^{۱۰}}$$

$$f'\left(۱\right) = ۶۳$$

۲۴) $f(x) = \left(۳x^{۲} - ۴x\right); a = -۲$

$$f'(x) = \frac{۱}{\pi}(۶x - ۴)$$

$$f'\left(-۲\right) = -\frac{۱۶}{\pi}$$

۲۵) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; a = \frac{\pi}{۲}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\sqrt{۲} - \sin x\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{۲x\cos x - \sin x}{۲x^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{-۱}{۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}=-\sqrt{۲}\ \pi^{-\frac{۳}{۲}}$$

در تمرینات ۲۷ – ۲۶ معادله خط مماس در نقطه داده شده با نمودار f پیدا کنید.

۲۶) $f(x)=x^{۲}-۳x-۴;\left(۲,-۶\right)$

$$f'(x)=۲x-۳$$
$$f'\left(۲\right)=۴-۳=۱$$
$$l؛\ y-\left(-۶\right)=۱\left(x-۲\right)$$
$$y=x-۸$$

۲۷) $f(x)=\sin x-\cos x;\left(\frac{\pi}{۲},۱\right)$

$$f'(x)=\cos x+\sin x$$
$$f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$$
$$l؛\ y-۱=۱\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)$$
$$y=x+۱-\left(\frac{\pi}{۲}\right)$$

۲۸ – فرض کنید $f(x)=|x|$ و $g(x)=-|x|$ باشد. یک فرمول ساده برای $f+g$ پیدا کنید. سپس نشان دهید که $(f+g)'(x)$ برای تمام x ها وجود دارد ، اما $f'(x)$ و $g'(x)$ فقط برای مقادیر $x\neq 0$ وجود دارد.

پاسخ

$$(f+g)(x)=|x|-|x|=0$$

$(f+g)'(x)=0$ برای تمام x ها

بر اساس مثال ۴ بخش ۲.۳ که گفتیم $f'(x)$ فقط برای $x \neq 0$ وجود دارد و بر اساس همین مثال و ضرب عدد ثابت ، $g'(x)$ فقط برای $x \neq 0$ وجود دارد.
تابع f قدر مطلق است و g منفی قدر مطلق است.

۲۹ – فرض کنید $g'(a)$ و $(fg)'(a)$ وجود داشته باشد و $g(a) \neq 0$ است. ثابت کنید که $f'(a)$ وجود دارد.

پاسخ

چون $f(x) = \frac{(fg)(x)}{g(x)}$ است برای تمام x ها در دامنه fg و $g(x) \neq 0$ و چون $(fg)'(a)$ و $g'(a)$ وجود دارد با $g(a) \neq 0$ از قضیه تقسیم مشتق ها نتیجه می شود که $f'(a)$ وجود دارد.

۳۰

ثابت کنید اگر $h'(a)$ ، $g'(a)$ ، $f'(a)$ وجود داشته باشد ، پس

$$(fgh)'(a) = f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)$$

پاسخ

چون $g'(a)$ و $f'(a)$ وجود دارند ، قضیه ضرب مشتق ها می گوید که $(fg)'(a)$ وجود دارد ، و $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ است. چون $h'(a)$ $(fg)'(a)$ وجود دارد ، باز قضیه ضرب مشتق ها می گوید $(fgh)'(a)$ وجود دارد و

$$(fgh)'(a) = [(fg)h]'(a) = (fg)'(a)h'(a) + (fg)(a)h'(a)$$
$$= [f'(a)g(a) + f(a)g'(a)]h(a) + f(a)g(a)h'(a)$$
$$= f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)$$

۳۱

الف - سرعت توپ در مثال ۵ هنگامی که $t = ۱$ و $t = ۲$ است ، پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس پاسخ مثال ۵ داریم $0 < t < ۴$ برای $v(t) = -۳۲t + ۲۴$ است. پس

فوت در ثانیه $v(۱) = -۸$ و فوت در ثانیه $v(۲) = -۴۰$

ب - فرض کنید توپ در مثال ۵ با سرعت ۴۸ فوت در ثانیه به بالا پرتاب شود ، سرعت توپ وقتی که $t = ۱$ است ، را پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۲) همین بخش داریم

$$h(t) = -۱۶t^{۲} + ۴۸t + ۱۶۰$$
$$v(t) = -۳۲t + ۴۸$$
$$v(۱) = ۱۶ \text{ فوت در ثانیه}$$

۳۲ - فرض کنید یک توپ با سرعت ۱۲۸ فوت در ثانیه از سطح زمین به طور عمودی به طرف بالا پرتاب شود.

الف - حد اکثر ارتفاعی که توپ بالا می رود را پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۲) همین بخش ، ارتفاع توپ در هر زمان t قبل از برخورد توپ به زمین مطابق زیر است.

$$h(t) = -۱۶t^{۲} + ۱۲۸t$$

معادله درجه دوم زیر را حل می کنیم.

$$-۱۶t^{۲} + ۱۲۸t = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۱۲۸ \pm \sqrt{۱۲۸^{۲} - ۲(-۱۶)(0)}}{۲(-۱۶)}$$

$$t = 0 \quad \text{یا} \quad t = ۸$$

چون $h(t) = 0$ است ، برای $t = 0$ و $t = ۸$ پس بعد از هشت ثانیه توپ با زمین برخورد می کند و لذا

$$h(t) = -۱۶t^{۲} + ۱۲۸t \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le ۸$$

و در نتیجه

$$v(t) = -۳۲t + ۱۲۸ \quad \text{برای} \quad 0 < t < ۸$$

سرعت توپ صفر خواهد بود وقتی که ارتفاع توپ به حد اکثر ممکن برسد. چون $v(t) = 0$ است وقتی که $t = ۴$ باشد ، پس حد اکثر ارتفاع

$$h(۴) = ۲۵۶ \text{ فوت}$$

است.

ب ـ سرعت توپ را هنگامی که با زمین بر خورد می کند ، پیدا کنید.

پاسخ

$$v(۸) = \lim_{t\to ۸^-} \frac{h(t) - h(۸)}{t - ۸} = \lim_{t\to ۸^-} \frac{\left(-۱۶t^۲ + ۱۲۸t\right) - 0}{t - ۸}$$

$$= \lim_{t\to ۸^-} \frac{-۱۶t(t-۸)}{t-۸} = \lim_{t\to ۸^-} \left(-۱۶t\right) = -۱۲۸$$ فوت در ثانیه

۳۳ ـ اگر یک توپ با سرعت ۱۶ فوت در ثانیه از یک ساختمان به ارتفاع ۹۶ فوت نسبت به سطح زمین ، به طرف پایین پرتاب شود ، یک فرمول برای سرعت توپ در زمان t پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس فرمول (۲) همین بخش ارتفاع توپ در هر زمان t قبل از برخورد آن به زمین مطابق فرمول زیر است.

$$h(t) = -۱۶t^۲ - ۱۶t + ۹۶ = -۱۶\left(t + ۳\right)\left(t - ۲\right)$$

از رابطه بالا نتیجه می شود که توپ بعد از دو ثانیه به زمین برخورد می کند. فاکتور $\left(t - ۲\right)$ را ملاحظه کنید. یا به عبارت دیگر

$$h(t) = 0 \quad \text{برای} \quad t = ۲$$

بنا بر این

$$h(t) = -۱۶t^۲ - ۱۶t + ۹۶ \quad \text{برای} \quad 0 \le t \le ۲$$

است. و در نهایت

$$v(t) = h'(t) = -۳۲t - ۱۶ \quad \text{برای} \quad 0 < t < ۲$$

۳۴ ـ فرض کنید یک چلچراغ به طول ۵ فوت از سقف به ارتفاع ۱۰۰ فوت جدا می شود و شما با قامت ۶ فوت زیر آن قرار دارید.

الف ـ چقدر وقت دارید که از مسیر افتادن چراغ فرار کنید؟

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۲) ارتفاع پایین ترین قسمت چلچراغ مطابق زیر است

$$f(t) = -۱۶t^۲ + \left(۱۰۰ - ۵\right) = -۱۶t^۲ + ۹۵$$

و چون شما ۶ فوت قد دارید ، پس

$$-۱۶t^۲ + ۹۵ = ۶$$

$$t=\sqrt{\frac{۸۹}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۸۹}}{۴}\approx ۲/۳۵۸ \quad \text{ثانیه}$$

پس شما ۲/۳۵۸ ثانیه وقت دارید که از سر راه چلچراغ فرار کنید.

ب - اگر بد شانسی آوردید و نتوانستید به موقع فرار کنید ، چلچراغ با چه سرعتی به سر شما اصابت می کند؟

پاسخ

$$v(t)=f'(t)=-۳۲t$$

$$v\left(\frac{\sqrt{۸۹}}{۴}\right)=(-۳۲)\frac{\sqrt{۸۹}}{۴}=-۸\sqrt{۸۹}$$

پس چراغ باسرعت

$$۸\sqrt{۸۹}\approx ۷۵/۴۷ \quad \text{فوت در ثانیه}$$

با سر شما اصابت می کند.

ج – اگر شما ۵ فوت قد داشتید ، سرعت چلچراغ چقدر زیاد تر بود ، هنگامی که به سر شما اصابت می کرد؟

پاسخ

$$-۱۶t^{۲}+۹۵=۵$$

$$t=\sqrt{\frac{۹۰}{۱۶}}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۰}$$

و چون

$$v\left(\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۰}\right)=-۲۴\sqrt{۱۰}\approx -۷۵/۸۹ \quad \text{فوت در ثانیه}$$

پس

$$۷۵/۸۹-۷۵/۴۷=۰/۴۲ \quad \text{فوت در ثانیه زیادتر}$$

۳۵ ـ تابع هزینه و در آمد یک شرکت مطابق زیر است.

$$C(x)=\frac{x+۳}{\sqrt{x}+۱} \quad \text{و} \quad R(x)=\sqrt{x} \qquad \text{برای} \quad ۱\le x\le ۱۵$$

مقداری برای x پیدا کنید ، که سود صفر باشد. و نشان دهید که برای هیچ مقداری از x سود نهایی یعنی $m_P(x)$ صفر نیست.

پاسخ

می دانیم که

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$\text{هزینه} - \text{درامد} = \text{سود}$$

پس

$$P(x)=R(x)-C(x)=\sqrt{x}-\frac{x+۳}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}-(x+۳)}{\sqrt{x}+۱}=\frac{\sqrt{x}-۳}{\sqrt{x}+۱} \quad \text{برای} \quad ۱\le x\le ۱۵$$

بنا بر این $P(x)=0$ است ، اگر $\sqrt{x}-۳=0$ باشد ، یعنی اگر $x=۹$ باشد.

چون کسر $\frac{\sqrt{x}-۳}{\sqrt{x}+۱}$ در $(0,\infty)$ مشتق پذیر است ، پس نتیجه می گیریم که P یعنی سود در $[۱,۱۵]$ مشتق پذیر است، و

$$m_P=p'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)-(\sqrt{x}-۳)\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+۱)^۲}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+۱)-(\sqrt{x}-۳)}{۲\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^۲}=\frac{۲}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^۲}\neq 0 \quad \text{برای} \quad ۱\le x\le ۱۵$$

لذا برای هیچ مقداری از x سود نهایی صفر نمی شود.

۲.۵ـ مشتق توابع مرکب Derivative of Composite Functions

بسیاری از توابعی که در ریاضیات به آنها بر خورد می کنیم ، **توابع مرکب Composite Functions** هستند . مثلا تابع $k(x) = \sin ۳x$ ترکیب $g \circ f$ است. در اینجا

$$f(x) = ۳x \quad \text{و} \quad g(x) = \sin x$$

است. اگر بتوانیم یک قاعده کلی برای مشتق یک تابع مرکب **بر حسب In Term of** مشتق های توابع موئلفه پیدا کنیم ، پس قادر خواهیم بود مشتق k را پیدا کنیم بدون این که مجبور شویم به تعریف مشتق مراجعه کنیم.

برای پیدا کردن قاعده ای جهت مشتق گرفتن توابع مرکب مانند $k(x) = (g \circ f)(x)$ فرض می کنیم که f در a مشتق پذیر باشد و g در $f(a)$ مشتق پذیر باشد, و $f(x) \neq f(a)$ باشد برای تمام x های نزدیک a پس اگر عدد یک را به صورت زیر بنویسیم

$$۱ = \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)}$$

خواهیم داشت

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a}$$
$$= \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} * \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با استفاده از قضیه ضرب حد ها و قضیه جانشینی با $y = f(x)$ نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} * \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g\big(f(a)\big)}{y - f(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$= g'\big(f(x)\big) f'(x)$$

پس $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$ است. از این فرمول می توان قضیه زیر را استنتاج کرد. ما آنرا بدون اثبات می آوریم ، زیرا اثبات آن تا حدی غامض و مشکل است.

قضیه قاعده زنجیره ای The Chain Rule Theorem

فرض می کنیم f در a مشتق پذیر باشد ، و
فرض می کنیم g در $f(a)$ مشتق پذیر باشد
پس $g \circ f$ در a مشتق پذیر است ، و

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a) \qquad (۱)$$

قضیه زنجیره ای را می توان مطابق زیر تفسیر کرد.

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x)$$

برای تمام x ها به طوری که f در x مشتق پذیر باشد و g در $f(x)$ مشتق پذیر باشد. فرمول شماره (۱) اغلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{d}{dx}g\big(f(x)\big)=g'\big(f(x)\big)f'(x) \qquad (۲)$$

مثال ۱ – فرض کنید $k(x)=\sin ۳x$ باشد. یک فرمول برای $k'(x)$ پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x)=۳x$ و $g(x)=\sin x$ باشد ، پس $k=g\circ f$ است. چون داریم

$$f'(x)=۳ \quad و \quad g'(x)=\cos x$$

پس نتیجه می گیریم که

$$k'(x)=g'\big(f(x)\big)f'(x)=\cos ۳x(۳)=۳\cos ۳x$$

مثال ۲ – یک فرمول برای $\frac{d}{dx}\sqrt{۱+x^۴}$ پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x)=۱+x^۴$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد. پس

$$f'(x)=۴x^۳ \quad و \quad g'(x)=\frac{۱}{۲(\sqrt{x})} \quad \text{برای} \quad x>0$$

لذا

$$\frac{d}{dx}\sqrt{۱+x^۴}=g'\big(f(x)\big)f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x^۴}}*\left(۴x^۳\right)=\frac{۲x^۳}{\sqrt{۱+x^۴}}$$

برای پیدا کردن $(g\circ f)'(x)$ ابتدا $g'(x)$ را پیدا می کنیم وسپس بجای x می گذاریم $f(x)$ تا $g'\big(f(x)\big)$ بدست آید.

مثال ۳ – مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف - $k(x)=\left(x-۲x^۳\right)^{-۱۱}$

ب - $y=\cos x^۵$

پاسخ

الف –اگر فرض کنیم $f(x)=x-۲x^۳$ و $g(x)=x^{-۱۱}$ پس

$$f'(x)=۱-۶x^۲ \quad و \quad g'(x)=-۱۱x^{-۱۲}$$

لذا

$$k'(x) = \left[-۱۱\left(x - ۲x^۳\right)^{-۱۲}\right]\left(\left(۱ - ۶x^۲\right)\right) = \left(-۱۱ + ۶۶x^۲\right)\left(x - ۲x^۳\right)^{-۱۲}$$

ب –

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\sin x^۵\right)\left(۵x^۴\right) = -۵x^۴ \sin x^۵$$

و یا

$$\frac{d}{dx}\left(\cos x^۵\right) = \left(-\sin x^۵\right)\left(۵x^۴\right) = -۵x^۴ \sin x^۵$$

توجه داشته باشید ، هنگامی که با استفاده از قاعده زنجیره ای از یک تابع مشتق می گیریم ، از خارج به داخل مشتق می گیریم. پس برای مشتق گرفتن $\left(x - ۲x^۳\right)^{-۱۱}$ ابتدا مشتق تابع بیرونی یعنی $x^{-۱۱}$ در $x - ۲x^۳$ مشتق می گیریم و سپس تابع داخلی یعنی $x - ۲x^۳$ مشتق می گیریم.
به همین طریق برای مشتق گرفتن $\cos x^۵$ ابتدا از تابع بیرونی $\cos x$ در $x^۵$ مشتق می گیریم و سپس از تابع داخلی یعنی $x^۵$ مشتق می گیریم.
برای استفاده از نماد لا یب نیز Leibniz فرض کنید g و f داده شده اند. پس فرض می‌کنیم

$$u = f(x) \quad و \quad y = g(u)$$

پس $y = g\left(f(x)\right)$ و $\frac{du}{dx} = f'(x)$ و $\frac{dy}{du} = g'(u)$ است و در نهایت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} g\left(f(x)\right) = g'\left(f(x)\right)f'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

و به طور خلاصه

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (۳)}$$

توجه نمی توانیم du ها را در فرمول بالا حذف کنیم ، زیرا $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ کسر نیستند ، بلکه آنها عبارت هایی برای مشتق هستند.

مثال ۴ – اگر $y = sin^۸x$ باشد ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا فرض می کنیم $u = \sin x$ پس $y = u^۸$ سپس با استفاده ازفرمول (۳) داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left(۸u^۷\right)(\cos x) = ۸sin^۷x \cos x$$

در فرمول (۳) متغیر y به دو طریق مختلف ارائه شده است. یک مرتبه به عنوان تابعی از x و یک مرتبه به عنوان تابعی از u. عبارت $\frac{dy}{dx}$ مشتق y است وقتی که y به عنوان تابعی از x در نظر گرفته شده و $\frac{dy}{du}$ مشتق y است وقتی که y به عنوان تابعی از u قلمداد شده است.
برای این که نشان دهیم $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dy}{du}$ با هم فرق دارند ، مثالی می آوریم. فرض کنید

$$y = u^۲ \quad \text{و} \quad u = \frac{۱}{x}$$

پس $y = \left(\frac{۱}{x}\right)^۲ = \frac{۱}{x^۲}$ است ، به طوری که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۲}{x^۳} \quad \text{اما} \quad \frac{dy}{du} = ۲u = ۲\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۲}{x}$$

لذا

$$\frac{dy}{dx} \neq \frac{dy}{du}$$

مثال ۵ – فرض کنید که شعاع یک بادکنک بر اساس معادله $r = ۱ + ۲t$ نسبت به زمان تغییر می کند. میزان یا نرخ Rate تغییر حجم باد کنک نسبت به زمان پیدا کنید.
پاسخ
حجم Volume
شعاع Radius
زمان Time
اگر V را نماد حجم فرض کنیم ، پس حجم بادکنک مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

و طبق فرض مساله $r = ۱ + ۲t$ است. لذا

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = ۴\,\pi r^۲(۲) = ۸\,\pi r^۲ = ۸\,\pi(۱ + ۲t)^۲$$

بر اساس فرمول شماره (۷) بخش ۲.۴ می دانیم که

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-۱} \quad ،\{n|n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \qquad (۴)$$

حالا فرض کنید n یک عدد گویا غیر صفر باشد. بیاد دارید که یک عدد گویا به صورت $r = \frac{m}{n}$ است. اینجا m و n اعداد صحیح غیر منفی هستند. با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان نشان داد که

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-۱} \qquad (۵)}$$

مثال ۶- $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{۲}{۵}}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{۲}{۵}}\right) = -\frac{۲}{۵}x^{\left(-\frac{۲}{۵}\right)-۱} = -\frac{۲}{۵}x^{-\frac{۷}{۵}}$$

مثال ۷ – اگر $k(x) = \left(۳x^۲ + ۱\right)^{\frac{۷}{۴}}$ باشد ، $k'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$k'(x) = \frac{۷}{۴}\left(۳x^۲ + ۱\right)^{\frac{۷}{۴}-۱}\left(۶x\right) = \frac{۲۱}{۲}x\left(۳x^۲ + ۱\right)^{\frac{۳}{۴}}$$

مثال ۸ – فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر x باشد. مشتق توابع زیر را نسبت به x بر حسب x و y و $\frac{dy}{dx}$ بیان کنید.

الف – $y^۳$

ب - $\sin y$

ج - $۲x^۳y^۴$

بر حسب In Term of

نسبت به With Respect to

پاسخ

الف - ممکن است به نظر بیاید که مشتق $y^۳$ نسبت به x می شود $۳y^۲$, اما چنین نیست. باید از $y^۳$ نسبت به x مشتق بگیریم ، نه نسبت به y. پس باید از قاعده زنجیره ای استفاده کنیم.

$$\frac{d}{dx}\left(y^۳\right) = \left(\frac{d}{dy}y^۳\right)\frac{dy}{dx} = ۳y^۲\frac{dy}{dx}$$

ب – از طریق قاعده زنجیره ای خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \left(\frac{d}{dy}(siny)\right)\frac{dy}{dx} = (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

ج – چون $۲x^۳y^۴$ عبارت است از حاصل ضرب $۲x^۳$ و $y^۴$ ، مشتق حاصل ضرب می گیریم ، و هنگام مشتق گرفتن از $y^۴$ نسبت به x از قاعده زنجیره ای استفاده می کنیم.

$$\frac{d}{dx}\left(۲x^۳y^۴\right) = \left(۶x^۲\right)y^۴ + ۲x^۳\left(\frac{d}{dx}\left(y^۴\right)\right) = ۶x^۲y^۴ + ۲x^۳\left(۴y^۳\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= ۶x^۲y^۴ + ۸x^۳y^۳\frac{dy}{dx}$$

قاعده زنجیره ای مرکب The Compound Chain Rule

قاعده زنجیره ای را می توان بسط داد. تابع زیررا در نظر بگیرید.

$$k(x) = (h \circ g \circ f)(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

فرض کنید f در x مشتق پذیر باشد ، و g در $f(x)$ مشتق پذیر باشد ، و h در $g\big(f(x)\big)$ مشتق پذیر باشد. چون

$$k(x) = (h \circ g \circ f)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big)$$

است ، اولین استفاده از قاعده زنجیره ای رابطه زیر را به ما میدهد.

$$k'(x) = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)(g \circ f)(x)$$

دومین استفاده از قاعده زنجیره ای روی جمله سمت راست رابطه زیر را به ما میدهد.

$$k'(x) = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\, g'\big(f(x)\big) f'(x) \qquad (۶)$$

بنا بر این مشتق k از طریق استفاده زنجیر وار از قاعده زنجیره ای بدست می آید. در فرمول بالا ، مشتق h در عدد $g\big(f(x)\big)$ اول می آید ، سپس مشتق g در عدد $f(x)$ و در نهایت مشتق f در عدد x

مثال ۹ – تابع $k(x) = cos^{۳}۴x$ را در نظر بگیرید. $k'(x)$ و $k'\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر فرض کنیم $f(x) = ۴x$ و $g(x) = \cos x$ و $h(x) = x^{۳}$ باشد ، پس خواهیم داشت.

$$k(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

با استفاده از فرمول (۶) داریم.

$$k'(x) = \left(۳cos^{۲}۴x\right)\left(-\sin ۴x\right)(۴) = -۱۲cos^{۲}۴xsin۴x$$

$$k'\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -۱۲cos^{۲}\frac{۲\pi}{۳}sin\frac{۲\pi}{۳} = -۱۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = -\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

با نماد لا یب نیز Leibniz فرمول به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} \qquad (۷)$$

در فرمول شماره (۷) فرض بر این است که $u = h(v)$ ، $v = g(y)$ ، $y = f(x)$ باشد.

مثال ۱۰

فرض کنید y تابعی از x باشد. $\frac{d}{dx}\left(sin^{۳}y\right)$ را بر حسب y و $\frac{dy}{dx}$ پیدا کنید.

پاسخ

اگر فرض کنیم $v = \sin y$ و $u = v^{۳}$ باشد ، پس

$$sin^{۳}y = (\sin y)^{۳} = v^{۳} = u$$

بنا بر این طبق فرمول (۷) داریم.

$$\frac{d}{dx}\left(sin^{۳}y\right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(۳v^{۲}\right)(\cos y)\frac{dy}{dx} = \left(۳sin^{۲}y\cos y\right)\frac{dy}{dx}$$

با کمی تمرین متوجه خواهید شد که می توان قاعده زنجیره ای را بدون استفاده از متغیر های واسطه ، از خارج به داخل بکار برد. مثلا مثال ۱۰ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dx}\left(sin^{۳}y\right) = \left(۳sin^{۲}y\right)(\cos y)\frac{dy}{dx}$$

خلاصه قواعد مشتق گیری Summary of Differentiation Rules

خلاصه ای از قواعد اصلی مشتق گیری را در زیر می آوریم. با استفاده از آنها ، می توانید انواع مختلف توابع را مشتق گیری کنید.

۱) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(c)$

۲) $(cf)'(x) = cf'(x)$

۳) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

۴) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^{۲}}$

۵) $(g\circ f)'(x) = \frac{d}{dx}g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$

با این وجود تعدادی از توابع هستند که نمی توان مشتق آنها را با استفاده از قوانین بالا بدست آورد. مشتق چنین توابعی را می توان مستقیما از تعریف مشتق بدست آورد. مثلا اگر داشته باشیم

$$f(x) = x|x|$$

پس نمی توان قوانین بالا رابرای پیدا کردن $f'(0)$ بکار برد. زیرا $|x|$ در صفر مشتق پذیر نیست. با این وجود با استفاده از تعریف مشتق ، خواهیم داشت.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

اما اکثر توابعی که بر خورد می کنیم را می توان با استفاده از پنج قاعده بالا ، مشتق گیری کرد.

تمرینات ۲.۵

در تمرینات ۱۷ – ۱ مشتق توابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^{\frac{۹}{۴}}$

۲) $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}} - ۷x^{-\frac{۱}{۳}}$

۳) $f(x) = \left(۴ - ۳x^{۲}\right)^{۴۰۰}$

۴) $f(x) = \left(\frac{x - ۱}{x + ۱}\right)^{۳}$

۵) $f(x) = x\sqrt{۲ - ۷x^{۲}}$

۶) $f(t) = \sin ۵t$

۷) $f(t) = sin^{۴} t + cos^{۴} t$

۸) $g(x) = tan^{۶} x$

۹) $g(x) = \sqrt[۳]{۱ - \sin x}$

۱۰) $f(x) = \cos(\sin x)$

۱۱) $f(x) = \sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}}$

۱۲) $f(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۵ - ۲x}}$

۱۳) $f(x) = x\cos\left(\frac{۱}{x}\right)$

۱۴) $g(z) = \sqrt{۲z - (۲z)^{\frac{۱}{۳}}}$

۱۵) $g(z) = cos^{۲}\left(۳z^{۶}\right)$

۱۶) $f(x) = \sqrt[۴]{\sec(\tan x)}$

۱۷) $f(x) = cot^{۲}\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)$

در تمرینات ۲۱ ـــ ۱۸ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

۱۸) $y = ۳x^{-\frac{۲}{۳}}$

۱۹) $y = -x\sqrt{۱ + ۳x^{۲}}$

۲۰) $y = \left(\frac{۱}{x\sin x}\right)^{\frac{۲}{۳}}$

۲۱) $y = tan^{۳}\left(\frac{۱}{۲}x\right)$

در تمرینات ۲۶ ـــ ۲۲ فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر x است. مشتق توابع داده شده را نسبت به x بر حسب $x, y, \frac{dy}{dx}$ بیان کنید.

۲۲) $y^{۵}$

۲۳) $\frac{۲}{y}$

۲۴) $\sin\sqrt{y}$

۲۵) $x^{۳}y^{۲}$

۲۶) $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

در تمرینات ۲۸ – ۲۷ معادله خط مماس با نمودار f در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۲۷) $f(x)=\dfrac{۱}{(x+۱)^{۲}};(0,۱)$

۲۸) $f(x)=-۲\cos ۳x;\left(\dfrac{\pi}{۳},۲\right)$

۲۹ – به خاطر دارید که حجم یک باد کنک کروی شکل به شعاع آن بستگی دارد و مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

در فرمول بالا حرف V نماد حجم $Volume$ و حرف r نماد شعاع $Radius$ است.
فرض کنید شعاع به میزان یا نرخ $Rate$ ده اینچ در دقیقه افزایش پیدا می کند. با استفاده از قاعده زنجیره ای ، میزان تغییر حجم نسبت به زمان پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۵

در تمرینات ۱۷ – ۱ مشق توابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x)=x^{\frac{9}{4}}$

$$f'(x)=\frac{9}{4}x^{\frac{9}{4}-1}=\frac{9}{4}x^{\frac{5}{4}}$$

۲) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-7x^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

۳) $f(x)=\left(4-3x^2\right)^{400}$

$$f'(x)=400\left(4-3x^2\right)^{399}(-6x)=-2400\,x\left(4-3x^2\right)^{399}$$

۴) $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

$$f'(x)=3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\left(\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}\right)=\frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}$$

۵) $f(x)=x\sqrt{2-7x^2}$

$$f'(x)=(1)\sqrt{2-7x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{2-7x^2}}(-14x)=\frac{2-14x^2}{\sqrt{2-7x^2}}$$

۶) $f(t)=\sin 5t$

$$f'(t)=(\cos 5t)(5)=5\cos 5t$$

۷) $f(t)=sin^4 t+cos^4 t$

$$f'(t)=4sin^3 t\cos t+4cos^3 t(-\sin t)$$
$$=4sin^3 t\cos t-4cos^3\sin t$$

۸) $g(x) = tan^{۶} x$

$$g'(x) = ۶tan^{۵}x\, sec^{۲}x$$

۹) $g(x) = \sqrt[۳]{۱ - \sin x}$

$$g'(x) = \frac{۱}{۳}(۱ - \sin x)^{-\frac{۲}{۳}}(-\cos x)$$

$$= \left(-\frac{۱}{۳}\cos x\right)(۱ - \sin x)^{-\frac{۲}{۳}}$$

۱۰) $f(x) = \cos(\sin x)$

$$f'(x) = [-\sin(\sin x)]\cos x$$

۱۱) $f(x) = \sqrt{x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}}$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}\left(x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\left(۲x - \frac{۲}{x^{۳}}\right)$$

$$= \left(x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\left(x - \frac{۱}{x^{۳}}\right)$$

۱۲) $f(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۵ - ۲x}}$

$$f'(x) = \frac{-۱}{\left(x\sqrt{۵ - ۲x}\right)^{۲}}\left[\sqrt{۵ - ۲x} + x\frac{-۲}{۲\sqrt{۵ - ۲x}}\right]$$

$$= \frac{-۱}{x^{۲}(۵ - ۲x)}\left[\frac{(۵ - ۲x) - x}{\sqrt{۵ - ۲x}}\right] = \frac{۳x - ۵}{x^{۲}(۵ - ۲x)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۱۳) $f(x) = x\cos\left(\frac{۱}{x}\right)$

$$f'(x) = ۱ * \cos\left(\frac{۱}{x}\right) + x\left(-\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right) * \left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)$$
$$= \cos\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x}\sin\frac{۱}{x}$$

۱۴) $g(z) = \sqrt{۲z - (۲z)^{\frac{۱}{۳}}}$

$$g'(z) = \frac{۱}{۲}\left[۲z - (۲z)^{\frac{۱}{۲}}\right]^{-\frac{۱}{۲}}\left[۲ - \frac{۱}{۳}(۲z)^{-\frac{۲}{۳}}(۲)\right]$$
$$= \left[۲z - (۲z)^{\frac{۱}{۳}}\right]^{\frac{-۱}{۲}}\left[۱ - \frac{۱}{۳}(۲z)^{\frac{-۲}{۳}}\right]$$

۱۵) $g(z) = cos^{۲}\left(۳z^{۶}\right)$

$$g'(z) = \left[۲\cos\left(۳z^{۶}\right)\right]\left[-\sin\left(۳z^{۶}\right)\right]\left[۱۸z^{۵}\right]$$
$$= -۳۶z^{۵}\cos\left(۳z^{۶}\right)\sin\left(۳z^{۶}\right)$$

۱۶) $f(x) = \sqrt[۴]{\sec(\tan x)}$

$$f'(x) = \frac{۱}{۴}(\sec(\tan x))^{\frac{-۳}{۴}}(\sec(\tan x)\tan(\tan x))\, sec^{۲}x$$
$$= \frac{۱}{۴}\ \sqrt[۴]{\sec(\tan x)}\ \tan(\tan x)\ \ sec^{۲}x$$

۱۷) $f(x) = cot^{۲}\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)$

$$f'(x) = \left[۲\cot\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)\right]\left[-csc^{۲}\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)\right]\frac{۲}{۲\sqrt{۳x+۱}}(۳)$$

$$= \frac{-۶\cot\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)\ cos^{۲}\left(۲\sqrt{۳x+۱}\right)}{\sqrt{۳x+۱}}$$

در تمرینات ۲۱ – ۱۸ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

۱۸) $y = ۳x^{-\frac{۲}{۳}}$

$$\frac{dy}{dx} = ۳\left(-\frac{۲}{۳}\right)x^{\frac{-۵}{۳}} = -۲x^{\frac{-۵}{۳}}$$

۱۹) $y = -x\sqrt{۱+۳x^{۲}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{۱+۳x^{۲}} - x * \frac{۱}{۲}\left(۱+۳x^{۲}\right)^{\frac{-۱}{۲}}(۶x)$$

$$= -\frac{۱+۶x^{۲}}{\sqrt{۱+۳x^{۲}}}$$

۲۰) $y = \left(\frac{۱}{x\sin x}\right)^{\frac{۲}{۳}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{x\sin x}\right)^{\frac{-۱}{۳}}\left[\frac{-۱}{(x\sin x)^{۲}}\right][\sin x + x\cos x]$$

$$= -\frac{۲}{۳} * \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x)^{\frac{۵}{۳}}}$$

۲۱) $y = tan^{۳}\left(\frac{۱}{۲}x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \left[۳tan^{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)\right]\left[sec^{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)\right]\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\frac{۳}{۲}tan^{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)sec^{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)$$

در تمرینات ۲۶ — ۲۲ فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر x است. مشتق توابع داده شده را نسبت به x بر حسب $x, y, \frac{dy}{dx}$ بیان کنید.

۲۲) $y^{۵}$

$$\frac{d}{dx}\left(y^{۵}\right) = ۵y^{۴}\frac{dy}{dx}$$

۲۳) $\frac{۲}{y}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{۲}{y}\right) = \frac{-۲}{y^{۲}}\frac{dy}{dx}$$

۲۴) $\sin\sqrt{y}$

$$\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{y}) = (\cos\sqrt{y})\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\cos\sqrt{y}\right)\frac{dy}{dx}$$

۲۵) $x^{۳}y^{۲}$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{۳}y^{۲}\right) = ۳x^{۲}y^{۲} + x^{۳}\left(۲y\frac{dy}{dx}\right) = ۳x^{۲}y^{۲} + ۲x^{۳}y\frac{dy}{dx}$$

۲۶) $\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\right) = \frac{۱}{۲\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}}\left(۲x + ۲y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^{۲} + y^{۳}}}$$

در تمرینات ۲۸ – ۲۷ معادله خط مماس با نمودار f در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۲۷) $f(x)=\dfrac{۱}{(x+۱)^{۲}};\ (0,۱)$

$$f'(x)=-۲(x+۱)^{-۳}$$

پس $f'(0)=-۲$ و لذا

$$l:\ \ y-۱=-۲(x-0)$$
$$y=-۲x+۱$$

۲۸) $f(x)=-۲\cos ۳x;\left(\dfrac{\pi}{۳},۲\right)$

$$f'(x)=(-۲)(-\sin ۳x)(۳)=۶\sin ۳x$$

پس $f'\left(\frac{\pi}{۳}\right)=۶\sin\pi=0$ پس

$$l:\ \ y=۲$$

۲۹ – به خاطر دارید که حجم یک باد کنک کروی شکل به شعاع آن بستگی دارد و مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

در فرمول بالا حرف V نماد حجم $Volume$ و حرف r نماد شعاع $Radius$ است.
فرض کنید شعاع به میزان یا نرخ $Rate$ ده اینچ در دقیقه افزایش پیدا می کند. با استفاده از قاعده زنجیره ای ، میزان تغییر حجم نسبت به زمان پیدا کنید.

پاسخ

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\left[\frac{۴}{۳}\pi\ \left(۳r^{۲}\right)\right](۱۰)=۴۰\pi r^{۲}$$

۲.۶- مشتق های مرتبه بالا تر Higher Derivative

اگر f یک تابع باشد ، پس f' تابعی است که عدد $f'(x)$ را به هر یک از x ها که در آن f مشتق پذیر باشد ، اختصاص می دهد. چون f' یک تابع است ، پس می توانیم عمل مشتق گرفتن را یک مرتبه دیگر انجام دهیم و $f''(a)$ را مطابق فرمول زیر تعریف کنیم.

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

اگر حد بالا وجود داشته باشد. $f''(a)$ را **مشتق مرتبه دوم** f در a **می نامیم**. f'' را چنین می خوانیم "اف پریم مضاف " و یا "اف دبل پریم "

پس $f'(a)$ **را مشتق مرتبه اول می نامیم.** توجه داشته باشید که $f''(a)$ صرفا مشتق $f'(a)$ است. در نتیجه پیدا کردن مشتق های مرتبه دوم ، مشکل تر از پیدا کردن مشتق های مرتبه اول نیست.

مثال ۱ – اگر $f(x) = \sin x$ باشد ، یک فرمول برای $f''(x)$ پیدا کنید.

پاسخ

چون $f'(x) = \cos x$ پس $f''(x) = -\sin x$ است.

مثال ۲ – اگر $f(x) = ۳x^{\frac{۱}{۲}}$ باشد, یک فرمول برای $f''(x)$ پیدا کنید.

پاسخ

$$f'(x) = ۳\left(\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}\right) = \frac{۳}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-۱}{۲}\right)\frac{۳}{۲}x^{\frac{-۳}{۲}} = -\frac{۳}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}}$$

برای هر عدد صحیح مثبت $n \geq ۳$ می توان **مشتق مرتبه انم** ***Enom*** در a را مطابق فرمول زیر تعریف کرد.

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-۱)}(x) - f^{(n-۱)}(a)}{x - a}$$

در فرمول بالا $f^{(n-۱)}$ دلالت بر مشتق مرتبه $n - ۱$ می کند. مشتق مرتبه دوم ، مرتبه سوم و ....مشتق های مرتبه بالا نامیده می شوند تا نسبت به مشتق مرتبه اول تشخیص داده شوند. می گویم f **دو مرتبه مشتق پذیر** است ، اگر $f''(x)$ وجود داشته باشد برای تمام x ها در دامنه f و می گویم f ان ***Enn*** **مرتبه مشتق پذیر است** اگر $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد برای تمام x ها در دامنه f.

مثال ۳– اگر $f(x) = \cos x$ باشد ، نشان دهید که $f^{(۴)}(x) = f(x)$ است برای تمام x ها.
توجه دارید که $f^{(۴)}(x)$ خوانده می شود ، مشتق مرتبه چهارم. $f^{(۴)}(x)$ توان چهارم f نیست. اشتباه نشود.
پاسخ

$$f'(x) = -\sin x \qquad f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \sin x \qquad f^{(۴)}(x) = \cos x$$

مثال ۴ -اگر $f(x) = x^۵ - ۳x^۴ + ۲x - ۱$ باشد ، کلیه مشتق های مرتبه بالا را پیدا کنید.
پاسخ

$$f'(x) = ۵x^۴ - ۱۲x^۳ + ۲$$
$$f''(x) = ۲۰x^۳ - ۳۶x^۲$$
$$f'''(x) = ۶۰x^۲ - ۷۲x$$
$$f^{(۴)}(x) = ۱۲۰x - ۷۲$$
$$f^{(۵)}(x) = ۱۲۰$$
$$f^{(۶)}(x) = 0$$

ملاحظه می شود که $f^{(x)}(x) = 0$ است برای $n > ۶$

توجه داشته باشید برای چند جمله ای مثال ۴ , درجه چند جمله ای ۵ است. و $f^{(n)}(x) = 0$ است برای $n \geq ۶$.بطور کلی مشتق مرتبه $(n + ۱)$ و تمام مشتق های مرتبه بالای هر چند جمله ای درجه n مساوی صفر است. به عبارت دیگر اگر از هر چند جمله ای ، به تعداد کافی مشتق بگیریم ، در نهایت یک مشتق بدست می آوریم که مساوی صفر است.

با نماد لا یب نیز Leibniz مشتق های مرتبه دوم ، سوم و چهارم به صورت زیر است.

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} \quad و \quad \frac{d^۳y}{dx^۳} \quad و \quad \frac{d^۴y}{dx^۴}$$

مثال ۵ – فرض کنید $y = x \sin x$ باشد. با استفاده از نماد لا یب نیز ، مشتق های مرتبه اول تا سوم را پیدا کنید.
پاسخ

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \cos x + \cos x + x(-\sin x) = ۲\cos x - x\sin x$$
$$\frac{d^۳y}{dx^۳} = -۲\sin x - \sin x - x\cos x = -۳\sin x - x\cos x$$

شتاب Acceleration

به خاطر دارید که گفتیم سرعت ، مشتق تابع مکان است. حال می گوییم مشتق مرتبه دوم شتاب است.
یعنی اگر از تابع مکان یک جسم درحال حرکت دو مرتبه مشتق بگیریم ، شتاب آن شئی بدست می آید.

فرض کنید یک شئی در یک خط مستقیم در حال حرکت است. همان طور که در بخش ۲.۱ گفتیم ،
سرعت متوسط شئی در زمان t می شود $v(t)$

شتاب متوسط Average Acceleration

در طی بازه $t = t_0$ تا $t = t_1$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\frac{\text{اختلاف سرعت}}{\text{زمان طی شده}} = \frac{(\text{سرعت در زمان } t_1) - (\text{سرعت در زمان } t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$

پس شتاب یک شئی در زمان t_0 چنین تعریف می شود.

$$\boxed{a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)}$$

اگر $f(t)$ نشانگر مکان یک شئی در زمان t باشد ، و مشتق های مرتبه اول و دوم در t وجود داشته باشند ، پس

$$v(t) = f'(t) \quad \text{و} \quad a(t) = v'(t) = f''(t)$$

لذا ،شتاب مشتق مرتبه اول تابع سرعت و مشتق مرتبه دوم تابع مکان است.

فرض کنید یک شئی به طور عمودی در حال حرکت است. و فرض کنید تنها نیروی وارد بر آن نیروی جاذبه باشد. طبق فرمول شماره (۲) بخش ۲.۴ ، ارتفاع آن نسبت به زمین در زمان t ثانیه مطابق فرمول زیر است.

$$h(t) = -16t^2 + v_0 t + h_0 \qquad (1)$$

در فرمول بالا h_0 نماد ارتفاع اولیه و v_0 سرعت اولیه است. به اسانی می توان شتاب شئی را محاسبه کرد.

مثال ۶ ــ شتاب شئی که مکان آن در فرمول شماره (۱) بالا داده شده ، پیدا کنید.

پاسخ

$$v(t) = f'(t) = -32t + v_0 \quad \text{و} \quad a(t) = v'(t) = -32$$

تمرینات ۲.۶

در تمرینات ۹ – ۱ مشتق مرتبه دوم تابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵x - ۳$

۲) $f(x) = -۱۲x^{۵} + \frac{۱}{۲}x^{۴} - \sqrt{۱ - x}$

۳) $f(x) = \frac{۲}{(۱ - ۴x)^{۲}}$

۴) $f(x) = ax^{-n}$

۵) $f(x) = \frac{۱}{x^{۳} - ۱}$

۶) $f(x) = \pi\, x^{\frac{۵}{۲}} + \frac{\cos x}{x}$

۷) $f(x) = \sec x$

۸) $f(x) = x\cot(-۴x)$

۹) $f(x) = x\, tan^{۳}۲x$

در تمرینات ۱۵– ۱۰ مطلوب است $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$

۱۰) $y = x^{\frac{۳}{۲}}$

۱۱) $y = \left(x^{۴} - \tan x\right)^{۳}$

۱۲) $y = ax^{۲} + bx + c$

۱۳) $y = \frac{۱}{۳ - x}$

۱۴)　$y = \csc x$

۱۵)　$y = \sin x + \cos x$

در تمرینات ۱۹ ــ ۱۶ مشتق مرتبه سوم تابع داده شده را پیدا کنید.

۱۶)　$f(x) = -۴x^{۲} + ۵$

۱۷)　$f(x) = \sin x^{۲}$

۱۸)　$f(x) = \frac{۱}{x}$

۱۹)　$f(x) = \frac{۳x}{۴x + ۵}$

در تمرینات ۲۳ــ ۲۰ مطلوب است $\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$.

۲۰)　$y = ۳x^{۲}$

۲۱)　$y = \frac{۱}{۳۵x^{\frac{۳}{۲}}}$

۲۲)　$y = x^{۲} \sin \frac{۱}{x}$

۲۳)　$y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$

در تمرینات ۲۵ ــ ۲۴ مشتق مرتبه چهارم تابع را پیدا کنید.

۲۴)　$f(x) = ۳x^{۸} + \frac{۳}{۴}x^{۶} - ۴x^{\frac{۳}{۴}} + ۲x^{-۱}$

۲۵)　$f(x) = \sin \pi x$

در تمرینات ۲۷ ــ ۲۶ سرعت و شتاب شئی که تابع مکان آن داده شده پیدا کنید.

۲۶) $f(t) = -۱۶t^۲ + ۳t + ۴$

۲۷) $f(t) = ۲\sin t - ۳\cos t$

۲۸ ــ نشان دهید که مشتق مرتبه $(n + ۱)$ هر چند جمله ای درجه n صفر است. مشتق مرتبه $(n + ۲)$ چنین چند جمله ای چقدر است؟

۲۹ ــ اگر $f''(x) = f(x)$ باشد ، رابطه بین $f'(x)$ و $f^{(۳)}(x)$ چگونه است؟

۳۰

اگر $h = fg$ باشد ، $h''(x)$ را بر حسب f و g و مشتق های آنها پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۶

در تمرینات ۹ − ۱ مشتق مرتبه دوم تابع داده شده را پیدا کنید.

۱) $f(x) = ۵x - ۳$

$$f'(x) = ۵$$
$$f''(x) = 0$$

۲) $f(x) = -۱۲x^{۵} + \frac{۱}{۲}x^{۴} - \sqrt{۱ - x}$

$$f'(x) = -۶۰x^{۴} + ۲x^{۳} - \frac{۱}{۲}(۱ - x)^{\frac{-۱}{۲}}(-۱)$$

$$= -۶۰x^{۴} + ۲x^{۳} + \frac{۱}{۲}(۱ - x)^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$f''(x) = -۲۴۰x^{۳} + ۶x^{۲} - \frac{۱}{۴}(۱ - x)^{\frac{-۳}{۲}}(-۱)$$

$$= -۲۴۰x^{۳} + ۶x^{۲} + \frac{۱}{۴}(۱ - x)^{\frac{-۳}{۲}}$$

۳) $f(x) = \dfrac{۲}{(۱ - ۴x)^{۲}}$

$$f'(x) = ۲(-۲)(۱ - ۴x)^{-۳}(-۴) = ۱۶(۱ - ۴x)^{-۳}$$
$$f''(x) = ۱۶(-۳)(۱ - ۴x)^{-۴}(-۴) = -۱۹۲(۱ - ۴x)^{-۴}$$

۴) $f(x) = ax^{-n}$

$$f'(x) = a(-n)(x)^{-n-۱}$$
$$f''(x) = (-an)(-n - ۱)x^{-n-۲} = an(n + ۱)x^{-n-۲}$$

۵) $f(x) = \dfrac{۱}{x^{۳} - ۱}$

$$f'(x) = (-۱)\left(x^{۳} - ۱\right)^{-۲}۳x^{۲} = -۳x^{۲}\left(x^{۳} - ۱\right)^{-۲} = \frac{-۳x^{۲}}{(x^{۳} - ۱)^{۲}}$$

$$f''(x) = \frac{-۶x\left(x^۳-۱\right)^۲ + ۳x^۲(۲)\left(x^۳-۱\right)\left(۳x^۲\right)}{\left(x^۳-۱\right)^۴}$$
$$= \frac{۶x\left(x^۳-۱\right)\left(-x^۳+۱+۳x^۳\right)}{\left(x^۳-۱\right)^۴} = \frac{۶x\left(۲x^۳+۱\right)}{\left(x^۳-۱\right)^۳}$$

۶) $f(x) = \pi\, x^{\frac{۵}{۲}} + \dfrac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{۵}{۲}\,\pi x^{\frac{۳}{۲}} + \frac{-\sin x(x) - \cos x}{x^۲}$$
$$= \frac{۵}{۲}\,\pi x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^۲}$$
$$f''(x) = \frac{۱۵}{۴}\pi x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{\cos x(x) - \sin x}{x^۲} - \frac{-\sin x\left(x^۲\right) + \cos x(۲x)}{x^۴}$$
$$= \frac{۱۵}{۴}\pi x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{\cos x}{x} + \frac{۲\sin x}{x^۲} + \frac{۲\cos x}{x^۳}$$

۷) $f(x) = \sec x$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$
$$f''(x) = (\sec x \tan x)\tan x + \sec x\left(sec^۲ c\right) = \sec x\; tan^۲ x + sec^۳ x$$

۸) $f(x) = x\cot(-۴x)$

$$f'(x) = \cot(-۴x) + x\left(-csc^۲(-۴x)\right)(-۴)$$
$$= \cot(-۴x) + ۴x csc^۲(-۴x)$$
$$f''(x) = -csc^۲(-۴x)(-۴) + csc^۲(-۴x)$$
$$+۴x[۲\csc(-۴x)(-\csc(-۴x))\cot(-۴x)(-۴)]$$
$$= ۸csc^۲(-۴x) + ۳۲x\; csc^۲(-۴x)\cot(-۴x)$$

۹) $f(x) = x\; tan^۳ ۲x$

$$f'(x) = tan^3 2x + x[3(tan^2 2x)(sec^2 2x)(2)]$$
$$= tan^3 2x + 6x\; tan^2 2x\; sec^2 2x$$
$$f''(x) = 3[tan^2 2x\; sec^2 2x](2)$$

$$+6tan^2(2x)\ sec^2 2x$$
$$+6x[(2\tan 2x\ sec^4 2x)(2)+(tan^2 2x)2(sec^2 2x\tan 2x)(2)]$$
$$=12tan^2 2x\ sec^2 2x+24x(\tan 2x\ sec^4 2x+tan^3 2x\ sec^2 2x)$$

در تمرینات ۱۵– ۱۰ مطلوب است $\frac{d^۲y}{dx^۲}$

۱۰) $y=x^{\frac{۳}{۲}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{۳}{۴}x^{\frac{-۱}{۲}}$$

۱۱) $y=\left(x^۴-\tan x\right)^۳$

$$\frac{dy}{dx}=۳\left(x^۴-\tan x\right)^۲\left(۴x^۳-sec^۲x\right)$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=۳\left[۲\left(x^۴-\tan x\right)\left(۴x^۳-sec^۲x\right)^۲+\left(x^۴-\tan x\right)^۲ * \left(۱۲x^۲-۲sec^۲x\tan x\right)\right]$$

۱۲) $y=ax^۲+bx+c$

$$\frac{dy}{dx}=۲ax+b$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=۲a$$

۱۳) $y=\frac{۱}{۳-x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-۱}{(۳-x)^۲}$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{-۲(۳-x)(-۱)}{(۳-x)^۴}=\frac{۲}{(۳-x)^۳}$$

۱۴) $y = \csc x$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$$
$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = -(-\csc x \cot x)(\cot x) - (\csc x)\left(-csc^{۲}x\right)$$
$$= \csc x\, cot^{۲}x + csc^{۳}x$$

۱۵) $y = \sin x + \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$
$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = -\sin x - \cos x$$

در تمرینات ۱۹ – ۱۶ مشتق مرتبه سوم تابع داده شده را پیدا کنید.

۱۶) $f(x) = -۴x^{۲} + ۵$

$$f'(x) = -۸x$$
$$f''(x) = -۸$$
$$f^{(۳)}(x) = 0$$

۱۷) $f(x) = \sin x^{۲}$

$$f'(x) = ۲x \cos x^{۲}$$
$$f''(x) = ۲ \cos x^{۲} - ۴x^{۲} \sin x^{۲}$$
$$f^{(۳)}(x) = -۴x \sin x^{۲} - ۸x \sin x^{۲} - ۸x^{۳} \cos x^{۲}$$
$$= -۱۲x \sin x^{۲} - ۸x^{۳} \cos x^{۲}$$

۱۸) $f(x) = \frac{۱}{x}$

$$f'(x) = \frac{-۱}{x^{۲}}$$
$$f''(x) = \frac{۲}{x^{۳}}$$
$$f^{(۳)}(x) = \frac{-۶}{x^{۴}}$$

۱۹) $f(x) = \frac{۳x}{۴x + ۵}$

$$f'(x) = \frac{۳(۴x+۵) - ۳x(۴)}{(۴x+۵)^۲} = \frac{۱۵}{(۴x+۵)^۲}$$
$$f''(x) = \frac{۱۵(-۲)(۴)}{(۴x+۵)^۳} = \frac{-۱۲۰}{(۴x+۵)^۳}$$
$$f^{(۳)}(x) = \frac{(-۱۲۰)(-۳)(۴)}{(۴x+۵)^۴} = \frac{۱۴۴۰}{(۴x+۵)^۴}$$

در تمرینات ۲۳ـ ۲۰ مطلوب است $\frac{d^۳y}{dx^۳}$.

۲۰) $y = ۳x^۲$

$$\frac{dy}{dx} = ۶x$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۶$$
$$\frac{d^۳y}{dx^۳} = 0$$

۲۱) $y = \frac{۱}{۳۵x^{\frac{۳}{۲}}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۳}{۷۰}x^{\frac{-۵}{۲}}$$
$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۳}{۲۸}x^{\frac{-۷}{۲}}$$
$$\frac{d^۳y}{dx^۳} = -\frac{۳}{۸}x^{\frac{-۹}{۲}}$$

۲۲) $y = x^{۲} \sin\frac{۱}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = ۲x\sin\frac{۱}{x} + x^{۲}\left(\cos\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right) = ۲x\sin\frac{۱}{x} - \cos\frac{۱}{x}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = ۲\sin\frac{۱}{x} + ۲x\left(\cos\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right) + \left(\sin\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)$$

$$= ۲\sin\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x}\cos\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^{۲}}\sin\frac{۱}{x}$$

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} = ۲\left(\cos\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right) + \frac{۲}{x^{۲}}\cos\frac{۱}{x} + \frac{۲}{x}\left(\sin\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right) + \frac{۲}{x^{۳}}\sin\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^{۲}}\left(\cos\frac{۱}{x}\right)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)$$

$$= \frac{۱}{x^{۴}}\cos\frac{۱}{x}$$

۲۳) $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$

$$\frac{dy}{dx} = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = ۶ax + ۲b$$

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} = ۶a$$

در تمرینات ۲۵ – ۲۴ مشتق مرتبه چهارم تابع را پیدا کنید.

۲۴) $f(x) = ۳x^{۸} + \frac{۳}{۴}x^{۶} - ۴x^{\frac{۳}{۴}} + ۲x^{-۱}$

$$f'(x) = ۲۴x^{۷} + \frac{۹}{۲}x^{۵} - ۳x^{\frac{-۱}{۴}} - ۲x^{-۲}$$

$$f''(x) = ۱۶۸x^{۶} + \frac{۴۵}{۲}x^{۴} + \frac{۳}{۴}x^{\frac{-۵}{۴}} + ۴x^{-۳}$$

$$f^{(۳)}(x) = ۱۰۰۸x^{۵} + ۹۰x^{۳} - \frac{۱۵}{۱۶}x^{\frac{-۹}{۴}} - ۱۲x^{-۴}$$

$$f^{(۴)}(x) = ۵۰۴۰x^{۴} + ۲۷۰x^{۲} + \frac{۱۳۵}{۶۴}x^{\frac{-۱۳}{۴}} + ۴۸x^{-۵}$$

۲۵) $f(x) = \sin \pi x$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$
$$f''(x) = -\pi^{۲} \sin \pi x$$
$$f^{(۳)}(x) = -\pi^{۳} \cos \pi x$$
$$f^{(۴)}(x) = \pi^{۴} \sin \pi x$$

در تمرینات ۲۷ – ۲۶ سرعت و شتاب شئی که تابع مکان آن داده شده پیدا کنید.

۲۶) $f(t) = -۱۶t^{۲} + ۳t + ۴$

$$v(t) = f'(t) = -۳۲t + ۳$$
$$a(t) = f''(t) = -۳۲$$

۲۷) $f(t) = ۲ \sin t - ۳ \cos t$

$$v(t) = f'(t) = ۲ \cos t + ۳ \sin t$$
$$a(t) = f''(t) = ۲ \sin t + ۳ \cos t$$

۲۸ – نشان دهید که مشتق مرتبه $(n + ۱)$ هر چند جمله ای درجه n صفر است. مشتق مرتبه $(n + ۲)$ چنین چند جمله ای چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + c_۱ x + c_0 \quad ، \quad c_n \neq 0$$

پس

$$f'(x) = n c_n x^{n-۱} + (n - ۱) c_{n-۱} x^{n-۲} + \cdots c_۱$$

پس f' یک چند جمله ای درجه $n - ۱$ است. به همین طریق متوجه می شویم که f'' یک چند جمله ای درجه $n - ۲$ است. اگر به همین طریق ادامه دهیم ، ملاحظه می کنیم که $f^{(n)}$ یک چند جمله ای درجه صفر است و لذا $f^{(n)}$ یک تابع ثابت است. پس $f^{(n+۱)} = 0$ است. و در نهایت $f^{(n+۲)} = 0$ است.

۲۹ – اگر $f''(x) = f(x)$ باشد ، رابطه بین $f'(x)$ و $f^{(۳)}(x)$ چگونه است؟

پاسخ

$$f^{(۳)}(x) = (f'')'(x) = f'(x)$$

۳۰
اگر $h = fg$ باشد ، $h''(x)$ را بر حسب f و g و مشتق های آنها پیدا کنید.

پاسخ

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$h''(x) = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$
$$= f''(x) + ۲f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

۲.۷ - مشتق گیری ضمنی Implicit Differentiation

توابع مشتق پذیر که تا بحال با آنها کار کردأه ایم می توانند بوسیله یک معادله که در آن y بر حسب x بیان شده ، توصیف کرد. مانند

$$y = \frac{۹x^{۲}}{x^{۲}+۱} \qquad y = \tan\left(\sin x^{۲}\right) \qquad (۱)$$

اما ، فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر x باشد ، و x و y بوسیله معادله زیر به هم مربوط شوند.

$$x^{۳}+y^{۳} = ۲xy \qquad (۲)$$

چگونه می توانیم مشتق y نسبت به x پیدا کنیم؟

چون فرض شده است که y یک تابع مشتق پذیر x است ، پس $x^{۳}+y^{۳}$ و $۲xy$ هم مشتق پذیر هستند. پس هر طرف معادله (۲) یک تابع مشتق پذیر است و چون دو طرف با هم مساوی هستند ، مشتق آنها هم باید مساوی باشند. بنا بر این می توانیم مشتق های دو طرف را مساوی قرار دهیم و معادله را برای مشتق y حل کنیم. روی فرمول شماره (۲) کار می کنیم.

مثال ۱ – فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر x باشد ، معادله $x^{۳}+y^{۳} = ۲xy$ بر قرار است. $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا مشتق هر دو طرف را جدا گانه پیدا می کنیم. از $x^{۳}+y^{۳}$ به عنوان جمع دو تابع $x^{۳}$ و $y^{۳}$ مشتق می گیریم و با استفاده از قاعده زنجیره ای از $y^{۳}$ نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{۳}+y^{۳}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{۳}\right)+\frac{d}{dx}\left(y^{۳}\right) = ۳x^{۲}+۳y^{۲}\frac{dy}{dx}$$

با مشتق گرفتن از $۲xy$ به عنوان ضرب دو تابع $۲x$ و y خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dx}(۲xy) = \left(\frac{d}{dx}(۲x)\right)y + ۲x\frac{dy}{dx} = ۲y + ۲x\frac{dy}{dx}$$

حالا مشتق های دو طرف را مساوی قرار می دهیم.

$$۳x^{۲}+۳y^{۲}\frac{dy}{dx} = ۲y + ۲x\frac{dy}{dx}$$

در نهایت معادله بالا را برای $\frac{dy}{dx}$ حل می کنیم.

$$۳y^{۲}\frac{dy}{dx} - ۲x\frac{dy}{dx} = ۲y - ۳x^{۲}$$

$$\left(۳y^{۲}-۲x\right)\frac{dy}{dx} = ۲y - ۳x^{۲}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲y-۳x^{۲}}{۳y^{۲}-۲x}$$

در صورتی که $۳y^۲ - ۲x \neq 0$ باشد.

مثال ۲ ــ فرض کنید y یک تابع مشتق پذیر نسبت به x باشد و رابطه زیر هم بر قرار است.

$$x^۳ = y^۴ + x^۲ \sin y + ۱ \qquad (۳)$$

فرض کنید $y = 0$ است برای $x = ۱$. مطلوب است $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

پاسخ

ابتدا از هر دو طرف معادله (۳) جدا گانه مشتق می گیریم.

$$\frac{d}{dx}\left(x^۳\right) = ۳x^۲$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^۴ + x^۲ \sin y + ۱\right) = \frac{d}{dx}\left(y^۴\right) + \left(\frac{d}{dx}\left(x^۲\right)\right)\sin y + x^۲ \frac{d}{dx}(\sin y) + \frac{d}{dx}(۱)$$

$$= ۴y^۳ \frac{dy}{dx} + ۲x sin\ y + x^۲(\cos y)\frac{dy}{dx}$$

مشتق های دو طرف را مساوی قرار می دهیم.

$$۳x^۲ = ۴y^۳ \frac{dy}{dx} + ۲x \sin y + x^۲ \ (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

برای $\frac{dy}{dx}$ معادله را حل می کنیم.

$$۴y^۳ \frac{dy}{dx} + x^۲(\cos y)\frac{dy}{dx} = ۳x^۲ - ۲x \sin y$$

$$\left(۴y^۳ + x^۲ \cos y\right)\frac{dy}{dx} = ۳x^۲ - ۲x \sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳x^۲ - ۲x \sin y}{۴y^۳ + x^۲ \sin y} \qquad (۴)$$

در صورتی که مخرج شماره (۴) صفر نباشد. حال برای پیدا کردن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ ومشروط به $y = 0$, بجای y می گذاریم صفر و بجای x می گذاریم یک.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3-0}{0+1} = 3$$

معادله هایی مانند (۲) و (۳) می گوییم ، **معادله y را تلویحا بر حسب x تعریف می کند**.

Defines y implicitly in terms of x

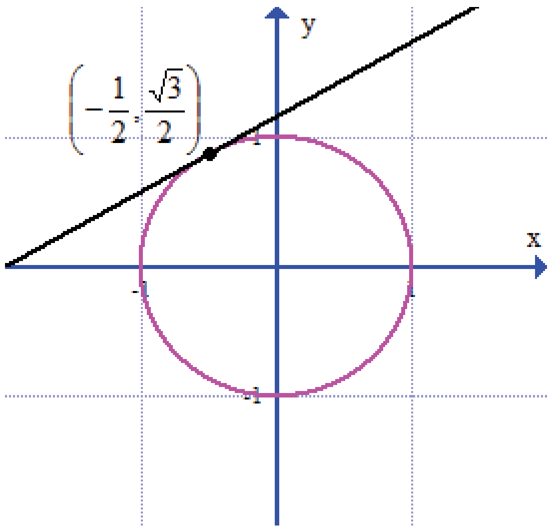
اما اگر در معادله ای y به تنهایی یک طرف نماد مساوی باشد ، و هیچ y دیگری در طرف دیگر نماد مساوی نباشد ، **گفته می شو د معادله y را صریحا تعریف می کند**.
Defines y explicitly

عمل مشتق گیری از دو طرف معادله ای که y را تلویحا بر حسب x تعریف می کند را **مشتق گیری ضمنی یا تلویحی Implicit Differentiation** می گویم.

در مثال های ۱ و ۲ مشتق $\frac{dy}{dx}$ بر حسب هم x و هم y بیان شده است. معمولا چنین نمادی را بکار می بریم ، هنگامی که تلویحا مشتق می گیریم. معمولا پیدا کردن مقدار عددی $\frac{dy}{dx}$ غیر ممکن است مگر اینکه مقدار مربوط به y و x را بدانیم. در مثال ۲ اگر نمی دانستیم وقتی که $x = ۱$ است ، $y = 0$ است قادر نبودیم $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنیم.

مثال ۳ با استفاده از مشتق گیری تلویحی ، معادله خط مماس با نمودار معادله $x^۲ + y^۲ = ۱$ را در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ



تلویحا مشتق می گیریم.

$$۲x + ۲y\frac{dy}{dx} = 0$$

پس

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y} \quad ,y\neq 0 \qquad (۶)$$

لذا شیب خط مماس با نمودار در نقطه $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ به طریق زیر بدست می آوریم.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و معادله خط مماس خواسته شده بدست می آوریم.

$$y-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\left[x-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right]=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)$$

ساده می کنیم.

$$y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{\sqrt{۳}}{۶}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$$

اگر y تابعی باشد که تلویحا بر حسب x تعریف شده است و اگر $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ وجود داشته باشد ، می توان از $\frac{dy}{dx}$ مشتق گرفت تا $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ بدست آید.

مثال ۴ ـ اگر $x^{۲}+y^{۲}=۱$ باشد ، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را از طریق مشتق گیری ضمنی پیدا کنید.

پاسخ

طبق فرمول (۶) داریم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y} \quad ,y\neq 0$$

از دو طرف نسبت x مشتق می گیریم و سپس بجای $\frac{dy}{dx}$ می گذاریم $\frac{-x}{y}$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{(-۱)y-(-x)\frac{dy}{dx}}{y^{۲}}=\frac{-y+x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^{۲}}=\frac{-\left(y^{۲}+x^{۲}\right)}{y^{۳}}=\frac{-۱}{y^{۳}}$$

مثال ۵ ـاگر $x^۲ + y^۲ = ۱۰۰$ باشد و فرض کنید x و y هر دو توابع مشتق پذیر t باشند. $\frac{dy}{dt}$ را بر حسب x و y و $\frac{dx}{dt}$ پیدا کنید.

پاسخ

هر دو طرف معادله را تلویحا نسبت به t مشتق می گیریم.

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = 0$$

پس

$$۲y\frac{dy}{dt} = -۲x\frac{dx}{dt}$$

نتیجه می شود

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-۲x\frac{dx}{dt}}{۲y} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

در صورتی که $y \neq 0$ باشد.

اگر بخواهیم مقدار $\frac{dy}{dt}$ را پیدا کنیم در صورتی که $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{dx}{dt} = ۵$ باشند ، خواهیم داشت.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}(۵) = \frac{۵}{۳}\sqrt{۳}$$

تمرینات ۲.۷

در تمرینات ۸ – ۱ با استفاده از مشتق گیری ضمنی ، مشتق y را نسبت به x پیدا کنید.

۱) $۳y^{۲} = -۲x^{۴}$

۲) $y^{۲} + y = \dfrac{۱ + x}{۱ - x}$

۳) $\sec y - \tan x = 0$

۴) $\dfrac{\sin y}{y^{۲} + ۱} = ۳x$

۵) $x^{۲} + x^{۲}y^{۲} + y^{۳} = ۳$

۶) $x^{۲} + y^{۲} = \dfrac{y^{۲}}{x^{۲}}$

۷) $\sqrt{xy} + \sqrt{x + ۲y} = ۴$

۸) $\left(x^{۲} + y^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ + \dfrac{۲x}{\left(x^{۲} + y^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}$

در تمرینات شماره ۱۴ – ۹ با استفاده از مشتق گیری ضمنی ، مشتق y نسبت به x در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۹) $x^{۲} + y^{۲} = y; \left(0, ۱\right)$

۱۰) $xy = ۲; \left(-۲, -۱\right)$

۱۱) $x^{۳} + ۲xy = ۵; \left(۱, ۲\right)$

۱۲) $x^{۲} + \dfrac{x}{y} = -۲; \left(۱, -\dfrac{۱}{۳}\right)$

۱۳) $\left(\sqrt{x}+۱\right)\left(\sqrt{y}+۲\right)=۸;\left(۱,۴\right)$

۱۴) $\sin x=\cos y;\left(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}\right)$

در تمرینات ۱۶ – ۱۵ معادله خط مماس با نمودار معادله در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱۵) $xy^{۲}=۱۸;\left(۲,-۳\right)$

۱۶) $\sin(x+y)=۲x;\left(0،\pi\right)$

در تمرینات ۱۸ – ۱۷ با استفاده از مشتق ضمنی ، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را پیدا کنید.

۱۷) $x^{۲}-y^{۴}=۶$

۱۸) $x^{۲}\sin ۲y=۱$

پاسخ تمرینات ۲.۷

در تمرینات ۸ – ۱ با استفاده از مشتق گیری ضمنی ، مشتق y را نسبت به x پیدا کنید.

۱) $۳y^{۲} = -۲x^{۴}$

$$۶y\frac{dy}{dx} = -۸x^{۳}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۸x^{۳}}{۶y} = -\frac{۴x^{۳}}{۶y}$$

۲) $y^{۲} + y = \frac{۱ + x}{۱ - x}$

$$۲y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = \frac{(۱ - x) - (-۱)(۱ + x)}{(۱ - x)^{۲}} = \frac{۲}{(۱ - x)^{۲}}$$

$$\frac{dy}{dx}(۲y + ۱) = \frac{۲}{(۱ - x)^{۲}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲}{(۲y + ۱)(۱ - x)^{۲}}$$

۳) $\sec y - \tan x = 0$

$$\sec y \tan y\ \frac{dy}{dx} - sec^{۲}x = 0$$

$$\sec y \tan y\ \frac{dy}{dx} = sec^{۲}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^{۲}x}{\sec y \tan y}$$

۴) $\frac{\sin y}{y^{۲} + ۱} = ۳x$

$$\frac{\cos y\ \frac{dy}{dx}\left(y^{۲} + ۱\right) - \sin y\left(۲y\frac{dy}{dx}\right)}{\left(y^{۲} + ۱\right)^{۲}} = ۳$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳\left(y^{۲} + ۱\right)^{۲}}{(y^{۲} + ۱)\cos y - ۲y\sin y}$$

۵) $x^۲ + x^۲y^۲ + y^۳ = ۳$

$$۲x + +۲xy^۲ + x^۲(۲y)\frac{dy}{dx} + ۳y^۲\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۲x - ۲xy^۲}{۲x^۲y + ۳y^۲}$$

۶) $x^۲ + y^۲ = \frac{y^۲}{x^۲}$

$$۲x + ۲y\frac{dy}{dx} = \frac{۲y\frac{dy}{dx}\left(x^۲\right) - y^۲(۲x)}{x^۴}$$

$$۲x + ۲y\frac{dy}{dx} = \frac{۲y}{x^۲}\frac{dy}{dx} - \frac{۲y^۲}{x^۳}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \frac{y^۲}{x^۳}}{\frac{y}{x^۲} - y} = \frac{x^۴ + y^۲}{xy - x^۳y}$$

۷) $\sqrt{xy} + \sqrt{x + ۲y} = ۴$

$$\frac{۱}{۲}(xy)^{\frac{-۱}{۲}}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{۱}{۲}(x + ۲y)^{\frac{-۱}{۲}}\left(۱ + ۲\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(xy)^{\frac{-۱}{۲}} - (x + ۲y)^{\frac{-۱}{۲}}}{x(xy)^{\frac{-۱}{۲}} + ۲(x + ۲y)^{\frac{-۱}{۲}}}$$

۸) $\left(x^۲ + y^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ + \frac{۲x}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$

$$\frac{۱}{۲}\left(x^۲ + y^۲\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left(۲x + ۲y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{۲\left(x^۲+y^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} - ۲x\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(x^۲+y^۲\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left(۲x+۲y\frac{dy}{dx}\right)}{x^۲+y^۲}$$

$$\left(x^۲+y^۲\right)\left(x+y\frac{dy}{dx}\right) = ۲\left(x^۲+y^۲\right) - ۲x\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲y^۲ - x^۳ - xy^۲}{y^۳ + x^۲y + ۲xy}$$

در تمرینات شماره ۱۴ – ۹ با استفاده از مشتق گیری ضمنی ، مشتق y نسبت به x در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۹) $x^۲ + y^۲ = y; (0,۱)$

$$۲x + ۲y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{۱-۲y}$$

$$\text{در}(0,۱)\ ,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{0}{۱-۲} = 0$$

۱۰) $xy = ۲; (-۲,-۱)$

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-۱)}{-۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۱) $x^۳ + ۲xy = ۵; (۱,۲)$

$$۳x^۲ + ۲y + ۲x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۳x^۲ - ۲y}{۲x} = -\frac{۳x^۲ + ۲y}{۲x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۳\left(۱^۲\right) - ۲(۲)}{۲(۱)} = -\frac{۷}{۲}$$

۱۲) $x^{۲}+\frac{x}{y}=-۲;\left(۱,-\frac{۱}{۳}\right)$

$$۲x+\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^{۲}}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲x+\frac{۱}{y}}{\frac{x}{y^{۲}}}=\frac{۲xy^{۲}+y}{x}$$

$$\left(۱,-\frac{۱}{۳}\right) \text{ در } \quad \frac{dy}{dx}=\frac{۲(۱)\left(-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}+\left(-\frac{۱}{۳}\right)}{۱}=-\frac{۱}{۹}$$

۱۳) $\left(\sqrt{x}+۱\right)\left(\sqrt{y}+۲\right)=۸;(۱,۴)$

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\left(\sqrt{y}+۲\right)+\left(\sqrt{x}+۱\right)\left(\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}+۲}{۲\sqrt{x}}*\frac{-۲\sqrt{y}}{\sqrt{x}+۱}=\frac{y+۲\sqrt{y}}{x+\sqrt{x}}$$

$$(۱,۴) \text{ در } \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{۴+۲*۲}{۱+۱}=-۴$$

۱۴) $\sin x=\cos y;\left(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}\right)$

$$\cos x=-(\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\left(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}\right) \text{ در } \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\frac{\pi}{۶}}{\sin\frac{\pi}{۳}}=-\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-۱$$

در تمرینات ۱۶ – ۱۵ معادله خط مماس با نمودار معادله در نقطه داده شده را پیدا کنید.

۱۵) $xy^{۲} = ۱۸; (۲, -۳)$

$$y^{۲} + ۲xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{۲x}$$

$$\text{در } (۲, -۳) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{(-۳)}{۲(۲)} = \frac{۳}{۴}$$

$$l:\ \ y - (-۳) = \frac{۳}{۴}(x - ۲)$$

$$y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۹}{۲}$$

۱۶) $\sin(x + y) = ۲x; (0،\pi)$

$$\cos(x + y)\left(۱ + \frac{dy}{dx}\right) = ۲$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲}{\cos(x + y)} - ۱$$

$$\text{در } (0،\pi) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{۲}{\cos(0 + \pi)} - ۱ = -۲ - ۱ = -۳$$

$$l:\ \ y - \pi = -۳(x - 0)$$

$$y = -۳x + \pi$$

در تمرینات ۱۸ – ۱۷ با استفاده از مشتق ضمنی ، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را پیدا کنید.

۱۷) $x^{۲} - y^{۴} = ۶$

$$۲x - ۴y^{۳}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{۴y^{۳}} = \frac{x}{۲y^{۳}}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = \frac{۲y^{۳} - x\left(۶y^{۲}\frac{dy}{dx}\right)}{(۲y^{۳})^{۲}} = \frac{۲y^{۳} - ۶xy^{۲}\left(\frac{x}{۲y^{۳}}\right)}{۴y^{۶}}$$

$$= \frac{۲y^۳ - \frac{۳x^۲}{y}}{۴y^۶} = \frac{۲y^۴ - ۳x^۲}{۴y^۷}$$

۱۸) $x^۲ \sin ۲y = ۱$

$$۲x \sin ۲y + x^۲(\cos ۲y)(۲)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x \sin ۲y}{۲x^۲ \cos ۲y} = -\frac{\tan ۲y}{x}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = -\frac{\left(sec^۲۲y\right)\left(۲\frac{dy}{dx}\right)x - \tan ۲y}{x^۲}$$

$$= \frac{\left(sec^۲۲y\right)۲\left(-\frac{\tan ۲y}{x}\right)x - \tan ۲y}{x^۲} = \frac{\tan ۲y\ \left(۲sec^۲۲y + ۱\right)}{x^۲}$$

۲.۸ کار برد مشتق ضمنی Application of Implicit Differentiation

در این بخش می خواهیم در مورد کار برد مشتق ضمنی صحبت کنیم. بیشتر کار برد های مشتق در فصل جدا گانه خواهد آمد. اما چون برای پیدا کردن میزان یا نرخ تغییرات وابسته ، به مشتق ضمنی احتیاج داریم , از این نظر این بخش را اینجا می آوریم.

میدانیم که حجم یک بالون کروی و شعاع آن به هم مربوط هستند. یعنی

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \qquad (۱)$$

حال اگر این بالون از هوا یا گاز پر کنیم ، شعاع r و حجم V هر دو تابع زمان t هستند. حتی اگر فرمول هایی برای r و V به عنوان توابع t ندانیم ، می توانیم از دو طرف فرمول شماره (۱) بر حسب t مشتق بگیریم. پس خواهیم داشت

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = ۴\,\pi\, r^{۲}\,\frac{dr}{dt} \qquad (۲)$$

$\frac{dV}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ بوسیله فرمول (۲) به هم مربوط می شوند. پس می گوییم $\frac{dV}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ **نرخ های وابسته Related Rates** هستند. مثلا اگر مقدار r و $\frac{dV}{dt}$ را در زمان t_0 بدانیم ، می توانیم $\frac{dr}{dt}$ را درزمان t_0 با حل کردن فرمول (۲) پیدا کنیم.

مثال ۱ - فرض کنید یک بالون کروی به میزان (نرخ Rate) ده اینچ مکعب در دقیقه از گاز پر می شود. با چه سرعتی شعاع بالون در حال افزایش است ، هنگامی که شعاع پنج اینچ است؟

پاسخ - فرمول حجم در فرمول شماره (۱) داده شده است و طبق فرمول شماره (۲) داریم

$$\frac{dV}{dt} = ۴\,\pi\, r^{۲}\,\frac{dr}{dt} \qquad (۳)$$

چون می دانیم که حجم بالون به میزان ۱۰ اینچ در هر دقیقه افزایش می یابد ، پس می دانیم که $\frac{dV}{dt} = ۱۰$ است. می خواهیم مقدار زیر را پیدا کنیم.

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0}$$

در عبارت بالا t_0 لحظه ای است که $r = ۵$ است. در فرمول (۳) بجای $\frac{dV}{dt}$ می گذاریم ۱۰ و بجای r می گذاریم ۵ و نتیجه میگیریم که

$$۱0 = ۵\,\pi(۵)^{۲}\ \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0}$$

پس

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{10}{4\pi(5)^2} = \frac{1}{10\pi}$$

لذا هنگامی که شعاع ۵ اینچ است ، شعاع به میزان $\frac{۱}{۱۰\pi}$ در هر دقیقه در حال افزایش است.
ملاحظه می کنید که در مثال ۱ لازم نبود که زمان t_0 را که در آن زمان $r = ۵$ است بدانیم. آنچه لازم داشتیم ، مقدار r و $\frac{dV}{dt}$ در زمان t_0 بود.

مثال ۲ – فرض کنید هر چه بالون بزرگ تر شود ، وارد کردن گاز به آن مشکل تر می شود. و فرض کنید هنگامی که حجم بالون بیشتر از ۱۰ اینچ مکعب باشد ، بالون به میزان $\frac{۸}{V}$ اینچ مکعب در دقیقه باد می کند. شعاع بالون با چه سرعتی در حل افزایش است ، هنگامی که شعاع ۲ اینچ است؟

پاسخ

باید مقدار زیر را پیدا کنیم.

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

در عبارت بالا t_0 لحظه ای است که $r = ۲$ است. از یک طرف فرمول شماره ۲ می گوید

$$\frac{dV}{dt} = ۴\,\pi\, r^۲ \frac{dr}{dt} \qquad (۴)$$

از طرف دیگر ، فرض کردیم که $V > ۱۰$ است. پس

$$\frac{dV}{dt} = \frac{۸}{V} = \frac{۸}{\frac{۴}{۳}\pi r^۳} = \frac{۶}{\pi r^۳} \qquad (۵)$$

عبارت هایی که در (۴) و (۵) برای $\frac{dV}{dt}$ داده شده ، مساوی قرار می دهیم.

$$۴\,\pi\, r^۲ \frac{dr}{dt} = \frac{۶}{\pi r^۳}$$

و یا

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۶}{\pi r^۳} * \frac{۱}{۴\,\pi\, r^۲} = \frac{۳}{۲\pi^۲ r^۵}$$

برای زمان t_0 یعنی هنگامی که $r = ۲$ است ، خواهیم داشت.

