دانشگاه پیام نور

تاریخ و فلسفه ریاضی

(رشتهٔ ریاضی)

دکتر خدیجه احمدی‌آملی　　دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

فهرست

پیشگفتار	**نه**
مقدمه	**یازده**
فصل اول. نمادها و دستگاه‌های اولیه اعداد	**۱**
۱-۱ شمارش ابتدایی	۲
۱-۱-۱ درک اعداد	۲
۱-۱-۲ شکاف‌ها به‌عنوان علائم چوبخطی	۴
۱-۱-۳ کیپوس پرویی: گره‌ها در حکم اعداد	۷
۱-۲ ثبت اعداد مصری و یونانی	۱۱
۱-۲-۱ نمایش تصویری اعداد (خط هیروگلیف)	۱۱
۱-۲-۲ شمارش مقدس مصریان	۱۵
۱-۲-۳ دستگاه شمارش الفبایی یونانی	۱۸
۱-۳ مسائل	۲۰
۱-۴ ثبت عددی بابلیان	۲۴
۱-۴-۱ الفبای خط میخی بابلیان	۲۴
۱-۴-۲ دستگاه شمارش ارزش مکانی بابلیان	۲۶
۱-۵ مسائل	۳۱
فصل دوم. ریاضیات در تمدن‌های نخستین	**۳۳**
۲-۱ پاپیروس رایند	۳۴
۲-۱-۱ پاپیروس ریاضیات مصری	۳۴
۲-۲ حساب مصری	۳۶
۲-۲-۱ ضرب مصری باستان	۳۶
۲-۲-۲ جدول کسر واحد	۴۰
۲-۳ چهار مسأله از پاپیروس رایند	۴۳
۲-۳-۱ روش جاگذاری کاذب	۴۳
۲-۳-۲ یک مسأله کنجکاوانه	۴۶
۲-۴ مسائل	۴۹

۲–۵ هندسه مصری ۵۱
۲–۵–۱ تخمین مساحت دایره ۵۱
۲–۵–۲ حجم هرم بریده ۵۴
۲–۵–۳ حدس و گمان‌ها در مورد هرم بزرگ ۵۵
۲–۶ مسائل ۵۹
۲–۷ ریاضیات بابلی ۶۱
۲–۷–۱ برخورد بابلیان با معادله درجه دوم ۶۲
۲–۸ مسائل ۶۹
۲–۹ کاربرد بابلیان از قضیه فیثاغورس ۷۱
۲–۱۰ مسائل ۷۲

فصل سوم. آغاز ریاضیات یونانی ۷۵
۳–۱ یافته‌های هندسی تالس ۷۶
۳–۱–۱ یونان و منطقه اژه ۷۶
۳–۱–۲ طلوع هندسه اثباتی: تالس میلتوس ۷۸
۳–۱–۳ محاسبات با استفاده از هندسه ۸۰
۳–۲ ریاضیات فیثاغورسی ۸۲
۳–۲–۱ فیثاغورس و پیروانش ۸۲
۳–۳ مسأله فیثاغورسی ۸۳
۳–۳–۱ اثبات‌های هندسی قضیه فیثاغورس ۸۳
۳–۳–۲ راه‌حل‌های اولیه معادله فیثاغورس ۸۴
۳–۴ مسائل ۸۷
۳–۵ کشف اعداد گنگ و اولین بحران مبانی ریاضیات ۸۹
۳–۶ مسائل ۹۶
۳–۷ سه مسأله ساختاری دنیای باستان ۹۶
۳–۷–۱ بقراط و تربیع دایره ۹۶
۳–۷–۲ تضعیف مکعب ۱۰۰
۳–۷–۳ تثلیث یک زاویه ۱۰۱
۳–۸ مسائل ۱۰۲

فصل چهارم. مکتب اسکندریه و اقلیدس ۱۰۷
۴–۱ اقلیدس و عناصر ۱۰۸
۴–۱–۱ مرکز فراگیری: موزه ۱۰۸
۴–۱–۲ زندگی و مکتوبات اقلیدس ۱۰۹
۴–۲ هندسه اقلیدسی ۱۱۰
۴–۲–۱ اصول اقلیدس برای هندسه ۱۱۰
۴–۳ نظریه اعداد اقلیدسی ۱۱۵
۴–۳–۱ خواص بخش‌پذیری اقلیدسی ۱۱۵
۴–۳–۲ الگوریتم اقلیدسی ۱۱۷

۴–۳–۳ قضیه اساسی حساب ۱۱۸
۴–۳–۴ مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد اول ۱۱۹
۴–۴ مسائل ۱۲۰
۴–۵ ارزیابی اصول ۱۲۴
۴–۶ ارشمیدس ۱۲۷
۴–۶–۱ نابغه دنیای باستان ۱۲۷
۴–۶–۲ تخمین مقدار π ۱۳۰
۴–۷ مسائل ۱۳۴
چ

فصل پنجم. روش جدید ریاضی **۱۳۷**
۵–۱ تبیین روش جدید ریاضی ۱۳۸
۵–۲ الگوی تئوری‌های منطقی ۱۴۰
۵–۳ مثالی ساده از شاخه‌ای از ریاضیات ۱۴۵
۵–۳–۱ کاربرد ۱ (در شجره‌شناسی) ۱۴۸
۵–۳–۲ کاربرد ۲ (هندسی) ۱۴۹
۵–۳–۳ کاربرد ۳ (حسابی) ۱۴۹
۵–۴ ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی ۱۵۰
۵–۴–۱ هم‌ارزی ۱۵۱
۵–۴–۲ سازگاری ۱۵۲
۵–۴–۳ استقلال و تمامیت ۱۵۶
۵–۴–۴ تبصره ۱۵۷
۵–۴–۵ تمامیت ۱۵۸
۵–۵ خلاصه مطالب فصل پنجم ۱۶۰
۵–۶ مسائل ۱۶۱

فصل ششم. منطق نمادی **۱۶۷**
۶–۱ تاریخچه مختصر منطق نمادی ۱۶۸
۶–۲ ترکیبات گزاره‌ای ۱۷۰
۶–۳ حساب گزاره‌ها ۱۷۵
۶–۳–۱ عبارت‌های اولیه ۱۷۷
۶–۳–۲ بنداشت‌ها یا اتحادهای اولیه ۱۷۷
۶–۳–۳ قواعد استنتاج قضیه‌ها یا اتحادهای ثانویه ۱۷۸
۶–۴ منطق‌های چندارزشی ۱۸۵
۶–۵ خلاصه مطالب فصل ششم ۱۹۲
۶–۶ مسائل ۱۹۲

منابع **۱۹۷**

فصل اول

نمادها و دستگاه‌های اولیه اعداد

اندیشیدن به آنچه قابل اندیشیدن است: این است هدف ریاضی‌دان. سی. جی. کی‌سر[1]

هدف‌های آموزشی فصل اول

الف) هدف‌های کلی

هدف کلی از ارائه این فصل آشنایی با نمادها و دستگاه‌های شمارش ابتدایی اعداد در دوران باستان مصر، یونان و بابلیان می‌باشد.

ب) هدف‌های آموزشی

دانشجو پس از مطالعه و فراگیری این فصل باید:

- با ثبت شمارش توسط ایجاد شکاف روی چوب آشنا شده باشد.
- با ثبت اعداد به‌وسیله گره زدن روی ریسمان آشنا شده باشد.
- بتواند اعداد را با خط هیروگلیف بنویسید.
- قادر به تبدیل اعداد مصری به اعداد در دستگاه خودمان باشد.

---

1. C. J. Keyser

- قادر به اعمال جمع و تفاضل اعداد با خط هیروگلیف باشد.
- قادر به تبدیل اعداد در دستگاه شمارش یونانی یونیان و برعکس باشد.
- قادر به تبدیل اعداد به خط رومی و برعکس باشد.
- قادر به تبدیل اعداد با نماد خط میخی بابلی و برعکس باشد.
- قادر به حل مسائل آخر هر بخش باشد.

۱-۱ شمارش ابتدایی

۱-۱-۱ درک اعداد

ریشه کلمه *ریاضیات*[۲] از کلمه یونانی ***mathemata*** گرفته شده که در متون اولیه عموماً برای اشاره به آموزش یا پژوهش به‌کار می‌رفت. با توسعه علوم، محدود کردن این اصطلاح به رشته‌های خاصی از علم مناسب‌تر به‌نظر رسید. می‌گویند فیثاغورسیان از این اصطلاح برای بیان حساب و هندسه استفاده کردند. در قدیم، هر یک از این دو رشته با نامی جداگانه خوانده شده و هیچ‌گونه ارتباط اسمی با یکدیگر نداشتند. احتمالاً استفاده فیثاغورسیان از این نام پایه گذار این عقیده شد که ریاضیات در طی سال‌های ۶۰۰ تا ۳۰۰ قبل از میلاد در یونان باستان آغاز گردیده است. اما تاریخ ریاضیات بسیار قدیمی‌تر از اینهاست. سه یا چهار هزار سال قبل در مصر و بابل باستان مجموعه قابل توجهی از دانش علمی وجود داشت که باید آن را با نام ریاضیات توصیف کنیم. اگر این دیدگاه کلی را در نظر بگیریم که ریاضیات به مطالعه امور کمّی یا فواصل طبیعی (عدد، اندازه، ترتیب، و شکل) می‌پردازد، خواهیم دید که این فعالیت از نخستین روزهای تجارب انسانی وجود داشته است. در هر زمان و فرهنگی افرادی با تمایلی قوی به درک و کسب احاطه بر شکل دنیای طبیعی اطراف خود وجود داشته‌اند. به قول الکساندر پوپ[۳]: "این هزارتوی عظیم بدون برنامه نیست."

عموماً باور بر این است که ریاضیات برای حل مشکلات کاربردی از قبیل شمارش و ثبت اعداد آغاز شد. تولد مفهوم عدد چنان در پس پرده قرن‌های بی‌شمار پنهان شده که تعمق در شواهد بجا مانده از درک انسان‌ها از اعداد ما را آزار می‌دهد. اجداد ما از ۲۰,۰۰۰ سال پیش– که تقریباً به اندازه ما باهوش بوده‌اند– احتمالاً نیاز به

---

2. mathematics
3. Alexander Pope

شمارش حیوانات اهلی، محاسبه اشیاء برای مبادله پایاپای، یا گذر روزها را احساس کرده‌اند. اما تکامل شمارش، با کلمات شفاهی اعداد و علایم نوشتاری آن‌ها، عملی تدریجی بوده و لذا تعیین دقیق تاریخ شکل‌گیری مراحل مختلف آن را غیرممکن می‌سازد.

به عقیده انسان‌شناسان، به زحمت می‌توان فرهنگی هرچند ابتدایی را یافت که از اعداد، هرچند به‌شکل اولیه‌ی آن مثل تمایز بین یک و دو، آگاهی نداشته باشد. به‌عنوان مثال برخی از قبایل بومی استرالیایی فقط تا دو می‌شمردند و هر عدد بزرگ‌تر از آن را صرفاً "خیلی" می‌نامیدند. سرخپوستان آمریکای جنوبی ساکن در امتداد ریزآبه‌های آمازون نیز به‌همین ترتیب فاقد کلماتی برای نامیدن اعداد بودند. اگرچه آن‌ها از بومی‌ها یک قدم پیشتر رفته و یاد گرفتند که تا شش بشمارند، با این حال نام مستقلی برای گروه‌های سه‌تایی یا شش‌تایی نداشتند. در واژگان شمارش، آن‌ها سه را بنام "دو- یک"، چهار را بنام "دو- دو" و بقیه اعداد را به همین شکل می‌خواندند. بدویان آفریقایی نیز از دستگاهی مشابه استفاده می‌کردند. آن‌ها فقط با کمک دو کلمه تا ده می‌شمردند: (۲+۲+۲+۲+۲=۱۰)؛ بعد از ده، عبارت توصیفی بسیار طولانی می‌شد. قابل توجه است که این گروه‌های قبیله‌ای، تمایلی به مبادله دو گاو در مقابل چهار خوک نداشتند، بلکه ترجیح می‌دادند یک گاو را با دو خوک و گاو دوم را با دو خوک دیگر معاوضه کنند.

اولین تکنیک مشهود برای بیان مفهوم عدد، جمع بستن به کمک چوبخط است. در این عمل مجموعه‌ای که باید شمرده شود را با یک سری اشیاء متناظر می‌کنند. نیاکان اولیه ما برای این مقصود از انگشت، صدف، یا سنگ استفاده می‌کردند. به‌عنوان مثال برای شمارش گوسفندان می‌شد آن‌ها را یکی‌یکی از گذرگاهی باریک عبور داده و در ازای هر کدام یک سنگریزه را کنار گذاشت. شب هنگام در موقع جمع کردن گله، سنگریزه‌ها را یکی‌یکی از یک کپه به کپه دیگر جابه‌جا می‌کردند تا شمارش همه گوسفندان انجام گیرد. در مواقع دستیابی به یک پیروزی، بستن قرارداد، یا تأسیس یک روستا، غالباً سنگچین یا ستونی از سنگ را برپا می‌کردند، به این ترتیب که به هر شخص حاضر یک سنگ تخصیص می‌یافت.

شمارش از طریق خراش انداختن روی سنگ‌ها، شکاف دادن روی عصاهای چوبی یا استخوان‌ها و یا گره زدن ریسمان‌هایی با رنگ یا طول متفاوت ادامه یافت. هنگامی که تعداد نشانه‌های چوبخطی دست و پاگیر و غیرقابل تشخیص می‌شدند انسان‌های اولیه آن‌ها را به گروه‌هایی که به سادگی قابل تشخیص باشند مثل گروه‌های پنج‌تایی (برابر با تعداد انگشتان دست) تقسیم می‌کردند. محتمل است که گروه‌بندی دوتایی، اول کشف شده و خیلی زود به نفع گروه‌های پنج‌تایی، ده‌تایی و بیست‌تایی کنار گذاشته شده باشد. نظام شمارش گروهی، پیشرفت قابل توجهی نسبت به شمارش یکی‌یکی محسوب می‌شود. به‌عنوان مثال شمارش پنج‌تایی، پیشرفتی موقت در جهت رسیدن به مفهوم انتزاعی "پنج" در برابر ایده‌های توصیفی "پنج انگشت" یا "پنج روز" را نشان می‌دهد. در حقیقت این عمل گامی کوچک در مسیر طولانی به سوی جدا کردن سلسله اعداد از اشیای مورد شمارش بود.

۱-۱-۲ شکاف‌ها به‌عنوان علائم چوبخطی

استخوان‌های بجا مانده با نشانه‌های حکاکی شده بر روی آن‌ها، نشان می‌دهد که مردم عصر پارینه سنگی ۳۰,۰۰۰ سال پیش از میلاد، دستگاه محاسبه گروهی با چوبخط را اختراع کرده بودند. برجسته‌ترین نمونه مربوط به استخوان قلم پای یک گرگ جوانی است که در سال ۱۹۳۷ در چکسلواکی پیدا شد. به روی این استخوان که هفت اینچ طول دارد ۵۵ شکاف عمیق حکاکی شده که کم و بیش طول یکسان داشته و در گروه‌های پنج‌تایی بسته‌بندی شده‌اند. (دستگاه‌های نشانه‌گذاری مشابه در دسته‌های پنج‌تایی مثل 𝍸 هنوز هم مورد استفاده‌اند. مثلاً نتایج رأی‌گیری در شهرهای کوچک هنوز هم به روشی که توسط اجداد ما ابداع شد، شمارش می‌شوند). سال‌ها تصور بر این بود که استخوان‌های شیار داده شده نشانگر چوب خط‌های شکار بوده و هریک از بریدگی‌ها نشانه یک شکار هستند. اما براساس نظریه‌های جدیدتر، اولین نشانه‌های مردم باستان به محاسبه زمان مربوط می‌شود. نشانه‌های کشف شده به روی استخوان‌ها در غارهای فرانسه در اواخر دهه ۱۸۸۰ به‌صورت مجموعه‌ای از اعداد تکراری

دسته‌بندی شده‌اند که با اعداد روزها در مراحل متوالی ماه مطابقت دارند؛ لذا می‌توان این استخوان‌های حکاکی شده را نوعی تقویم‌های قمری دانست.

یکی دیگر از نمونه‌های استخوان حکاکی شده در «ایشانگو[4]» در طول سواحل دریاچه ادوارد[5] (یکی از سرچشمه‌های نیل) کشف شد. شایان ذکر است که بهترین مدرک باستان‌شناسی و زمین‌شناسی، این ناحیه را به ۱۷,۵۰۰ سال پیش از میلاد یا حدود ۱۲,۰۰۰ سال قبل از ظهور اولین جوامع کشاورزی در دره نیل نسبت می‌دهد. این قطعه فسیل احتمالاً دسته‌ی ابزاری بوده است که برای حکاکی، خال‌کوبی و یا حتی نوعی نوشتن به‌کار می‌رفته است. این فسیل شامل گروه‌هایی از شکاف‌هاست که در سه ستون مشخص دسته‌بندی شده‌اند. به‌نظر نمی‌رسد که این ترکیب عجیب و نامنظم برای تزئین بوده باشد. در یکی از ستون‌ها، گروه‌ها ترکیبی از اعداد ۱۱، ۲۱، ۱۹، و ۹ شکاف می‌باشند که ممکن است الگوی ۱+۱۰، ۱+۲۰، ۱−۲۰ و ۱−۱۰ مدنظر بوده باشد. در ستون دیگر، شکاف‌ها در هشت گروه با ترتیب زیر دیده می‌شوند: ۳، ۶، ۴، ۸، ۱۰، ۵، ۵، ۷. به‌نظر می‌رسد که این ترتیب بیانگر مفهوم دو برابر سازی یا ضرب کردن در دو باشد. آخرین ستون شامل چهار گروه است که از ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ شکاف مجزا تشکیل شده‌اند. ممکن است الگویی که در ستون آخر به‌کار رفته لزوماً نشانگر ارتباطی با اعداد اول نبوده و تصادفی باشد. اما از آنجایی‌که ۶۰=۱۹+۱۷+۱۳+۱۱ و ۶۰=۹+۱۹+۲۱+۱۱ می‌توان گفت که ممکن است نشانه‌های ماقبل تاریخ استخوان «ایشانگو» به شمارش قمری مربوط بوده و ستون‌های اول و سوم نشان‌دهنده دو ماه قمری باشند.

یک شیوه شمارش که در زمان‌ها و مکان‌های مختلف به کرار مورد استفاده قرار گرفته عبارت از ایجاد شکاف بر روی عصا یا چوب‌دستی است. شایان ذکر است با آنکه این ابزار یکی از قدیمی‌ترین اشکال ثبت شمارش به حساب می‌آید، کاربرد آن به هیچ وجه به "انسان‌های اولیه" و زمان‌های بسیار دور محدود نمی‌شود. پذیرش عصاهای چوبخط‌دار به‌عنوان سفته یا برات در حساب‌های خزانه‌داری انگلستان به

4. Ishango
5. Lake Edward

بالاترین سطح توسعه خود رسید، به‌گونه‌ای که این چوب دستی‌ها از قرن دوازده به بعد بخش عمده‌ای از اسناد دولتی را تشکیل می‌دادند.