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{3}{2\pi^2 2^5} = \frac{3}{64\pi^2}$$

در نتیجه هنگامی که شعاع ۲ اینچ است ، به میزان $\frac{۳}{۶۴\pi^۲}$ اینچ در دقیقه در حال افزایش است.

در مثال بعدی یک شکل را بکار می بریم تا در فهم معادله متغیر های وابسته به شما کمک کند.

مثال ۳ – یک سر یک نردبان ۱۳ فوتی روی زمین قرار دارد ، سر دیگر آن روی یک دیوار عمودی تکیه دارد. اگر انتهای پایینی را به میزان ۳ فوت در ثانیه از دیوار دور کنیم ، انتهای بالایی با چه سرعتی به طرف پایین دیوار می لغزد ، هنگامی که انتهای پایینی نردبان ۵ فوت از دیوار فاصله دارد ؟
پاسخ

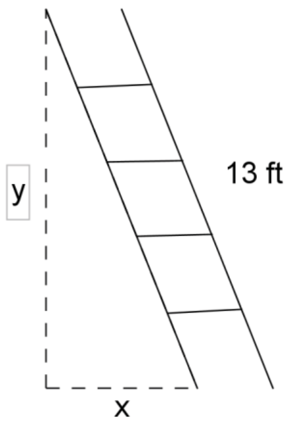


Figure A

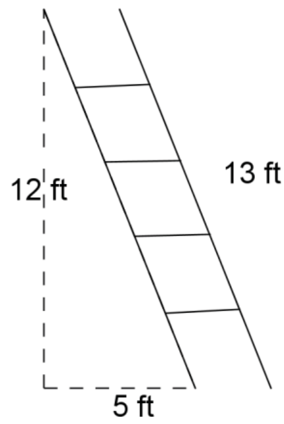


Figure B

فرض کنید y فاصله بین زمین و انتهای بالایی نردبان باشد ، و x فاصله بین دیوار و انتهای پایینی نردبان باشد. بر اساس فرض مساله $\frac{dx}{dt} = ۳$ است ، باید مقدار زیر را پیدا کنیم.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}$$

در رابطه بالا t_0 زمانی است که $x = ۵$ است. بر اساس قضیه فیثاغورث x و y توسط معادله زیر به هم وابسته هستند.

$$x^۲ + y^۲ = ۱۳^۲ = ۱۶۹ \qquad (۶)$$

با مشتق گرفتن طرف چپ معادله (۶) بطور ضمنی نسبت به t ، خواهیم داشت.

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = 0$$

رابطه بالا را برای $\frac{dy}{dt}$ حل می کنیم.

$$۲y\frac{dy}{dt} = -۲x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad (۷)$$

حالا در زمان t_0 که پایه نردبان ۵ فوت از دیوار فاصله دارد ، یعنی $x = ۵$ است ، طبق فرمول ۶ خواهیم داشت.

$$y^۲ = ۱۶۹ - ۵^۲ = ۱۴۴$$

پس $y = ۱۲$ در رابطه (۷) مقادیری که داریم می گذاریم. یعنی

$$x = ۵ \quad , \quad y = ۱۲ \quad , \quad \frac{dx}{dt} = ۳$$

پس داریم.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = -\frac{5}{12}(3) = -\frac{5}{4}$$

لذا هنگامی که پایه نردبان ۵ فوت تا دیوار فاصله داد ، انتهای آن به میزان $\frac{۵}{۴}$ فوت در ثانیه به طرف پایین می لغزد.

احتیاط - در مثال قبل ، اگر می خواستیم میزان یا نرخ لغزش را از شکل A پیدا کنیم ، قادر نبودیم ارتباط بین $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ را پیدا کنیم. شکل A نمایش مساله در زمان t_0 است ، یعنی زمان قبل از لقزش. بنا بر این لازم است که شکلی داشته باشیم که موقعیت را در هر لحظه نشان دهد.

مثال ۴ – در یک ظرف مخروطی شکل با نرخ $\frac{۲}{۳}$ اینچ مکعب در ثانیه آب میریزیم. اگر ارتفاع ظرف ۶ اینچ و شعاع قسمت بالای ظرف ۲ اینچ باشد ، سطح آب با چه سرعتی افزایش پیدا می کند ، هنگامی که عمق آب داخل ظرف ۴ اینچ است؟

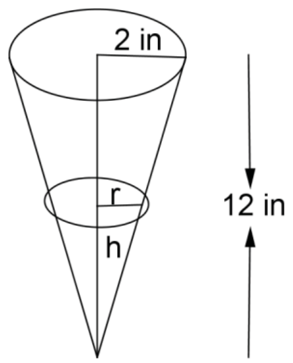


Figure C

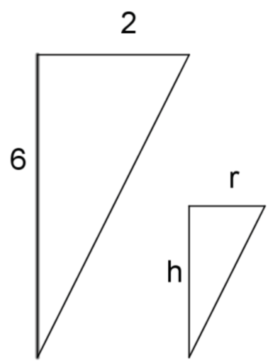


Figure D

پاسخ –فرض می کنیم در هر زمان t ارتفاع آب h و حجم آب V و شعاع سطح بالای آب r باشد. شکل D
می دانیم که حجم مخروط مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

چون آب با نرخ $\frac{۲}{۳}$ اینچ مکعب در ثانیه وارد ظرف می شود ، پس $\frac{dV}{dt}=\frac{۲}{۳}$ است. می خواهیم مقدار زیر را پیدا کنیم.

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0}$$

در عبارت بالا t_0 زمانی است که $h=۴$ می شود. با استفاده از مثلث های متشابه در شکل D داریم.

$$\frac{r}{h}=\frac{۲}{۶}$$

پس $r=\frac{h}{۳}$ است. در نتیجه می توانیم V را بر حسب h بنویسیم.

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{h}{۳}\right)^{۲}h=\frac{\pi h^{۳}}{۲۷}$$

با مشتق گرفتن معادله بالا نسبت به t خواهیم داشت.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}=\frac{\pi h^{۲}}{۹}\frac{dh}{dt}$$

پس

$$\frac{dh}{dt}=\frac{۹}{\pi h^{۲}}\frac{dV}{dt}\qquad(۸)$$

در زمان لحظه t_0 داریم $h=۴$ و $\frac{dV}{dt}=\frac{۲}{۳}$ این مقادیر را در فرمول (۸) می گذاریم.

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0}=\frac{9}{\pi(4)^2}*\frac{2}{3}=\frac{3}{8\pi}$$

لذا هنگامی که عمق آب به ۴ اینچ می رسد ، سطح آب با نرخ $\frac{۳}{۸\pi}$ اینچ در ثانیه افزایش پیدا می کند.

مثال ۵ – افشین با سرعت ۵ فوت در ثانیه در حال رفتن به طرف یک تیر چراغ خیابان است.فاصله لامپ تا پایه تیر ۲۰ فوت است. اگر افشین ۶ فوت قد داشته باشد ، نرخ تغییر سایه او در لحظه ای که او ۲۴ فوت تا پایه چراغ فاصله دارد چه قدر است؟

پاسخ

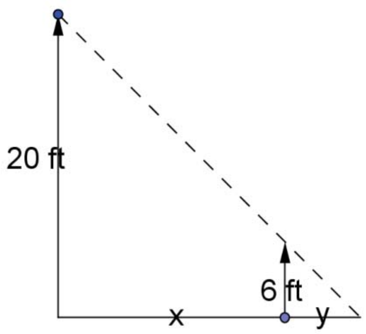


Figure E

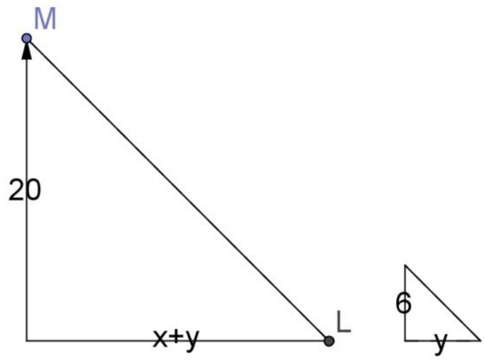


Figure F

در هر لحظه ، فرض می کنیم فاصله بین افشین و تیر چراغ x و طول سایه اش y باشد. شکل E می خواهیم مقدار زیر را پیدا کنیم.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}$$

در رابطه بالا t_0 لحظه ای است که $x = ۲۴$ است. بر توجه به مثلث های متشابه در شکل F داریم.

$$\frac{x+y}{۲۰} = \frac{y}{۶}$$

پس

$$۶x + ۶y = ۲۰y \quad \text{و یا} \quad y = \frac{۳}{۷}x$$

از تساوی بالا نسبت به t مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{۳}{۷}\frac{dx}{dt}$$

چون افشین با سرعت (نرخ) ۵ فوت در ثانیه به طرف تیر چراغ می رود ، پس $\frac{dx}{dt} = -۵$ است. و لذا

$$\frac{dy}{dt} = \frac{۳}{۷}(-۵) = -\frac{۱۵}{۷}$$

در نتیجه سایه افشین با نرخ $\frac{۱۵}{۷}$ فوت در ثانیه در لحظه مورد سوال ، کوتاه می شود.

برای حل مسائل مربوط به این بخش ، مراحل زیر را در نظر بگیرید.
۱ – متغیر های مختلف را مشخص و نام گذاری کنید. از جمله متغیری که باید نرخش را محاسبه کنید و همچنین متغیر هایی که نرخ آنها داده شده است. ممکن است مفید باشد که شکلی رسم کنید.
۲ – یک معادله بنویسید که متغیر های مرحله اول را به هم مربوط کند.
۳ – از هر دو طرف معادله بطور ضمنی مشتق بگیرید و معادله را برای مشتقی که نرخ خواسته شده را به ما می دهد ، حل کنید.
۴ – با جایگزین کردن مقادیر متغیر ها و نرخ های آنها در رابطه مرحله سوم ، مقدار مشتق را پیدا کنید.

تمرینات ۲.۸

۱ – فرض کنید شعاع یک بالون کروی با نرخ $\frac{۱}{۲}$ اینچ در دقیقه کاهش پیدا می کند. وقتی که طول شعاع به ۴ اینچ برسد ، حجم بالون با چه سرعتی کاهش می یابد ؟

۲– فرض کنید یک گلوله برفی به صورت کروی باقی می ماند ، حتی هنگامی که شروع به ذوب شدن می کند. فرض کنید حجم چنین گلوله برفی با نرخ $\frac{dV}{dt} = -\frac{۲}{V}$ اینچ مکعب در ساعت کاهش پیدا می کند. هنگامی که شعاع به $\frac{۱}{۲}$ اینچ برسد ، با چه سرعتی شعاع در حال تغییر است؟

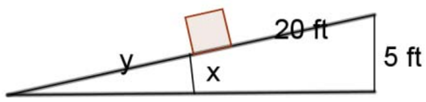
۳ – فرض کنید حجم یک بالون کروی طوری افزایش پیدا می کند که بعد از t ثانیه ، $V = ۴\sqrt{t}$ اینچ مکعب است. بعد از ۶۴ ثانیه ، شعاع با چه سرعتی در حال تغییر است؟

۴ - سقف یک اطاق چکه می کند و روی کف ، حوضچه دیره ای شکل ایجاد می کند. مساحت این حوضچه دائره ای شکل با نرخ ۳ اینچ مربع در دقیقه افزایش می یابد. هنگامی که شعاع این دائره به ۱۰ اینچ می رسد ، شعاع با چه سرعتی در حال افزایش است؟

۵ – فرض کنید انتهای بالایی نردبان مثال ۳ با نرخ یک فوت در ثانیه به طرف بالا کشیده می شود. با چه سرعتی پایین نردبان به دیوار نزدیک می شود ، هنگامی که به ۳ فوتی دیوار می رسد؟

۶- فرض کنید در مثال ۴ سطح آب با سرعت $\frac{۱}{۲}$ اینچ در ثانیه بالا می میرود. وقتی که عمق آب به ۲ اینچ برسد ، با چه سرعتی آب به درون ظرف ریخته می شود؟

۷– یک نفر جعبه ای را روی یک سطح شیب دار با سرعت ۳ فوت در ثانیه به طرف بالا هل می دهد. جعبه با چه سرعتی بالا می رود؟



Fifure G

پاسخ تمرینات ۲.۸

۱ – فرض کنید شعاع یک بالون کروی با نرخ $\frac{۱}{۲}$ اینچ در دقیقه کاهش پیدا می کند. وقتی که طول شعاع به ۴ اینچ برسد ، حجم بالون با چه سرعتی کاهش می یابد ؟

پاسخ

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = ۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt}$$

می خواهیم مقدار $\frac{dV}{dt}$ را در لحظه t_0 که $r = ۴$ است ، پیدا کنیم. چون طبق فرض مساله $\frac{dr}{dt} = -\frac{۱}{۲}$ است ، پس داریم

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = 4\pi r^2 \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = 3\pi\left(4^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -32\pi$$

پس حجم با نرخ یا به میزان $۳۲\ \pi$ اینچ مکعب در دقیقه در زمان $t = t_0$ کاهش پیدا می کند.

توجه - $\frac{dt}{dt} = -\frac{۱}{۲}$ فرض کردیم ، برای نشان دادن کاهش. اگر افزایش در نظر داشتیم ، آنرا مثبت بکار می بردیم. پاسخ هم منفی بدست آمد ، چون حجم نقصان پیدا می کرد.

۲– فرض کنید یک گلوله برفی به صورت کروی باقی می ماند ، حتی هنگامی که شروع به ذوب شدن می کند. فرض کنید حجم چنین گلوله برفی با نرخ $\frac{dV}{dt} = -\frac{۲}{V}$ اینچ مکعب در ساعت کاهش پیدا می کند.
هنگامی که شعاع به $\frac{۱}{۲}$ اینچ برسد ، با چه سرعتی شعاع در حال تغییر است؟

پاسخ

$$۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt} = -\frac{۲}{V} = -\frac{۲}{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}} = -\frac{۳}{۲\pi r^{۳}}$$

می خواهیم $\frac{dr}{dt}$ را در لحظه t_0 زمانی که $r = \frac{۱}{۲}$ است ، پیدا کنیم.

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = -\frac{3}{\left(2\pi r^3\right)\left(4\pi r^2\right)} = -\frac{3}{8\pi^2 r^5} = -\frac{3}{8\pi^2\left(\frac{1}{32}\right)} = -\frac{12}{\pi^2}$$

پس شعاع با نرخ یا میزان یا سرعت $\frac{۱۲}{\pi^{۲}}$ در ساعت کاهش پیدا می کند.

۳ – فرض کنید حجم یک بالون کروی طوری افزایش پیدا می کند که بعد از t ثانیه ، $V = ۴\sqrt{t}$ اینچ مکعب است. بعد از ۶۴ ثانیه ، شعاع با چه سرعتی در حال تغییر است؟

پاسخ

اینجا

$$۴\pi r^۲ \frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(۴\sqrt{t}) = \frac{۲}{\sqrt{t}} \qquad , \qquad t > 0$$

باید $\frac{dr}{dt}$ را وقتی که $t = ۶۴$ است ، پیدا کنیم. چون $V = ۴\sqrt{۶۴} = ۳۲$ است هنگامی که $t = ۶۴$ است ، پس در آن لحظه داریم

$$۳۲ = V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

بنا بر این

$$r^۳ = \frac{۹۶}{۴\pi} = \frac{۲۴}{\pi}$$

و لذا وقتی که $t = ۶۴$ است

$$r = \left(\frac{۲۴}{\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

است. پس

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{t=64} = \frac{2}{\sqrt{t}}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{2}{\sqrt{64}}\frac{1}{4\pi\left(\frac{24}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{64\pi^{\frac{1}{3}}3^{\frac{2}{3}}}$$

پس بعد از ۶۴ ثانیه شعاع با نرخ $\frac{۱}{۶۴\pi^{\frac{۱}{۳}}۳^{\frac{۲}{۳}}}$ اینچ در ثانیه افزایش می یابد.

۴ ـ سقف یک اطاق چکه می کند و روی کف ، حوضچه دیره ای شکل ایجاد می کند. مساحت این حوضچه دائره ای شکل با نرخ ۳ اینچ مربع در دقیقه افزایش می یابد. هنگامی که شعاع این دائره به ۱۰ اینچ می رسد ، شعاع با چه سرعتی در حال افزایش است؟

پاسخ

فرض می کنیم A نماد مساحت و r نماد شعاع حوضچه دائره ای شکل باشد. پس $A = \pi r^۲$ است. و

$$\frac{dA}{dt} = ۲\pi\ r\frac{dr}{dt}$$

است. باید $\frac{dr}{dt}$ را در لحظه ای که $r=۱۰$ است ، پیدا کنیم. چون طبق فرض مساله $\frac{dA}{dt}=۳$ است. داریم

$$3=\frac{dA}{dt}\Big|_{t=t_0}=2\pi r\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_0}=2\pi(10)\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

پس

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{t=t_0}=\frac{3}{2\pi(10)}=\frac{3}{20\pi}$$

پس وقتی که $t=t_0$ است ، شعاع با نرخ $\frac{۳}{۲۰\pi}$ اینچ در ثانیه افزایش پیدا می کند.

۵ – فرض کنید انتهای بالایی نردبان مثال ۳ با نرخ یک فوت در ثانیه به طرف بالا کشیده می شود. با چه سرعتی پایین نردبان به دیوار نزدیک می شود ، هنگامی که به ۳ فوتی دیوار می رسد؟

پاسخ

فرض می کنیم x فاصله انتهای پایینی نردبان تا دیوار باشد و y فاصله زمین تا انتهای بالایی نردبان باشد. پس

$$x^۲+y^۲=۱۳^۲$$

و

$$۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=0$$

باید $\frac{dx}{dt}$ را در لحظه t_0 که $x=۳$ است ، پیدا کنیم.

چون $x^۲+y^۲=۱۳^۲$ است پس اگر $x=۳$ باشد ، خواهیم داشت

$$y^۲=۱۳^۲-۳^۲=۱۶۰$$
$$y=\sqrt{۱۶۰}=۴\sqrt{۱۰}$$

چون طبق فرض مساله $\frac{dy}{dt}=۱$ است ، پس معادله زیر

$$۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۰$$

تبدیل می شود به

$$2(3)\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}+2\left(4\sqrt{10}\right)=0$$

پس

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}=-\frac{8\sqrt{10}}{6}=-\frac{4}{3}\sqrt{10}$$

پس پایه نردبان با نرخ $\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۰}$ در ثانیه به دیوار نزدیک می شود.

۶ - فرض کنید در مثال ۴ سطح آب با سرعت $\frac{۱}{۲}$ اینچ در ثانیه بالامی رود. وقتی که عمق آب به ۲ اینچ برسد ، با چه سرعتی آب به درون ظرف ریخته می شود؟

پاسخ

طبق فرمول (۸) در مثال ۴ داریم

$$\frac{dh}{dt}=\frac{۹}{\pi\, h^{۲}}\frac{dy}{dt}$$

است. باید $\frac{dV}{dt}$ را در لحظه t_0 که $h=۲$ است ، پیدا کنیم. چون طبق فرض مساله $\frac{dh}{dt}=\frac{۱}{۲}$ است ، پس

$$\frac{1}{2}=\frac{9}{\pi(2)^2}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

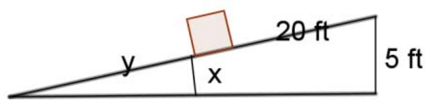
به طوری که

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}=\frac{1}{2}\frac{\pi(2)^2}{9}=\frac{2\pi}{9}$$

لذا حجم با نرخ $\frac{۲\pi}{۹}$ اینچ مکعب در ثانیه در زمان t_0 افزایش می یابد. یا به عبارت دیگر با این سرعت آب به درون ظرف ریخته می شود.

۷– یک نفر جعبه ای را روی یک سطح شیب دار با سرعت ۳ فوت در ثانیه به طرف بالا هل می دهد. جعبه با چه سرعتی بالا می رود؟

پاسخ



Fifure G

فرض می کنیم x فاصله انتهای جعبه تا سطح زمین و y فاصله ای که انتهائ جعبه طی کرده است. به شکل G نگاه کنید. پس بر اساس مثلث های متشابه داریم

$$\frac{x}{۵}=\frac{y}{۲۰}$$

و یا

$$x = \frac{۱}{۴}y$$

چون طبق فرض مساله $\frac{dy}{dt} = ۳$ است , پس

$$\frac{dx}{dt} = \frac{۱}{۴}\frac{dy}{dt} = \frac{۱}{۴}(۳) = \frac{۳}{۴}$$

لذا انتهای جعبه با سرعت $\frac{۳}{۴}$ فوت در ثانیه به طرف بالا می لغزد.

۲.۹ ـپیوستگی و مشتق پذیری توابع معکوس
Continuity and Differentiability of Inverse Functions

لازم است برای یاد آوری کمی به عقب بر گردیم و توابع معکوس و یا وارون را تعریف کنیم و خواص آنها را بر رسی کنیم.

دو تابع f و g را وارون یک دیگر و یا معکوس یک دیگر می نامیم ، اگر داشته باشیم

$$f(x) = y \quad iff \quad g(y) = x$$

در عبارت بالا iff بکار بردیم .این اصطلاح در زبان ریاضی یعنی فقط و فقط ، یا شرط لازم و کافی

تعریف تابع معکوس Definition of Inverse Function

اگر f یک تابع باشد ، پس f یک وارون یا معکوس دارد ، به شرطی که یک تابع مانند g وجود داشته باشد ، به طوری که دامنه g برد f باشد و

$$f(x) = y \quad iff \quad g(y) = x \quad (۱)$$

برای تمام x ها در دامنه f و تمام y ها در برد f

اگر تابعی معکوس داشته باشد ، آن معکوس خود یک تابع است و معکوس هر تابع منحصر به فرد است.
معکوس تابع $f(x)$ را با نماد $f^{-۱}(x)$ نشان می دهیم.توجه داشته باشید که نماد $f^{-۱}$ به معنی f به توان -۱ نیست. نماد $f^{-۱}$ را می خوانیم **معکوس یا وارون** f

احتیاط - $f^{-۱}(x)$ هم با $[f(x)]^{-۱}$ فرق دارد. گفتیم که نماد $f^{-۱}(x)$ یعنی معکوس $f(x)$ اما $[f(x)]^{-۱} = \frac{۱}{f(x)}$ اینجا -۱ همان نماد توان -۱ است.

قضیه خواص توابع معکوس Properties of Inverses Theorem

اگر f معکوس داشته باشد ، پس $f^{-۱}$ و f دارای خواص زیر است.

الف) $\left(f^{-۱}\right)^{-۱} = f$

ب) $f^{-۱}(f(x)) = x$ است برای تمام x ها در دامنه f

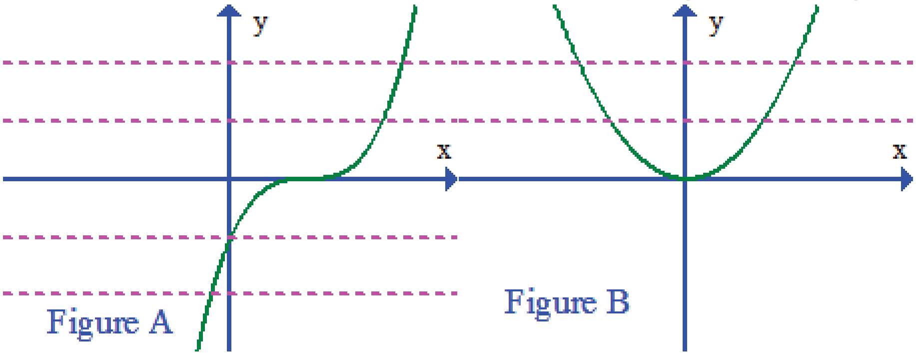
ج) $f\left(f^{-۱}(y)\right) = y$ است برای تمام y ها در برد f

اثبات قضیه بالا را به عهده شما می گذاریم. چون هدف ما فقط مروری بر جبر است تا بتوانیم مشتق توابع معکوس را بهتر درک کنیم.

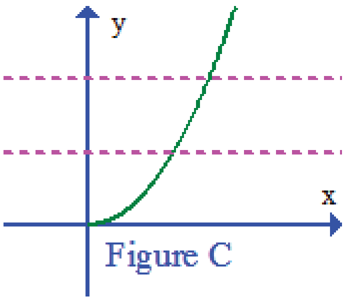
تابع f دارای یک تابع معکوس است اگر فقط و فقط برای دو عدد $x_۱ \neq x_۲$ در دامنه f داشته باشیم

$$f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

شرط بالا را می توان این گونه تصور کرد ، f معکوس دارد اگر هر خط افقی نمودار f را فقط در یک نقطه قطع کند. تست خط افقی را بخاطر می اورید؟



در شکل A تابع ، معکوس دارد اما در شکل B تابع ، معکوس ندارد. اما اگر دامنه تابع در شکل B را مثلا به $(0,\infty)$ و یا به $(-\infty,0)$ محدود کنیم ، انوقت شرط تست خط افقی را دارا است و لذا معکوس دارد.شکل C



قضیه –هر تابع که مطلقا صعودی و یا مطلقا نزولی باشد ، معکوس دارد.

قضیه –یک تابع مطلقا صعودی است و در نتیجه معکوس دارد ، اگر $f'(x)\geq 0$ باشد برای کلیه x ها در دامنه اش.
همین موضوع در مورد مطلقا نزولی یک تابع صدق می کنید اگر $f'(x)\leq 0$ باشد. این قضیه را اجملا تا همین جا داشته باشید ، در آینده نه چندان دور مفصل تر بحث خواهیم کرد.

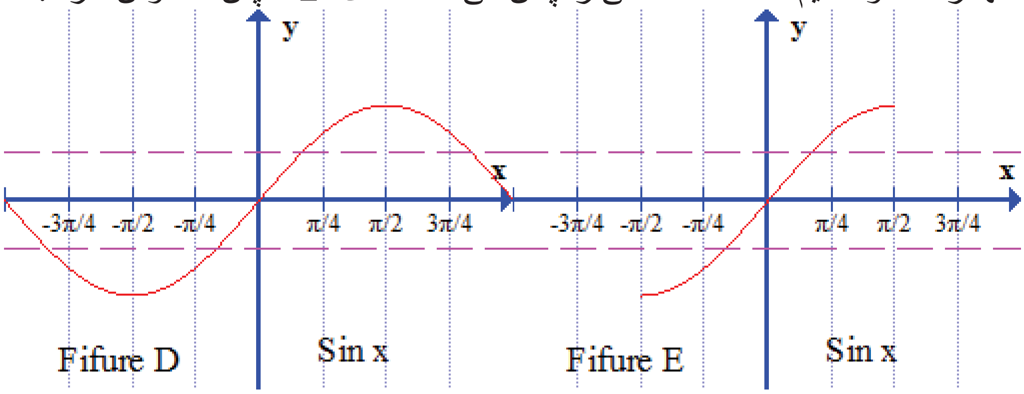
توابع زیر در حالت های ذکر شده ، معکوس دارند .

$f(x)=۳x-۲$ زیرا $f'(x)=۳>0$ (۲)

$f(x)=۱-۲x^{۳}$ زیرا $f'(x)=-۶x^{۲}\leq 0$ (۳)

$f(x)=x^{۷}+۸x^{۳}+۴x-۲$ زیرا $f'(x)=۷x^{۶}+۲۴x^{۲}+۴>0$ (۴)

میدانید توابع sin و cos شرایط تست خط افقی را ندارند. پس نمی توانند ، معکوس داشته باشند شکل D ، اما اگر دامنه آنها را محدود کنیم ، تست خط افقی را پاس می کنند شکل E ، پس معکوس دارند.



$f(x) = \sin x$ برای $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ زیرا $f'(x) = \cos x > 0$ برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (۵)

$f(x) = \ln x$ زیرا $f'(x) = \frac{۱}{x} > 0$ برای $x > 0$ (۶)

به خاطر دارید که $\ln x > 0$ است برای تمام x ها در دامنه اش.

طریقه ایجاد معکوس یک تابع

برای نوشتن معکوس توابعی مانند (۲) و (۳) مراحل زیر را انجام می دهیم.

۱ – بجای $f(x)$ بنویسید y

۲- x را بر حسب y حل کنید.

۳ – جای x و y را در معادله بدست آمده در مرحله دوم عوض کنید.

۴ – بجای y بنویسید $f^{-۱}(x)$

مثال ۱– اگر $f(x) = ۳x - ۲$ باشد ، یک فرمول برای معکوس f بنویسید.

پاسخ

$$y = ۳x - ۲$$

$$x = \frac{y + ۲}{۳}$$

$$y = \frac{x + ۲}{۳}$$

$$f^{-۱}(x) = \frac{x + ۲}{۳}$$

مثال ۲ ـ اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۳$ باشد ، یک فرمول برای معکوس f بنویسید.

پاسخ

$$y = ۱ - ۲x^۳$$

$$x^۳ = \frac{۱ - y}{۲}$$

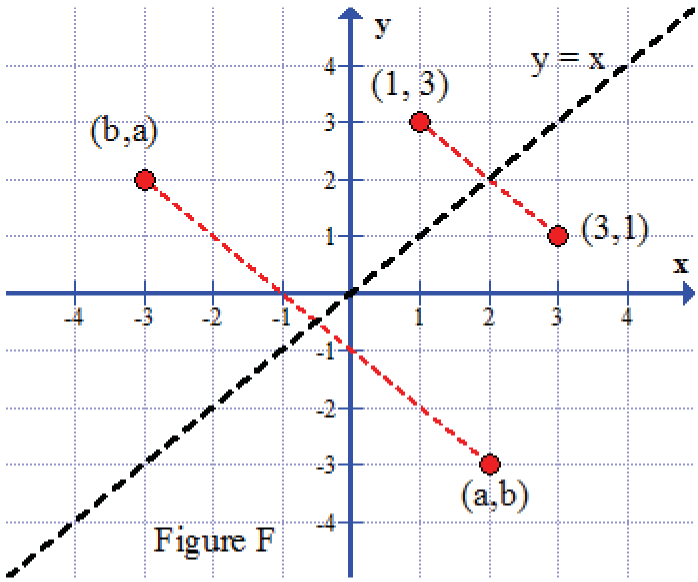
$$x = \sqrt[۳]{\frac{۱ - y}{۲}}$$

$$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{\frac{۱ - y}{۲}}$$

همیشه پیدا کردن یک فرمول ساده برای معکوس یک تابع ممکن نیست. برای توابع مانند ۵ و ۶ در بخش های بعدی بحث خواهیم کرد. برو توابع مانند شماره ۴ فعلا بی جواب خواهد بود.

نمودار معکوس توابع Graphs of Inverses

اگر $(۱,۳)$ روی نمودار f باشد ، پس $(۳,۱)$ باید روی نمودار $f^{-۱}$ باشد. و بطور کلی (a,b) روی نمودار f است ، اگر فقط و فقط (b,a) روی نمودار معکوس باشد. نمودار $f^{-۱}$ انعکاس نمودار f است روی خط $y = x$ این خط مانند آینه عمل می کند. شکل F



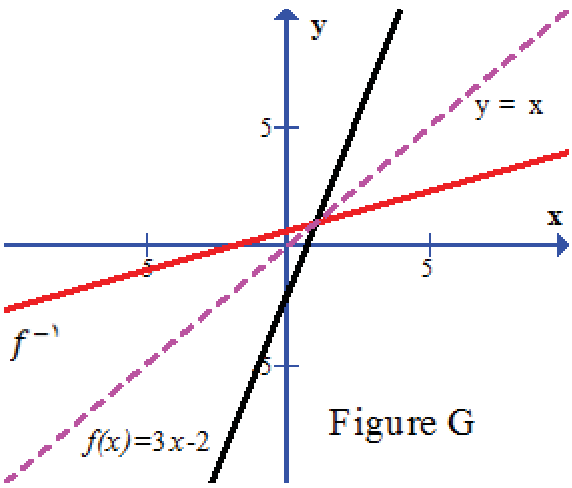
مثال ۳– برای هر یک از توابع ، نمودار f و $f^{-۱}$ را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

$$a)\quad f(x) = ۳x - ۲$$
$$b)\quad f(x) = ۱ - ۲x^{۳}$$
$$c)\quad f(x) = \sin x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

پاسخ

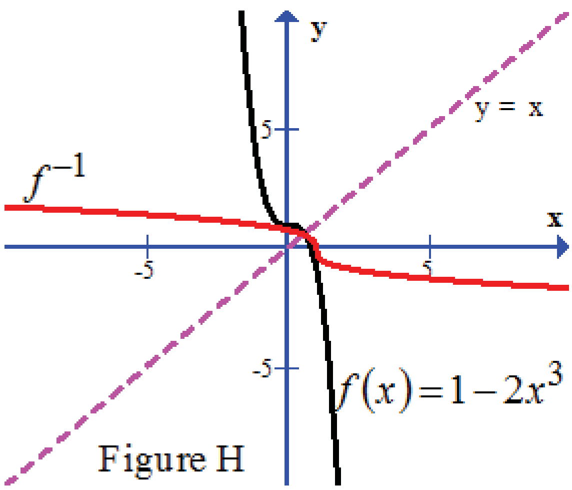
(a)

شکل G

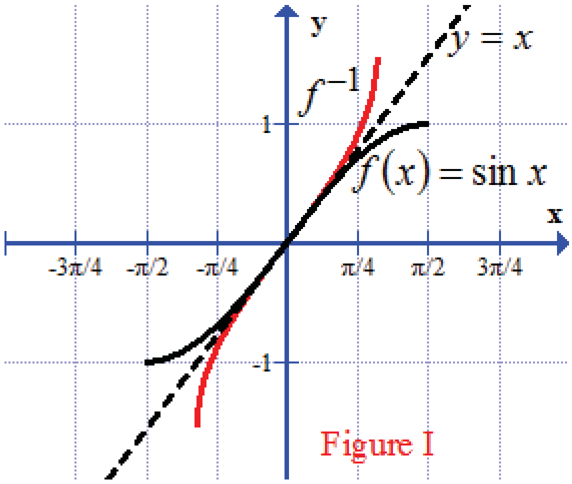


(b)

شکل H



(c)
شکل I



حالا می توانیم در مورد پیوستگی و مشتق پذیری توابع معکوس صحبت کنیم. در فرمول شماره (۶) بالا دیدیم که $\ln x$ یک معکوس دارد. گر چه هنوز فرمولی برای معکوس $\ln x$ نداریم ، اما می توان از پیوسته بودن و مشتق پذیری $\ln x$ استفاده کرد و نتیجه گرفت که معکوس آن هم پیوسته و مشتق پذیر است.

بطور کلی می توان ثابت کرد که معکوس یک تابع پیوسته ، پیوسته است و معکوس یک تابع مشتق پذیر ، مشتق پذیر است.

قضیه پیوستگی توابع معکوس Continuity of Inverse Functions Theorem

فرض کنید f در بازه I پیوسته باشد ، و فرض کنید مقادیری که بوسیله f به نقاط I اختصاص داده می شوند ، تشکیل بازه J بدهند. اگر f معکوس داشته باشد ، پس $f^{-۱}$ در J پیوسته است.

قضیه مشتق پذیری توابع معکوس Differentiability of Inverse functions Theorem

فرض کنید f در بازه باز I که شامل a است ، پیوسته بوده و معکوس داشته باشد. و همچنین فرض کنید $f'(a)$ وجود داشته باشد ، و $f'(a) \neq 0$ و $f(a) = c$ باشد. پس $\left(f^{-۱}\right)'(c)$ وجود دارد و

$$\left(f^{-۱}\right)'(c) = \frac{۱}{f'(a)} \qquad (۷)$$

فرمول (۷) را می توان به صورت زیر هم نوشت.

$$\left(f^{-۱}\right)'(c)=\frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(c)\right)} \qquad (۸)$$

توجه- c در دامنه $f^{-۱}$ و در برد f است .

اثبات – با استفاده از این حقیقت که $f^{-۱}(c)=a$ و تعریف مشتق داریم.

$$\left(f^{-۱}\right)'(c)=\lim_{y\to c}\frac{f^{-۱}(y)-f^{-۱}(c)}{y-c}=\lim_{y\to c}\frac{f^{-۱}(y)-a}{f\left(f^{-۱}(y)\right)-f(a)} \qquad (۸)$$

در صورتی که عبارت آخری وجود داشته باشد. نشان می دهیم که وجود دارد و همچنین مقدار آنرا پیدا می کنیم.

اولا توجه دارید که $f^{-۱}$ در c پیوسته است. طبق قضیه پیوستگی توابع معکوس. پس

$$\lim_{y\to c}f^{-۱}(y)=f^{-۱}(c)=a$$

بطوری که اگر $x=f^{-۱}(y)$ باشد ، پس x به a نزدیک می شود ، هنگامی که y به c نزدیک می شود. بعلاوه ، این حقیقت که $f^{-۱}$ یک معکوس دارد و $f^{-۱}(c)=a$ داریم که $f^{-۱}(y)\neq c$ اگر $y\neq c$ باشد. در نتیجه فرمول (۸) و قضیه جانشینی با جانشین کردن x بجای $f^{-۱}(y)$ داریم

$$f^{-۱}(c)=\lim_{y\to c}\frac{f^{-۱}(y)-a}{f\left(f^{-۱}(y)\right)-f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

$$=\frac{۱}{\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{۱}{f'(a)}$$

مثال ۴– اگر $f(x)=x^{۷}+۸x^{۳}+۴x-۲$ باشد ، $\left(f^{-۱}\right)'(-۲)$ را پیدا کنید.

پاسخ

برای استفاده از فرمول شماره (۷) باید ابتدا مقدار a را پیدا کنیم ، بطوری که $f(a)=-۲$ باشد. با توجه به تابع داده شده ، ملاحظه می کنید که $f(0)=-۲$ ، پس $a=0$ است. چون $f'(x)=۷x^{۶}+۲۴x^{۲}+۴$ پس $f'(0)=۴$ و لذا

$$\left(f^{-۱}\right)'(-۲)=\frac{۱}{f'(0)}=\frac{۱}{۴}$$

گرچه در مثال ۴ توانستیم $\left(f^{-۱}\right)'(-۲)$ را پیدا کنیم ، اما بطور کلی پیدا کردن مقدار عددی $\left(f^{-۱}\right)'(c)$ آنقدر ها هم آسان نیست. مثلا پیدا کردن $\left(f^{-۱}\right)'(0)$ تقریبا غیر ممکن است.

بطور کلی برای این که فرمول شماره (۷) را بکار ببریم ، تا یک مقدار عددی برای $\left(f^{-۱}\right)'(c)$ پیدا کنیم ، باید قادر باشیم یک مقدار عددی برای a پیدا کنیم که $f(a)=c$ باشد.
فرمول شماره (۷) با نماد لا یب نیز به صورت زیر است بدست می آوریم .
فرض کنید $y=f(x)$ و این که f یک معکوس دارد ، بطوری که $x=f^{-۱}(y)$ پس
$\frac{dy}{dx}$ مشتق f است ، اما $\frac{dx}{dy}$ مشتق $f^{-۱}$
است. پس

$$\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{\frac{dy}{dx}} \qquad (۹)$$

قضیه مشتق های توابع معکوس Derivatives of Inverse Functions
اگر f مشتق پذیر باشد و g معکوس آن ، پس g مشتق پذیر است و

$$g'(x)=\frac{۱}{f'\big(g(x)\big)} \qquad (۱۰)$$

فرمول شماره (۱۰) را می توان به صورت زیر هم نوشت.

$$\left(f^{-۱}\right)'(x)=\frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(x)\right)} \qquad (۱۱)$$

اثبات
اگر f و g توابع معکوس باشند و x در دامنه g پس داریم

$$f\big(g(x)\big)=x$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای از دو طرف معادله بالا مشتق می گیریم.

$$f'\big(g(x)\big)g'(x)=۱$$

معادله را برای $g'(x)$ حل می کنیم.

$$g'(x)=\frac{۱}{f'\big(g(x)\big)}$$

مثال ۵ ــ مشتق معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \frac{۱}{۲}x - ۱$$

پاسخ

<u>روش اول</u>

ابتدا معکوس تابع را پید ا می کنیم.

$$y = \frac{۱}{۲}x - ۱$$

برای x حل می کنیم.

$$x = ۲y + ۲$$

جای x و y را عوض می کنیم.

$$y = ۲x + ۲$$

تابع بدست آمده بالا ، معکوس تابع اولیه است. از این تابع مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx} = ۲$$

این روش هنگامی قابل استفاده است که بتوانیم معکوس تابع داده شده را **صریحا Explicitly** پیدا کنیم.

<u>روش دوم</u>

میدانیم که

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = x$$

فرض می کنیم

$$y = f^{-۱}(x)$$

باشد. پس

$$f(y) = x$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای از دو طرف معادله بالا مشتق می گیریم.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right) = ۱$$

معادله بالا را برای $\frac{dy}{dx}$ حل می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{df}{dy}}$$

می دانیم که

$$f(x) = \frac{۱}{۲}x - ۱$$

مشتق می گیریم.

$$\frac{df}{dy} = \frac{۱}{۲}$$

جانشین می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{df}{dy}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

مثال ۶ – اگر $f(x) = x^۵ + x^۳ + x$ باشد
$(f^{-۱})'(۳)$ را پید کنید.

پاسخ

$$f(x) = x^۵ + x^۳ + x$$

$$f(۱) = ۱^۵ + ۱^۳ + ۱ = ۳$$

$$f'(x) = ۵x^۴ + ۳x^۲ + ۱ > 0 \quad \text{برای تمام } x \text{ ها}$$

$$(f^{-۱})'(۳) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۵(۱^۴) + ۳(۱^۲) + ۱} = \frac{۱}{۹}$$

مثال ۷– اگر $y = \ln x$ باشد ، $\frac{dx}{dy}$ را پیدا کنید.

پاسخ

گفتیم که $\ln x$ معکوس دارد ، و

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{۱}{x}$$

پس

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x$$

مثال ۸– اگر $y = x^۵ + ۲x$ باشد ، $\frac{dx}{dy}$ و $\frac{dx}{dy}$ برای $y = -۳$ پیدا کنید.

پاسخ

تابع y معکوس دارد زیرا $\frac{dy}{dx} = ۵x^۴ + ۲ > 0$ است. بخاطر بیاورید که گفتیم اگر مشتق یک تابع بزرگ تر از صفر باشد آن تابع مطلقا صعودی است و در نتیجه معکوس دارد. پس داریم.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{۵x^۲ + ۲}$$

چون $y = x^5 + 2x$ است ، پس اگر $x = -1$ باشد ، $y = -3$ است. لذا داریم.

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=-3} = \frac{1}{5(-1)^4 + 2} = \frac{1}{7}$$

تمرینات ۲.۹

در تمرینات ۴ – ۱ مطلوب است $\left(f^{-1}\right)'(c)$

۱) $f(x) = x^3 + 7; c = 6$

۲) $f(x) = x + \sin x; c = 0$

۳) $f(x) = 4\ln x; c = 0$

۴) $f(t) = 3t - \left(\frac{1}{t^3}\right)$ برای $t < 0; c = -2$

در تمرینات ۷ – ۵ مطلوب است $\frac{dx}{dy}$

۵) $y = x^9 + 7x$

۶) $y = \ln\left(x^3 + 1\right)$

۷) $y = \sin x$ برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۸ – اگر $x \geq 0$ برای $f(x) = x^2$ باشد ، نشان دهید که شیب نمودار های f و f^{-1} در نقاط $(a > 0)$ ، $\left(a^2, a\right)$ و $\left(a, a^2\right)$ وارون یک دیگر هستند. یاد آوری x و $\frac{1}{x}$ یا ۲ و $\frac{1}{2}$ وارون یک دیگر هستند.

پاسخ تمرینات ۲.۹

در تمرینات ۴ – ۱ مطلوب است $\left(f^{-۱}\right)'(c)$

۱) $f(x) = x^{۳} + ۷; c = ۶$

پاسخ

روش اول از فرمول شماره (۷) استفاده می کنیم. باید a را طوری انتخاب کنیم که $f(a) = ۶$ بیشد.

با توجه به تابع اصلی ملاحظه می کنید که $f(-۱) = ۶$. چون $f'(x) = ۳x^{۲}$ پس $f'(-۱) = ۳$

در نتیجه

$$\left(f^{-۱}\right)'(c) = \frac{۱}{f'(a)} \qquad (۷)$$

$$\left(f^{-۱}\right)'(۶) = \frac{۱}{f'(-۱)} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم –استفاده از فرمول شماره (۸) یعنی

$$\left(f^{=۱}\right)'(c) = \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(c)\right)}$$

ابتدا باید معکوس تابع اصلی را پیدا کنیم.

$$f(x) = x^{۳} + ۷$$
$$y = x^{۳} + ۷$$
$$x^{۳} = y - ۷$$
$$x = \sqrt[۳]{y - ۷}$$
$$y = \sqrt[۳]{x - ۷}$$
$$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x - ۷} = (x - ۷)^{\frac{۱}{۳}}$$

مشتق تابع معکوس را پیدا می کنیم.

$$\left(f^{-۱}\right)'(x) = \frac{۱}{۳}(x - ۷)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\left(f^{-۱}\right)'(۶) = \frac{۱}{۳}(۶ - ۷)^{\frac{-۲}{۳}} = \frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{(-۱)^{۲}} = \frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۱} = \frac{۱}{۳}$$

۲) $f(x) = x + \sin x; c = 0$

$$f(0) = 0$$

چون $f'(x) = ۱ + \cos x$ پس $f'(0) = ۱ + \cos 0 = ۱ + ۱ = ۲$ و لذا طبق فرمول شماره (۷) داریم.

$$\left(f^{-۱}\right)'(0) = \frac{۱}{f'(0)} = \frac{۱}{۲}$$

۳) $f(x) = ۴\ln x; c = 0$

$$f(۱) = ۴\ln ۱ = ۴(0) = 0$$

چون

$$f'(x) = ۴\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۴}{x}$$

پس

$$f'(۱) = ۴$$

لذا طبق فرمول شماره (۷) داریم.

$$\left(f^{-۱}\right)'(c) = \frac{۱}{f'(a)}$$

$$\left(f^{-۱}\right)'(0) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۴}$$

۴) $f(t) = ۳t - \left(\frac{۱}{t^۳}\right)$ برای $t < 0; c = -۲$

$$f(-۱) = ۳(-۱) - \left(\frac{۱}{(-۱)^۳}\right) = -۳ + ۱ = -۲$$

چون

$$f'(t) = ۳ + \frac{۳}{t^۴}$$

پس داریم.

$$f'(-۱) = ۶$$

و لذا طبق فرمول (۷) داریم.

$$\left(f^{-۱}\right)'(-۲) = \frac{۱}{f'(-۱)} = \frac{۱}{۶}$$

در تمرینات ۷ – ۵ مطلوب است $\frac{dx}{dy}$

۵) $y = x^۹ + ۷x$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{۹x^۸ + ۷}$$

۶) $y = \ln\left(x^۳ + ۱\right)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{\frac{۱}{x^۳ + ۱} * ۳x^۲} = \frac{x^۳ + ۱}{۳x^۲}$$

۷) $y = \sin x$ برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{\cos x} \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

۸ – اگر $x \geq 0$ برای $f(x) = x^۲$ باشد ، نشان دهید که شیب نمودار های f و $f^{-۱}$ در نقاط $(a > 0)$ ، $\left(a^۲, a\right)$ و $\left(a, a^۲\right)$ وارون یک دیگر هستند. . یاد آوری x و $\frac{۱}{x}$ یا ۲ و $\frac{۱}{۲}$ وارون یک دیگر هستند.

پاسخ

$$f^{-۱}(x) = \sqrt{x} \quad \text{برای} \quad x \geq 0$$

مشتق f و $f^{-۱}$ مطابق زیر هستند.

$$f'(x) = ۲x \quad , \quad \left(f^{-۱}\right)'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

در نقطه $\left(a, a^۲\right)$ شیب نمودار f عبارت است از $f'(a) = ۲a$

در نقطه $\left(a^۲, a\right)$ شیب نمودار $f^{-۱}$ عبارت است از $\left(f^{-۱}\right)'\left(a^۲\right) = \frac{۱}{۲\sqrt{a^۲}} = \frac{۱}{۲a}$

۲.۱۰ –مشتق توابع نمایی و لگاریتمی
Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

یاد آوری –مطالب زیر را از **کتاب کامل جبر** به همین قلم به خاطر بیاورید.

$f(x)=x^n$ تابع توانی است. x متغیر است و n یک عدد ثابت. حال اگر داشته باشیم

$f(x)=b^x$ یک تابع مجهول القوه و یا تابع توانی داریم. اینجا پایه یعنی b یک عدد ثابت است و توان که x است، متغیر.

اگر بجای b عدد e بگذاریم، خواهیم داشت $f(x)=e^x$

همچنین در مورد توابع لگاریتمی صحبت کردیم $f(x)=\log_b x$ اگر بجای پایه b بگذاریم e آنوقت لگاریتم طبیعی خواهیم داشت یعنی $f(x)=\log_e x$ که برای اختصار می نویسیم $f(x)=\ln x$

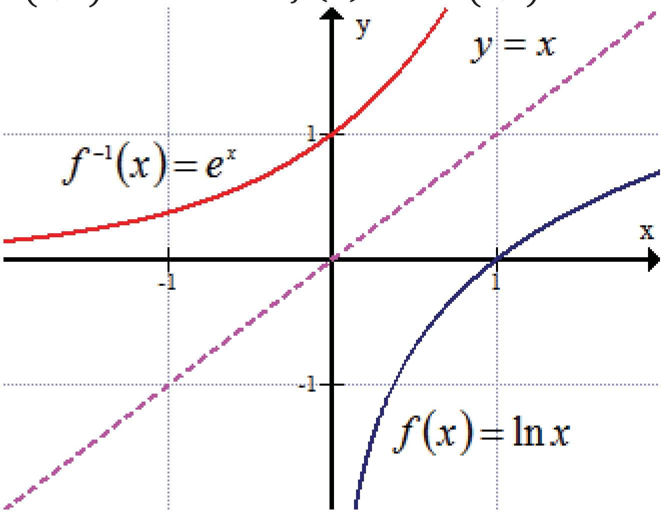
دو تابع $\ln x$ و e^x معکوس یکدیگر هستند. زیرا طبق تعریف لگاریتم، داریم

$y=\log_a x$ اگر فقط و فقط $x=a^y$

فرمول های زیر را هم بخاطر داشته باشد.

$$e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸$$
$$\ln e=۱$$
$$y=\log_a x \quad \text{یعنی} \quad a^y=x$$
$$\log_a a^x=x$$
$$\log_a ۱=0$$
$$\log x=\log_{۱0} x$$
$$a^{\log_a x}=x$$
$$\log_a a=۱$$
$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right)=\log_a A-\log_a B$$
$$\log_a A^C=C\log_a A$$
$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}=\frac{\ln x}{\ln b}$$
$$\ln x=\log_e x$$
$$a^{b+c}=a^b a^c$$
$$a^{=b}=\frac{۱}{a^b}$$
$$(a^b)^c=a^{bc}$$

همان طور که در نمودار زیر ملاحظه می‌کنید $f(x) = \ln x$ که با رنگ آبی رسم شده یک تابع صعودی است و لذا معکوس دارد. معکوس آن هم $f^{-۱}(x) = e^x = \exp x$ است که با رنگ قرمز نشان داده شده است. نقطه $(۱,۰)$ روی $f(x)$ است و نقطه $(۰,۱)$ روی $f^{-۱}(x)$



گفتیم که e^x تابع نمای طبیعی است و معکوس لگاریتم طبیعی $\ln x$ است. پس

برای تمام اعداد x و برای $y > 0$, $x = \ln y$ اگر فقط و فقط $e^x = y$

و

$e^{\ln x} = x$ ، $x > 0$ (۱)

$\ln e^x = x$ برای تمام x ها (۲)

تعریف Definition

برای هر عددی مانند $a > 0$ و هر عددی مانند r داریم ،

$a^r = e^{r \ln a}$

در عبارت a^r ، عدد a پایه و r توان و یا قوه است.

$a^0 = ۱$ $a^۱ = a$ (۳)

$\ln a^r = r \ln a$ (۴)

قضیه قانون لگاریتم ها Law of Logarithms Theorem

برای کلیه اعداد $b > 0$ و $c > 0$

$$\ln bc = \ln b + \ln c \qquad (۵)$$

اثبات

برای $b > 0$ و $x > 0$ فرض می کنیم

$$g(x) = \ln bx$$

باشد. بر اساس قاعده زنجیره ای داریم.

$$g'(x) = \left(\frac{۱}{bx}\right) b = \frac{۱}{x}$$

پس g و $\ln x$ یک مشتق دارند و فقط یک اختلاف در عدد ثابت c دارند. یعنی

$$\ln bx = \ln x + c$$

اگر $x = ۱$ قرار دهیم و می دانیم $\ln ۱ = 0$ است ، پس داریم

$$\ln b = \ln ۱ + c = c$$

در نتیجه

$$\ln bx = \ln x + \ln b$$

اگر $x = c$ قرار دهیم ، قضیه ثابت شده است.

قضیه قانون توان ها Law of Exponents Theorem

برای کلیه اعداد b و c داریم

$$e^{b+c} = e^b e^c \qquad (۶)$$

اثبات

فرض می کنیم $u = e^b$ و $v = e^c$ باشد ، پس $\ln u = b$ و $\ln v = c$ است. در نتیجه طبق قانون لگاریتم ها داریم .

$$\ln uv = \ln u + \ln v = b + c$$

در نتیجه بر اساس فرمول (۵) داریم.

$$e^{b+c} = e^b e^c$$

اگر داشته باشیم $c = -b$ قضیه قانون توان ها می شود.

$$\boldsymbol{e^{b-b} = e^b e^{-b}}$$

چون $e^{b-b} = e^0 = ۱$ پس $۱ = e^b e^{-b}$ و در نتیجه

$$e^{-b} = \frac{۱}{e^b} \qquad (۷)$$

با توجه به این حقیقت که $e^x > 0$ است ، نتیجه م گیریم که نمودار e^x در $(-\infty, \infty)$ مقعر Concave و به طرف بالا است.
و چون

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad و \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad و \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \qquad (۸)$$

این نتایج ، به اضافه این حقیقت که نمودار e^x انعکاس نمودار $\ln x$ بر خط $y = x$ است ، می توانیم ، نمودار e^x را رسم کنم. به شکل بالا توجه کنید.

قضیه ـ تابع $\log_a x$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{۱}{x \ln a}$$

اثبات

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{۱}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(۱ + \frac{h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{۱}{x} * \frac{x}{h}\log_a\left(۱ + \frac{h}{x}\right)\right] = \frac{۱}{x}\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(۱ + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

$$= \frac{۱}{x}\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(۱ + \frac{h}{x}\right)^{\frac{۱}{\frac{h}{x}}}\right] = \frac{۱}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(۱ + \frac{h}{x}\right)^{\frac{۱}{\frac{h}{x}}}\right]$$

$$= \frac{۱}{x}\log_a\left[\lim_{u\to 0}(۱ + u)^{\frac{۱}{u}} = e\right] = \frac{۱}{x}\log_a e = \frac{۱}{x} * \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{۱}{x \ln a}$$

قضیه تبعی Corollary
از قضیه بالا نتیجه می گیریم که

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{۱}{x}$$

اثبات
اگر بجای $\log_a x$ بگذاریم $\log_e x$ آنوقت خواهیم داشت

$$f'(x) = \frac{۱}{x \ln e} = \frac{۱}{x}$$

زیرا $\ln e = ۱$

نتیجه کلی

$$(\log_a u)' = \frac{۱}{u \ln a} * u' \quad و \quad (\ln u)' = \frac{۱}{u} * u'$$

در فرمول بالا u خود یک تابع است.

مثال ۱

الف – اگر $f(x) = \log_۵\left(x^۲ + ۱\right)$ باشد ، پس

$$f'(x) = \left[\log_۵\left(x^۲ + ۱\right)\right]' = \frac{۱}{\left(x^۲ + ۱\right)\ln ۵} * \left(x^۲ + ۱\right)' = \frac{۲x}{\left(x^۲ + ۱\right)\ln ۵}$$

ب – اگر $f(x) = \ln(\ln x)$ باشد ، پس

$$f'(x) = [\ln(\ln x)]' = \frac{۱}{\ln x} * (\ln x)' = \frac{۱}{x \ln x}$$

ج – اگر داشته باشیم

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{۱ + x^۲}\right)$$

پس

$$f'(x) = \frac{۱}{\frac{x}{۱ + x^۲} * \ln ۱۰} * \left(\frac{۱}{۱ + x^۲}\right)' = \left\{\frac{\left(۱ + x^۲\right) * ۱}{\left(۱ + x^۲\right) * \frac{x}{۱ + x^۲} * \ln ۱۰} * \left(\frac{x}{۱ + x^۲}\right)'\right\}$$

$$= \frac{1+x^2}{x\ln 10} * \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{x\ln 10} * \frac{1*\left(1+x^2\right) - x(2x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$= \frac{1+x^2}{x\ln 10} * \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2}{x\ln 10} * \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10}$$

روش دوم

$$f'(x) = \left[\log\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right]' = \left[\log x - \log\left(1+x^2\right)\right]'$$
$$= \frac{1}{x\ln 10} - \frac{1}{\left(1+x^2\right)\ln 10} * \left(1+x^2\right)' = \frac{1}{x\ln 10} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)\ln 10}$$
$$= \frac{1+x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10} - \frac{2x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10} = \frac{1+x^2-2x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10} = \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10}$$

توجه داشته باشید که $n \in \mathbb{Z}$ ، $f(x) = x^n$ پس $f'(x) = nx^{n-1}$ و $r \in \mathbb{Q}$ ، $g(x) = x^r$ پس $g'(x) = rx^{r-1}$ اما $h(x) = a^x$ مانند f و g نیست. زیرا h یک تابع نمایی است که مشتق آن در این بخش خواهیم دید. یعنی

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

است.

امکان دارد که هم پایه و هم توان هر کدام یک تابع باشند یعنی $f(x)^{g(x)}$ باشد که در این صورت

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \quad (9)$$

قضیه

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

و اگر $a = e$ باشد ، پس

$$(e^x)' = e^x$$

اثبات اول

فرض می‌کنیم $y = a^x$ باشد ، باید ثابت کنیم $y' = a^x \ln a$ است.

$$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x = x\ln a$$

پس

$$(\ln y)' = (x \ln a)' = \ln a * (x)' = \ln a \Rightarrow \frac{۱}{y} * y' = \ln a$$

پس

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

اثبات دوم

فرض می کنیم $y = a^x$ باشد ، پس $\log_a y = x$ است. داریم

$$(\log_a y)' = x' \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{y \ln a} * y' = ۱$$

پس

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

اثبات سوم

فرض می کنیم $f(x) = \log_a x$ باشد ، پس $f^{-۱}(x) = a^x$

چون

$$\left(f^{-۱}\right)'(x) = \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(x)\right)} \quad \text{و} \quad f'(x) = (\log_a x)' = \frac{۱}{x \ln a}$$

پس داریم.

$$(a^x)' = \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(a)\right)} = \frac{۱}{\frac{۱}{a^x \ln a}} = a^x \ln a$$

نتیجه کلی

$$(a^u)' = a^u \ln a * u' \quad \text{و} \quad (e^u)' = e^u * u'$$

در فرمول بالا u خود یک تابع است.

توابعی به شکل $e^{h(x)}$ که $h(x)$ یک تابع مشتق پذیر است ، و بر اساس قاعده زنجیره ای داریم

$$\frac{d}{dx} e^{h(x)} = h'(x) e^{h(x)} \qquad (۱۰)$$

مثال ۲ ـفرض کنید $f(x) = e^{kx}$ باشد. k یک عدد ثابت است. یک فرمول برای $f'(x)$ پیدا کنید و سپس نمودار f را رسم کنید.

پاسخ

با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم.

$$f'(x) = e^{kx}(k) = ke^{kx}$$

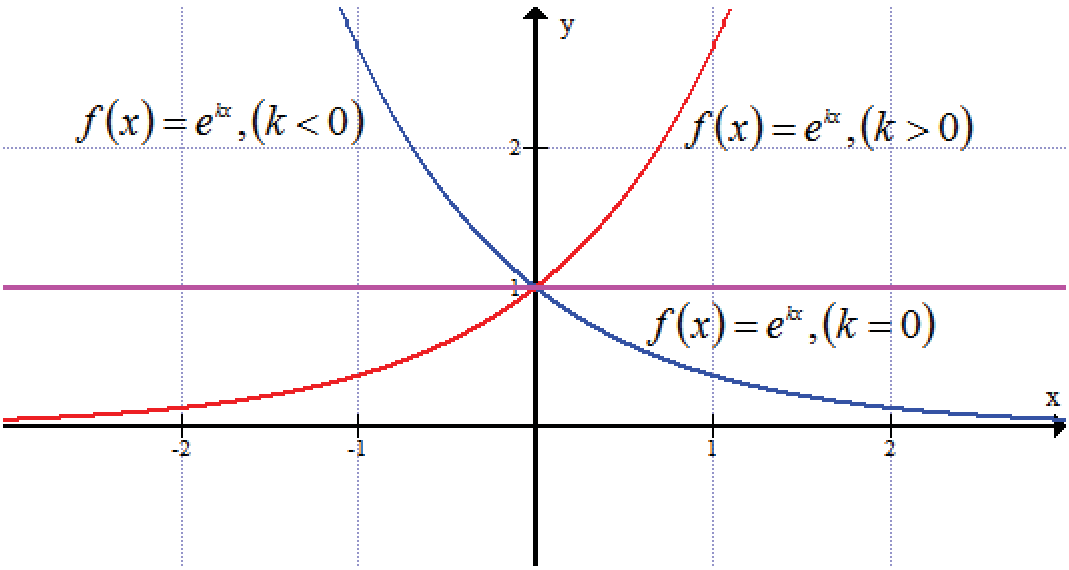
چون $e^{kx} > 0$ است ، پس $f'(x)$ یا مثبت است یا منفی و یا صفر ، بستگی به مقدار k دارد که آیا مثبت است یا منفی و یا صفر. به علاوه $f''(x) = k^{۲}e^{kx}$ است پس نمودار f مقعر به طرف بالا است مگر اینکه $k = 0$ باشد همچنین بر اساس فرمول شماره (۶) اگر $k > 0$ باشد ، پس

$$\lim_{x\to\infty} e^{kx} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$$

اما اگر $k < 0$ باشد ، پس

$$\lim_{x\to\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{kx} = \infty$$

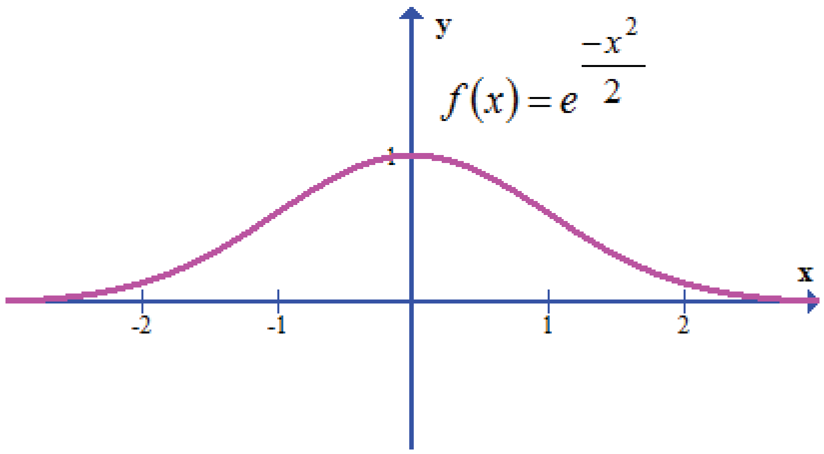
با این اطلاعات می توانیم نمودار f را ، که شکل آن بستگی به مقدار k دارد ، رسم کنیم. شکل زیر



مثال ۳ـاگر $f(x) = e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$ باشد ، یک فرمول برای $(f)'(x)$ پیدا کنید و نمودار f را رسم نمائید
پاسخ ــ با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم.

$$f'(x) = e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}\left(-\frac{۲x}{۲}\right) = -xe^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$$

چون f برای هر مقدار از x مثبت است ، پس $f'(x) > 0$ است برای $x < 0$ و $f'(x) < 0$ است برای $x > 0$
لذا f در $(-\infty, 0]$ مطلقا صعودی و در $[0,\infty)$ مطلقا نزولی است ، و $f(0) = ۱$ مقدار حد اکثر است. نمودار شکل زیر.



تمرینات ۲.۱۰

در تمرینات ۶ – ۱ عبارت ها را ساده کنید.

۱) $\log_{۹} ۳$

۲) $\log_{۴} ۴^{x}$

۳) $۷^{\log_{۷} ۲x}$

۴) $\log_{۲} ۸$

۵) $\log_{۲} ۳۲$

۶) $\log_{۳} ۸۱$

در تمرینات ۱۴ – ۷ مشتق تابع را پیدا کنید.

۷) $f(x) = ۵^{x}$

۸) $f(x) = ۳^{۵x-۷}$

۹) $g(x) = a^{x} \sin bx$

۱۰) $g(x) = x \log_{۲} x$

۱۱) $y = t^{t}$

۱۲) $y = t^{\frac{۲}{t}}$

۱۳) $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

۱۴) $f(x) = (۲x)^{\sqrt{۲}}$

۱۵ – مشخص کنید نمودار توابع $f(x) = \log_{۳} x$ و $g(x) = \log_{۲} x$ در کدام نقاط تلاقی می کنند.

۱۶ – با تغییر پایه لگاریتم و سپس استفاده از ماشین حساب ، مقدار لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

الف - $\log_۳ ۵$

ب - $\log_\pi e$

۱۷ – ثابت کنید $a^{b+c+d} = a^b a^c a^d$ است برای تمام اعداد c, d ، b و $a > 0$

در تمرینات ۲۰ – ۱۸ عبارت ها را ساده کنید.

۱۸) $\ln \sqrt{e}$

۱۹) $\ln e^e$

۲۰) $e^{\ln ۳x}$

در تمرینات ۲۵ – ۲۱ مشتق توابع داده شده را پید کنید.

۲۱) $f(x) = e^{۴x}$

۲۲) $f(x) = e^{\left(x^۵\right)}$

۲۳) $f(x) = \dfrac{e^x + ۱}{e^x - ۱}$

۲۴) $y = \tan e^{۳z}$

۲۵) $y = e^{-z} \sin az$

۲۶ – با استفاده از مشتق ضمنی $\frac{dy}{dx}$ تابع زیر را پیدا کنید.

$$x^۲ e^y = \ln xy$$

۲۷ – اگر $f(x) = e^{۳x}$ و $g(x) = ۲e^{-x}$ باشد ، مشخص کنید نمودار این دو تابع در چه نقطه ای تلاقی می کنند.

۲۸ – فرمولی برای معکوس تابع زیر پیدا کنید.

$$f(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$$

مشتق های زیر را پیدا کنید.

۲۹) $\left(۲^{\sin ۳x}\right)'$

۳۰) $\left(xe^{\sqrt{۱-x}}\right)'$

۳۱ - اگر $f(x) = x^x$ باشد ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

۳۲ – اگر $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ باشد ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۱۰

در تمرینات ۶ – ۱ عبارت ها را ساده کنید.

۱) $\log_۹ ۳$

$$\log_۹ ۳ = \log_۹\left(۹^{\frac{۱}{۳}}\right) = \frac{۱}{۳}\log_۹ ۹ = \frac{۱}{۳}(۱) = \frac{۱}{۳}$$

۲) $\log_۴ ۴^x$

$$\log_۴ ۴^x = x\log_۴ ۴ = x(۱) = x$$

۳) $۷^{\log_۷ ۲x}$

$$۷^{\log_۷ ۲x} = ۲x$$

۴) $\log_۲ ۸$

$$\log_۲ ۸ = \log_۲ ۲^۳ = ۳\log_۲ ۲ = ۳(۱) = ۳$$

۵) $\log_۲ ۳۲$

$$\log_۲ ۳۲ = \log_۲ ۲^۵ = ۵\log_۲ ۲ = ۵(۱) =$$

۶) $\log_۳ ۸۱$

$$\log_۳ ۸۱ = \log_۳ ۳^۴ = ۴\log_۳ ۳ = ۴(۱) = ۴$$

در تمرینات ۱۴ – ۷ مشتق تابع را پیدا کنید.

۷) $f(x) = ۵^x$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$$
$$\frac{d}{dx}۵^x = (\ln ۵)۵^x$$

۸) $f(x) = ۳^{۵x-۷}$

با استفاده از مشتق زنجیره ای داریم

$$f'(x) = (\ln ۳)۳^{۵x-۷}(۵) = (۵\ln ۳)۳^{۵x-۷}$$

۹) $g(x) = a^x \sin bx$

با استفاده ازقاعده مشتق ضرب دو تابع داریم

$$g'(x) = (\ln a)a^x + a^x * (\cos bx)b = (\ln a)a^x + ba^x(\cos bx)$$

۱۰) $g(x) = x\log_۲ x$

$$g(x) = x\log_۲ x = \frac{x\ln x}{\ln ۲}$$

$$g'(x) = \frac{۱(\ln x) + x * \frac{۱}{x}}{\ln ۲} = \frac{\ln x}{\ln ۲} + \frac{۱}{\ln ۲} = \log_۲ x + \frac{۱}{\ln ۲}$$

۱۱) $y = t^t$

بر اساس فرمول شماره (۹) داریم

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$
$$y = t^t = e^{tln\,t}$$

پس

$$\frac{dy}{dt} = e^{t\ln t}\left(\ln t + t * \frac{۱}{t}\right) = t^t(\ln t + ۱)$$

۱۲) $y = t^{\frac{۲}{t}}$

بر اساس فرمول شماره (۹) داریم

$$y = t^{\frac{۲}{t}} = e^{\frac{۲\ln t}{t}}$$

پس

$$\frac{dy}{dt} = e^{\frac{۲\ln t}{t}}\left(\frac{\frac{۲}{t} * t - ۲\ln t}{t^۲}\right) = t^{\frac{۲}{t}}\left(\frac{۲ - ۲\ln t}{t^۲}\right)$$

۱۳) $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

بر اسس فرمول (۹) داریم.

$$f(x) = (\cos x)^{\cos x} = e^{\cos x\ln(\cos x)}$$

پس

$$f'(x) = e^{\cos x\ln(\cos x)}\left[(-\sin x)\ln(\cos x) + \cos x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)\right]$$
$$= -\sin x(\cos x)^{\cos x}[\ln(\cos x) + ۱]$$

۱۴) $f(x) = (۲x)^{\sqrt{۲}}$

با استفاده از قاعده زنجیره ای و فرمول $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-۱}$ داریم

$$f'(x) = \sqrt{۲}\ (۲x)^{\sqrt{۲}-۱}(۲) = ۲\sqrt{۲}\,(۲x)^{\sqrt{۲}-۱}$$

۱۵ – مشخص کنید نمودار توابع $f(x) = \log_۳ x$ و $g(x) = \log_۲ x$ در کدام نقاط تلاقی می کنند.

با استفاده از تغییر پایه لگاریتم داریم.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

پس

$$f(x) = \log_۳ x = \frac{\ln x}{\ln ۳} \quad \text{و} \quad g(x) = \log_۲ x = \frac{\ln x}{\ln ۲}$$

برای پیدا کردن نقطه تلاقی ، باید دو تابع را مساوی هم قرار دهیم.

$$\frac{\ln x}{\ln ۳} = \frac{\ln x}{\ln ۲}$$

تساوی بالا هنگامی بر قرار است که $\ln x = 0$ باشد ، یعنی باید $x = ۱$ باشد ، چون میدانیم $\ln ۱ = 0$ است. لذا نمودار ها در نقطه $(۱, 0)$ تلاقی می کنند.

۱۶ – با تغییر پایه لگاریتم و سپس استفاده از ماشین حساب ، مقدار لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

الف - $\log_۳ ۵$

$$\log_۳ ۵ = \frac{\ln ۵}{\ln ۳} \approx ۱/۴۶۴۹۷$$

ب - $\log_\pi e$

$$\log_\pi e = \frac{\ln e}{\ln \pi} = \frac{۱}{\ln \pi} \approx 0.873569$$

۱۷ – ثابت کنید $a^{b+c+d} = a^b a^c a^d$ است برای تمام اعداد c, d ، b و $a > 0$

$$a^{b+c+d} = a^{(b+c)+d} = a^{b+c}a^d = a^b a^c a^d$$

در تمرینات ۲۰ – ۱۸ عبارت ها را ساده کنید.

۱۸) $\ln\sqrt{e}$

طبق فرمول شماره (۲) داریم

$$\ln\sqrt{۲} = \ln\left(e^{\frac{۱}{۲}}\right) = \frac{۱}{۲}\ln e = \frac{۱}{۲}(۱) = \frac{۱}{۲}$$

۱۹) $\ln e^e$

طبق فرمول شماره (۲) داریم

$$\ln e^e = e \ln e = e(۱) = e$$

۲۰) $e^{\ln ۳x}$

طبق فرمول شماره (۱) داریم

$$e^{\ln ۳x} = ۳x$$

در تمرینات ۲۵ – ۲۱ مشتق توابع داده شده را پید کنید.

۲۱) $f(x) = e^{۴x}$

طبق فرمول شماره ۱۰ داریم.

$$\frac{d}{dx} e^{h(x)} = h'(x) e^{h(x)}$$

$$f'(x) = ۴e^{۴x}$$

۲۲) $f(x) = e^{\left(x^۵\right)}$

طبق فرمول شماره ۱۰ داریم.

$$f'(x) = e^{\left(x^۵\right)} \left(۵x^۴\right) = ۵x^۴ e^{\left(x^۵\right)}$$

۲۳) $f(x) = \dfrac{e^x + ۱}{e^x - ۱}$

$$f'(x) = \frac{e^x\left(e^x - ۱\right) - \left(e^x + ۱\right)e^x}{\left(e^x - ۱\right)^۲} = \frac{-۲e^x}{\left(e^x - ۱\right)^۲}$$

۲۴) $y = \tan e^{۳z}$

طبق فرمول شماره ۱۰ داریم.

$$\frac{dy}{dz} = \left(sec^۲ e^{۳z}\right)\left(۳e^{۳z}\right) = ۳e^{۳z} sec^۲ e^{۳z}$$

۲۵) $y = e^{-z} \sin az$

$$\frac{dy}{dz} = (-e^{-z}) \sin az + e^{-z}(a \cos az) = e^{-z}(-\sin az + a \cos az)$$

۲۶ – با استفاده از مشتق ضمنی $\frac{dy}{dx}$ تابع زیر را پیدا کنید.

$x^{۲}e^{y} = \ln xy$

$$۲xe^{y} + x^{۲}e^{y}\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left(x^{۲}e^{y} - \frac{۱}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{x} - ۲xe^{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{۱}{x} - ۲xe^{y}}{x^{۲}e^{y} - \frac{۱}{y}} = \frac{y - ۲x^{۲}ye^{y}}{x^{۳}ye^{y} - x}$$

۲۷ – اگر $f(x) = e^{۳x}$ و $g(x) = ۲e^{-x}$ باشد ، مشخص کنید نمودار این دو تابع در چه نقطه ای تلاقی می کنند.

پاسخ

اگر نمودار ها در نقطه (x, y) تلاقی کنند ، پس باید

$$e^{۳x} = ۲e^{-x}$$

باشد. و یا

$$e^{۴x} = ۲$$

پس

$$۴x = \ln ۲$$

$$x = \frac{۱}{۴}\ln ۲$$

اگر $x = \frac{۱}{۴}\ln ۲$ باشد ، پس

$$f(x) = e^{\left(\frac{۳}{۴}\right)\ln ۲} = ۲^{\frac{۳}{۴}}$$

و

$$g(x) = ۲e^{-\left(\frac{۱}{۴}\right)\ln ۲} = ۲\left(۲^{-\frac{۱}{۴}}\right) = ۲^{\frac{۳}{۴}}$$

پس نمودار ها در نقطه $\left(\frac{۱}{۴}\ln ۲ , ۲^{\frac{۳}{۴}}\right)$ تلاقی می کنند.

۲۸ – فرمولی برای معکوس تابع زیر پیدا کنید.

$$f(x)=\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}$$

$$y=\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}$$
$$\left(e^{x}+۱\right)y=e^{x}-۱$$
$$e^{x}=\frac{۱+y}{۱-y}$$
$$x=\ln\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right)$$
$$f^{-۱}(x)=\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$$

مشتق های زیر را پیدا کنید.

۲۹) $\left(۲^{\sin ۳x}\right)'$

۳۰) $\left(xe^{\sqrt{۱-x}}\right)'$

۳۱ - اگر $f(x)=x^{x}$ باشد ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

$$f(x)=x^{x}\ \Rightarrow \ln f(x)=\ln x^{x}=x\ln x\ \Rightarrow$$
$$[\ln f(x)]'=[x\ln x]'$$

پس

$$\frac{۱}{f(x)}*f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=۱*\ln x+x*\frac{۱}{x}=\ln x+۱$$

پس

$$f'(x)=f(x)\left(\ln x+۱\right)=x^{x}\left(\ln x+۱\right)$$

۳۲ – اگر $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ باشد ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \ln(\sin x)$$

پس

$$[\ln f(x)]' = [\cos x \ln(\sin x)]'$$

پس

$$\frac{۱}{f(x)} * f'(x) = (\cos x)' \ln(\sin x) + \cos x(\ln(\sin x))'$$

$$= -\sin x \ln(\sin x) + \cos x * \frac{۱}{\sin x}(\sin x)'$$

$$= -\sin x \ln(\sin x) + \cos x * \frac{۱}{\sin x} * \cos x$$

$$= -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x$$

پس

$$f'(x) = f(x)(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x)$$

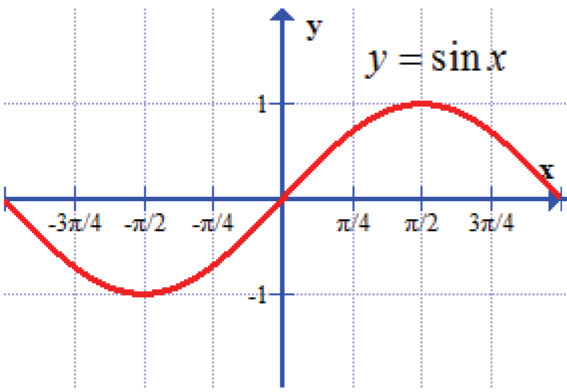
$$= (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x)$$

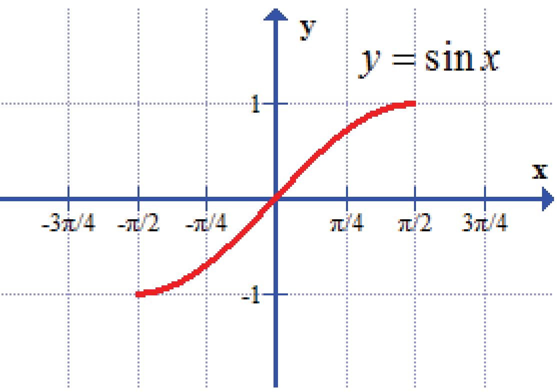
۲.۱۱ ـ معکوس توابع مثلثاتی و مشتق آنها
Inverse Trigonometric Functions and Their Derivatives

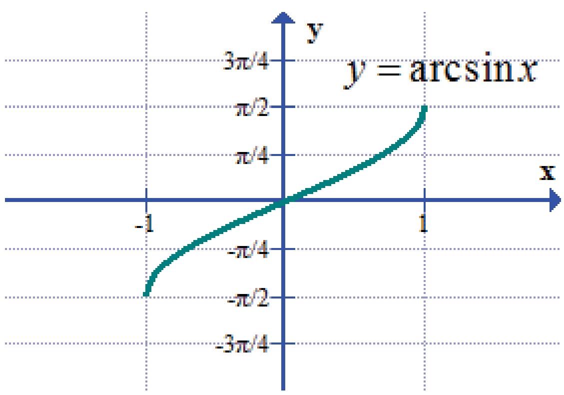
میدانیم که تابع sin معکوس ندارد ، زیرا تناوبی Periodic است. اما اگر دامنه تابع $sine$ را محدود به $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ کنیم ، آنوقت تابع بدست آمده مطلقا صعودی است. زیرا مشتق آن مثبت است بجز در $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ و لذا تابع محدود شده ، معکوس دارد که ما آنرا تابع **آرک سین Arcsine** می نامیم.
دامنه این تابع $[-۱,۱]$ است و برد آن $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ است. نمادی هم که برای این تابع بکار می بریم عبارت است از $\arcsin x$ و یا $sin^{-۱}x$ اولی را آرک سین یا آرک سینوس تلفظ کنید و دومی را معکوس سینوس .
در نتیجه

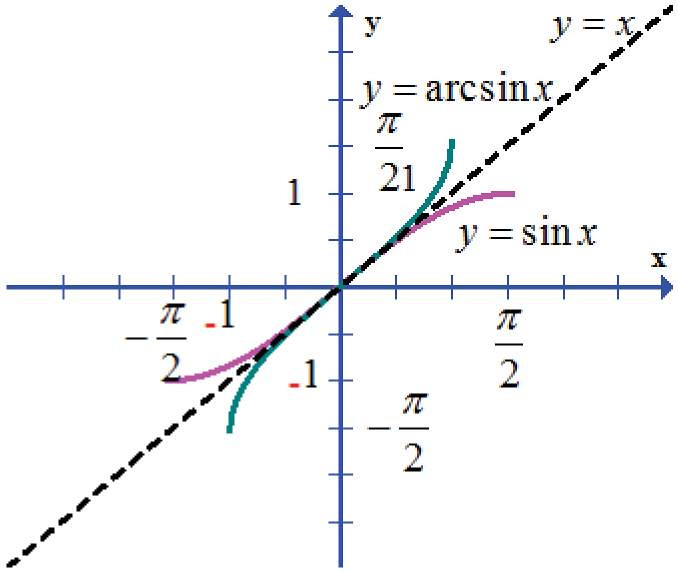
$$\arcsin x = y \quad \text{اگر فقط و فقط} \quad \sin y = x$$
$$-۱ \le x \le ۱ \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

سینوس محدود نشده		سینوس محدود شده









بنا بر این اگر $۱ \le x \le ۱-$ باشد ، پس $\arcsin x$ عدد y است که بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ می باشد که *sine* آن هم x است. مثلا

$$\arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\pi}{۴} \quad , \quad \arcsin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶} \quad , \quad \arcsin 0 = 0 \quad ، \quad \arcsin(-۱)=-\frac{\pi}{۲}$$

در شکل بالا منحنی صورتی رنگ ، نمودار تابع *sine* است و منحنی سبز رنگ ، نمودار تابع *arcsine* است.