در این مورد، ابزار محاسبه عبارت بودند از قطعه‌های مسطحی از چوب فندق به طول تقریبی ۶ تا ۹ اینچ و قطر حداکثر یک اینچ. شکاف‌هایی با اندازه‌ها و انواع متفاوت در این تخته‌ها حکاکی می‌شد و هر شکاف بیانگر میزان مشخصی پول بود. عرض شکاف تعیین کننده ارزش آن بود. به‌عنوان مثال شکاف ۱۰۰۰ پوندی عرضی به اندازه یک دست داشت؛ ۱۰۰ پوندی به اندازه قطر یک انگشت شصت بود؛ و ۲۰ پوندی به عرض انگشت کوچک. وقتی وامی پرداخت می‌شد، شکاف‌هایی متناسب با مبلغ وام بر روی عصا ایجاد می‌شد به‌گونه‌ای که وقتی عصا را به دو نیم می‌کردند شکاف‌ها بر روی هر دو بخش بیانگر میزان بدهی وام گیرنده بود. خزانه‌داری یک نیمه و بدهکار نیمه‌ی دیگر را نزد خود نگاه می‌داشت. بدین ترتیب با قرار دادن دو نیمه عصا در کنار هم و توجه به برابری شکاف‌ها، معامله انجام شده به راحتی قابل تأیید می‌بود. احتمالاً با پایان پرداخت بدهی، خزانه‌داری تکه عصای مربوط به خود را نابود می‌کرد یا آن را می‌سوزاند و یا با بریدن شکاف‌ها عصا را صاف می‌کرد. اما نیمه مربوط به بدهکار را به‌عنوان مدرک برای آینده نگاه می‌داشت. در بسیاری از جوامع، حتی پس از ظهور مؤسسات بانکی و شمارش مدرن، تنها به دلیل وابستگی سرسختانه به سنن، این دستگاه حسابداری چوبی به‌طور رسمی استفاده می‌شد. بالاخره با تصویب لایحه‌ای در مجلس انگلستان به سال ۱۸۲۶ این شیوه کنار گذاشته شد. در سال ۱۸۳۴، زمانی که عصاهای محاسباتی که در طی ایام طولانی جمع شده بودند را در کوره‌های مجلس اعیان می‌سوزاندند، آتش از کنترل خارج شد و حریق ساختمان‌های قدیمی مجلس را نابود کرد.

تنوع در شیوه‌های عملی محاسبه چنان زیاد است که ارائه گزارشی دقیق از آن‌ها در اینجا غیرممکن خواهد بود. اما رویه شمارش روزها و اشیاء از طریق گره‌زدن ریسمان، سنتی چنان قدیمی است که ارزش اشاره کردن را دارد. این ابزار به وفور در یونان باستان مورد استفاده قرار می‌گرفت و در کتاب هرودوت[۶] (مورخ یونانی قرن پنجم قبل از میلاد) به آن اشاره شده است. او در کتاب *تاریخ* خود اظهار می‌دارد که داریوش، شاه ایران، ریسمانی گره زده را در حکم تقویم به یونانیان[۷] داد.

۱-۱-۳ کیپوس پرویی: گره‌ها در حکم اعداد

در قاره آمریکا ریسمان‌های گره‌زده شده، وجود رشته اعداد را به خوبی نشان می‌دهند. این ریسمان‌ها *کیپوس*[۸] نامیده می‌شوند که از اینکاهای[۹] پرو گرفته شده است. آن‌ها در اصل، یکی از قبایل سرخپوست آمریکای جنوبی یا گروهی از قبایل خویشاوند بودند که در مناطق کوهستانی آند زندگی می‌کردند. این افراد بر اثر توسعه تدریجی و بروز جنگ‌های گوناگون، بر سرزمین‌های گسترده‌ای حاکم شدند که مناطق ساحلی و کوهستانی اکوادور، پرو، بولیوی و مناطق شمالی شیلی و آرژانتین امروزی را در بر می‌گرفت. اینکاها به خاطر مهارت‌های مهندسی و ساختن معابد سنگی و ساختمان‌های عمومی بزرگ شهرت یافتند. یکی از دستاوردهای قابل توجه آن‌ها خلق شبکه گسترده‌ای (به بزرگی ۱۴۰۰۰ مایل) از جاده‌ها و پل‌هایی بود که بخش‌های دور دست امپراطوری را به یکدیگر متصل می‌ساخت. ایمن بودن اینکاها، از وحشت چیرگی اسپانیایی‌ها، در سال ۱۵۳۲ با ورود ۱۸۰ تن از فاتحان اسپانیایی به شمال پرو خاتمه یافت. تا پایان سال، مهاجمین پایتخت کشور یعنی شهر کوزکو[۱۰] را تسخیر کرده و امپراطور را به زندان افکندند. اسپانیایی‌ها شیوه‌ای از زندگی را به مردم تحمیل کردند که ظرف حدوداً ۴۰ سال تمدن اینکا را کاملاً نابود ساخت.

نحوه شمارش توسط کیپوس قابل توجه است. در حالت کلی سه نوع گره زدن برای نمایش مقادیر عددی به‌کار برده می‌شد: گره به شکل هشت برای نمایاندن ۱، یک

---

6. Herodotus
7. Ionians
8. quipus
9. Incas
10. Cuzco

گره بلند برای نمایاندن یکی از مقادیر ۲ تا ۹، بسته به اینکه چند پیچش در آن گره وجود دارد، و نیز یک گره تک برای ۱. گره به شکل هشت و گره بلند فقط در پایین‌ترین مکان (یکان) ریسمان و دسته‌ی گره‌های تک در طرف دیگر ظاهر می‌شوند. از آنجا که ریسمان‌های آویخته شده دارای طول یکسان هستند، یک فضای خالی (یک عدد صفر) روی یک ریسمان در مقایسه با ریسمان‌های مجاور به خوبی قابل رؤیت می‌باشد. همچنین، دوباره نمودار شدن یک گره به شکل هشت یا یک گره بلند اشاره به عدد دیگر ثبت شده بر همان ریسمان است.

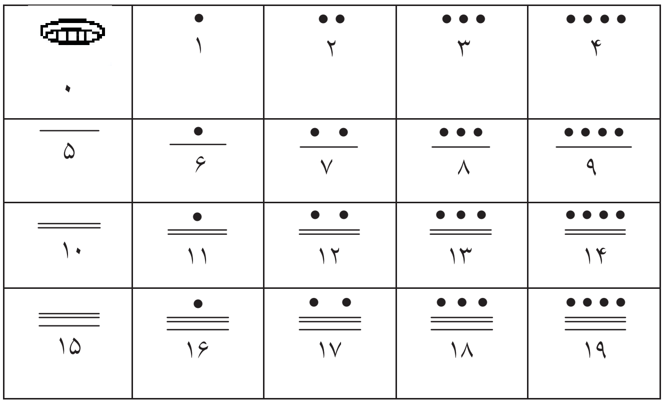
یادآوری می‌گردد که به‌ترتیب صعودی ارقام یک عدد دارای ارزش مکانی برای توان‌های پی‌درپی ده هستند. برای نمونه فرض کنید که یک ریسمان دارای گره‌هایی با مشخصات زیر باشد:

یک گره بلند با ۴ پیچش، دو گره تک، یک فضای خالی، هفت دسته گره تک، و یک گره تک. برای یک اینکایی این آرایه به مثابه عدد زیر است:

$$۱۷۰۲۴ = ۴+ (۲\times۱۰) + (۰\times۱۰^{۲}) + (۷\times۱۰^{۳}) + (۱\times۱۰^{۴})$$

از دیگر تمدن‌های قاره آمریکا که از یک دستگاه محاسبه ارزش مکانی استفاده می‌کردند، تمدن باستانی مایا بود. مایاها در پهنه وسیعی از سرزمین‌های جنوب مکزیک و بخش‌هایی از گواتمالا، السالوادور و هندوراس امروز زندگی می‌کردند. تمدن مایاها بیش از ۲۰۰۰ سال پا برجا بوده و بزرگ‌ترین دوره شکوفایی آن بین سال‌های ۳۰۰ تا ۹۰۰ میلادی بوده است.

تقویم سال مایاها از ۳۶۵ روز تشکیل می‌شد که به ۱۸ ماه ۲۰ روزی تقسیم شده و یک دوره ۵ روزه در انتهای آن باقی می‌ماند. این امر به اتخاذ یک دستگاه شمارش بر مبنای ۲۰ (یک دستگاه بیست‌تایی) منجر شد. اعداد به‌صورت نمادین به دو شکل بیان می‌شدند. طبقه کشیشان خط پیچیده‌ای از صورت‌های عجیب و غریب خدایان را برای نمایش اعداد ۱ تا ۱۹ به‌کار می‌گرفتند. این اشکال برای حکاکی تاریخ بر روی سنگ به منظور بزرگداشت رویدادهای مهم به‌کار می‌رفت. مردم عادی همان شماره‌ها را با ترکیبی از خط و نقطه ثبت می‌کردند. خط افقی کوتاه نشانگر ۵ و نقطه نشانگر ۱ بود. شکل خاصی که شبیه یک صدف تصنعی رسم می‌شد، نماینده صفر بود؛ این اولین مورد استفاده از یک علامت برای نشان دادن صفر می‌باشد.



علائم مورد استفاده برای نمایش اعداد بزرگ‌تر از ۱۹ در ستون‌های عمودی مرتب می‌شدند که در هر جایگاهی وقتی به سمت بالا حرکت می‌شد، هر عدد در توانی از ۲۰؛ یعنی در ۱، ۲۰، ۴۰۰، ۸۰۰۰، ۱۶۰,۰۰۰ و غیره به‌ترتیب ضرب می‌شد. قرار گرفتن یک صدف در یک مکان به‌منزله فقدان خط یا نقطه در آنجا بود. به ویژه عدد ۲۰ به‌وسیله یک صدف در پایین ستون و یک نقطه در جایگاه دوم نشان داده می‌شد. به‌عنوان نمونه عدد زیر را که در این دستگاه ثبت شده ملاحظه نمایید. بگذارید نمادها را بجای حالت عمودی، به‌صورت افقی بنویسیم و کوچک‌ترین مقدار را در سمت چپ قرار دهیم:

این عبارت برای ما نشان دهنده عدد ۶۲۸۰۸ می‌باشد، زیرا

$$۶۲۸۰۸ = ۸\times۱ + ۰\times۲۰ + ۱۷\times۴۰۰ + ۷\times۸۰۰۰$$

از آنجایی‌که دستگاه شمارش مایاها در درجه اول برای تهیه تقویم به‌وجود آمده بود، در انجام این‌گونه محاسبات با تفاوت‌های کوچکی مواجه می‌شویم. نماد جایگاه سوم ستون بجای آنکه مضربی از ۲۰×۲۰ باشد، مضربی از ۲۰×۱۸ بود، زیرا اعتقاد بر این بوده که ۳۶۰ تقریب مناسب‌تری از عدد سال است تا ۴۰۰. بدین ترتیب که ارزش

مکانی هر رقم ۲۰ برابر رقم قبلی افزایش می‌یافت؛ یعنی مضارب عبارتند از: ۱، ۲۰، ۳۶۰، ۷۲۰۰، ۱۴۴,۰۰۰ و غیره. با این تنظیمات، ارزش مجموعه نمادهای بررسی شده در بالا عبارت خواهد بود از:

۵۶۵۲۸ = ۸×۱ + ۰×۲۰ + ۱۷×۳۶۰ + ۷×۷۲۰۰

کار را با بررسی دستگاه‌های محاسباتی تمدن‌های مهم خاور نزدیک - مصریان و بابلیان – که خط اصلی توسعه ریاضی خودمان از آن‌ها نشئت گرفته، ادامه خواهیم داد. نام‌های اعداد با حروف در اولین نوشته‌های یافت شده این ملل به چشم می‌خورد. در حقیقت استفاده آن‌ها از نمادها برای اعداد، جدای از برقراری ارتباط با اشیاء مورد شمارش، نقطه عطف بزرگی در تاریخ تمدن بوده است. بسیار محتمل است که این امر نخستین گام در تکامل عالی‌ترین دستاورد عقلی انسان‌ها، یعنی هنر نوشتن است. از آنجایی‌که ثبت مقادیر، بسیار ساده‌تر از نمایش تصویری گفتار بوده، مدارک قابل اعتمادی وجود دارد که زبان‌های نوشتاری این فرهنگ‌های باستانی از دستگاه‌های عددی، که پیش‌تر نوشته‌اند، نشئت گرفته باشند.

اسکان بشری بنا به گفته هردوت[11]

۱-۲ ثبت اعداد مصری و یونانی

۱-۲-۱ نمایش تصویری اعداد (خط هیروگلیف)

به محض آنکه اتحاد مصر تحت حکومت یک رهبر واحد به حقیقت پیوست، یک دستگاه اجرایی قدرتمند و گسترده شروع به رشد نمود. آمارگیری، وضع مالیات، حفظ ارتش، و

11. From Stories from Herodotus by B. Wilson and D. Miller. Reproduced by permission of Oxford University Press.

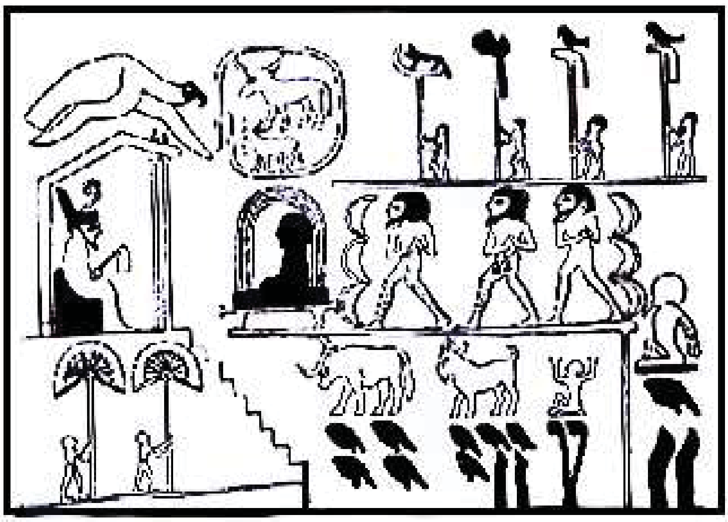
امثال آن کارهایی ضروری بودند که همه مستلزم انجام محاسباتی با اعداد نسبتاً بزرگ بود. این در یکی از سال‌های سلسله دوم حکومت به وقوع پیوست که بنام سال ظهور شماره‌گذاری تمام گله‌های کوچک و بزرگ شمال و جنوب نام گرفت. مصریان تقریباً از ۳۵۰۰ سال پیش از میلاد، دستگاه عددی کاملاً پیشرفته‌ای داشتند که انجام شمارش برای اعداد بزرگ و بزرگ‌تر را برحسب احتیاجشان تنها با معرفی گاه‌به‌گاه نمادهای جدید میسر می‌ساخت. این امر بر روی سر گرز شاه نارمر[۱۲] یکی از چشمگیرترین بقایای دنیای باستان، که اکنون در موزه دانشگاه آکسفورد نگهداری می‌شود، مشهود است. در آغاز عصر پادشاهی، نارمر (که برخی صاحب نظران تصور می‌کنند احتمالاً همان منس[۱۳] افسانه‌ای یعنی نخستین حاکم ملت متحد مصر باشد) مجبور به تنبیه لیبیایی‌های طغیانگر در دلتای غربی شد. او لوح پالت[۱۴] با شکوهی – پالت مشهور نارمر– را به همراه یک سر گرز تشریفاتی در معبد «هیراکونوپلیس[۱۵]» بر جای گذاشت که بر روی هر دوی آن‌ها نقش بسته بود که گواه پیروزی او بودند. سر گرز دستاورد شاه را برای همیشه ثبت و حفظ کرده است. این نوشته از اسارت زندانیان و به دام انداختن گاوهای نر و بزها سخن می‌گوید.

این صحنه از سر گرز سنگی نارمر برداشته شده که جی.ای.کیبل[۱۶] در سال ۱۸۹۸ در هیراکونوپلیس کشف کرد. در اینجا خلاصه‌ای از غنائم به‌دست آمده توسط نارمر در زمان جنگ وی دیده می‌شود که بدین شرح است: "گاو ۴۰۰,۰۰۰، بز ۱,۴۲۲,۰۰۰ و اسرا ۱۲۰,۰۰۰"

در یکی از مقبره‌ها در نزدیکی هرم گیزه[۱۷]، نمادهای عددی هیروگلیفی پیدا شده‌اند که در آن‌ها عدد ۱ به وسیله خطی عمودی یا تصویری از یک چوب‌دستی، و نوعی نعل اسب یا علامت استخوان پاشنه ∩ به‌عنوان نمادی اشتراکی برای جایگزینی ده خط عمودی جداگانه به‌کار رفته است. به‌عبارت دیگر، دستگاه مصری، دستگاهی ده‌دهی بود که شمارش را با توان‌های ۱۰ انجام می‌داد. این که عدد ۱۰ غالباً اساس دستگاه‌های شمارش ملت‌های باستان را تشکیل می‌دهد بدون شک بدین خاطر است که انسان‌ها

12. Narmer King
13. Menes
14. Palette
15. Hierakonopolis
16. J. E. Quibell
17. Gize

۱۰انگشت داشته و عادت دارند که روی آن‌ها حساب کنند. به‌همین دلیل نمادی شبیه به عدد ۱، تقریباً در همه‌جا برای بیان شماره یک به‌کار رفته است.



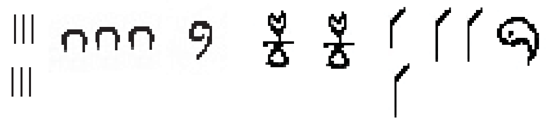
برای هر توان جدید از ۱۰ تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ از نمادهای تصویری بخصوصی استفاده می‌شد: یک طناب خمیده بجای ۱۰۰، یک نیلوفر آبی بجای ۱۰۰۰، یک انگشت خمیده در حال اشاره بجای ۱۰,۰۰۰، یک بچه قورباغه بجای ۱۰۰,۰۰۰، یک شخص که در حال حیرت دستانش را به سمت بالا گرفته بجای ۱,۰۰۰,۰۰۰ و نمادی که گاهی به خورشید در حال طلوع شباهت داده شده است بجای ۱۰,۰۰۰,۰۰۰.

۱۰ ۱۰۰ ۱۰۰۰ ۱۰,۰۰۰ ۱۰۰,۰۰۰ ۱,۰۰۰,۰۰۰ ۱۰,۰۰۰,۰۰۰

۱

اعداد دیگر به‌صورت جمعی به کمک این نمادها قابل بیان است، به‌طوری که هر نماد حداکثر تا نه بار تکرار می‌شود. یعنی عدد داده شده با مجموعه‌ای از نمادها نمایش داده می‌شود که مجموع اعداد مربوط به تک‌تک نمادهای به‌کار برده شده در این نمایش، برابر با

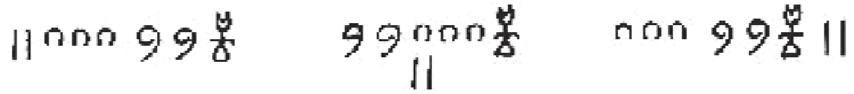
عدد مفروض است. غالباً، جهت نوشتاری از راست به چپ بود، به‌طوری که یکان بزرگ‌تر در ابتدا می‌آمد، سپس بقیه به‌ترتیب اهمیت می‌آمدند. از این‌رو نمایش زیر



بیان‌گر عدد زیر است:

۱×۱۰۰,۰۰۰ + ۴×۱۰,۰۰۰ + ۲×۱۰۰۰ + ۱×۱۰۰ + ۳×۱۰ + ۶ ×۱ =۱۴۲,۱۳۶

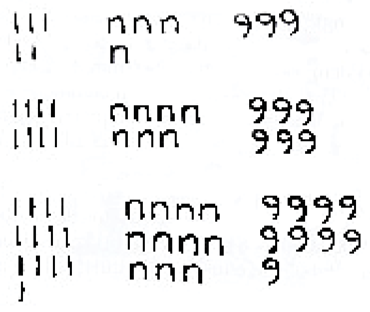
گاهی یکان‌های بزرگ‌تر در سمت چپ نوشته می‌شد. از آنجا که برای هر توان ۱۰ نمادی متفاوت وجود داشت، ارزش عدد نمایش داده شده متأثر از ترتیب تصاویر هیروگلیفی در یک گروه نمی‌شد. برای مثال،



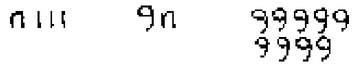
که همه‌ی آن‌ها برابر عدد ۱۲۳۲ است. لهذا روش مصریان برای نوشتن اعداد یک "دستگاه مکانی" نبود. یعنی یک نماد در دو مکان متفاوت دارای ارزش عددی متفاوت نبود.