تساوی های زیر را هم بخاطر داشته باشد.

$$\arcsin(\sin x)=x \quad \text{برای} \quad -\frac{\pi}{۲}\le x\frac{\pi}{۲}$$
$$\sin(\arcsin x)=x \quad \text{برای} \quad -۱\le x\le ۱$$

مثال ۱ ــ مقدار تابع زیر را بدست آورید.

$$\arcsin\left(\sin\frac{۵\pi}{۶}\right)$$

پاسخ ــابتدا با در نظر گرفتن این حقیقت که $\sin\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}$ است ، پس داریم

$$\arcsin\left(\sin\frac{۵\pi}{۶}\right)=\arcsin\frac{۱}{۲}$$

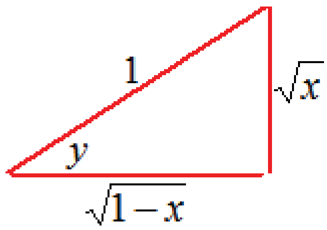
چون $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ ،پس $\arcsin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}$ است و لذا $\arcsin\left(\sin\frac{۵\pi}{۶}\right)=\frac{\pi}{۶}$ است.

نکته - از مثال ۱ چنین استنباط می شود که گر چه $\arcsin(\sin x)$ برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است ، اما تساوی $\arcsin(\sin x) = x$ تنها برای x در $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ صادق است ، زیرا این بازه برد تابع $arcsin$ است. بنا بر این باید هنگام پیدا کردن مقدار $\arcsin(\sin x)$ اگر x خارج از $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ است دقت کرد. به نمودار های بالا هم توجه کنید.

مثال ۲ - عبارت $\sec(\arcsin\sqrt{x})$ را ساده کنید.

پاسخ

برای ساده کردن عبارت داده شده مثلث قائم الزاویه زیر را رسم می کنیم



برای y در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ داریم. $\sin y = \sqrt{x}$ است ، پس $\arcsin\sqrt{x} = y$ است. چون $\sin y = \sqrt{x} > 0$ است ، پس خواهیم داشت $0 \le y < \frac{\pi}{۲}$

با استفاده از قضیه فیثاغورث در مورد مثلث بالا ، داریم

$$\sec y = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x}}$$

و لذا

$$\sec(\arcsin\sqrt{x}) = \sec y = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x}}$$

مشتق معکوس سینوس Derivative of arcsine

می خواهیم ثابت کنیم که

$$\frac{d}{dx}sin^{-۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

اثبات

می دانیم که

$$sin^{-۱}(x) = y \quad \Rightarrow \quad \sin y = x$$

از دو طرف $\sin y = x$ مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y) = ۱$$

دو طرف را به $\cos y$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\cos y}$$

با استفاده از همانی مثلثاتی داریم.

$$cos^۲(x) + sin^۲(x) = ۱$$

و یا

$$cos^۲(y) + sin^۲(y) = ۱$$

$$\cos y = \sqrt{۱ - sin^۲ y}$$

بجای $\cos y$ می گذاریم $\sqrt{۱ - sin^۲ y}$ پس داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - sin^۲ y}}$$

بر می گردیم و بجای y می گذاریم $sin^{-۱}(x)$ و بجای $\sin y$ می گذاریم x پس داریم.

$$\frac{d}{dx}sin^{-۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

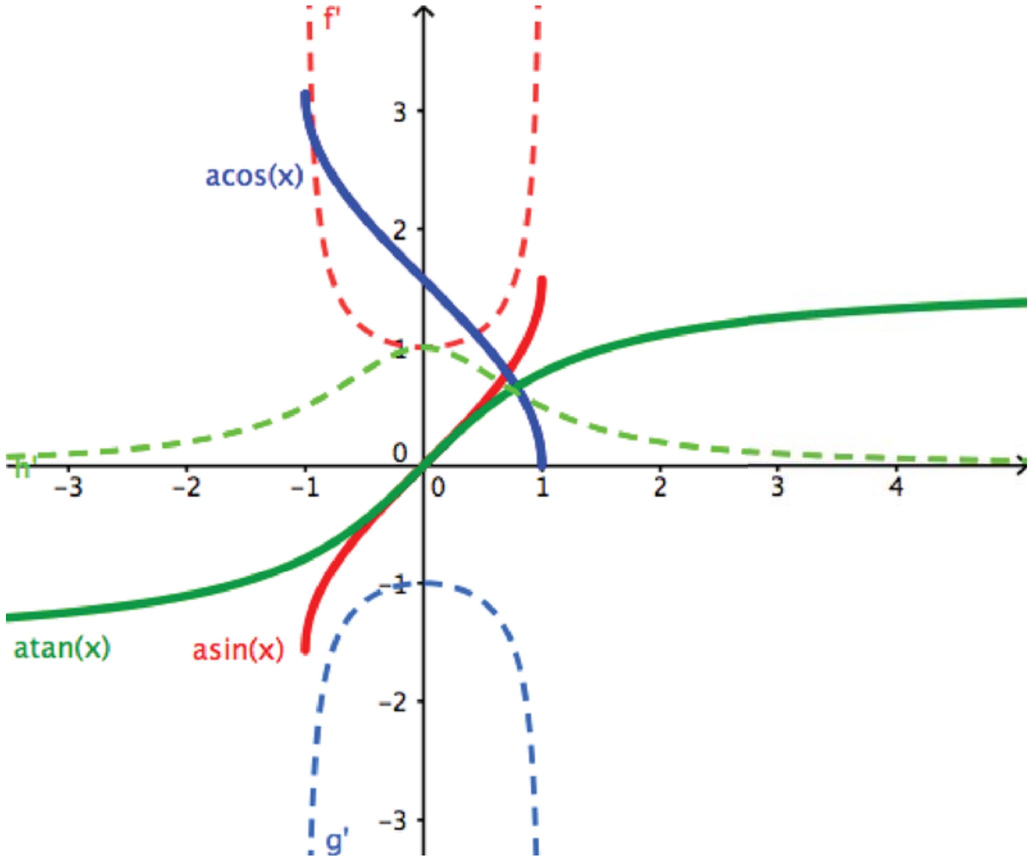
و یا

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \quad \text{برای} \quad -۱ < x < ۱ \qquad (۱)$$

مثال ۳ - اگر $f(x) = \arcsin x^{۴}$ باشد ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ - با استفاده از فرمول (۱) و قاعده زنجیره ای داریم.

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-(x^{۴})^{۲}}}\left(۴x^{۳}\right) = \frac{۴x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۸}}}$$



به همان طریق که مشتق $arcsine$ را پیدا کردیم ، می توان فرمولی برای $\arccos x$ پیدا کرد.

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \qquad (۲)$$

تابع معکوس تانژانت The Arctangent Function

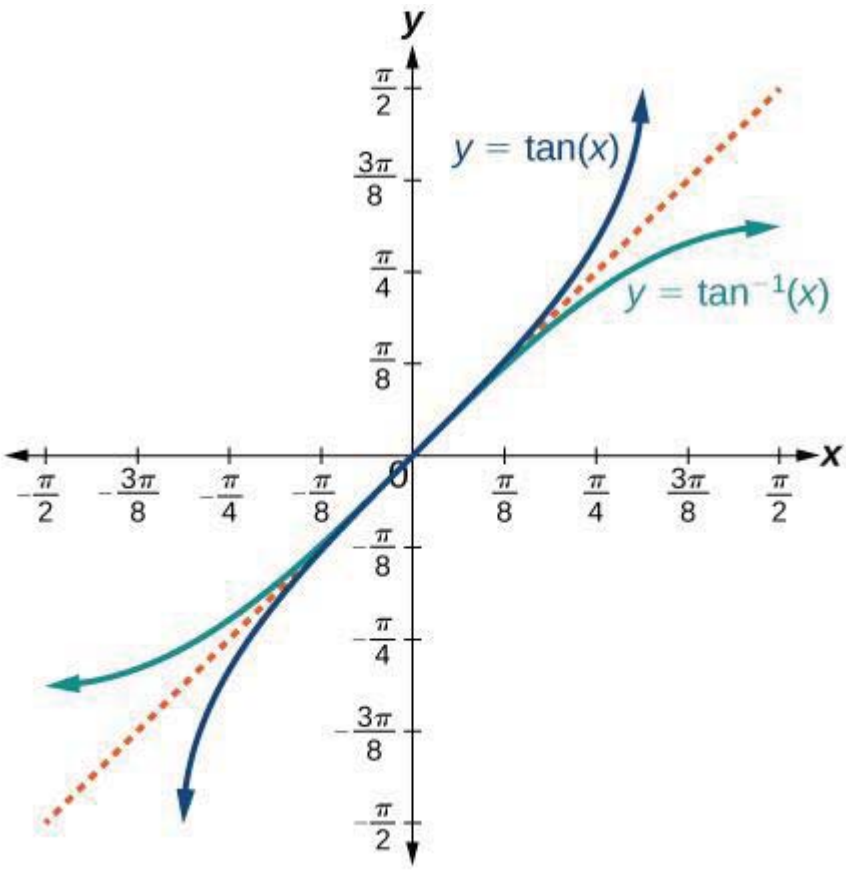
برای تعریف معکوس تابع تانژانت ، تابع تانژانت را به بازه $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ محدود می کنیم. معکوس تابع محدود شده را **تابع آرک تانژانت** **arctangent function** می نامیم. دامنه این تابع $(-\infty,\infty)$ است و برد آن $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ معمولا نماد $\arctan x$ و یا $tan^{-۱}x$ برای معکوس تانژانت بکار می بریم. در نتیجه داریم.

$$\arctan x = y \text{ اگر و فقط اگر } \tan y = x$$
$$\text{برای هر } x \text{ و } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

لذا برای هر x , $\arctan x$ عددی است مانند y بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ بطوری که تانژانت آن x است. مثلا

$$\arctan 0 = 0 \quad ,\arctan ۱ = \frac{\pi}{۴} \quad \arctan\left(-\sqrt{۳}\right) = -\frac{\pi}{۳}$$

نمودار زیر را ملاحظه کنید.

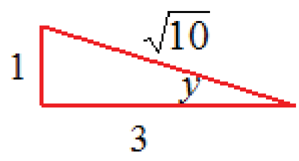


همچنین رابطه زیر را داریم.

$\arctan(\tan x) = x$	برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\tan(\arctan x) = x$	برای تمام x ها

مثال ۴ - مقدار $\csc\left(\arctan\left(-\frac{۱}{۳}\right)\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ



مقدار $\csc y$ را برای $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ پید می کنیم بطوری که $\arctan\left(-\frac{۱}{۳}\right) = y$ باشد ، یعنی $\tan y = -\frac{۱}{۳}$ باشد. چون $\tan y < 0$ است ، پس $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ است بطوری که $\csc y < 0$ بر اساس قضیه فیثاقورث ، وتر مثلث بالا دارای طول $\sqrt{۱0}$ است. پس $\csc y = -\sqrt{۱0}$ است. و در نتیجه

$$\csc\left(\arctan\left(-\frac{۱}{۳}\right)\right) = \csc y = -\sqrt{۱0}$$

اگر $x = \tan y$ باشد ، پس

$$sec^{۲}y = tan^{۲}y + ۱ = x^{۲} + ۱$$

و لذا طبق فرمول شماره (۹) بخش ۲.۹ داریم.

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{۱}{\frac{d}{dy}\tan y} = \frac{۱}{sec^{۲}y} = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$$

و یا

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{۱}{x^{۲} + ۱} \qquad (۳)}$$

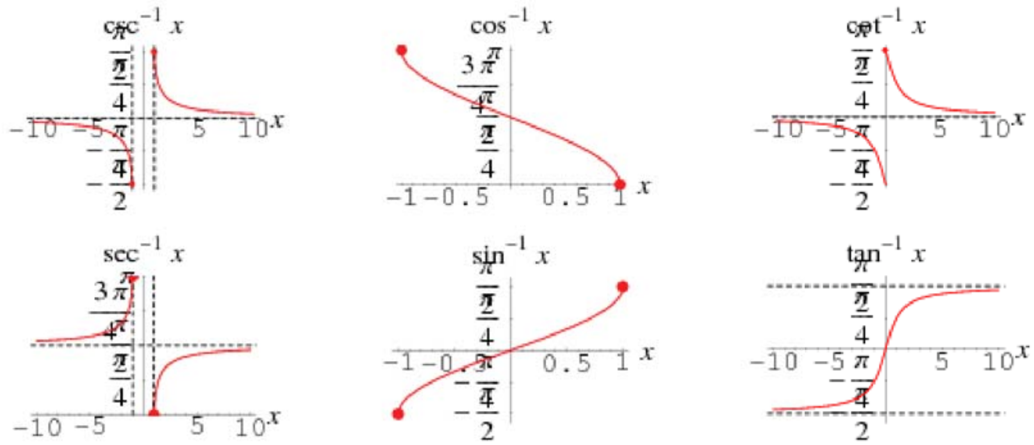
در نهایت بقیه مشتق های وارون توابع مثلثاتی را در ذیل می آوریم.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-۱}{x^۲+۱} \qquad (۴)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{۱}{x\sqrt{x^۲-۱}} \qquad (۵)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{-۱}{x\sqrt{x^۲-۱}} \qquad (۶)$$

نمودارهای معکوس توابع مثلثاتی در ذیل مشاهده می کنید.



تعریف بقیه معکوس توابع مثلثاتی

$\arccos x = y$ اگر فقط و فقط $\cos y = x$ برای $-۱ \le x \le ۱$ و $0 \le y \le \pi$

$\operatorname{arccot} x = y$ اگ فقط و فقط $\cot y = x$ برای هر x و $0 < y < \pi$

$\operatorname{arcsec} x = y$ اگر فقط و فقط $\sec y = x$ برای $|x| \ge ۱$ و $0 \le y < \frac{\pi}{۲}$ یا $\pi \le y < \frac{۳\pi}{۲}$

$\operatorname{arccsc} x = y$ اگر فقط و فقط $\csc y = x$ برای $|x| \ge ۱$ و $0 < y \le \frac{\pi}{۲}$ یا $\pi < y \le \frac{۳\pi}{۲}$

تمرینات ۲.۱۱

در تمرینات ۷ – ۱ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $\arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\arccos\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\arctan\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۴) $\operatorname{arccot}\sqrt{۳}$

۵) $\operatorname{arccsc}\left(-\sqrt{۲}\right)$

۶) $\operatorname{arccsc}\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۷) $cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

در تمرینات ۱۲ – ۸ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۸) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$

۹) $\cos(\arctan(-۱))$

۱۰) $\tan\left(\operatorname{arcsec}\sqrt{۲}\right)$

۱۱) $\csc\left(\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{۳}\right)\right)$

۱۲) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{۶}\right)$

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ عبارت ها را ساده کنید.

۱۳) $\cos(\arcsin x)$

۱۴) $\sec(\arctan x)$

۱۵) $\cos\left(\operatorname{arccot} x^{۲}\right)$

در تمرینات ۱۹ – ۱۶ مشتق f را پیدا کنید.

۱۶) $f(x) = \arccos(-۳x)$

۱۷) $f(t) = \arctan\sqrt{t}$

۱۸) $f(x) = \operatorname{arccot}\sqrt{۱ - x^{۲}}$

۱۹) $f(x) = \operatorname{arcsec}(\ln x)$

پاسخ تمرینات ۲.۱۱

در تمرینات ۷ – ۱ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $\arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

چون $\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$ است ، و $-\frac{\pi}{۲} \le \frac{\pi}{۳} \le \frac{\pi}{۲}$ است ، پس $\arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۳}$ است.

۲) $\arccos\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

چون $\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴}$ است و $0 \le \frac{\pi}{۴} \le \pi$ است ، پس $\arccos\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}$ است.

۳) $\arctan\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$

چون $-\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \tan\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$ است ، و $-\frac{\pi}{۲} < -\frac{\pi}{۶} < \frac{\pi}{۲}$ است ، پس $\arctan\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = -\frac{\pi}{۶}$ است.

۴) $\operatorname{arccot}\sqrt{۳}$

چون $\sqrt{۳} = \cot\frac{\pi}{۶}$ است ، و $0 < \frac{\pi}{۶} < \pi$ است ، پس $\operatorname{arccot}\sqrt{۳} = \frac{\pi}{۶}$ است.

۵) $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{۲}\right)$

چون $-\sqrt{۲} = \sec\frac{۵\pi}{۴}$ است ، و $\pi \le \frac{۵\pi}{۴} < \frac{۳\pi}{۲}$ است ، پس $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{۲}\right) = \frac{۵\pi}{۴}$ است.

۶) $\operatorname{arccsc}\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

چون $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} = \csc\frac{\pi}{۳}$ است ، و $0 < \frac{\pi}{۳} < \frac{\pi}{2}$ است ، پس $\frac{\pi}{۳} = \operatorname{arccsc}\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ است.

۷) $cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

چون $-\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{۵\pi}{۶}$ است ، و $0 \leq \frac{۵\pi}{۶} \leq \pi$ است ، پس $\frac{۵\pi}{۶} = cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ است.

در تمرینات ۱۲ – ۸ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۸) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$

$$\sin\left(\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

۹) $\cos(\arctan(-۱))$

$$\cos(\arctan(-۱)) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰) $\tan\left(\operatorname{arcsec}\sqrt{۲}\right)$

$$\tan\left(\operatorname{arcsec}\sqrt{۲}\right) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

۱۱) $\csc\left(\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{۳}\right)\right)$

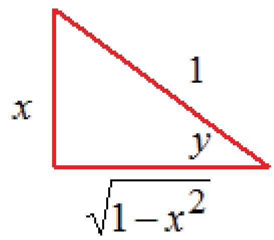
$$\csc\left(\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{۳}\right)\right) = \csc\frac{۵\pi}{۶} = ۲$$

۱۲) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{۶}\right)$

$$\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{۶}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۳}$$

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ عبارت ها را ساده کنید.

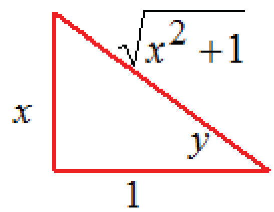
۱۳) $\cos(\arcsin x)$



با توجه به شکل بالا و y در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ داریم.

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{۱ - x^۲}$$

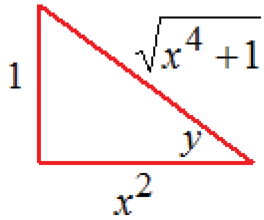
۱۴) $\sec(\arctan x)$



با توجه به شکل بالا و y در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ داریم.

$$\sec(\arctan x) = \sec y = \sqrt{x^۲ + ۱}$$

۱۵) $\cos\left(\operatorname{arccot} x^{۲}\right)$



با توجه به شکل بالا و y در بازه $(0، \pi)$ داریم.

$$\cos\left(\operatorname{arccot} x^{۲}\right) = \cos y = \frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۴} + ۱}}$$

در تمرینات ۱۹ – ۱۶ مشتق f را پیدا کنید.

۱۶) $f(x) = \arccos(-۳x)$

طبق فرمول شماره (۲)

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

و با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم.

$$f'(x) = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - (-۳x)^{۲}}}(-۳) = \frac{۳}{\sqrt{۱ - ۹x^{۲}}}$$

۱۷) $f(t) = \arctan\sqrt{t}$

طبق فرمول شماره (۳)

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$$

پس داریم

$$f'(t) = \frac{۱}{\left(\sqrt{t}\right)^{۲} + ۱}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\right) = \frac{۱}{۲(t + ۱)\sqrt{t}}$$

۱۸) $f(x) = \operatorname{arccot}\sqrt{۱ - x^۲}$

طبق فرمول شماره (۴)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-۱}{x^۲ + ۱}$$

پس داریم.

$$f'(x) = \frac{-۱}{\left(\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲ + ۱}\left(\frac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲}}\right) = \frac{-x}{(۲ - x^۲)\sqrt{۱ - x^۲}}$$

۱۹) $f(x) = \operatorname{arcsec}(\ln x)$

طبق فرمول شماره (۵)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{۱}{x\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

پس داریم.

$$f'(x) = \frac{۱}{\ln x\sqrt{(\ln x)^۲ - ۱}}\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{x\ln x\sqrt{(\ln x)^۲ - ۱}}$$

۲.۱۲ - توابع هیپر بالیک و مشتق آنها Hyperbolic Functions and Their Derivatives

در این بخش در مورد توابع هیپر بالیک بطور خلاصه بحث می کنیم. این توابع در مهندسی کار برد زیاد دارد.
تعریف دو تا از مهم ترین این توابع در زیر می آید.

توابع هیپر بالیک The Hyperbolic Functions

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

دو تابع بالا را می خوانیم **سینوس هیپر بالیک اکس و کسینوس هیپر بالیک اکس**
توجه داشته باشید که $sinh$ یک تابع فرد است و $cosh$ یک تابع زوج است.

$$\sinh 0 = 0 \qquad \cosh 0 = ۱$$

چون $0 < e^x < ۱$ است اگر $x < 0$ باشد و $e^x > ۱$ است اگر $x > 0$ باشد ، پس داریم.

(۱) $\sinh x > 0$ برای $x > 0$ و $\sinh x < 0$ برای $x < 0$

(۲) $\cosh x > 0$ برای تمام x ها

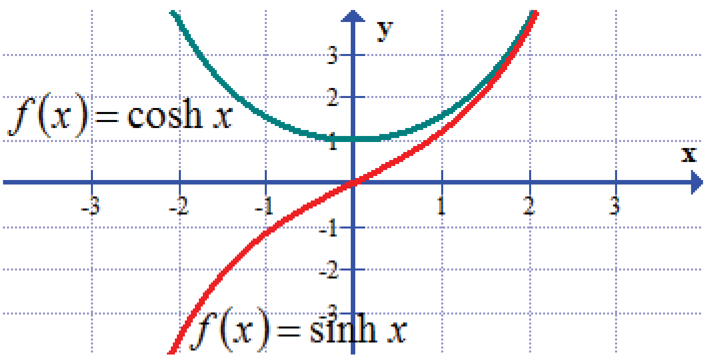
(۳) $$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \cosh x$$

(۴) $$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \sinh x$$

از فرمول های شماره (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که $\sinh x$ مطلقا صعودی است ، و از شماره (۱) و (۴) نتیجه می گیریم که $\cosh x$ مطلقا نزولی است در $(-\infty, 0]$ و مطلقا صعودی است در $[0, \infty)$ بطوری که $\cosh x$ در صفر مقدار حد اقلی دارد.

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\sinh x = \sinh x \qquad \frac{d^۲}{dx^۲}\cosh x = \cosh x$$

نمودار این دو تابع را در ذیل ملاحظه می کنید.



$$cosh^۲x - sinh^۲x = \frac{e^{۲x} + ۲ + e^{-۲x}}{۴} - \frac{e^{۲x} - ۲ + e^{-۲x}}{۴} = ۱$$

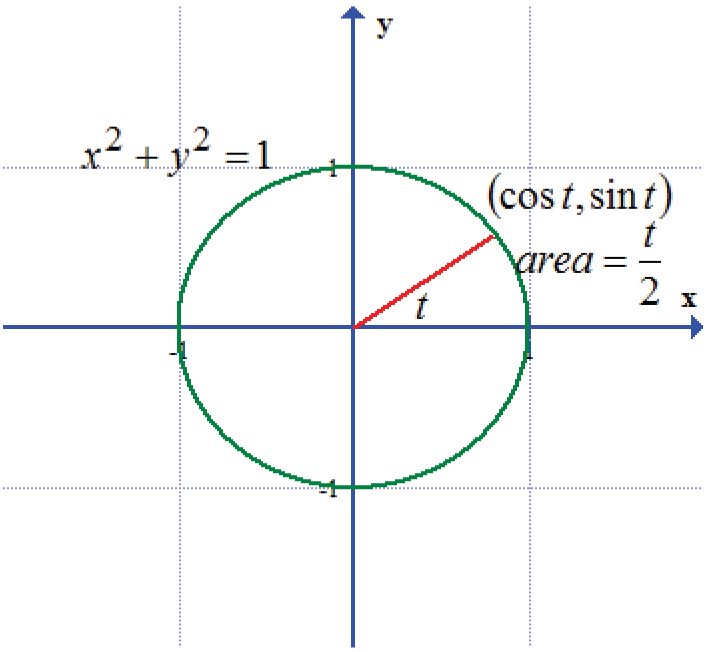
پس

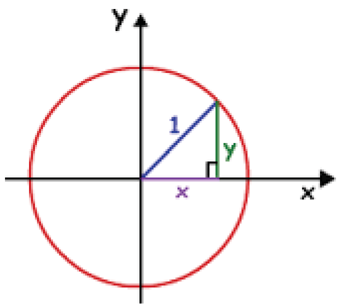
$$\boxed{cosh^۲x - sinh^۲x = ۱ \qquad (۵)}$$

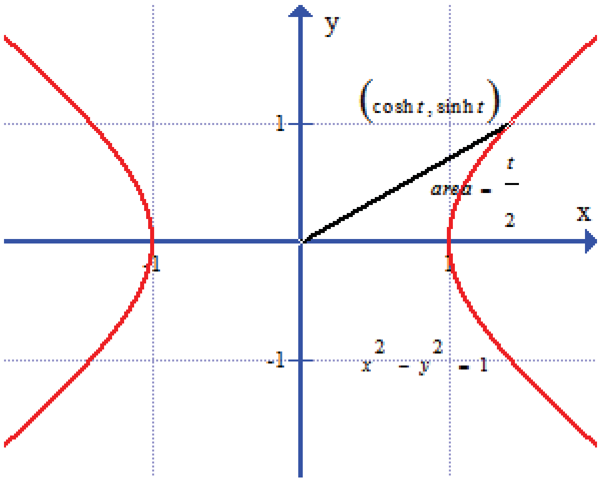
فرمول شماره (۵) یاد آور فرمول $sin^۲x + cos^۲x = ۱$ است.
فرمول های (۳) و (۴) هم یاد آور مشتق های سینوس و کسینوس هستند.
نقطه $(\cos t, \sin t)$ روی دائره واحد است ، اما $(\cosh t, \sinh t)$ روی هذلولی

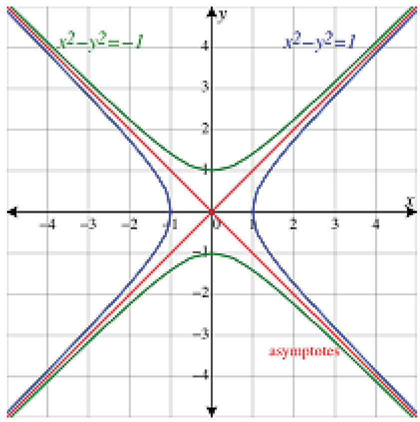
$$x^۲ - y^۲ = ۱$$

قرار دارد. اشکال زیر.









دائره واحد و هذلولی باز هم به طریق دیگری با هم ارتباط دارند. در اشکال بالا مثلث های تشکیل شده روی دائره و هذلولی هر دو دارای مساحت $\frac{t}{۲}$ دارند.

اگر c یک عدد ثابت بجز صفر باشد ، نمودار تابع

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

را **منحنی زنجیری Catenary** می نامند. این کلمه از کلمه لا تینی *catena* گرفته شده است. یک زنجیر کشش نا پذیر با **تراکم یک سان Uniform Density** که دو انتهای آن به جایی متصل شده باشد و نیروی وارد بر آن فقط نیروی جاذبه باشد ، تشکیل یک قوس یا کمان می دهد. شکل زیر

به نظر می رسد که اگر بعضی از سازه ها به شکل منحنی زنجیری ساخته شوند ، محکم تر هستند. کمان زیر با ضریب $c = -۱۲۷$ ساخته شده است.

سایر توابع هیپر بالیک به صورت زیر تعریف می شوند.

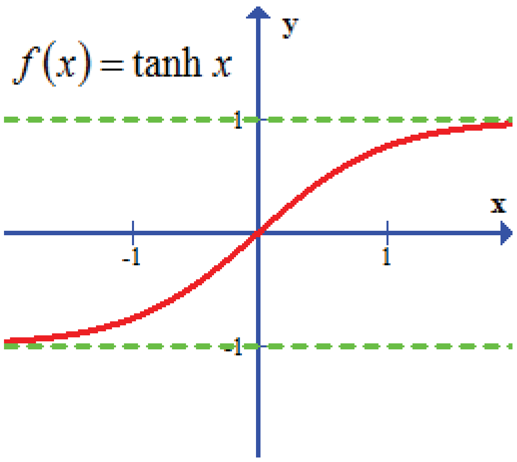
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{۱}{\cosh x}$$

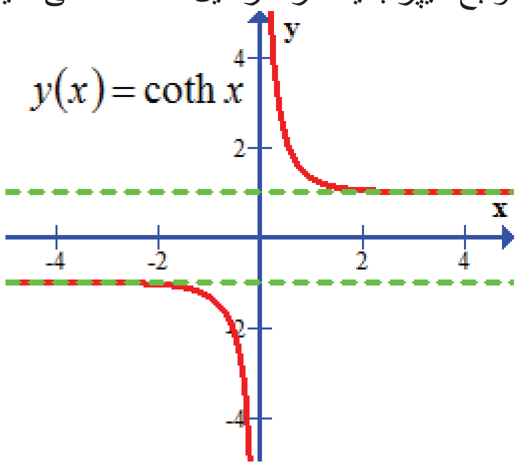
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{۱}{\sinh x}$$

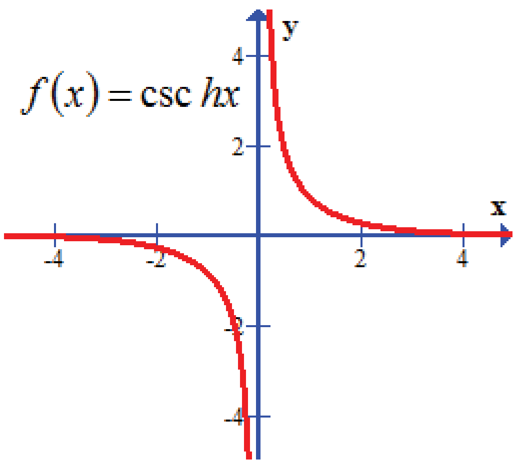
مشتق توابع هیپر بالیک به صورت زیر تعریف می شوند.

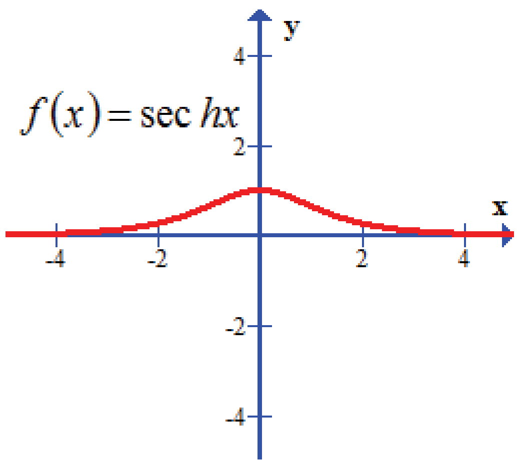
$$\frac{d}{dx}\tanh x = sech^{2} x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$
$$\frac{d}{dx}\coth x = -csch^{2} x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} h = -\operatorname{csch} x \coth x$$

نمودار توابع هیپر بالیک را در ذیل ملاحظه می کنید.









همانی های هیپر بالیک Hyperbolic Identities

$$tanh^{2}x + sech^{2}x = 1 \qquad coth^{2}x - csch^{2}x = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

اگر چه توابع مثلثاتی و هیپر بالیک شباهت های زیادی با هم دارند ، اما اختلاف هم دارند. مثلا توابع مثلثاتی تناوبی هستند ، اما توابع هیپر بالیک تناوبی نیستند. زیرا آنها از طریق توابع نمایی تعریف می شوند و می دانیم توابع نمایی تناوبی نیستند.

معکوس تابع سینوس هیپر بالیک The Inverse Hyperbolic Sine Function

همان طور که انتظار دارید توابع هیپر بالیک باید معکوس داشته باشند ، البته چنین است اگر دامنه آنها محدود شده باشد. اما در آینده به همه آنها احتیاج نداریم.
اینجا فقط در مورد معکوس سینوس هیپر بالیک صحبت می کنیم. سینوس هیپر بالیک مطلقا صعودی است. دامنه و برد آن هم $(-\infty, \infty)$ است.

برای تمام x ها و y ها اگر $\sinh y = x$ اگر فقط و فقط $sinh^{-1}x = y$

برای پیدا کردن فرمولی برای معکوس تابع سینوس هیپر بالیک ، می دانیم که

$$\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^{y}}$$

پس اگر $x = \sinh y$ باشد ، پس

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{2e^{y}}$$

$$2e^{y}x = e^{2y} - 1$$

$$(e^{y})^{2} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

حالا هدف ما این است که y را به صورت تابعی از x بنویسیم. با استفاده فرمول درجه دوم و این حقیقت که $e^{y} > 0$ است ، داریم.

$$e^{y} = \frac{2x + \sqrt{4x^{2} + 4}}{2} = x + \sqrt{x^{2} + 1} \qquad (6)$$

از دو طرف رابطه شماره (6) لگاریتم طبیعی می گیریم تا y بدست آیا.

$$\ln e^{y} = \ln\left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right)$$

$$y \ln e = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۱}\right)$$
$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۱}\right)$$

پس فرمول ما برای $sinh^{-۱}x$ مطابق زیر خواهد بود.

$$sinh^{-۱}x = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۱}\right) \qquad \text{برای تمام } x \text{ ها} \qquad (۷)$$

اگر از فرمول (۷) مشتق بگیریم ، خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dx} sinh^{-۱}x = \frac{۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲} + ۱}}}{x + \sqrt{x^{۲} + ۱}} = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} + ۱}} \qquad (۸)$$

تمرینات ۲.۱۲

در تمرینات ۶ – ۱ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $\sinh 0$

۲) $\tanh 0$

۳) $\coth(-۱)$

۴) $\sinh(\ln ۳)$

۵) $\coth(\ln ۴)$

۶) $\operatorname{sech}\left(\ln \sqrt{۲}\right)$

در تمرینات ۸ – ۷ عبارت ها را ساده کنید.

۷) $\sinh(\ln x)$

۸) $\tanh(\ln x)$

در تمرینات ۱۰ – ۹ درستی تساوی ها را نشان دهید.

۹) $\frac{d}{dx}\tanh x = sech^{۲} x$

۱۰) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}\ x = -\operatorname{sech}\ x \tanh\ x$

در تمرینات ۱۳ – ۱۱ مشتق توابع را پیدا کنید.

۱۱) $f(x) = \operatorname{sech}\sqrt{x}$

۱۲) $f(x) = sinh^{۲}\sqrt{۱ - x^{۲}}$

۱۳) $f(x) = \cosh\left(\arctan e^{۲x}\right)$

پاسخ تمرینات ۲.۱۲

در تمرینات ۶ – ۱ مقدار عددی عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $\sinh 0$

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$$

۲) $\tanh 0$

$$\tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = \frac{0}{1} = 0$$

۳) $\coth(-۱)$

$$\coth(-1) = \frac{\cosh(-1)}{\sinh(-1)} = \frac{e^{-1} + e^1}{e^{-1} - e^1} = \frac{\frac{1}{e} + e}{\frac{1}{e} - e} = \frac{1 + e^2}{1 - e^2}$$

۴) $\sinh(\ln ۳)$

$$\sinh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

۵) $\coth(\ln ۴)$

$$\coth(\ln 4) = \frac{\cosh(\ln 4)}{\sinh(\ln 4)} = \frac{e^{\ln 4} + e^{\ln 4}}{e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{17}{15}$$

۶) $\operatorname{sech}\left(\ln \sqrt{۲}\right)$

$$\operatorname{sech}(\ln \sqrt{2}) = \frac{1}{\cosh(\ln \sqrt{4})} = \frac{2}{e^{\ln(\sqrt{2})} + e^{-\ln(\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در تمرینات ۸ – ۷ عبارت ها را ساده کنید.

۷) $\sinh(\ln x)$

$$\sinh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

۸) $\tanh(\ln x)$

بر اساس تمرین (۷)

$$\text{ta}\quad \text{nh}(\ln x) = \frac{\sinh(\ln x)}{\cosh(\ln x)} = \frac{\frac{x^2-1}{2x}}{\frac{x^2+1}{2x}} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

در تمرینات ۱۰ – ۹ درستی تساوی ها را نشان دهید.

۹) $\frac{d}{dx}\tanh x = sech^2 x$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{cosh^2 x - sinh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x} = sech^2 x$$

۱۰) $\frac{d}{dx}\text{sech }x = -\text{sech }x \tanh x$

$$\frac{d}{dx}\text{sech}\, x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh x} = \frac{-\sinh x}{cosh^{۲} x} = -\text{sech}\, x \tanh x$$

در تمرینات ۱۳ – ۱۱ مشتق توابع را پیدا کنید.

۱۱) $f(x) = \text{sech}\sqrt{x}$

$$f'(x) = \left(-\text{sech}\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}\right)\left(\frac{۱}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}\text{sech}\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}$$

۱۲) $f(x) = sinh^{۲}\sqrt{۱ - x^{۲}}$

$$f'(x) = \left(2\sinh\sqrt{1-x^2}\cosh\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\sinh\sqrt{1-x^2}\cosh\sqrt{1-x^2}$$

۱۳) $f(x) = \cosh\left(\arctan e^{۲x}\right)$

$$f'(x) = \sinh(\arctan e^{2x})\left(\frac{1}{1+e^{4x}}\right)(2e^{2x})$$
$$= \left(\frac{2e^{2x}}{1+2^{4x}}\right)\sinh(\arctan e^{2x})$$

۲.۱۳ - قانون لا پیتال L'Hopital's Rule

گویا مدرسین محترم تلفظ می کنند هوپیتال ، L'Hopital ، نام یک ریاضی دان فرانسوی است و تلفظ می شود لا پیتال

در فصل اول قضیه تقسیم حد ها را بیان کردیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

به شرطی که حد های سمت راست وجود داشته باشند ، و $g(x)\neq 0$ باشد. اما مثال های متعددی در موردتقسیم توابع $\frac{f}{g}$ هستند که در آنها حد در نقطه a وجود دارد ، با وجود این که $g(x)=0$ است. مثال ساده این نمونه حد زیر است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=۱$$

مثال دیگری هم مانند حد زیر است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=۱$$

در مواردی که مخرج به صفرنزدیک می شد ، جز حذف فاکتور ها ، روش دیگری برای پیدا کردن حد نداشتیم. در این بخش روشی برای پیدا کردن حد ، هنگامی که مخرج به صفر نزدیک می شود ، مورد بحث قرار می دهیم.
برای این کار به قضیه زیر احتیاج داریم.

قضیه کاشی The Cauchy's Theorem

فرض کنید f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته بده و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند. اگر برای

$$a<x<b$$

داشته باشیم

$$g'(x)\neq 0$$

پس یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad (۱)$$

شکل مبهم یا نا معین $\frac{0}{0}$ Indeterminate Form

اگر $\lim_{x\to a^+} g(x)=0=\lim_{x\to a^+} f(x)$ باشد ، پس می گوییم $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ شکل مبهم $\frac{0}{0}$ دارد. همین طور اگر x از سمت چپ به a نزدیک شود و یا به بی نهایت نزدکی شود ، این اصطلاح را بکار می بریم.

پس حد های زیر شکل مبهم دارند.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-۱}{x^۲} \quad و \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x-۱}$$

قضیه قانون لا پیتال L'Hopital's Rule Theorem

فرض کنید L یک عدد حقیقی و یا ∞ و یا $-\infty$ باشد.

الف - فرض کنید g و f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x)\neq 0$ باشد برای $a<x<b$

اگر

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=0=\lim_{x\to a^+}g(x) \quad و \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به a از طرف چپ هم صادق است.

ب - فرض کنید g و f در بازه (a,∞) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x)\neq 0$ باشد برای $x>a$. اگر

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0=\lim_{x\to\infty}g(x) \quad و \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to\pm}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به $-\infty$ صادق است.

اثبات دو قضیه بالا در بخش ۳.۳ کار برد های قضیه مقدار مینگین ملاحظه کنید.

مثال ۱ـ حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ۴x}{\sin ۳x}$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$\lim_{x\to 0}\sin ۴x=0=\lim_{x\to 0}\sin ۳x$$

پس ، قسمت اول قانون لا پیتال را بکار می بریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ۴x}{\sin ۳x}=\lim_{x\to 0}\frac{۴\cos ۴x}{۳\cos ۳x}=\frac{۴*۱}{۳*۱}=\frac{۴}{۳}$$

مثال ۲ -حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin x-۱}$$

پاسخ

چون

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=0=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x-۱)$$

پس قسمت اول قانون لا پیتال را بکار می بریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(-\tan x)=-\infty$$

مثال ۳ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)-\arctan x}{\frac{۱}{x}}$$

پاسخ

چون

$$\lim_{x\to\infty}\arctan=\frac{\pi}{2}$$

است پس نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=0=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}$$

است ، پس قسمت دوم قانون لا پیتال را بکار می بریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-۱}{۱+x^۲}}{-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{۱+x^۲}=۱$$

می دانید چرا $\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{۱+x^۲}=۱$ است؟

پاسخ

صورت و مخرج کسر را برجمله ای که بزرگ ترین توان را در مخرج دارد تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{۲}}{x^{۲}}}{\frac{۱}{x^{۲}}+۱}=\frac{\lim_{x\to\infty}(۱)}{\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^{۲}}+\lim_{x\to\infty}(۱)}=\frac{۱}{0+۱}=۱$$

مثال ۴ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-۲}{x^{۲}}$$

پاسخ

چون

$$\lim_{x\to0}\left(e^{x}-x-۱\right)=0=\lim_{x\to0}x^{۲}$$

است ، قانون لا پیتال را بکار می بریم.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-۱}{x^{۲}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-۱}{۲x}$$

اما

$$\lim_{x\to0}\left(e^{x}-۱\right)=0=\lim_{x\to0}۲x$$

پس برای مرتبه دوم قانون لا پیتال را بکار می بریم.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-۱}{۲x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

لذا

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-۱}{x^{۳}}=\frac{e^{x}-۱}{۲x}=\frac{۱}{۲}$$

شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ The Indeterminate Form

فرض کنید $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ باشد ، پس می گوییم $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ دارد. همین طور اگر x از سمت چپ به a نزدک شود و یا به $\pm\infty$ این اصطلاح را بکار می بریم.

نسخه دوم قانون لا پیتال The Second Version of L'Hopital's Rule

فرض کنید L یک عدد حقیقی و یا ∞ و یا $-\infty$ باشد.

الف - فرض کنید g و f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد ، و $g'(x)\neq 0$ برای $a<x<b$. اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \ , \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

پس

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$x\to a^+$

این موضوع برای نزدیک شدن x به a از سمت چپ هم صادق است.

ب - فرض کنید g و f در بازه (a,∞) مشتق پذیر باشد و $g'(x)\neq 0$ باشد برای $x>a$. اگر

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \ , \ \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

پس

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این موضوع برای نزدیک شدن x به $-\infty$ هم صادق است.

مثال ۵ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{۱}{x}}{e^{\frac{۱}{x^۲}}}$$

پاسخ

چون

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{۱}{x} = \infty = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{۱}{x^۲}}$$

پس طبق قانون لا پیتال قسمت الف

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{۱}{x}}{e^{\frac{۱}{x^۲}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{۱}{x^۲}}{e^{\frac{۱}{x^۲}}\left(\frac{-۲}{x^۳}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{\frac{-۱}{x^۲}}}{۲}=\frac{0*0}{۲}=0$$

مثال ۶ - زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۲}$$

پاسخ

واضح است که

$$\lim_{x\to\infty} e^x=\infty=\lim_{x\to\infty} x^۲$$

پس بر اساس قسمت ب قانون لا پیتال داریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۲x}$$

چون

$$\lim_{x\to\infty} e^x=\infty=\lim_{x\to\infty} ۲x$$

پس برای مرتبه دوم قانون لا پیتال را بکار می بریم. پس داریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۲}=\infty$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۲}=\infty$$

به همین طریق می توان نشان داد که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

برای هر عدد صحیح مثبت n

می توان چنین اظهار کرد هنگامی که x به بی نهایت نزدیک می شود ، e^x سریع تر از x با هر توانی ، به بی نهایت نزدیک می شود.

شکل های مبهم بیشتر Other Indeterminate Forms

شکل های مبهم متعددی می توان بر شمر د که به اشکال مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شود ، مانند

$$0\,,\infty\,,0^0\,,1^0\,,1^\infty\,,\infty^0\,,\infty-\infty$$

این صورت به قانون لا پیتال مراجعه می کنیم.

مثال ۷- حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

پاسخ

چون

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

این حد داده شده به شکل $(-\infty) * 0$ است ، اما می توان آنرا به شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد. یعنی آنرا به صورت زیر می نویسیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{۱}{x}}$$

چون

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{۱}{x} = \infty$$

بر اساس قانون لا پیتال داریم.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{-۱}{x^۲}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

پس

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

مثال ۸ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

پاسخ

بر اساس فرمول شماره (۹) بخش ۲.۱۰ که گفتیم

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

پس داریم.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

چون تابع نمایی ، پیوسته است ، پس

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}$$

اگر حد سمت راست وجود داشته باشد ، طبق مثال ۷ داریم.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = ۱$$

مثال ۹ - مهم توجه شود.
نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

پاسخ
ابتدا حد لگاریتم سمت چپ را پیدا می کنیم. یعنی عدد b را پیدا می کنیم به طوری که

$$\lim_{x\to\infty} ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}=b$$

پس

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}$$

این عبارت حالا آماده است برای قانون لا پیتال. زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)=0=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}\left(-\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{-\frac{۱}{x^{۲}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{۱+0}=۱$$

پس $b=۱$ است و لذا

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}=e^{۱}=e$$

تمرینات ۲.۱۳

با استفاده از قانون لا پیتال ، حد های زیر را پیدا کنید.

۱) $\lim_{x\to a} \frac{x^{۱۶} - a^{۱۶}}{x - a}$

۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - ۱}{x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin ۸\sqrt{x}}{\sin ۵\sqrt{x}}$

۴) $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{\frac{۱}{x}} - ۱}{\frac{۱}{x}}$

۵) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sec x + ۱}$

۶) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x}$

۷) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(۱ + x)}{\ln x}$

۸) $\lim_{x\to 0} \frac{۱ - \cos x}{\sin x}$

۹) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan ۴x}{\tan ۲x}$

۱۰) $\lim_{x\to 0} \frac{۱ - \cos ۲x}{۱ - \cos ۳x}$

۱۱) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

۱۲) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}}-1}$$

۱۳) $$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x}$$

۱۴) $$\lim_{x\to 0^+} x\ln|\ln x|$$

۱۵) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۶) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^3-3x+2}$$

۱۷) $$\lim_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$$

۱۸) $$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln(\sin x)$$

۱۹) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$$

۲۰) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\cos x)}{\tan x}$$

پاسخ تمرینات ۲.۱۳

با استفاده از قانون لا پیتال ، حد های زیر را پیدا کنید.

۱) $$\lim_{x\to a}\frac{x^{۱۶}-a^{۱۶}}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\left(x^{۱۶}-a^{۱۶}\right)=0=\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{۱۶}-a^{۱۶}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{۱۶x^{۱۵}}{۱}=۱۶a^{۱۵}$$

۲) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-۱}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-۱)=0=\lim_{x\to 0}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-۱}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{۱}=0$$

۳) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ۸\sqrt{x}}{\sin ۵\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin ۸\sqrt{x}=0=\lim_{x\to 0^+}\sin ۵\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ۸\sqrt{x}}{\sin ۵\sqrt{x}}=\frac{(\cos ۸\sqrt{x})\left(\frac{۴}{\sqrt{x}}\right)}{(\cos ۵\sqrt{x})\left(\frac{۵}{۲\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{۸\cos ۸\sqrt{x}}{۵\cos ۵\sqrt{x}}=\frac{۸}{۵}$$

۴) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{۱}{x}}-۱}{\frac{۱}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{۱}{x}}-۱\right)=0=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{۱}{x}}-۱}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{۱}{x}}\left(-\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{-\frac{۱}{x^{۲}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۱}{x}}=e^{0}=۱$$

۵) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\sec x+۱}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x+۱)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\sec x+۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{sec^{۲}x}{\sec x\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{۱}{\sin x}=۱$$

۶) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}$

$$\lim_{x\to\infty}x=\infty=\lim_{x\to\infty}\ln x$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

۷) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(۱+x)}{\ln x}$

$$\lim_{x\to\infty}\ln(۱+x)=\infty=\lim_{x\to\infty}\ln x$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(۱+x)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{۱+x}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{۱+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{\frac{۱}{x}+۱}=۱$$

۸) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$

$$\lim_{x\to0}(۱-\cos x)=0=\lim_{x\to0}\sin x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{۱-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

۹) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan ۴x}{\tan ۲x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan ۴x = 0 = \tan ۲x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan ۴x}{\tan ۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{۴\ sec^{۲}۴x}{۲\ sec^{۲}۲x} = ۲$$

۱۰) $\lim_{x\to 0}\frac{۱-\cos ۲x}{۱-\cos ۳x}$

قانون لا پیتال را دو مرتبه بکار می بریم.

$$\lim_{x\to 0}\left(۱-\cos ۲x\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(۱-\cos ۳x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{۱-\cos ۲x}{۱-\cos ۳x} = \lim_{x\to 0}\frac{۲\sin ۲x}{۳\sin ۳x} = \lim_{x\to 0}\frac{۴\cos ۲x}{۹\cos ۳x} = \frac{۴}{۹}$$

۱۱) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}}}{۱} = ۱$$

۱۲) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}}-۱}$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x = 0 = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{\sqrt{x}}-۱\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}}-۱} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{۲\sqrt{x}\cos x}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

۱۳) $\lim_{x\to 0}\frac{۵^x-۳^x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(۵^x-۳^x\right)=۱-۱=0=\lim_{x\to 0}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{۵^x-۳^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln ۵)۵^x-(\ln ۳)۳^x}{۱}=\ln ۵-\ln ۳$$

۱۴) $\lim_{x\to 0^+}x\ln|\ln x|$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln|\ln x|=\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{۱}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln|\ln x|=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|\ln x|}{\frac{۱}{x}}=\frac{\frac{۱}{x\ln x}}{-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\ln x}=0$$

۱۵) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{\pi}{۲}-\arcsin x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

$$\lim_{x\to ۱^-}\left(\frac{\pi}{۲}-\arcsin x\right)=0=\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{۱-x^۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{\pi}{۲}-\arcsin x}{\sqrt{۱-x^۲}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x}=۱$$

۱۶) $\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x-x+۱}{x^۳-۳x+۲}$

$$\lim_{x\to ۱}(\ln x-x+۱)=0=\lim_{x\to ۱}\left(x^۳-۳x+۲\right)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x-x+۱}{x^۳-۳x+۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{۳x^۲-۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{۳x(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{۳x(x+۱)}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۷) $\lim_{x\to 0}(\csc x - \cot x)$

$$\lim_{x\to 0}(\csc x - \cot x) = \lim_{x\to 0}\frac{۱ - \cos x}{\sin x} = 0$$

بر اساس تمرین شماره ۷

۱۸) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin x) = -\infty \;\; ; \quad \lim_{x\to 0^+} \csc x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+}(-\sin x) = 0$$

۱۹) $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{۱}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{۱}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\ln\frac{۱}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\ln\frac{۱}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln\left(\ln\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}\right)};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\ln\frac{۱}{x}\right) = \infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{۱}{x};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\ln\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{۱}{\ln\frac{۱}{x}} * \frac{۱}{\frac{۱}{x}}\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)}{\frac{-۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln\frac{۱}{x}} = 0$$

پس

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{۱}{x}\right)^x = e^0 = ۱$$

۲۰) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\cos x)}{\tan x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\cos x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\cos x)}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{sec^{۲}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(-\sin x\cos x)=0$$

۲.۱۴ - مشتق پاره ای یا مشتق جزئی Partial Derivative

فرض کنید f یک تابع باشد با دو متغیر. اگر یکی از دو متغیررا ثابت نگاه داریم ، مثلا $y = y_0$ پس، تابعی که مقدار آن $f(x, y_0)$ است ، تابعی است از x به تنهایی. اگر آن تابع یک مشتق در x_0 داشته باشد ، آن مشتق را مشتق جزئی در (x_0, y_0) می نامیم.

تعریف Definition

اگر f یک تابع دو متغیری باشد ، اگر (x_0, y_0) در دامنه f باشد. **مشتق پاره ای f نسبت به x در (x_0, y_0)** مطابق زیر تعریف می شود.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

مشتق پاره ای f نسبت به y در (x_0, y_0) مطابق زیر تعریف می شود.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

توابع f_x و f_y که از طریق مشتق گیری پاره ای بدست می‌آیند و مطابق ذیل تعریف شده اند

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

و

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

مشتق های پاره ای f نامیده می شوند ومعمولا با نماد های زیر هم نشان داده می شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

اگر تابعی را به وسیله تساوی $z = f(x, y)$ نشان دهیم ، پس می نویسیم

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

پیدا کردن مشتق های پاره ای از پیدا کردن مشتق های توابع یک متغیری مشکل تر نیست.

مثال ۱ - اگر $f(x, y) = ۲۴xy - ۶x^۲y$ باشد ، f_x و f_y را پیدا کنید و مقادیر f_x و f_y را در $(۱, ۲)$ پیدا کنید.

پاسخ

با ثابت نگاه داشتن y و مشتق گرفتن f نسبت به x داریم.

$$f_x(x, y) = ۲۴y - ۱۲xy$$

و لذا

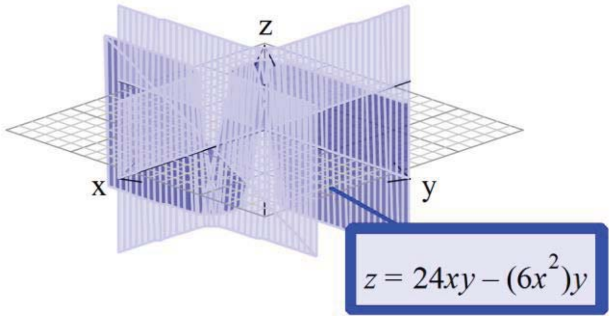
$$f_x(۱,۲) = ۴۸ - ۲۴ = ۲۴$$

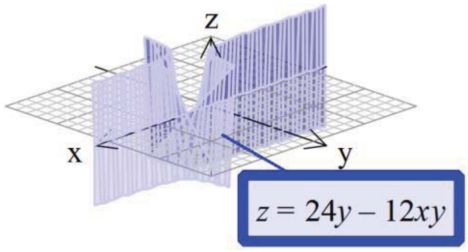
حالا x را ثابت نگاه می داریم و مشتق f را نسبت به y پیدا می کنیم.

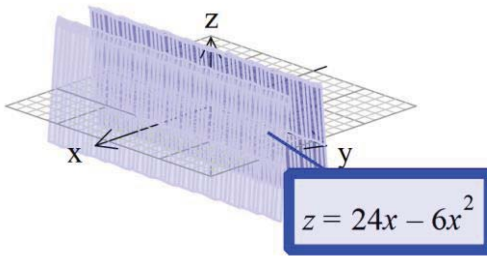
$$f_y(x,y) = ۲۴x - ۶x^۲$$

و لذا

$$f_y(۱,۲) = ۲۴ - ۶ = ۱۸$$







مثال ۲ اگر $z = x^۲ \cos y$ باشد ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲x \cos y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^۲ \sin y$$

جمع ، ضرب و تقسیم مشتق ها در مورد مشتق های پاره ای هم صادق هستند.

$$(f+g)_x = f_x + g_x \quad \text{و} \quad (f+g)_y = f_y + g_y$$
$$(f-g)_x = f_x - g_x \quad \text{و} \quad (f-g)_y = f_y - g_y$$
$$(fg)_x = f_x g + f g_x \quad \text{و} \quad (fg)_y = f_y g + f g_y$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f_x g - f g_x}{g^۲} \quad \text{و} \quad \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{f_y g - f g_y}{g^۲}$$

نتیجه این که چند جمله ای ها و توابع گویا هم در کلیه نقاط دامنه شان ، مشتق پاره ای دارند.

مثال ۳ - اگر داشته باشیم

$$f(x,y) = \frac{x^۳y - xy^۳}{x^۲ + y^۲}$$

f_y و f_x را پیدا کنید.

پاسخ

چون f یک تابع گویا است ، پس $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ برای تمام x ها و y ها تعریف شده است به شرطی که $x^۲ + y^۲ \neq 0$ باشد. یعنی برای تمام نقاط بجز مبدا مختصات.

$$f_x(x,y) = \frac{\left(۳x^۲t - y^۳\right)\left(x^۲ + y^۲\right) - \left(x^۳y - xy^۳\right)۲x}{\left(x^۲ + y^۲\right)^۲} = \frac{x^۴y + ۴x^۲y^۳ - y^۵}{\left(x^۲ + y^۲\right)^۲}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^۵ - ۴x^۳y^۲ - xy^۴}{\left(x^۲ + y^۲\right)^۲}$$

مثال ۴ - اگر داشته باشیم

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۳y - -xy^۳}{x^۲+y^۲} & \text{برای} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{برای} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

نشان دهید که

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

پاسخ

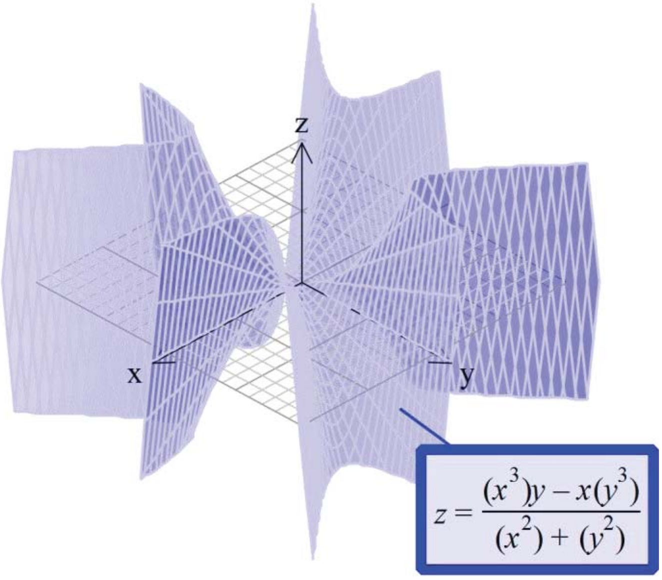
چون $f(h,0) = 0$ است برای تمام h ها ، پس داریم

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h-0} = 0$$

به همین طریق $f(0,h) = 0$ است برای تمام h ها ، پس داریم

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h-0} = 0$$

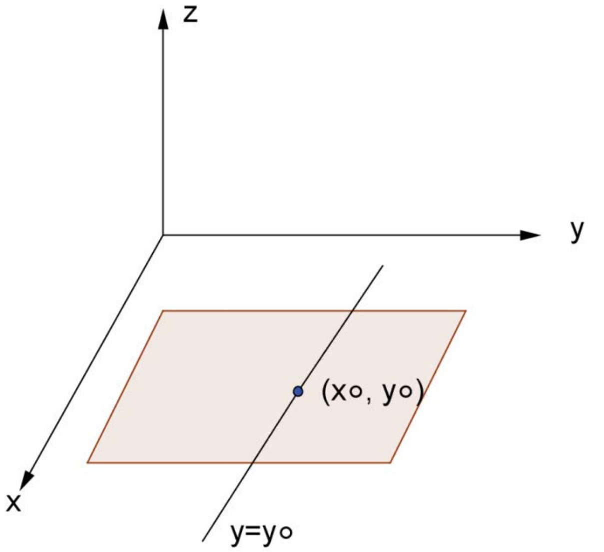
در نمودار زیر ملاحظه می کنید که مشتق های پاره ای f در $(0,0)$ صفر هستند.



می توان چنین تصور کرد که مشتق پاره ای $f_x(x_0,y_0)$ عبارت است از میزان یا آهنگ تغییر $f(x,y)$ در در (x_0,y_0) نسبت به x هنگامی که y ثابت نگاه داشته شده است. مثلا ، فرض کنید یک لوح فلزی روی محور xy قرار دارد و فرض کنید $f(x,y)$ حرارت این لوح در هر نقطه (x,y) باشد. پس $f_x(x_0,y_0)$ میزان یا آهنگ تغییرات حرارت است در (x_0,y_0) در امتداد خط موازی محور x که از نقطه (x_0,y_0) می گذرد. **شکل زیر**

اگر هنگامی که x افزایش پیدا می کند ، حرارت هم افزایش یابد ، پس $f_x(x_0,y_0) > 0$ است و اگر بر عکس هنگامی که x افزایش پیدا می کند ، حرارت نقصان پیدا کند ، پس $f_x(x_0,y_0) < 0$ است.

به همین طریق ، مشتق پاره ای $f_y(x_0,y_0)$ آهنگ تغیرات حرارت است در (x_0,y_0) در امتداد خطی که از (x_0,y_0) می گذرد و موازی محور y است.



برای توابع سه متغیری ، مشتق های پاره ای مطابق زیر تعریف می شوند.

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$
$$f_y(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$
$$f_z(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

نماد دیگری که برای این مشتق ها بکار می رود مطابق زیر است.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}$$

مثال ۵ - اگر داشته باشیم

$$f(x,y,z)=e^{۲x}\cos z\, e^{۳y}\sin z$$

مشتق های پاره ای f را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا y و z را ثابت نگاه می داریم و نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲e^{x^{۲}}\cos z$$

به همین ترتیب دو متغیر دیگر را ثابت نگاه می داریم و نسبت به y مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۳e^{۳y}\sin z$$

و بالاخره

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{۲x}\sin z + e^{۳y}\cos z$$

همان طور که در مورد توابع یک متغیری دیدیم ، توابع چند متغیری هم مشتق های مرتبه بالاتر هم دارند.
اگر f تابعی از متغیر های x و y بشد ، پس توابع f_x و f_y ممکن است دو مشتق پاره ای داشته باشند. در این صورت مشتق های پاره ای f_x و f_y چهار مشتق پاره ای ایجاد می کنند.

$(f_x)_x$ با نماد f_{xx} یا $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}$

$(f_x)_y$ با نماد f_{xy} یا $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\,\partial x}$

$(f_y)_x$ با نماد f_{yx} یا $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\,\partial y}$

$(f_y)_y$ با نماد f_{yy} یا $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$

مشتق هایی که در بالا ذکر شد ، **مشتق های پاره ای مرتبه دوم f نامیده می شوند.**
نماد های f_{xy} و f_{yx} را **مشتق های پاره ای مختلط می نامند**
نماد های f_z ، f_y ، f_x را مشتق های پاره ای مرتبه اول می نامیم.

مثال ۶ - اگر $f(x,y) = \sin xy^۲$ باشد ، تمام مشتق های پاره ای مرتبه دوم را پیدا کنید.
پاسخ
مشتق های پاره ای مرتبه اول داریم.

$$f_x(x,y) = y^۲\cos xy^۲$$
$$f_y(x,y) = ۲xy\cos xy^۲$$

برای بدست آوردن مشتق های پاره ای مرتبه دوم ، از مشتق های مرتبه اول ، مشتق می گیریم.

$$f_{xx}(x,y) = -y^۴\sin xy^۲$$
$$f_{xy}(x,y) = ۲y\cos xy^۲ - ۲xy^۳\sin xy^۲$$
$$f_{yx}(x,y) = ۲y\cos xy^۲ - ۲xy^۳\sin xy^۲$$
$$f_{yy}(x,y) = ۲x\cos xy^۲ - ۴x^۲y^۲\sin xy^۲$$

تمرینات ۲.۱۴

در تمرینات ۱۰ – ۱ مشتق های پاره ای توابع را پیدا کنید.

۱) $f(x,y)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$

۲) $f(x,y)=۲x+۳x^{۲}y^{۴}$

۳) $g(u,v)=\frac{u^{۳}+v^{۳}}{u^{۲}+v^{۲}}$

۴) $f(x,y)=\sqrt{۴-x^{۲}-۹y^{۲}}$

۵) $z=\sqrt{\left(۱-x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳}-y^{۲}}$

۶) $z=\left(\sin x^{۲}\, y\right)^{۳}$

۷) $f(x,y,z)=x^{۲}y^{۵}+xz^{۲}$

۸) $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

۹) $w=e^{x}(\cos y+\sin z)$

۱۰) $w=\arcsin\frac{۱}{۱+xyz^{۲}}$

در تمرینات ۱۲ – ۱۱ مشتق پاره ای مرتبه اول f در نقاط داده شده را پیدا کنید.

۱۱) $f(x,y)=\sqrt{۴x^{۲}+y^{۲}};\left(۲,-۳\right)$

۱۲) $f(x,y,z)=e^{۲x-۴y-z}\left(0,-۱,۱\right)$

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ f_{xy} و f_{yx} را پیدا کنید.

۱۳) $f(x,y) = ۳x^۲ - \sqrt{۲}\ xy^۲ + y^۵ - ۲$

۱۴) $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$

۱۵) $f(x,y.z) = z\cos xy$

پاسخ تمرینات ۲.۱۴

در تمرینات ۱ – ۱۰ مشتق های پاره ای توابع را پیدا کنید.

۱) $f(x,y)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$

$$f_x(x,y)=x^{\frac{۱}{۲}} \quad ; \qquad f_y(x,y)=0$$

۲) $f(x,y)=۲x+۳x^{۲}y^{۴}$

$$f_x(x,y)=۲+۶xy^{۴} \quad ؛ \quad f_y(x,y)=۱۲x^{۲}y^{۳}$$

۳) $g(u,v)=\frac{u^{۳}+v^{۳}}{u^{۲}+v^{۲}}$

$$g_u(u,v)=\frac{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)^{۳}\ u^{۲}-\left(u^{۳}+v^{۳}\right)۲u}{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)^{۲}}=\frac{u^{۴}+۳u^{۲}v^{۲}-۲uv^{۳}}{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)^{۲}}$$

$$g_v(u,v)=\frac{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)\ ۳v^{۲}-\left(u^{۳}+v^{۳}\right)۲v}{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)^{۲}}=\frac{v^{۴}+۳u^{۲}v^{۲}-۲u^{۳}v}{\left(u^{۲}+v^{۲}\right)^{۲}}$$

۴) $f(x,y)=\sqrt{۴-x^{۲}-۹y^{۲}}$

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^{۲}-۹y^{۲}}} \quad ; \quad f_y(x,y)=\frac{-۹y}{\sqrt{۴-x^{۲}-۹y^{۲}}}$$

۵) $z = \sqrt{\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳} - y^{۲}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{۲\sqrt{\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳} - y^{۲}}}\left[۳\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۲}\right]\left(\frac{-۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}\right)$$

$$= \frac{-\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۲}}{x^{\frac{۱}{۳}}\sqrt{\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳} - y^{۲}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\left(۱ - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳} - y^{۲}}}$$

۶) $z = \left(\sin x^{۲}\, y\right)^{۳}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۳\left(\sin x^{۲}y\right)^{۲}\left(\cos x^{۲}\, y\right)(۲xy) = ۶xy sin^{۲} x^{۲}y \cos x^{۲}\, y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۳\left(\sin x^{۲}\, y\right)^{۲}\left(\cos x^{۲}y\right)\left(x^{۲}\right) = ۳x^{۲} sin^{۲}\, x^{۲}\, y\ \cos x^{۲}\, y$$

۷) $f(x,y,z) = x^{۲}y^{۵} + xz^{۲}$

$$f_x(x,y,z) = ۲xy^{۵} + z^{۲}$$

$$f_y(x,y,z) = ۵x^{۲}y^{۴}$$

$$f_z(x,y,z) = ۲xz$$

۸)　$f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

$$f_x(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(x+y+z)(y+z)}{(xy+yz+zx)^{۲}}=\frac{-\left(y^{۲}+yz+z^{۲}\right)}{(xy+yz+zx)^{۲}}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(x+y+z)(x+z)}{(xy+yz+zx)^{z}}=\frac{-\left(z^{۲}+zx+x^{۲}\right)}{(xy+yz+zx)^{۲}}$$

$$f_z(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(x+y+z)(y+x)}{(xy+yz+zx)^{۲}}=\frac{-\left(x^{۲}+xy+y^{۲}\right)}{(xy+yz+zx)^{۲}}$$

۹)　$w=e^{x}(\cos y+\sin z)$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=e^{x}\left(\cos y+\sin z\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=e^{x}(-\sin y)=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=e^{x}\cos z$$

۱۰)　$w=\arcsin\dfrac{۱}{۱+xyz^{۲}}$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{۱}{\sqrt{۱-\dfrac{۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}}}\left(\frac{-۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}\right)yz^{۲}=\frac{-yz^{۲}}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}\sqrt{۱-\left(\dfrac{۱}{۱+xyz^{۲}}\right)^{۲}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{۱}{\sqrt{۱-\dfrac{۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}}}\left(\frac{-۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}\right)xz^{۲}=\frac{-xz^{۲}}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}\sqrt{۱-\left(\dfrac{۱}{۱+xyz^{۲}}\right)^{۲}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{۱}{\sqrt{۱-\dfrac{۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}}}\left(\frac{-۱}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}}\right)۲xyz=\frac{-۲xyz}{\left(۱+xyz^{۲}\right)^{۲}\sqrt{۱-\left(\dfrac{۱}{۱+xyz^{۲}}\right)^{۲}}}$$

در تمرینات ۱۲ – ۱۱ مشتق پاره ای مرتبه اول f در نقاط داده شده را پیدا کنید.

۱۱) $f(x,y)=\sqrt{۴x^۲+y^۲};(۲,-۳)$

$$f_x(x,y)=\frac{۴x}{\sqrt{۴x^۲+y^۲}};f_x(۲,-۳)=\frac{۴(۲)}{\sqrt{۲(۲)^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۸}{۵}$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{۴x^۲+y^۲}};f_y(۲,-۳)=\frac{-۳}{\sqrt{۴(۲)^۲+(-۳)^۲}}=-\frac{۳}{۵}$$

۱۲) $f(x,y,z)=e^{۲x-۴y-z}(0,-۱,۱)$

$$f_x(x,y,z)=۲e^{۲x-۴y-z};f_x(0,-۱,۱)=۲e^{۲(0)-۴(-۱)-۱}=۲e^۳$$
$$f_y(x,y,z)=-۴e^{۲x-۴y-z};f_y(0,-۱,۱)=-۴e^{۲(0)-۴(-۱)-۱}=-۴e^۳$$
$$f_z(x,y,z)=-e^{۲x-۴y-z};f_z(0,-۱,۱)=-e^{۲(0)-۴(-۱)-۱}=-e^۳$$

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ f_{xy} و f_{yx} را پیدا کنید.

۱۳) $f(x,y)=۳x^۲-\sqrt{۲}\ xy^۲+y^۵-۲$

$$f_x(x,y)=۶x-\sqrt{۲}\,y^۲,f_{xy}(x,y)=-۲\sqrt{۲}\,y$$
$$f_y(x,y)=-۲\sqrt{۲}\,xy+۵y^۴,f_{yx}(x,y)=-۲\sqrt{۲}\,y$$

۱۴) $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲}$

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}},f_{xy}(x,y)=\frac{-xy}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$
$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}},f_{yx}(x,y)=\frac{-xy}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۱۵) $f(x,y.z)=z\cos xy$

$$f_x(x,y,z)=-yz\sin xy,f_{xy}(x,y,z)=-z\sin xy-xyz\cos xy$$
$$f_y(x,y,z)=-xz\sin xy,f_{yx}(x,y,z)=-z\sin xy-xyz\cos xy$$

فصل سوم
کار برد های مشتق

فصل سوم را به کار برد های مشتق جهت رسم نمودار توابع اختصاص می دهیم. یاد خواهیم گرفت کجا یک تابع مشتق پذیرصعود می کند ، کجا نزول می کند ، کجا حد اکثر ، کجا حد اقل دارد. و بسیاری از مطالب دیگر.

۳.۱ – مقادیر ماکسیمم و مینیمم Maximum and Minimum Values

فرض کنید تابع سود یک شرکت نفت مطابق زیر باشد.

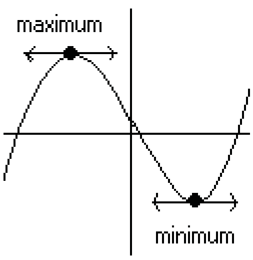
$$f(x) = x - x^{۳} \quad ,0 \leq x \leq ۱ \qquad (۱)$$

در فرمول بالا x شاخص مقدار نفت تولید شده در سال بر حسب میلیون گالن ، و $f(x)$ شاخص سود در سال بر حسب میلیون دلار ، و دامنه محدود است به $[0,۱]$ بخاطر محدودیت های تجهیزات و نیروی کار. طبیعی است که شرکت مایل است بیشترین سود را بدست آورد ، که البته مربوط می شود به مقدا ر x به طوری که $f(x)$ در محدوده $[0,۱]$ حد اکثر باشد. آیا چنین مقدار حد اکثری وجود دارد ؟

قبل از پاسخ به این سئوال ، ابتدا لازم است مقدار حد اکثر و حد اقل را تعریف کنیم.

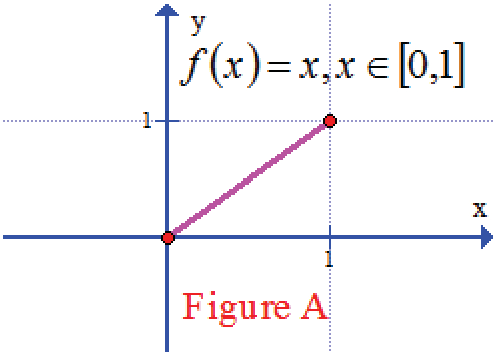
تعریف حد اکثر و حد اقل Definition of Maximum and Minimum Values

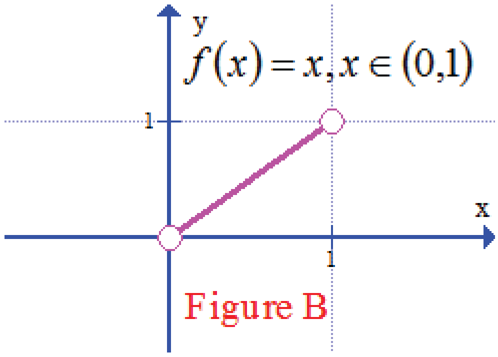
تابع f **در مجموعه I یک مقدار حد اکثر دارد** اگر یک عدد مانند d در I وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \leq f(d)$ باشد برای کلیه x ها در I. در این صورت $f(d)$ را **مقدار حد اکثر** **f در I** می نامیم. به همین طریق تابع f در I **یک مقدار حد اقل دارد** اگر یک عدد مانند c در I وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \geq f(c)$ باشد برای کلیه x ها در I. در این صورت $f(c)$ را **مقدار حد اقل f در I** می نامیم. مقداری از f که یا مقدار حد اکثر و یا مقدا ر حد اقل باشد ، مقدار اکستیریم Extreme Value می نامیم



چون $f(x)$ مختصات y نقطه $(x,f(x))$ روی نمودار f است ، واضح است که $f(d)$ مقدار حد اکثر f در بازه $[a,b,]$ است ، اگر فقط و فقط $(d,f(d))$ بالا ترین نقطه روی نمودار f بین $x = a$ و $x = b$ باشد. به همین طریق ، $f(c)$ مقدار حد اقل f در بازه $[a,b]$ است ، اگر

فقط و فقط $(c, f(c))$ پایین ترین نقطه روی نمودار f بین $x = a$ و $x = b$ باشد. هر دو حالت در شکل بالا ملاحظه می کنید.
یک تابع ممکن است در یک مجموعه I مقدار اکستریم داشته باشد و یا نداشته باشد. این بستگی به f در مجموعه I دارد.
مثلا اگر $f(x) = x$ باشد ، پس در بازه $[0, ۱]$ تابع f مقدار حد اکثر ۱ دارد ، و مقدار حد اقل صفر دارد. شکل A
اما در بازه باز $(0, ۱)$ تابع f نه مقدار حد اکثر دارد و نه مقدار حد اقل. زیرا f در بازه باز $(0, ۱)$ نه $x = 0$ می گیرد و نه $x = ۱$ شکل B

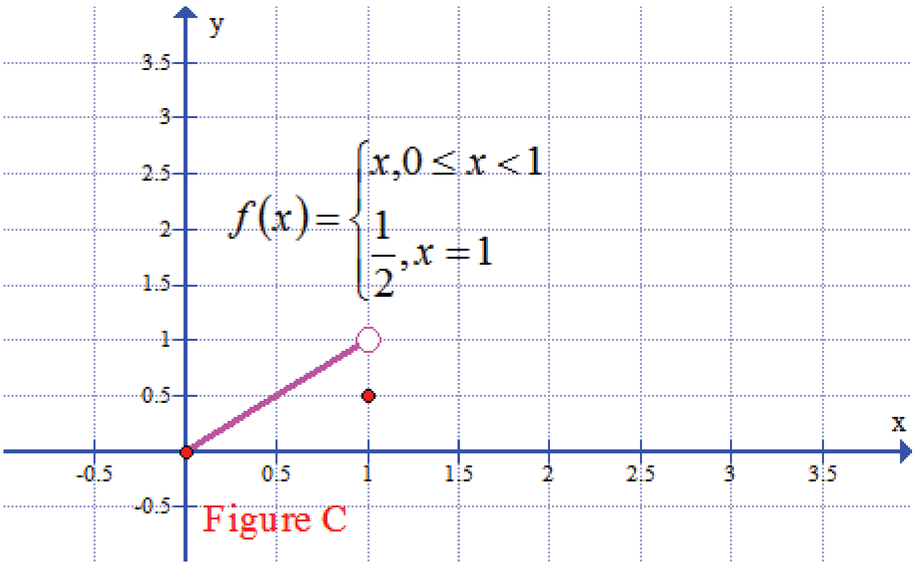




اما اگر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{برای} \quad 0 \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۲} & \text{برای} \quad x = ۱ \end{cases}$$

در این صورت f مقدار حد اقل صفر دارد ، اما مقدار حد اکثر ندارد. شکل C



قضیه ماکسیمم و مینیمم Maximum and Minimum Theorem
اگر f در یک بازه بسته و محدود $[a,b]$ پیوسته باشد ، پس f یک ماکسیمم و یک مینیمم در $[a,b]$ دارد.

تابع شماره (۱) که در ابتدای این بخش آمد ، در بازه بسته $[0,۱]$ پیوسته است و لذا طبق قضیه بالا یک مقدار حد اکثری در $[0,۱]$ دارد. اما قضیه به ما نمی گوید در کجای $[0,۱]$ این مقدار حد اکثری اتفاق می افتد. و حتی نمی گوید چگونه این مقدار حد اکثری را پیدا کنیم. قضیه بعدی برای پیدا کردن چنین مقداری به ما کمک می کند.

قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم ؛ - فرض می کنیم f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد. اگر مقدار اکستریم f در $[a,b]$ در عدد c در بازه (a,b) اتفاق می افتد و f در c یک مشتق دارد ، پس $f'(c)=0$ است.

اثبات
کافی است نشان دهیم مقدار اکستریم f در عدد c در بازه (a,b) اتفاق نمی افتد اگر $f'(c)$وجود داشته باشد ولی مساوی صفر نباشد. پس فرض می کنیم $f'(c)\neq 0$ است.
حالت اول که $f'(c)>0$ است. چون

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(x)}{x-c}>0$$

است ، پس طبق قضیه شماره ۱۷ بخش ۱.۳ که گفتیم
اگر $\lim_{x a\infty} g(x)>0$ باشد ، پس $g(x)>0$ است برای تمام x ها که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.
می دانیم که

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

است. برای چنین x اگر $x>c$ باشد ، پس

$$f(x)-f(c)=\overbrace{(x-c)}^{\text{مثبت}}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)}^{\text{مثبت}}>0$$

پس $f(x)>f(c)$ است و در نتیجه f مقدار حد اکثری در c ندارد. اما اگر $x<c$ باشد ، پس

$$f(x)-f(c)=\overbrace{(x-c)}^{\text{منفی}}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)}^{\text{مثبت}}<0$$

است و لذا $f(x)<f(c)$ است. و در نتیجه f در c مقدار حد اقلی ندارد. پس اگر $f'(c)>0$

باشد ، f در c نه مقدار ماکسیمم دارد و نه مینیمم. در مورد $f'(c) < 0$ هم همین استدلال داریم.
این قسمت را در تمرین ثابت می کنیم.

فرض می‌کنیم f در $[a,b]$ تعریف شده باشد. قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم به ما می گوید f فقط در دو نقطه انتهایی a و b مقدار اکستریم دارد و یا در اعدادی مانند c در (a,b) اگر

$$f'(c) = 0$$

باشد و یا f در c مشتق پذیر نباشد.
عدد c در دامنه f را یک **نقطه بحرانی Critical Point** تابع f می نامیم ، اگر یا $f'(c) = 0$ باشد و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.
پس قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم می گوید f در $[a,b]$ فقط در دو نقطه انتهایی مقدار اکستریم دارد و یا در یک نقطه بحرانی.

قاعده پیدا کردن مقدار اکستریم
مقادیر f را در تمام نقاط بحرانی در (a,b) و نقاط انتهایی a و b حساب کنید. بزرگ ترین این مقادیر مقدار ماکسیمم و کوچک ترین آنها مقدار مینیمم f در $[a,b]$ است.

بیشتر توابعی که به آنها بر خورد می کنیم ، در تمام نقاط دامنه شان مشتق پذیر هستند. برای پیدا کردن نقطه بحرانی ، فقط عددی پیدا کنید که در آن مشتق صفر است. روش بالا هنگامی قابل استفاده است که بتوانیم نقطه بحرانی را پیدا کنیم.

مثال ۱ - اگر $f(x) = x - x^{۳}$ باشد ، مقادیر اکستریم تابع را در $[0,۱]$ پیدا کنید و مشخص کنید در کدام عدد در $[0,۱]$ این مقادیر اتفاق می افتد.
پاسخ
همان طور که قبلا گفته شد ، f در $[0,۱]$ مقادیر اکستریم دارد ، زیر در $[0,۱]$ پیوسته است.
چون این تابع مشتق پذیر است ، پس نقاط بحرانی مقدیری از x است که در آنها $f'(x) = 0$ است.

$$f'(x) = ۱ - ۳x^{۲}$$

پس $f'(x) = 0$ است ، اگر $۱ - ۳x^{۲} = 0$ باشد.

$$۱ - ۳x^{۲} = 0$$

$$۳x^{۲} = ۱$$

$$x^{۲} = \frac{۱}{۳}$$

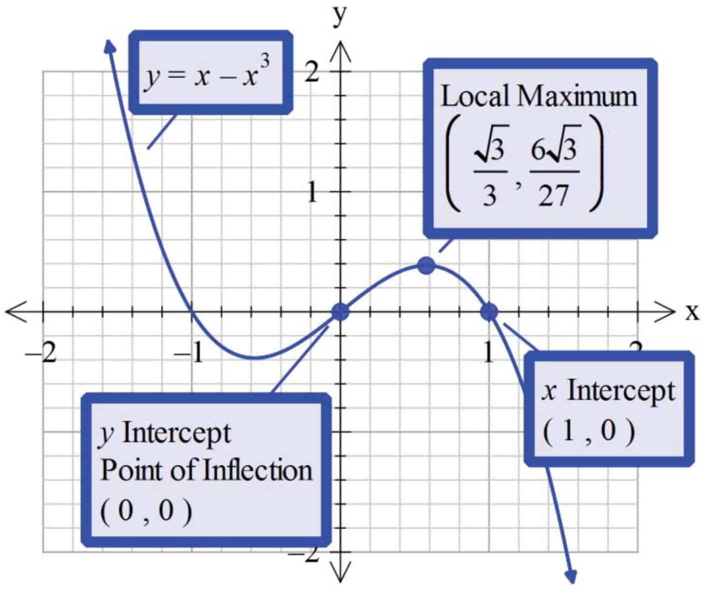
$$x = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

چون $-\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ در دامنه f نیست ، پس مقدار اکستریم این تابع می تواند فقط در نقاط انتهایی 0 و ۱ و یا در $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ اتفاق افتد. برای پیدا کردن این مقادیر اکستریم ، مقادیر مربوطه را در f حساب می کنیم.

$$f(0) = 0 \qquad f(۱) = 0$$

$$f\left(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right) = \frac{۱}{۳}\sqrt{۳} - \left(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right)^{۳} = \frac{۱}{۳}\sqrt{۳} - \frac{۱}{۹}\sqrt{۳} = \frac{۲}{۹}\sqrt{۳}$$

در نتیجه مقدار مینیمم f در $[0,۱]$ عبارت است ازصفر و یک که در صفر و یک اتفاق می افتد ، و مقدار ماکسیمم $\frac{۲}{۹}\sqrt{۳}$ است که در $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ اتفاق می افتد.



شکل D

مثال ۲ اگر $f(x) = x - x^{۳}$ باشد ، مقادیر اکستریم f را در $[۲,۴]$ پیدا کنید ، و مشخص کنید این مقادیر در کجا اتفاق می افتد.

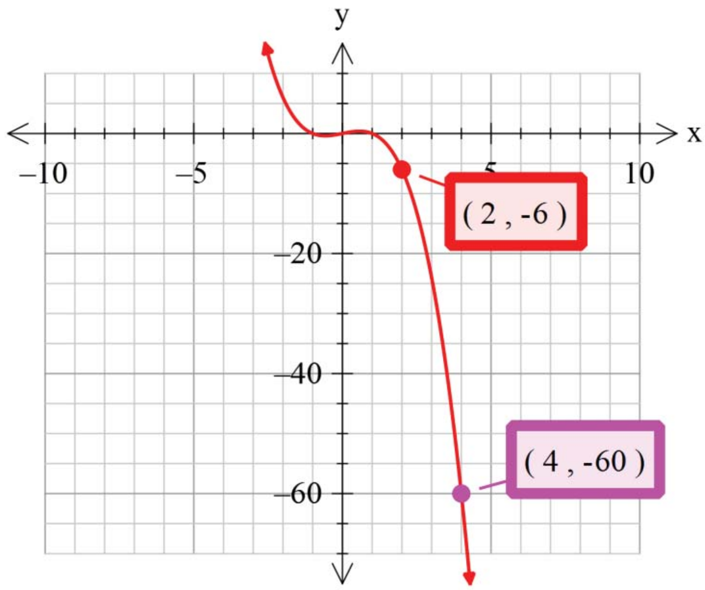
پاسخ

از مثال ۱ می دانیم که $f'(x) = 0$ است فقط اگر $x = -\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ باشد و یا $x = \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$ باشد. پس داریم $f'(x) \neq 0$ است برای تمام x ها در $[۲,۴]$ در نتیجه مقادیر اکستریم f در $[۲,۴]$ باید در نقاط انتهایی بازه باشد.

$$f(۲) = -۶ \quad ، \quad f(۴) = -۶۰$$

پس نتیجه می گیریم که -6مقدار ماکسیمم است و در ۲ اتفاق می افتد ، و -60 مقدار مینیمم است و در ۴ اتفاق می افتد. شکل E

شکل E

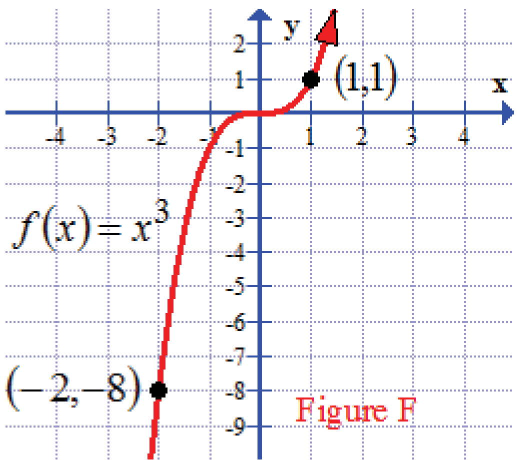


ممکن است یک تابع نقطه بحرانی داشته باشد ولی مربوط به مقدار اکستریم نباشد. مانند مثال بعد.

مثال ۳ ـ اگر $f(x) = x^{۳}$ باشد ، مقادیر اکستریم f را در $[-۲, ۱]$ پیدا کنید ، و مشخص کنید این مقادیر در کدام اعداد اتفاق می افتند.

پاسخ

تابع مشتق پذیر است و $f'(x) = ۳x^{۲}$ است. پس $f'(x) = 0$ است فقط برای $x = 0$. چون $f(-۲) = -۸$ و $f(0) = 0$ و $f(۱) = ۱$ و لذا -۸ و ۱ مقادیر اکستریم هستند و به ترتیب در -۲ و ۱ اتفاق می افتند. ملاحظه می کنید که $x = 0$ نقطه بحرانی است ولی مقدار اکستریم نیست. شکل F

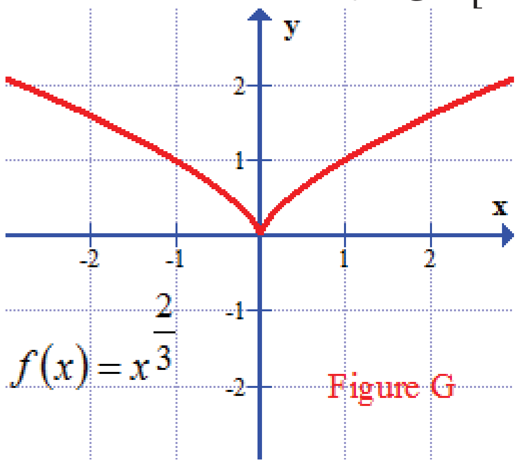


همچنین ممکن است یک تابع f در یک نقطه بحرانی c مقدار اکستریم داشته باشد ولی در آن نقطه بحرانی $f'(c)$ وجود نداشته باشد. مثلا اگر داشته باشیم $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$, پس $f'(0)$ وجود ندارد. زیرا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{۲}{۳}}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{-۱}{۳}}$$

ملاحظه می کنید حد بالا وجود ندارد. پس صفر نقطه بحرانی است. اما چون $f(x)\geq 0$ است برای تمام x ها و $f(0)=0$, پس f در 0 مقدار مینیمم دارد. شکل G

همچنین ملاحظه می کنید که $f(-۱)=۱$. این مقدار ماکسیمم f در $[-۱,۱]$ است. پس f دو مرتبه مقدار ماکسیمم در $[-۱,۱]$ می گیرد.



مثال ۴ - شخصی مصالح دو کیلو متر نرده دارد و می خواهداطراف یک زمین مستطیل شکل نرده کشی‌کند بطوری که این مستطیل حد اکثر مساحت را داشته باشد. طول و عرض این مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ

هر قطعه زمین مستطیل شکل دارای طول x و عرض y است. چون دو کیلومتر نرده داریم پس محیط این مستطیل مطابق زیر است.

$$۲x+۲y=۲ \quad \text{برای} \quad 0\leq x\leq ۱ \quad \text{و} \quad 0\leq y\leq ۱$$

پس $y=۱-x$ است و لذا می توانیم مساحت مستطیل را به صورت یک تابع x بنویسیم.

$$A(x)=xy=x(۱-x) \quad \text{برای} \quad 0\leq x\leq ۱$$

حالا باید مقدار ماکسیمم A در بازه $[0,۱]$ پیدا کنیم. چون $A'(x)=۱-۲x$ است ، پس داریم $A'(x)=0$ است فقط اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد. بر اساس قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم می دانیم که A می تواند مقدار ماکسیمم در بازه $[0,۱]$ فقط در 0 و یا در $\frac{۱}{۲}$ و یا در ۱ داشته باشد.اما

$$A(0)=0 \quad ,A\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴} \quad , \quad A(۱)=0$$

پس مقدار ماکسیمم A در $x=\frac{۱}{۲}$ کیلو متر اتفاق می افتد. و در نهایت

$$y=۱-x=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

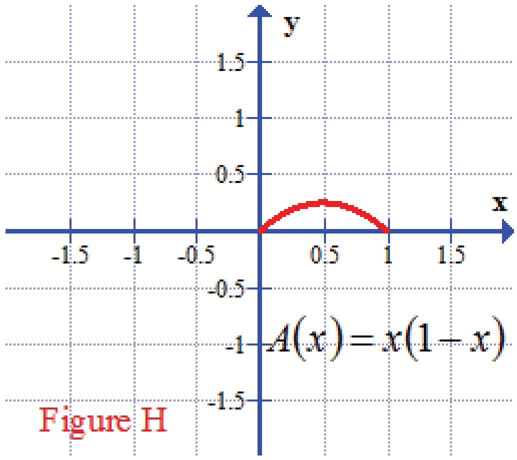
پس داریم

$$x=\frac{۱}{۲} \quad ، \quad y=\frac{۱}{۲}$$

یعنی حصار باید اطراف یک مربع به ابعاد $\frac{۱}{۲}$ کیلو متر احدث شود.

$$A\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴} \quad \text{کیلو متر مربع}$$

شکل H



تعریف ماکسیمم و مینیمم موضعی Definition of Relative Maximum and Minimum

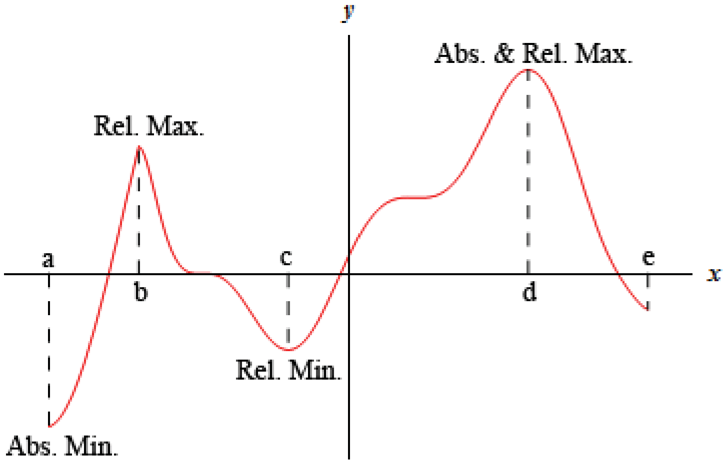
یک تابع f یک **مقدار ما کسیمم موضعی Relative Maximum Value** در c دارد اگر یک عدد مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد ، بطوری که $f(c)$ مقدار ماکسیمم f در بازه $[c-\partial, c+\partial]$ باشد.

به همین طریق

یک تابع f یک **مقدار مینیمم موضعی Relative Minimum Value** در c دارد اگر یک عدد مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد ، بطوری که $f(c)$ مقدار مینیمم f در بازه $[c-\partial, c+\partial]$ باشد.

مقداری که یا ماکسیمم و یا مینیمم موضعی باشد را **مقدار اکستریم موضعی** می نامیم.

مقادیر اکستریم موضعی مانند بالا و پایین تپه هستند.



در تصویر بالا هم ماکسیمم و مینیمم موضعی نشان داده شده است و هم ماکسیمم و مینیمم مطلق ، شکل فرق آنها را کاملا نشان می دهد.

ماکسیمم مطلق Absolute Maximum

مینیمم مطلق Absolute Minimum

از تعریف ماکسیمم و مینیمم موضعی چنین استنباط می شود که اگر f در c اکستریم موضعی داشته باشد ، پس f در بازه $[c-\partial, c+\partial]$ تعریف شده است.

از تعریف بالا و قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم چنین استنباط می شود که اگر f در c اکستریم موضعی داشته باشد ، ، پس c یک نقطه بحرانی f است. مثال بعد را ملاحظه کنید.

مثال ۵ ـ اگر $f(x) = x^{۳} - ۳x - ۲$ باشد , مقادیر اکستریم موضعی f را پیدا کنید و مشخص کنید در کدام اعداد اتفاق می افتند.

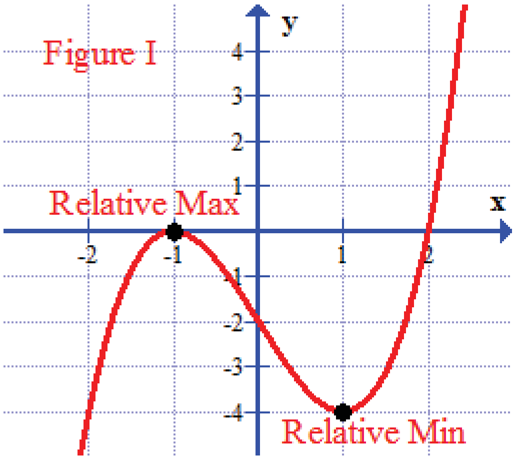
پاسخ

چون $f'(x)$ برای تمام x ها وجود دارد ، پس مقادیر اکستریم موضعی فقط در اعدادی اتفاق می افتند که تساوی $f'(x) = 0$ را بر قرار کنند.

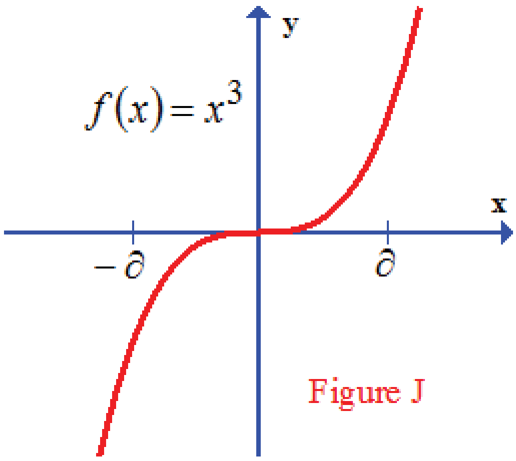
$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۳ = ۳\left(x^{۲} - ۱\right) = ۳(x+۱)(x-۱)$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = -۱$ و $x = ۱$

برای این که نشان دهیم f یک مقدار اکستریم موضعی در ۱ دارد ، یک بازه اطراف ۱ پیدا می کنیم که در آن f در ۱ مقدار اکستریم موضعی داشته باشد. مثلا بازه $[0,۲]$ در نظر بگیرید. با کمی محاسبه ملاحظه می کنید که $f(0) = -۲$ ، و $f(۱) = -۴$, و $f(۲) = 0$ است. بر اساس قضیه مکمل $f(۱)$ مقدار مینیمم f در بازه $[0,۲]$ است ، و لذا $f(۱)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است. به همین طریق $f(-۲) = -۴$ و $f(-۱) = 0$ و $f(0) = -۲$ است ، پس $f(-۱)$ مقدار ماکسیمم f در بازه $[-۲,0]$ است. پس $f(-۱)$ مقدار ماکسیمم موضعی f است. شکل I

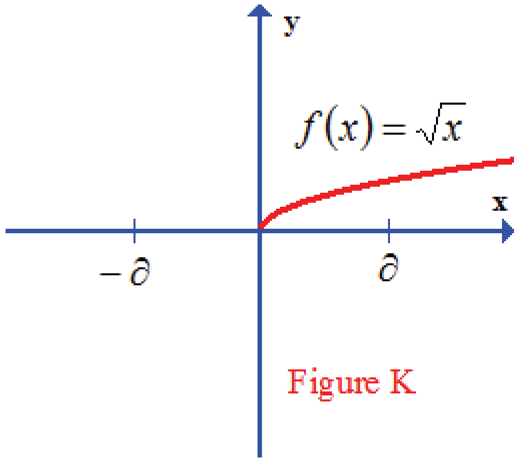


توجه - توجه داشته باشید که صرفا چون $f'(c)=0$ است لزوما به این معنی نیست که f در c مقدار اکستریم موضعی دارد. مثلا اگر داشته باشیم $f(x)=x^{۳}$. شکل J
می دانیم که $f'(0)=0$ است ، اما $f(0)=0$ مقدار اکستریم در هیچ بازه ای به شکل $[-\partial,\partial]$ نیست. در بخش ۳.۶ بحث می کنیم که ممکن است مشتق صفر باشد اما در آن نقطه اکستریم موضعی نداشته باشیم.



همچنین تاکید می کنیم که اگر یک تابع در بازه ای به شکل $[c-\partial,c+\partial]$ تعریف نشده باشد ، پس f نمی تواند اکستریم موضعی در c داشته باشد. حتی اگر f در c مقدار اکستریم داشته باشد.

مثلا اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x}$ پس f در صفر مقدار مینیمم دارد ، اما f در صفر یک مقدار مینیمم موضعی ندارد. زیر f در بازه $[-\partial,\partial]$ تعریف شده نیست. شکل K


y
$f(x)=\sqrt{x}$
x
$-\partial$
∂
Figure K

تمرینات ۳.۱

در تمرینات ۸ – ۱ نقاط بحرانی توابع را اگر وجود داشته باشند ، پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^۲ + ۴x + ۶$

۲) $f(x) = ۳x^۴ + ۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱$

۳) $g(x) = x + \frac{۱}{x}$

۴) $k(t) = \frac{۱}{t^۲ + ۴}$

۵) $k(t) = ۳t^{\frac{۲}{۵}}$

۶) $f(x) = \sin x$

۷) $f(x) = x + \sin x$

۸) $f(z) = |z - ۲|$

در تمرینات ۱۵ – ۹ تمام مقادیر اکستریم توابع را اگر وجود داشته باشند در بازه داده شده پیدا کنید و مشخص کنید در کدام اعداد اتفاق می افتند.

۹) $f(x) = x^۲ - x; [0, ۲]$

۱۰) $g(x) = x^۴ - ۴x; [-۴, ۴]$

۱۱) $f(t) = -\frac{۱}{۲t}; (0, \infty)$

۱۲) $k(z) = \sqrt{۱ + z^۲}; [-۲, ۳]$

۱۳) $f(x) = \sqrt{|x|}; (-۱, ۲)$

۱۴) $f(x) = -\sin \sqrt[۳]{x}\,; \left[-\frac{\pi^۳}{۲۷}, \frac{\pi^۳}{۸}\right]$

۱۵) $f(x) = \tan \frac{x}{۲}; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{۶}\right]$

در تمرینات ۲۰ – ۱۶ تمام مقادیر اکستریم موضعی توابع را اگر وجود داشته باشند پیدا کنید و مشخص کنید در کدام اعداد اتفاق می افتند.

۱۶) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$

۱۷) $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۲$

۱۸) $g(x) = x^۵ - ۲۰x$

۱۹) $f(x) = -۳ - \sin x$

۲۰) $f(x) = \sec \pi x$

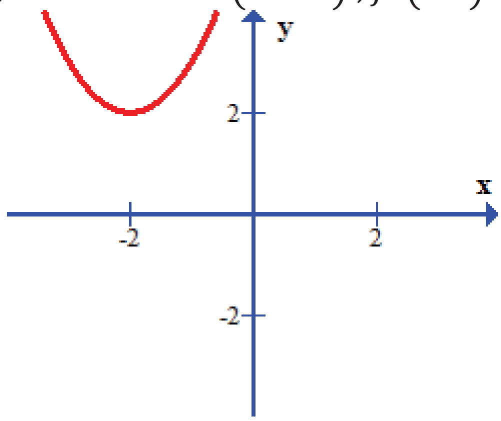
۲۱ – قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم را برای حالت $f'(c) < 0$ ثابت کنید.

پاسخ تمرینات ۳.۱

در تمرینات ۸ − ۱ نقاط بحرانی توابع را اگر وجود داشته باشند ، پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^۲ + ۴x + ۶$

$$f'(x) = ۲x + ۴ = ۲(x + ۲)\,,f'(-۲) = 0$$



پس نقطه بحرانی ۲− است.

۲) $f(x) = ۳x^۴ + ۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱$

$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۱۲x^۲ - ۲۴x = ۱۲x\left(x^۲ + x - ۲\right) = ۱۲x(x + ۲)(x - ۱)$$

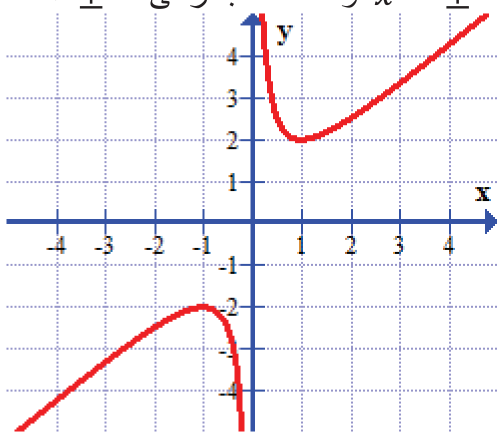
پس $f'(x) = 0$ است برای $x = ۱$ یا $x = -۲$ یا $x = ۰$ و لذا نقاط بحرانی -۲ ، ۱ ، ۰ هستند.

۳) $g(x) = x + \dfrac{۱}{x}$

$$g'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲}$$

$$x^۲ - ۱ = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm ۱$$

پس $g'(x) = 0$ است برای $x = \pm ۱$ و لذا نقاط بحرانی ± ۱ هستند.



۴) $k(t) = \frac{۱}{t^{۲} + ۴}$

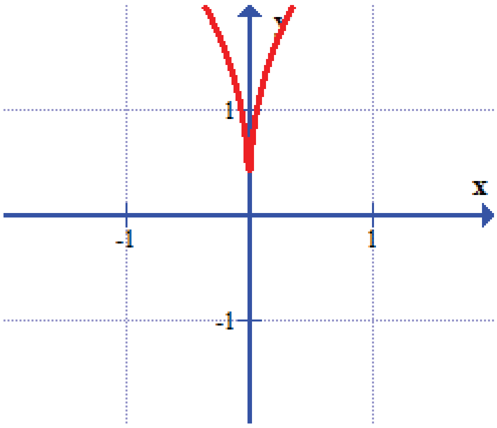
$$k'(t) = \frac{-۲t}{\left(t^{۲} + ۴\right)^{۲}}$$

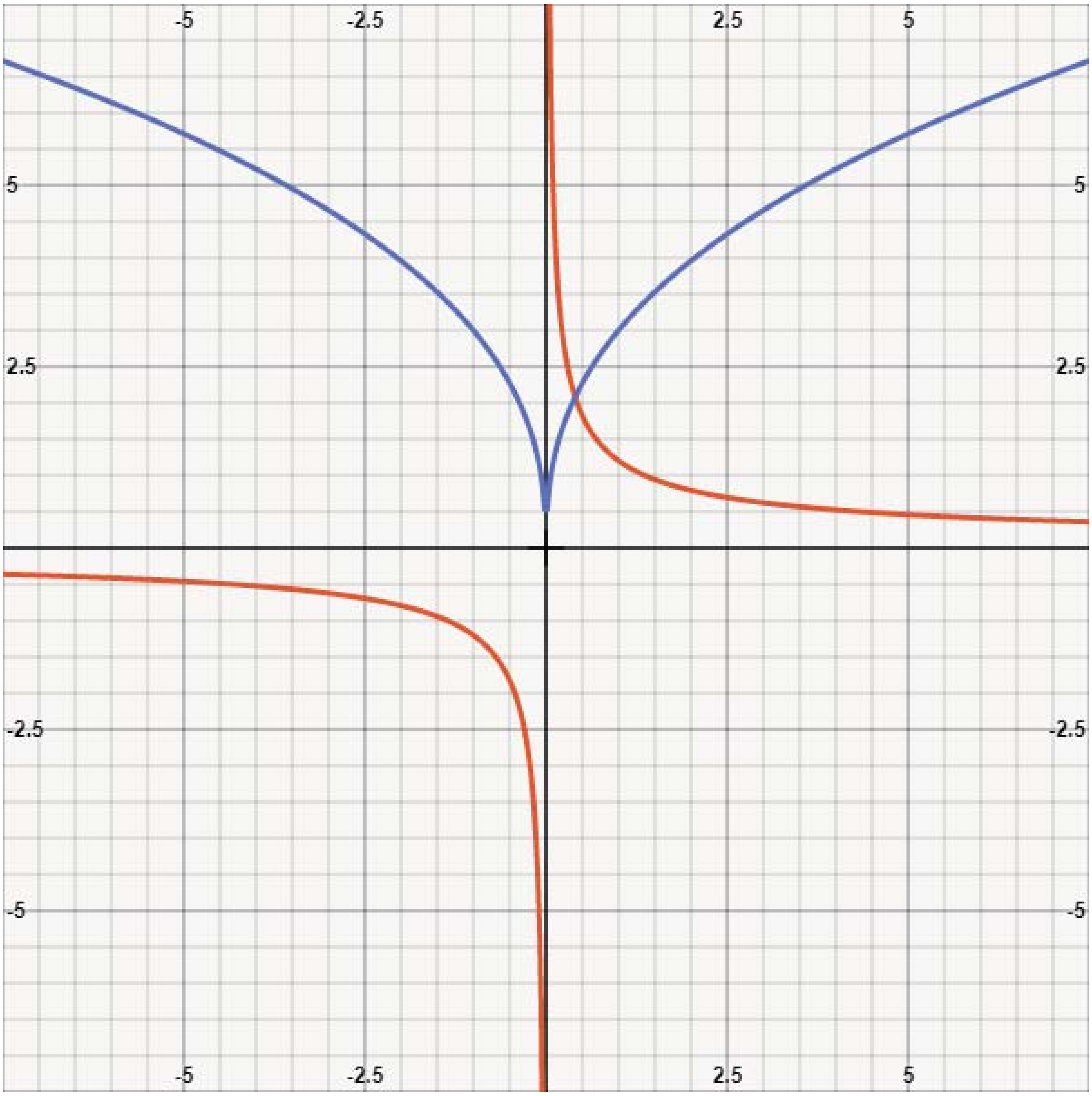
پس $k'(t) = 0$ است برای $x = 0$ و لذا نقطه بحرانی 0 است.

۵) $k(t) = ۳t^{\frac{۲}{۵}}$

$$k'(t) = \frac{۶}{۵} t^{\frac{-۳}{۵}}$$

پس $k'(t)$ هیچ وقت صفر نمی شود. اما k' در صفر وجود ندارد. نقطه بحرانی صفر است.





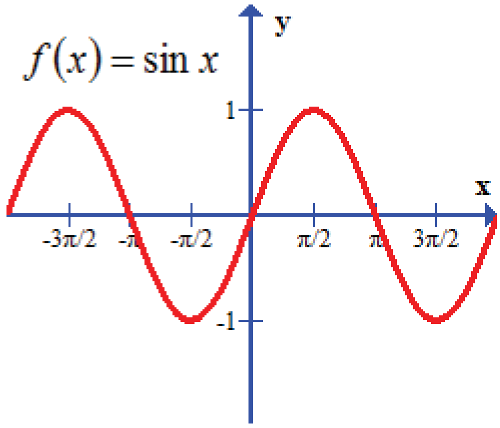
در تصویر بالا نمودار آبی رنگ نمودار k است و قرمز رنگ نمودار k' است و ملاحظه می کنید که k' در صفر وجود ندارد.

۶) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = \frac{\pi}{۲} + n\,\pi$ برای هر عدد صحیح n

و لذا نقاط بحرانی $\frac{\pi}{۲} + n\pi$ هستند برای هر عدد صحیح n



۷) $f(x) = x + \sin x$

$$f'(x) = ۱ + \cos x$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = \pi + ۲n\pi = (۲n + ۱)\pi$ برای هر عدد صحیح n

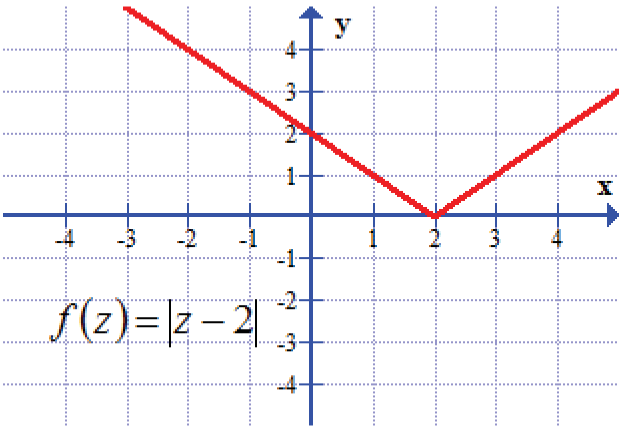
نقاط بحرانی $(۲n + ۱)\pi$ هستند برای هر عدد صحیح n

۸) $f(z) = |z - ۲|$

$$f'(z) = ۱$$

برای $z > ۲$ داریم $f'(z) = ۱$ و برای $z < ۲$ داریم $f'(z) = -۱$ و $f'(۲)$ وجود ندارد.

نقطه بحرانی ۲ است.



در تمرینات ۱۵ — ۹ تمام مقادیر اکستریم توابع را اگر وجود داشته باشند در بازه داده شده پیدا کنید و مشخص کنید در کدام اعداد اتفاق می افتند.

۹) $f(x) = x^۲ - x; [0, ۲]$

$$f'(x) = ۲x - ۱$$

$$۲x - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}$$

پس $\frac{۱}{۲}$ تنها نقطه بحرانی در $(0, ۲)$ است. بنا بر این مقادیر اکستریم می توانند در 0 یا ۲ یا $\frac{۱}{۲}$ اتفاق افتند. چون $f(0) = 0$ و $f(۲) = ۲$ و $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۴}$ است ، پس مقدار مینیمم f در $[0, ۲]$ عبارت است از $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۴}$ و مقدار ماکسیمم $f(۲) = ۲$ است.

۱۰) $g(x) = x^۴ - ۴x; [-۴, ۴]$

$$g'(x) = ۴x^۳ - ۴ = ۴\left(x^۳ - ۱\right)$$

تنها نقطه بحرانی g در $(-۴, ۴)$ عبارت است از ۱ پس مقادیر اکستریم g در $[-۴, ۴]$ می توانند در ۱ یا ۴ و یا ۴– اتفاق افتند. چون $g(-۴) = ۲۷۲$ و $g(۱) = -۳$ و $g(۴) = ۲۴۰$ است ، پس مقدار مینیمم g در $[-۴, ۴]$ عبارت است از $g(۱) = -۳$ و مقدار ماکسیمم $g(-۴) = ۲۷۲$ است.

۱۱) $f(t) = -\frac{۱}{۲t}; (0, \infty)$

$$f'(t) = \frac{۲}{۴t^۲} = \frac{۱}{۲t^۲}$$

ملاحظه می کنید که $f'(t)$ هیچ وقت صفر نمی شود و برای تمام اعداد مثبت t تعریف شده است. پس هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد. و چون f می تواند مقدار اکستریم تنها در نقطه بحرانی و یا در دو نقطه انتهایی بازه ، داشته باشد و چون هیچ کدام وجود ندارند ، پس f نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

۱۲) $k(z) = \sqrt{۱ + z^۲}; [-۲, ۳]$

$$k'(z) = \frac{z}{\sqrt{۱ + z^۲}}$$

تنها نقطه بحرانی k در $(-۲, ۳)$ صفر است. پس مقادیر اکستریم k در $[-۲, ۳]$ می توانند در 0 یا ۲– و یا ۳ باشند. چون $k(-۲) = \sqrt{۵}$ و $k(0) = ۱$ و $k(۳) = \sqrt{۱۰}$ است ، پس

مقدار مینیمم k در $[-۲,۳]$ عبارت است از $k(0)=۱$ و مقدار ماکسیمم $k(۳)=\sqrt{۱۰}$ است.

۱۳) $f(x)=\sqrt{|x|};(-۱,۲)$

چون

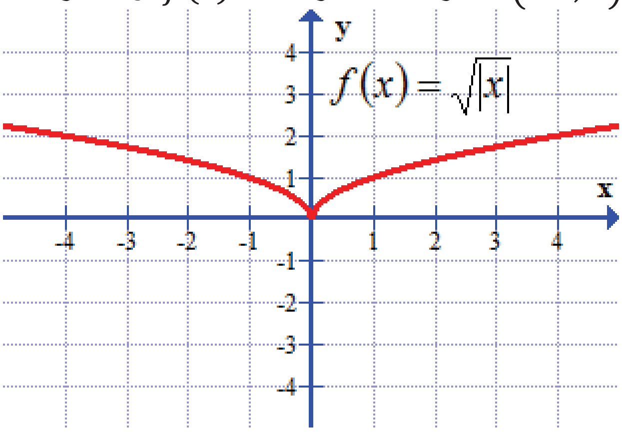
$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \quad \text{برای} \quad x>۰$$

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}} \quad \text{برای} \quad x<۰$$

و $f'(0)$ وجود ندارد ، پس تنها نقطه بحرانی f در $(-۱,۲)$ صفر است. و لذا تنها مقدار اکستریم f می تواند در 0 اتفاق افتد. توجه داشته باشید که برای $-۱<x<۲$ داریم

$$f(x)=\sqrt{|x|}\geq ۰=f(۰)$$

پس مقدار مینیمم f در $(-۱,۲)$ عبارت است از $f(۰)=۰$ و مقدار ماکسیمم هم وجود ندارد.



۱۴) $f(x)=-\sin\sqrt[۳]{x};\left[-\frac{\pi^۳}{۲۷},\frac{\pi^۳}{۸}\right]$

$$f'(x)=-\frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}\cos\sqrt[۳]{x} \quad \text{برای} \quad x\neq ۰$$

و $f'(0)$ وجود ندارد. تنها نقطه بحرانی در $\left(-\frac{\pi^۳}{۲۷},\frac{\pi^۳}{۸}\right)$ صفر است. پس مقدار اکستریم f در $\left[-\frac{\pi^۳}{۲۷},\frac{\pi^۳}{۸}\right]$ می تواند در $-\frac{\pi^۳}{۲۷}$ و یا 0 و یا $\frac{\pi^۳}{۸}$ اتفاق افتد. چون

$$f\left(-\frac{\pi^۳}{۲۷}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$$

$$f(0) = 0$$

و

$$f\left(\frac{\pi^{۳}}{۸}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -۱$$

پس مقدار مینیمم f در $\left[-\frac{\pi^{۳}}{۲۷}, \frac{\pi^{۳}}{۸}\right]$ می شود $f\left(\frac{\pi^{۳}}{۸}\right) = -۱$ و مقدار ماکسیمم می شود $f\left(-\frac{\pi^{۳}}{۲۷}\right) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۱۵) $f(x) = \tan\frac{x}{۲}; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{۶}\right]$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}\, sec^{۲}\frac{x}{۲} > ۰ \quad \text{برای} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}\right)$$

نقطه بحرانی در $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}\right)$ ندارد. وبا توجه به این حقیقت که $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}\right)$ هیچ نقطه انتهایی ندارد ، به این معنی است که f در $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}\right)$ هیچ مقدار اکستریم ندارد.

در تمرینات ۲۰ — ۱۶ تمام مقادیر اکستریم موضعی توابع را اگر وجود داشته باشند پیدا کنید و مشخص کنید در کدام اعداد اتفاق می افتند.

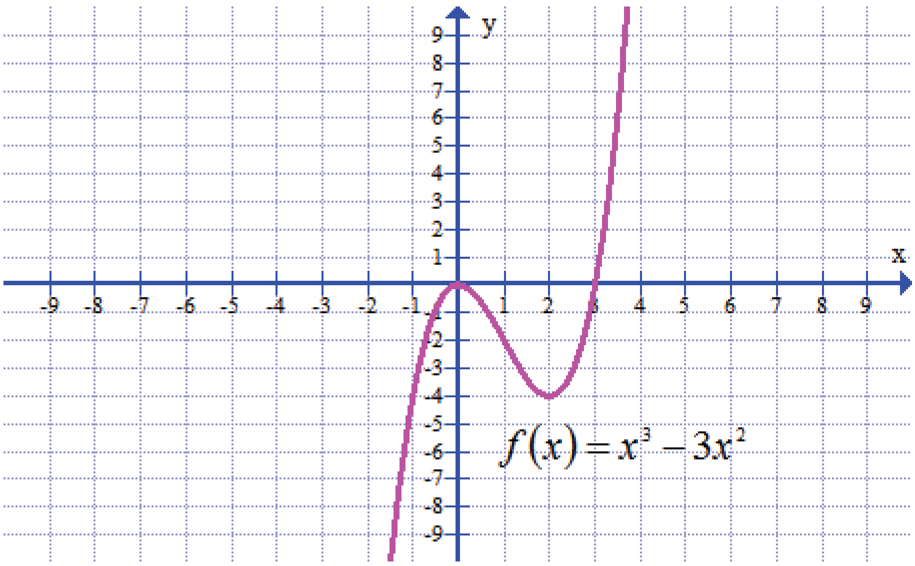
۱۶) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۳x(x-۲)$$

پس نقاط بحرانی f عبارتند از 0 و ۲

در بازه $[-۱,۱]$ اعداد ۱− و 0 و ۱ تنها امکاناتی هستند که ممکن است مقادیر اکستریم در آنها اتفاق افتد. چون $f(-۱) = -۴$ و $f(0) = 0$ و $f(۱) = -۲$ پس 0 مقدار ماکسیمم f در آن بازه است. بنا بر این $f(0) = 0$ مقدار ماکسیمم موضعی است.

در بازه $[۱,۳]$ اعداد ۱ و ۲ و ۳ تنها نامزد هایی هستند که ممکن است در آنها مقدار اکستریم اتفاق افتد. چون $f(۱) = -۲$ و $f(۲) = -۴$ و $f(۳) = 0$ است پس ۴− مقدار مینیمم f در آن بازه است. لذا $f(۲) = -۴$ مقدار مینیمم موضعی است.

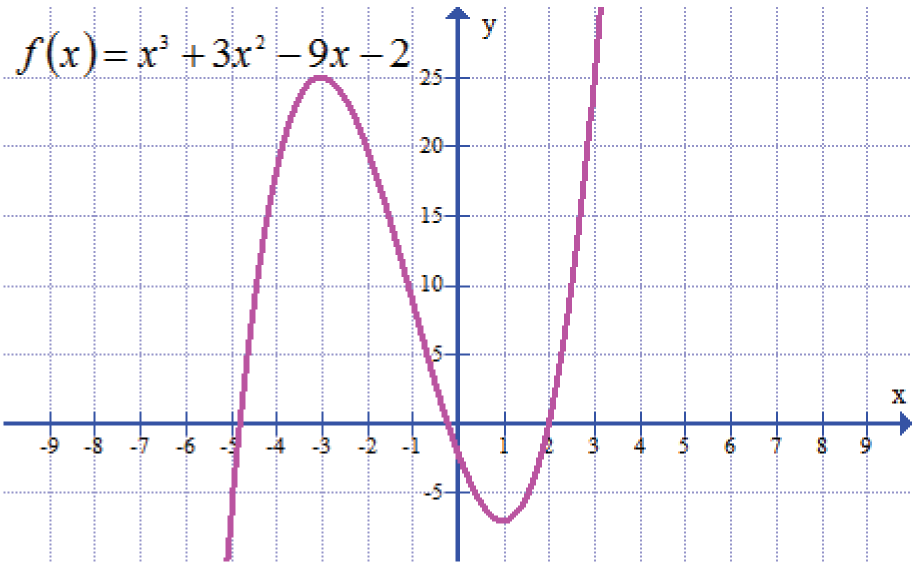


۱۷) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x - ۲$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x - ۹ = ۳\left(x^{۲} + ۲x - ۳\right) = ۳(x + ۳)(x - ۱)$$

پس f در -۳ و ۱ نقاط بحرانی دارد. در بازه $\left(-۴, -۲\right)$ اعداد -۴ و -۳ و -۲ تنها کاندید هایی هستند که ممکن است در آنها مقدار اکستریم اتفاق افتد. چون $f\left(-۴\right) = ۱۸$ و $f\left(-۲\right) = ۲۰$ و $f\left(-۳\right) = ۲۵$ است پس $f\left(-۳\right) = ۲۵$ مقدار ماکسیمم موضعی f در آن بازه است.

در بازه $\left[0, ۲\right]$ اعداد 0 و ۱ و ۲ تنها نامزد هایی هستند که در آنها ممکن است مقدار اکستریم اتفاق افتد. چون $f(0) = -۲$ و $f\left(۱\right) = -۷$ و $f\left(۲\right) = 0$ است پس -۷ مقدار مینیمم f در آن بازه است. لذا $f\left(۱\right) = -۷$ مقدار مینیمم موضعی است.

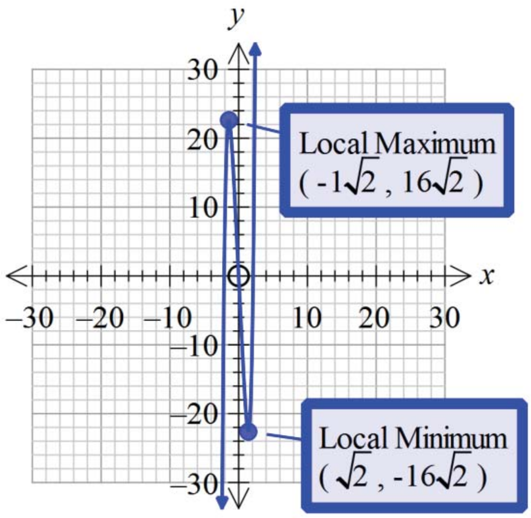


۱۸) $g(x) = x^{۵} - ۲۰x$

$$g'(x) = ۵x^{۴} - ۲۰ = ۵\left(x^{۴} - ۴\right) = ۵\left(x^{۲} - ۲\right)\left(x^{۲} + ۲\right)$$

پس g دارای نقاط بحرانی در $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ دارد. در بازه $\left[-۲\sqrt{۲}, 0\right]$ اعداد $-۲\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ و 0 تنها نامزد هایی هستند که ممکن است مقدار اکستریم در آنها اتفاق افتد. چون $g\left(-۲\sqrt{۲}\right) = -۸۸\sqrt{۲}$ و $g\left(-\sqrt{۲}\right) = ۱۶\sqrt{۲}$ و $g(0) = 0$ است ، پس $۱۶\sqrt{۲}$ مقدار ماکسیمم g در آن بازه است. لذا $g\left(-\sqrt{۲}\right) = ۱۶\sqrt{۲}$ مقدار ماکسیمم موضعی است.

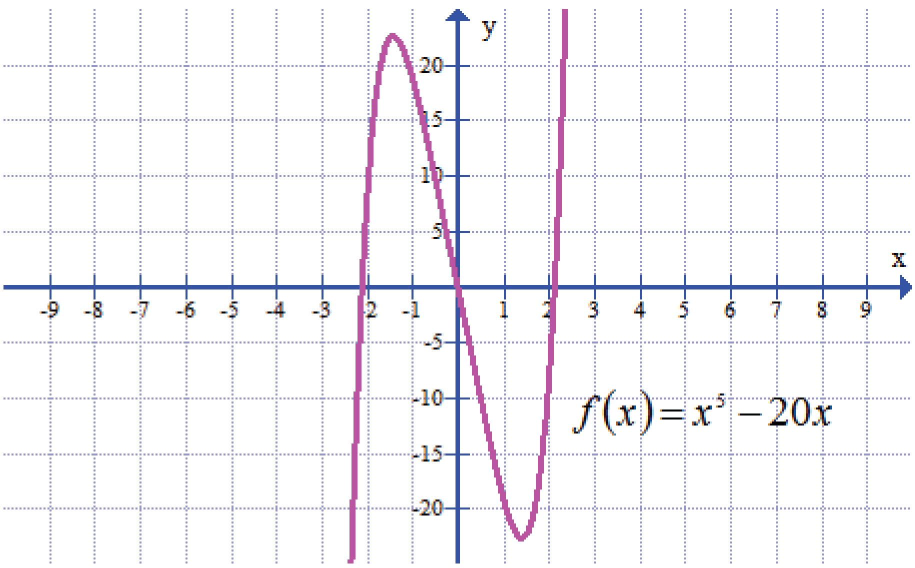
چون g یک تابع فرد است ، پس $g\left(\sqrt{۲}\right) = -۱۶\sqrt{۲}$ مقدار مینیمم موضعی است.



همان طور که در شکل بالا ملاحظه می کنید ، به ماکسیمم موضعی ، ماکسیمم محلی هم می گویند ، به همین ترتیب مینیمم محلی

ماکسیمم محلی Local Maximum

مینیمم محلی Local Minimum



۱۹) $f(x) = -۳ - \sin x$

$$f'(x) = -\cos x$$

ملاحظه می کنید که f در $\frac{\pi}{۲} + n\pi$ نقاط بحران دارد. n می تواند هر عدد صحیحی باشد.

چون

$$f(x) = -۳ - \sin x \geq -۴ = -۳ - \sin\left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right)$$

است برای هر عدد صحیح زوج n

پس

$$f\left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right) = -۴$$

مقدار مینیمم موضعی است بر هر عدد صحیح زوج n

و چون

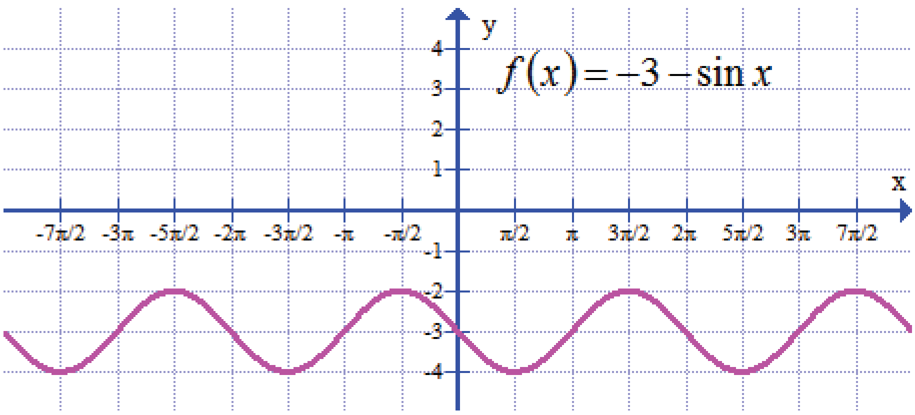
$$f(x) = -۳ - \sin x \leq -۲ = -۳ - \sin\left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right)$$

است بر هر عدد صحیح فرد n

پس

$$f\left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right) = -۲$$

مقدار ماکسیمم موضعی است برای هر عدد صحیح فرد n



۲۰) $f(x)=\sec \pi x$

$$f'(x)=\pi \sec\pi x \tan\pi x$$

پس f در هر عدد صحیح n نقاط بحرانی دارد. چون

$$f(x)=\sec\pi x \geq ۱ = f(n)$$

است برای

$$n-\frac{۱}{۲}<x<n+\frac{۱}{۲}$$

و هر عدد صحیح زوج n پس $f(n)=۱$ یک مقدار مینیمم موضعی است برای هر عدد صحیح زوج n

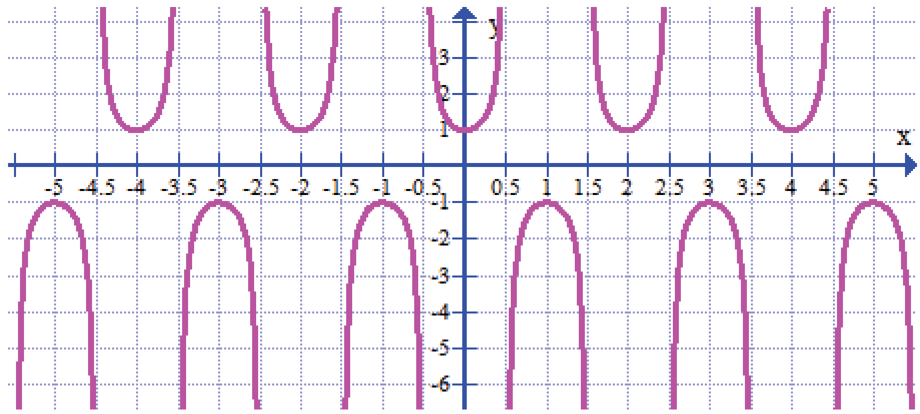
به همین طریق چون

$$f(x)=\sec\pi x \leq -۱ = f(n)$$

است برای

$$n-\frac{۱}{۲}<x<n+\frac{۱}{۲}$$

و هر عدد صحیح فرد n پس $f(n)=-۱$ یک مقدار ماکسیمم موضعی است برای هر عدد صحیح فرد n



۲۱ – قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم را برای حالت $f'(c) < 0$ ثابت کنید.
حالت دوم که $f'(c) < 0$ است. چون

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(x)}{x - c} < 0$$

است ، پس طبق قضیه شماره ۱۷ بخش ۱.۳ که گفتیم
اگر $\lim_{xa\infty} g(x) > 0$ باشد ، پس $g(x) > 0$ است برای تمام x ها که به اندازه کافی به a نزدیک باشند.
می دانیم که

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

است. برای چنین x اگر $x > c$ باشد ، پس

$$f(x) - f(c) = \overbrace{(x - c)}^{\text{مثبت}} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)}^{\text{منفی}} < 0$$

پس $f(x) < f(c)$ است و در نتیجه f مقدار حد اقلی در c ندارد. اما اگر $x < c$ باشد ، پس

$$f(x) - f(c) = \overbrace{(x - c)}^{\text{منفی}} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)}^{\text{منفی}} > 0$$

است و لذا $f(x) > f(c)$ است. و در نتیجه f در c مقدار حد اقلی ندارد. پس اگر
$f'(c) < 0$
باشد ، f در c نه مقدار ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

۳.۲ – قضیه مقدار میانگین The Mean Value Theorem

در بخش ۳.۱قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم را بحث کردیم. این قضیه می گوید مقدار اکستریم یک تابع در $[a,b]$ می تواند در نقاط انتهایی $[a,b]$ و یا در نقر بحرانی اتفاق افتند. **قضیه رول بر وزن حول** می گوید اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)$ باشد ، پس همیشه حد اقل یک نقطه بحرانی f در (a,b) وجود دارد.

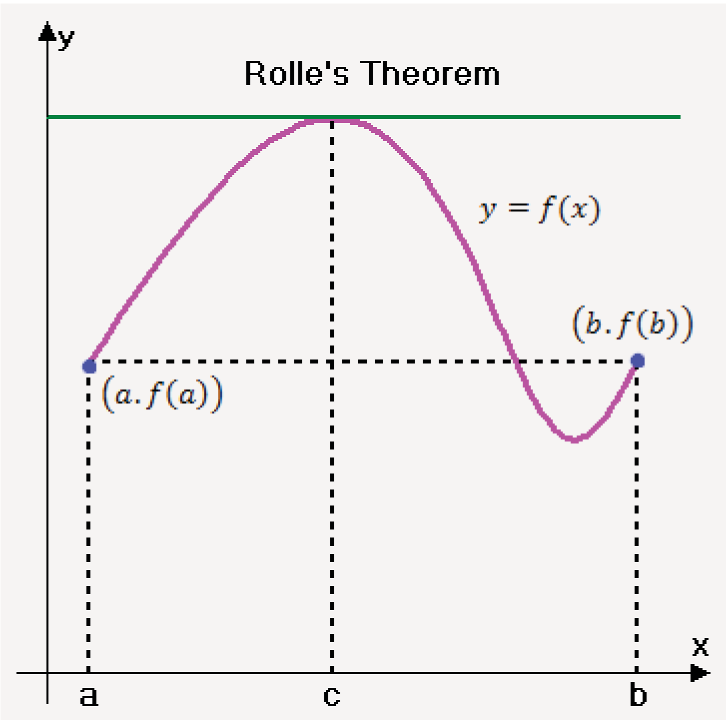
قضیه رول Rolle's Theorem
اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و در (a,b) مشتق پذیر و اگر $f(a)=f(b)$ باشد ، حد اقل یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد بطوری که $f'(c)=0$ است.

اثبات –اگر f ثابت باشد ، پس مشتق آن صفر است ، و لذا $f'(c)=0$ است برای هر عدد c در (a,b) اگر f ثابت نباشد ، پس مقادیر ماکسیمم و مینیمم آن ، بر اساس قضیه ماکسیمم و مینیمم ، متفاوت هستند. اما چون

$$f(a)=f(b)$$

است ، پس حد اقل یکی از این دو مقدار باید در یک نقطه c در (a,b) اتفاق افتد. چون بر اساس فرض قضیه ، f در c مشتق پذیر است ، پس $f'(c)=0$ است.

شکل A



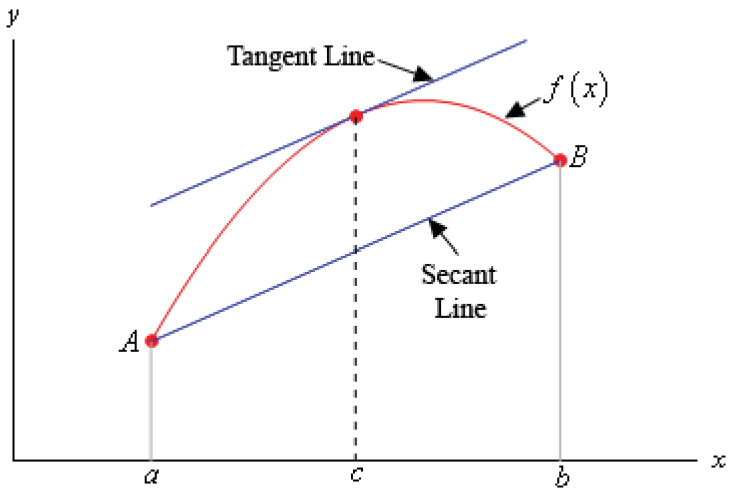
از قضیه رول چنین نتیجه می شود که اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)$ باشد ، پس یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد بطوری که یا $f'(c)=0$ است و یا $f'(c)$ وجود ندارد. در هر دو حالت c یک نقطه بحرانی f در (a,b) است.

توجه داشته باشید که شرط $f(a) = f(b)$ را نمی توان از قضیه رول حذف کرد ، مثلا اگر داشته باشیم $f(x) = x$ پس $f'(x) = ۱$ است برای تمام x ها در (a, b) و این به معنی آن است که $f'(c) \neq 0$ است برای تمام c ها در (a, b)

ازقضیه رول چنین استنباط می شود که در یک نقطه مثلا $(c, f(c))$ روی نمودار f شیب خط مماس صفر است. خط سبز رنگ در شکل A همچنین خطی که $(a, f(a))$ را به $(b, f(b))$ وصل می کند ، افقی است چون داریم $f(a) = f(b)$ خط نقطه چین در شکل A و این هر دو خط با هم موازی هستند.

حالا این سوال پیش می آید آیا قضیه ای وجود دارد که بر عکس قضیه رول $f(a) \neq f(b)$ باشد ؟ یا به عبارت دیگر ، آیا لازم است یک نقطه مانند c در (a, b) وجود داشته باشد بطوری که خط مماس بر نمودار f در $(c, f(c))$ موازی خطی باشد که $(a, f(a))$ را به $(b, f(b))$ وصل می کند ؟ شکل B

شکل B



چون دو خط غیر عمود هنگامی باهم موازی هستند که شیب آنها با هم مساوی باشند ، پس سوال بالا را می توان چنین باز نویسی کرد. آیا لزوما نقطه ای مانند c در (a, b) وجود دارد بطوری که رابطه

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بر قرار باشد ؟ قضیه مقدار مینگین به این سوال پاسخ می دهد.

خط مماس $Tngent\ Line$
خط قاطع $Secant\ Line$

قضیه مقدار میانگین The Mean Value Theorem

اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و در (a,b) مشتق پذیر ، پس یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد بطوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (۱)$$

اثبات

می دانید که معادله یک خط از طریق فرمول زیر بدست می آید.

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

با توجه به شکل B معادله خط قاطع Secant Line را مطابق زیر می نویسیم.

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

واضح نیست؟ $y_۱=f(a)$ و $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ روشن شد؟

ادامه می دهیم.

معادله بالا را برای y حل می کنیم.

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

حالا فرض یک تابع $g(x)$ فرض می کنیم به طریق زیر تعریف شود.

$$g(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right] \text{ ، } a\le x\le b$$

حالا g در $[a,b]$ پیوسته است و در (a,b) مشتق پذیر ، چون g یک ترکیب ساده ای از f و توابع ثابت و یک تابع خطی است. با جانشین کردن در معادله بالا داریم

$$g(a)=g(b)=0$$

پس بر اساس قضیه رول ، یک عدد c در (a,b) وجود دارد بطوری که $g'(c)=0$ است. اما

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad ,a<x<b$$

و لذا

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

معادله بالا را برای $f'(c)$ حل می کنیم.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال ۱ – اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}+۲x$ یک عدد c در $(0,۳)$ پیدا کنید بطوری که

$$f'(c)=\frac{f(۳)-f(0)}{۳-0}$$

باشد.

پاسخ

چون

$$\frac{f(۳)-f(0)}{۳-0}=\frac{۱۵-0}{۳-0}=۵$$

پس باید یک عدد c در $(0,۳)$ پید کنیم بطوری که $f'(c)=۵$ باشد. می دانیم که

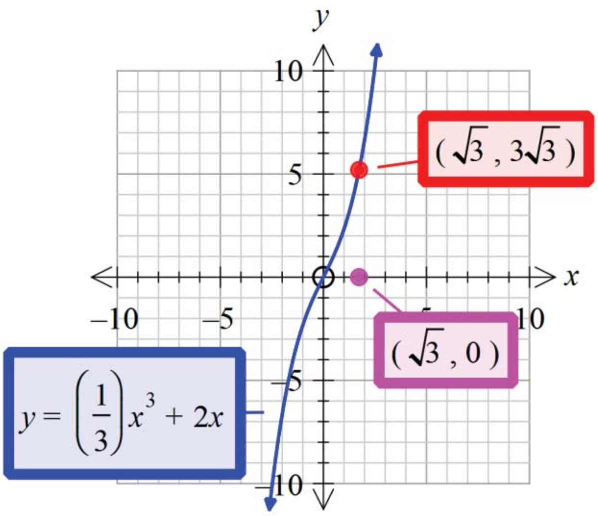
$$f'(x)=x^{۲}+۲$$

پس c باید رابطه زیر را بر قرار کند.

$$c^{۲}+۲=۵$$

پس

$$x^{۲}=۳ \Rightarrow \ c=\sqrt{۳}$$



هنگامی که لاگرانژ $Lagrange$ ریاضی دان فرانسوی بر اولین مرتبه قضیه مقدار میانگین را پیشنهاد کرد ، دو کلمه معدل $Average$ و میانگین $Mean$ مترادف بودند.

این قضیه مقدار میانگین با قضیه مقدار میانی که در بخش ۱.۶ آمد ، اشتباه نشود.

اگر $f(t)$ نشانگر مکان یک شئی روی محور x در زمان t باشد ، پس سرعت متوسط $Average$ یا مینگین $Mean$ طی بازه $[a,b]$ می شود

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پس بر اساس قضیه مقدار میانگین ، سرعت متوسط در طول بازه $[a,b]$ مساوی است با سرعت $f'(c)$ در لحظه c در (a,b)

تمرینات ۳.۲

در تمرینات ۵ – ۱ تمام اعداد c در بازه (a,b) که در آنها خط مماس بر نمودار f موازی خطی است که نقاط $\big(a,f(a)\big)$ و $\big(b,f(b)\big)$ را به هم متصل می کنند ، پیدا کنید.

۱) $f(x)=x^{۲}-۶x; a=0, b=۴$

۲) $f(x)=x^{۳}-۶x; a=-۲, b=0$

۳) $f(x)=x^{۳}+۴; a=-۲, b=۱$

۴) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱; a=-۲, b=۲$

۵) $f(x)=۱+x^{\frac{۱}{۳}}; a=۱, b=۸$

۶ – اگر داشته باشیم $f(x)=Ax^{۲}+Bx+C$ در صورتی که A ، B, C اعداد ثابت باشند و A صفر نباشد. نشان دهید که برای هر بازه ای مانند $[a,b]$ عدد c که قضیه مقدار میانگین آنرا تضمین کرده ، نقطه میانی $[a,b]$ است.

۷ – فرض کنید برای $a\le x\le b$ داشته باشیم

$$|f'(x)|\le M$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید که

$$|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$$

است.

۸ ـ با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۷ کران بالا و کران پایین عدد $۲۸^{\frac{۲}{۳}}$ را پیدا کنید.

۹ـ با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۷ حدس بزنید که عدد ۱ / ۷ چه قدر از مقدار حقیقی $\sqrt{۳}$ فاصله دارد.

۱۰

بعد از یک تصادف اتومبیل ، مشخص شد که یکی از اتومبیل ها بعد ازترمزگرفتن ۹ ثانیه طول کشید و ۴۰۰ فوت خط ترمز روی جاده اثر گذاشت تا متوقف شده است . اگر حد اکثر مجاز سرعت ۳۰ مایل درساعت بوده ، آیا می توان ثابت کرد که راننده سرعت غیر مجاز داشته است؟ یعنی سرعت بیش از ۳۰ مایل در ساعت

راهنمایی ۳۰ میل در ساعت مساوی است با ۴۴ فوت در ثانیه

۱۱ – با استفاده از قضیه رول نشان دهید که برای تساوی $\tan x = ۱ - x$ در بازه $(0,۱)$ یک پاسخ وجود دارد.

پاسخ تمرینات ۳.۲

در تمرینات ۵ – ۱ تمام اعداد c در بازه (a,b) که در آنها خط مماس بر نمودار f موازی خطی است که نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ را به هم متصل می کنند ، پیدا کنید.

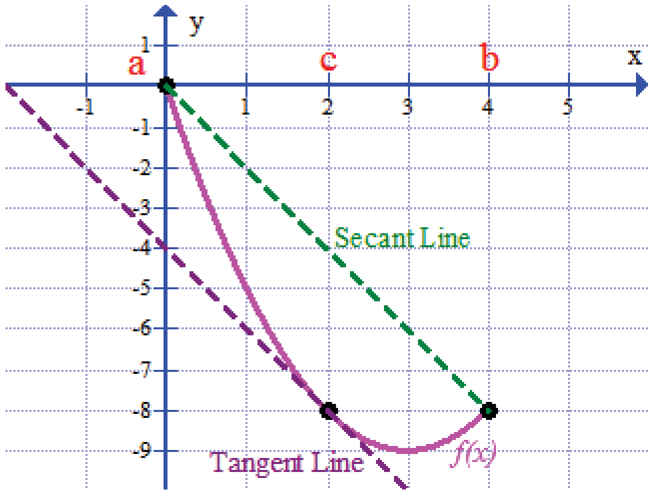
۱) $f(x) = x^۲ - ۶x; a = 0, b = ۴$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-۸-۰}{۴-۰} = -۲$$

$$f'(x) = ۲x - ۶$$

باید یک عدد c در بازه $(0,۴)$ پیدا کنیم ، بطوری که $f'(c) = -۲$ باشد. یعنی

$$۲c - ۶ = -۲ \Rightarrow c = ۲$$



۲) $f(x) = x^۳ - ۶x; a = -۲, b = 0$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{۰-۴}{۰-(-۲)} = -۲$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶$$

باید یک عدد c در بازه $(-۲,0)$ پیدا کنیم ، بطوری که $f'(c) = -۲$ باشد. یعنی

$$۳c^۲ - ۶ = -۲ \Rightarrow c^۲ = \frac{۴}{۳}$$

چون $-۲ < c < 0$ باید باشد ، پس $c = -\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ است.

۳) $f(x) = x^۳ + ۴; a = -۲, b = ۱$

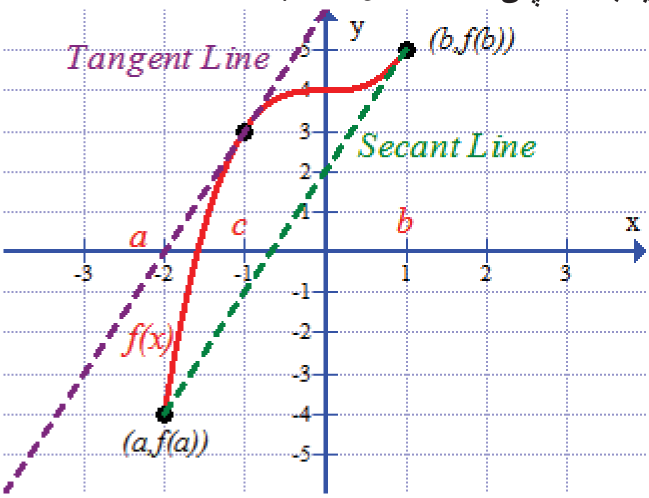
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۵-(-۴)}{۱-(-۲)}=\frac{۹}{۳}=۳$$

$$f'(x)=۳x^{۲}$$

باید c را در بازه $(-۲,۱)$ پیدا کنیم بطوری که $f'(x)=۳$ باشد ، یعنی

$$۳c^{۲}=۳ \quad \Rightarrow c^{۲}=۱$$

چون $-۲<c<۱$ باید باشد ، پس $c=-۱$ است.



۴) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱; a=-۲, b=۲$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-۱}=\frac{f(۲)-f(-۲)}{۲-(-۲)}=\frac{۳-(-۲۵)}{۴}=۷$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x+۳$$

باید در بازه (-۲.۲) یک عدد c پیدا کنیم ، بطوری که $f'(c)=۷$ باشد. یعنی

$$۳c^{۲}-۶c+۳=۷ \quad \Rightarrow ۳c^{۲}-۶c-۴=0$$

ریشه های معادله درجه دوم بالا $۱\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$ است. چون باید $-۲<c<۲$ باشد ، پس

$$c=۱-\frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

است.

۵) $f(x)=۱+x^{\frac{۱}{۳}}; a=۱, b=۸$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۳-۲}{۸-۱}=\frac{۱}{۷}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}$$

باید یک عدد c در بازه $(۱,۸)$ پیدا کنیم ، بطوری که $f'(c) = \frac{۱}{۷}$ باشد یعنی

$$\frac{۱}{۳}c^{\frac{-۲}{۳}} = \frac{۱}{y}$$

باشد. پس داریم

$$c = \left(\frac{۷}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

۶ – اگر داشته باشیم $f(x) = Ax^۲ + Bx + C$ در صورتی که A ، B , C اعداد ثابت باشند و A صفر نباشد. نشان دهید که برای هر بازه ای مانند $[a,b]$ عدد c که قضیه مقدار میانگین آنرا تضمین کرده ، نقطه میانی $[a,b]$ است.

پاسخ

چون $f'(x) = ۲Ax + B$ است ، پس c باید تساوی زیر را بر قرار کنند.

$$۲Ac + B = \frac{\left(Ab^۲ + Bb + C\right) - \left(Aa^۲ + Ba + C\right)}{b-a}$$

$$= \frac{A\left(b^۲ - a^۲\right) + B(b-a)}{b-a} = A(b+a) + B$$

پس

$$۲Ac + B = A(b+a) + B$$

$$c = \frac{b+a}{۲}$$

پس c نقطه میانی $Midpoint$ بازه $[a,b]$ است.

۷ – فرض کنید برای $a \le x \le b$ داشته باشیم

$$|f'(x)| \le M$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید که

$$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$$

است.

پاسخ

بر اساس قضیه مقدار میانگین ، یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

است. پس داریم

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = |f'(c)| \leq M$$

پس داریم.

$$|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$$

۸ ـ با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۷ کران بالا و کران پایین عدد $۲۸^{\frac{۲}{۳}}$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}}$ باشد ، پس

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}$$

است. و برای $۲۷ \leq x \leq ۲۸$ داریم

$$|f'(x)| \leq \frac{۲}{۹}$$

است. بر اساس تمرین شماره ۷

$$\left|۲۸^{\frac{۲}{۳}} - ۲۷^{\frac{۲}{۳}}\right| \leq \frac{۲}{۹}|۲۸-۲۷| = \frac{۲}{۹}$$

پس

$$۹ - \frac{۲}{۹} \leq ۲۸^{\frac{۲}{۳}} \leq ۹ + \frac{۲}{۹} = \frac{۸۳}{۹}$$

اما

$$۲۸^{\frac{۲}{۳}} > ۹$$

است. پس

$$۹ < ۲۸^{\frac{۲}{۳}} \leq \frac{۸۳}{۹}$$

۹ـ با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۷ حدس بزنید که عدد ۱ / ۷ چه قدر از مقدار حقیقی $\sqrt{۳}$ فاصله دارد.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = \sqrt{x}$ باشد. اگر x در بازه $[۲/۸۹ , ۳]$ باشد ، پس

$$|f'(x)| = \left|\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right| \leq \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۸۹}} = \frac{۱}{۳/۴} < ۰/۲۹۵$$

است. با $a = ۲/۸۹$ و $b = ۳$ تمرین شماره ۷ می گوید که

$$\left|\sqrt{۳} - ۱/۷\right| = |f(۳) - f(۲/۸۹) \leq (۰/۲۹۵)(۳ - ۲/۸۹) = ۰/۰۳۲۴۵|$$

۱۰

بعد از یک تصادف اتومبیل ، مشخص شد که یکی از اتومبیل ها بعد از ترمزگرفتن ۹ ثانیه طول کشید و ۴۰۰ فوت خط ترمز روی جاده اثر گذاشت تا متوقف شده است . اگر حد اکثر مجاز سرعت ۳۰ مایل درساعت بوده ، آیا می توان ثابت کرد که راننده سرعت غیر مجاز داشته است؟ یعنی سرعت بیش از ۳۰ مایل در ساعت

راهنمایی ۳۰ میل در ساعت مساوی است با ۴۴ فوت در ثانیه

پاسخ

فرض می کنیم $f(t)$ مسافتی باشد که اتومبیل در مدت t ثانیه لغزید. پس $f(۰) = ۰$ و $f(۹) = ۴۰۰$ است. اگر فرض کنیم $f(t)$ در $[۰,۹]$ پیوسته و در $(۰,۹)$ مشتق پذیر باشد ، بر اساس قضیه مقدار میانگین ، نتیجه می گیریم که برای یک زمانی مانند $t_۰$ در $(۰,۹)$

$$f'(t_۰) = \frac{f(۹) - f(۰)}{۹ - ۰} = \frac{۴۰۰}{۹} > ۴۴$$

یعنی در لحظه ای بعد از استفاده از ترمز ، سرعت بیش از ۴۴ فوت در ثانیه و یا ۳۰ میل در ساعت بده است. پس اتومبیل بعد از اینکه شروع به لقزش کرد ، سرعت غیر مجاز داشته است.

۱۱ – با استفاده از قضیه رول نشان دهید که برای تساوی $\tan x = ۱ - x$ در بازه $(0,۱)$ یک پاسخ وجود دارد.

پاسخ

فرض می کنیم $f(x) = (x - ۱)\sin x$ باشد. پس f در $[۰,۱]$ پیوسته و در $(۰,۱)$ مشتق پذیر است. چون $f(۰) = f(۱) = ۰$ است و $f'(x) = \sin x + (x - ۱)\cos x$ است ، قضیه رول می گوید که یک عدد مانند c در $(۰,۱)$ وجود دارد ، بطوری که

$$\sin c + (c - ۱)\cos c = ۰$$

و یا

$$\tan c = ۱ - c$$

۳.۳ - کار برد های قضیه مقدار میانگین
Applications of the Mean Value Theorem

چون قضیه مقدار میانگین اغلب جهت اثبات قضایای دیگر بکار برده می شود، این قضیه مهم ترین نتایج حسابان است. حالا این قضیه را برای اثبات دو قضیه کاملا متفاوت بکار می بریم. اولین قضیه می گوید اگر دو تابع دارای شیب های یکسان در هر عددی در یک بازه داشته باشند ، پس تفاوت آن توابع در آن بازه ، یک عدد ثابت است.

قضیه ۳.۳.۱

الف - فرض می کنیم f در یک بازه I پیوسته باشد. اگر برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f'(x) = 0$$

پس f در I یک مقدار ثابت است.

ب - فرض می کنیم f و g در بازه I پیوسته باشند. اگر برای هر نقطه x در I داشته باشیم

$$f'(x) = g'(x)$$

پس $f-g$ یک عدد ثابت است. به عبارت دیگر ، یک عدد ثابت مانند c وجود دارد ، بطوری که برای تمام x ها در I داشته باشیم

$$f(x) = g(x) + C$$

اثبات

قسمت الف

فرض می کنیم x و z دو عدد اختیاری در I باشند و $x < z$ باشد. بر اساس قضیه مقدار میانگین یک عدد مانند c در (x,z) وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c) \qquad (۱)$$

بر اساس فرض قضیه داریم $f'(c) = 0$ است ، پس فرمول (۱) به صورت زیر در می آید.

$$f(z) - f(x) = 0$$

پس

$$f(z) = f(x)$$

پس نتیجه می گیریم که مقدار f برای هر دو عددی در I ثابت است و لذا f در I یک عدد ثابت است. مثلا اگر داشته باشیم $f(x) = ۵$ پس $f(۱) = ۵$ و $f(۲) = ۵$ و الی آخر .

اثبات قسمت ب

بر اساس فرض قضیه داریم

$$f'(x) = g'(x)$$

پس

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

پس $f-g$ شرایط قسمت الف را بر قرار می کند. در نتیجه $f-g$ یک عدد ثابت است. به عبارت دیگر ، یک عدد ثابت مانند C وجود دارد بطوری که

$$f(x) = g(x) + C$$

است برای تمام x ها در I

اگر تابعی داشته باشیم مانند f که در یک بازه مانند I تعریف شده باشد. و اگر تابعی مانند F وجود داشته باشد ، بطوری که
$$F'(x) = f(x)$$
باشد ، آنوقت F را **ضد مشتق** **Antiderivative** تابع f می نامند. چون f مشتق F است در I

پس در یک بازه داده شده ، $x^{۳}$ ضد مشتق $۳x^{۲}$ است و $\sin x$ ضد مشتق $\cos x$ است.

بر اساس قسمت ب قضیه بالا ، اگر یک ضد مشتق F داشته باشیم ، بقیه ضد مشتق ها را با اضافه کردن اعداد ثابتی به F می توانیم پیدا کنیم. پس در هر بازه داده شده ، تنها ضد مشتق های $۳x^{۲}$ توابعی هستند به شکل $x^{۳} + C$ و تنها ضد مشتق های $\cos x$ توابعی هستند به شکل $\sin x + C$

مثال ۱ – ضد مشتق های توابع زیر را پیدا کنید.

الف - $x^{۲} - ۴x$

ب - $sec^{۲}x$

پاسخ

الف – چون $\frac{۱}{۳}x^{۳}$ ضد مشتق $x^{۲}$ است و $-۲x^{۲}$ ضد مشتق $-۴x$ است ، پس
$$\frac{۱}{۳}x^{۳} - ۲x^{۲}$$
یک ضد مشتق $x^{۲} - ۴x$ است و همه ضد مشتق های $x^{۲} - ۴x$ دارای شکل زیر هستند.
$$\frac{۱}{۳}x^{۳} - ۲x^{۲} + C$$
برای هر عدد ثابتی مانند C

ب - یکی از ضد مشتق های $sec^{۲}x$ تابع $\tan x$ است پس همه ضد مشتق های $sec^{۲}x$ دارای شکل زیر هستند.
$$\tan x + C$$
برای هر عدد ثابتی مانند C

در حقیقت فقط یک ضد مشتق با مقدار مشخص در یک نقطه مشخص وجود دارد. مانند مثال ۲

مثال ۲ – اگر f تابعی باشد بطوری که مشتق آن $\cos x$ باشد و $f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -۱$ باشد ، تابع f را مشخص کنید.

پاسخ

چون f و $\sin x$ هر دو ضد مشتق $\cos x$ هستند بر اساس قضیه ۳.۳.۱ قسمت ب یک عدد ثابت مانند C وجود دارد ، بطوری که $f(x) = \sin x + C$ برای یک عدد مناسب C

برای پیدا کردن آن عدد مناسب از فرض مساله که می گوید $f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -۱$ استفاده می کنیم ، پس داریم.

$$-۱ = f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \sin\frac{\pi}{۲} + C = ۱ + C$$

پس $C = -۲$ است و لذا

$$f(x) = \sin x - ۲$$

است.

توابع صعودی و نزولی Increasing and Decreasing Functions

دومین نتیجه قضیه مقدار میانگین این است که در پیدا کردن مقادیراکستریم و تجزیه و تحلیل نمودار یک تابع سهولت ایجاد می کند.

می گوییم یک تابع د ر یک بازه I صعودی **Increasing** است اگر برای x و z در I و $x < z$ داشته باشیم $f(x) \leq f(z)$

یک تابع اکیدا صعودی یا **مطلقا صعودی Strictly Increasing** است اگر برای x و z و $x < z$ **داشته باشیم** $f(x) < f(z)$

تعریف **نزولی Decreasing** و **اکیدا نزولی Strictly Decreasing** مانند تعریف بالا است.