جمع و تفریق در دستگاه عددی مصری کمی مشکل‌آفرین بود. برای جمع، تنها لازم بود که نمادهای مثل هم را با هم جمع کنند و معادل ده از نمادهای مثل هم را به نماد بزرگ‌تر بعدی بدهند. به این طریق مصری‌ها جمع می‌کردند، مثلاً جمع ۳۴۵ و ۶۷۸ به‌صورت زیر انجام می‌شد:

۳۴۵
۶۷۸
۱۰۲۳



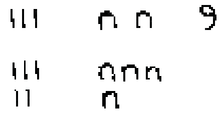
که تبدیل می‌شد به:



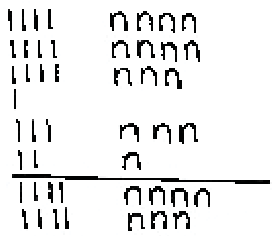
و دوباره تبدیل می‌شد به:

تفریق با همان روند به‌صورت معکوس انجام می‌شد. گاهی از "قرض گرفتن" استفاده می‌شد، به این‌صورت که هرجا لازم بود، نمادها در عدد بزرگ‌تر را با ده تا از نمادهای مرتبه قبل‌اش عوض می‌کردند تا به‌قدر کافی بزرگ شود که بتوان از عدد کوچک‌تر کم کرد. مثلاً تفریق زیر را در نظر بگیرید:

۱۲۳
−۴۵
———
۷۸



که تبدیل یافته‌اش عبارت است از:



اگرچه مصریان نمادهایی برای اعداد داشتند، اما آن‌ها عموماً نمادگذاری یکسانی برای اعمال ریاضی نداشتند. در مورد پاپیروس رایند[18] (تقریباً در سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد)، نگارنده‌ی این نسخه خطی "جمع" و "تفریق" را با تصاویر هیروگلیفی "𓂻" و "𓂽" نشان داد که شبیه پای شخصی است که "می‌آید" و "می‌رود".

۱-۲-۲ شمارش مقدس مصریان

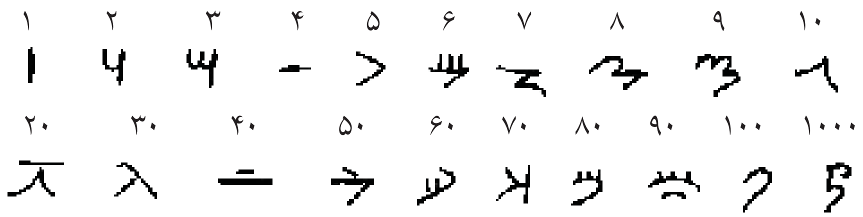
18. Rhind Papyrus

تا زمانی که نوشتن منحصر به کتیبه‌های حکاکی شده بر روی سنگ‌ها و فلزات بود، تنها اسناد فوق‌العاده مهم روی آن‌ها ثبت می‌شد. چیزی که بدان نیاز داشتند عبارت بود از ماده‌ای ارزان قیمت و در دسترس که بتوان بر روی آن نوشت. مصریان این مشکل را با اختراع پاپیروس حل کردند. صفحات پاپیروس با بریدن طولی نوارهای نازک ساقه گیاهی نی مانند بنام پاپیروس، که در باتلاق‌های دلتای نیل فراوان بود، به‌دست می‌آمد. تکه‌های بریده شده برروی یک تخته در کنار هم طوری قرار داده می‌شدند تا یک برگه را تشکیل دهند و دوباره یک لایه دیگر به‌طور عمود روی اولی قرار می‌گرفت. بعد از آن این برگه‌ها را در آب می‌خیساندند، با یک چکش چوبی روی آن کوبیده و برای خشک شدن در آفتاب قرار می‌دادند. صمغ طبیعی گیاه تکه‌های روی هم قرار گرفته را به یکدیگر می‌چسباند. سپس سطحی که باید روی آن نوشته می‌شد را با یک صدف می‌تراشیدند تا صاف شود. سرانجام ورقه به‌دست آمده (که معمولاً بین ۱۰ تا ۱۸ اینچ پهنا داشت) شبیه به کاغذهای قهوه‌ای رنگ ضخیم و آماده نوشتن می‌شد. مصریان با قرار دادن لبه‌ی کاغذها به‌طور متوالی بر روی هم و چسباندن آن‌ها به‌یکدیگر نوارهایی تا طول ۱۰۰ متر تولید می‌کردند. بدین ترتیب می‌توانستند در مواقع عدم استفاده، آن‌ها را لوله کنند. آن‌ها با قلم‌هایی برس مانند و جوهری ساخته شده از خاک رنگی یا ذغال که با صمغ یا آب مخلوط شده بود، می‌نوشتند. در حال حاضر طومارهای بسیاری برای ما حفظ شده که از شرایط خوبی برخوردارند و این به دلیل دوام پاپیروس و بیش‌تر به خاطر آب و هوای بسیار خشک مصراست که از کپک زدن و رشد قارچ بر روی کاغذها جلوگیری می‌کرد.

پس از به‌وجود آمدن پاپیروس، گام‌های بعدی درجهت تسهیل نوشتن برداشته شد. نخستین گام‌ها عمدتاً توسط روحانیون مصری برداشته شد. آنان شیوه‌ای برای نگارش سریع‌تر با تصاویر کم‌تر را ابداع نمودند به‌طوری که با قلم و جوهر سازگارتر بود. در این خط که آن را "*مقدس*" می‌نامیدند، نمادها به شکل شکسته یا آزاد نوشته می‌شدند، به‌طوری که در نگاه اول اشکال آن‌ها شباهت چندانی با علائم قدیمی هیروگلیف نداشت. در واقع می‌توان این خط را به‌دست خط‌های خودمان و خط هیروگلیف را به متون چاپی‌مان نسبت داد. با گذشت زمان و رواج یافتن کتابت مردم حس کردند که حتی نوشتن خط مقدس نیز بسیار کند است و از این‌رو شکل کوتاه‌تری از الفبا بنام

خط *جدید هیروگلیفی* یا "*خط همگانی*" ظهور کرد. خط مقدس در مقایسه با خط همگانی مثل بازی بچه‌هاست، زیرا خط همگانی از ردیف‌های متعددی از ویرگول‌های درهم ریخته تشکیل شده که هریک نماینده علامت کاملاً متفاوتی هستند.

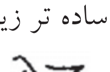
در هر دوی این اشکال نوشتاری، نمایش اعداد به‌صورت جمعی و براساس توان‌های ۱۰ بود با این تفاوت که اصل تکرار هیروگلیف در خط جدید با به‌کار بردن یک نشانه مشخص برای نمایش دسته‌ای از نمادهای مشابه جایگزین شد. این نوع علائم را می‌توان "*رمزگذاری*" نامید. به‌عنوان مثال، عدد پنج با علامت مشخص > بجای پنج خط عمودی نشان داده می‌شد.



در دستگاه شمارش مقدس، اعداد به شکلی که در جدول بالا آمده نمایش داده می‌شد.

توجه کنید که علائم مربوطه به ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ اساساً صورت خلاصه شده تصاویری هستند که پیشتر مورد استفاده بود. در خط هیروگلیف عدد ۳۷ به شکل زیر ترسیم می شد:

اما درخط مقدس این علامت با شکل ساده تر زیر جایگزین شد:



افزایش تعداد علائمی که در این دستگاه مورد استفاده قرار می‌گرفت بار مضاعفی بر حافظه تحمیل می‌کرد، اما کاتبان مصری بدون شک دستگاه جدید را به خاطر سرعت و ایجاز آن توجیه می‌کردند. ایده رمزگذاری یکی از گام‌های قطعی در پیشرفت

شمارش محسوب می‌شود؛ قابل قیاس با بابلی‌ها که از اصل ارزش مکانی استفاده می‌کردند.

۱-۲-۳ دستگاه شمارش الفبایی یونانی

در حدود قرن پنجم پیش از میلاد، یونانیان یونیا[۱۹] نیز یک دستگاه شمارش رمزگذاری شده را درست کردند که شامل مجموعه مفصل‌تری از علامت‌های حفظ کردنی بود. آن‌ها اعداد خود را براساس ۲۴ حرف الفبای معمولی یونانی رمزگذاری کردند، که با سه حرف قدیمی فینیقی (دیگاما Ϛ برای ۶، کوپا Ϙ برای ۹۰، سامپی ϡ برای ۹۰۰) کامل می‌شد. ۲۷ حرف حاصله به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گرفتند. نه حرف اول با اعداد ۱ تا ۹ در ارتباط بودند؛ نه حرف بعدی اولین نه مضرب صحیح ۱۰ را نشان می‌دادند؛ نه حرف آخر برای نمایش نه مضرب صحیح ۱۰۰ به‌کار می‌رفتند.

جدول مربوطه نشان می‌دهد که چگونه حروف الفبا (به انضمام اشکال خاص) به‌منظور نمایش اعداد به‌کار می‌رفتند.