از نظر نمایش هندسی ، یک تابع در I اکیدا صعودی است ، اگر نمودار آن ازچپ به راست به طرف بالا شیب داشته باشد. شکل A

یک تابع مطلقا نزولی است ، اگر نمودار آن از چپ به راست به طرف پایین شیب داشته باشد. شکل B

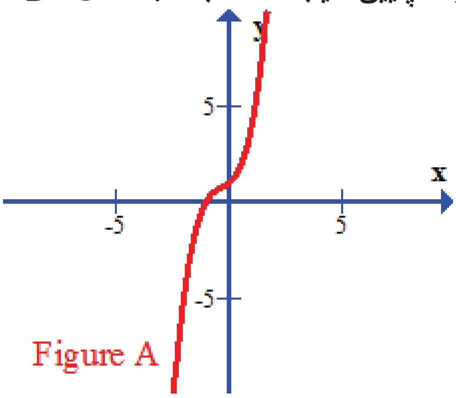


Figure A

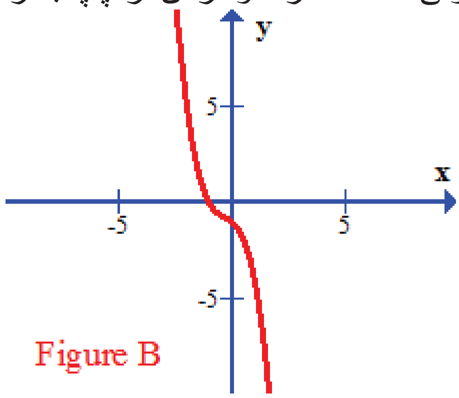


Figure B

قضیه ۳.۳.۲
فرض می کنیم f در یک بازه I پیوسته باشد و در هر یک از نقاط داخلی I مشتق پذیر باشد.
الف –اگر $f'(x) \geq 0$ باشد در هر یک از نقاط داخلی I پس f در I صعودی است. به علاوه f در I اکیدا صعودی است ، اگر $f'(x) = 0$ باشد فقط برای تعداد معدودی نقطه در I

ب - اگر $f'(x) \leq 0$ باشد در هر یک از نقاط داخلی I پس f در I نزولی است. به علاوه f در I اکیدا نزولی است ، اگر $f'(x) = 0$ باشد فقط برای تعداد معدودی نقطه در I

اثبات
الف – فرض می کنیم x و z اعداد انتخابی در I باشند و $x < z$, بر اساس فرض قضیه f در $[x, z]$ پیوسته و در (x, z) مشتق پذیر است. پس می توانیم قضیه مقدار میانگین در مورد f بکار ببریم تا یک عدد c در (x, z) پیدا کنیم بطوری که

$$f'(c) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

باشد. چون $f'(c) \geq 0$ است و $x - z > 0$ پس به این معنی است که

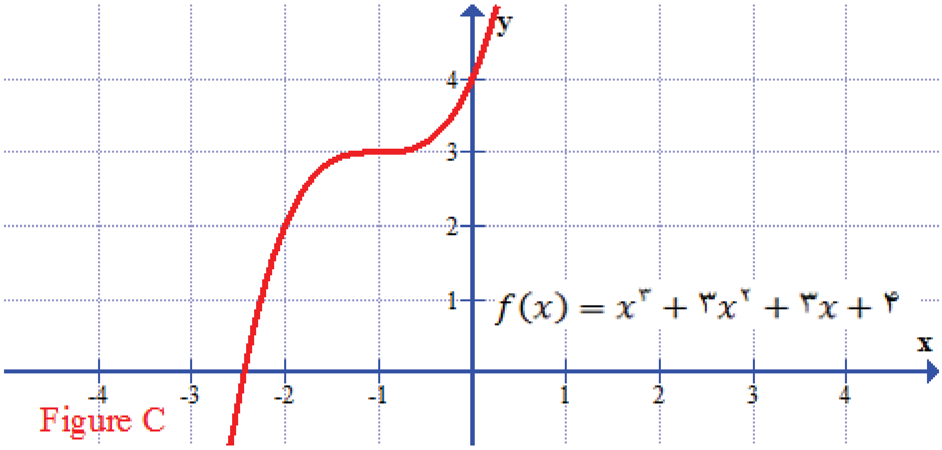
$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x) \geq 0$$

است. پس $f(z) \geq f(x)$ و لذا f در I صعودی است.
برای اثبات جمله آخر قسمت الف ، فرض می کنیم f در I اکیدا صعودی نیست. چون در بالا ثابت کردیم که f صعودی است ، به این معنی است که دو نقطه متفاوت v و w در I وجود دارد بطوری که $v < w$ و $f(v) = f(w)$ است. این یعنی f در $[v, w]$ ثابت است , بطوری که برای $v < x < w$ داریم $f'(x) = 0$
به عبارت دیگر ،صحیح نیست بگوییم $f'(x) > 0$ است برای تمام x ها در I بجز تعداد معدودی نقاط. لذا اگر $f'(x) > 0$ باشد ، بجز تعداد معدودی نقاط در I ، پس f اکیدا در I صعودی است.
اثبات قسمت ب هم شبیه قسمت الف است.

مثال ۳ - اگر $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۴$ باشد ، مشخص کنید در کدام بازه مطلقا صعودی و در کدام بازه مطلقا نزولی است.
پاسخ
برای تمام x ها داریم

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۳ = ۳(x + ۱)^۲ \geq 0$$

پس $f'(x)$ مثبت است بجز برای $x = -۱$ پس بر اساس جمله آخر قسمت الف قضیه ۳.۳.۲ تابع f در $(-\infty, \infty)$ اکیدا صعودی است. شکل C



مثال ۴ ــ اگر $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x - ۳$ باشد ، مشخص کنید در کدام بازه f مطلقا صعودی است و در کدام بازه مطلقا نزولی است.

پاسخ

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۶(x + ۲)(x - ۱)$$

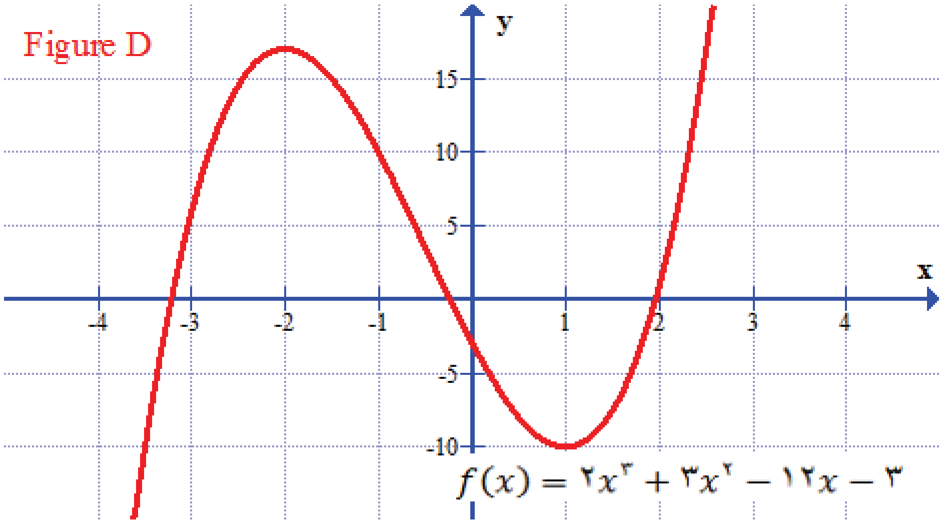
جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$-\infty$ -۲ ۱ ∞

	بازه	بازه	بازه$(۱,\infty)$
عبارت	$(-\infty,-۲)$	$(-۲,۱)$	$(۱,\infty)$
$x + ۲$	$-$	$+$	$+$
$x - ۱$	$-$	$-$	$+$
$(x + ۲)(x - ۱)$	$+$	$-$	$+$

از جدول بالا نتیجه می گیریم که $f' \geq 0$ است در $(-\infty,-۲]$ و $[۱.\infty)$ و $f' \leq 0$ است در $[-۲,۱]$ ، به علاوه $f'(x) = 0$ است برای $x = ۱$ و $x = -۲$. پس f اکیدا صعودی است در $(-\infty,-۲]$ و $[۱.\infty)$ و اکیدا نزولی است در $[-۲,۱]$

شکل D

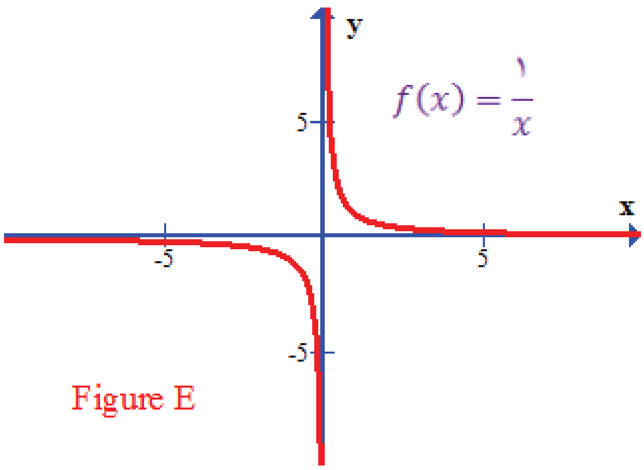


احتیاط

توجه داشته باشید که قضیه ۳.۳.۲ فقط در مورد بازه ها صادق است. و لذا می توانیم آنرا برای بازه ها بکار ببریم. برای تاکید ، توجه کنید به $f(x) = \frac{1}{x}$ پس $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ است برای تمام x ها در دامنه f

اما صحیح نیست بگوییم f در دامنه اش اکیدا نزولی است . زیرا برای هر x در $(-\infty, 0)$ و هر z در $(0, \infty)$ نا مساوی $f(x) < f(z)$ بر قرار است. شکل E

اما f اکیدا نزولی است در هر یک از بازه های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



قضیه کاشی The Cauchy's Theorem

فرض کنید f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته بده و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند. اگر برای

$$a < x < b$$

داشته باشیم

$$g'(x) \neq 0$$

پس یک عدد مانند c در (a,b) وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (۱)$$

کاشی Cauchy نام یک دانشمند فرانسوی است با هم وطنان عزیز اهل کاشان اشتباه نشود. قضیه کاشی بنام قضیه تعمیم یافته قضیه مقدار میانگین و یا بنام قضیه کلی مقدار میانگین هم معروف است.

اثبات

این جا هم مانندآنچه در اثبات قضیه مقدار میانگین انجام دادیم ، یک تابع مخصوص به وجود می آوریم.

$$h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x) \text{ ، } a \leq x \leq b$$

چون h ترکیبی از f و g است ، پس در بازه $[a,b]$ پیوسته و دددر بازه (a,b) مشتق پذیر است. بنا بر این بر اساس قضیه مقدار میانگین یک عدد c در (a,b) وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$$

با یک حساب ساده معلوم می شود که $h(a) = h(b)$ و لذا $h'(c) = 0$ است. یک محاسبه دیگر آشکار می کند که

$$h'(x) = [f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x) \text{ ، } a < x < b$$

چون $h'(x) = 0$ است ، پس

$$[f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0 \qquad (۲)$$

است. بر اساس فرض قضیه $g'(x) \neq 0$ است برای $a < x < b$ است در نتیجه $g'(c) \neq 0$ است. همچنین $g(a) \neq g(b)$ است ، زیرا اگر $g(a) = g(b)$ باشد ، پس بر اساس قضیه مقدار میانگین ، خواهیم داشت $g'(x) = 0$ است برای یک x در (a,b) و این مغایر است با فرض قضیه

چون $g'(c) \neq 0$ و $g(a) \neq g(b)$ است ، می توانیم دو طرف تساوی شماره (۲) را بر $[g(b)-g(a)]g'(c)$ تقسیم کنیم تا رابطه زیر را بدست آوریم.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} = 0$$

و یا

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اگر برای $a \leq x \leq b$ داشته باشیم ، $g(x) = x$ پس فرمول شماره (۱) تبدیل می شود به معادله قضیه مقدار میانگین. زیرا

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f'(c)}{۱}=f'(c)$$

به همین خاطر نام قضیه کاشی ، را قضیه تعمیم یافته قضیه مقدار مینگین گذاشته اند.

قضیه قانون لا پیتال L'Hopital's Rule Theorem

فرض کنید L یک عدد حقیقی و یا ∞ و یا $-\infty$ باشد.

الف - فرض کنید g و f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x)\neq 0$ باشد برای $a<x<b$

اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=0=\lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به a از طرف چپ هم صادق است.

ب - فرض کنید g و f در بازه (a,∞) مشتق پذیر باشند ، و $g'(x)\neq 0$ باشد برای $x>a$. اگر

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0=\lim_{x\to\infty} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

باشد ، پس

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to\pm}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همین موضوع برای نزدیک شدن x به $-\infty$ صادق است.

اثبات قسمت الف

دو تابع F و G را در $[a,b]$ مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{برای} \quad a<x<b \\ 0 & \text{برای} \quad x=a \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{برای} \quad a<x<b \\ 0 & \text{برای} \quad x=a \end{cases}$$

پس
$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = F(a)$$
بطوری که F در $[a,b]$ پیوسته است. برای G هم همین موضوع صادق است. علاوه بر این ، F و G در (a,b) مشتق پذیر هستند ، زیرا آنها در (a,b) به ترتیب با f و g تطبیق می کنند. در نتیجه اگر x هر عددی در (a,b) باشد ، پس F و G در $[a,x]$ پیوسته و در (a,x) مشتق پذیر هستند. بر اساس قضیه تعمیم یافته قضیه مقدار میانگین ‘‘قضیه کاشی ’’به این معنی است که یک عدد $c(x)$ در (a,x) وجود دارد بطوری که
$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'\big(c(x)\big)}{G'\big(c(x)\big)}$$
چون $F=f$ و $G=g$ هستند در (a,b) به این معنی است که
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)}$$
چون $a<c(x)<x$ است ، پس می دانیم که
$$\lim_{x\to a^+} c(x) = a$$
پس با استفاده از قضیه جانشینی با $y=c(x)$ نتیجه می گیریم که
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$
این بود اثبات معادله ای که حد های سمت راست در قسمت آلف در بر داشت. حد های سمت چپ و حد های دو طرف هم به همین طریق می توان ثابت کرد.

تمرینات ۳.۳

در تمرینات ۵ – ۱ کلیه ضد مشتق های تابع داده شده را پید ا کنید.

۱) 0

۲) x

۳) $-x^{۲}$

۴) $-۶x+۵$

۵) $\sin x$

در تمرینات ۹ – ۶ تابعی را که شرایط داده شده را بر قرار کند ، پیدا کنید.

۶) $f'(x)=-۲, f(0)=0$

۷) $f'(x)=-x, f(-۱)=\sqrt{۲}$

۸) $f'(x)=x^{۲}, f(0)=-۵$

۹) $f'(x)=\cos x, f\left(\frac{\pi}{۳}\right)=۱$

در تمرینات ۱۲– ۱۰ توابعی را که شرایط داده شده را بر قرار کنند ، پیدا کنید.

۱۰) $f''(x)=0$

۱۱) $f''(x)=0, f'(0)=-۱, f(0)=۲$

۱۲) $f''(x)=\sin x, f'(\pi)=-۲, f(0)=۴$

در تمرینات ۲۱ – ۱۳ بازه هایی که در آنها تابع داده شده ، اکیدا صعودی و بازه هایی که در آنها تابع اکیدا نزولی است ، پیدا کنید.

۱۳) $f(x)=x^{۲}+x+۱$

۱۴) $f(x)=x^{۳}-x^{۲}+x-۱$

۱۵) $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۳} + ۱$

۱۶) $f(x) = x^{۵} + x^{۳} - ۲x + ۱$

۱۷) $g(x) = \sqrt{۱۶ - x^{۲}}$

۱۸) $g(x) = \frac{۱}{x + ۳}$

۱۹) $k(x) = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$

۲۰) $f(t) = \tan t$

۲۱) $f(t) = ۲\cos t - t$

۲۲ – فرض کنید F و G به ترتیب ضد مشتق f و g در بازه I باشند.

الف – ثابت کنید $F + G$ یک ضد مشتق $f + g$ در بازه I است.

ب - ثابت کنید که $F - G$ یک ضد مشتق $f - g$ در بازه I است.

ج - آیا $\frac{F}{G}$ لزوما ضد مشتق $\frac{f}{g}$ است؟

۲۳
الف - فرض کنید $f(x) = x - \sin x$ باشد. نشان دهید که f یک تابع مطلقا صعودی است.

ب - با استفاده از قسمت الف ، نشان دهید که $\sin x > x$ است در بازه $(-\infty, 0)$ و $\sin x < x$ است در بازه $(0, \infty)$ است.

۲۴ – نشان دهید که $\tan x > x$ است برای تمام x ها در $\left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$

پاسخ تمرینات ۳.۳

در تمرینات ۵ — ۱ کلیه ضد مشتق های تابع داده شده را پید ا کنید.

۱) 0

$$C$$

۲) x

$$\frac{۱}{۲}x^{۲}+C$$

۳) $-x^{۲}$

$$-\frac{۱}{۳}x^{۳}+C$$

۴) $-۶x+۵$

$$-۳x^{۲}+۵x+C$$

۵) $\sin x$

$$-\cos x+C$$

در تمرینات ۹ — ۶ تابعی را که شرایط داده شده را بر قرار کند ، پیدا کنید.

۶) $f'(x)=-۲, f(0)=0$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x)=-۲x$ باشد ، پس $g'(x)=-۲=f'(x)$ است. پس

$$f(x)=g(x)+C$$

برای یک عدد مناسب C. چون $f(0)=0$ است ، پس داریم

$$0=f(0)=-۲(0)+C=C$$

پس

$$f(x)=-۲x$$

۷) $f'(x)=-x, f(-۱)=\sqrt{۲}$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}$ باشد. پس $g'(x)=-x=f'(x)$ پس

$$f(x) = g(x) + C = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + C$$

برای یک عدد مناسب C. چون $f(-۱) = \sqrt{۲}$ است. پس

$$\sqrt{۲} = f(-۱) = -\frac{۱}{۲}(-۱)^{۲} + C$$

پس

$$C = \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲}$$

و لذا

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲}$$

۸) $f'(x) = x^{۲}, f(0) = -۵$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳}$ باشد. پس $g'(x) = x^{۲} = f'(x)$ است. پس

$$f(x) = g(x) + C = \frac{۱}{۳}x^{۳} + C$$

برای یک عدد مناسب C. چون $f(0) = -۵$ است ، پس

$$-۵ = f(0) = \frac{۱}{۳}x^{۳} + C = \frac{۱}{۳}(0)^{۳} + C = C$$

پس $C = -۵$ و لذا

$$f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} - ۵$$

۹) $f'(x) = \cos x, f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۱$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = \sin x$ باشد ، پس $g'(x) = \cos x = f'(x)$ است. پس

$$f(x) = g(x) + C = \sin x + C$$

برای یک عدد مناسب C. چون $f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۱$ است. پس داریم

$$۱ = f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) + C = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + C$$

پس

$$C = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

و لذا

$$f(x) = \sin x + ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در تمرینات ۱۳–۱۰ توابعی را که شرایط داده شده را بر قرار کنند ، پیدا کنید.

۱۰) $f''(x) = 0$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = 0$ باشد. پس $g'(x) = 0 = f''(x) = (f')'(x)$ پس بر اساس قضیه ۳.۳.۱ داریم

$$f'(x) = g(x) + C_۱ = C_۱$$

برای یک عدد مناسب $C_۱$. حالا فرض می کنیم $h(x) = C_۱x$. پس $h'(x) = C_۱ = f'(x)$ پس بر اساس همان قضیه

$$f(x) = h(x) + C_۲ = C_۱ + C_۲$$

برای یک عدد مناسب $C_۲$

۱۱) $f''(x) = 0, f'(0) = -۱, f(0) = ۲$

پاسخ

بر اساس تمرین شماره ۱۱ داریم $f(x) = C_۱ + C_۲$. برای اعداد ثابت $C_۱$ و $C_۲$. پس $f'(x) = C_۱$ است. چون داریم $f'(0) = -۱$ و $f(0) = ۲$ ، پس $C_۱ = -۱$ است. و

$$۲ = f(0) = C_۱ * 0 + C_۲ = C_۲$$

پس

$$f(x) = -x + ۲$$

۱۲) $f''(x) = \sin x, f'(\pi) = -۲, f(0) = ۴$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = -\cos x$ باشد ، پس $g'(x) = \sin x = f''(x) = (f')'(x)$ است.
بر اساس قضیه ۳.۳.۱ داریم

$$f'(x) = g(x) + C_۱ = -\cos x + C_۱$$

برای یک عدد ثابت C_1. حالا فرض می کنیم $h(x) = -\sin x + C_1 x$. پس

$$h'(x) = -\cos x + C_1 = f'(x)$$

بر اساس قضیه ۳.۳.۱

$$f(x) = h(x) + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2$$

برای یک اعددا ثابت C_2. چون $f'(\pi) = -2$ است ، پس داریم

$$-2 = f'(\pi) = -\cos\pi + C_1 = 1 + C_1$$

پس

$$C_1 = -3$$

چون $f(0) = 4$ است ، پس داریم

$$4 = f(0) = -\sin 0 + C_1 * 0 + C_2$$

پس $C_2 = 4$ است و در نهایت

$$f(x) - \sin x - 3x + 4$$

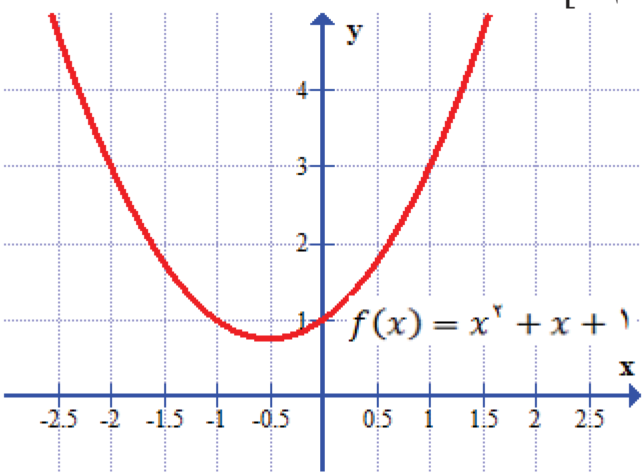
در تمرینات ۲۱ — ۱۳ بازه هایی که در آنها تابع داده شده ، اکیدا صعودی و بازه هایی که در آنها تابع اکیدا نزولی است ، پیدا کنید.

۱۳) $f(x) = x^2 + x + 1$

پاسخ

$$f'(x) = 2x + 1$$

پس $f'(x) < 0$ است برای $x < -\frac{1}{2}$ و $f'(x) > 0$ است برای $x > -\frac{1}{2}$ ،علاوه بر این $f'(x) = 0$ است فقط برای $x = -\frac{1}{2}$ ،پس f اکیدا نزولی است در $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ و اکیدا صعودی است برای $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

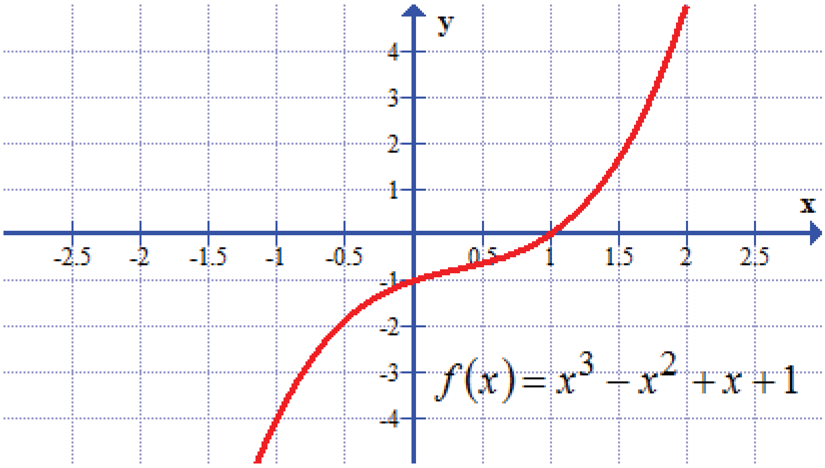


۱۴) $f(x) = x^{۳} - x^{۲} + x - ۱$

پاسخ

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۲x + ۱ = ۳\left(x - \frac{۱}{۳}\right)^{۲} + \frac{۲}{۳} > 0$$

ملاحظه می کنید که $f'(x) > 0$ است برای تمام x ها ، پس f اکیدا صعودی است در $(-\infty, \infty)$

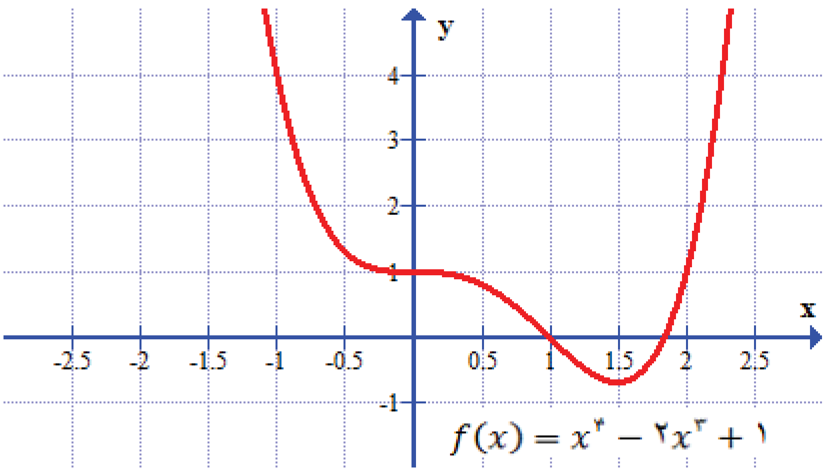


۱۵) $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۳} + ۱$

پاسخ

$$f'(x) = ۴x^{۳} - ۶x^{۲} = ۲x^{۲}(۲x - ۳)$$

پس $f'(x) < 0$ است برای $x < \frac{۳}{۲}$ و $f'(x) > 0$ است برای $x > \frac{۳}{۲}$, بعلاوه $f'(x) = 0$ است فقط برای $x = 0$ و یا برای $x = \frac{۳}{۲}$, پس f مطلقا نزولی است در $\left(-\infty, \frac{۳}{۲}\right]$ و مطلقا صعودی است در $\left[\frac{۳}{۲}, \infty\right)$



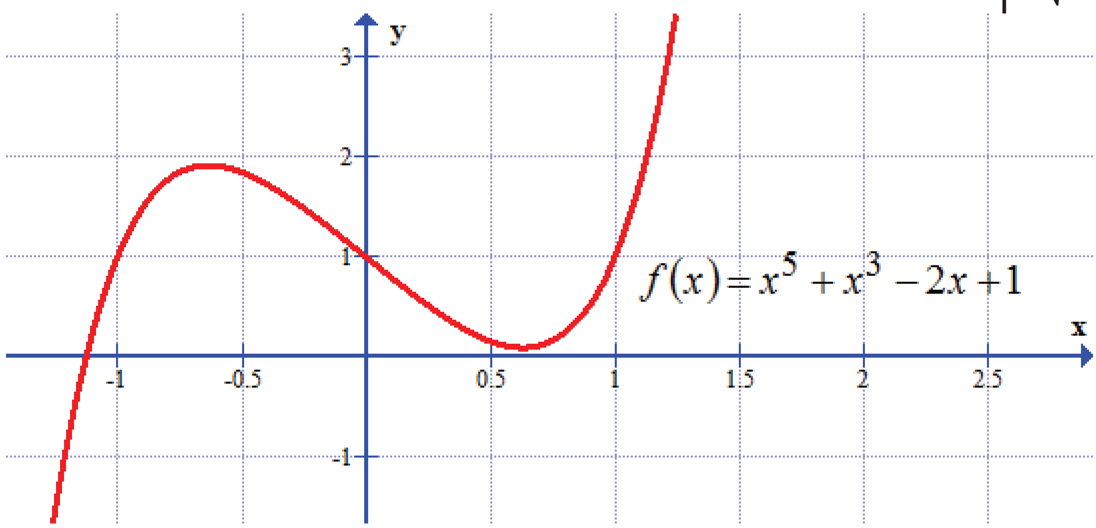
۱۶) $f(x) = x^۵ + x^۳ - ۲x + ۱$

پاسخ

$$f'(x) = ۵x^۴ + ۳x^۲ - ۲ = \left(x^۲ + ۱\right)\left(۵x^۲ - ۲\right)$$

پس $f'(x) < 0$ است برای $-\sqrt{\frac{۲}{۵}} < x < \sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و $f'(x) > 0$ است برای $x < -\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و برای $x > \sqrt{\frac{۲}{۵}}$ ، علاوه بر این $f'(x) = 0$ است فقط برای $x = -\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و یا $x = \sqrt{\frac{۲}{۵}}$

لذا f مطلقا صعودی است در $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{۲}{۵}}\right]$ و در $\left[\sqrt{\frac{۲}{۵}}, \infty\right)$ و مطلقا نزولی است در $\left[-\sqrt{\frac{۲}{۵}}, \sqrt{\frac{۲}{۵}}\right]$



۱۷) $g(x) = \sqrt{۱۶ - x^۲}$

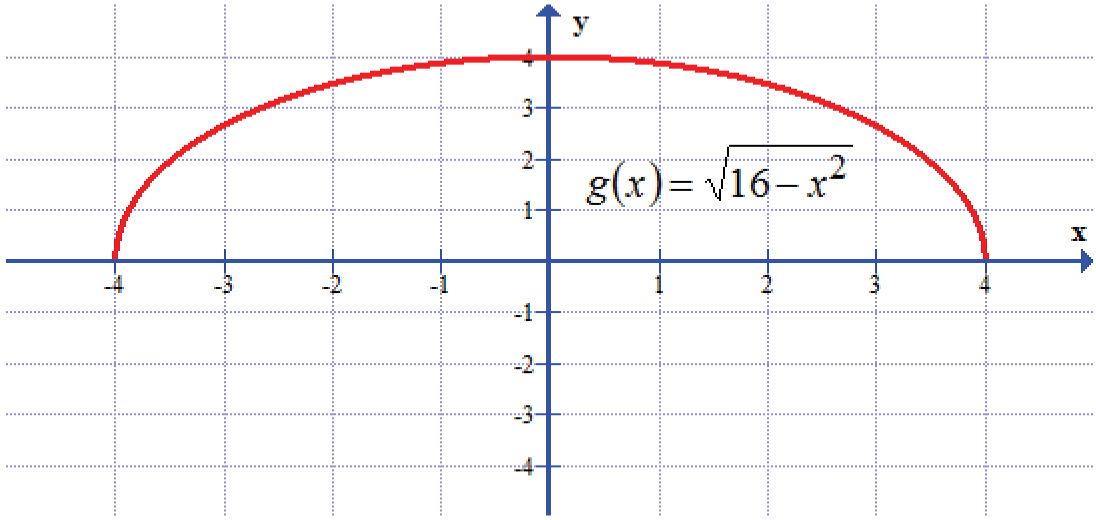
پاسخ

توجه داشته باشید حک دامنه g شامل $[-۴, ۴]$ است. همچنین $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۱۶-x^۲}}$ است. پس

$g'(x) > 0$ است ، برای $-۴ < x < 0$ و $g'(x) < 0$ است برای $0 < x < ۴$

علاوه بر این $g'(x) = 0$ است فقط برای $x = 0$

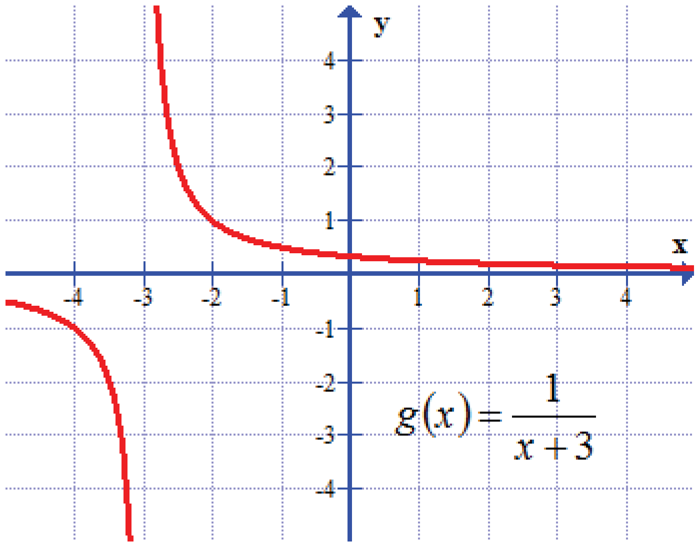
لذا ، g مطلقا صعودی است در $[-۴, 0]$ و مطلقا نزولی است در $[0, ۴]$



۱۸) $\quad g(x) = \dfrac{۱}{x + ۳}$

پاسخ

توجه داشته باشید که -۳ در دامنه g نیست. همچنین $g'(x) = \frac{-۱}{(x+۳)^۲} < 0$ است برای $x \neq -۳$ پس نتیجه می گیریم که g در $(-\infty, -۳)$ و $(-۳, \infty)$ اکیدا نزولی است.

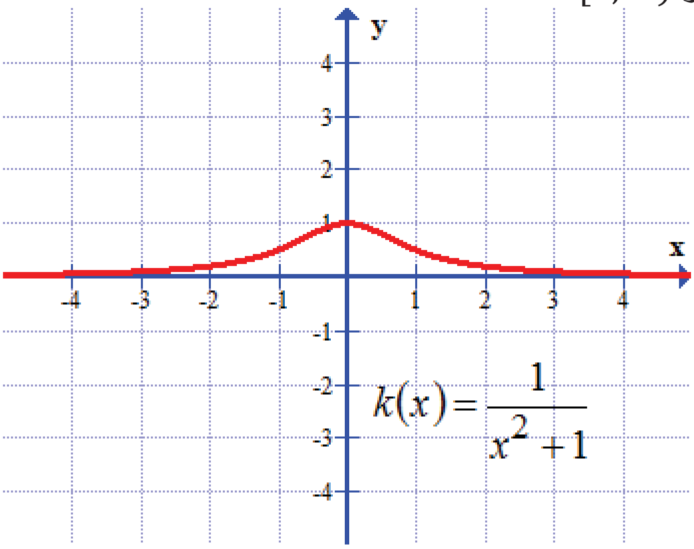


۱۹) $k(x) = \frac{۱}{x^{۲} + ۱}$

پاسخ

$$k'(x) = \frac{-۲x}{(x^{۲} + ۱)^{۲}}$$

است. پس $k'(x) > 0$ است ، برای $x < 0$ و $k'(x) < 0$ است برای $x > 0$
علاوه بر این ، $k'(x) = 0$ است فقط برای $x = 0$. پس k مطلقا صعودی است در $(-\infty, 0]$
و مطلقا نزولی است در $[0, \infty)$



۲۰) $f(t) = \tan t$

پاسخ

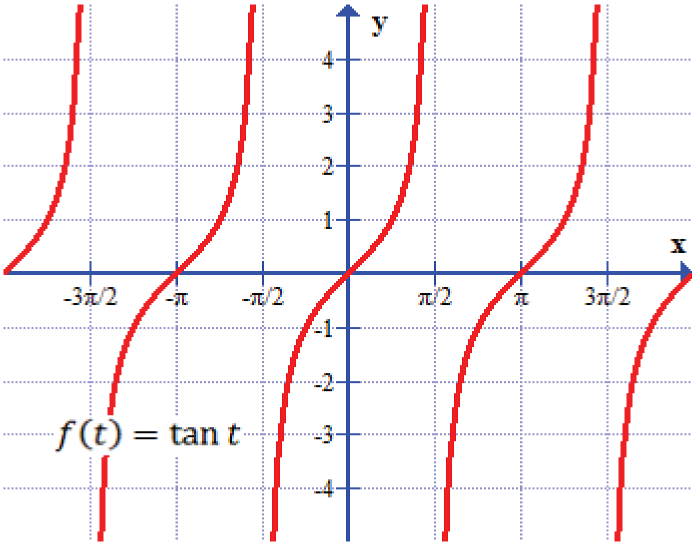
توجه داشته باشید که $f(t)$ برای $n \in \mathbb{Z}$ ، $t = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ تعریف شده نیست. همچنین

$$f'(t) = sec^{۲}t > 0$$

است برای تمام t ها در دامنه f .
پس f مطلقا صعودی است در هر بازه به شکل

$$\left(\frac{\pi}{۲} + n\pi, \frac{\pi}{۲} + (n + ۱)\pi\right)$$

برای هر عدد صحیح n



۲۱) $f(t) = ۲\cos t - t$

پاسخ

$$f'(t) = -۲\sin t - ۱$$

پس $g'(t) < 0$ است اگر $\sin t > -\frac{۱}{۲}$ باشد و $f'(t) > 0$ است اگر $\sin t < -\frac{۱}{۲}$ باشد.

پس $f'(t) < 0$ است برای

$$-\frac{\pi}{۶} + ۲n\pi < t < \frac{۷\pi}{۶} + ۲n\pi \quad ، n \in \mathbb{Z}$$

و $f'(t) > 0$ است برای

$$\frac{۷\pi}{۶} + ۲n\pi < t < \frac{۱۱\pi}{۶} + ۲n\pi \quad ، n \in \mathbb{Z}$$

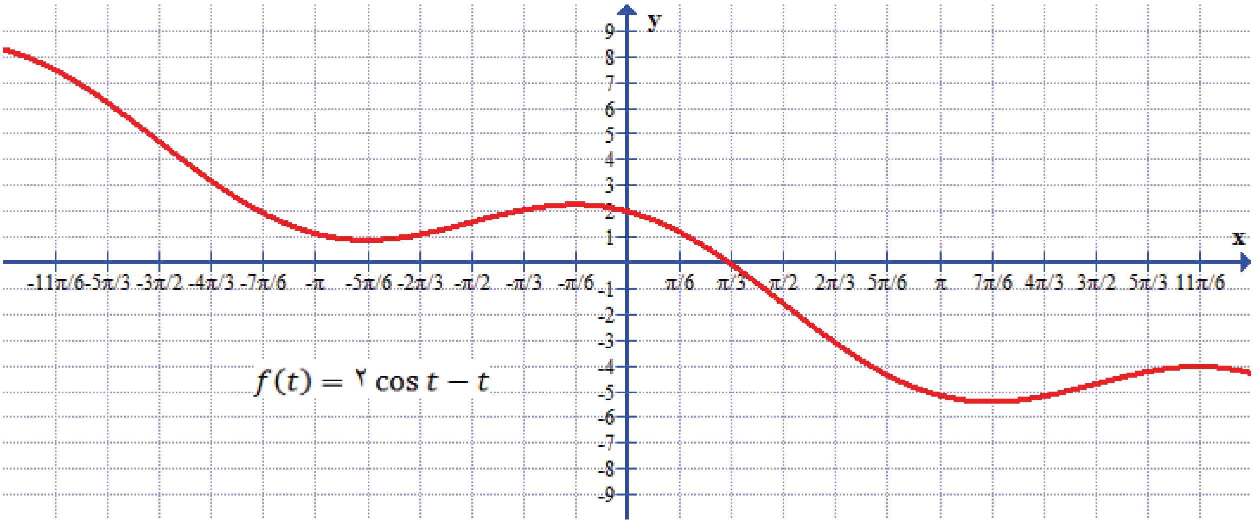
پس f اکیدا نزولی است در

$$\left[-\frac{\pi}{۶} + ۲n\pi, \frac{۷\pi}{۶} + ۲n\pi\right]$$

و f اکیدا صعودی است در

$$\left[\frac{۷\pi}{۶} + ۲n\pi, \frac{۱۱\pi}{۶} + ۲n\pi\right]$$

بر هر عدد صحیح n



۲۲ – فرض کنید F و G به ترتیب ضد مشتق f و g در بازه I باشند.

الف – ثابت کنید $F+G$ یک ضد مشتق $f+g$ در بازه I است.

پاسخ

چون $F'=f$ و $G'=g$ است ، پس داریم

$$(F+G)' = F' + G' = f + g$$

ب - ثابت کنید که $F-G$ یک ضد مشتق $f-g$ در بازه I است.

پاسخ

بر اساس قسمت الف داریم

$$(F-G)' = F' - G' = f - g$$

ج - آیا $\frac{F}{G}$ لزوما ضد مشتق $\frac{f}{g}$ است؟

پاسخ

پاسخ منفی است زیرا اگر $f(x)=g(x)=x$ باشد ، پس

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = ۱ \quad ، \quad x \neq 0$$

اگر $F(x)=G(x)=\frac{۱}{۲}x^۲$ باشد ، پس $F'=f$ و $G'=g$ است و

$$\left(\frac{F}{G}\right)(x) = ۱ \quad و \quad \left(\frac{F}{G}\right)'(x) = 0 \quad ، \quad x \neq 0$$

و لذا

$$\left(\frac{F}{G}\right)' \neq \frac{f}{g}$$

۲۳
الف - فرض کنید $f(x) = x - \sin x$ باشد. نشان دهید که f یک تابع مطلقا صعودی است.
پاسخ
فرض می کنیم $u < v$ باشد. پس $f'(s) = ۱ - \cos x \geq 0$ است برای تمام x ها در $[u, v]$
و $f'(x) = 0$ است فقط برای تعداد محدودی مقادیر به شکل $n \epsilon \mathbb{Z}$ ، $۲n\pi$ در $[u, v]$
بر اساس قضیه ۳.۳.۲ قسمت الف f اکیدا صعودی است در $[u, v]$
پس $f(u) < f(v)$ است. چون u , v اعداد اختیاری بودند ، پس f در $(-\infty, \infty)$ اکیدا صعودی است.

ب - با استفاده از قسمت الف ، نشان دهید که $\sin x > x$ است در بازه $(-\infty, 0)$ و $\sin x < x$ است در بازه $(0, \infty)$ است.
پاسخ
چون بر اساس قسمت الف همین مساله ، f اکیدا صعودی است ، اگر $x < 0$ باشد ، پس
$$x - \sin x = f(x) < f(0) = 0$$
پس $x < \sin x$ است در $(-\infty, 0)$
اگر $x > 0$ باشد ، پس
$$x - \sin x = f(x) > f(0) = 0$$
پس بر اساس قسمت الف همین مساله $x > \sin x$ است در $(0, \infty)$

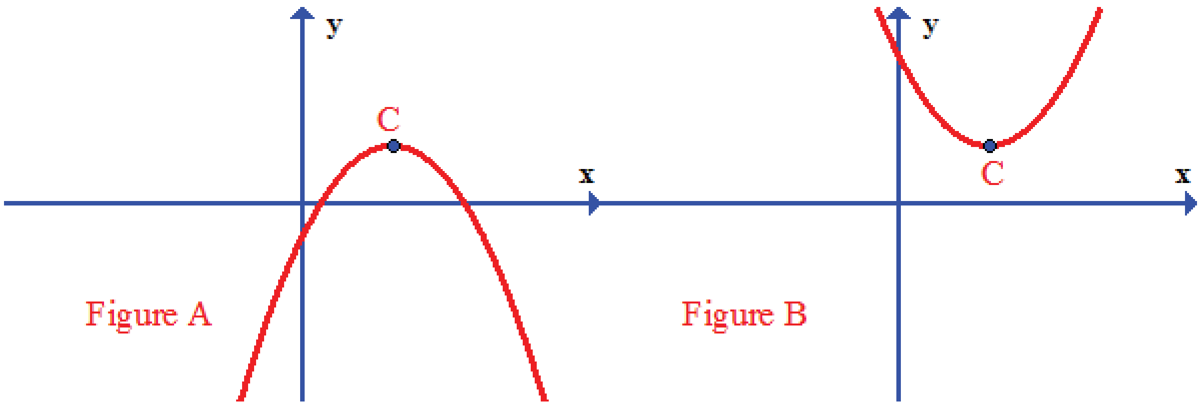
۲۴ – نشان دهید که $\tan x > x$ است برای تمام x ها در $\left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$
پاسخ
فرض می کنیم $f(x) = \tan x - x$ باشد. پس $f'(x) = sec^۲ x - ۱ \geq 0$ است برای x در $\left[0, \frac{\pi}{۲}\right)$ با $f'(x) \neq 0$ برای x در $\left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$
بر اساس قسمت الف قضیه ۳.۳.۲ تابع f اکیدا صعودی است در $\left[0, \frac{\pi}{۲}\right)$
چون $f(0) = 0$ است ، پس $f(x) > f(0) = 0$ است برای x در $\left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$ و لذا
$$\tan x - x > 0$$
است ، و یا به عبارت دیگر
$$\tan x > x$$
است ، برای تمام x ها در $\left(0, \frac{\pi}{۲}\right)$

۳.۴ – تست های مشتق مرتبه اول و دوم The First and Second Derivative Tests

فرض می کنیم یک تابع مانند f در c مشتق پذیر باشد. اگر f یک مقدار اکستریم موضعی در c داشته باشد ، پس می دانیم که بر اساس قضیه مکمل ماکسیمم و مینیمم بخش ۳.۱ که $f'(c) = 0$ است. پس برای پیدا کردن مکان مقادیر اکستریم موضعی ، می توانیم مقدیری از x را جستجو کنیم که $f'(x) = 0$ است. اما یک راهی لازم داریم تا بتوانیم مشخص کنیم کدام یک از این x ها واقعا ، مقدار اکستریم موضعی f را سبب می شوند. در این بخش ،شرایطی را در مورد مشتق های مرتبه اول و دوم ارائه می دهیم که تضمین کننده یک مقدار اکستریم موضعی f در c است. این شرایط نه تنها در مورد رسم نمودار توابع کمک می کنند ، بلکه در حل مسائل کاربردی هم مفید هستند.

شرایط ما در مورد مقادیر اکستریم موضعی بر دو نگرش زیر استوار است.

۱ - اگر یک تابع پیوسته مانند f در طرف چپ c صعودی و در طرف راست نزولی باشد ، پس $f(c)$ مقدار ماکسیمم f در I است. شکل A
به همین طریق ، اگر f در سمت چپ c نزولی باشد و در سمت راست c صعودی باشد ، پس $f(c)$ مقدار مینیمم f در I است. شکل B



۲ - بر اساس قضیه ۳.۳.۲ بخش ۳.۳ یک تابع پیوسته f در بازه I صعودی است ، اگر برای تمام نقاط داخلی I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$
به همین ترتیب ، f در بازه I نزولی است ، اگربرای تمام نقاط داخلی I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$

تست مشتق مرتبه اول - برای تسهیل در اثبات قضیه بعد ، می گویم f' **از مثبت به منفی در c تغییر علامت می دهد** ، اگر یک عدد مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوری که $f'(x) > 0$ باشد برای تمام x ها در $(c - \delta, c)$ و $f'(x) < 0$ باشد برای تمام x ها در $(c, c + \delta)$
تعریف f' **تغییر علامت میدهد از منفی به مثبت در c** بجای $f'(x) > 0$ بگذارید $f'(x) < 0$ و بر عکس .

مثال ۱ ــ اگر $f(x) = ۴x^۳ + ۹x^۲ - ۱۲x + ۳$ باشد. مشخص کنید کجا f' از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد و کجا از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد.

پاسخ

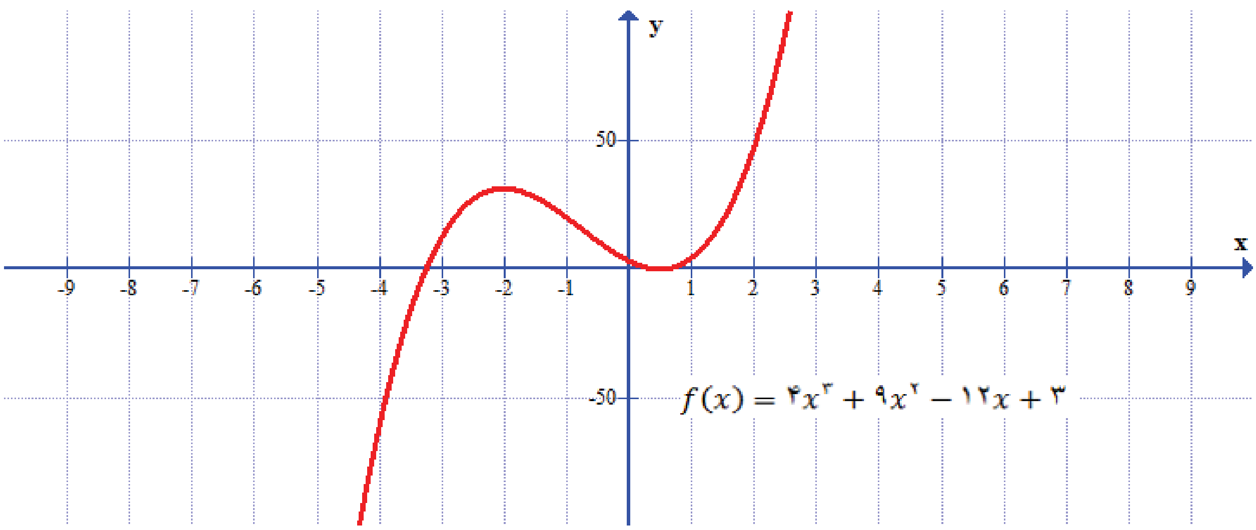
$$f'(x) = ۱۲x^۲ + ۱۸x - ۱۲ = ۱۲\left(x^۲ + \frac{۳}{۲}x - ۱\right) = ۱۲(x+۲)\left(x - \frac{۱}{۲}\right)$$

برای مشخص کردن کجا f' تغییر علامت می دهد ، جدول زیر را تنظیم می کنیم.

$-\infty$ -۲ $\frac{۱}{۲}$ ∞

عبارت	علامت	علامت	علامت
$x + ۲$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{۱}{۲}$	$-$	$-$	$+$
$(x+۲)\left(x - \frac{۱}{۲}\right)$	$+$	$-$	$+$

پس f' از مثبت به منفی در -۲ تغییر علامت می دهد و در $\frac{۱}{۲}$ از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد. $f'(-۲) = 0 = f'\left(\frac{۱}{۲}\right)$



ملاحظه می کنید که نمودار بالا با محاسبه های انجام شده مطابقت دارد.

قضیه – تست مشتق مرتبه اول First Derivative Test Theorem
فرض می کنیم f در بازه I پیوسته باشد و c در بازه I باشد.
الف - اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد ، پس f در c یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد.
ب - اگر f در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد ، پس f در c یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

اثبات
چون اثبات دو قسمت شبیه هستند ، فقط قسمت الف را ثابت می کنیم.
چون f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد ، پس یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد بطوری که $f'(x) > 0$ است برای تمام x ها در $(c-\delta, c)$ و $f'(x) < 0$ است برای تمام x ها در $(c, c+\delta)$ پس طبق قضیه ۳.۳.۲ بخش ۳.۳ تابع f در $[c-\delta, c]$ مطلقا صعودی و در $[c, c+\delta]$ مطلقا نزولی است. لذا f در $[c-\delta, c+\delta]$ یک مقدار ماکسیمم دارد و در نتیجه یک مقدار اکستریم موضعی در c دارد.

مثال ۲ اگر داشته باشیم $f(x) = ۴x^۳ + ۹x^۲ - ۱۲x + ۳$ نشان دهید که f در -۲ یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد و در $\frac{۱}{۲}$ یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

پاسخ
بر اساس مثال ۱ می دانیم که f' در -۲ از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد . پس بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه اول ، f در -۲ یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد. به همین طریق f' در $\frac{۱}{۲}$ از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد ، پس f در $\frac{۱}{۲}$ یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

قضیه تست مشتق مرتبه اول و قضیه ۳.۳.۲ بخش ۳.۳ با هم درنمودار یک تابع به ما کمک می کند.
مراحل رسم نمودار یک تابع مطابق زیر است.
مشتق تابع را پیدا می کنیم.
الف - بر اساس قضیه ۳.۳.۲ اگر $f'(x) \geq 0$ باشد برای تمام x ها در یک بازه ، پس f در آن بازه صعودی است. اگر $f'(x) \leq 0$ باشد برای تمام x ها در یک بازه ، پس f در آن بازه نزولی است.
ب - بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه اول ، اگر f' از مثبت به منفی در c تغییر علامت دهد ، پس f در c یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد. اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد ، پس f در c یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

مثال ۳ - اگر $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۳} - ۳x$ باشد ، مقادیر اکستریم موضعی f را پیدا کنید و نمودار f را رسم کنید.

پاسخ

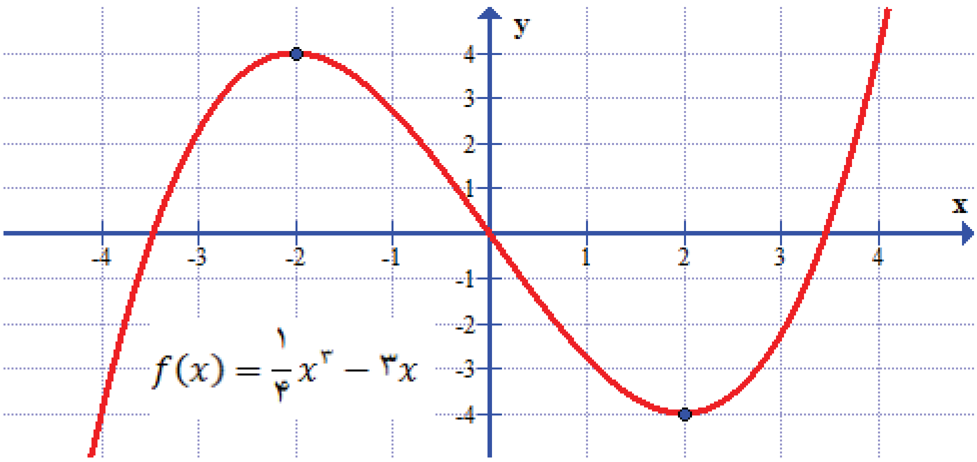
$$f'(x) = \frac{۳}{۴}x^{۲} - ۳ = \frac{۳}{۴}\left(x^{۲} - ۴\right) = \frac{۳}{۴}(x-۲)(x+۲)$$

جدول تشکیل می دهیم

$-\infty$ $\quad -۲ \quad$ ۲ $\quad \infty$

عبارت	علامت	علامت	علامت
$x - ۲$	$-$	$-$	$+$
$x + ۲$	$-$	$+$	$+$
$(x-۲)(x+۲)$	$+$	$-$	$+$

نتیجه می گیریم که $f'(x) = 0$ است برای $x = -۲$ و $x = ۲$
همچنین f اکیدا صعودی است در $(-\infty, -۲]$ و $[۲, \infty)$ و f اکیدا نزولی است در $[-۲, ۲]$
علاوه بر این ، f' در -۲ از مثبت به منفی و در ۲ از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد. پس بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه اول ، $f(-۲) = ۴$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است و $f(۲) = -۴$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.



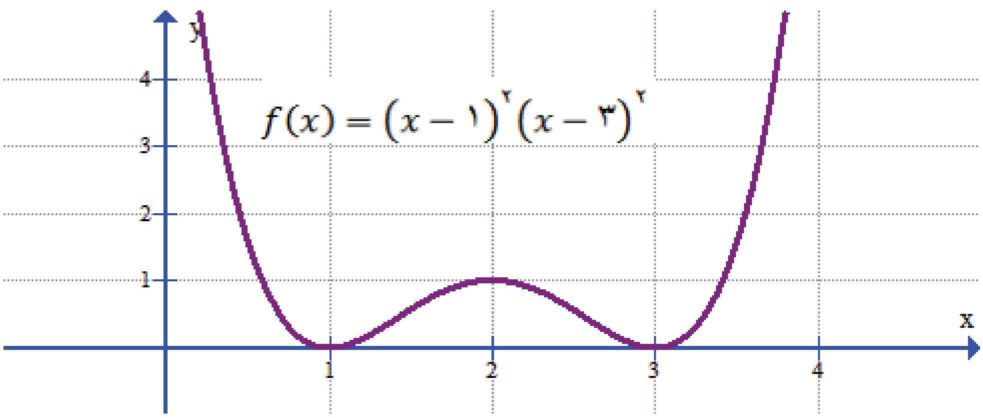
مثال ۴ – اگر داشته باشیم $f(x) = (x-۱)^۲(x-۳)^۲$
نمودار f را رسم کنید.
پاسخ

$$\begin{aligned} f'(x) &= ۲(x-۱)(x-۳)^۲ + ۲(x-۱)^۲(x-۳) \\ &= ۲(x-۱)(x-۳)[(x-۳)+(x-۱)] \\ &= ۴(x-۱)(x-۲)(x-۳) \end{aligned}$$

$-\infty$ ۱ ۲ ۳ ∞

$x-۱$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-۲$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-۳$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-۱)(x-۲)(x-۳)$	$-$	$+$	$-$	$+$

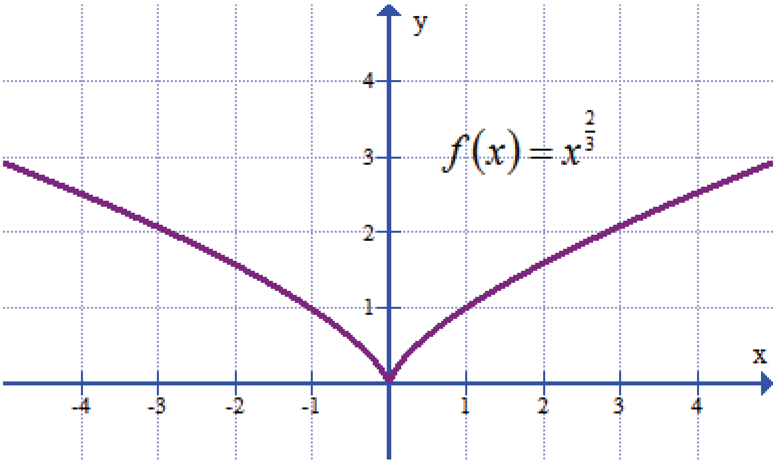
از جدول بالا نتیجه می شود که f در بازه های $[۱,۲]$ و $[۳,\infty)$ اکیدا صعودی و در بازه های $(-۱\infty,۱]$ و $[۲,۳]$ اکیدا نزولی است. همچنین f' در ۱ و ۳ از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد و در ۲ از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد.
در نتیجه بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه اول، $f(۱) = 0$ و $f(۳) = 0$ مقادیر مینیمم موضعی هستند و $f(۲) = ۱$ یک ماکسیمم موضعی است. این اطلاعات به ما کمک می کنند که نمودار f را رسم کنیم.



گاهی اوقات از قضیه تست مشتق مرتبه اول می توان نتیجه گرفت که یک مقدار اکستریم موضعی در c وجود دارد حتی اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد. مثلا اگر $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}}$ باشد ، پس

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} \quad \text{برای} \quad x \neq 0$$

در نتیجه $f'(x) < 0$ است برای $x < 0$ و $f'(x) > 0$ است برای $x > 0$ پس f' در 0 از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد. چون f در $(-\infty, \infty)$ پیوسته است ، قضیه تست مشتق مرتبه اول می گوید که $f(0) = 0$ مقدار مینیمم موضعی f است ، گرچه $f'(0)$ وجود ندارد.
شکل زیر



مهم

قضیه تست مشتق مرتبه دوم

فرض می کنیم $f'(c) = 0$ باشد.

الف - اگر $f''(c) < 0$ باشد ، پس $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

ب - اگر $f''(c) > 0$ باشد ، پس $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

اگر $f''(c) = 0$ باشد ، پس با این تست به تنهایی نمی توانیم در مورد مقدار اکستریم موضعی f در c نتیجه گیری کنیم.

اثبات

قسمت الف

بر اساس فرض قضیه داریم

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

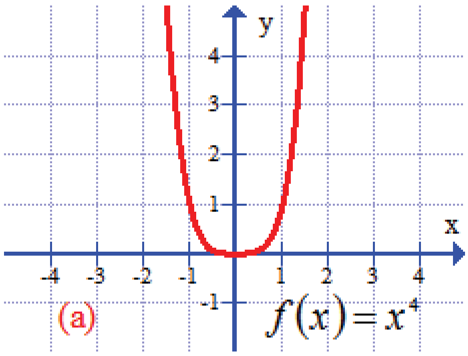
چون $f'(c) = 0$ است ، پس بر اساس قضیه شماره ۱۸ بخش ۱.۳ داریم که برای

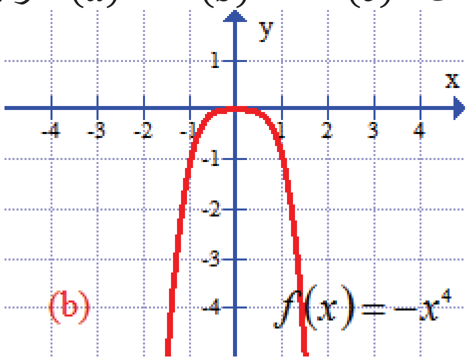
تمام $x \neq c$ ها در یک بازه $(c-\delta, c+\delta)$ داریم

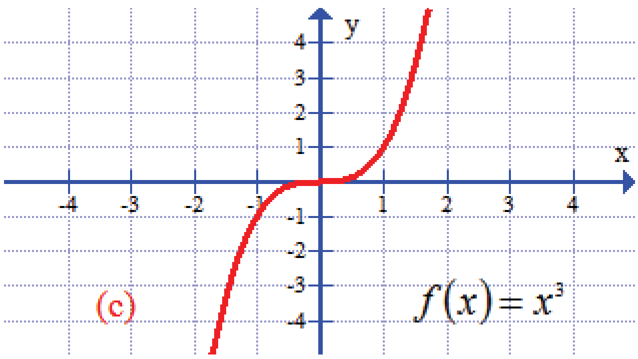
$$\frac{f'(x)}{x-c} = \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} < 0$$

اگر $c-\delta < x < c$ باشد ، پس $x-c<0$ است ، بطوری که $f'(x)>0$ است.
اگر $c < x < c+\delta$ باشد ، پس $x-c>0$ است ، بطوری که $f'(x)<0$ است.
این یعنی f' در c از مثبت به منفی تغییر می کند. پس بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه اول نتیجه می گیریم که f یک مقدار ماکسیمم موضعی در c دارد. به همین طریق می توان قسمت ب را ثابت کرد.

اگر هم $f'(c)=0$ باشد و هم $f''(c)=0$ امکان دارد f در c یک مقدار ماکسیمم موضعی و یا یک مقدار مینیمم موضعی داشته باشد و یا هیچ کدام از این دو نباشد. نمی توان نتیجه ای در این مورد بدست آورد. اشکال (c) ، (b) ، (a) در زیر







مثال ۵ - تابع $f(x) = x^۳ - ۳x - ۲$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه تست مشتق نرتبه دوم مقادیر اکستریم موضعی f را پیدا کنید.

پاسخ

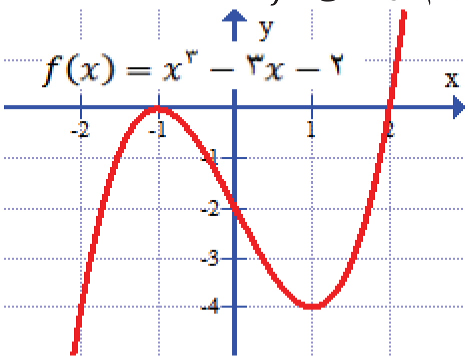
$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۳(x - ۱)(x + ۱)$$
$$f''(x) = ۶x$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = -۱$ و $x = ۱$

چون

$$f''(-۱) = -۶ < 0 \quad \text{و} \quad f''(۱) = ۶ > 0$$

پس بر اساس قضیه تست مشتق مرتبه دوم ، $f(-۱) = 0$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است و $f(۱) = -۴$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.



قضیه تست مشتق مرتبه دوم ، همیشه قابل استفاده نیست ، همان طور که در مثال بعد ملاحظه می کنید.

مثال ۶ اگر داشته باشیم $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳$
مقادیر اکستریم موضعی f را پیدا کنید و نمودار آنرا رسم کنید.

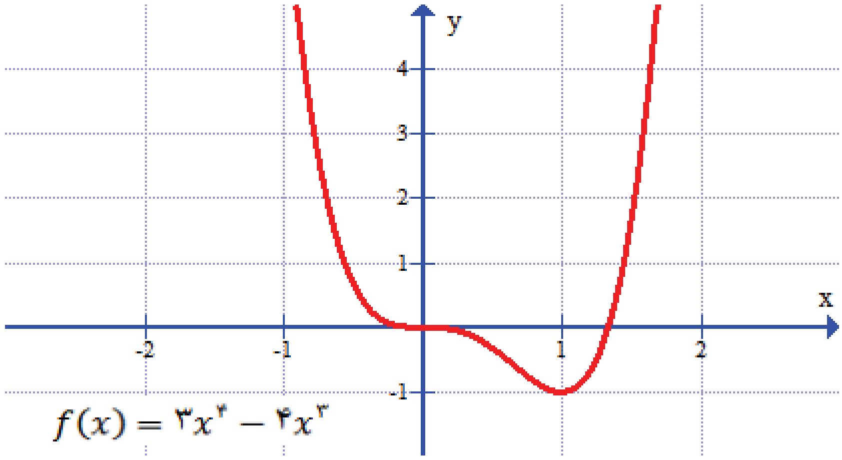
پاسخ

$$f'(x) = ۱۲x^۳ - ۱۲x^۲ = ۱۲x^۲(x - ۱) \qquad (۱)$$
$$f''(x) = ۳۶x^۲ - ۲۴x$$

در نتیجه $f'(x) = 0$ است برای $x = 0$ و $x = ۱$

چون $f''(۱) = ۱۲$ است ، قضیه تست مشتق مرتبه دوم می گوید که $f(۱) = -۱$ یک مقدار مینیمم موضعی f است. اما $f''(0) = 0$ است ، پس قضیه تست مشتق مرتبه دوم را برای f در صفر نمی توان بکار برد. اما از فرمول شماره (۱) بالا ملاحظه می کنید که $f'(x) < 0$ است برای تمام x ها در $(-\infty, ۱)$ بجز صفر ، پس f در $(-\infty, ۱)$ اکیدا نزولی است. پس f نمی تواند در صفر یک مقدار اکستریم داشته باشد. با این اطلاعات ، نمودار را رسم می کنیم.

در بخش ۳.۶ به تابع مثال ۶ بر می گردیم و آنرا بیشتر مورد مطالعه قرار می دهیم.


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2
$f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳$

تمرینات ۳.۴

در تمرینات ۱ – ۴ مقادیر c را که در آنها f' از مثبت به منفی و از منفی به مثبت تغییر می کند پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} + ۶x - ۱۱$

۲) $f(x) = ۲x^{۴} - ۴x^{۲} + ۳$

۳) $f(t) = \dfrac{t^{۲} - t + ۱}{t^{۲} + t + ۱}$

۴) $f(t) = \sin t + \dfrac{۱}{۲}t$

در تمرینات ۵ – ۱۱ با استفاده از تست مشتق مرتبه اول مقادیر اکستریم موضعی ، اگر وجود داشته باشند ، را پیدا کنید.

۵) $f(x) = -۳x^{۲} + ۳x + ۷$

۶) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۴$

۷) $g(x) = ۴x^{۲} - \dfrac{۱}{x}$

۸) $f(x) = \dfrac{x}{۱۶ + x^{۳}}$

۹) $f(x) = x\sqrt{۱ - x^{۲}}$

۱۰) $k(x) = \cos x + \dfrac{۱}{۲}x$

۱۱) $k(x) = \sin\left(\dfrac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right)$

در تمرینات ۱۶ – ۱۲ با استفاده از تست مشتق مرتبه دوم .مقادیر اکستریم موضعی تابع را پیدا کنید.

۱۲) $f(x) = -۴x^۲ + ۳x - ۱$

۱۳) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۲۴x + ۱$

۱۴) $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ - \frac{۹}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}$

۱۵) $f(t) = t^۲ + \frac{۱}{t} + ۱$

۱۶) $f(t) = \sin t + \cos t$

در تمرینات ۲۰ – ۱۷ با استفاده از قضیه تست مشتق مرتبه اول یا دوم ، مقادیر اکستریم موضعی تابع را ، اگر وجود داشته باشند ، پدا کنید. و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

۱۷) $f(x) = x^۲ + ۸x + ۱۲$

۱۸) $f(x) = x^۳ + ۳x$

۱۹) $f(x) = x^۴ + ۴x$

۲۰) $f(x) = \left(x^۲ - ۱\right)^۲$

در تمرینات ۲۲ – ۲۱ یک نقطه c پیدا کنید ، بطوری که $f'(c) = f''(c) = 0$ باشد. با استفاده از مشتق f نشان دهید که f در c یک مقدار اکستریم موضعی ندارد.

۲۱) $f(x) = x^۵$

۲۲) $f(x) = x^۵ - x^۳$

پاسخ تمرینات ۳.۴

در تمرینات ۴ — ۱ مقادیر c را که در آنها f' از مثبت به منفی و از منفی به مثبت تغییر می کند پیدا کنید.

۱) $f(x) = x^۲ + ۶x - ۱۱$

$$f'(x) = ۲x + ۶ = ۲(x + ۳)$$

پس f' در ۳− از منفی به مثبت تغییر می کند.

۲) $f(x) = ۲x^۴ - ۴x^۲ + ۳$

$$f'(x) = ۸x^۳ - ۸x = ۸x(x - ۱)(x + ۱)$$

پس f' در ۱− و ۱ از منفی به مثبت تغییر می کند و در صفر از مثبت به منفی تغییر می کند.

۳) $f(t) = \frac{t^۲ - t + ۱}{t^۲ + t + ۱}$

$$f'(t) = \frac{(۲t - ۱)\left(t^۲ + t + ۱\right) - \left(t^۲ - t + ۱\right)(۲t + ۱)}{\left(t^۲ + t + ۱\right)^۲}$$

$$= \frac{۲(t + ۱)(t - ۱)}{\left(t^۲ + t + ۱\right)^۲}$$

پس f' در ۱− از مثبت به منفی تغییر می کند و در ۱ از منفی به مثبت.

۴) $f(t) = \sin t + \frac{۱}{۲}t$

$$f'(t) = \cos t + \frac{۱}{۲}$$

پس $f'(t) > 0$ است اگر $\cos t > -\frac{۱}{۲}$ باشد ، و $f'(t) < 0$ اگر $\cos t < -\frac{۱}{۲}$ باشد. پس

f' از مثبت به منفی تغییر می کند در $\frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi$ برای هر عدد صحیح n

و از منفی به مثبت تغییر می کند در $\frac{۴\pi}{۳} + ۲n\pi$ برای هر عدد صحیح n

در تمرینات ۱۱ – ۵ با استفاده از تست مشتق مرتبه اول مقادیر اکستریم موضعی ، اگر وجود داشته باشند ، را پیدا کنید.

۵) $f(x) = -۳x^۲ + ۳x + ۷$

$$f'(x) = -۶x + ۳ = ۳(۱ - ۲x)$$

پس f' در $\frac{۱}{۲}$ از مثبت به منفی تغییر می کند ، پس $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳۱}{۴}$ مقدار ماکسیم موضعی f است.

۶) $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۴$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x = ۳x(x + ۲)$$

پس f' در ۲– از مثبت به منفی تغییر می کند و در صفر از منفی به مثبت. پس

$$f(-۲) = ۸$$

یک مقدار ماکسیمم موضعی و $f(0) = ۴$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

۷) $g(x) = ۴x^۲ - \frac{۱}{x}$

$$g'(x) = ۸x + \frac{۱}{x^۲} = \frac{۸x^۳ + ۱}{x^۲} = \frac{(۲x + ۱)\left(۴x^۲ - ۲x + ۱\right)}{x^۲}$$

چون $۴x^۲ - ۲x + ۱ > 0$ است برای تمام x ها پس g' در $-\frac{۱}{۲}$ از منفی به مثبت تغییر می کند. و لذا $g\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۳$ یک مقدار مینیمم موضعی g است.

۸) $f(x) = \frac{x}{۱۶ + x^۳}$

$$f'(x) = \frac{\left(۱۶ + x^۳\right) - x\left(۳x^۲\right)}{\left(۱۶ + x^۳\right)^۲} = \frac{۱۶ - ۲x^۳}{\left(۱۶ + x^۳\right)^۲}$$

$$= \frac{-۲(x - ۲)\left(x^۲ + ۲x + ۴\right)}{\left(۱۶ + x^۳\right)^۲}$$

چون $x^۲ + ۲x + ۴ > 0$ است برای تمام x ها ، پس f' در ۲ از مثبت به منفی تغییر مین کند و لذا $f(۲) = \frac{۱}{۱۲}$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

۹) $f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲}$

$$f'(x) = \sqrt{۱ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{۱ - ۲x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

$$= \frac{\left(۱ - \sqrt{۲}\,x\right)\left(۱ + \sqrt{۲}\,x\right)}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

پس f' در $-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ از منفی به مثبت تغییر می کند و در $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ از مثبت به منفی.

پس $f\left(-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right) = -\frac{۱}{۲}$ یک مقدار مینیمم موضعی f است و $f\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$ یک مقدار ماکسیمم موضعی است.

۱۰) $k(x) = \cos x + \frac{۱}{۲}x$

$$k'(x) = -\sin x + \frac{۱}{۲}$$

پس $k'(x) > 0$ است اگر $\sin x < \frac{۱}{۲}$ باشد ، و $k'(x) < 0$ است اگر $\sin x > \frac{۱}{۲}$ باشد.

لذا k' از مثبت به منفی تغییر می کند در $\frac{\pi}{۶} + ۲n\pi$ برای هر عدد صحیح n

و از منفی به مثبت تغییر می کند در $\frac{۵\pi}{۶} + ۲n\pi$ برای هر عدد صحیح n

در نتیجه

$$k\left(\frac{\pi}{۶} + ۲n\pi\right) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} + \frac{\pi}{۱۲} + n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

یک مقدار ماکسیمم موضعی k است. و

$$k\left(\frac{۵\pi}{۶} + ۲n\pi\right) = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۳} + \frac{۵\pi}{۱۲} + n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

یک مقدار مینیمم موضعی است.

۱۱) $k(x) = \sin\left(\frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right)$

$$k'(x) = \cos\left(\frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right)\frac{۲x\left(۱ + x^{۲}\right) - x^{۲}(۲x)}{\left(۱ + x^{۲}\right)^{۲}}$$

$$= \frac{۲x}{\left(۱ + x^{۲}\right)^{۲}}\cos\left(\frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right)$$

چون

$$0 \leq \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}} \leq ۱ < \frac{\pi}{۲}$$

است ، پس داریم

$$\cos\left(\frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right) > 0$$

است برای تمام x ها ، لذا k' در صفر از منفی به مثبت تغییر می کند ، و $k(0) = 0$ یک مقدار مینیمم موضعی k است.

در تمرینات ۱۶ – ۱۲ با استفاده از تست مشتق مرتبه دوم .مقادیر اکستریم موضعی تابع را پیدا کنید.

۱۲) $f(x) = -۴x^{۲} + ۳x - ۱$

$$f'(x) = -۸x + ۳$$

پس $f'(x) = 0$ است ، اگر $x = \frac{۳}{۸}$ باشد. چون $f''(x) = -۸ < 0$ است برای تمام x ها ، پس قضیه تست مشتق مرتبه دوم می گوید

$$f\left(\frac{۳}{۸}\right) = -\frac{۷}{۱۶}$$

یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

۱۳) $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۲۴x + ۱$

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۶x - ۲۴ = ۳(x - ۴)(x + ۲)$$

پس $f'(x) = 0$ است ، برای $x = ۴$ ویا $x = -۲$ و چون $f''(x) = ۶x - ۶$ است ، بطوری که $f''(۴) = ۱۸ > 0$ و $f''(-۲) = -۱۸ < 0$ است ، پس تست مشتق دوم می گوید

$$f(۴) = -۲۹$$

یک مقدار مینیمم موضعی و $f(-۲) = ۲۹$ یک مقدار ماکسیمم موضعی است.

۱۴) $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ - \frac{۹}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}$

$$f'(x) = ۱۲x^۳ - ۱۲x^۲ - ۹x = ۳x(۲x+۱)(۲x-۳)$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = -\frac{۱}{۲}$ و یا $x = \frac{۳}{۲}$ ویا $x = 0$

چون $f''(x) = ۳۶x^۲ - ۲۴x - ۹$ است ، بطوری که $f''(0) = -۹ < 0$

و $f''\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۱۲ > 0$ و $f''\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۳۶ > 0$ است ، پس تست مشتق مرتبه دوم می گوید

$$f(0) = \frac{۱}{۲}$$

یک مقدار ماکسیمم موضعی f است و $f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۱۶}$ یک مقدار مینیمم موضعی f است. و

$$f\left(\frac{۳}{۲}\right) = -\frac{۱۲۷}{۱۶}$$

یک مقدار مینیمم موضعی f است.

۱۵) $f(t) = t^۲ + \frac{۱}{t} + ۱$

$$f'(x) = ۲t - \frac{۱}{t^۲}$$

پس $f'(t) = 0$ است اگر $۲t = \frac{۱}{t^۲}$ و یا $t^۳ = \frac{۱}{۲}$ و یا $t = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ باشد. چون

$$f''(t) = ۲ + \frac{۲}{t^۳}$$

است ، بطوری که

$$f''\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\right) = ۲ + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۶ > 0$$

پس تست مشتق مرتبه دوم می گوید

$$f\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\right) = \frac{۱}{۲^{\frac{۲}{۳}}} + \sqrt[۳]{۲} + ۱$$

یک مقدار مینیمم موضعی f است.

۱۶) $f(t) = \sin t + \cos t$

$$f'(t) = \cos t - \sin t$$

پس $f'(t) = 0$ است اگر $\sin t = \cos t$ باشد ، یعنی $x = \frac{\pi}{۴} + n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

بعد داریم $f''(t) = -\sin t - \cos t$

اگر n زوج باشد ، پس

$$f''\left(\frac{\pi}{۴} + n\pi\right) = f''\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{۲} < 0$$

پس تست مشتق نرتبه دوم می گوید

$$f\left(\frac{\pi}{۴} + n\pi\right) = \sqrt{۲}$$

یک مقدار ماکسیمم f است و به همین طریق اگر n فرد باشد ، پس

$$f''\left(\frac{\pi}{۴} + n\pi\right) = f''\left(\frac{\pi}{۴} + \pi\right) = f''\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲} > 0$$

پس تست مشتق مرتبه دوم می گوید

$$f\left(\frac{\pi}{۴} + n\pi\right) = -\sqrt{۲}$$

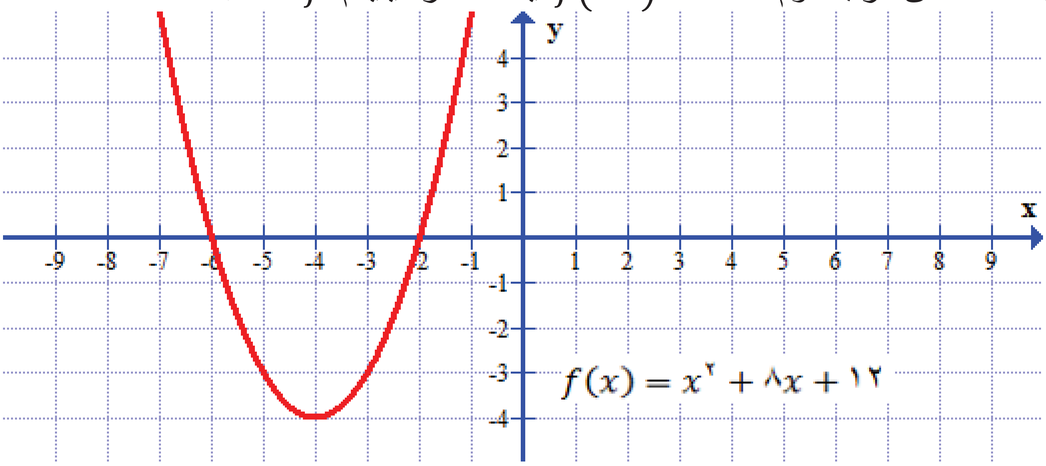
یک مقدار مینیمم f است.

در تمرینات ۲۰ — ۱۷ با استفاده از قضیه تست مشتق مرتبه اول یا دوم ، مقادیر اکستریم موضعی تابع را ، اگر وجود داشته باشند ، پدا کنید. و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

۱۷) $f(x) = x^۲ + ۸x + ۱۲$

$$f'(x) = ۲x + ۸$$

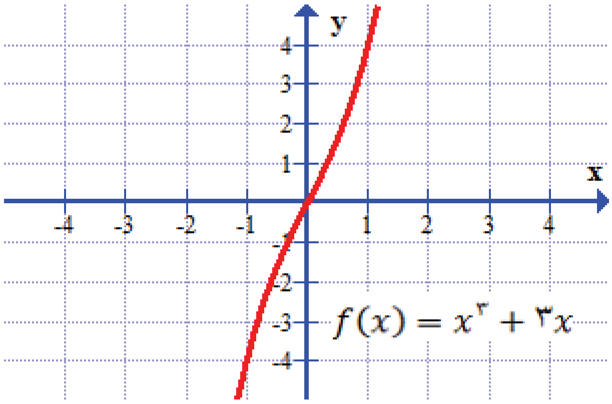
پس $f'(x) = 0$ است برای $x = -۴$ همچنین $f''(x) = ۲ > 0$ است برای تمام x ها ، پس بر اساس تست مشتق مرتبه دوم $f(-۴) = -۴$ یک مقدار مینیمم f است.



۱۸) $f(x) = x^۳ + ۳x$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۳ = ۳\left(x^۲ + ۱\right) > 0$$

پس $f'(x) > 0$ است برای تمام x ها ، پس f هیچ نقطه بحرانی ندارد و هیچ مقدار اکستریم موضعی وجود ندارد.



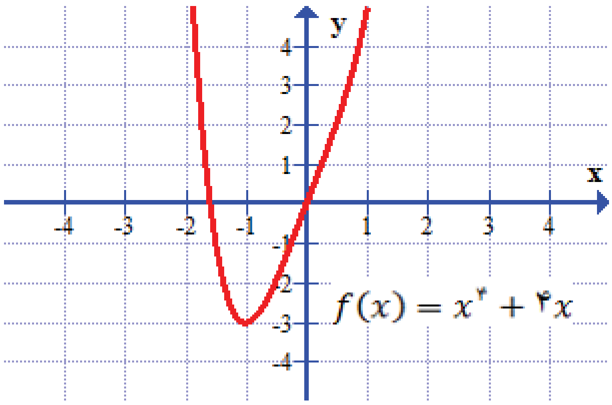
۱۹) $f(x) = x^۴ + ۴x$

$$f'(x) = ۴x^۳ + ۴ = ۴\left(x^۳ + ۱\right) = ۴(x + ۱)\left(x^۲ - x + ۱\right)$$

چون $x^۲ - x + ۱ > 0$ است برای تمام x ها و $f'(x) = 0$ است برای $x = -۱$ و

$$f''(x) = ۱۲x^۲$$

است، بطوری که $f''(-۱) = ۱۲ > 0$ است ، پس $f(-۱) = -۳$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.



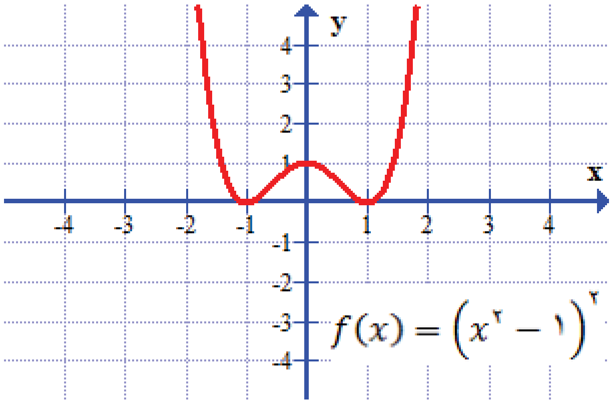
۲۰) $f(x) = \left(x^{۲} - ۱\right)^{۲}$

$$f'(x) = ۲\left(x^{۲} - ۱\right)(۲x) = ۴x(x-۱)(x+۱)$$

پس $f'(x) = 0$ است برای $x = 0$ یا $x = ۱$ یا $x = -۱$ همچنین

$$f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۴$$

است ، بطوری که $f''(0) = -۴ < 0$ و $f''(۱) = ۸ > 0$ و $f''(-۱) = ۸ > 0$ است ، پس $f(0) = ۱$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است و $f(۱) = f(-۱) = 0$ یک مقدار مینیمم موضعی است.



در تمرینات ۲۲ – ۲۱ یک نقطه c پیدا کنید ، بطوری که $f'(c) = f''(c) = 0$ باشد. با استفاده از مشتق f نشان دهید که f در c یک مقدار اکستریم موضعی ندارد.

۲۱) $f(x) = x^{۵}$

$$f'(x) = ۵x^{۴}$$

$$f''(x) = ۲۰x^{۳}$$

پس $f'(0) = f''(0) = 0$ است , اما $f'(x) > 0$ است اگر $x \neq 0$ باشد ، پس f اکیدا صعودی است. لذا هیچ مقدار اکستریم موضعی وجود ندارد.

۲۲) $f(x) = x^{۵} - x^{۳}$

$$f'(x) = ۵x^{۴} - ۳x^{۲} = x^{۲}\left(۵x^{۲} - ۳\right)$$

$$f''(x) = ۲۰x^{۳} - ۶x = ۲x\left(۱۰x^{۲} - ۳\right)$$

پس $f'(0) = f''(0) = 0$ است ، اما $f'(x) < 0$ است برای x در بازه $\left(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}, \sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)$ و

$$x \neq 0$$

بطوری که f مطلقا نزولی است در $\left(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}, \sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)$ و لذا f هیچ مقدار اکستیم موضعی در صفر ندارد.

۳.۵ - کار برد های مقادیر اکستریم Applications of Extreme Values

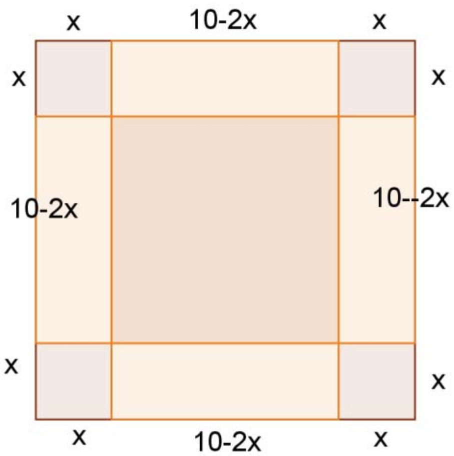
این بخش را به حل مسائل کاربردی می پردازیم.

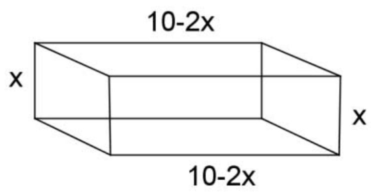
مقادیر اکستریم در یک بازه بسته ، کران دار
Extreme Values on a Closed, Bounded Interval

بخاطر بیاورید که در بخش ۳.۱ قضیه ماکسیمم و مینیمم گفتیم اگر f در یک بازه بسته و کرن دار $[a, b]$ پیوسته باشد ، پس f یک ماکسیمم و یک مینیمم دارد. همچنین گفتیم این مقادیر در دو نقطه انتهایی a و b اتفاق می افتد و یا در نقاط بحرانی (a, b)

دو مثال ززریر طرز حل مسائل کار بردی در یک بازه بسته و کرن دار $[a, b]$ را تشریح می کنند.

مثال ۱ - می خواهیم یک جعبه فلزی ، بدون درب ، از یک صفحه فلزی مربع شکل که هر ضلع آن ده اینچ است بسازیم. برای این کار ، ابتدا قطعات مربع شکل یک اندازه از هر گوشه این صفحه می بریم و سپس جوانب صفحه فلزی را به طرف بالا تا می کنیم. ابعاد این جعبه که دارای حد اکثر حجم را داشته باشد ، پیدا کنید. اسکل زیر را ملاحظه کنید.





پاسخ

فرض می کنیم x طول هر ضلع مربع هایی که باید از صفحه فلزی قطع کنیم، باشد. چون هر ضلع صفحه فلزی ده اینچ است ، پس $0 < x < ۵$ است. ارتفاع جعبه بدست آمده x اینچ است و هر یک از اضلاع قاعده جعبه $۱۰ - ۲x$ اینچ است. یعنی حجم جعبه به صورت زیر خواهد بود.

$$V = x(۱۰ - ۲x)^۲ = ۴x^۳ - ۴۰x^۲ + ۱۰۰x \quad \text{برای} \quad 0 \leq x \leq ۵$$

پس ، مساله به این صورت در می آید. ماکسیمم حجم در $[0, ۵]$ پیدا کنید. برای پیدا کردن نقاط بحرانی در $(0, ۵)$ مشتق V را پیدا می کنیم.

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۸۰x + ۱۰۰ = ۴\left(۳x^۲ - ۲۰x + ۲۵\right) = ۴(۳x - ۵)(x - ۵)$$

پس $V'(x) = 0$ است برای $x = \frac{۵}{۳}$ و $x = ۵$ لذا $\frac{۵}{۳}$ تنها نقطه بحرانی در $(0, ۵)$ است.

حال چون داریم

$$V(0) = 0 \quad ، \quad V\left(\frac{۵}{۳}\right) = \frac{۵}{۳}\left(\frac{۲۰}{۳}\right)^{۲} = \frac{۲۰۰۰}{۲۷} \quad ، \text{و} \quad V(۵) = 0$$

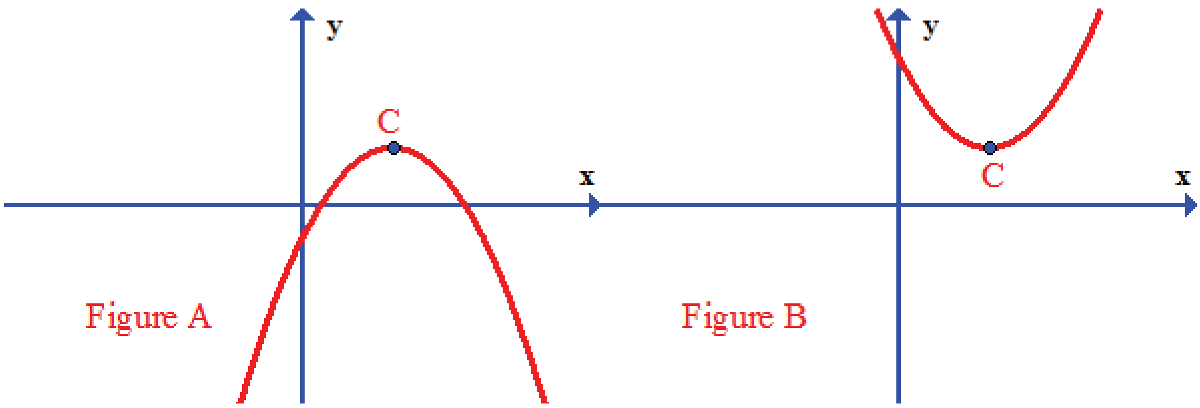
نتیجه می گیریم ماکسیمم حجم ، برای $x = \frac{۵}{۳}$ اتفاق می افتد. و

$$۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۲\left(\frac{۵}{۳}\right) = \frac{۲۰}{۳}$$

و در نهایت جعبه با حد اکثر حجم ، جعبه ای است با ارتفاع $\frac{۵}{۳}$ اینچ و قاعده مربع شکل که هر ضلع آن $\frac{۲۰}{۳}$ اینچ است.

مقادیر اکستریم در یک بازه اختیاری Extreme Values on an Arbitrary Interval

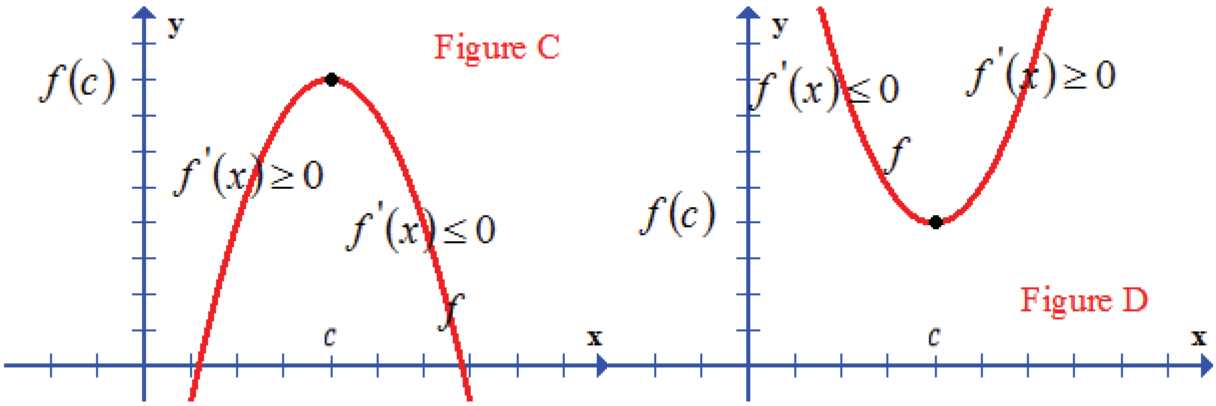
قضیه ماکسیمم و مینیمم فقط برای بازه های بسته و کران دار کاربرد دارد. اگر بازه I بسته و یا کران دار نباشد ، پس تابع پیوسته f لزوما ماکسیمم و یا مینیمم در I ندارد. اما ، همان طور که در بخش ۳.۴ گفتیم ، اگر f در آن قسمت I و در سمت چپ c صعودی است و در آن قسمت I در سمت راست c نزولی است ، پس $f(c)$ مقدار ماکسیمم f در I است.شکل A
به همین طریق ، اگر f در آن قسمت I که سمت چپ c است نزولی است و در ان قسمت I که سمت راست c است ، صعودی باشد ، پس $f(c)$ مقدار مینیمم f در I است. شکل B



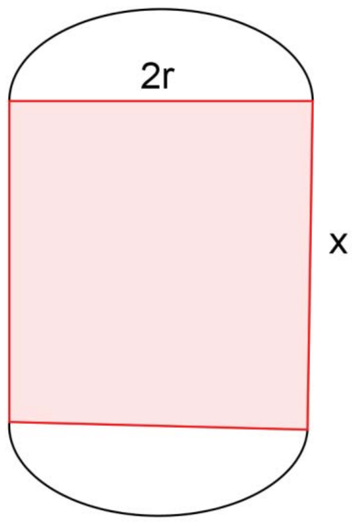
این موضوع ما را به قضیه زیر می رساند.

قضیه ۳.۵.۱
فرض می کنیم f در بازه I که شامل c است ، پیوسته باشد.
الف - فرض کنید برای هر نقطه مانند c در I اگر برای $x < c$ داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ و برای $x > c$ داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ پس $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم f در I است. شکل C

ب - فرض کنید برای هر نقطه مانند c در I اگر برای $x < c$ داشته باشیم $f'(x) \le 0$ و برای $x > c$ داشته باشیم $f'(x) \ge 0$ پس $f(c)$ یک مقدار مینیمم f در I است. شکل D



مثال ۲ -می خواهیم یک زمین مسابقه دو مطابق شکل زیر بسازیم. محیط این زمین باید ۴۴۰ متر باشد. ابعاد این زمین را پیدا کنید ، بطوری که مساحت قسمت مستطیل شکل ، قسمت رنگی ، حد اکثر مساحت را داشته باشد.



پاسخ

مساحت Area

شعاع Radius

قاعده Base

محیط ، پیرامون Circumference, Perimeter

فرض می کنیم شعاع دو نیم دائره $r>0$ باشد. و x طول قسمت مستطیل شکل زمین باشد. هدف ما این است که مساحت این قسمت مستطیل شکل حد اکثر باشد. چون طول مستطیل x و عرض آن $2r$ است. پس داریم

$$A = 2rx$$

ملاحظه می کنید که پیرامون زمین $2x + 2\pi r$ است. و طبق فرض مساله پیرامون زمین ۴۴۰ متر است. پس بر اساس فرض مساله داریم

$$2x + 2\pi r = 440$$
$$x = 220 - \pi r \qquad (1)$$

همچنین

$$A = 2rx = 2r(220 - \pi r) = 440r - 2\pi r^2 \quad \text{برای} \quad 0 < r \leq \frac{220}{\pi}$$

برای پیدا کردن مقدار ماکسیمم A ، ابتدا مشتق A را می گیریم.

$$A'(r) = 440 - 4\pi r = 4(110 - \pi r)$$

بنا بر این $A'(r) = 0$ است برای $r = \frac{110}{\pi}$ ، علاوه بر این $A'(r) > 0$ است اگر

$$0 < r < \frac{110}{\pi}$$

باشد ، و $A'(r) < 0$ است اگر

$$\frac{110}{\pi} < r \leq \frac{220}{\pi}$$

باشد. پس بر اساس قضیه ۳.۵.۱ مقدار ماکسیمم A برای $r = \frac{110}{\pi}$ اتفاق می افتاد. و بر اساس فرمول شماره (1) بالا ، مقدار x از طریق زیر بدست می آوریم.

$$x = 220 - \pi\left(\frac{110}{\pi}\right) = 110$$

در نهایت ، مساحت به حد اکثر میرسد ، اگر طول مستطیل ۱۱۰ متر و شعاع نیم دایره ها $\frac{110}{\pi}$ متر باشد.

قضیه ۳.۵.۲

فرض می کنیم f در بازه ای بنام I پیوسته باشد. و باز فرض می کنیم c در I است و $f'(c) = 0$ باشد.

الف - اگر برای هر نقطه داخلی x در I داشته باشیم $f''(x) \leq 0$ ، پس $f(c)$ مقدار ماکسیمم f در I است.

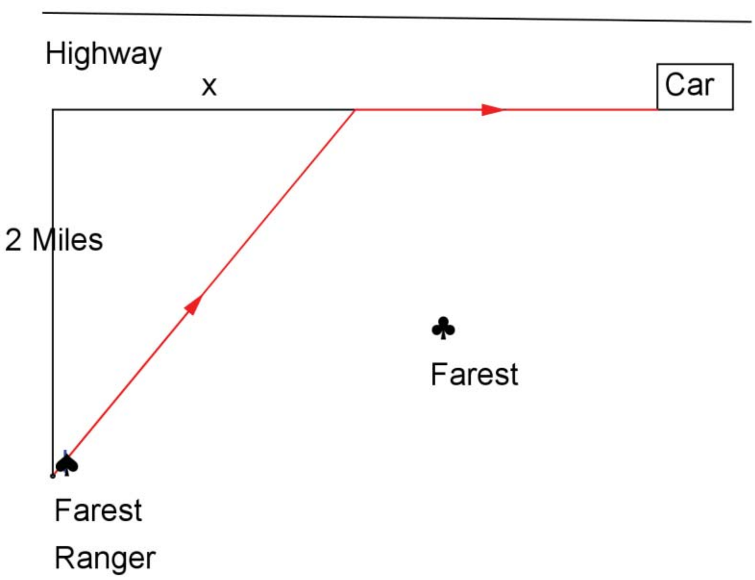
ب - اگر برای هر نقطه داخلی x در I داشته باشیم $f''(x) \geq 0$ ، پس $f(c)$ مقدار مینیمم f در I است

اثبات

الف – اگربرای هر نقطه داخلی x در I داشته باشیم $f''(x) \leq 0$ ، پس چون f'' مشتق f' است ، پس قضیه ۳.۳.۲ بخش ۳.۳ می گوید f' در I نزولی است. چون بر اساس فرض قضیه $f'(c) = 0$ است ، پس $f'(x) \geq 0$ است برای $x < c$ و $f'(x) \leq 0$ است برای $x > c$

پس بر اساس قضیه ۳.۵.۱ همین بخش $f(c)$ مقدار ماکسیمم f در I است. **اثبات قسمت ب هم مانند قسمت الف است.**

مثال ۳



با عرض معذرت برای درک تصویر بالا ، لغات زیر را بخاطر بسپارید

جنگل Forest

جنگل بان Forest Ranger

اتو بان Highway

اتومبیل Car

صورت مساله

یک جنگل بان در جنگل و دو مایلی یک اتو بان صاف و بدون پیچ و خم ایستاده است. یک اتومبیل هم پنج مایلی پایین اتوبان قرار دارد. اگر جنگل بان می تواند با سرعت سه مایل در ساعت راه برود و با سرعت چهار مایل در ساعت در طول جاده حرکت کند ، به طرف چه نقطه ای از جاده باید جنگل بان راه برود تا در حد اقل زمان به اتومبیل برسد؟

پاسخ

فرض می کنیم x فاصله ای باشد که در شکل ملاحظه می کنید. پس طبق قضیه فیثاغورث ، جنگل بان $\sqrt{x^۲+۴}$ مایل در جنگل راه می رود. همچنین $۵-x$ مایل در طول جاده حرکت می کند. فرمول زیر را داریم.

$$\text{زمان} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$$

$$Time = \frac{Distance}{Speed}$$

$$\text{زمان در جنگل} \quad T = \frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۳}$$

$$\text{زمان در جاده} \quad T = \frac{۵-x}{۴}$$

دو زمان را باهم جمع می کنیم.

$$T = \frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۳} + \frac{۵-x}{۴}$$

$$T'(x) = \frac{۲x}{۲/۳\ \sqrt{x^۲+۴}} - \frac{۱}{۴} = \frac{x}{۳\ \sqrt{x^۲+۴}} - \frac{۱}{۴}$$

پس $T'(x)=0$ است ، اگر

$$۳\ \sqrt{x^۲+۴} = ۴x$$

باشد. چون x باید نا منفی باشد ، پس داریم

$$۹\left(x^۲+۴\right) = ۱۶x^۲$$

$$۷x^۲ = ۳۶$$

$$x = \frac{۶}{۷}\ \sqrt{۷}$$

چون

$$T''(x) = \frac{۳\ \sqrt{x^۲+۴} - x\left(\frac{۳x}{\sqrt{x^۲+۴}}\right)}{۹\left(x^۲+۴\right)} = \frac{۳\left(x^۲+۴\right) - ۳x^۲}{۹\left(x^۲+۴\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{۴}{۳(x^۲ + ۴)^{\frac{۳}{۲}}}$$

می بینیم که $T''(x) > 0$ است برای $x > 0$ پس بر اساس قضیه ۳.۵.۲ همین بخش حد اقل مقدار T وقتی رخ می دهد که $x = \frac{۶}{۷}\sqrt{۷}$ باشد. لذا، اگر جنگل بان به طرف نقطه $\frac{۶}{۷}\sqrt{۷}$ حرکت کند ، حد اقل زمان طی خواهد شد. تقریبا ۲ / ۳ مایل به طرف پایین جاده.

یاد آوری –اگر اعداد به فارسی نوشته شوند ، نماد اعشاری یک خط مورب است مثلا ۲/۳ خوانده می شود "دو و سه دهم "

نماد کسر هم در فارسی یک خط افقی است. مانند $\frac{۲}{۳}$ که خوانده می شود "دو سوم " و " یا دو تقسیم بر سه "

اگر اعداد به لاتین نوشته شوند ، نماد اعشاری یک نقطه است. مثلا 4.5 که خوا نده می شود " چهار و نیم "

نماد کسر در لاتین هم می تواند یک خط مورب باشد و یا یک خط افقی ، مانند

$$\frac{2}{3} = {}^{2}/_{3}$$

هر دو نماد بالا خوانده می شوند "دو سوم " و یا "دو تقسیم بر سه "

تمرینات ۳.۵

۱ – دو عدد مثبت پیدا کنید که مجموع آنها ۱۸ باشد و حاصل ضرب آنها ، هر اندازه که ممکن است ، بزرگ باشد.

۲ - یک جعبه که از طرف بالا باز می شود ، دارای جوانب عمودی و یک قاعده مربع و حجم چهار متر مکعب است. اگر این جعبه کمترین سطح جانبی ممکن داشته باشد ، ابعاد آن را پیدا کنید.

۳ – فرض کنید یک پنجره به شکل مستطیل است با یک مثلث متساوی الاضلاع در بالای آن. فرض کنید محیط پنجره ۱۲ فوت باشد. ابعاد این پنجره را پیدا کنید ، بطوری که امکان ورود حد اکثر نور داشته باشد.

۴ – در ساعت سه بعد از ظهر یک کشتی نفت کش که با سرعت ۱۵ کیلو متر در ساعت به طرف غرب اقیانوس در حل حرکت است ، از نقطه ای عبور می کند که یک کشتی تفریحی در ساعت دو بعد از ظهر به آنجا رسید. این کشتی تفریحی با سرعت ۲۵ کیلو متر به طرف شمال حرکت می کرد. در چه ساعتی این دو کشتی حد اقل فاصله با یک دیگر داشتند ؟

۵ - در یک فعل و انفعال شیمیائ ماده A به طریق زیر به ماده B تبدیل می شود.

$$\frac{dx}{dt} = kx(a-x)$$

در فرمول بالا ، x غلظت ماده B در زمان t است. a غلظت اولیه ماده A است. و k یک عدد مثبت ثابت است. مقدار x را طوری پیداکنید که در آن $\frac{dx}{dt}$ فعل و انفعال در حد ماکسیمم است . یعنی سرعت فعل و انفعال در بالا ترین حد است.

۶ - نقاطی را روی خط $y = ۲x - ۴$ پیدا کنید که کمترین فاصله تا نقطه $(۱, ۳)$ داشته باشند.

۷ - بین تمام مثلث هایی که از نقطه $(۱, ۱)$ می گذارند و دو ضلع آنها روی محور های مختصات قرار دارند، یکی کمترین مساحت دارد. طول اضلاع آنرا پیدا کنید.

۸ - اگر مقدار سه کیلو متر سیم خار دار داشته باشیم و بخواهیم اطراف یک مثلث متساوی الساقین حفاظ بکشیم ، بطوری که بیشترین مساحت را در بر بگیرد ، طول اضلاع آن مثلث را پیدا کنید.

پاسخ تمرینت ۳.۵

۱ – دو عدد مثبت پیدا کنید که مجموع آنها ۱۸ باشد و حاصل ضرب آنها ، هر اندازه که ممکن است ، بزرگ باشد.

پاسخ

حاصل ضرب Product

فرض می کنیم x و y دو عدد مثبت باشند. پس $0 < x < ۱۸$ و $0 < y < ۱۸$
اگر P نماد حاصل ضرب آن دو عدد باشد ، پس $P = xy = x(۱۸ - x) = ۱۸x - x^۲$
مشتق P را بدست می آوریم.

$$P'(x) = ۱۸ - ۲x$$

پس $P'(x) = 0$ است برای $x = ۹$. چون $P''(x) = -۲ < 0$ است برای تمام x ها ، پس بر اساس قضیه ۳.۵.۲ همین بخش ، مقدا ر ماکسیمم P در $x = ۹$ اتفاق می افتد. و در نهایت عدد دیگر

$$y = ۱۸ - ۹ = ۹$$

است.

۲ - یک جعبه که از طرف بالا باز می شود ، دارای جوانب عمودی و یک قاعده مربع و حجم چهار متر مکعب است. اگر این جعبه کمترین سطح جانبی ممکن داشته باشد ، ابعاد آن را پیدا کنید.

پاسخ

ضلع Side

ارتفاع Height

قاعده Base

حجم Volume

سطح جانبی Surface Area

فرض می کنیم x طول یک ضلع قاعده ، h ارتفاع و V حجم باشد. باید سطح جانبی S را به حد اقل برسانیم. می دانیم که سطح جانبی و یا رویه جانبی این مکعب مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$S = ۴xh + x^۲$$

طبق فرض مساله حجم این جعبه ۴ متر مکعب است. پس

$$۴ = V = x^۲h$$

پس داریم $h = \frac{۴}{x^۲}$ است. لذا

$$S = ۴x\left(\frac{۴}{x^۲}\right) + x^۲ = \frac{۱۶}{x} + x^۲$$

$$S'(x) = -\frac{۱۶}{x^۲} + ۲x$$

پس $S'(x) = 0$ است ، اگر $-\frac{۱۶}{x^۲} + ۲x = 0$ باشد ، یعنی $۲x^۳ = ۱۶$ و یا $x = ۲$ باشد.

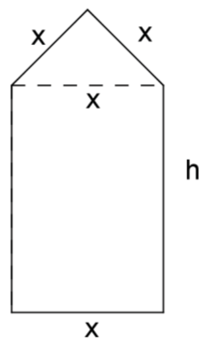
چون $S''(x) = \frac{۳۲}{x^{۳}} + ۲ > 0$ است برای تمام $x > 0$ ها ، پس بر اساس همان قضیه مذکور بالا ، سطح جانبی به حد اقل می‌رسد اگر $x = ۲$ باشد. لذا $h = \frac{۴}{۲^{۲}} = ۱$. در نهایت هر ضلع قاعده ۲ متر و ارتفاع یک متر باید باشد.

۳ – فرض کنید یک پنجره به شکل مستطیل است با یک مثلث متساوی الاضلاع در بالای آن. فرض کنید محیط پنجره ۱۲ فوت باشد. ابعاد این پنجره را پیدا کنید ، بطوری که امکان ورود حد اکثر نور داشته باشد.

پاسخ

پیرامون ی محیط Perimeter

مساحت یا سطح Area



فرض می کنیم x و h همان طور که در شکل ملاحظه می کنید باشد. و فرض کنید P پیرامون یا محیط و A مساحت باشد. چون مثلث ، متساوی الضلاع است ، پس ارتفاع آن $x\sqrt{۳}\,\frac{۱}{۲}$ است. پس

$$A = xh + \frac{۱}{۲}x\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\,x\right) = xh + \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}\,x^{۲}$$

است و طبق فرض مساله داریم $۱۲ = P = ۲h + ۳x$ و لذا $h = ۶ - \frac{۳}{۲}x$ است و در نتیجه

$$A = x\left(۶ - \frac{۳}{۲}x\right) + \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}\,x^{۲} = ۶x + \left(\frac{۱}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۳}{۲}\right)x^{۲} \quad \text{برای} \quad 0 < x \leq ۴$$

$$A'(x) = ۶ + \left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۳} - ۳\right)x$$

پس $A'(x) = 0$ است ، اگر

$$x = \frac{-۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۳} = \frac{۱۲}{۶ - \sqrt{۳}}$$

باشد. چون $A''(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} - ۳ < 0$ است برای تمام x ها پس طبق همان قضیه ، A ماکسیمم است اگر $x = \frac{۱۲}{۶-\sqrt{۳}}$ باشد. چون

$$h = ۶ - \frac{۳}{۲}\,\frac{۱۲}{۶-\sqrt{۳}} = \frac{۱۸ - ۶\sqrt{۳}}{۶-\sqrt{۳}}$$

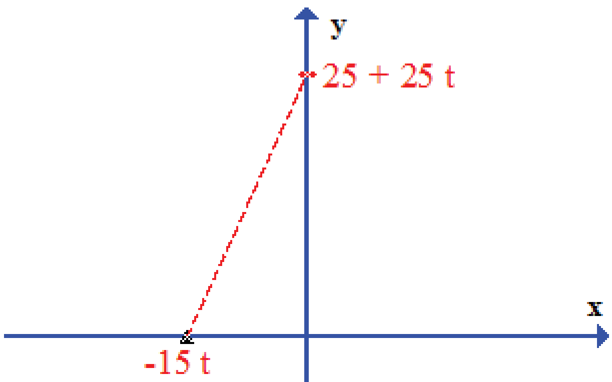
و در نهایت ، حد اکثر نور وارد می شود ، اگر

$$x = \frac{12}{6-\sqrt{3}} \approx 2.8 \text{ فوت}$$
$$h = \frac{18-6\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \approx 1.8 \text{ فوت}$$

باشد.

۴ ـ در ساعت سه بعد از ظهر یک کشتی نفت کش که با سرعت ۱۵ کیلو متر در ساعت به طرف غرب اقیانوس در حال حرکت است ، از نقطه ای عبور می کند که یک کشتی تفریحی در ساعت دو بعد از ظهر به آنجا رسید. این کشتی تفریحی با سرعت ۲۵ کیلو متردر ساعت به طرف شمال حرکت می کرد. در چه ساعتی این دو کشتی حد اقل فاصله با یک دیگر داشتند ؟

پاسخ



فرض می کنیم $t = 0$ مربوط به ساعت ۳ بعد از ظهر باشد. یک محور مختصات مطابق بالا رسم می کنیم. و فرض می کنیم مبدا مختصات مکان کشتی نفت کش در زمان صفر باشد. در هر زمان t مکان کشتی نفت کش روی محور x ها $-۱۵t$ است و مکان کشتی تفریحی روی محور y ها $۲۵ + ۲۵t$ است. پس فاصله $Distance$ بین آنها مطابق زیر بدست می آید.

$$D = \sqrt{(0 + ۱۵t)^{۲} + (۲۵ + ۲۵t - 0\quad)^{۲}}$$

اگر فرض کنیم $E = D^{۲}$ است ، پس باید E را به حد اقل برسانیم.

$$E = D^{۲} = ۲۲۵t^{۲} + ۶۲۵(۱ + t)^{۲}$$
$$E'(t) = ۴۵۰\,t + ۱۲۵۰\,(۱ + t) = ۱۷۰۰\,t + ۱۲۵۰$$

پس $E'(t) = 0$ است اگر $۱۷۰۰\,t = -۱۲۵۰$ و یا

$$t = -\frac{۱۲۵۰}{۱۷۰۰} = -\frac{۲۵}{۳۴}$$

باشد. چون $E''(t) = ۱۷۰۰ > 0$ است برای تمام t ها ، پس طبق قضیه نام برده شده ، E و لذا D مینیمم است اگر $t == -\frac{۲۵}{۳۴}$ باشد ، که مربوط می شود به ۴۴ دقیقه قبل از ساعت سه بعد از ظهر و یا ۲:۱۶ بعد از ظهر.

۵ ـ در یک فعل و انفعال شیمیائ ماده A به طریق زیر به ماده B تبدیل می شود.

$$\frac{dx}{dt} = kx(a - x)$$

در فرمول بالا ، x غلظت ماده B در زمان t است. a غلظت اولیه ماده A است. و k یک عدد مثبت ثابت است. مقدار x را طوری پیداکنید که در آن $\frac{dx}{dt}$ فعل و انفعال در حد ماکسیمم است . یعنی سرعت فعل و انفعال در بالا ترین حد است.

پاسخ

فرض می کنیم $r(x) = \frac{dx}{dt} = kx(a - x)$ باشد ، پس $r'(x) = ka - ۲kx$ است ، پس $r'(x) = 0$ است ، اگر $ka - ۲kx = 0$ باشد ، یعنی $x = \frac{a}{۲}$. چون $r''(x) = -۲k < 0$ است ، پس $\frac{dx}{dt}$ ماکسیمم است اگر $x = \frac{a}{۲}$ باشد.

۶ ـ نقاطی را روی خط $y = ۲x - ۴$ پیدا کنید که کمترین فاصله تا نقطه $(۱,۳)$ داشته باشند.

پاسخ

چون $y = ۲x - ۴$ است ، برای هر نقطه ای مانند (x, y) روی خط . فاصله بین (x, y) و $(۱,۳)$ مطابق زیر بدست می آید.

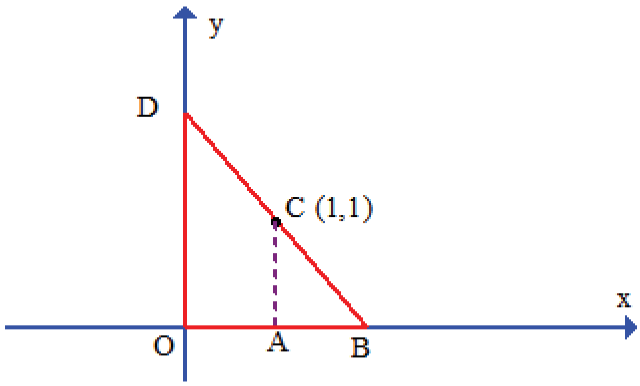
$$D = \sqrt{(x - ۱)^{۲} + [(۲x - ۴) - ۳]^{۲}} = \sqrt{(x - ۱)^{۲} + (۲x - ۷)^{۲}}$$

حالا فرض می کنیم

$$E = D^{۲} = (x - ۱)^{۲} + (۲x - ۷)^{۲}$$
$$E'(x) = ۲(x - ۱) + ۴(۲x - ۷) = ۱۰\,x - ۳۰ = ۱۰\,(x - ۳)$$

پس $E'(x) = 0$ است برای $x = ۳$. چون $E'(x) < 0$ است برای $x < ۳$ و $E'(x) > 0$ است برای $x > ۳$ پس ، بر اساس قضیه ۳.۵.۱ همین بخش E مقدار مینیمم را در ۳ دارد. اگر $x = ۳$ باشد , پس $y = ۲(۳) - ۴ = ۲$ است. لذا $(۳,۲)$ نقطه ای روی خط $y = ۲x - ۴$ که نزدیک ترین نقطه به $(۱,۳)$ است.

۷ ـ بین تمام مثلث هایی که از نقطه $(۱,۱)$ می گذارند و دو ضلع آنها روی محور های مختصات قرار دارند، یکی کمترین مساحت دارد. طول اضلاع آنرا پیدا کنید.
پاسخ



فرض می کنیم x طول پاره خط OB و y طول پاره خط OD باشد. واضح است که طول پاره خط AC یک است و $AB = x - ۱$ است. مثلث های ABC و OBD متشابه هستند. پس

$$\frac{y}{x} = \frac{۱}{x - ۱}$$

پس $y = \frac{x}{x-۱}$ بنا بر این مساحت مثلث OBD مطابق زیر است.

$$A = \frac{۱}{۲}xy = \frac{x^۲}{۲(x - ۱)} \quad \text{برای} \quad x > ۱$$

$$A'(x) = \frac{(۲x)۲(x - ۱) - ۲x^۲}{۴(x - ۱)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۴x}{۴(x - ۱)^۲}$$

$$= \frac{x(x - ۲)}{۲(x - ۱)^۲} \quad \text{برای} \quad x > ۱$$

بنا بر این $A'(x) = 0$ است برای $x = ۲$. چون

$$A'(x) < 0 \quad \text{برای} \quad ۱ < x < ۲$$

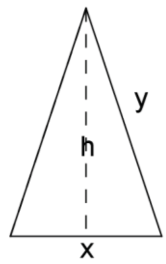
و

$$A'(x) > 0 \quad \text{برای} \quad x > ۲$$

پس قضیه ۳.۵.۱ می گوید A یعنی مساحت کمترین مقدار ش را در ۲ دارد. اگر $x = ۲$ باشد ، پس $y = \frac{۲}{۲-۱} = ۲$ و طول وتر مطابق زیر است.

$$BD = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۸ ـ اگر مقدار سه کیلو متر سیم خار دار داشته باشیم و بخواهیم اطراف یک مثلث متساوی الساقین حفاظ بکشیم ، بطوری که بیشترین مساحت را در بر بگیرد ، طول اضلاع آن مثلث را پیدا کنید.
پاسخ



فرض می کنیم x طول قاعده ، y طول ساق های مساوی h ارتفاع و A مساحت باشد. باید A را به حد اکثر یا ماکسیمم برسانیم . بر اساس فرض مساله

$$P = ۳ = x + ۲y \quad \text{پیرامون}$$

است. پس $y = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}x$ است. پس طبق قضیه فیثاقورث ، ارتفاع مطابق زیر بدست می آید.

$$h = \sqrt{y^۲ - \frac{۱}{۴}x^۲} = \sqrt{\left(\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}x\right)^۲ - \frac{۱}{۴}x^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ - ۶x}$$

پس

$$\text{مساحت } A = \frac{۱}{۲}hx = \frac{۱}{۲}x\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۹ - ۶x}\right) = \frac{۱}{۴}x\sqrt{۹ - ۶x} \quad \text{برای } 0 \le x \le \frac{۳}{۲}$$

$$A'(x) = \frac{۱}{۴}\sqrt{۹ - ۶x} - \frac{۳x}{۴\sqrt{۹ - ۶x}} = \frac{۹ - ۹x}{۴\sqrt{۹ - ۶x}}$$

پس $A'(x) = 0$ است اگر $۹ - ۹x = 0$ و یا $x = ۱$ باشد. چون $A'(x) > 0$ است ، اگر $x < ۱$ باشد و $A'(x) < 0$ است ، اگر $x > ۱$ باشد. پس طبق قضیه ۳.۵.۲ مساحت A ماکسیمم است اگر $x = ۱$ باشد. و لذا $y = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} * ۱ = ۱$
یعنی در حقیقت مثلث باید متساوی الضلاع باشد ، بالا طول هرضلع یک کیلو متر.

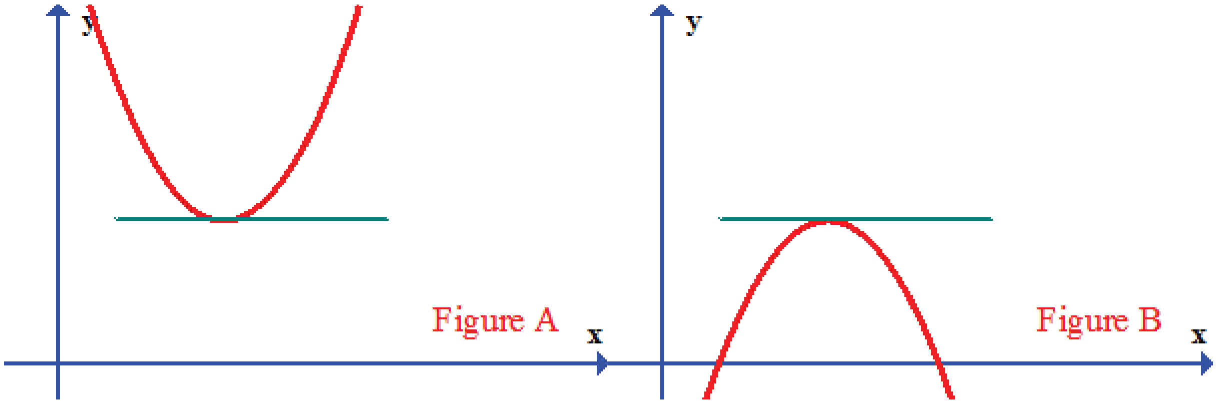
تعقر منحنی و نقاط عطف آن Concavity and Inflection Points

یا فرو رفتگی و نقاط خمیدگی

حالا راه های دیگری که مشتق مرتبه دوم می تواند در رسم نمودار یک تابع به ما کمک کند ، مورد بر رسی قرار می دهیم. یعنی تعقر و نقاط عطف.

تعقریا فرورفتگی concavity

در شکل A خط مماس زیر نمودار قرار دارد. اما در شکل B خط مماس بالای نمودار قرار دارد.



تعریف

فرض می کنیم f در c مشتق پذیر باشد ، و l_c خط مماس بر نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ باشد.

الف

می گوییم **تعقر منحنی** f در $(c, f(c))$ **رو به بالا** است ، اگر یک بازه باز مانند I_c اطراف c وجود داشته باشد بطوری که اگر x در I_c و $x \neq c$ باشد ، پس $(x, f(x))$ بالای خط l_c باشد. **Concave Upward**

می گوییم **تعقر منحنی** f در $(c, f(c))$ **رو به پایین است** ، اگر یک بازه باز مانند I_c اطراف c وجود داشته باشد بطوری که اگر x در I_c و $x \neq c$ باشد ، پس $(x, f(x))$ زیر خط l_c باشد. **Concave Downward**

ب

می گوییم نمودار یک تابع مانند f **در یک بازه باز** I **تعقر به سمت بالا دارد** ، اگر به سمت بالا تعقر داشته باشد.

می گوییم نمودار یک تابع مانند f **در یک بازه باز** I **تعقر به سمت پایین دارد** ، اگر به سمت پایین تعقر داشته باشد.

معمولا ما بیشتر به تعقر به بالا و یا به پایین در یک بازه باز علاقمند هستیم تا یک نقطه مشخص

تعقر به طرف بالا می توان گفت منحنی به طرف بالا باز می شود. شکل A

تعقر به طرف پایین می توان گفت منحنی به طرف پایین باز می شود. شکل B

تعقر را می توان به فرو رفتگی معنی کرد. این به فارسی نزدیک تر است تا تعقر

قضیه ۳.۶.۱
فرض می کنیم f'' در یک بازه باز I وجود داشته باشد.
الف - اگر $f''(x) > 0$ باشد برای تمام x ها در I ، پس نمودار f در I تعقر به بالا دارد.
ب - اگر $f''(x) < 0$ باشد برای تمام x ها در I ، پس نمودار f در I تعقر به پایین دارد.

اثبات الف

یک عدد c در I انتخاب می کنیم. چون طبق فرض قضیه $f'' > 0$ است در بازه I ، پس f در I اکیدا صعودی است. با یک عدد ثابت x بطوری که $x \neq c$ باشد ، می توانیم قضیه مقدار میانگین را بکار ببریم تا یک عدد مانند x بین x و c پیدا کنیم بطوری که

$$f(x) - f(c) = f'(z)(x - c) \qquad (۱)$$

باشد. حالا یک تابع g به صورت زیر تعریف می کنیم. این تابع مانند تابعی است که در اثبات قضیه میانگین بکار بردیم.

$$g(x = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)\,]) \text{ ،} x \in I \qquad (۲)$$

حالا فرمول (۱) را در فرمول (۲) جانشین می کنیم.

$$g(x) = f'(z)(x - c) - f'(c)(x - c) = [f'(z) - f'(c)](x - c) \qquad (۳)$$

چون f' اکیدا صعودی است و z بین x و c است ، پس سمت راست فرمول (۳) مثبت است. پس $g(x) > 0$ است برای تمام x ها در I با $x \neq c$. لذا اکیدا زیر نمودار f است در I بجز در نقطه مماس. چون c در I اختیاری بود ، پس به این معنی است که نمودار f در I تعقر به بالا دارد.

قسمت ب هم مانند قسمت الف ثابت می شود.

مثلا با استفاده از قضیه ۳.۶.۱ ملاحظه می کنید که نمودار $f(x) = x^{۲}$ تعقر به طرف بالا دارد. زیرا $f'(x) = ۲x$ و لذا $f''(x) = ۲ > 0$ است برای تمام x ها. و در نتیجه f تعقر به طرف بالا دارد در $(-\infty, \infty)$ و بطور کلی اگر $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ باشد و $a \neq 0$ دراینصورت ، اگر a مثبت باشد ، نمودار f تعقر به طرف بالا دارد در $(-\infty, \infty)$ شکل C اگر a منفی باشد ، نمودار f تعقر به طرف پایین دارد در $(-\infty, \infty)$ شکل D

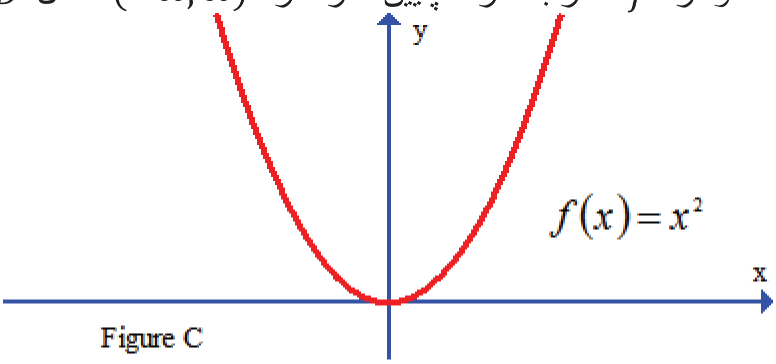
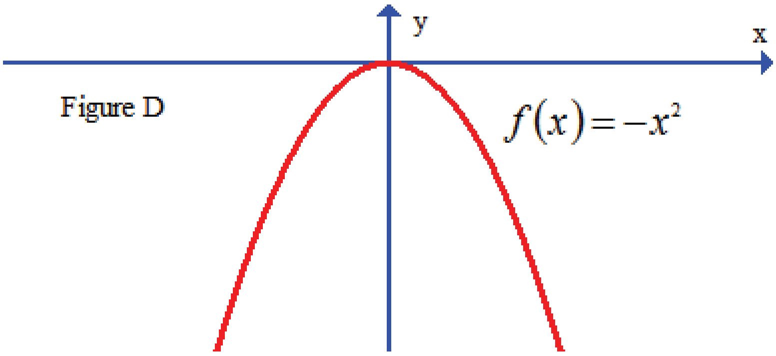


Figure C



مثال ۱- فرض کنید $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳$ باشد. بازه هایی که در آنها f تعقر به طرف بالا دارد و آنهایی که در آنها f تعقر به طرف پایین دارد ، پیدا کنید و سپس نمودار f را رسم کنید.

پاسخ

بر اساس مثال ۶ بخش ۳.۴ می دانیم که

$$f'(x) = ۱۲x^۳ - ۱۲x^۲ = ۱۲x^۲(x - ۱)$$

$$f''(x) = ۳۶x^۲ - ۲۴x = ۳۶x\left(x - \frac{۲}{۳}\right)$$

همچنین $f(۱) = -۱$

یک مقدار مینیمم موضعی f است. حالا با ایجاد جدول زیر علامت $f''(x)$ را مشخص می کنیم.

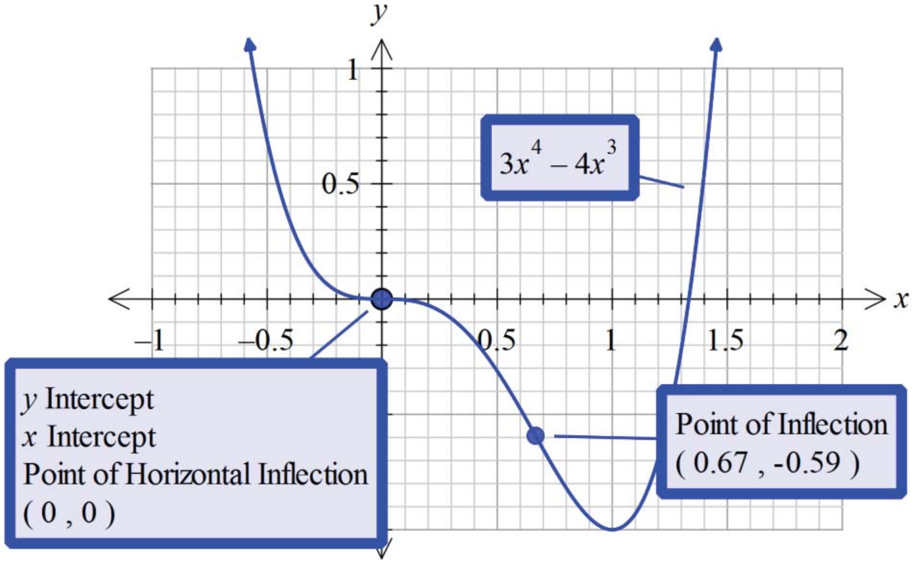
$-\infty$　　　0　　　$\frac{۲}{۳}$　　　∞

عبارت	علامت	علامت	علامت
x	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{۲}{۳}$	$-$	$-$	$+$
$x\left(x - \frac{۲}{۳}\right)$	$+$	$-$	$+$

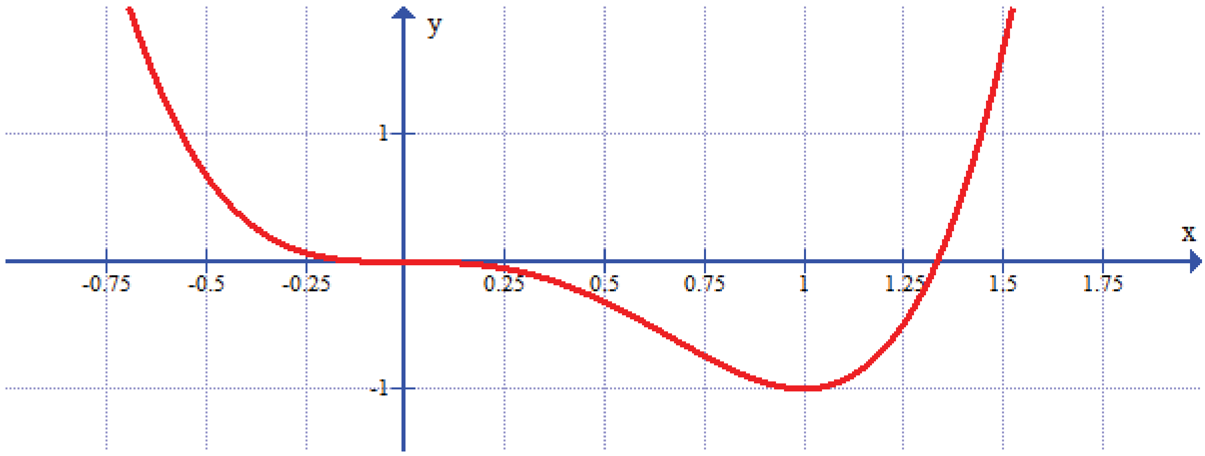
با توجه به علامت $f''(x)$ و بر اساس قضیه ۳.۶.۱ همین بخش ملاحظه می کنید که نمودار f در بازه $(-\infty, 0)$ و $\left(\frac{۲}{۳}, \infty\right)$ تعقر یا فرورفتگی به بالا دارد و در بازه $\left(0, \frac{۲}{۳}\right)$ تعقر و یا فرو رفتگی به پایین دارد. نمودار f در پایین ملاحظه می کنید.

البته در (0) فرو رفتگی بسیار ناچیز و غیر قابل دیدن است.

در نمودار زیر $Point\ of\ Inflection$ به معنی نقطه خمیدگی و یا نقطه عطف است.



این هم نمودار دیگری برای تابع مورد نظر.



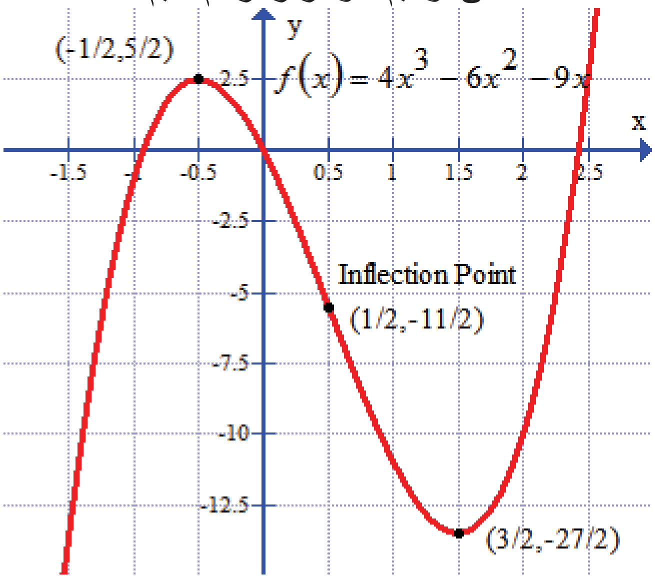
مثال ۲ ــ فرض کنید $f(x) = ۴x^۳ - ۶x^۲ - ۹x$ باشد. بازه هایی که در آنها f فرو رفتگی به طرف بالا و بازه هایی که فرو رفتگی به طرف پایین دارد پیدا کنید. و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

$$f'(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲x - ۹ = ۱۲\left(x^۲ - x - \frac{۳}{۴}\right) = ۱۲\left(x - \frac{۳}{۲}\right)\left(x + \frac{۱}{۲}\right)$$

$$f''(x) = ۲۴x - ۱۲ = ۲۴\left(x - \frac{۱}{۲}\right)$$

بر اساس قضیه ۳.۶.۱ همین بخش ، f در $\left(-\infty,\frac{۱}{۲}\right)$ فرو رفتگی به طرف پایین و در $\left(\frac{۱}{۲},\infty\right)$ فرو رفتگی به طرف بالا دارد. از مشتق مرتبه اول ، می دانیم که نقاط بحرانی $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ هستند. چون $f''\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-۲۴$ و $f''\left(\frac{۳}{۲}\right)=۲۴$ پس بر اساس تست مشتق مرتبه دوم ، نتیجه می گیریم که $f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۵}{۲}$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است و $f\left(\frac{۳}{۲}\right)=-\frac{۲۷}{۲}$ یک مقدار مینیمم موضعی f است. حالا می توانیم نمودار را رسم کنیم.



در مثال ۲ نمودار در نقطه $\left(\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۲}\right)$ از تعقر به طرف پایین به تعقر به طرف بالا تغییر یافته.
نقاطی که در آنها ، نمودار تغییر تعقر می دهد را نقاط عطف یا نقاط خمیدگی Inflection Points می نامند.

تعریف
فرض می کنیم یک خط مماس " احتمالا عمودی " در نقطه $(c,f(c))$ بر نمودار f وجود داشته باشد. پس $(c,f(c))$ یک نقطه عطف یا نقطه خمیدگی Inflection Point نمودار f است ، اگر یک عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد بطوری که نمودار f در $(c-\delta,c)$ تعقر به بالا و در $(c,c+\delta)$ تعقر به پایین " یا برعکس " داشته باشد.

طریق پیدا کردن نقاط خمید گی بسیاری از توابع
۱ – مقادیر c را که در آنها $f''(c)=0$ است ، پیدا کنید.
۲ – برای هر یک از مقادیر c که در مرحله اول پیدا کردید ، مشخص کنید آیا f'' در c تغییر علامت می دهد.
۳ – اگر f'' در c تغییر علامت می دهد ، $(c,f(c))$ نقطه خمید گی است.

مثال ۳ ــفرض کنید $f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x + ۱۰$ باشد. نقاط عطف یا خمید گی نمودار f را پیدا کنید.

پاسخ

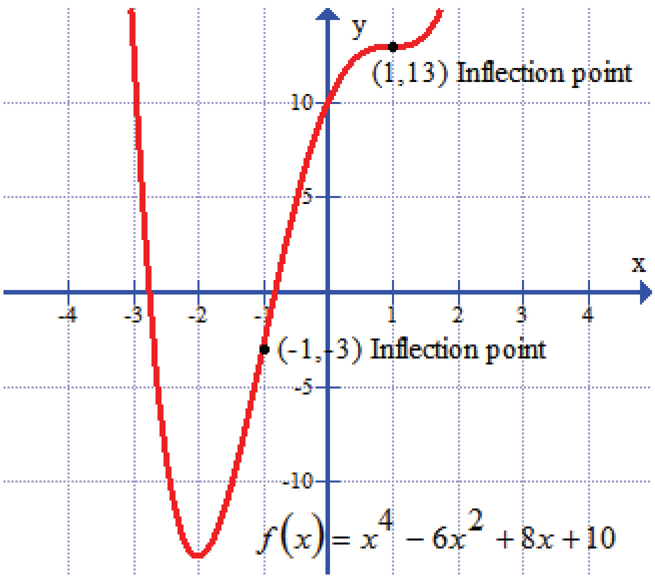
$$f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x + ۸$$

$$f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۱۲ = ۱۲(x+۱)(x-۱)$$

$-\infty$ $\quad$ -۱ $\quad$ ۱ $\quad$ ∞

عبارت	علامت	علامت	علامت
$x - ۱$	$-$	$-$	$+$
$x + ۱$	$-$	$+$	$+$
$(x-۱)(x+۱)$	$+$	$-$	$+$

ملاحظه می کنید که $f''(۱) = f''(-۱) = 0$ است و $f''(x)$ هم در ۱ و هم در ۱− تغییر علامت می دهد. پس $(۱, f(۱)) = (۱, ۱۳)$ و $(-۱, f(-۱)) = (-۱, -۳)$ نقاط خمیدگی هستند.

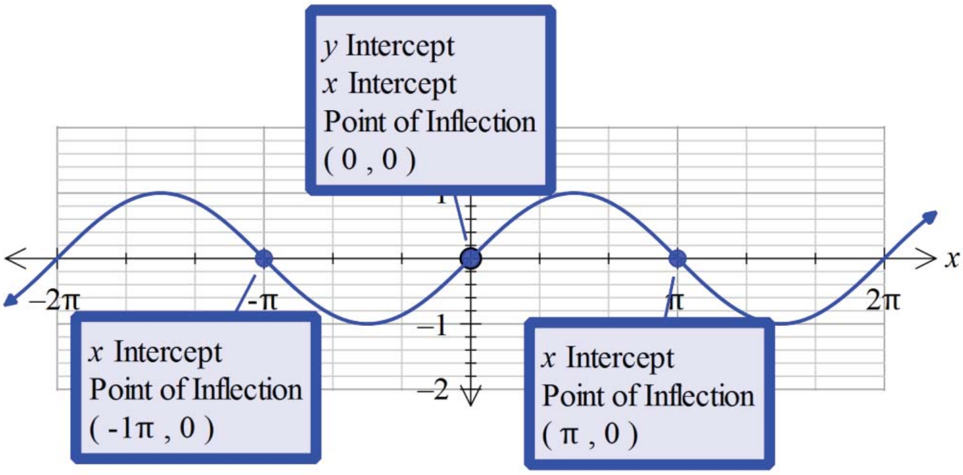


مثال ۴ ــ فرض کنید $f(x) = \sin x$ برای $-۲\pi \le x \le ۲\pi$ باشد. نقاط خمیدگی نمودار f را پیدا کنید ودر باره خمیدگی آن بحث کنید و سپس نمودار را رسم کنید.

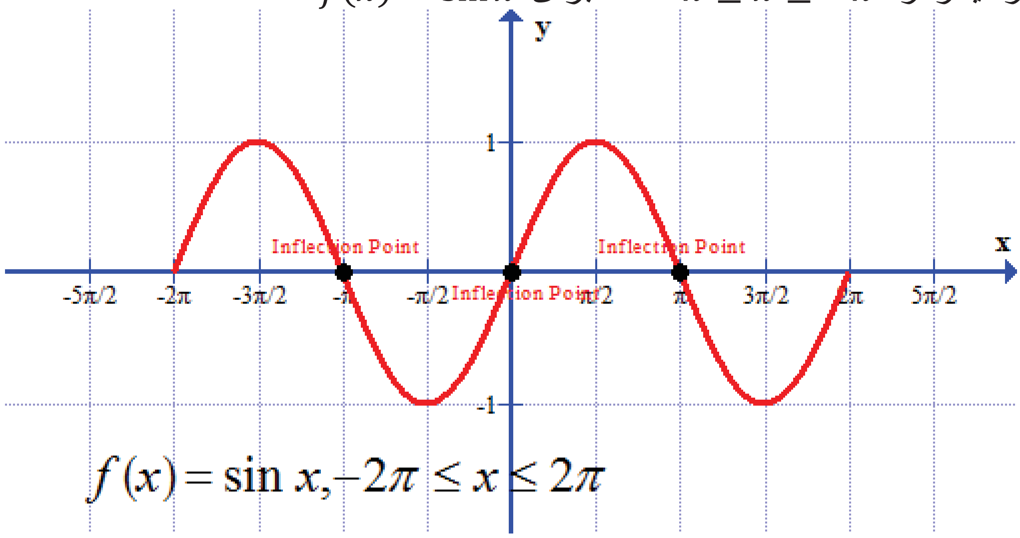
پاسخ

$$f'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f''(x) = -\sin x$$

$f''(x) = 0$ است برای π و 0 ، $x = -\pi$. چون f'' در هر سه این مقادیر x تغییر علامت می دهد ، پس $(\pi, 0)$ و $(0,0)$ ، $(-\pi, 0)$ نقاط عطف یا نقاط خمیدگی هستند. علاوه بر این نمودار f در بازه های $(-۲\pi, -\pi)$ و $(0, \pi)$ فرو رفتگی به طرف پایین و در بازه های $(-\pi, 0)$و $(\pi, ۲\pi)$ فرو رفتگی به طرف بالا دارد. شکل زیر



یک نمودار دیگر از $-۲\pi \le x \le ۲\pi$ برای $f(x) = \sin x$



توجه داشته باشید که نمودار تابع سینوس در اشکال بالا ، هر جا که تابع محور x ها را قطع می کند ، یک نقطه عطف دارد. چون تابع سینوس اگر دامنه اش محدود نشده باشد ، تناوبی است با تناوب ۲π پس نمودارش هر جا که محور x ها را قطع کند ، یک نقطه خمیدگی دارد. این نشان می دهد که نمودار یک تابع می تواند بی نهایت نقطه عطف داشته باشد.

مثال ۵ – فرض کنید $g(x) = x + \sin x$ باشد. نقاط عطف نمودار g را پیدا کنید ، در مورد خمیدگی آن بحث کنید ، و سپس نمودار را رسم کنید.

پاسخ

$$g'(x) = ۱ + \cos x \qquad g''(x) = -\sin x$$

اگر $f(x) = \sin x$ باشد ، پس $g''(x) = f''(x)$ است. پس g'' عیناًمانندً f'' تغییر علامت می دهد. پس بحثی که بعد از مثال ۴ در مورد تابع سینوس کردیم ، به ما می گوید که $(n\pi, g(n\pi)) = (n\pi, n\pi)$ یک نقطه عطف نمودار g است. n هر عدد صحیحی می تواند باشد. همچنین نتیجه می گیریم که g فرو رفتگی به طرف پایین دارد در هر بازه ای به شکل زیر

$$(۲n\,\pi, (۲n + ۱)\pi)$$

و فرو رفتگی به طرف بالا دارد در هر بازه ای به شکل زیر.

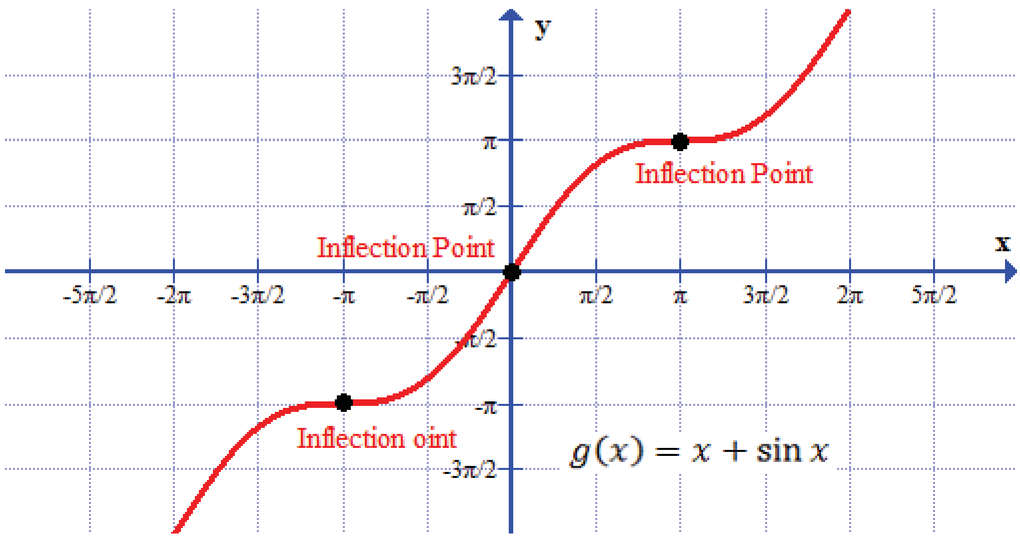
$$((۲n + ۱)\pi, (۲n + ۲)\pi)$$

آیا g مقادیر اکستریم موضعی دارد؟ توجه کنید که $g'(x) = 0$ است ، فقط اگر

$$\cos x = -۱$$

باشد. یعنی $x = (۲n + ۱)\pi$ برای هر عدد صحیح n

علاوه بر این $g'(x) > 0$ است ، مگر این که $x = (۲n + ۱)\pi$ باشد. پس بر اساس قضیه ۳.۳.۲ بخش ۳.۳ نتیجه می گیریم که g اکیدا صعودی است در هر بازه بسته و کران دار و لذا در بازه $(-\infty, \infty)$ اکیدا صعودی است. همچنین g هیچ مقدار اکستریم موضعی ندارد. شکل زیر.



توجه – چون $f''(c) = 0$ است ، لزوما به این معنی نیست که نمودار f در $(c, f(c))$ یک نقطه عطف دارد. مثلا $f(x) = x^۴$ پس $f''(x) = ۱۲x^۲ \geq 0$ است برای تمام x ها. پس f'' اصلا تغییر علامت نمی دهد. مخصوصا در صفر هم تغییر علامت نمی دهد. پس $(0,0)$ یک نقطه عطف نیست , با وجود این که $f''(0) = 0$ است. نمودار درآخر پاسخ تمرینات

تمرینات ۳.۶

در تمرینات ۸ — ۱ بازه هایی که در آنها نمودار تابع تعقر به بالا و بازه هایی که نمودار تویا تعقر به پایین دارد ، پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم ، کنید.

۱) $f(x) = -\frac{۳}{۲}x^{۲} + x$

۲) $f(x) = x^{۲} + ۸$

۳) $g(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۴$

۴) $g(x) = x^{۴} - ۴x$

۵) $f(x) = x + \frac{۱}{x}$

۶) $f(x) = x\sqrt{x - ۱}$

۷) $f(x) = \sin ۲x$

۸) $f(x) = \sec x$

در تمرینات ۱۴ — ۹ تمام نقاط عطف ، اگر وجود داشته باشد ، نمودار تابع را پیدا کنید و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۹) $f(x) = (x + ۲)^{۳}$

۱۰) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x - ۲$

۱۱) $g(x) = ۳x^{۴} + ۴x^{۳}$

۱۲) $g(x) = x^{۹} - ۳x^{۳}$

۱۳) $g(x) = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}$

۱۴) $f(t) = \tan t$

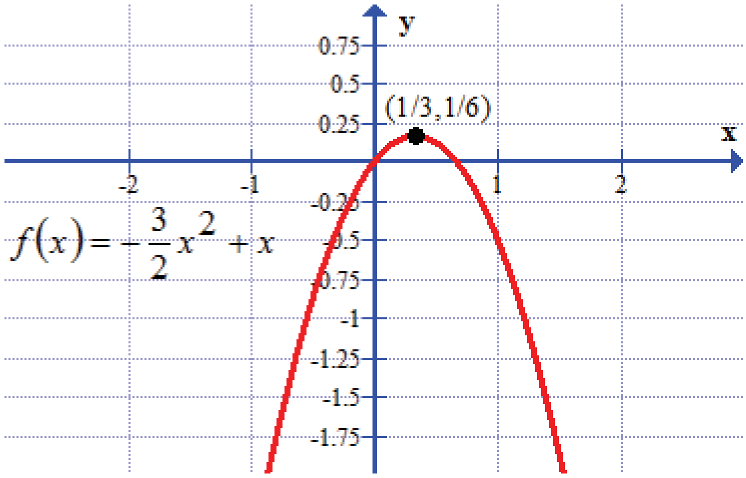
پاسخ تمرینات ۳.۶

در تمرینات ۱ – ۸ بازه هایی که در آنها نمودار تابع تعقر به بالا و بازه هایی که نمودار تویا تعقر به پایین دارد ، پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم ، کنید.

۱) $f(x) = -\frac{۳}{۲}x^{۲} + x$

$$f'(x) = -۳x + ۱ \;;\; f''(x) = -۳$$

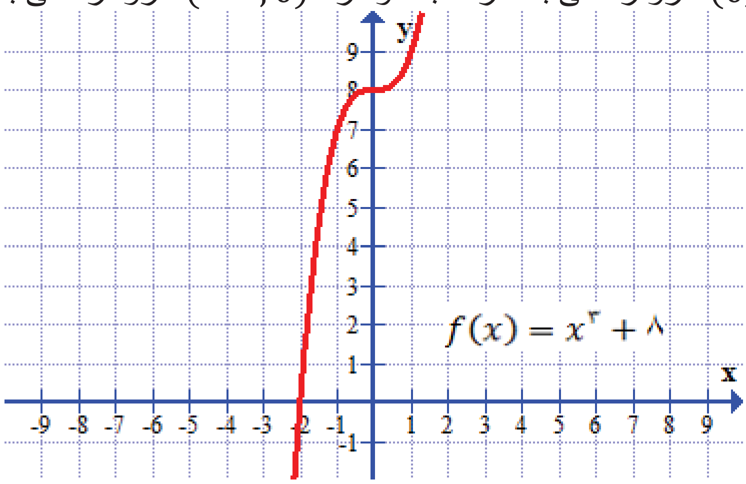
پس نمودار فرورفتگی به طرف پایین دارد در $(-\infty, \infty)$ و همچنین $f\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱}{۶}$ مقدار ماکسیمم f است.



۲) $f(x) = x^{۳} + ۸$

$$f'(x) = ۳x^{۲} \;;\; f''(x) = ۶x$$

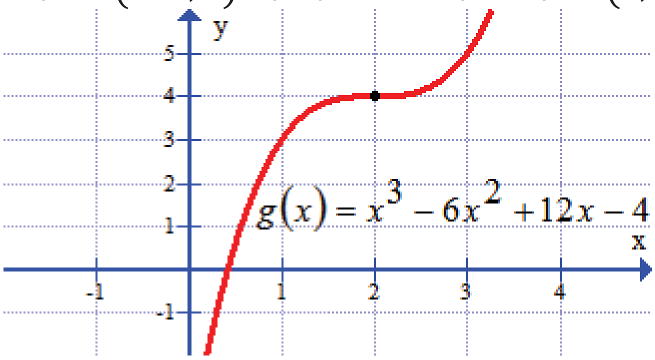
پس نمودار در $(0, \infty)$ فرو رفتگی به طرف بالا و در $(-\infty, 0)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد.



۳) $g(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۴$

$$g'(x) = ۳x^{۲} - ۱۲x + ۱۲ = ۳(x-۲)^{۲}$$
$$g''(x) = ۶x - ۱۲ = ۶(x-۲)$$

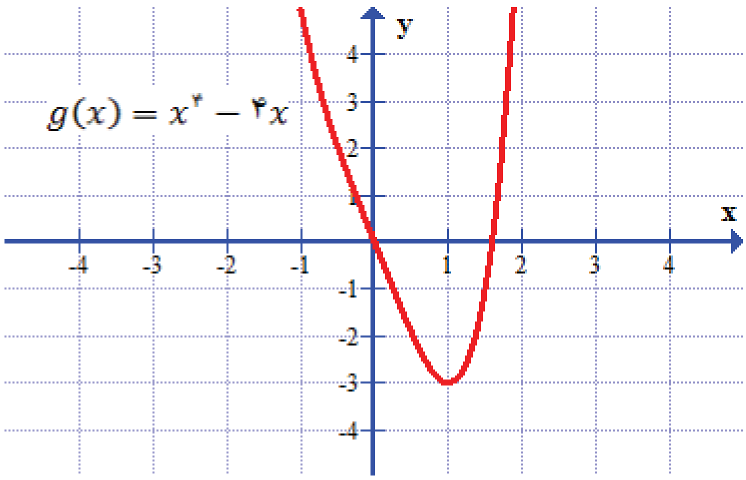
پس نمودار در بازه $(۲,\infty)$ تعقر به طرف بالا و در بازه $(-\infty,۲)$ تعقر به طرف پایین دارد.



۴) $g(x) = x^{۴} - ۴x$

$$g'(x) = ۴x^{۳} - ۴ = ۴(x-۱)(x^{۲} + x + ۱)$$
$$g''(x) = ۱۲x^{۲}$$

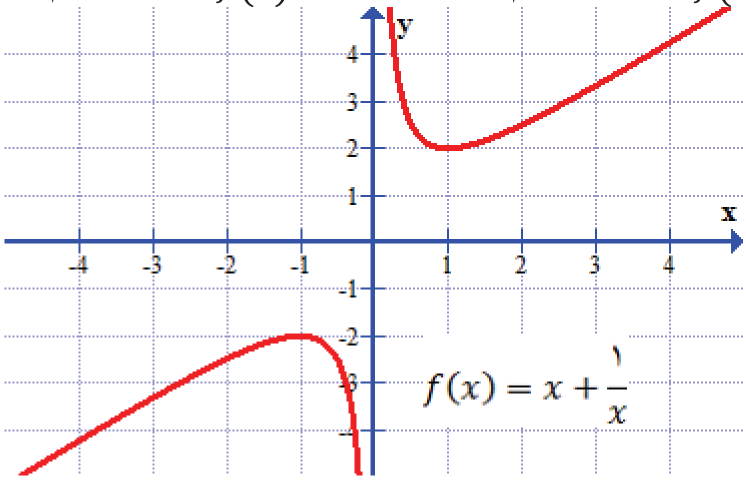
پس نمودار در $(-\infty,\infty)$ فرو رفتگی به طرف بالا دارد. همچنین $g(۱) = ۳$ مقدار مینیمم g است.



۵) $f(x) = x + \frac{۱}{x}$

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \quad ; \quad f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$$

پس نمودار در $(0,\infty)$ فرو رفتگی به طرف بالا و در $(-\infty,0)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد.
همچنین $f(-۱) = -۲$ مقدار ماکسیمم موضعی و $f(۱) = ۲$ مقدار مینیمم موضعی است.



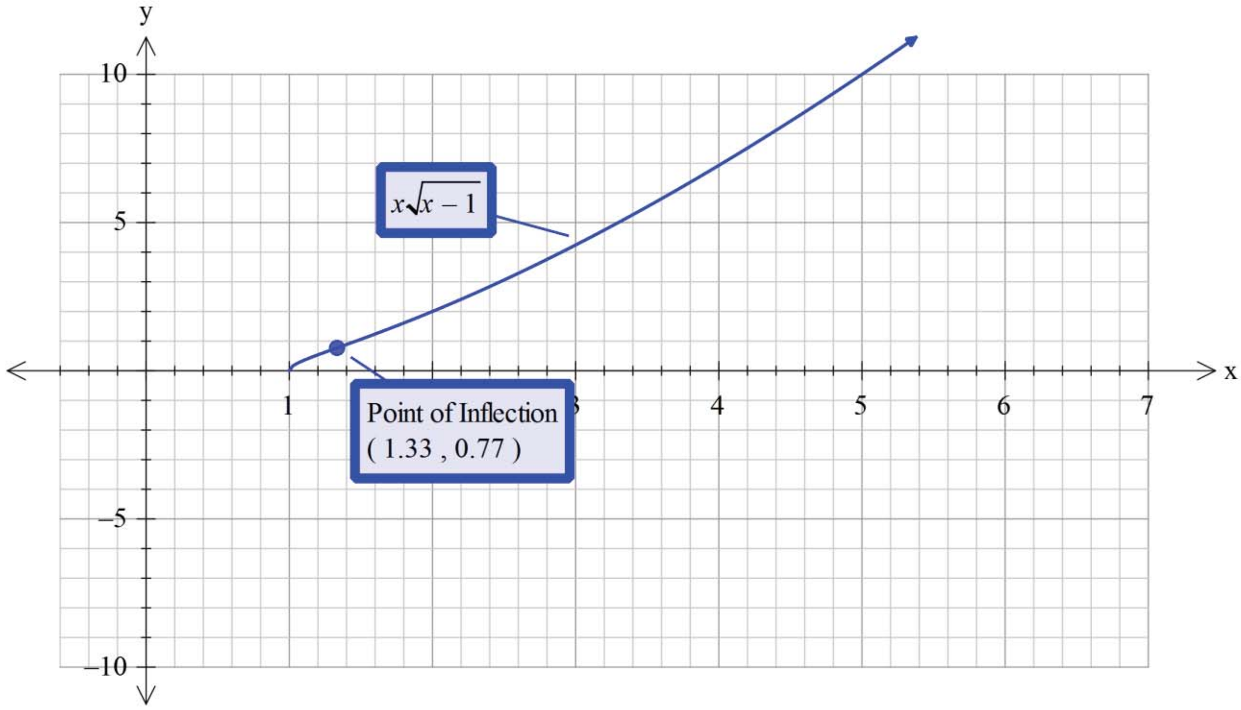
۶) $f(x) = x\sqrt{x-۱}$

توجه داشته باشید که دامنه f شامل تمام x هایی است که $x \geq ۱$ باشد.

$$f'(x) = \sqrt{x-۱} + \frac{x}{۲\sqrt{x-۱}} = \frac{۳x-۲}{۲\sqrt{x-۱}}$$

$$f''(x) = \frac{۶\sqrt{x-۱} - \frac{۳x-۲}{\sqrt{x-۱}}}{۴(x-۱)} = \frac{۳x-۴}{۴(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

پس نمودار در $\left(\frac{۴}{۳},\infty\right)$ فرو رفتگی به طرف بالا و در $\left(۱,\frac{۴}{۳}\right)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد.

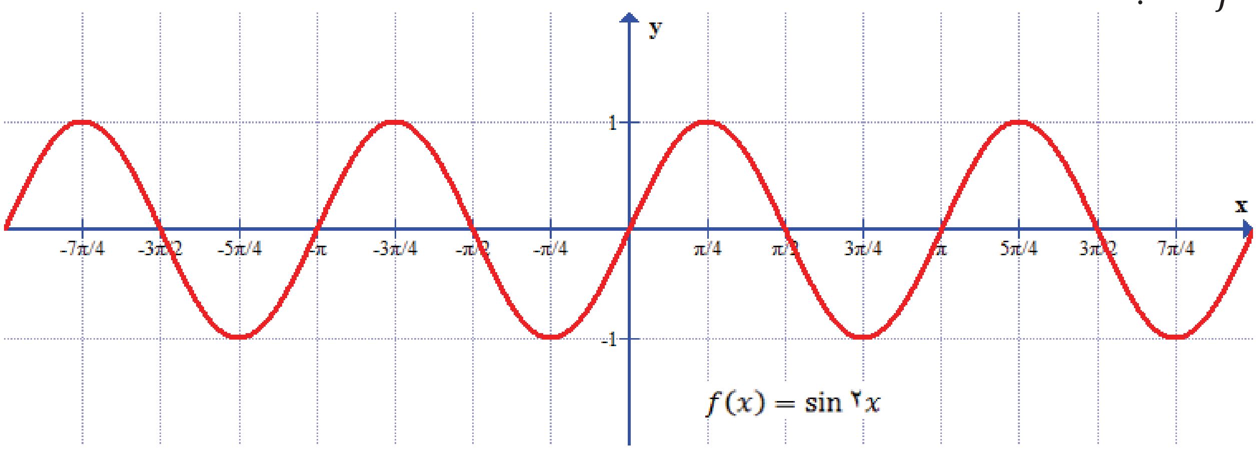


۷) $f(x) = \sin ۲x$

با توجه به مثال شماره ۴ و توضیحات بعد از آن داریم.

$$f'(x) = ۲\cos ۲x$$
$$f''(x) = -۴\sin ۲x = -۴f(x)$$

پس نمودار در $\left(n\pi + \frac{\pi}{۲}, (n+۱)\pi\right)$ برای هر عدد صحیح n, فرو رفتگی به طرف بالا و در $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$ برای هر عدد صحیح n, فرو رفتگی به طرف پایین دارد. علاوه بر این برای هر عدد صحیح n, داریم $f\left(n\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = ۱$ مقدار ماکسیمم و $f\left(n\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = -۱$ مقدار مینیمم f است.