۱ α	۱۰ ι	۱۰۰ ρ
۲ β	۲۰ κ	۲۰۰ σ
۳ γ	۳۰ λ	۳۰۰ τ
۴ δ	۴۰ μ	۴۰۰ υ
۵ ε	۵۰ ν	۵۰۰ ϕ
۶ Ϛ	۶۰ ξ	۶۰۰ χ
۷ ζ	۷۰ o	۷۰۰ ψ
۸ η	۸۰ π	۸۰۰ ω
۹ θ	۹۰ Ϙ	۹۰۰ ϡ

از آنجا که دستگاه یونیایی هنوز دستگاهی جمعی بود، تمام اعداد از ۱ تا ۹۹۹ حداکثر با سه نماد قابل بیان بود. این اصل در مثال زیر ملاحظه می‌شود:

---

19. Ionia

$$\psi\pi\delta = ۷۰۰ + ۸۰ + ۴ = ۷۸۴$$

برای اعداد بزرگ‌تر روش زیر به‌کار برده می‌شد. با قرار دادن یک علامت در سمت چپ یا زیر حرف یکان، عدد متناظر را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کرد. از این‌رو β نه تنها عدد ۲ بلکه عدد ۲۰۰۰ را نیز نمایش می‌داد. ده هزار با حرف جدید M نمایش داده می‌شد. حرف M از لغت ده هزار (*Myriad*) آمده است. اگر حرف M نزدیک یا زیر نمادهایی که برای یک عدد از ۱ تا ۹۹۹۹ قرار گرفته است، باعث می‌شود که عدد در ۱۰,۰۰۰ ضرب شود. لذا

$$\delta M \text{ یا } \overset{\delta}{M} = ۴۰{,}۰۰۰$$

$$\rho\nu M \text{ یا } \overset{\rho\nu}{M} = ۱{,}۵۰۰{,}۰۰۰.$$

با این قراردادها، یونانیان می‌نوشتند

$$\tau\mu\varepsilon M\,,\beta\rho\mu\delta = ۳{,}۴۵۲{,}۱۴۴.$$

یونانیان برای بیان اعداد بزرگ‌تر، توان‌های ۱۰,۰۰۰ را به‌کار می‌گرفتند. مثلاً یک جفت MM بیانگر $(۱۰{,}۰۰۰)^۲$ بود.

همواره نمادها به یک ترتیب یکسانی پشت هم می‌آمدند، از بزرگ‌ترین مضرب ۱۰ در سمت چپ به کوچک‌ترین آن‌ها در سمت راست. لذا زمانی که مطلب روشن بود، علائم حذف می‌شدند. به‌کار بردن یک حرف هم برای هزارگان و هم یکان، همانند

$$\delta\sigma\lambda\delta = ۴۲۳۴$$

به حرف سمت چپ ارزش مکانی موضعی می‌داد. یونانیان به منظور تمایز دادن بین مفهوم عددی حروف، از کاربرد معمولی آن‌ها در زبان، یک علامت در انتها یا یک ‾ روی آن‌ها قرار می‌دادند. از این‌رو مثلاً عدد ۱۰۸۵ به‌صورت زیر نشان داده می‌شد:

$$,\alpha\pi\varepsilon' \text{ یا } ,\overline{\alpha\pi\varepsilon}$$

با اینکه این دستگاه در مجموع برای اختصارنویسی فراهم شده بود (مثلاً حروف الفبای عددی یونانی برای نمایش ۹۰۰ تنها یک حرف بود و در مقابل مصریان مجبور به استفاده از نه بار نماد ९ بودند)، اما نیازمند به تسلط بر علائم متعدد بودند.

ضرب در حروف الفبای عددی یونانی با شروع از بزرگ‌ترین مرتبه در هریک از عوامل ضرب شروع می‌شد و سپس حاصل‌ضرب‌های جزیی با هم جمع می‌شدند. برای مثال، ضرب ۵۳×۲۴:

$\kappa \quad \delta$		۲۴	
$\underline{\nu \quad \gamma}$		×۵۳	
$_{,}\alpha\xi$		۱۰۰۰	۶۰
$\underline{\sigma \quad \iota\beta}$		۲۰۰	۱۲
$_{,}\alpha\sigma \quad o\beta$		۱۲۰۰	۷۲ = ۱۲۷۲

ایده‌ی ضرب اعدادی که از بیش از یک حرف تشکیل شده بودند این بود که هر عدد به‌صورت جمع اعدادی که با یک حروف نمایش داده می‌شدند، نوشته می‌شد. از این‌رو یونانیان با محاسبه‌ی ۵۰×۲۰ شروع کردند (κ در ν)، سپس با ضرب ۳×۲۰ (κ در γ)، بعد ۵۰×۴ (δ در ν)، و در آخر ۳×۴ (δ در γ). این روش، که *ضرب یونانی* نامیده می‌شد، متناظر با محاسبات مدرن

۲۴× ۵۳=(۲۰+۴)(۵۰+۳)

=۲۰×۵۰+۲۰×۳+۴×۵۰+۴×۳

= ۱۲۷۲

است.

۱-۳ مسائل

۱. هریک از اعداد زیر را با خط هیروگلیف مصری بنویسید.

الف) ۱۴۹۲

ب) ۱۹۹۹

ج) ۱۲,۳۲۱

د) ۷۰,۸۰۷

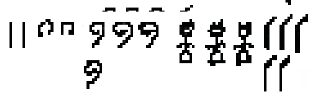
ه) ۱۲۳,۴۵۶

و) ۳,۰۴۰,۲۷۶

۲. هریک از اعداد مصری زیر را در دستگاه خودمان بنویسید.

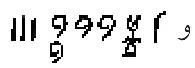
الف) 

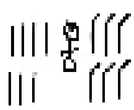
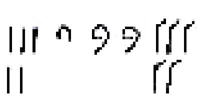
ب) 

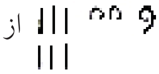
ج) 

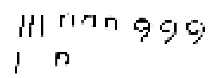
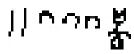
د) 

۳. اعمال زیر را انجام داده و جواب‌ها را به خط هیروگلیف بنویسید.

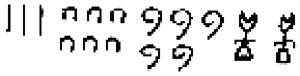
الف) جمع  و 

ب) جمع  و 

ج) تفاضل  از 

د) تفاضل  از 

۴. عدد زیر را در ∩ (۱۰) ضرب کرده و حاصل را به خط هیروگلیف بیان کنید.



قانونی ساده برای ضرب هر عدد مصری در ۱۰ بیان کنید.

۵. هریک از اعداد زیر را در دستگاه شمارش یونانی یونیان بنویسید.

الف) ۳۹۶

ب) ۱۴۹۲

ج) ۱۹۹۹

د) ۲۴,۷۸۹

ه) ۱۲۳,۴۵۶

و) ۱,۲۳۴,۵۶۷

۶. هریک از اعداد زیر از دستگاه شمارش یونانی یونیان را به دستگاه شمارش خودمان برگردانید.

الف) $_{,}\alpha\sigma\lambda\delta$

ب) $_{,}\beta\alpha$

ج) $\overset{\varepsilon}{M}\ _{,}\varepsilon\phi\nu\varepsilon$

د) $^{\theta}MM\tau M\ _{,}\beta\chi\delta$

۷. محاسبات زیر را انجام دهید:

الف) جمع $\nu\zeta$ و $\phi o\gamma$.

ب) جمع $\sigma\lambda\beta$ و $_{,}\lambda\omega\pi\alpha$.

ج) تفاضل $\chi\mu\theta$ از $_{,}\gamma\phi\iota\beta$.

د) ضرب $\sigma\pi\varepsilon$ در δ.

۸. یکی دیگر از نمادهای عددی که یونانی‌ها از حدود ۴۵۰ تا ۸۵ قبل از میلاد به‌کار می‌بردند بنام "آتیک[۲۰]" یا "هرودیانیک[۲۱]" بود. در این دستگاه از حروف اول کلمات برای ۵ و توان‌های ۱۰ برای نمایش اعداد متناظر استفاده می‌شد. آن‌ها عبارتند از:

Γ حرف اول *پنتا* (*penta*)، به معنی "پنج"

Δ حرف اول *دکا* (*deka*)، به معنی "ده"

H حرف اول *هکاتن* (*hekaton*)، به معنی "صد"

X حرف اول *کیلو* (*kilo*)، به معنی "هزار"

M حرف اول *میرید* (*myriad*)، به معنی "ده‌هزار"

ترکیب حرف به‌کار رفته برای پنج به‌همراه حروف دیگر منتج به نمادهایی برای ۵۰، ۵۰۰، ۵۰۰۰، و ۵۰,۰۰۰ می‌شد:

20. Atic
21. Herodianic

اعداد دیگر بر مبنای جمع به‌گونه‌ای ساخته می‌شدند که یکان بزرگ‌تر قبل از کوچک‌تر می‌آمد. لذا هر نماد بیش از چهار بار تکرار نمی‌شد. به‌عنوان یک مثال از این دستگاه شمارش

M 𐅆 X 𐅄 ΔΔ III

=۱۰,۰۰۰+۵۰۰۰+۱۰۰۰+۵۰+۲۰+۳=۱۶,۰۷۳

اعداد زیر را در دستگاه شمارش یونانی آتیک بنویسید.

الف) ۳۸۶

ب) ۱۴۹۲

ج) ۱۹۹۹

د) ۲۴,۷۸۹

هـ) ۷۴,۸۰۲

و) ۱۲۳,۴۵۶

۹. هریک از اعداد زیر از دستگاه شمارش یونانی آتیک را به دستگاه شمارش خودمان برگردانید.

الف) XX𐅅HH𐅄𐅃I

ب) M𐅆𐅅ΔΔΔ𐅃III

ج) XX𐅅HHHH𐅄ΔΔ𐅃II

د) 𐅇MMM𐅄ΔII

۱۰. اعمال زیر را انجام داده و جواب‌ها را دستگاه شمارش یونانی آتیک بنویسید.