۸) $f(x) = \sec x$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$

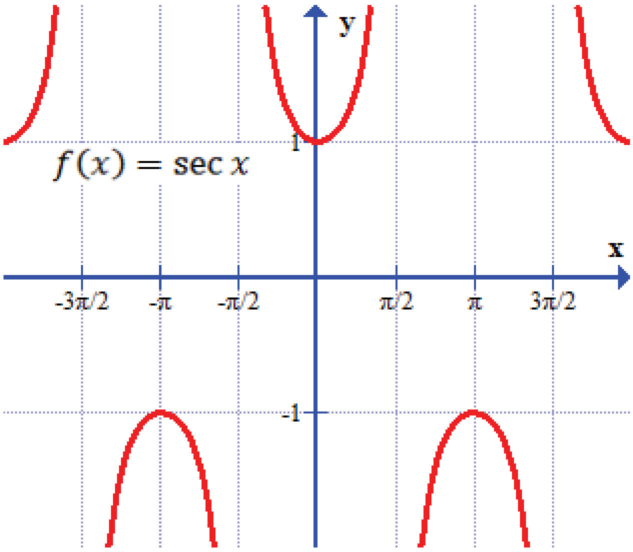
$$f''(x) = \sec x\, tan^{۲}x + sec^{۳}x = \sec\left(\left(sec^{۲}x - ۱\right) + sec^{۲}x\right)$$

$$= \sec x\left(۲sec^{۲}x - ۱\right)$$

چون $|\sec x| \geq ۱$ است برای تمام x ها در دامنه ، پس $۲sec^{۲}x - ۱ > 0$ است برای تمام x ها در دامنه ، لذا f'' و f یک علامت دارند. پس نمودار f در

$$\left(-\frac{\pi}{۲} + ۲n\,\pi, \frac{\pi}{۲} + ۲n\,\pi\right)$$

تعقر به طرف بالا و در $\left(\frac{\pi}{۲} + ۲n\pi, ۳\frac{\pi}{۲} + ۲n\pi\right)$ تعقر به طرف پایین دارد ، برای هر عدد صحیح n همچنین $f\left(۲n\pi\right) = ۱$ یک مقدار ماکسیمم و $f\left(\left(۲n + ۱\right)\pi\right) = -۱$ یک مقدار مینیمم f است.

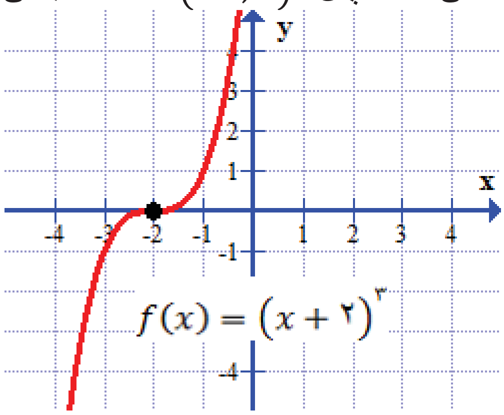


در تمرینات ۱۴ – ۹ تمام نقاط عطف ، اگر وجود داشته باشد ، نمودار تابع را پیدا کنید و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۹) $f(x) = (x + ۲)^{۳}$

$$f'(x) = ۳(x + ۲)^{۲}\ ;\ f''(x) = ۶(x + ۲)$$

پس f'' در -۲ تغییر علامت می دهد ، پس $(-۲, 0)$ نقطه خمیدگی یا نقطه عطف f است

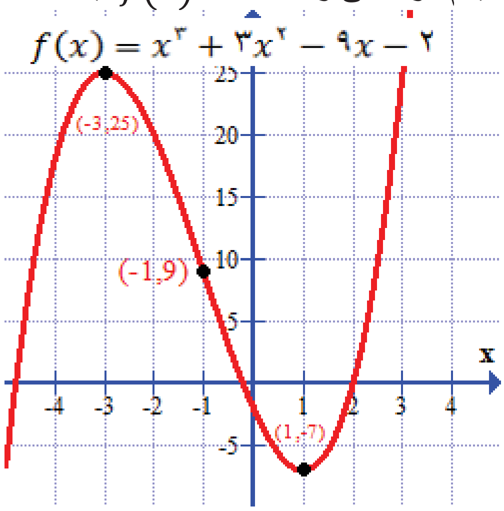


۱۰) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x - ۲$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x - ۹ = ۳(x + ۳)(x - ۱)$$

$$f''(x) = ۶x + ۶ = ۶(x + ۱)$$

پس f'' در -۱ تغییر علامت می دهد ، پس $(-۱, ۹)$ یک نقطه خمیدگی است. همچنین $f(-۳) = ۲۵$ یک نقطه ماکسیمم موضعی و $f(۱) = -۷$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

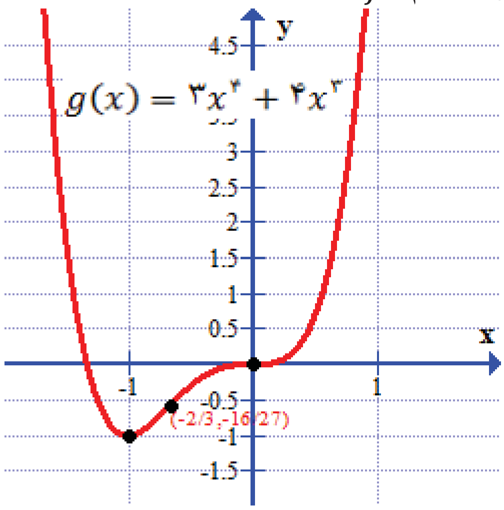


۱۱) $g(x) = ۳x^۴ + ۴x^۳$

$$g'(x) = ۱۲x^۳ + ۱۲x^۲ = ۱۲x^۲(x+۱)$$
$$g''(x) = ۳۶x^۲ + ۲۴x = ۱۲x(۳x+۲)$$

پس f'' در صفر و $-\frac{۲}{۳}$ تغییر علامت می دهد. پس $(0,0)$ و $\left(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱۶}{۲۷}\right)$ نقاط عطف هستند.

همچنین $g(-۱) = -۱$ مقدار مینیمم f است.



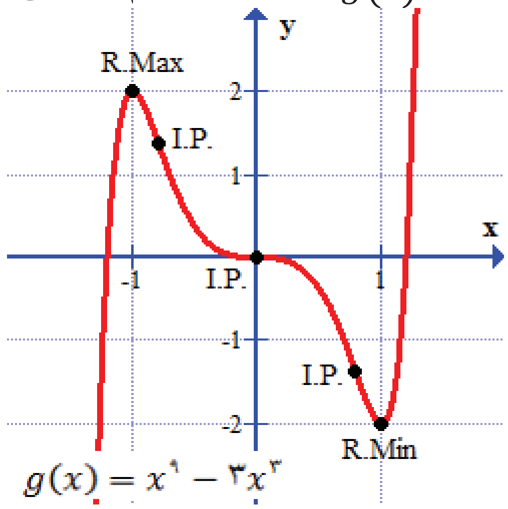
۱۲) $g(x) = x^۹ - ۳x^۳$

$$f'(x) = ۹x^۸ - ۹x^۲ = ۹x^۲\left(x^۶ - ۱\right)$$
$$f''(x) = ۷۲x^۷ - ۱۸x = ۱۸x\left(۴x^۶ - ۱\right)$$

پس g'' در $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ ، $-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ ، 0 تغییر علامت می دهد. پس

$$\left(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}},\frac{۱۱}{۸}\right) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad \left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}},-\frac{۱۱}{۸}\right)$$

نقاط عطف هستند. همچنین $g(۱)=-۲$ یک مقدار مینیمم موضعی و $g(-۱)=۲$ یک مقدار



ماکسیمم موضعی g است.

در نمودار بالا **I.P. مخفف است به معنی نقطه عطف**

R. Max به معنی ماکسیمم موضعی است.

R. Min به معنی مینیمم موضعی است

۱۳) $g(x)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}$

$$g'(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}=x^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۴}{۹}-x\right)$$

$$g''(x)=-\frac{۴}{۲۷}x^{-\frac{۴}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}\left(\frac{۲}{۹}+x\right),x\neq 0$$

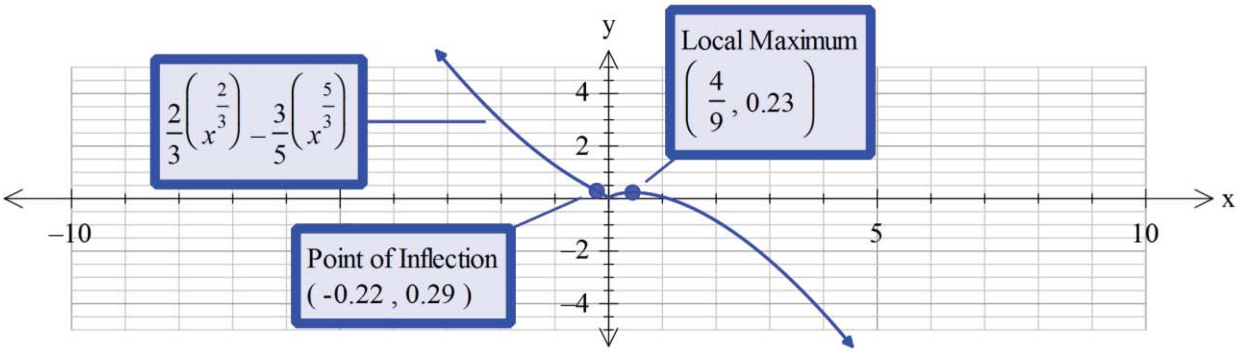
چون g'' در $-\frac{۲}{۹}$ از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد ، پس نقطه

$$\left(-\frac{۲}{۹},g\left(-\frac{۲}{۹}\right)\right)=\left(-\frac{۲}{۹},\frac{۴}{۵}\left(\frac{۲}{۹}\right)^{\frac{۲}{۳}}\right)$$

یک نقطه عطف است. همچنین

$$g\left(\frac{۴}{۹}\right)=\frac{۲}{۵}\left(\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

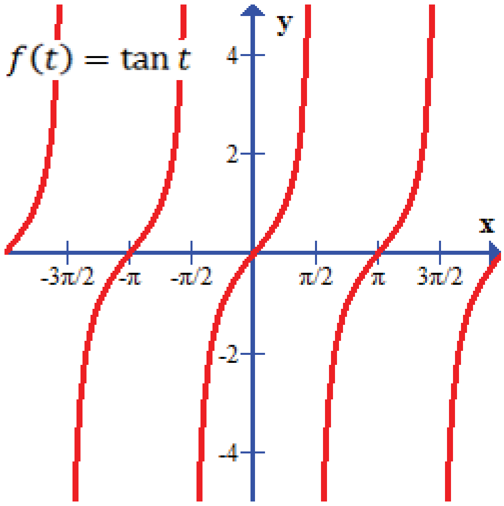
یک نقطه ماکسیمم موضعی f است.



۱۴) $f(t) = \tan t$

$$f'(t) = sec^{۲}t \quad ; \quad f''(t) = ۲sec^{۲}t\tan t$$

پس f'' در $n \in \mathbb{Z}$ ، $n\pi$ تغییر علامت می دهد. پس $(n\pi, 0)$ یک نقطه عطف است برای هر عدد صحیح n



۳.۷ - حد در بی‌نهایت Limit at Infinity

تا کنون حد هایی که به آنها برخورد کرده ایم ، حد های یک تابع f در یک عدد مانند a بوده اند. یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

حالا حد $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم ، هنگامی که x مثبت و بطور دلخواه بزرگ می شود, یعنی هنگامی که x به ∞ نزدیک می شود. همچنین هنگامی که x منفی است و قدر مطلق آن بطور دلخواه بزرگ می شود , یعنی هنگامی که x به $-\infty$ نزدیک می شود. دانستن چنین حد هایی در رسم آن قسمت از نمودار f که دور از محور y است ، به ما کمک می کند.
می توان در مو رد حد $f(x)$ هنگامی که x به ∞ نزدیک می شود ، به عنوان حد سمت چپ تصور کرد. زیرا x از سمت چپ به ∞ نزدیک می شود. شکل A

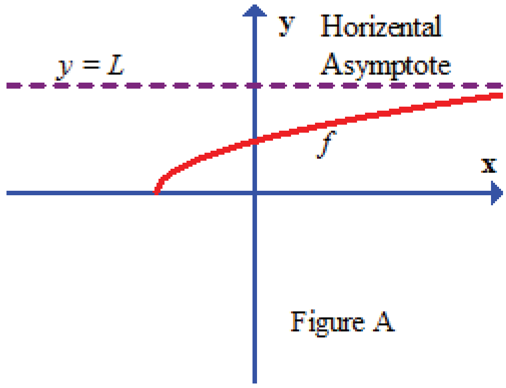


Figure A

اما باید راهی پیدا کنیم که بگوییم x چقدر به ∞ نزدیک است. برای این کار ، توجه داشته باشد که هر قدر x بزرگ تر باشد ، به ∞ نزدیک تر است. همین طور هنگامی که x به $-\infty$ نزدیک می شود. این موضوعات ما را به تعریف زیر می رساند.

تعریف

الف - فرض می کنیم f در یک بازه (a,∞) تعریف شده باشد. یک عدد مانند L **حد** $f(x)$ **است هنگامی که x به ∞ نزدیک می شود** اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مانند M وجود داشته باشد ، بطوری که اگر $x > M$ باشد ، پس داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$ در این صورت می نویسیم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

می گوییم **حد $f(x)$ هنگامی که x به ∞ نزدیک می شود ، وجود دارد** ، و **یا f در ∞ یک حد دارد.**

ب - فرض می کنیم f در یک بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. یک عدد مانند L **حد $f(x)$ است هنگامی که x به ∞ نزدیک می شود** اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مانند M وجود داشته باشد ، بطوری که اگر $x < M$ باشد ، پس داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$ در این صورت می نویسیم

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

می گوییم **حد $f(x)$ هنگامی که x به $-\infty$ نزدیک می شود ، وجود دارد** ، و **یا f در $-\infty$ یک حد دارد.**

ج – اگر یا $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ و یا $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ باشد ، پس خط افقی $y = L$ را **مجانب افقی نمودار f می نامیم.** شکل A بالا

عدد M در تعریف بالا معادل عدد δ درتعاریف قبلی حد ها که قبلا داشتیم ، می باشد.

مثال ۱ – نشان دهید که $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=0$ است.

پاسخ

فرض می کنیم $\varepsilon>0$ است. برای اینکه نشان دهیم $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=0$ است ، باید یک عدد M پیدا کنیم بطوری که اگر $x>M$ باشد ، پس

$$\left|\frac{۱}{x}-0\right|=\left|\frac{۱}{x}\right|<\varepsilon$$

است. فرض می کنیم $x>\frac{۱}{\square}$ باشد ، پس داریم $\left|\frac{۱}{x}\right|<\varepsilon$ است. لذا فرض می کنیم $M=\frac{۱}{\varepsilon}$ باشد ، اگر چنین باشد ، نتیجه می گیریم $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=0$

برای نشان دادن این که $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=0$ است ، فرض می کنیم $M=-\frac{۱}{\varepsilon}$ است. پس $M<0$ است و لذا اگر $x<M$ باشد ، پس

$$\left|\frac{۱}{x}-0\right|=-\frac{۱}{x}<-\frac{۱}{M}=\varepsilon$$

این ثابت می کند که $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=0$. شکل B

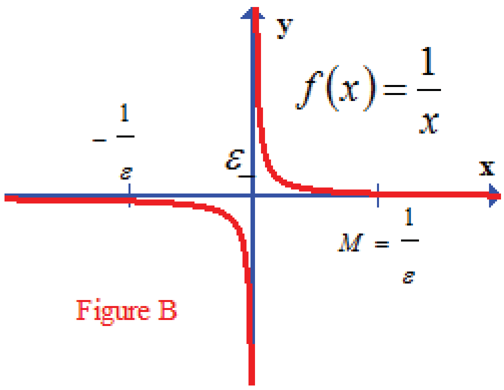


Figure B

قضایای اساسی حد هنگامی که a را به ∞ و $-\infty$ تغییر دهیم صادق هستند. پس حد هنگامی که x به ∞ و یا به $-\infty$ نزدیک شود ، اگر وجود داشته باشد ، منحصر به فرد است. همچنین داریم.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)\lim_{x\to\infty}g(x)$$

حد های بالا برای $-\infty$ هم صادق هستند.

از فرمول حد های حاصل ضرب نتیجه می گیریم که برای هر عدد صحیح مثبت n داریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^n}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^n}=0 \qquad (۱)$$

اثبات فرمول بالا آسان است. امید است بتوانید آنرا اثبات کنید.

مثال ۲ – حد های زیر را پیدا کنید.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+۲x-۵}{۲x^۲-۶x-۱} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{۳x+۱}{۴-x^۳}$$

پاسخ

هم صورت و هم مخرج را بر $x^۲$ که بالا ترین توان x در این کسر است ، تقسیم می کنیم.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+۲x-۵}{۲x^۲-۶x-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^۲}{x^۲}+\frac{۲x}{x^۲}-\frac{۵}{x^۲}}{\frac{۲x^۲}{x^۲}-\frac{۶x}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱+\frac{۲}{x}-\frac{۵}{x^۲}}{۲-\frac{۶}{x}-\frac{۱}{x^۲}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{۱+0-0}{۲-0-0}=\frac{۱}{۲}$$

هم صورت و هم مخرج را بر $x^۳$ که بالا ترین توان x در این کسر است ، تقسیم می کنیم.

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{۳x+۱}{۴-x^۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۳x}{x^۳}+\frac{۱}{x^۳}}{\frac{۴}{x^۳}-\frac{x^۳}{x^۳}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۳}{x^۳}+\frac{۱}{x^۳}}{\frac{۴}{x^۳}-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{0+0}{0-۱}=0$$

مثال ۳– فرض کنید $a>0$ باشد. نصح دهید که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^۲-a^۲}-x\right)=0$$

است.

پاسخ

ابتدا عبارت داخل پرانتز را باز نویسی می کنیم.

$$\sqrt{x^۲-a^۲}-x=\left(\sqrt{x^۲-a^۲}-x\right)\frac{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=\frac{x^۲-a^۲-x^۲}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}$$

$$=\frac{-a^۲}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=\frac{\frac{-a^۲}{x}}{\sqrt{۱-\frac{a^۲}{x^۲}}+۱}$$

چون

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-a^۲}{x}}{\sqrt{۱-\frac{a^۲}{x^۲}}+۱} = \frac{0}{\sqrt{۱-0}+۱} = 0$$

است , پس

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^۲-a^۲}-x\right)=0$$

مثال ۴ – فرض کنید

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{۳x-۱}$$

باشد. نمودار f را رسم کنید.
پاسخ

$$f'(x)=\frac{۲(۳x-۱)-۳(۲x+۱)}{(۳x-۱)^۲}=\frac{-۵}{(۳x-۱)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{۳۰}{(۳x-۱)^۳}$$

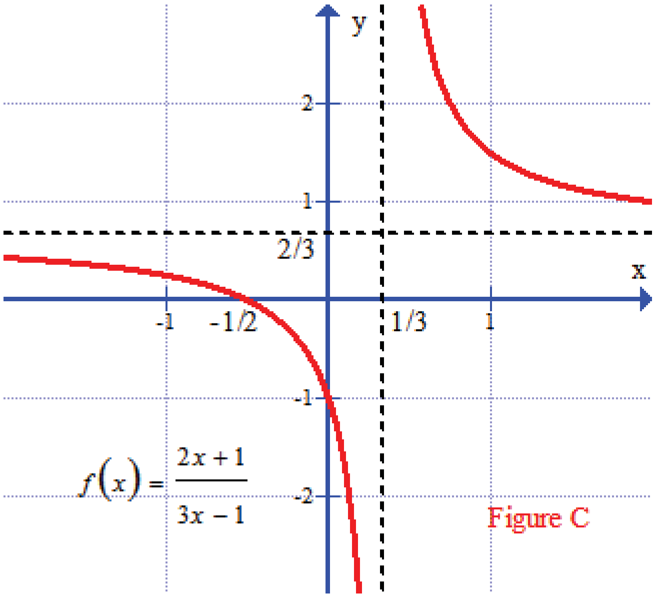
در نتیجه f اکیدا نزولی است در بازه های $\left(-\infty,\frac{۱}{۳}\right)$ و $\left(\frac{۱}{۳},\infty\right)$ و نمودار آن در بازه $\left(-\infty,\frac{۱}{۳}\right)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد و در بازه $\left(\frac{۱}{۳},\infty\right)$ فرو رفتگی به طرف بالا دارد. برای پیدا کردن مجانب ها ، ملاحظه می شود که

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^+}\frac{۲x+۱}{۳x-۱}=\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-}\frac{۲x+۱}{۳x-۱}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{۲}{۳}$$

لذا خط $x=\frac{۱}{۳}$ یک مجانب عمودی است و $y=\frac{۲}{۳}$ یک مجانب افقی است. حالا می توانیم نمودار را رسم کنیم. شکل C



از مثال ۴ چنین نتیجه می شود که

الف – اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ پس $x=a$ یک مجانب عمودی است.

ب - اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ باشد ، پس خط $y=b$ یک مجانب افقی نمودار f است.

حد های بی‌نهایت در بی‌نهایت Infinite Limits at Infinity

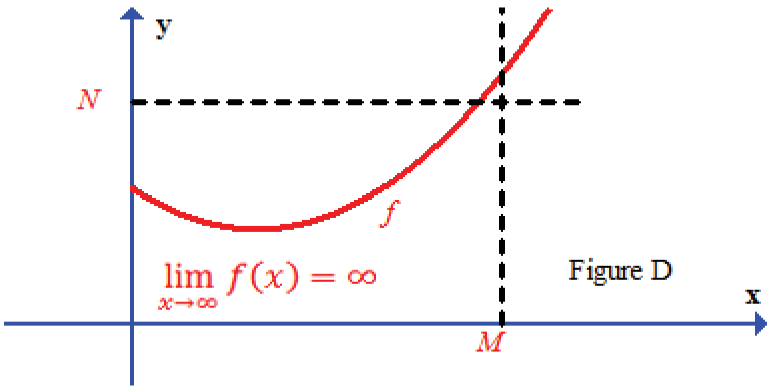
تعریف

فرض می کنیم f در بازه (a,∞) تعریف شده باشد. اگر برای هر عدد حقیقی N یک عدد مانند M وجود داشته باشد بطوری که اگر $x>M$ باش ، پس $f(x)>N$ باشد.

در این صورت می‌گوییم **حد** $f(x)$ **هنگامی که** x **به** ∞ **نزدیک می شود** ∞ **است** و می نویسیم

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

و یا می گوییم f **یک حد بینهایت در** ∞ **دارد.** شکل D



مثال ۵ – نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$ است.

پاسخ

واضح است که اگر $x > 1$ باشد ، پس $x^7 > x$ است. برای هر عددی مانند N عدد M را طوری انتخاب می کنیم که $M > 1$ و $M > N$ باشد. پس اگر $x > M$ باشد ، پس

$$x^7 > x > M > N$$

است. پس طبق تعریف حد های بی نهتت در بی نهایت داریم.

$$\lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$$

به همین طریق می توانیم نشان دهیم برای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$

همچنین نتیجه می شود ، اگر p یک چند جمله ای با حد اقل درجه یک ، داریم.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

این که کدام حد بی نهایت ممکن است اتفاق افتد ، به ضریب جمله بالا ترین توان در p بستگی دارد. مثلا

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2\right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(x - x^2\right) = -\infty$$

اما

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - 2x + 1\right) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - 2x + 1\right) = -\infty$$

تمرینات ۳.۷

در تمرینات ۸ – ۱ **حد داده شده را پیدا کنید.**

۱) $\lim_{x\to\infty} \frac{۲}{x-۳}$

۲) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{۳x+۲}$

۳) $\lim_{x\to\infty} \frac{۲x^{۲}+x-۱}{x^{۲}-x+۴}$

۴) $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^{\frac{۱}{۲}}+۲t^{-\frac{۱}{۲}}}$

۵) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۶) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{۲}}{۴x^{۳}-۹}$

۷) $\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{۴x^{۲}-۱}\right)$

۸) $\lim_{x\to\infty} \tan\frac{۱}{x}$

در تمرینات ۱۴ – ۹ **مجانب افقی نمودار تابع را پیدا کنید و سپس نمودار تابع را رسم کنید.**

۹) $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$

۱۰) $f(x)=\frac{۳x}{۲x-۴}$

۱۱) $f(x) = \dfrac{۲x(x+۳)}{۹-x^۲}$

۱۲) $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱}$

۱۳) $f(x) = \sqrt{\dfrac{۳-x}{۴-x}}$

۱۴) $f(x) = \dfrac{۱}{x^۲-۴}$

۱۵ ـ فرض کنید

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^۲+۱}$$

باشد. نشان دهید که نمودار f دو مجانب افقی دارد. آنها را مشخص کنید.

پاسخ تمرینات ۳.۷

در تمرینات ۸ – ۱ حد داده شده را پیدا کنید.

۱) $$\lim_{x\to\infty}\frac{۲}{x-۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۲}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{۳}{x}}=\frac{0}{۱-0}=0$$

۲) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{۳x+۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{۳x}{x}+\frac{۲}{x}}=\frac{۱}{۳+0}=\frac{۱}{۳}$$

۳) $$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^{۲}+x-۱}{x^{۲}-x+۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۲x^{۲}}{x^{۲}}+\frac{x}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{x^{۲}}{x^{۲}}-\frac{x}{x^{۲}}+\frac{۴}{x^{۲}}}=\frac{۲+0-0}{۱-0+0}=۲$$

۴) $$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t^{\frac{۱}{۲}}+۲t^{-\frac{۱}{۲}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{t}{t^{\frac{۱}{۲}}}}{\frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{t^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{۲t^{-\frac{۱}{۲}}}{t^{\frac{۱}{۲}}}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{t}{t+۲}*t^{\frac{۱}{۲}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۱}{۱+\frac{۲}{t}}*t^{\frac{۱}{۲}}\right)=\infty$$

۵) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

چون

$$-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\le\frac{\cos x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\le\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\quad \text{برای}\quad x<-۱$$

است و چون

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = 0$$

است. قضیه ساند ویچی برای حد ها در $-\infty$ می گوید

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^۲-۱}} = 0$$

۶) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^۲}{۴x^۳-۹} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{۴-\frac{۹}{x^۳}} = \frac{0}{۴-0} = 0$$

۷) $$\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{۴x^۲-۱}\right)$$

برای $x > \frac{۱}{۲}$ داریم

$$x-\sqrt{۴x^۲-۱} = \left(x-\sqrt{۴x^۲-۱}\right)\frac{x+\sqrt{۴x^۲-۱}}{x+\sqrt{۴x^۲-۱}}$$

$$= \frac{۱-۳x^۲}{x+\sqrt{۴x^۲-۱}} = \frac{\frac{۱}{x}-۳x}{۱+\sqrt{۴-\frac{۱}{x^۲}}}$$

پس

$$\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{۴x^۲-۱}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۱}{x}-۳x}{۱+\sqrt{۴-\frac{۱}{x^۲}}} = -\infty$$

همچنین این تمرین را می توان مطابق زیر حل کرد.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{۴x^۲-۱}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x\sqrt{۴-\frac{۱}{x^۲}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(۱-\sqrt{۴-\frac{۱}{x^۲}}\right)\right]=-\infty$$

۸) $\lim_{x\to\infty}\tan\frac{۱}{x}$

چون $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=0$ است و $\lim_{y\to0^+}\tan y=0$ است ، پس قضیه جانشینی برای حد ها در ∞ و $y=\frac{۱}{x}$ می گوید که

$$\lim_{x\to\infty}\tan\frac{۱}{x}=\lim_{y\to0^+}\tan y=0$$

در تمرینات ۱۴ – ۹ مجانب افقی نمودار تابع را پیدا کنید و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۹) $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x-۲}=0$$

پس $y=0$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x)=\frac{-۱}{(x-۲)^۲}<0 \quad , \quad \text{برای} \quad x\neq ۲$$

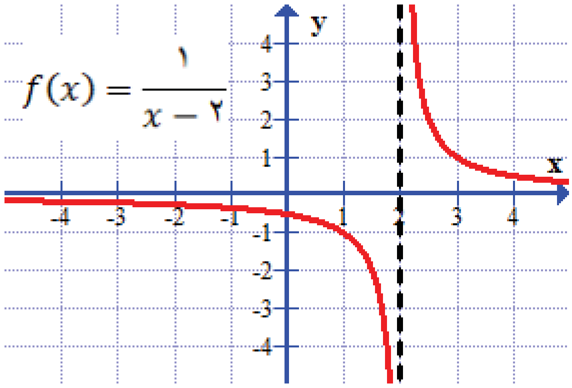
پس f در بازه های $(-\infty,۲)$ و $(۲,\infty)$ نزولی است.

$$f''(x)=\frac{۲}{(x-۲)^۳}$$

پس نمودار f در بازه $(۲,\infty)$ فرو رفتگی به طرف بالا و در بازه $(-\infty,۲)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد.

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{x-۲}=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$$

پس $x=۲$ مجانب عمودی است. **شکل زیر**



۱۰) $f(x) = \dfrac{۳x}{۲x - ۴}$

چون

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۳x}{۲x-۴} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x}{۲x-۴} = \frac{۳}{۲}$$

پس $y = \frac{۳}{۲}$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x) = \frac{۳(۲x-۴) - ۳x(۲)}{(۲x-۴)^۲} = \frac{-۱۲}{(۲x-۴)^۲} = \frac{-۳}{(x-۲)^۲} \quad \text{برای} \quad x \neq ۲$$

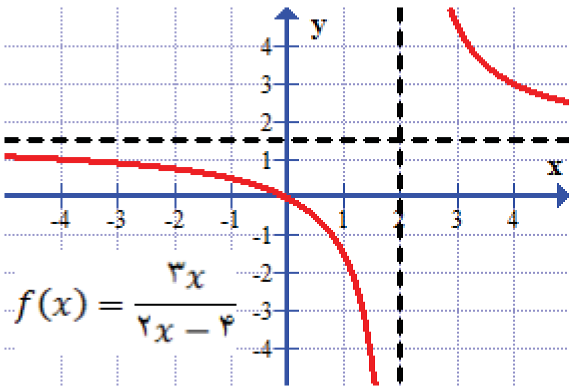
پس f در بازه های $(-\infty, ۲)$ و $(۲, \infty)$ نزولی است.

$$f''(x) = \frac{۶}{(x-۲)^۳}$$

پس نمودار f در بازه $(۲, \infty)$ تعقر به بالا و در بازه $(-\infty, ۲)$ تعقر به طرف پایین دارد.

$$\lim_{x\to۲^+} \frac{۳x}{۲x-۴} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to۲^-} \frac{۳x}{۲x-۴} = -\infty$$

پس خط $x = ۲$ مجانب عمودی است.



۱۱) $f(x) = \frac{۲x(x+۳)}{۹-x^۲} = \frac{۲x(x+۳)}{(۳-x)(۳+x)} = \frac{۲x}{۳-x}$ برای $x \neq -۳$

پس

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -۲$$

و لذا $y = -۲$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x) = \frac{۲(۳-x) - ۲x(-۱)}{(۳-x)^۲} = \frac{۶}{(۳-x)^۲} > 0 \quad \text{برای} \quad x \neq \pm ۳$$

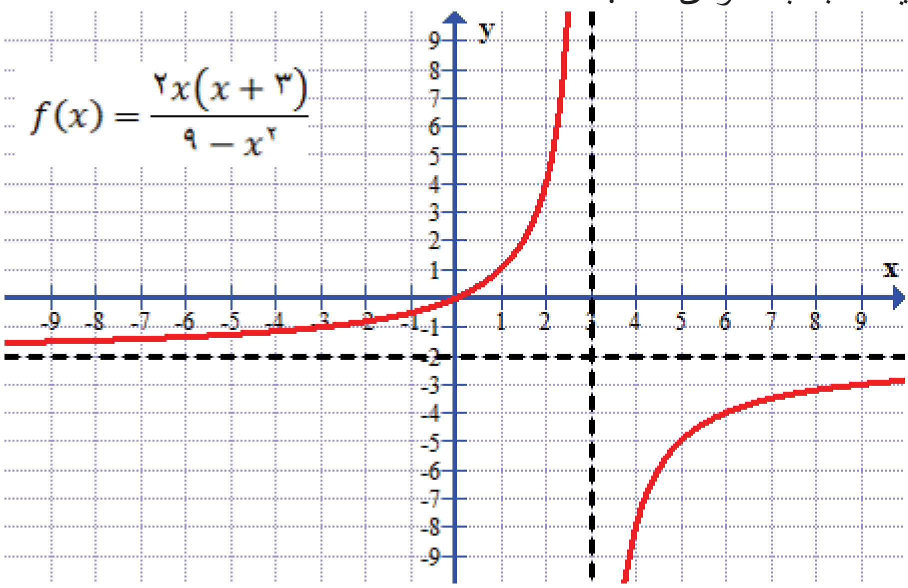
پس f در بازه های $(-\infty, -۳)$ و $(-۳, ۳)$ و $(۳, \infty)$ صعودی است.

$$f''(x) = \frac{۱۲}{(۳-x)^۳} \quad \text{برای} \quad x \neq \pm ۳$$

پس نمودار f در بازه های $(-۳, ۳)$ و $(-\infty, -۳)$ تعقر به بالا و در بازه $(۳, \infty)$ تعقر به پایین دارد.

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۲x}{۳-x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲x}{۳-x} = \infty$$

پس $x = ۳$ یک مجانب عمودی است.



۱۲) $f(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+۲}{x-۱} = ۱$$

پس $y = ۱$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x)=\frac{۱(x-۱)-(x+۲)(۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}<0 \quad \text{برای} \quad x\neq ۱$$

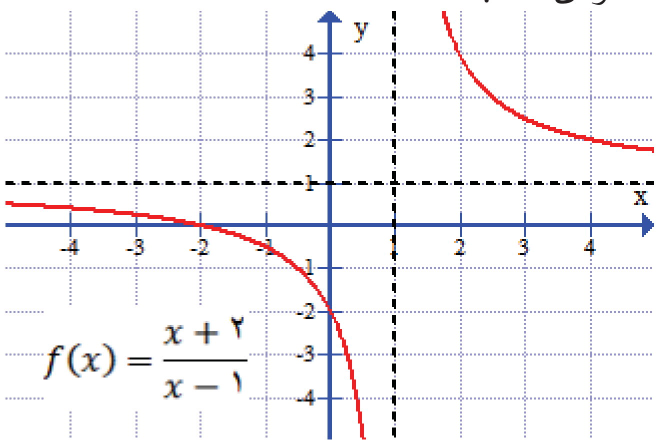
پس f در بازه های $(۱,\infty)$ و $(-\infty,۱)$ نزولی است.

$$f''(x)=\frac{۶}{(x-۱)^۳}$$

پس نمودار f در بازه $(۱,\infty)$ فرو رفتگی به طرف بالا و در بازه $(-\infty,۱)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد.

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۲}{x-۱}=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۲}{x-۱}=-\infty$$

پس $x=۱$ یک مجانب عمودی است.



۱۳) $\quad f(x)=\sqrt{\frac{۳-x}{۴-x}}$

دامنه f شامل تمام x هایی است بطوری که $\frac{۳-x}{۴-x}\geq 0$ باشد. یعنی تمام x هایی که برای آنها $۳-x=0$ باشد ، و یا $x-۳$ و $x-۴$ دارای یک علامت باشند. پس دامنه f شامل $(-\infty,۳)$ و $(۴,\infty)$ است.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{۳-x}{۴-x}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{۳-x}{۴-x}}=۱$$

پس $y=۱$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left[\frac{=(۴-x)-(۳-x)(-۱)}{(۴-x)^۲}\right]$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴-x)^۲}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}}$$

پس f در بازه های $(-\infty, ۳]$ و $(۴, \infty)$ نزولی است.

$$f''(x) = \frac{-۱}{(۴-x)^۳}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}} + \frac{۱}{۴(۴-x)^۲}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۳}{۲}}\left[\frac{-(۴-x)-(۳-x)(-۱)}{(۴-x)^۲}\right]$$

$$= \frac{-۱}{(۴-x)^۳}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left[۱ + \frac{۱}{۴(۴-x)}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{-۱}\right]$$

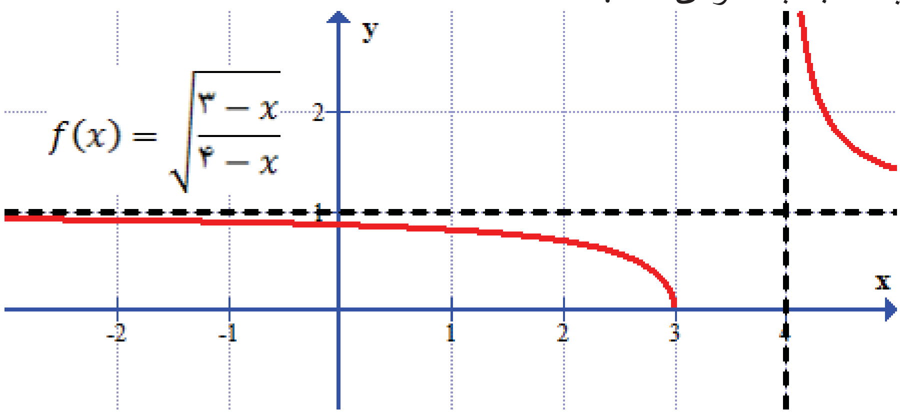
$$= \frac{-۱}{(۴-x)^۳}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left[۱ + \frac{۱}{۴(۳-x)}\right]$$

$$= \frac{۴x-۱۳}{۴(۳-x)(۴-x)^۳}\left(\frac{۳-x}{۴-x}\right)^{\frac{-۱}{۲}}$$

پس نمودار f در بازه $(۴, \infty)$ تعقر به طرف بالا و در بازه $(-\infty, ۳)$ تعقر به طرف پایین دارد.

$$\lim_{x \to ۴} \sqrt{\frac{۳-x}{۴-x}} = \infty$$

پس $x = ۴$ یک مجانب عمودی است.



۱۴) $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۴}$

پاسخ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^۲-۴}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^۲-۴}=0$$

پس $y=0$ یک مجانب افقی است.

$$f'(x)=\frac{-۲x}{\left(x^۲-۴\right)^۲}$$

پس f در بازه های $(-\infty,-۲)$ و $(-۲,0]$ صعودی و در بازه های $[0,۲)$ و $(۲,\infty)$ نزولی است.

$$f''(x)=\frac{-۲\left(x^۲-۴\right)^۲-(-۲x)۲\left(x^۲-۴\right)(۲x)}{\left(x^۲-۴\right)^۴}$$

$$=\frac{۲\left(۳x^۲+۴\right)}{\left(x^۲-۴\right)^۳}$$

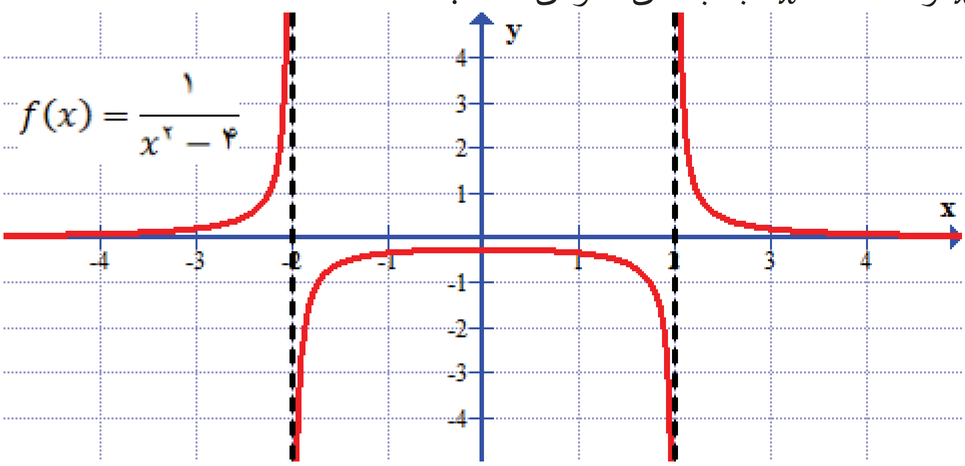
پس نمودار f در بازه های $(-\infty,-۲)$ و $(۲,\infty)$ تعقر به طرف بالا و در بازه $(-۲,۲)$ تعقر به طرف پایین دارد.

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{x^۲-۴}=\lim_{x\to-۲^-}\frac{۱}{x^۲-۴}=\infty$$

و

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{۱}{x^۲-۴}=\lim_{x\to-۲^+}\frac{۱}{x^۲-۴}=-\infty$$

پس $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب های عمودی هستند.



۱۵ ــ فرض کنید

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^۲ + ۱}$$

باشد. نشان دهید که نمودار f دو مجانب افقی دارد. آنها را مشخص کنید.

پاسخ

اگر $x > 0$ باشد ، پس

$$f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} = \frac{۱}{۱ + \left(\frac{۱}{x^۲}\right)}$$

است ، پس $\lim_{x\to\infty} f(x) = ۱$ است ، پس $y = ۱$ یک مجانب افقی است.

اگر $x < 0$ باشد ، پس

$$f(x) = \frac{-x^۲}{x^۲ + ۱}$$

است. پس $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱$ است. پس $y = -۱$ یک مجانب افقی است.

۳.۸- رسم نمودار Graphing

همان طور که در سر تا سر این فصل دیدید ، دانش ما در مورد مشتق ها ، تا حد زیادی به ما در مورد رسم نمودار توابع کمک می کند. در این بخش ، روش هایی را که تا کنون به آنها بر خورد کرده ایم در جدول زیر خلاصه می کنیم.

خاصیت	امتحان
f با محور y در c تلاقی می کند.	$f(0)=c$
f با محور x در c تلاقی می کند.	$f(c)=0$
نمودار f نسبت به محور y قرینه است.	$f(-x)=f(x)$
نمودار f نسبت به مبدا قرینه است.	$f(-x)=-f(x)$
f یک مقدار ماکسیمم موضعی در c دارد .	$f'(c)=0$ و f' از مثبت به منفی تغییر می کند. یا $f'(c)=0$ است و $f''(c)<0$ است.
f یک مقدار مینیمم موضعی در c دارد.	$f'(c)=0$ و f' از منفی به مثبت تغییر می کند. یا $f'(c)=0$ است و $f''(c)>0$ است.
f اکیدا صعودی است در یک بازه باز I	$f'(x)>0$ است برای تمام x ها بجز تعداد کمی
f اکیدا نزولی است در یک بازه باز I	$f'(x)<0$ است برای تمام x ها بجز تعداد کمی
نمودار f در بازه باز I تعقر به بالا دارد.	$f''(x)>0$ است برای تمام x ها در I
نمودار f در بازه باز I تعقر به پایین دارد.	$f''(x)<0$ است برای تمام x ها در I
نقطه $(c,f(c))$ یک نقطه عطف نمودار f	f'' در c تغییر علامت می دهد. و معمولا $f''(c)=0$
f یک مجانب عمودی $x=c$ دارد.	$\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$
f یک مجانب افقی $y=d$ دارد.	$\lim_{x\to\infty} f(x)=d$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=d$

مثال ۱ – نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\frac{۲}{۱+x^{۲}}$$

پاسخ

چون $f(0)=۲$ است ، پس ۲ محل تلاقی نمودار با محور y است. اما، نمودار با محور x تلاقی ندارد زیرا $f(x)>0$ است برای تمام x ها. این حقیقت که $f(-x)=f(x)$ است ، پس نمودار f نسبت به محور y قرینه است. در مورد مشتق ها داریم.

$$f'(x)=\frac{-۴x}{\left(۱+x^{۲}\right)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{-۴\left(۱+x^{۲}\right)^{۲}+۴x(۲)\left(۱+x^{۲}\right)(۲x)}{\left(۱+x^{۲}\right)^{۴}}=\frac{۴\left(۳x^{۲}-۱\right)}{\left(۱+x^{۲}\right)^{۳}}$$

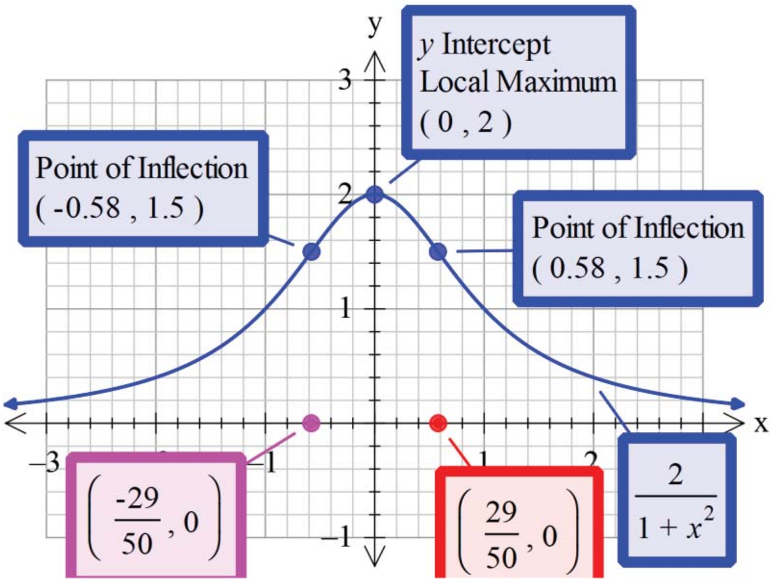
چون $f''(x)>0$ است برای $x<0$ و $f''(x)<0$ است برای $x>0$ پس f در بازه $(-\infty,0]$ مطلقا صعودی است و در بازه $[0,\infty)$ مطلقا نزولی است. $f(0)=۲$ مقدار ماکسیمم f است. در جدول زیر علامت $f''(x)$ را نشان می دهیم.

عبارت	علامت $\left(-\infty, -\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right)$	علامت $\left(-\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}, \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right)$	علامت $\left(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}, \infty\right)$
$\sqrt{۳}x+۱$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{۳}x-۱$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{۴x^۲-۱}{(۱+x^۲)^۳}$	$+$	$-$	$+$

از جدول بالا نتیجه می شود که نمودار f در بازه های $\left(-\infty, -\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right)$ و $\left(\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}, \infty\right)$ تعقر به بالا و در بازه $\left(-\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}, \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\right)$ تعقر به پایین دارد. و در نهایت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲}{۱+x^۲} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۲}{۱+x^۲} = 0$$

تانی محور x مجانب افقی f است. نمودار زیر



مثال ۲ ـ نمودار f و g را رسم کنید و فصل مشترک این دو تابع را سایه در کنید.

$$f(x) = \frac{۲}{۱ + x^۲} \cap g(x) = x^۲$$

پاسخ

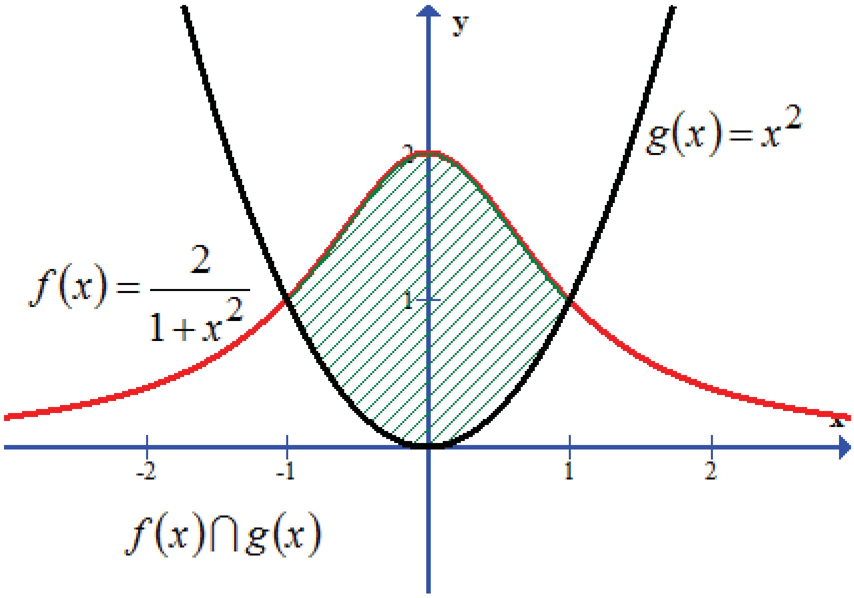
با نمودار f در مثال ۱ اشنا شدید. نمودار g هم باید برای شما کاملا اشنا باشد. برای پیدا کردن فصل مشترک این دو تابع ، معادله زیر را حل می کنیم.

$$\frac{۲}{۱ + x^۲} = x^۲$$

$$x^۴ + x^۲ - ۲ = 0$$

$$\left(x^۲ + ۲\right)\left(x^۲ - ۱\right) = 0$$

پس $x = ۱$ و یا $x = -۱$ لذا نمودار های f و g در $(۱,۱)$ و $(-۱,۱)$ یکدیگر را قطع می کنند. قسمت مشترک ، سایه دار است.



بیضی ها و هذ لولی Ellipse and Hyperbola

مثال ۳ ـ نمودار زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$$

پاسخ

چون هم x و هم y به توان دو هستند ، یک نقطه (x, y) روی نمودار است اگر فقط و فقط $(-x, y)$ و $(x, -y)$ روی نمودار باشند. یعنی نمودار هم نسبت به محور x و هم نسبت به محور y قرینه است. پس اگر آن قسمت از نمودار که بالای محور x است رسم کنیم ، با استفاده از قرینه ، می توان نمودار را کامل کرد. اما ، اگر (x, y) روی یا بالای محور x باشد ، پس $y \geq 0$ است. پس معادله بالا را برای y حل می کنیم. خواهیم داشت.

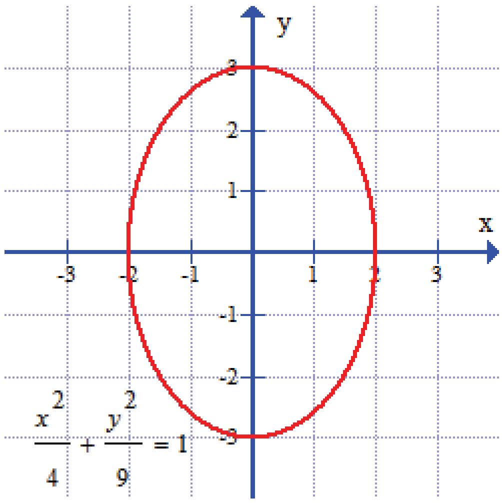
$$y = ۳\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}} \qquad (۱)$$

پس مساله به رسم نمودار تابع در شماره (۱) بالا تقلیل یافته است. دامنه این تابع $[-۲,۲]$ است و بود آن $[0,۳]$ است. محل تلاقی با محور x عبارتند از -۲ و ۲ و محل تلاقی با محور y سه می باشد. مشتق ها هم مطابق زیر هستند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۳x}{۴\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{-۱۲\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}} - \frac{۳x^۲}{\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}}}{۱۶\left(۱ - \frac{x^۲}{۴}\right)} = \frac{-۳}{۴\left(۱ - \frac{x^۲}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

نتیجه می گیریم که y در بازه $[-۲,0]$ صعودی و در بازه $[0,۲]$ نزولی است. همچنین نمودار در بازه $(-۲,۲)$ فرو رفتگی به طرف پایین دارد. با این اطلاعات می توانیم نمودار معادله را مطابق زیر رسم کنیم.

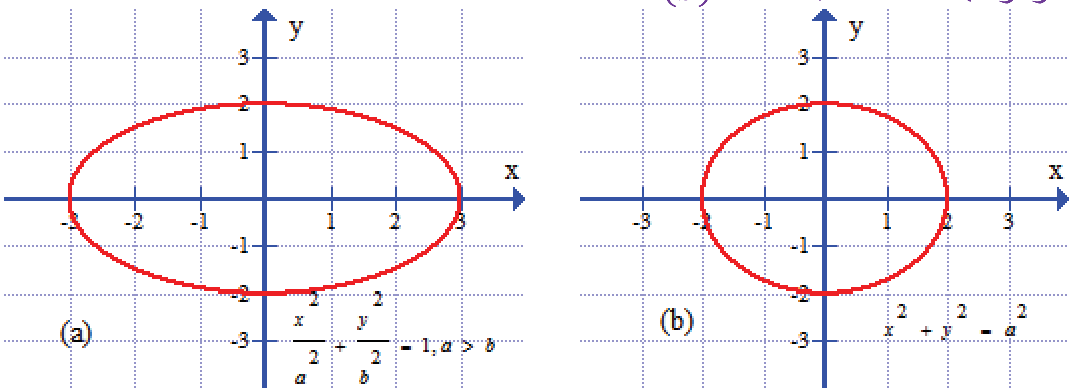


نمودار معادله به شکل زیر

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \quad , a > 0 \; , \quad b > 0$$

بیضی Ellipse نامیده می شود. اگر $a > b$ باشد شکل آن مطابق شکل (a) است. اگر $a < b$

باشد شکل آن مطابق نمودار مثال ۳ در بالا است. اگر $a = b$ باشد بیضی به شکل دائره در می آید با شعاع a و مرکز مبدا مختصات. شکل (b)



مثال ۴ ـ نمودار رابطه زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^{٣}}{٤} - \frac{y^{٢}}{٩} = ١$$

پاسخ

مسلما می دانید که $\frac{x^{٣}}{٤} - \frac{y^{٢}}{٩} = ١$ و $\frac{x^{٣}}{٤} + \frac{y^{٢}}{٩} = ١$ تابع نیستند ، بلکه یک رابطه و یا یک معادله و **یا یک تساوی هستند.**

مانند مثال ۳ نمودار این رابطه هم نسبت به محور های x و y قرینه است. برای $y \geq 0$ داریم.

$$y = ٣\sqrt{\frac{x^{٢}}{٤} - ١} \qquad (٢)$$

دامنه تابع در فرمول شماره (٢) عبارت است از $(-\infty, -٢]$ و $[٢, \infty)$ است. محل تلاقی نمودار با محور x عبارتند از ٢− و ٢ و نمودار با محور y تلاقی ندارد. همچنین داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{٣x}{٤\sqrt{\frac{x^{٢}}{٤} - ١}}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{۱۲\sqrt{\frac{x^۲}{۴}-۱}-\frac{۳x^۲}{\sqrt{\frac{x^۲}{۴}-۱}}}{۱۶\left(\frac{x^۲}{۴}-۱\right)}=\frac{-۳}{۴\left(\frac{x^۲}{۴}-۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

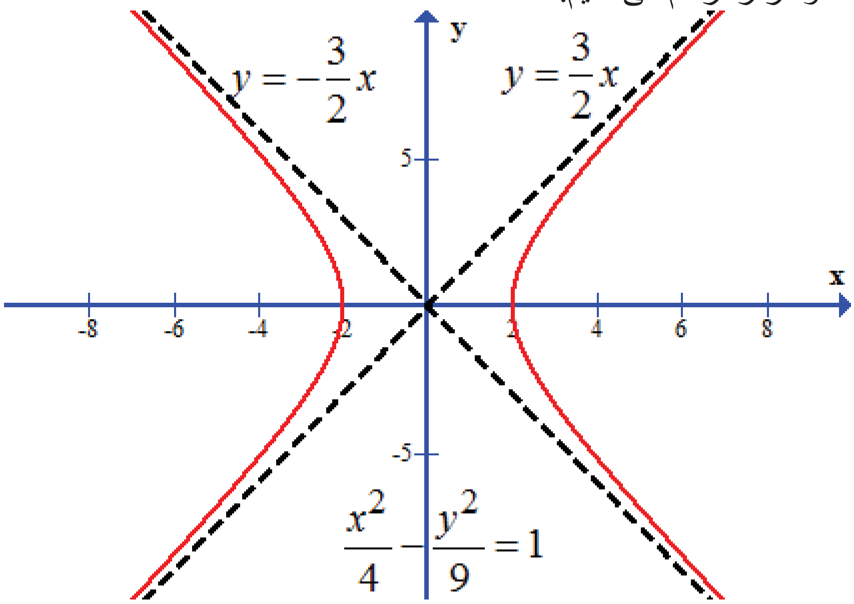
نتیجه می گیریم که y در بازه $(-\infty,-۲)$ نزولی ونمودار تعقر به پایین دارد و در بازه $(۲,\infty)$ صعودی و نمودار تعقر به پایین دارد. از فرمول شماره (۲) ملاحظه می کنیم که

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} ۳\sqrt{\frac{x^۲}{۴}-۱}=\infty$$

در حقیقت هنگامی که x بزرگ تر می شود . y به $\frac{۳}{۲}x$ نزدیک می شود ، یعنی

$$\lim_{x\to\infty}\left(۳\sqrt{\frac{x^۲}{۴}-۱}-\frac{۳}{۲}x\right)=0$$

با این اطلاعات ، نمودار را رسم می کنیم.



نمودار

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \quad \text{یا} \quad \frac{y^۲}{b^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}=۱$$

یک هذ لولی نامیده می شود. نمودار معادله سمت چپ شکل (c) و نمودار معادله سمت راست شکل (d)

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

نقاط (x,y) روی هذ لولی به خطوط

$$y=\frac{b}{a}x \qquad y=-\frac{b}{a}x$$

نزدیک می شوند ، هنگامی که x بی نهایت بزرگ می شود. این خطوط را **مجانب های** هذ لولی می نامند.

مجانب Asymptote

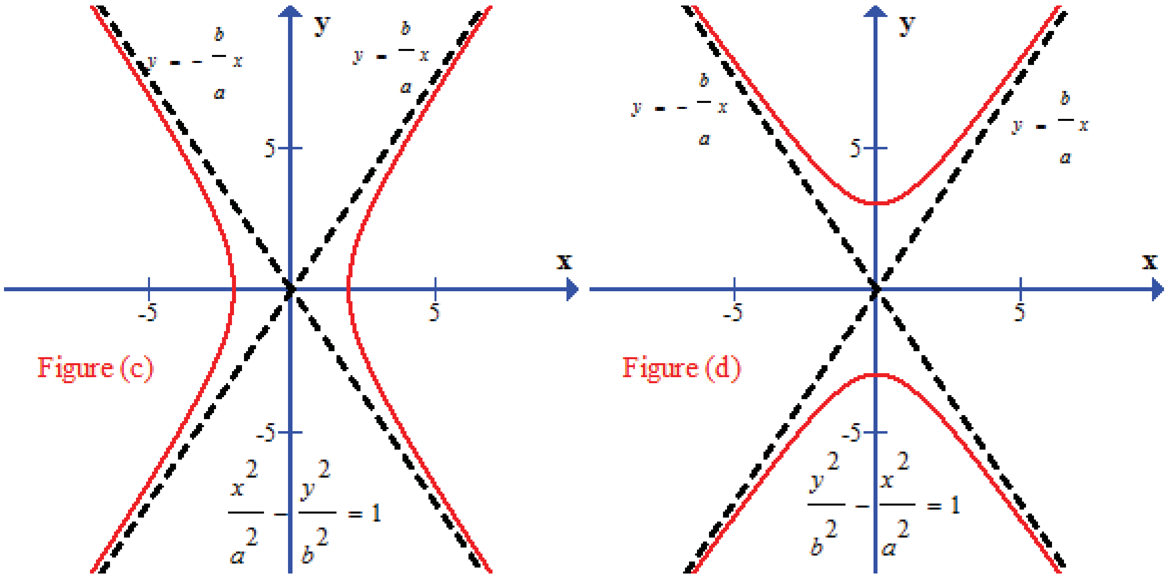


Figure (c) Figure (d)

تمرینات ۳.۸

در تمرینات ۵ — ۱ نمودار تابع داده شده را رسم کنید و در مورد خواص نام برده شده در جدول همین بخش توضیح دهید.

۱) $f(x) = x^۳ + ۳x + ۲$

۲) $f(x) = x^۴ + ۸x^۳ + ۳۶x^۲ - ۳$

۳) $g(x) = x + \frac{۴}{x}$

۴) $g(x) = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۲}$

۵) $k(x) = \frac{۱ + x}{۱ - x}$

در تمرین ۶ توابع را رسم و بخش های مشترک به دو تابع را سایه دار کنید.

۶) $f(x) = x^۲, g(x) = x$

در تمرینات ۱۱ — ۷ نمودار معادله داده شده را رسم کینید.

۷) $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$

۸) $x^۲ + y^۲ = ۹$

۹) $۲۵x^۲ + y^۲ = ۲۵$

۱۰) $\frac{x^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۴} = ۱$

۱۱) $\frac{y^۲}{۴} - \frac{x^۲}{۹} = ۱$

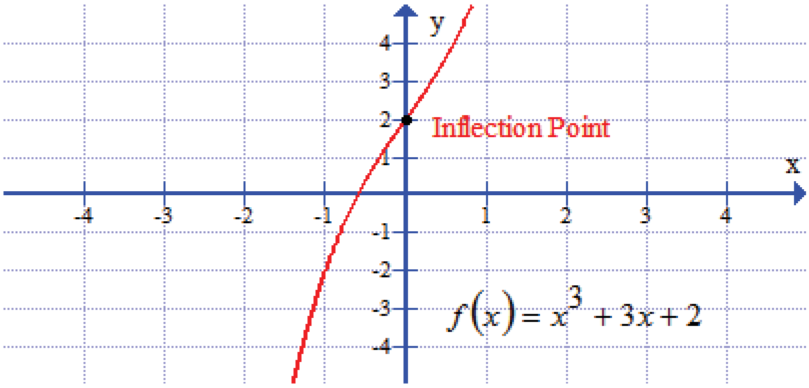
پاسخ تمرینات ۳.۸

در تمرینات ۵ – ۱ نمودار تابع داده شده را رسم کنید و در مورد خواص نام برده شده در جدول همین بخش توضیح دهید.

۱) $f(x) = x^۳ + ۳x + ۲$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۳ = ۳\left(x^۲ + ۱\right); f''(x) = ۶x$$

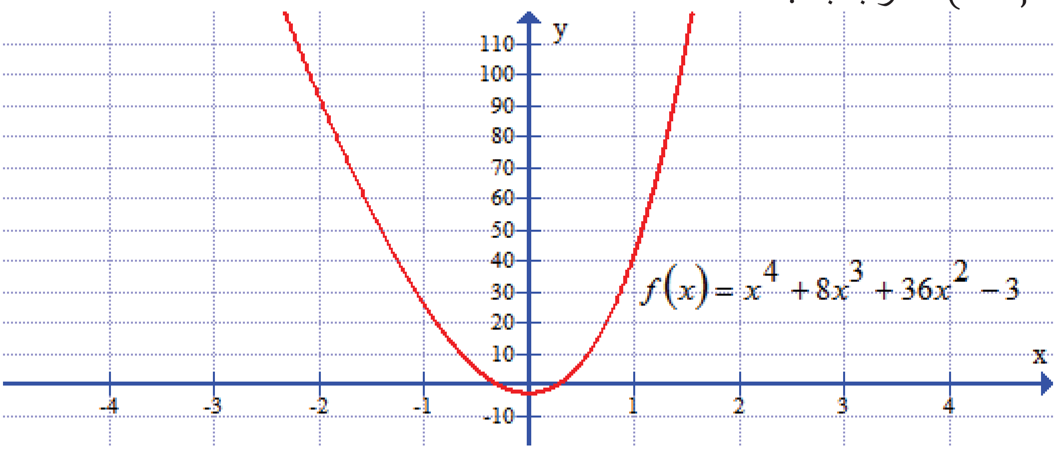
صعودی در $(-\infty,\infty)$ ؛ در $(0,\infty)$ تعقر به بالا؛ در $(-\infty,0)$ تعقر به پایین ؛ و $(0,۲)$ نقطه عطف



۲) $f(x) = x^۴ + ۸x^۳ + ۳۶x^۲ - ۳$

$$f'(x) = ۴x^۳ + ۲۴x^۲ + ۷۲x؛ f''(x) = ۱۲x^۲ + ۴۸x + ۲۷$$

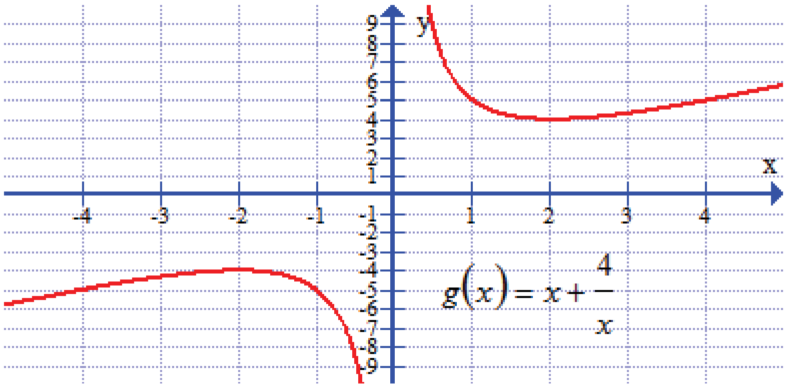
مقدار مینیمم موضعی $f(0) = -۳$ ؛ در بازه $(0,\infty)$ صعودی ؛ در بازه $(-\infty,0)$ نزولی و در بازه $(-\infty,\infty)$ تعقر به بالا.



۳) $g(x) = x + \frac{۴}{x}$

$$g'(x) = ۱ - \frac{۴}{x^{۲}};\ g''(x) = \frac{۸}{x^{۳}}$$

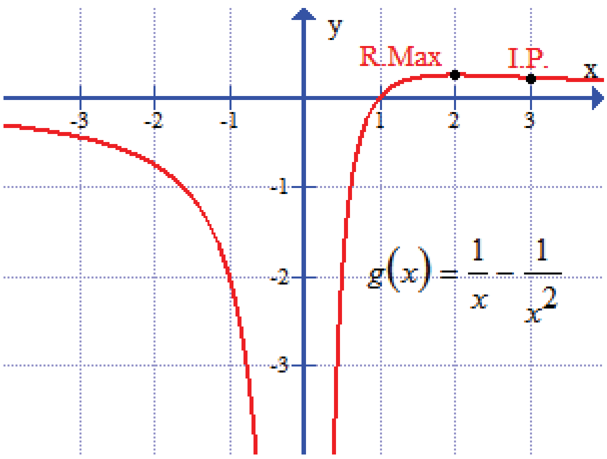
مقدار ماکسیمم موضعی $g(-۲) = -۴$ است. مقدار مینیمم موضعی $g(۲) = ۴$ است. در بازه های $(-\infty,-۲]$ و $[۲,\infty)$ صعودی است. در بازه های $[-۲,0)$ و $(0,۲]$ نزولی است. در بازه $(0,\infty)$ تقعر به بالا و در $(-\infty,0)$ تقعر به پایین دارد. مجانب عمودی $x = 0$ است. نسبت به مبدا قرینه است.



۴) $g(x) = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^{۲}}$

$$g'(x) = \frac{۲ - x}{x^{۳}};\ g''(x) = \frac{۲(x - ۳)}{x^{۴}}$$

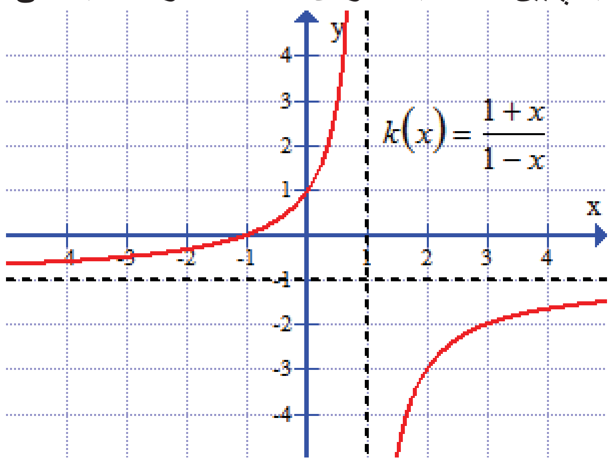
مقدار ماکسیمم موضعی $g(۲) = \frac{۱}{۴}$ است. در بازه $(0,۲]$ صعودی است و در بازه های $(-\infty,0)$ و $[۲,\infty)$ نزولی است. در بازه $(۳,\infty)$ فرو رفتگی به بالا و در بازه های $(-\infty,0)$ و $(0,۳)$ فرو تفتگی به پایین؛ نقطه عطف $(۳,\frac{۲}{۹})$ است. مجانب عمودی $x = 0$ و مجانب افقی $y = 0$ است.



۵) $k(x) = \frac{۱ + x}{۱ - x}$

$$k'(x) = \frac{۲}{(۱ - x)^۲}; k''(x) = \frac{۴}{(۱ - x)^۳}$$

در بازه های $(-\infty, ۱)$ و $(۱, \infty)$ صعودی است. در بازه $(-\infty, ۱)$ فرو رفتگی به بالا و در بازه $(۱, \infty)$ فرو رفتگی به پایین. مجانب عمودی $x = ۱$ و مجانب افقی $y = -۱$ است.



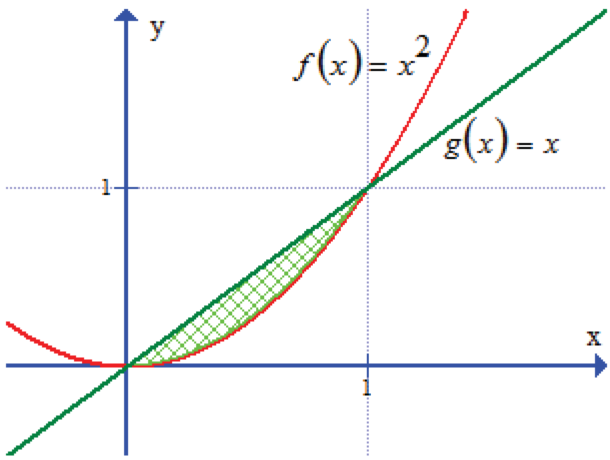
در تمرین ۶ توابع را رسم و بخش های مشترک به دو تابع را سایه دار کنید.

۶) $f(x) = x^۲, g(x) = x$

نمودار ها در (x, y) یکدیگر را قطع می کنند بطوری که

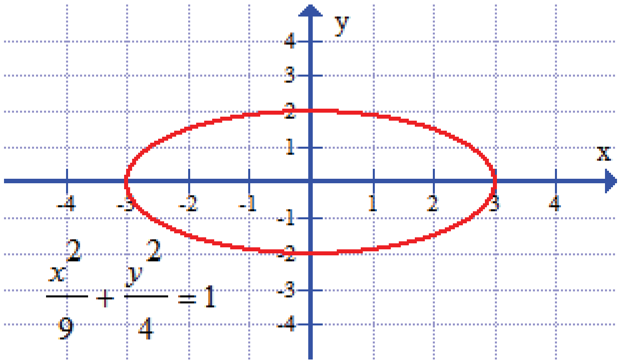
$$x^۲ = y = x \quad \text{یا} \quad x^۲ - x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = ۱$$

باشد. برای $0 \leq x \leq ۱$ داریم $f(x) \leq g(x)$ است. چون $g'(x) = ۱$ و $f'(x) = ۲x$ است ، پس هر آاو تابع در $[0, ۱]$ صعودی هستند. نمودار f در $(0, ۱)$ فرو رفتگی به بالا دارد.

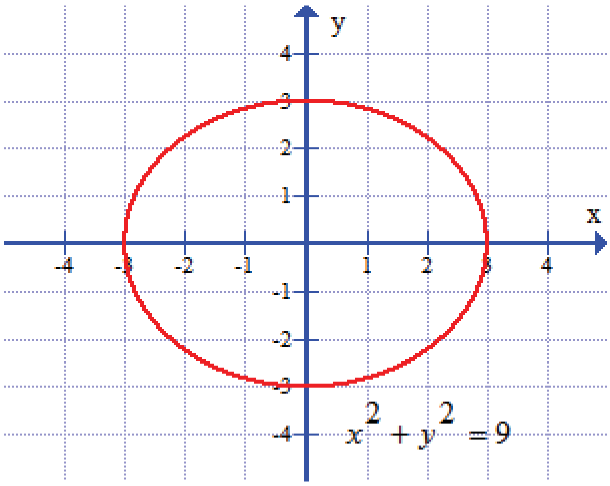


در تمرینات ۱۱ — ۷ نمودار معادله داده شده را رسم کنید.

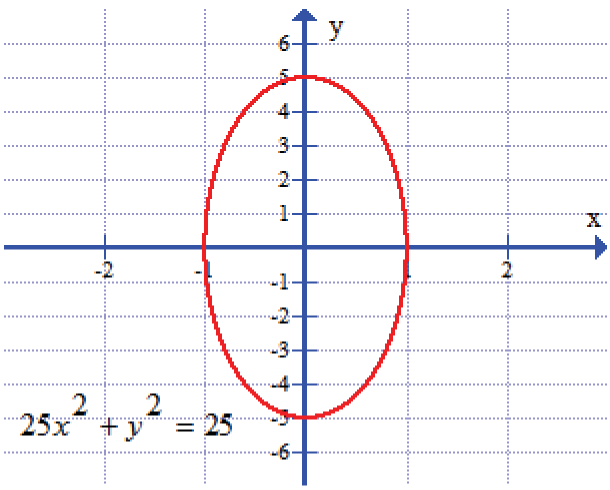
۷) $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$



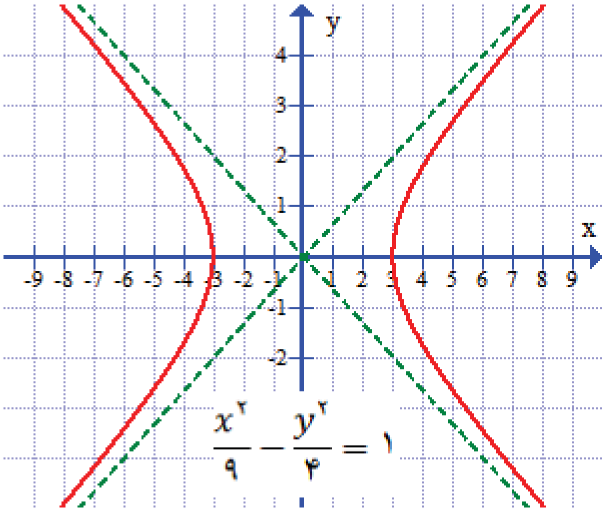
۸) $x^۲+y^۲=۹$



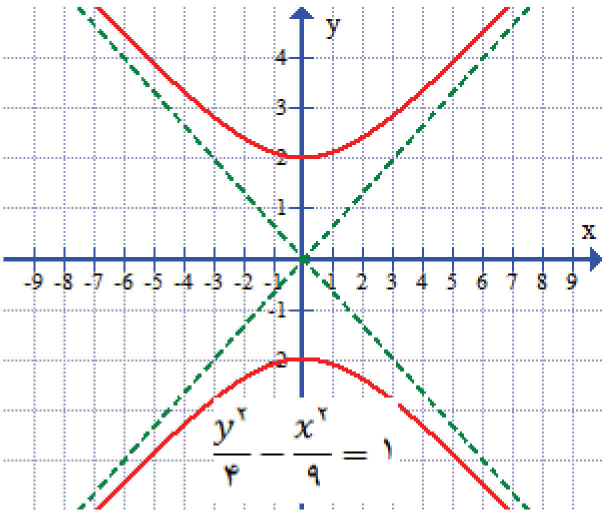
۹) $۲۵x^۲+y^۲=۲۵$



۱۰) $\frac{x^{۲}}{۹} - \frac{y^{۲}}{۴} = ۱$



۱۱) $\frac{y^{۲}}{۴} - \frac{x^{۲}}{۹} = ۱$



۳.۹ – تست های دوره ای

توصیه می شود صورت مساله را بدقت بخوانید و سپس پاسخ دهید. کوچک ترین کلمه یا حرف را نا دیده نگذارید.

تست سری اول

۱ – یک هندوانه از یک ساختمان بلند با سرعت $y = ۱۶t^۲$ فوت در t ثانیه رها می شود. سرعت متوسط هندوانه را در ثانیه ششم پیدا کنید.

$A)$۹۷ فوت در ثانیه $B)$۴۸ فوت در ثانیه $C)$۹۶ فوت در ثانیه $D)$۱۹۲ فوت در ثانیه

۲– حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to ۴}\sqrt{x^۲+۱۴x+۴۹}$$

$A)$۱۲۱ $B)$ وجود ندارد $C)\pm ۱۱$ $D)$۱۱

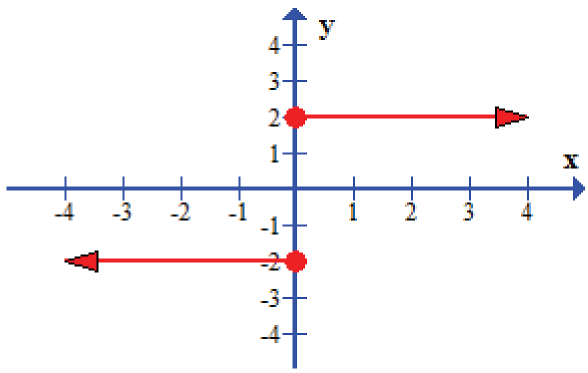
۳ - حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^۳+۱۲x^۲-۵x}{۵x}$$

$A)0$ $B)$ وجود ندارد $C)-۱$ $D)$۵

۴– حد نمودار زیر را ، اگر وجود داشته باشد ، پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$



$A)$ وجود ندارد $B)0$ $C)-۲$ $D)$۲

۵ – حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to -۳^-} int\ x$$

$A) -۳$ $B) -۴$ $C) ۴$ $D) 0$

۶ – فرض کنید $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۴۹$ باشد. حد $\lim_{x\to -۱} \sqrt{f(x)}$ را پیدا کنید.

$A) -۱$ $B) ۷$ $C) ۲ / ۶۴۵۸$ $D) ۴۹$

۷ – فرض کنید تابع دو ضابطه ای زیر را داشته باشیم و $d = -۴$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ , & \text{برای} \quad x < 0 \\ ۳ , & \text{برای} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

حد های زیر را اگر وجود داشته باشند پیدا کنید.

$a) \lim_{x\to d^-} f(x) \quad b) \lim_{x\to d^+} f(x) \quad c) \lim_{x\to d} f(x)$

$A) \begin{cases} a) & -۴ \\ b) & ۳ \\ c) & \text{وجود ندارد} \end{cases}$ $B) \begin{cases} a) ۱۲ \\ b) ۱۲ \\ c) ۱۲ \end{cases}$

$C) \begin{cases} a) & -۴ \\ b) & ۳ \\ c) & ۳ \end{cases}$ $D) \begin{cases} a) & ۳ \\ b) & -۴ \\ c) & \text{وجود ندارد} \end{cases}$

۸ - می توان نشان داد که نا معادله زیر برای تمام $x \geq 0$ ها ، بر قرار است.

$$-x \leq x \cos\left(\frac{۱}{x}\right) \leq x$$

با توجه به اظهارت بالا حد زیر را ، اگر وجود داشته باشد ، پید کنید.

$$\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$A)$ وجود ندارد $B) ۰/۰۰۰۷$ $C) ۱$ $D) 0$

۹ – حد زیر را ، اگر وجود داشته باشد ، پیدا کنید.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos ۳x}{x}$$

$A) 0$ $B) -\infty$ $C) ۳$ $D) ۱$

۱۰
حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$A)$ ۱ $\quad B)\infty \quad C)0 \quad D)$ وجود ندارد

۱۱- حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} (۱ + \csc x)$$

$A) -\infty \quad B)$ ۱ $\quad C)0 \quad D)\infty$

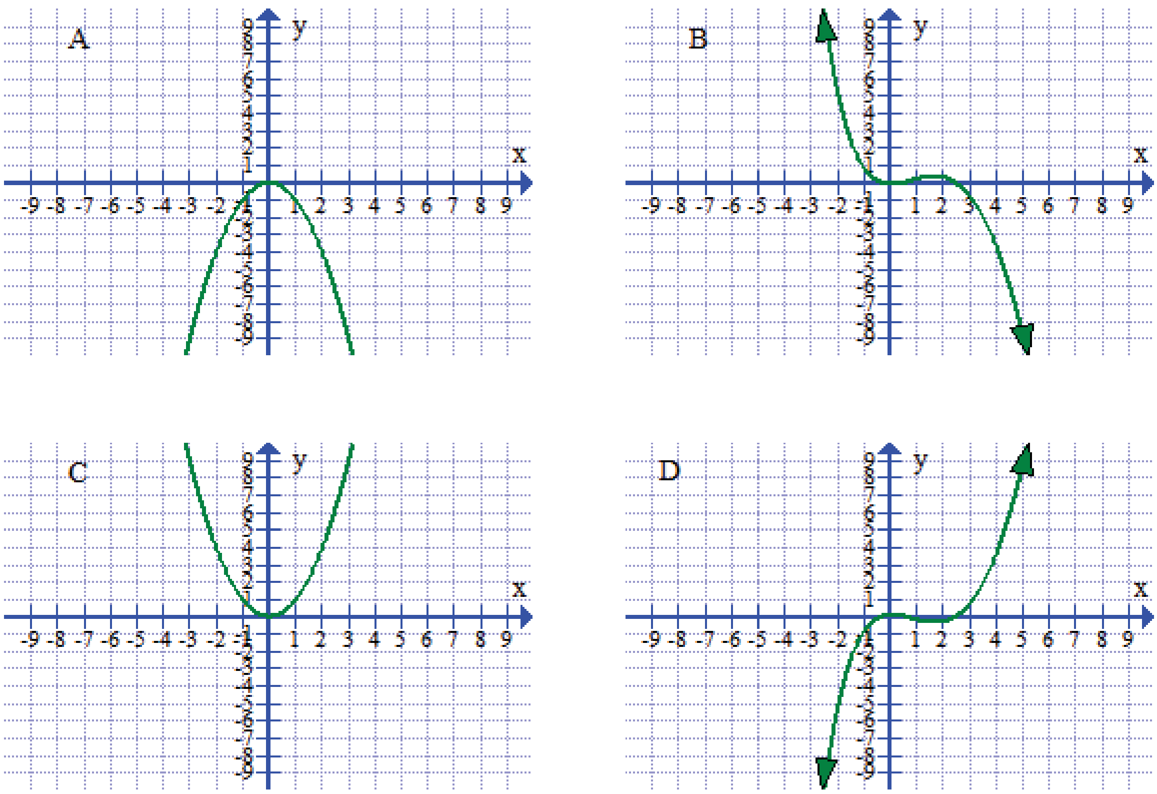
۱۲ - مجانب عمودی نمودار $f(x) = \sec x$ را پیدا کنید.

$A)x = \frac{\pi}{۲} + n\pi \quad ، \quad n \in \mathbb{Z}$ $\qquad B)x = 0$

$C)x = n\pi \quad ,n \in \mathbb{Z}$ $\qquad D)x = \pi$

۱۳ - تابع زیر را با نمودار آن از نظر رفتار انتهایی جور کنید.

$$f(x) = \frac{۲x^{۳} - ۵x^{۲} + ۱}{x + ۹}$$



۱۴ – حد تابع زیر را ، اگر وجود داشته باشد ، پیدا کنید.

$$\lim_{x\to-\infty} x^{۴}e^{x}$$

$A)0$ $\quad B)۴$ $\quad C)۱$ $\quad D)\infty$

۱۵- تابع دو ضابطه ای زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{x-۴}{x-۲} \quad , \text{ برای } \quad x\le 0\\ \dfrac{۱}{x^{۲}} \quad ، \text{ برای } \quad x>0\end{cases}$$

حد تابع بالا را در شرایط زیر پیدا کنید.

$(a)\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad (b)\ \lim_{x\to\infty} f(x)$

$(c)\ \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad (d)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$A)\begin{cases}(a)\ -\infty\\ (b)\ \ \infty\\ (c)\ \ ۴\\ (d)\ \ ۲\end{cases}$ $\quad B)\begin{cases}(a)\ \ ۱\\ (b)\ \ 0\\ (c)\ \ ۲\\ (d)\ \ \infty\end{cases}$

$C)\begin{cases}(a)\ ۲\\ (b)\ \text{وجود ندارد}\\ (c)\ ۱\\ (d)\ 0\end{cases}$ $\quad D)\begin{cases}(a)\ \ \infty\\ (b)\ \ ۲\\ (c)\ \ 0\\ (d)\ \ ۱\end{cases}$

۱۶ - بازه هایی که در آنها تابع زیر پیوسته است , پیدا کنید.

$$f(x)=\sqrt[۴]{۹x-۸}$$

$A)\left[-\frac{۸}{۹},\infty\right)$ $\quad B)\left(-\infty,\frac{۸}{۹}\right]$ $\quad C)\left[\frac{۸}{۹},\infty\right)$ $\quad D)\left(\frac{۸}{۹},\infty\right)$

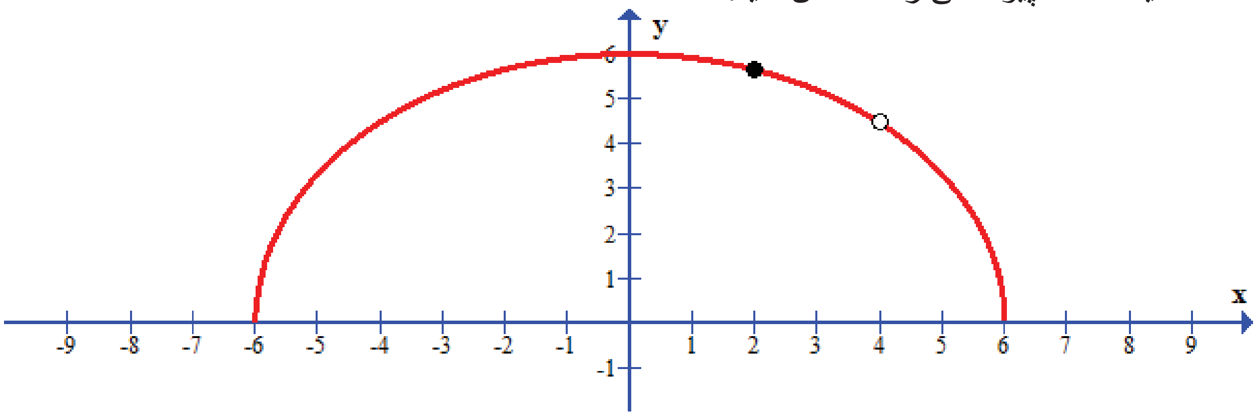
۱۷ - نقاطی را که تابع زیر نا پیوسته است پید کنید. نوع نا پیوستگی را مشخص کنید.

$$g(x)=\frac{x+۴}{x^{۲}-۱۴x+۴۸}$$

$A)x=۶, x=۸$ هر دو بنهایت نا پیوستگی $\quad B)x=۶$ بنهایت نا پیوستگی

$C)x=-۶, x=-۸$ هر دو بنهایت نا پیوستگی $\quad D)x=۸$ بنهایت نا پیوستگی

۱۸ – کلیه نقاط نا پیوستگی را مشخص کنید.



$A)x=۴$ $B)$ هیچ $C)x=۲$ $x=۲,x=۴$

پاسخ تست سری اول
اگر پاسخ کاملا واضح و آشکار باشد ، تنها به جواب صحیح بسنده می شود. در صورت غامض بودن ، توضیح داده می شود.

$۱)C$

زیرا گفته شده است که هندوانه با سرعت $y=۱۶t^۲$ فوت در t ثانیه ، پس فرمول به صورت زیر است.

$$y=\frac{۱۶t^۲ \text{ فوت}}{t\text{ ثانیه}}$$

در ثانیه صفر ، سرعت هندوانه به صورت زیر است.

$$y=\frac{۱۶(0)^۲\text{فوت}}{\text{ثانیه}(0)}=0 \text{ فوت در ثانیه}$$

در ثانیه ششم ، سرعت هندوانه به صورت زیر است.

$$y=\frac{۱۶(۶)^۲ \text{ فوت}}{۶ \text{ ثانیه}}=\frac{۱۶(۶)(۶) \text{ فوت}}{۶ \text{ ثانیه}}=\frac{۱۶(۶)\text{فوت}}{۱ \text{ ثانیه}}=۹۶ \text{ فوت در ثانیه}$$

$۲)D$
$۳)C$
$۴)A$
$۵)B$
$۶)B$

$۷)B$

$۸)D$

نشان می دهیم که $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{۱}{x}\right) = 0$ است. از قضیه ساندویچی استفاده می کنیم،

$$-۱ \le \cos\left(\frac{۱}{x}\right) \le ۱$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x(-۱)\right) \le \lim_{x\to 0}\left(x\cos\left(\frac{۱}{x}\right)\right) \le \lim_{x\to 0}\left(x(۱)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x(-۱)\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(x(۱)\right) = 0$$

پس $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{۱}{x}\right) = 0$ است.

$۹)A$

نشان می دهیم $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\cos ۳x}{x}\right) = 0$ است.
از قضیه ساندویچی استفاده می کنیم.

$$-۱ \le \cos(۳x) \le ۱$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-۱}{x}\right) \le \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\cos ۳x}{x}\right) \le \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-۱}{x}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{۱}{x}\right) = 0$$

پس $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\cos ۳x}{x}\right) = 0$ است.

$۱۰)C$

نشان می دهیم $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$ است.
از قضیه ساندویچی استفاده می کنیم.

$$-۱ \le \sin x \le ۱$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{۱}{x}\right) \le \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \le \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{۱}{x}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{۱}{x} = 0\right)$$

پس $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$ است.

$۱۱)D$

نشان می دهیم $\lim_{x\to 0^+}\left(۱ + \csc x\right) = \infty$ است.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(۱ + \csc x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(۱\right) + \lim_{x\to 0^+}\left(\csc x\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(۱) = ۱ \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}(\csc x) = \infty$$

پس

$$\lim_{x\to 0^+}(۱ + \csc x) = ۱ + \infty = \infty$$

۱۲)A

$$y = \sec x = \frac{۱}{\cos x}$$

برای این که یک مجانب عمودی داشته باشیم ، حد یک طرفه باید یا ∞ باشد و یا $-\infty$ باشد ، این هنگامی اتفاق می افتد که مخرج کسر بالا صفر باشد. پس تساوی زیر را حل می کنیم.

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{۲} ، \quad \pm\frac{۳\pi}{۲} \ , \ \frac{۵\pi}{۲} \ , \quad \dots$$

یعنی باید داشته باشیم

$$x = \frac{\pi}{۲} + n\,\pi = \frac{(۲n+۱)\pi}{۲} \quad , n \in \mathbb{Z}$$

پس مجانب عمودی $x = \frac{(۲n+۱)\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} + n\pi$ است.

۱۳)D

۱۴)A

نشان می دهیم که $\lim_{x\to-\infty} x^۴ e^x = 0$ است. برای این کار، قانون لا پیتال را چندین مرتبه بکار می بریم.

$$x^۴ e^x = \frac{x^۴}{\frac{۱}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^۴ e^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^۴}{\frac{۱}{e^x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۴x^۳}{-e^{-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-۴x^۳ e^x\right)$$

$$= -۴\lim_{x\to-\infty}\left(e^x x^۳\right) = -۴\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^۳}{\frac{۱}{e^x}}\right) = -۴\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۳x^۲}{-e^{-x}}\right)$$

$$= -۴\lim_{x\to-\infty}\left(-۳e^x x^۲\right) = (-۴)(-۳)\lim_{x\to-\infty}\left(e^x x^۲\right)$$

$$= (-۴)(-۳)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^۲}{\frac{۱}{e^x}}\right) = (-۴)(-۳)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x}{-e^{-x}}\right)$$

$$= (-۴)(-۳)\lim_{x\to-\infty}(-۲e^x x) = (-۴)(-۳)(-۲)\lim_{x\to-\infty}(e^x x)$$
$$= (-۴)(-۳)(-۲)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\frac{۱}{e^x}}\right) = (-۴)(-۳)(-۲)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۱}{-e^{-x}}\right)$$
$$= (-۴)(-۳)(-۲)\lim_{x\to-\infty}(-e^x) = (-۴)(-۳)(-۲)(0) = 0$$

۱۵)B
۱۶)C
۱۷)A
۱۸)A

تست سری دوم

۱-حد تابع را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^۲ x}{۲x}$$

$A)$۱ $B)$۲ $C)\frac{۱}{۲}$ $D)0$

۲ -فرض کنید $f(x) = xe^x$ باشد. نقطه $\left(x, f(x)\right)$ را پیدا کنید بطوری که مشتق مرتبه دوم صفر باشد.

$A)\left(۲, ۲e^۲\right)$ $B)(0,0)$ $C)\left(-۲, -۲e^{-۲}\right)$ $D)\left(-۴, -۴e^{-۴}\right)$

۳ – اگر $y = tan^{-۱}\left(x^۲\right)$ باشد ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$A)\frac{۱}{۱+x^۴}$ $B)\frac{۲x}{۱+x^۴}$ $C)۲x * sec^۲\left(x^۲\right)$ $D)۲x * tan^{-۱}\left(x^۲\right)$

۴ – شیب خط مماس بر نمودار $x + y = xy$ در نقطه $(۲, ۲)$ کدام است؟

$A) -۱$ $B) -۲$ $C) -۳$ $D) -۴$

۵ – کدام یک از جملات زیر صحیح است؟ "ممکن است بیش از یک جواب صحیح باشد"

الف – اگر $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود داشته باشد ، پس f پیوسته است.
ب – ا گر f در a پیوسته باشد ، پس f در a مشتق پذیر است.
ج – اگر f در a پیوسته باشد ، پس $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد.
د – اگر f در a مشتق پذیر باشد ، پس f در a پیوسته است.

۶ – فرض کنید f و g در تمام نقاط مشتق پذیر باشند ، و فرض کنید داشته باشیم

$$f(۲) = ۲ \quad , \quad g(۲) = ۱ \quad ، \quad f'(۱) = ۳ \quad , \quad g'(۲) = -۲$$

مقدار $(f \circ g)'(۲)$ را پیدا کنید.

$A)۶$ $B)۳$ $C) - ۳$ $D) - ۶$

۷ – فرض کنید برای تمام مقادیر x ، نا معادله زیر بر قرار است.

$$۱ + x \leq g(x) \leq e^x$$

مقدار حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

$A)۱$ $B)۲$ $C)۳$ $D)$ هیچ کدام از اینها

۸ – مقادیری برای c پیدا کنید ، بطوری که تابع دو ضابطه ای زیر در تمام نقاط ، پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & \text{برای } x < ۲ \\ (c^۲ - c)x - ۸ & \text{برای } x \geq ۲ \end{cases}$$

$A)۲$ و ۴ $B) - ۲$ و ۳ $C)0$ و ۸ $D) - ۴$ و $- ۸$

۹ – نقطه ای روی نمودار $y = ۳x^۲ - ۴x + ۵$ پیدا کنید ، بطوری که خط مماس بر آن نقطه ، موازی خط $y = -۲۲x + ۷$ باشد.

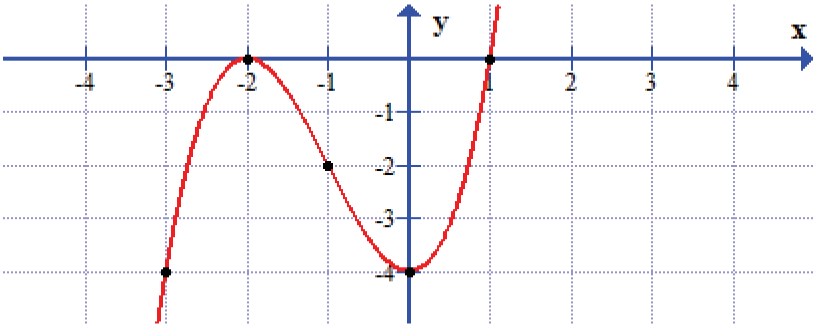
$A)(0, ۵)$ $B)(-۱, ۱۲)$ $C)(-۲, ۲۵)$ $D)(-۳, ۴۴)$

۱۰

فرض کنید $g(t) = \frac{۱}{۹}(۲t + ۱)^۳$ باشد. معادله خط مماس بر نمودار g در $t = ۱$ را پیدا کنید.

$A)y = ۶$ $B)y = ۶t - ۳$ $C)y = ۳t$ $D)y = ۶t - ۶$

۱۱ – نمودار تابع f را در زیر ملاحظه می کنید. بازه و یا بازه های بازی که در آن $f''(x) < 0$ است ، پیدا کنید.



$A)\ (-۳,-۱)$ $B)\ (-\infty,0)$ $C)\ (-\infty,-۱)$ $D)\ (-۳,0)$

۱۲ – مشتق مرتبه دوم تابع $f(x) = x^۲ * \ln(۲x)$ را پیدا کنید.

$A)\ ۲ * \ln(۲x) + ۳$ $B)\ ۲ * \ln(۲x) + \frac{۳}{۲}$ $c)\ 0$ $D)\ ۲ + \frac{۱}{۲x}$

۱۳ – فرض کنید $y = \sqrt{x}\,(x+۱)^۵ e^{x^۲}$ باشد. $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$A)\ \sqrt{x}(x+۱)^۵\, e^{x^۲}\left(\frac{۱}{۲x} + ۵x + e^{x^۲}\right)$

$B)\ \sqrt{x}\,(x+۱)^۵\, e^{x^۲}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۵}{x+۱} + ۲x\right)$

$C)\ \sqrt{x}\,(x+۱)^۵\, e^{x^۲}\left(\frac{۵(x+۱)^۴}{۲\sqrt{x}} + xe^{x^۲}\right)$

$D)\ \sqrt{x}\,(x+۱)^۵\, e^{x^۲}\left(\frac{۱}{۲x} + \frac{۵}{x+۱} + ۲x\right)$

۱۴ – مقدار حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۳x^۲+۱}{\sqrt{۴x^۴+۲x^۲+۱}}$$

$A)\ 0$ $B)\ ۳$ $C)\ \frac{۳}{۲}$ $D)\ \infty$

پاسخ تست سری دوم

۱) D

یاد آوری : $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=۱$ پس

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^۲ x}{۲x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}*\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{۲}=۱*0=0$$

روش دوم با استفاده ازقانون لا پیتال

می دانیم که $\lim_{x\to0} sin^۲=0$ و $\lim_{x\to0}۲x=0$ است ، پس

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^۲ x}{۲x}=\lim_{x\to0}\frac{۲\sin x\cos x}{۲}=0$$

۲) C

$$f(x)=xe^x$$
$$f'(x)=xe^x+e^x$$
$$f''(x)=(xe^x+e^x)+e^x=e^x(x+۲)$$

می خواهیم بدانیم چه وقت $f''(x)=0$ است. می دانیم که e^x هیچ وقت صفر نمی شود ، پس باید $x+۲=0$ باشد. یعنی $x=-۲$ باید باشد. لذا نقطه مورد نظر ما مطابق زیر خواهد بود.

$$\left(x,f(x)\right)=\left(-۲,-۲e^{-۲}\right)$$

۳) B

یاد آوری : $\frac{d}{dx}\left(tan^{-۱}(x)\right)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ است ، پس با استفده از قاعده زنجیره ای داریم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(tan^{-۱}\left(x^۲\right)\right)=\frac{۱}{۱+\left(x^۲\right)^۲}*۲x=\frac{۲x}{۱+x^۴}$$

۴) A

با استفاده از مشتق ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}(x+y)=\frac{d}{dx}(xy)\ \Rightarrow$$
$$۱+\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y\ \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}(۱-x)=y-۱\ \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-۱}{۱-x}$$

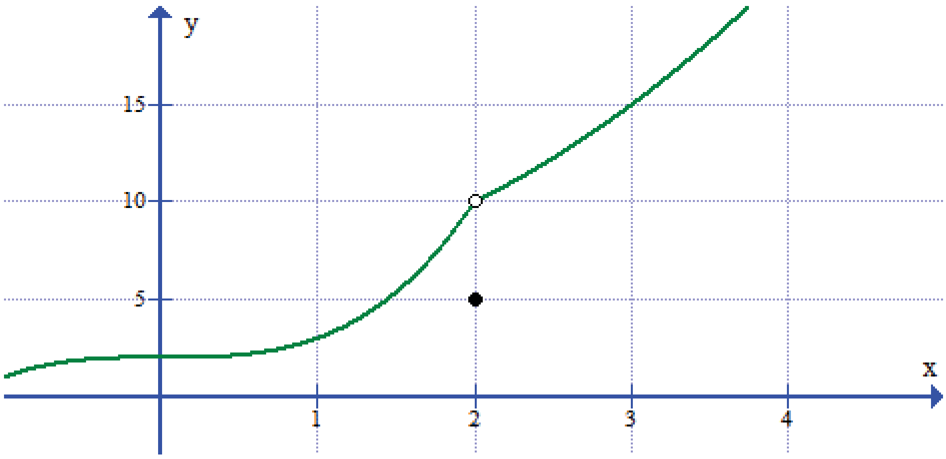
پس شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $(۲,۲)$ می شود.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(۲,۲)} = \frac{۲-۱}{۱-۲} = -۱$$

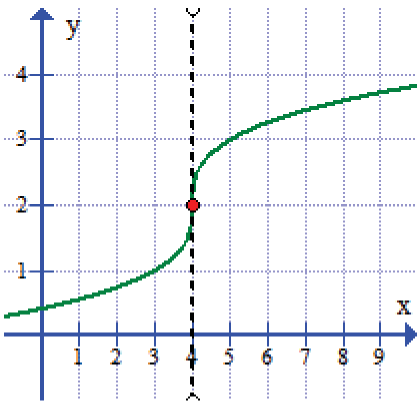
۵) C، D

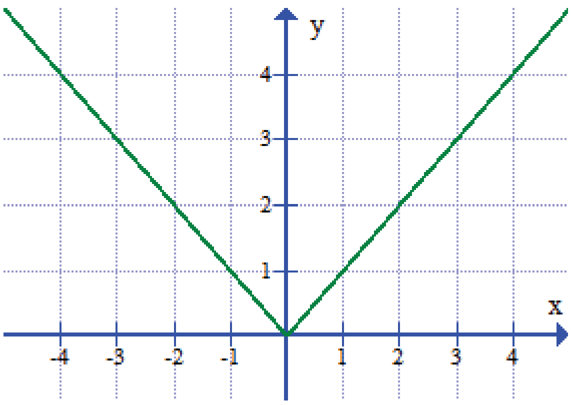
توضیح : (A) صحیح نیست زیرا ممکن است در نمودار تابع یک شکاف باشد. تابع زیر و نمودار آنرا ملاحظه کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳+۲ & \text{برای} \quad x<۲ \\ ۵ & \text{برای} \quad x=۲ \\ x^۲+۶ & \text{برای} \quad x>۲ \end{cases}$$



پاسخ (B) هم صحیح نیست ، زیرا ممکن است یک گوشه و یا خط مماس عمودی وجود داشته باشد.





$۶)\ D$

با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم

$$\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$$

پس

$$(f \circ g)'(۲) = \tfrac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big)\Big|_{x=2}$$

$$= f'\Big(g\big(۲\big)\Big) * g'\big(۲\big) = f'\big(۱\big) * \big(-۲\big)$$
$$= ۳ * \big(-۲\big) = -۶$$

$۷)\ A$

یاد آوری : $\lim_{x\to0}\big(۱ + x\big) = ۱$ و $\lim_{x\to0} e^x = e^0 = ۱$ پس با استفاده از قضیه ساندویچی

$$\lim_{x\to0} g(x) = ۱$$

$۸)\ B$

توضیح :فقط باید اطمینان حاصل کنیم که هر دو قسمت تابع ، نظیر یک دیگر هستند. اولا چون

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x\to۲}\frac{\big(x - ۲\big)\big(x + ۲\big)}{x - ۲} = \lim_{x\to۲}\big(x + ۲\big) = ۴$$

پس باید c را طوری انتخاب کنیم که برای $x = ۲$ داشته باشیم $\Big(c^۲ - c\Big)x - ۸ = ۴$ باشد.

$$\Big(c^۲ - c\Big)۲ - ۸ = ۴ \Rightarrow c^۲ - c - ۴ = ۲ \Rightarrow$$
$$c^۲ - c - ۶ = 0 \Rightarrow \big(c - ۳\big)\big(c + ۲\big) = 0 \Rightarrow$$
$$c = ۳ \text{ ، } c = -۲$$

$۹)\ D$

توضیح :باید نقطه ای روی نمودار $y = ۳x^۲ - ۴x + ۵$ پیدا کنیم بطوری که خط مماس بر نمودار این تابع در آن نقطه موازی خط $y = -۲۲x + ۷$ باشد. پس باید شیب این خط مساوی -۲۲ باشد.

$$y' = ۶x - ۴$$

باید پیدا کنیم که چه وقت $y' = -۲۲$ است.

$$y' = -۲۲ \Rightarrow ۶x - ۴ = -۲۲ \Rightarrow$$
$$۶x - -۱۸ \Rightarrow x = -۳$$

پس نقطه دلخواه $\big(-۳, ۴۴\big)$ است.

۱۰) B

توضیح :

$$g(t) = \frac{۱}{۹}\left(۲t + ۱\right)^{۳} \Rightarrow \; g'(t) = \frac{۳}{۹}\left(۲t + ۱\right)^{۲} * ۲ = \frac{۲}{۳}\left(۲t + ۱\right)^{۲} \Rightarrow$$

$$g'\left(۱\right) = \frac{۲}{۳}\left(۲\left(۱\right) + ۱\right)^{۲} = ۶$$

پس $m = ۶$ شیب خط مماس در $t = ۱$ است. چون داریم

$$g\left(۱\right) = \frac{۱}{۹}\left(۲\left(۱\right) + ۱\right)^{۳} = ۳$$

پس معادله خط مماس در نقطه $\left(۱, ۳\right)$ می شود

$$y - ۳ = ۶\left(t - ۱\right) \; \Rightarrow y = ۶t - ۳$$

۱۱) C

۱۲) A

توضیح :با استفاده از قاعده ضرب داریم

$$f'(x) = x^{۲} * \frac{۲}{۲x} + ۲x\ln\left(۲x\right) = x + ۲x\ln\left(۲x\right)$$

$$f''(x) = ۱ + ۲x * \frac{۲}{۲x} + ۲\ln\left(۲x\right) = ۳ + ۲\ln\left(۲x\right)$$

۱۳) D

توضیح :با استفاده از مشتق لگاریتم داریم

$$y = \sqrt{x}\,\left(x + ۱\right)^{۵} e^{x^{۲}}$$

$$\ln(y) = \frac{۱}{۲}\ln x + ۵\ln\left(x + ۱\right) + x^{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{y} * \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۲x} + \frac{۵}{x + ۱} + ۲x \; \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\,\left(x + ۱\right)^{۵} e^{x^{۲}}\,\left(\frac{۱}{۲x} + \frac{۵}{x + ۱} + ۲x\right)$$

۱۴) C

توضیح :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۳x^۲+۱}{\sqrt{۴x^۴+۲x^۲+۱}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۳x^۲+۱}{\sqrt{۴x^۴+۲x^۲+۱}}*\frac{\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۱}{\sqrt{x^۴}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\sqrt{۴+\frac{۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۴}}}=$$

$$\frac{۳}{\sqrt{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

تست سری سوم

در سوال های ۵ – ۱ یک تابع داده شده است. $\frac{dy}{dx}$ تابع را پیدا کنید.

۱) $y=(۴x+۱)(۱-x)^۳$

$A)-۱۲(۱-x)^۲$ $B)(۱-x)^۲(۱+۸x)$ $C)(۱-x)^۲(۱-۱۶x)$

$D)۳(۱-x)^۲(۴x+۱)$ $E)(۱-x)^۲(۱۶x+۷)$

۲) $y=\frac{۲-x}{۳x+۱}$

$A)-\frac{۷}{(۳x+۱)^۲}$ $B)\frac{۶x-۵}{(۳x+۱)^۲}$ $C)-\frac{۹}{(۳x+۱)^۲}$

$D)\frac{۷}{(۳x+۱)^۲}$ $E)\frac{۷-۶x}{(۳x+۱)^۲}$

۳) $y=\sqrt{۳-۲x}$

$A)\frac{۱}{۲\sqrt{۳-۲x}}$ $B)-\frac{۱}{\sqrt{۳-۲x}}$ $C)-\frac{(۳-۲x)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}$

$D)-\frac{۱}{۳-۲x}$ $E)\frac{۲}{۳}(۳-۲x)^{\frac{۳}{۲}}$

۴) $y = \dfrac{۲}{(۵x+۱)^{۳}}$

$A)\ -\dfrac{۱۰}{۳}(۵x+۱)^{\frac{-۴}{۳}}$ $B)\ -۳۰(۵x+۱)^{-۴}$ $C)\ \dfrac{-۶}{(۵x+۱)^{۴}}$

$D)\ -\dfrac{۱۰}{۳}(۵x+۱)^{\frac{-۴}{۳}}$ $E)\ \dfrac{۳۰}{(۵x+۱)^{۴}}$

۵) $y = ۳x^{\frac{۲}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۲}} - ۲$

$A)\ ۲x^{\frac{۱}{۳}} - ۲x^{\frac{-۱}{۲}}$ $B)\ ۳x^{\frac{-۱}{۳}} - ۲x^{\frac{-۱}{۲}}$ $C)\ \frac{۹}{۵}x^{\frac{۵}{۳}} - ۸x^{\frac{۳}{۲}}$

$D)\ \dfrac{۲}{x^{\frac{۱}{۳}}} - \dfrac{۲}{x^{\frac{۱}{۲}}} - ۲$ $E)\ ۲x^{\frac{-۱}{۳}} - ۲x^{\frac{-۱}{۲}}$

در سوال های ۱۳ – ۶ توابع مشتق پذیر f و g دارای مقدیری که در جدول زیر ملاحظه می کنید می باشند.

x	f	f'	g	g'
0	۲	۱	۵	–۴
۱	۳	۲	۳	–۳
۲	۵	۳	۱	–۲
۳	۱۰	۴	0	–۱

۶ - اگر $A = f + ۲g$ باشد ، پس $A'(۳)$ مساوی است با

$A)\ -۲$ $B)\ ۲$ $C)\ ۷$ $D)\ ۸$ $E)\ ۱۰$

۷ – اگر $B = f * g$ باشد ، پس $B'(۲)$ مساوی است با

$A)\ -۲۰$ $B)\ -۷$ $C)\ -۶$ $D)\ -۱$ $E)\ ۱۳$

۸ – اگر $D = \frac{۱}{g}$ باشد ، پس $D'(۱)$ مساوی است با

$A)\ -\frac{۱}{۲}$ $B)\ -\frac{۱}{۳}$ $C)\ -\frac{۱}{۹}$ $D)\ \frac{۱}{۹}$ $E)\ \frac{۱}{۳}$

۹ – اگر $H(x)=\sqrt{f(x)}$ باشد ، پس $H'(۳)$ مساوی است با

$A)\ \frac{۱}{۴}$ $B)\ \frac{۱}{۲\sqrt{۱۰}}$ $C)۲$ $D\ \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$ $E)\sqrt{۱۰}$

– ۱۰

اگر $K(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ باشد ، پس $K'(۱۰)$ مساوی است با

$A)\ \frac{-۱۳}{۲۵}$ $B)-\frac{۱}{۴}$ $C)\ \frac{۱۳}{۲۵}$ $D)\ \frac{۱۳}{۱۶}$ $E)\ \frac{۲۲}{۲۵}$

۱۱ – اگر $M(x)=f(g(x))$ باشد ، پس $M'(۱)$ مساوی است با

$A)-۱۲$ $B)-۶$ $C)\ ۴$ $D)\ ۶$ $E)۱۲$

۱۲ – اگر $P(x)=\left(x^{۳}\right)$ باشد ، پس $P'(۱)$ مساوی است با

$A)\ ۲$ $B)\ ۶$ $C)\ ۸$ $D)\ ۱۲$ $E)\ ۵۴$

۱۳ – اگر $S(x)=f^{-۱}(x)$ باشد ، پس $S'(۳)$ مساوی است با

$A)-۲$ $B)-\frac{۱}{۲۵}$ $C)\ \frac{۱}{۴}$ $D)\ \frac{۱}{۲}$ $E)\ ۲$

در سوال های ۲۱ – ۱۴ مطلوب است y'

۱۴) $y=۲\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$A)\ x+\frac{۱}{x\sqrt{x}}$ $B)\ x^{\frac{-۱}{۲}}+x^{\frac{-۳}{۲}}$ $C)\ \frac{۴x-۱}{۴x\sqrt{x}}$

$D)\ \frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{۴x\sqrt{x}}$ $E)\ \frac{۴}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{x\sqrt{x}}$

۱۵) $y=\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}$

$A)\ \frac{x+۱}{y}$ $B)\ ۴y(x+۱)$ $C)\ \frac{۱}{۲\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}}$

$D)\ -\dfrac{x+۱}{(x^۲+۲x-۱)^{\frac{۳}{۲}}}$ $E)$ هیچ کدام از اینها

۱۶) $y=\dfrac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

$A)\ \dfrac{۱-۲x^۲}{(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ $B)\ \dfrac{۱}{۱-x^۲}$ $C)\ \dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

$D)\ \dfrac{۱-۲x^۲}{(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$ $E)$ هیچ کدام از اینها

۱۷) $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x-۱}$

$A)\ x-\dfrac{e^x}{e^x-۱}$ $B)\ \dfrac{۱}{e^x-۱}$ $C)\ -\dfrac{۱}{e^x-۱}$

$D)\ 0$ $E)\ \dfrac{e^x-۲}{e^x-۱}$

۱۸) $y=tan^{-۱}\dfrac{x}{۲}$

$A)\ \dfrac{۴}{۴+x^۲}$ $B)\ \dfrac{۱}{۲\sqrt{۴-x^۲}}$ $C)\ \dfrac{۲}{\sqrt{۴-x^۲}}$

$D)\ \dfrac{۱}{۲+x^۲}$ $E)\ \dfrac{۲}{x^۲+۴}$

۱۹) $y=\ln(\sec x+\tan x)$

$A)\ \sec x$ $B)\ \dfrac{۱}{\sec x}$ $C)\ \tan x+\dfrac{sec^۲x}{\tan x}$

$D)\ \dfrac{۱}{\sec x+\tan x}$ $E)\ -\dfrac{۱}{\sec x+\tan x}$

۲۰) $y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$A)\ 0$ $B)\ ۱$ $C)\ \frac{۲}{(e^{x} + e^{-x})^{۲}}$ $D)\ \frac{۴}{(e^{x} + e^{-x})^{۲}}$ $E)\ \frac{۱}{e^{۲x} + ۲^{-۲x}}$

۲۱) $y = \ln\left(x\sqrt{x^{۲} + ۱}\right)$

$A)\ ۱ + \frac{x}{x^{۲} + ۱}$ $B)\ \frac{۱}{x\sqrt{x^{۲} + ۱}}$ $C)\ \frac{۲x^{۲} + ۱}{x\sqrt{x^{۲} + ۱}}$

$D)\ \frac{۲x^{۲} + ۱}{x(x^{۲} + ۱)}$ $E)$ هیچ کدام از اینها

پاسخ تست سری سوم

۱) C	۵) E	۹) D	۱۳) D	۱۷) C	۲۱) D
۲) A	۶) B	۱۰) C	۱۴) D	۱۸) E	
۳) B	۷) B	۱۱) A	۱۵) A	۱۹) A	
۴) B	۸) E	۱۲) B	۱۶) E	۲۰) D	

پاسخ تشریحی تست سری سوم

۱ـ با استفاده از قانون ضرب مشتق

$$\begin{aligned} y' &= (۴x + ۱)\left[۳(۱ - x)^{۲}(-۱)\right] + (۱ - x)^{۳} * ۴ \\ &= (۱ - x)^{۲}(-۱۲x - ۳ + ۴ - ۴x) \\ &= (۱ - x)^{۲}(۱ - ۱۶x) \end{aligned}$$

۲ ـ با استفاده ازقانون تقسیم مشتق

$$y' = \frac{(۳x + ۱)(-۱) - (۲ - x)(۳)}{(۳x + ۱)^{۲}} = \frac{-۷}{(۳x + ۱)^{۲}}$$

۳ ـ با استفاده از قنون توان مشتق

$$y' = \frac{۱}{۲}(۳ - ۲x)^{\frac{-۱}{۲}} * (-۲) = -\frac{۱}{\sqrt{۳ - ۲x}}$$

۴ ــ با استفاده از قنون توان مشتق و قاعده زنجیره ای

$$y' = (۲)(-۳)(۵x+۱)^{-۴}(۵) = -۶(۵x+۱)^{-۴}(۵) = -۳۰(۵x+۱)^{-۴}$$

ــ ۵

$$y' = ۳\left(\frac{۲}{۳}\right)x^{\frac{-۱}{۳}} - ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)x^{\frac{-۱}{۲}} = ۲x^{\frac{-۱}{۳}} - ۲x^{\frac{\cdot ۱}{۲}}$$

ــ ۶

$$(f+۲g)'(۳) = f'(۳) + ۲g'(۳) = ۴ + ۲(-۱) = ۲$$

ــ۷

$$(f * g)'(۲) = f(۲) * g'(۲) + g(۲)f'(۲) = ۵(-۲) + ۱(۳) = -۷$$

- ۸

$$\left(\frac{۱}{g}\right)'(۱) = (-۱) * \frac{۱}{[g(۱)]^{۲}} * g'(۱) = (-۱) * \frac{۱}{۳^{۲}}(-۳) = \frac{۱}{۳}$$

ــ ۹

$$(\sqrt{f})'(۳) = \frac{۱}{۲}[f(۳)]^{\frac{-۱}{۲}} * f'(۳) = \frac{۱}{۲}\left(۱۰^{\frac{-۱}{۲}}\right) * ۴ = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$$

۱۰

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0) * f'(0) - f(0) * g'(0)}{[g(0)]^{۲}} = \frac{۵(۱) - ۲(-۴)}{۵^{۲}} = \frac{۱۳}{۲۵}$$

ــ۱۱

$$M'(۱) = f'\left(g(۱)\right) * g'(۱) = f'(۳)g'(۱) = ۴(-۳) = -۱۲$$

ــ ۱۲

$$\left[f\left(x^{۳}\right)\right]' = f'\left(x^{۳}\right) * ۳x^{۲} \Longrightarrow P'(۱) = f'\left(۱^{۳}\right) * ۳ * ۱^{۲} = ۲ * ۳ = ۶$$

۱۳ـ

$$f\big(S(x)\big) = x \implies f'\big(S(x)\big) * S'(x) = ۱$$
$$S'(۳) = \frac{۱}{f'\Big(S(۳)\Big)} = \frac{۱}{f'\Big(f^{-۱}(۳)\Big)} = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴ـ

$$y = ۲\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۲x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}$$
$$y' = x^{\frac{-۱}{۲}} + \frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{۴x\sqrt{x}}$$

ـ ۱۵

$$y = \sqrt{x^۲ + ۲x - ۱} = \left(x^۲ + ۲x - ۱\right)^{\frac{۱}{۲}}$$
$$y' = \frac{۱}{۲}\left(x^۲ + ۲x - ۱\right)^{\frac{-۱}{۲}}\left[(۲x + ۲)\right]$$
$$= \frac{x + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x - ۱}} = \frac{x + ۱}{y}$$

ـ ۱۶

$$y' = \frac{\sqrt{۱ - x^۲} * ۱ - x * \frac{۱ - ۲x}{۲\sqrt{۱ - x^۲}}}{۱ - x^۲} = \frac{\frac{۱ - x^۲ + x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}}}{۱ - x^۲} = \frac{۱}{\left(۱ - x^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

پس هیچ کدام از پاسخ ها صحیح نیست.

ـ ۱۷

$$y = \ln e^x - \ln\left(e^x - ۱\right) = x - \ln\left(e^x - ۱\right)$$
$$y' = ۱ - \frac{e^x}{e^x - ۱} = \frac{e^x - ۱ - e^x}{e^x - ۱} = -\frac{۱}{e^x - ۱}$$

۱۸ ـ

$$y' = \frac{۱}{\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}} * \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{۲}\right) = \frac{\frac{۱}{۲} * \frac{d}{dx}(x)}{\frac{x^{۲}}{۴} + ۱} = \frac{۱}{۲\left(\frac{x^{۲}}{۴} + ۱\right)} = \frac{۲}{x^{۲} + ۴}$$

۱۹ ـ

$$y' = \frac{۱}{\tan x + \sec x} * \frac{d}{dx}(\tan x + \sec x)$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{d}{dx}(\sec x)}{\tan x + \sec x} = \frac{sec^{۲} x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x}$$

$$= \frac{\sec\ x(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} = \sec x$$

۲۰

$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^{۲}} = \frac{۴}{(e^x + e^{-x})^{۲}}$$

ـ۲۱

$$y' = \frac{۱}{x\sqrt{x^{۲} + ۱}} * \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^{۲} + ۱}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(x) * \sqrt{x^{۲} + ۱} + x * \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{۲} + ۱}\right)}{x\sqrt{x^{۲} + ۱}}$$

$$= \frac{۱\sqrt{x^{۲} + ۱} + \frac{۱}{۲}\left(x^{۲} + ۱\right)^{\frac{۱}{۲} - ۱} * \frac{d}{dx}\left(x^{۲} + ۱\right)x}{x\sqrt{x^{۲} + ۱}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^۲+۱} + \frac{\left(\frac{d}{dx}\left(x^۲\right) + \frac{d}{dx}(۱)\right)x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x\sqrt{x^۲+۱}}$$

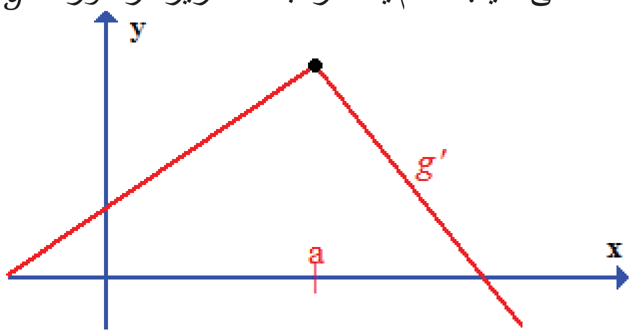
$$= \frac{\sqrt{x^۲+۱} + \frac{(۲x+0)x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^۲+۱} + \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}}{x\sqrt{x^۲+۱}} = \frac{۲x^۲+۱}{x^۳+x} = \frac{۲x^۲+۱}{x(x^۲+۱)}$$

تست سری چهارم

۱-

نمودار g' را در ذیل مشاهده می کنید. کدام یک از جملات زیر در مورد g در a صادق است؟



الف - g پیوسته است.

ب - g مشتق پذیر است.

ج - g صعودی است.

$A)$ فقط الف $B)$ فقط ج $C)$ الف و ج $D)$ ب و ج $E)$ الف و ب و ج

۲ - در یک مخزن مخروطی شکل آب با سرعت یکنواخت ریخته می شود. اگر $h(t)$ نمایانگرمیزان تغییر عمق آب باشد ، پس h

$A)$ ثابت است $B)$ تابع خطی و صعودی است $C)$ تابع خطی و نزولی است

$D)$ تابع غیر خطی و صعودی است $E)$ تابع غیر خطی و نزولی است

در سوال های ۹ — ۳ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

۳) $y = x^{۲} \sin\frac{۱}{x} \qquad x \neq 0$

$A)\ ۲x \sin\frac{۱}{x} - x^{۲} \cos\frac{۱}{x}$ $\qquad B)\ -\frac{۲}{x}\cos\frac{۱}{x}$ $\qquad C)\ ۲x\cos\frac{۱}{x}$

$D)\ ۲x \sin\frac{۱}{x} - \cos\frac{۱}{x}$ $\qquad E)\ -\cos\frac{۱}{x}$

۴) $y = \frac{۱}{۲\sin ۲x}$

$A)\ -\csc ۲x \cot ۲x$ $\qquad B)\ \frac{۱}{۴\cos ۲x}$ $\qquad C)\ -۴\csc ۲x\cot ۲x$

$D)\ \frac{\cos ۲x}{۲\sqrt{\sin ۲x}}$ $\qquad E)\ -csc^{۲}۲x$

۵) $y = e^{-x}\cos ۲x$

$A)\ -e^{-x}(\cos ۲x + ۲\sin ۲x)$ $\qquad B)\ e^{-x}(\sin ۲x - \cos ۲x)$ $\qquad C)\ ۲e^{-x}\sin ۲x$

$D)\ -e^{-x}(\cos ۲x + \sin ۲x)$ $\qquad E)\ -e^{-x}\sin$ ۲خ

۶) $y = sec^{۲}\sqrt{x}$

$A)\ \frac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\qquad B)\ \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\qquad C)\ ۲\sec\sqrt{x}\ tan^{۲}\sqrt{x}$

$D)\ \frac{sec^{۲}\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\qquad E)\ ۲\ sec^{۲}\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$

۷) $y = x\ ln^{۳} x$

$A)\ \frac{۳ln^{۲}x}{x}$ $\qquad B)\ ۳ln^{۲}x$ $\qquad C)\ ۳x\ ln^{۲}x + ln^{۳}x$

$D)\ ۳(\ln x + ۱)$ $\qquad E)$ هیچ کدام

۸) $y=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$

$A)\ -\frac{۴x}{(۱-x^۲)^۲}$ $B)\ \frac{۴x}{(۱-x^۲)^۲}$ $C)\ \frac{-۴x^۳}{(۱-x^۲)^۲}$

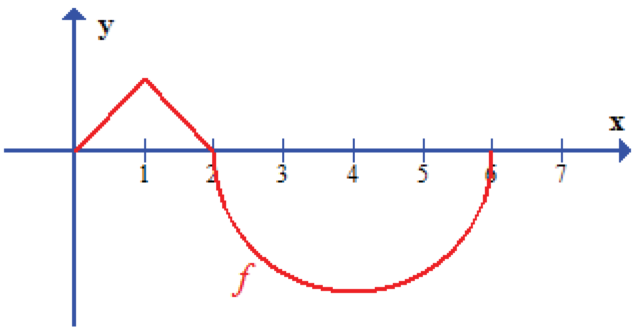
$D)\ \frac{۲x}{۱-x^۲}$ $E)\ \frac{۴}{۱-x^۲}$

۹) $y=sin^{-۱}x-\sqrt{۱-x^۲}$

$A)\ \frac{۱}{۲\sqrt{۱-x^۲}}$ $B)\ \frac{۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$ $C)\ \frac{۱+x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

$D)\ \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$ $E)\ \frac{۱}{\sqrt{۱+x}}$

نمودار زیر را برای سوال های ۱۲ـ۱۰ بکار ببرید. این نمودار شامل دو پاره خط و یک نیم دائره است.



۱۰) $f'(x)=0$ برای $x=?$

$A)$ ۱ $B)$ ۲ $c)$ ۴ $D)$ ۱ و ۴ $E)$ ۲ و ۶

۱۱- $f'(x)$ برای $x=$ ؟ وجود ندارد.

$A)$ ۱ $B)$ ۲ $C)$ ۱ و ۲ $D)$ ۲ و ۶ $E)$ ۱ و ۲ و ۶

۱۲) $f'(۵) = ؟$

$A)\ \frac{۱}{۲}$　$B)\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}$　$C)\ ۱$　$D)\ ۲$　$E)\ \sqrt{۳}$

۱۳ – در بازه $[-۵, ۵]$ چند نقطه وجود دارد که خط مماس با نمودار $y = x + \cos x$ موازی خط قاطع باشد ؟

$A)$ هیچ　$B)\ ۱$　$C)\ ۲$　$D)\ ۳$　$E)$ بیش از سه

۱۴ – با استفاده از جدول زیر ، مقدار $f'(۲)$ را تخمین بزنید.

x	1.92	1.94	1.96	1.98	2.00
$f(x)$	6.00	5.00	4.40	4.10	4.00

$A) - 0.10$　$B) - 0.20$　$C) - 5$　$D) - 10$　$E) - 25$

۱۵ – اگر $x = t^{۲} - ۱$ و $y = t^{۴} - ۲t^{۳}$ باشد ، پس وقتی که $t = ۱$ است ، مقدار $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ چقدر است؟

$A)\ ۱$　$B) - ۱$　$C)\ 0$　$D)\ ۳$　$E)\ \frac{۱}{۲}$

۱۶ – اگر $f(x) = x^{۴} - ۴x^{۳} + ۴x^{۲} - ۱$ باشد ، پس مجموعه مقادیر x که مشتق تابع را صفر می کنند، کدامند؟

$A)\ \{۱, ۲\}$　$B)\ \{0, -۱, -۲\}$　$C)\ \{-۱, ۲\}$　$D)\ \{0\}$　$E)\ \{0, ۱, ۲\}$

۱۷ – اگر $f(x) = ۱۶\sqrt{x}$ باشد ، پس $f''(۴)$ مساوی است با ...

$A) - ۳۲$　$B) - ۱۶$　$C) - ۴$　$D) - ۲$　$E) - \frac{۱}{۲}$

۱۸ – اگر $f(x) = \ln x^{۳}$ باشد ، پس $f''(۳)$ مساوی است با ...

$A) - \frac{۱}{۳}$　$B) - ۱$　$C) - ۳$　$D)\ ۱$　$E)$ هیچ کدام

۱۹– اگر یک نقطه روی نمودار $x^{۲} + y^{۲} = ۲۵$ حرکت کند ، پس در نقطه $(0,۵)$ مشتق مرتبه دوم یعنی $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ مساوی است با …

$A)\ 0$ $B)\ \frac{۱}{۵}$ $C) -۵$ $D) -\frac{۱}{۵}$ $E)$ وجود ندارد

۲۰

اگر $y = a\sin ct + b\cos ct$ باشد و a, b, c اعداد ثابت ، پس $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ مساوی است با …

$A)\ ac^{۲}(\sin t + \cos t)$ $B) -c^{۲}y$ $C) -ay$

$D) -y$ $E)\ a^{۲}c^{۲}\sin \mathrm{ct} - b^{۲}c^{۲}\cos\ ct$

پاسخ تست سری چهارم

۱) E	۶) D	۱۱) E	۱۶) E
۲) E	۷) E	۱۲) B	۱۷) E
۳) D	۸) B	۱۳) D	۱۸) A
۴) A	۹) C	۱۴) C	۱۹) D
۵) A	۱۰) C	۱۵) E	۲۰) B

پاسخ تشریحی تست سری چهارم

۱ – چون $g'(a)$ وجود دارد ، g مشتق پذیر و پیوسته است ؛ $g'(a) > 0$ است پس صعودی است.

۲ – چون هنگامی که قیف پر می شود ، سطح آب آهسته تر بالا می رود ، پس به نظر می رسد پاسخ C و یا E صحیح باشد ، به علاوه ، چون در هر لحظه آن قسمت از قیف که آب در آن موجود است ، خود شکل یک مخروط دارد و لذا حجم آن بستگی به مکعب عمق آب دارد. پس میزان تغییر عمق آب یعنی مشتق ، خطی نیست. لذا پاسخ E صحیح است.

۳ –

$$\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{۱}{x}\right)x^{۲}\right] = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right] * x^{۲} + \sin\left(\frac{۱}{x}\right) * \frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{۱}{x}\right) * \frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{x}\right) * x^{۲} + ۲x\sin\left(\frac{۱}{x}\right)$$

$$= -\frac{\frac{d}{dx}(x)}{x^{۲}}\cos\left(\frac{۱}{x}\right) * x^{۲} + ۲x\sin\left(\frac{۱}{x}\right)$$
$$= ۲x\sin\left(\frac{۱}{x}\right) - \cos\left(\frac{۱}{x}\right)$$

۴ –

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{۱}{۲}\csc(۲x)\right] = \frac{۱}{۲}(-\cot(۲x))\csc(۲x) * \frac{d}{dx}(۲x)$$
$$= -\frac{۲ * \frac{d}{dx}(x) * \cot(۲x)\csc(۲x)}{۲} = -\cot(۲x)\csc(۲x)$$

۵ –

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}\cos(۲x)] = \frac{d}{dx}(e^{-x}) * \cos(۲x) + e^{-x} * \frac{d}{dx}(\cos(۲x))$$
$$= e^{-x} * \frac{d}{dx}(-x) * \cos(۲x) + (-\sin(۲x)) * \frac{d}{dx}(۲x) * e^{-x}$$
$$= \left(-\frac{d}{dx}(x)\right)e^{-x}\cos(۲x) - ۲ * \frac{d}{dx}(x)e^{-x}\sin(۲x)$$
$$= -e^{-x}\sin(۲x) - e^{-x}\cos(۲x) = -e^{-x}(۲\sin(۲x) + \cos(۲x))$$

۶ –

$$\frac{d}{dx}\left(sec^{۲}\sqrt{x}\right) = ۲\sec(\sqrt{x}) * \frac{d}{dx}(\sec\sqrt{x})$$
$$= ۲\sec(\sqrt{x}) * \tan(\sqrt{x}) * \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) * \sec(\sqrt{x})$$
$$= ۲ * \frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱}sec^{۲}(\sqrt{x})\tan(\sqrt{x}) = \frac{sec^{۲}(\sqrt{x}\tan(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}$$

۷ – هیچ کدام از پاسخ های داده شده صحیح نیست .زیرا

$$\frac{d}{dx}\left[xln^{۳}(x)\right] = \frac{d}{dx}(x) * ln^{۳}(x) + x * \frac{d}{dx}\left(ln^{۳}(x)\right)$$
$$= ln^{۳}(x) + ۳ln^{۲}(x) * \frac{d}{dx}(\ln x) * x$$

$$= ln^{۳}(x) + ۳\frac{۱}{x}xln^{۲}(x) = ln^{۳}(x) + ۳ln^{۲}(x)$$

۸ـ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{۱ + x^{۲}}{۱ - x^{۲}}\right)$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(x^{۲} + ۱\right) * \left(۱ - x^{۲}\right) - \left(x^{۲} + ۱\right) * \frac{d}{dx}\left(۱ - x^{۲}\right)}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}}$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right) - \frac{d}{dx}(۱)\right)\left(۱ - x^{۲}\right) - \left(\frac{d}{dx}(۱) - \frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right)\right)\left(x^{۲} + ۱\right)}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}}$$

$$= \frac{(۲x + 0)\left(۱ - x^{۲}\right) - (0 - ۲x)\left(x^{۲} + ۱\right)}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}}$$

$$= \frac{۲x\left(x^{۲} + ۱\right) + ۲x\left(۱ - x^{۲}\right)}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}} = \frac{۲\left(x^{۲} + ۱ + ۱ - x^{۲}\right)}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}} = \frac{۴x}{\left(۱ - x^{۲}\right)^{۲}}$$

۹ـ

$$\frac{dx}{dx}\left[\arcsin(x) - \sqrt{۱ - x^{۲}}\right] = \frac{d}{dx}(\arcsin(x)) - \frac{d}{dx}\sqrt{۱ - x^{۲}}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} - \frac{۱}{۲}\left(۱ - x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}} * \frac{d}{dx}\left(۱ - x^{۲}\right)$$

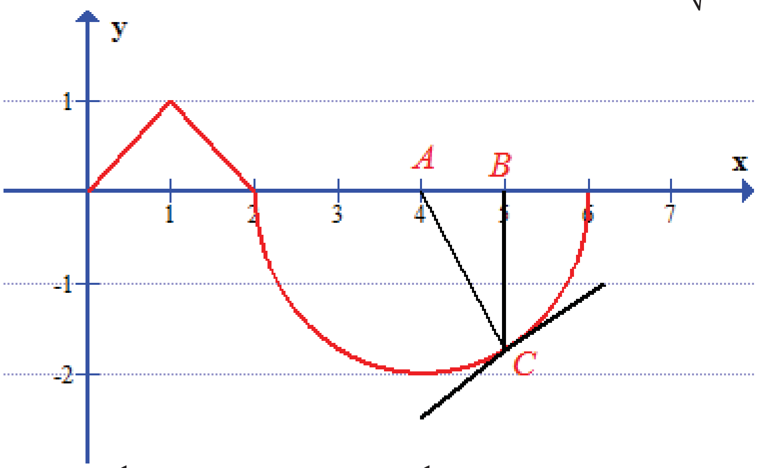
$$= \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} - \frac{\frac{d}{dx}(۱) - \frac{d}{dx}\left(x^{۲}\right)}{۲\sqrt{۱ - x^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} - \frac{0 - ۲x}{۲\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} + \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} = \frac{x + ۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

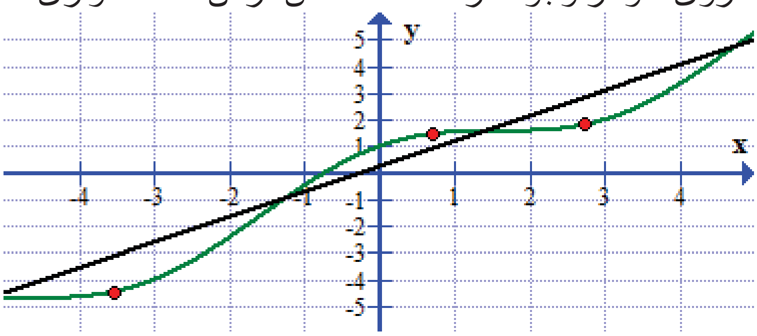
۱۰
تنها خط مماس افقی در $x = ۴$ است. توجه دارید که $f'(۱)$ وجود ندارد ، زیرا گوشه است.

۱۱ - نمودار در $x = ۱$ و $x = ۲$ گوشه است و خط مماس در $x = ۶$ عمودی است.

۱۲ – مثلث ABC را ملاحظه کنید. $AB = ۱$ ، شعاع $AC = ۲$ ، و $BC = \sqrt{۳}$ و شیب خط AC عبارت است از $m = -\sqrt{۳}$ و خط مماس بر شعاع نیم دائره درنقطه $\left(۵, -\sqrt{۳}\right)$ ، عمود است. به عبارت دیگر $f'(۵) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است.



۱۳- نمودار $y = x + \cos x$ در ذیل با رنگ سبز و خط قاطع به رنگ سیاه مشاهده می کنید. به نظر می رسد سه نقطه روی نمودار وجود دارد که خط مماس در آن نقاط ، موازی خط قاطع باشند.



– ۱۴

$$f'(2) \approx \frac{f(2) - f(1.98)}{2 - 1.98} = \frac{4.00 - 4.10}{.0.02}$$

۱۵ -

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۴t^{۳}-۶t^{۲}}{۲t}=۲t^{۲}-۳t، (t\neq 0);\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{۴t-۳}{۲t}=\frac{۴(۱)-۳}{۲(۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶ ــ

$$f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x^{۲}+۸x=۴x(x-۱)(x-۲)$$

پس اگر اعداد ۲ ,۱ ,0 را در معادله بالا قرار دهیم ، حاصل ، صفر می شود.

۱۷ ــ

$$f'(x)=۸x^{\frac{-۱}{۲}},f''(x)=-۴x^{\frac{-۳}{۲}}=-\frac{۴}{x^{\frac{۳}{۲}}};f''(۴)=-\frac{۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

ــ۱۸

$$f'(x)=\frac{۳}{x};f''(x)=-\frac{۳}{x^{۲}};f''(۳)=-\frac{۳}{۹}=-\frac{۱}{۳}$$

ــ۱۹

$$۲x+۲yy'=0;y'=-\frac{x}{y};y''=\frac{y-xy'}{y^{۲}}$$

در نقطه $(0,۵)$ داریم.

$$y''=-\frac{۵-0}{۲۵}=-\frac{۱}{۵}$$

۲۰

$$y'=ac\cos ct-bc\sin ct;y''=-ac^{۲}\sin ct-bc^{۲}\cos ct$$
$$y''=-c^{۲}(asinct+bcos\ ct)=-c^{۲}y$$

Abolish	محو کردن
About	در هر دو طرف - اطراف
Abscissa	طول
Absolute Value	قدر مطلق
Accumulated Value	مقدار جمع شده - مقدار ذخیره شده - مقدار افزوده شده
Accuracy	صحت - دقت
Add	جمع کردن - اضافه کردن
addend	عدد افزوده شده - عدد مضاعف
Additive Identity	عدد خنثی در جمع
Additive Inverse	قرینه - مخالف
Admit	قبول کردن - پذیرفتن
Algebraic Expression	عبارت جبری
Algebraically	به زبان جبری
Algorithm	الگوریتم -هر شیوه علمی برای حل مسائل
Align	تنظیم کردن یا شدن
Along	در امتداد یا در طول
Alternate	تناوب - یک درمیانی
Altitude	ارتفاع - فراز - بلندی
Analyze	تجزیه و تحلیل کردن
Angle Measure	اندازه زاویه
Approach	نزدیک شدن
Approximate	تخمین زدن
Arbitrary	اختیاری
Arch	طاق
Architecture	معماری
Area	مساحت
Arithmetic Sequence	دنباله حسابی
Arrangement	ارایش - قرار دادن
Array	آرایه - آرایش منظم شماره ها در ردیف یا ستون است
Assert	تصریح کردن - تآیید کردن
Assign	تخصیص دادن
Assign	تعین کردن - اختصاص دادن
Assign	تعیین کردن تخصیص دادن
Associative Property	خاصیت شرکت پذیری
Astronomy	ستاره شناسی
Asymptote	خط مجانب - تانژانت منحنی در بینهایت
At Least	حد اقل

At Most	حد اکثر
Average	معدل - میانگین
Axes	محور ها
Axis	محور
Bar Graph	نمودار میله ای
Base	قاعده
Base	پایه
Basic	پایه - اصلی - ساده
Basic	بنیادی
Behavior	عمل کردن - رفتار کردن
Between	ما بین
Binomial	دو جمله ای
Binomial Coefficient	ضریب دو جمله ای
Bisection Method	روش نصف کردن بازه
Boundary Line	خط مرزی
Bounded	کران دار
Bounded Above	از طرف بالا کران دار
Bounded Below	از طرف پائین کران دار
Braces	آکولاد ها { }
Brackets	کروشه ها [ ]
Break Even	بی سود و زیان شدن
Calculate	محاسبه - حساب کردن
Calculus	حسابان
Calculus	ریاضیات جامع - حسابان
Cancel	حذف کردن
Carbon Dating	تعیین قدمت اجسام کربن دار
Cartesian Coordinate System	محور های مختصات
Center	مرکز
Central Angle	زاویه مرکزی
Circuit	مدار
Circumference	محیط (دایره)
Closed Interval	بازه بسته
Coefficient	ضریب
Coincide	منطبق بودن
Coincide	منطبق بودن
Coincident	منطبق
Column	ستون

Combination	ترکیب
Combine	با هم پیوستن - توأم کردن - تلفیق کردن
Combine	ادغام کردن - تلفیق کردن - یکی کردن
Combine	تلفیق کردن
Combined	ترکیبی - مرکب
Comet	ستاره دنباله دار
Common	مشترک
Common	مشترک
Common Ratio	نسبت مشترک - خارج قسمت مشترک
Commutative Property	خاصیت جابجائی
Complement	متمم - مکمل
Complex Fraction	کسر مرکب
Complex Numbers	اعداد مرکب
Complex Rational Expression	عبارت گویای مرکب
Complicated	پیچیده - بغرنج
Component	مؤلفه - بخش - جز - سلزنده
Component	مؤلفه
Composed with	ترکیب شده با
Composite Function	تابع مرکب - تابع ترکیبی
Compound	مرکب - بهره پول و بهره متعلق به بهره آن را حساب کردن
Compound Interest	ربح مرکب
Compression	فشردگی - تراکم
Compute	محاسبه کردن - حساب کردن
Conic Sections	مقاطع مخروطی
Conjugate	مزدوج
Connection	رابطه - پیوند
Consecutive	متوالی - پشت سر هم
Consistent	بی تنلقض - سازگار
Constant	عدد ثابت - مقدار ثابت
Constant Term	جمله ثابت
Construct	ساختن
Contain	شامل بودن - دارا بودن
Continuity	پیوستگی
Continuous	پیوسته
Contradiction	تناقض
Convergent	همگرا
Coordinate	مختصات

Coordinate Plane	صفحه مختصات
Correspondence	مطابقت
Corresponding	هم نظیر - متناظر
Cross Product	طرفین وسطین کردن
Cube	مکعب
Cube	مکعب
Cube Root	ریشه سوم
Cubed	توان سوم
Curve	منحنی
Cylinder	استوانه
Dashed Line	خط چین
Deal with	پرداختن به
Decay	فرو کاست (مواد رادیو اکتیو) - کاهش
Decimal Places	ارقام اعشاری
Decompose	تجزیه کردن
Decrease	کم شدن - نزول کردن
Deduce	استنتاج کردن - نتیجه گرفتن
Define	تعریف کردن - معنی کردن
Define	مشخص کردن
Degree	درجه
Denominator	مخرج
Dependent	وابسته
Dependent Variable	متغیر وابسته
Derivative	مشتق
Derive	استنتاج کردن - اشتقاق یافتن - استنباط کردن
Descending Order	به ترتیب نزولی
Design	طراحی
Designate	مشخص کردن
Determinant	مبین - دیترمینانت
Determine	تعیین کردن - حکم دادن
Develop	بسط دادن
Diagonal	قطر - مورب - اریب
Diagram	نمودار
Diameter	قطر
Die	طاس تخته نرد
Differentiability	دیفرانسیلی
Differentiable	مشتق پذیر - قابل مشتق گیری

Discontinuous	نا پیوسته - گسسته
Discriminant	مشخص کننده - مجزا کننده
Discriminate	مشخص کردن - مجزا کردن
Disjoint	مجزا
Distance	فاصله - مسافت
Distinct	متفاوت - مجزا - متمایز
Distributive Property	خاصیت توزیعی
Divergent	واگرا
Diverse	متنوع - گوناگون
Divide	تقسیم کردن
Divide and Conquer	جدائی انداز و تسخیر کن
Dividend	مقسوم - بخشی
Divisor	مقسوم علیه - بخشیاب
Domain	دامنه
Double	مضاعف
Downward	به طرف پائین
Due	سر رسید - موعد پرداخت
Element	عضو - عنصر
Eliminate	حذف کردن
Elimination	حذف
Ellipse	بیضی
Empty Set	مجموعه تهی
End Behavior	وضع انتهائی
Endpoint	نقطه انتهائی
Engage	پرداختن به
Equality	تساوی
Equally Likely Outcomes	پیش آمد های هم شانس - پیش آمد های با شانس مساوی
Equation	معادله - تساوی
Equator	خط استوا
Equilateral Triangle	مثلث متساوی الاضلاع
Equivalent	معادل - هم ارز - متشابه
Equivalent Equations	معادله های هم ارز - معادله های معادل
Establish	ثابت کردن - محقق کردن
Evaluate	ارزیابی کردن - مقدار عددی پیدا کردن
Even	زوج
Event	اتفاق
Exclude	در نظر نگرفتن

Exclusive	صرف - تنها - محض
Expand	پسط دادن
Expand	بسط دادن - گستردن
Explicitly	بطور صریح بیان کردن
Exponent	توان
Exponential Equation	معادله مجهول القوه
Exponential Expression	عبارت توان دار - توان
Exponential Function	تابع مجهول القوه
Exponential Probability	احتمال مجهول القوه
Extraneous	نا مربوط
Factor	عامل
Factor	عامل - فاکتور - عامل مشترک - فاکتور گرفتن
Factorization	فاکور گیری
Fair	سالم - بی عیب
False	غلط
Figure	شکل - تصویر
Finance	مالی - امور مالی
Finite Sum	جمع تعداد محدودی
Fit	جور کردن
Flatten	پهن شدن - صاف شدن
Foci	کانون ها
Focus	کانون
Formula	فرمول
Fraction	کسر
Function	تابع
Fundamental	اساسی
Future Value	ارزش آینده
Gear	چرخ دنده
General Term	جمله عمومی
Geometric	هندسی
Geometric Sequence	دنباله هندسی
Globe	کره زمین
Golden Ratio	نسبت طلائی - عدد طلائی
Graph	نمودار - نمایش هندسی
Greater Than	بزرگ تر از
Greatest Lower Bound	بزرگ ترین کران پائین
Group	گروه - گروه بندی کردن - دسته بندی کردن

Growth	رشد - رویش
Half-life	نیمه عمر (یک ماده رادیو اکتیو)
Half-Planes	نیم صفحه ها
Head	سر
Height	ارتفاع
Hemisphere	نیم کره
Horizontal	افقی
Horizontal Shift	جابجائی افقی
Hyperbola	هذ لولی
Identical	کاملا همانند
Identity	این همانی - خنثی
Image	تصویر - انعکاس - باز تاب
Imaginary Unit	واحد تصوری - واحد موهومی
Implicitly	بطور ضمنی بیان کردن
Improper	نا جور - غیر حقیقی - ناسره
In Term of	بر حسب
Include	به حساب آوردن
Included	گنجانده شده - شامل شده - به حساب آمده
Inclusive	شامل - به حساب امده
Inconsistent	متناقص
Increase	زیاد شدن - صعود کردن
Independent Variable	متغیر مستقل
Index	نما - شاخص
Individual	شخصی
Individual Retirement Account	حساب باز نشستگی شخصی
Inequality	نا معادله - نا مساوی
Infinite	بی نهایت
Input	ورودی
Instantaneous Velocity	سرعت لحظه ای
Integers	اعداد صحیح
Intensity	شدت - میزان - مقدار
Intercept	قطع کردن - میان بر - تقاطع
Interest	بهره - سود
Interest Compounded Monthly	بهره مرکب ماهانه
Interest Compounded Quarterly	بهره مرکب سه ماهه
Interest Compounded Semiannually	بهره مرکب شش ماهه
Interest Compounded Yearly	بهره مرکب سالانه

Intermediate Value	مقدار میانی
Interpret	تفسیر کردن - توضیح دادن
Interpretation	تفسیر
Intersection	اشتراک
Intersection of Sets	اشتراک مجموعه ها
Intervals	بازه ها - میانین - فاصله
Introduction	مقدمه
Inverse Function	تابع معکوس
Invest	سرمایه گذاری کردن
Irrational Numbers	اعداد گنگ
Is Equal to	مساوی است با
Is not Equal to	مساوی نیست با
Isosceles Triangle	مثلث متساوی الساقین
Joint	مشترک
Launch	پرتاب کردن
LCD	کوچک ترین مخرج مشترک
Least	کوچک ترین
Least Upper Bound	کوچک ترین کران بالا
Left-Hand Limit	حد سمت چپ
Lemma	اصل موضوع - گزاره ای که درست فرض میشود
Length	طول
Less Than	کوچک تر از
Like Radicals	رادیکال های متشابه
Like Terms	جمله های متشابه
Likelihood	امکان - احتمال
Limit	حد
Line Segment	پاره خط
Linear	خطی
Linear Equations	معادله های خطی
Linear Equations in one Variable	معادله های خطی یک مجهولی
Linear Programming	برنامه ریزی خطی
Local Maxima	ما گزیمم محلی
Local Minima	مینیمم محلی
Locate	مشخص کردن - تعیین کردن - نشان دادن
Location	مکان هندسی
Logarithmic Function	تابع لگاریتمی
Long Period	پروسه طولانی - دوره طولانی

Lower Bound	پائین کران
Lowest Term	ساده ترین شکل (کسر)
Major	اصلی
Marginal Cost	هزینه نهائی
Marginal Revenue	درامد نهائی
Matrices	متریس ها جمع متریکس
Matrix	متریکس
Midpoint	نقطه میانی
Minor	فرعی
Model	انگاره ـ مدل
Model	الگو ـ نمونه ـ انگاره
Monomial	یک جمله ای
Multiple	مضرب
Multiple	ضریب
Multiplicative Identity	عدد خنثی در ضرب
Multiplicative Inverse	عدد وارونه در ضرب
Multiply	ضرب کردن
Mutually Exclusive Events	اتفاق های ناسازگار
Natural Numbers	اعداد طبیعی
Negation	نفی ـ انکار
Negative	منفی
Negative Square Root	ریشه دوم منفی
No Less Than	نه کمتر از
No More Than	نه بیشتر از
None Empty	نا تهی
Nonlinear	غیر خطی
Nonzero	غیر از صفر ـ بجز صفر
Normal Line	خط قائم بر منحنی (در نقطه مماس)
Notation	نماد
nth Root	ریشه انم
Number Line	محور اعداد
Oblique	مورب
Observation	مشاهده علمی
Odd	فرد (مانند عدد فرد)
One-Sided	یک طرفه
One-to-one Function	تابع یک به یک
Open Interval	بازه باز

Operations	انجام عملیات (جمع - تفریق - ضرب - تقسیم)
Operations	عملیات
Opposite	قرینه - مخالف
Orbit	چرخیدن - دور زدن
Orbit	مدار - دور زدن - در مدار چرخیدن
Order	ترتیب
Ordered Pair	دو گانه مرتب
Ordered Triple	سه تائی مرتب
Ordinate	عرض
Origin	مبدأ
Outcome	نتیجه - پیامد - بازده
Output	خروجی
Overlap	تداخل کردن - ری هم افتادن
Pair	زوج - جفت
Pane	شیشه - جام
Parabola	سهمی
Parallel	موازی
Parentheses	پرانتز ها ( )
Pattern	الگو - نمونه - طرح
Payment Period	دوره پرداخت
Pendulum	پاندول
Perfect Square	مربع کامل
Perimeter	پیرامون - محیط
Perimeter	محیط
Period	دوره - دوره تناوب
Permutation	جایگشت
Phenomena	پدیده ها
Phenomena	پدیده ها
Phenomenon	پدیده
Phenomenon	پدیده
Piecewise-defined function	تابع چند ضابطه ای
Plane	صفحه
Planet	سیاره
Plot	نشان دادن ی تعیین کردن
Point of Intersection	نقطه تقاطع
Point of Tangency	نقطه مماس
Polynomial	چند جمله ای

Portion	قسمت
Positive	مثبت
Positive Square Root	ریشه دوم مثبت
Power	توان در توان
Precise	دقیق
Prime Polynomial	چند جمله ای اول (غیر قابل فاکتور گیری)
Principal	سرمایه
Principal Square Root	ریشه دوم مثبت
Probability	احتمال
Probability Model	مدل احتمال
Problem	مسآله
Procedure	روش - اصلوب
Process	عمل - جریان - مرحله
Projectile	پرتاب کردنی - پرتابی
Proper	حقیقی - سره - محض
Properties	خواص
Property	خاصیت - خصوصیت
Property	خصوصیت - خاصیت
Punch	بین دو انگشت قرار دادن - نیشگون گرفتن
Quadrant	ربع صفحه - ربع دایره
Quadratic Equation	معادله درجه دو
Quadrilateral	چهار ضلعی
Quantity	کمیت
Quotient	خارج قسمت
Quotient	خارج قسمت - بهره
Radical	راد یکال
Radicand	عدد زیر راد یکال
Radius	شعاع (دایره)
Random	تصادفی
Range	برد
Rate	نرخ - میزان - حد متوسط - سرعت متوسط
Rate	نسبت - میزان - نرخ - مقدار
Ratio	نسبت
Ratio	نسبت - خارج قسمت
Rational Exponent	توان کسری - توان گویا
Rational Numbers	اعداد گویا
Rationalize	گویا کردن

Rationalizing the Denominator	گویا کردن مخرج کسر
Real Numbers	اعداد حقیقی
Reasonable	منطقی
Reciprocal	وارونه - معکوس
Rectangle	مستطیل
Rectangular Coordinate System	محورهای مختصات
Recursive	باز گشتی
Reduce	ساده کردن
Reference	ارجاع - رجوع - مراجعه
Reflection	انعکاس
Reflector	منعکس کننده
Region	بخش - منطقه
Regression	انعکاس - رگراسیون
Regular Pattern	الگوی منظم
Related	مربوطه
Relation	رابطه
Remainder	باقیمانده
Remarkable	قابل توجه
Represent	نشان دادن - مجسم کردن - بجای چیزی بکار رفتن
Resistance	مقاومت
Resistor	مقاوم
Restricted	محدود شده - کنترل شده
Reverse	عکس - معکوس - وارونه - ضد
Review	دوره کردن - مرور کردن
Right-Hand Limit	حد سمت راست
Rise	بالا رفتن - صعود کردن
Roll Die	طاس ریختن
Root	ریشه
Root	ریشه
Roster Form	فهرست وار (برای مشخص کردن مجموعه)
Rotate	بر محور خود چرخیدن
Row	ردیف
Rule	قاعده
Sample Space	فضای نمونه
Sandwich	ساندویچ
Satellite	ماهواره
Satisfy	شرائط یا الزامات چیزی را برآوردن

Scatter	پراکنده
Scatter Diagram	نمودار پراکندگی
Scientific Notation	عدد نویسی علمی - نماد علمی
Secant	خط قاطع - سکانت
Second Degree Equation	معادله درجه دوم
Section	بخش - قسمت
Sector	قطاع دایره
Sequence	دنباله
Set	مجموعه
Set Builder Notation	توصیف مجموعه (برای مشخص کردن مجموعه)
Sharp Corner	نقطه مماس
Shift	تغیر مکان دادن - جا بجا شدن
Side	ضلع
Similar	متشابه
Simple Interest	ربح ساده
Simplify	ساده کردن
Situation	موقعیت
Slant	اریب - کج - یک وری
Slope	شیب - شتاب
Slope-Intercept Form	شکل شیب-تقاطع - شکل شیب-برخوردگاه
Smooth Curve	منحنی یک دست - منحنی صاف
Solid	جامد - سه بعدی
Solid Line	خط کامل
Solution	حل - راه حل - جواب
Solution Region	منطقه جواب
Solve	حل کردن
Space	فضا
Special	مخصوص
Special Products	اتحاد های مهم - حاصل ضرب های مخصوص
Specified	مشخص - معین - معلوم
Specify	مشخص کردن
Sphere	کره
Square	مربع
Square	مربع
Square Root	ریشه دوم - جذر
Square Root Function	تابع جذری - تابع ریشه دوم
Squeeze	فشردن - چلاندن

Statement	بیان - اظهار - بیان کردن
Steepness	سرازیری - سراشیبی
Step Function	تابع پلکانی
Straight Angle	زاویه نیم صفحه که مساوی صد و هشتاد درجه است
Stretch	کش آمدن - کشیده شدن
Sub Set	زیر مجموعه
Subscripted	زیر نویس دار
Substitution	جانشینی - جای گزین کردن
Subtract	تفریق کردن - کسر کردن
Successive	پیا پی - بعدی - پشت سر هم - متوالی
Sum	جمع - افزانه
Support	نگهداشتن
Surface Area	سطح جانبی – رویه جانبی
Survey	بررسی - مطالعه
Swing	نوسان - حرکت پاندولی - حرکت تاب
Symbol	نماد
Symmetric	هم اندازه - متقارن - قرینه
Symmetry	تقارن
System	دستگاه
Tail	دم
Tangent Line	خط مماس
Technique	روش - تکنیک
Term	اصطلاح - کلمه - جمله
Test Point	نقطه آزمایش
The Same Number	یک عدد - همان عدد
Theorem	قضیه
Three Dimensional	سه بعدی
Tilt	کج شدن - کج کردن - کجی - سرازیری
Time	زمان - وقت - مدت
Time Value of Money	ارزش زمانی پول
Toss	شیر یا خط کردن
Toss	بالا انداختن مانند شیر یا خط کردن
Toss a Coin	شیر یا خط کردن
Transformation	تبدیل - تغیر
Trapezoid	ذوزنقه
Trigonometric Identities	همانی های مثلثاتی
Trinomial	سه جمله ای

True	صحیح
Turning Point	نقطه عطف
Two Dimensional	دو بعدی
Unbounded	نا محدود - لا یتناهی
Undefined	نا معین
Uninhibited Decay	فرو کاست نا محدود
Uninhibited Growth	رشد نا محدود
Union	اجتماع
Union of Sets	اجتماع مجموعه ها
Unique	منحصربه فرد یکتا - یگانه
Uniqueness	منحصر به فرد بودن
Unit	واحد
Universal	جامع
Upper Bound	بالا کران
Upward	به طرف بالا
Utility	وسیله - ابزار
Value	مقدار - کمیت -قدر
Variable	متغیر
Variation	وردش - تغییر - واریانس
Vault	گنبد
Velocity	سرعت
Verify	درستی چیزی را ثابت کردن
Vertex	منحنی یک دست - منحنی صاف
Vertical	عمودی - قائم
Vertical	عمودی
Vertical Shift	جابجائی عمودی
Voltage	ولتاژ
Volume	حجم
Weight	وزن
Whole	تمام
Whole Numbers	اعداد حسابی
Width	عرض
With Respect to	نسبت به
x-intercept	محل بر خورد نمودار با محور اکس
y-intercept	محل برخوردنمودار با محور وای
Zero Factor Property	خاصیت عامل صفر
Zero of a Polynomial	صفر یک چند جمله ای