الف) جمع X𐅄Δ𐅃I و HH𐅄ΔΔΔIIII

ب) جمع 𐅆XXXXHHHΔΔI و 𐅅HH𐅄ΔΔ

ج) تفاضل 𐅆H𐅄ΔΔΔII از XXI

د) ضرب HΔII در ΔΔΓ

۱۱. اعداد رومی هنوز در موارد تزئینی از قبیل صفحات ساعت و مجسمه‌ها استفاده می‌شود. این اعداد روی دستگاه شمارش آتیک با داشتن حروفی به‌عنوان نمادهایی برای مضارب مشخصی از ۵ همانند اعدادی که توان‌های ۱۰ هستند الگو می‌شوند.

نمادهای ابتدایی و مقادیر آن‌ها عبارتند از:

I	*V*	X	*L*	*C*	*D*	M
۱	۵	۱۰	۵۰	۱۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰

اساساً دستگاه شمارش رومی جمعی است، با تفریق و ضرب مشخصی. اگر مقادیر نمادها از چپ به راست افزایش یابد، مقادیرشان همانند مثال زیر با هم جمع می‌شوند:

MDCCCXXVIII=۱۰۰۰+۵۰۰+۳۰۰+۲۰+۵+۳=۱۸۲۸

اعدادی که در آن‌ها ۴ و ۹ به‌کار رفته است، از اصل تفریق پیروی می‌کنند که بنابر آن اصل، هرگاه یک حرف با یک مقدار کوچک قبل از یک حرف با مقدار بزرگ قرار بگیرد، باید کوچک‌تر را از بزرگ‌تر کم کرد. مثلاً

CDXCV=(۵۰۰−۱۰۰)+(۱۰۰−۱۰)+۵=۴۹۵

(بدین ترتیب *IV*=۴ در حالی‌که *VI*=۶.) به هرحال، قوانین مشخصی به‌صورت زیر وجود داشت:

I فقط می‌تواند جلوتر از *V* یا *X* بیاید.

X فقط می‌تواند جلوتر از *L* یا *C* بیاید.

C فقط می‌تواند جلوتر از *D* یا *M* بیاید.

بجای نمادهای جدید برای اعداد بزرگ، یک ابزار ضربی معرفی شد. هربار به‌کارگیری نماد "$\overline{}$" روی کل نماد متناظر با ضرب عدد در ۱۰۰۰ است. از این‌رو

$\overline{XV}$ =۱۵,۰۰۰ و $\overline{\overline{XV}}$ =۱۵,۰۰۰,۰۰۰

اعداد رومی متناظر را بنویسید:

الف) ۱۴۹۲

ب) ۱۰۶۶

ج) ۱۹۹۹

د) ۷۴,۸۰۲

ه) ۱۲۳,۴۵۶

و) ۳,۰۴۰,۲۷۹

۱۲. هریک از اعداد رومی زیر را در دستگاه خودمان برگردانید.

الف) *CXXIV*

ب) *MDLXI*

ج) *MDCCXLVIII*

د) *DCCLXXXVII*

هـ) $\overline{\mathrm{XIX}}$

ز) $\overline{\overline{\mathrm{XC}}}\mathrm{XXV}$

۱۳. اعمال زیر را انجام داده و جواب‌ها را برحسب اعداد رومی بنویسید.

الف) جمع *CM* و *XIX*.

ب) جمع *MMCLXI* و *MDCXX*.

ج) جمع *XXIV* و *XLVI*.

د) تفاضل *XXIII* از *XXX*.

ه) تفاضل *CLXI* از *CCLII*.

و) ضرب *XXXIV* در *XVI*.

۱-۴ ثبت عددی بابلیان

۱-۴-۱ الفبای خط میخی بابلیان

اندکی پس از سال ۳۰۰۰ پیش از میلاد، بابلیان ازعلائم تصویری موجود– نوعی نوشتن به کمک تصاویر شبیه به حروف تصویری – دستگاهی را برای نگارش ابداع کردند. اما مواد انتخاب شده برای نوشتن، محدودیت‌های خاص را ایجاد می‌کرد که این امر سبب شد تا علائم تصویری شباهت خود را به اجسامی که نماینده آن‌ها بودند از دست بدهند.

درحالی‌که مصریان برای ثبت اسناد خود از قلم و جوهر بهره می‌گرفتند، بابلی‌ها ابتدا از نی و بعداً از نوعی قلم با سر مثلثی شکل استفاده می‌کردند. آن‌ها با این وسیله (بجای خراشیدن کاغذ) بر روی خاک رس مرطوب علامت می‌گذاشتند. از آنجا که گل رس سریع خشک می‌شود، اسناد می‌بایست نسبتاً کوتاه بوده و کلاً در یک زمان نوشته می‌شدند. اما پس از پخته شدن و سخت شدن در کوره یا در زیر حرارت آفتاب، عملاً خراب نمی‌شدند.

این لوحه‌ها را با سبک چینی مقایسه کنید. چینی‌ها از مواد خراب شدنی از قبیل پوست درختان یا بامبو برای نوشتن استفاده می‌کردند. از این‌رو این مواد امکان نگهداری دائمی اسناد و دستاوردهای اولیه فرهنگ چین را از بین برد. لبه تیز قلم مثلثی شکل، خطی عمودی (|) و پایه آن علامتی کم و بیش عمیق‌تر (▲) را ایجاد می‌کرد، بنابراین نتیجه حاصل اثری شبیه به یک گُوه یا یک میخ با سر و انتهایش ( ) بود. به‌همین خاطر این سبک نوشتار را "*خط میخی*" می‌نامند.

الفبای خط میخی پیامدی طبیعی از انتخاب گل رس به‌عنوان ابزار نگارش بود. با قلم مثلثی شکل امکان ترسیم خطوط منحنی وجود نداشت. بنابراین تمام علائم تصویری باید از گوه‌هایی با جهات مختلف تشکیل می‌شدند: عمودی ، افقی ( ) و مایل ( یا ).

بعدها یک گوه‌ی دیگر نیز به این سه نوع افزوده شد؛ این حرف شبیه یک پرانتز زاویه داری بود که به سمت راست گشوده می‌شد () و برای رسم آن، کمی قلم را از حالت عمودی کج می‌کردند. از این چهار شکل باید برای ترسیم تمام حروف استفاده می‌شد زیرا اضافه کردن اشکال دیگر، هم برای دست خسته کننده بود و نیز بسیار وقت گیر می‌شد.

برخلاف حروف تصویری (هیروگلیف) که تا نزدیکی پایان تمدن مصریان به‌صورت یک دستگاه نوشتاری تصویری باقی ماند، حروف خط میخی کم‌کم ساده شدند به‌طوری که پس از مدتی، دیگر اشکال اصلی، علائم تصویری قابل تشخیصی نبودند. نزدیک‌ترین شکلی که بابلیان می‌توانستند از تصویر قدیمی دایره برای نمایش خورشید ترسیم کنند عبارت بود از ،که بعدها سادتر شده و به شکل 

در آمد. به‌همین ترتیب نماد ماهی که ابتدا به شکل بود سرانجام به‌صورت در آمد. به‌نظر می‌رسد که تأثیر نهایی خط میخی برای عوام "مثل رد پای پرندگان بر روی شن مرطوب" باشد. تنها در طی دو سده اخیر بود که دانشمندان توانستند معنای نوشته‌های موجود از خط میخی را دریابند و بفهمند که آن‌ها متن‌اند یا صرفاً جنبه تزئینی داشتند.

۱-۴-۲ دستگاه شمارش ارزش مکانی بابلیان

مطالعات گسترده انجام شده طی قرن گذشته نشان می‌دهد که ریاضیات بابلیان بسیار پیشرفته‌تر از آن چیزی بوده که پیش‌تر متصور می‌شد. بابلی‌ها تنها مردمی بودند که پیش از یونانیان حتی به‌طور نسبی از دستگاه شمارش ارزش مکانی بهره گرفتند. این‌گونه دستگاه‌ها بر مبنای نظریه ارزش مکانی قرار دارند که در آن ارزش هر نماد به موقعیتی که در نمایش عددی اشغال می‌کند بستگی دارد. مزیت عظیم چنین دستگاه‌هایی بر سایر دستگاه‌ها این است که مجموعه محدودی از نمادها برای بیان اعداد هر قدر کوچک یا بزرگ کافی است. مقیاس شمارش بابلیان ده‌دهی نبود بلکه شصت تایی بود، به‌طوری که با هر حرکت یک رقم به سمت چپ ارزش آن با ضریب ۶۰ افزایش می‌یافت. وقتی تمام اعداد در دستگاه شصت‌تایی نمایش داده می‌شوند، آخرین جایگاه برای اعداد ۱ تا ۵۹ حفظ می‌شود، جایگاه یکی مانده به آخر برای مضارب ۶۰، جایگاه بعدی برای مضارب $۶۰^{۲}$ و به‌همین ترتیب. به‌عنوان مثال عدد بابلی ۴ ۲۵ ۳ احتمالاً بیانگر عدد زیر بود:

$$۳\times۶۰^{۲}+۲۵\times۶۰+۴=۱۲,۳۰۴$$

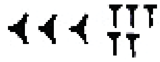
و نه عدد

$$۳\times۱۰^{۳}+۲۵\times۱۰+۴=۳۲۵۴$$

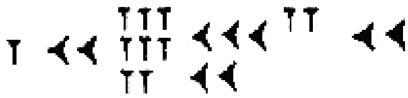
که در دستگاه ده‌دهی ما وجود دارد.

معایب شمارش حروف تصویری مصری آشکارند. حتی نمایش اعداد کوچک نیازمند نمادهای نسبتاً زیادی بوده (برای نمایش عدد ۹۹۹ حداقل ۲۷ نماد هیروگلیف لازم بود)؛ و با هر توان جدید ۱۰، نماد جدیدی هم باید اختراع می‌شد. در مقابل آن، نظریه عددی بابلیان بر کاراکترهای دو گوه‌ای تأکید می‌کرد. ساده‌ترین گوه مستقیم ( )

ارزش ۱ داشت و می‌توانست ۹ بار مورد استفاده قرار گیرد، درحالی‌که گوه پهن یک وری () نماینده ۱۰ بود و می‌توانست ۵بار مورد استفاده واقع شود. بابلیان که در مسیر مصریان پیش می‌رفتند تمام اعداد دیگر را از ترکیب این نمادها ساختند و هرکدام را هر چند بار که لازم بود به‌کار می‌بردند. پس از استفاده از هر دو نماد، نمادهای نشانگر ده‌ها، در سمت چپ نمادهای نشانگر یک‌ها قرار می‌گرفتند، همانند

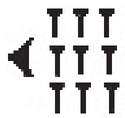


فضاهای ظاهر شده مابین گروه‌های به هم چسبیده متناظر با کم شدن توان‌های ۶۰ است که از چپ به راست خوانده می‌شوند. همان‌طور که



می‌تواند به‌عنوان $1\times 60^3+28\times 60^2+52\times 60+20=319,940$ تفسیر شود. بابلی‌ها گاهی نقصان دستگاه‌شان را با به‌کار بردن یک نماد تفریق  رها می‌کردند. بدین‌ترتیب اعدادی از قبیل ۱۹ را می‌توانستند به‌صورت ۱−۲۰ بنویسند

بجای اینکه از یک نماد ده‌تایی و در کنار آن نه تا یک به‌صورت زیر استفاده نمایند:



در دستگاه بابلی‌ها مشکلی وجود داشت و آن اینکه، هیچ نمادی برای صفر در نظر گرفته نشده بود. مثلاً راهی برای متمایز قرار دادن دو عدد

$$1\times 60^2+0\times 60+24=3624 \quad \text{و} \quad 1\times 60+24=84$$

وجود نداشت و هر دو با نماد مشترک

نمایش داده می‌شدند.

برای پرهیز از ابهام فقط می‌شد به بافت متن اعتماد کرد. اغلب وجود یک فضای خالی حاکی از فقدان یک مکان شصت‌تایی بود، اما این قانون به‌دقت اجرا نشده و اغلب به سردر گمی منجر می‌شد. گاهی در دوباره‌نویسی لوح‌ها اگر به فضاهای خالی توجه نمی‌شد، ارقام را نزدیک یکدیگر قرار می‌دادند و لذا ارزش مکانی اعداد تغییر می‌یافت. (از آنجایی‌که تنها در دستگاه ارزش مکانی وجود فضای خالی باید مشخص شود، مصریان با این مشکل مواجه نشدند.) از سال ۳۰۰ پیش از میلاد به بعد نماد جدیدی به شکل  یا  بنام "*جدا کننده*" معرفی شد تا بجای جاهای خالی قرار گرفته و نشان دهنده فضای خالی بین دو رقم در داخل یک عدد باشد. بدین‌ترتیب عدد ۸۴ به راحتی از عدد ۳۶۲۴ قابل تشخیص بود چرا که دومی بدین شکل نشان داده می‌شد:

سردرگمی پایان نیافت، زیرا نماد جدا کننده بابلیان ـها در میانه عدد مورد استفاده قرار می‌گرفت و هنوز هیچ نمادی برای نمایش فقدان رقم در پایان یک عدد وجود نداشت. در حدود سال ۱۵۰ میلادی بطلمیوس، ستاره شناس اهل اسکندریه، شروع به استفاده کردن از *اومیکرون*[۲۲] شبیه به عدد صفر ما نه فقط در میانه اعداد بلکه در انتهای آن‌ها نمود (o اولین حرف از کلمه یونانی $ov\delta\varepsilon v$ به معنای هیچ است). مدرکی در دست نیست که نشان دهد بطلمیوس o را تنهایی به‌عنوان یک عدد در نظرگرفته باشد که بتواند با سایر اعداد وارد محاسبات شود.

فقدان نماد صفر در انتهای اعداد به معنای این بود که هیچ راهی وجود نداشت که بتوان گفت آیا کم‌ترین ارزش مکانی یک واحد است، مضربی از ۶۰ یا $۶۰^{۲}$ است یا حتی مضربی از $\frac{۱}{۶۰}$ است. مقدار نماد ۲۲۴ (در خط میخی، ) می‌توانست برابر با

$$۲\times۶۰+۲۴=۱۴۴$$

باشد. اما تفاسیر دیگر از آن

۲۲. omicron

$$۲\times۶۰^{۲}+۲۴\times۶۰=۸۶۴۰$$

یا اگر به معنی کسر بگیریم برابر با

$$۲+\frac{۲۴}{۶۰}=۲\frac{۲}{۵}$$

نیز خواهد بود.

از این‌رو بابلیان باستان هیچگاه به یک دستگاه ارزش مکانی کامل دست نیافتند. نمایش عددی آن‌ها ترتیب نسبی ارقام را بیان کرده و متن فقط بزرگی اعداد نوشته شده با دستگاه شصت‌تایی را تعیین می‌کرد. این بزرگی مبنا معمولاً مقدار عددی مورد نظر را مشخص می‌کرد. برای حل این نقیصه اجازه دهید از این پس از یک "نقطه ویرگول" برای جدا کردن اعداد صحیح از کسرها استفاده کرده و بقیه جایگاه‌های مکانی شصت‌تایی را با "ویرگول" از یکدیگر جدا کنیم. با این توافق ۲۵,۰,۳;۳۰ و ۲۵,۰;۳,۳۰ به‌ترتیب به شکل زیر در خواهند آمد:

$$۲۵\times۶۰^{۲}+۰\times۶۰+۳+\frac{۳۰}{۶۰}=۹۰,۰۰۳\frac{۱}{۲}$$

و

$$۲۵\times۶۰+۰+\frac{۳}{۶۰}+\frac{۳۰}{۶۰^{۲}}=۱۵۰۰\frac{۷}{۱۲۰}.$$

دقت کنید که نه نقطه ویرگول و نه ویرگول هیچ معادلی در خط میخی اولیه نداشتند.

این سؤال که چگونه دستگاه شصت‌تایی مدت‌ها پیش مطرح شده، در طی زمان جواب‌های مختلفی به آن داده شده است. به قول «تئون[۲۳]» از اسکندریه که از مفسران قرن چهارم بود، ۶۰ مناسب‌ترین گزینه بود زیرا کوچک‌ترین عدد در میان اعدادی بود که بیشترین تعداد مقسوم علیه‌ها را داشت و بنابراین کار کردن با آن راحت بود. به‌نظر می‌رسد منظور تئون این باشد که چون ۶۰ تعداد زیادی مقسوم علیه مناسب یعنی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰ و ۳۰ داشت، به کمک آن بسیاری از کسرها را می‌شد به راحتی نمایش داد. مثلاً $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ به‌وسیله اعداد صحیح ۳۰، ۲۰ و ۱۵.

---

23. Theon

و $\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0;30$

و $\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0;20$

$\frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0;15.$

کسرهایی که حاصل‌تقسیم آن‌ها بر ۶۰، باقی‌مانده داشت به‌صورت اعداد متناهی گرد می‌شدند، بنابراین هر عدد به شکل یک عدد صحیح در می‌آمد. نتیجه این کار رسیدن به سهولتی در محاسبه بود که از دست مصریان در رفته بود. آن‌ها تمام کسرها را به مجموع کسرهایی با صورت ۱ تقلیل می‌دادند.

دیگران ریشه‌ای "طبیعی" را برای دستگاه شصت‌تایی در نظر می‌گرفتند؛ نظریه آن‌ها این بود که بابلیان اولیه سال را ۳۶۰ روز در نظر گرفته و ابتدا مبنای بالایی از ۳۶۰ را برگزیدند که بعدها به ۶۰ تقلیل یافت. اما شاید قانع کننده‌ترین توجیه این باشد که عدد ۶۰ از ترکیب دو ملت که یکی دستگاه ده دهی و دیگری دستگاه ۶ تایی را (با امتیاز قابل تقسیم بودن بر ۲ و ۳) آورده بود، حاصل شده. (ریشه دستگاه ده‌دهی منطقی نیست بلکه تشریحی است؛ انسان‌ها از یک چرتکه طبیعی– یعنی انگشتان دست و پایشان– برخوردارند.)

مزایای دستگاه ارزش مکانی بابلیان بر دستگاه محاسباتی جمعی مصریان با کسرهای واحد چنان آشکار بود که این شیوه به ابزار اصلی محاسبه در میان ستاره‌شناسان بدل شد. کاربرد کامل این نمادهای عددی را در اثر برجسته بطلمیوس بنام «*مجموعه بزرگ*» *مگال سینتاکسیس*[24] مشاهده می‌کنیم. بعدها اعراب این دستگاه را با نام عجیب «*بزرگ‌ترین*» *المجست*[25] به غرب منتقل کردند. *المجست* آنچنان دستگاه‌های پیش از خود را تحت‌الشعاع قرار داد که تا زمان کوپرنیک، کتاب اصلی ستاره‌شناسی محسوب می‌شد. بطلمیوس در یکی از فصل‌های اولیه اعلام کرد که به منظور پرهیز از دردسرهای کسرهای مصری، تمام محاسبات خود را با دستگاه شصت‌تایی انجام خواهد داد.

---

24. Megal Syntaxis
25. Almagest

۱–۵ مسائل

هریک از اعداد زیر را با نماد خط میخی بابلی بیان کنید.

الف) ۱۰۰۰

ب) ۱۰,۰۰۰

ج) ۱۰۰,۰۰۰

د) ۱۲۳۴

ه) ۱۲,۳۴۵

و) ۱۲۳,۴۵۶

۲. هریک از نمادهای زیر را به عددی در دستگاه خودمان تبدیل کنید.

الف) 

ب) 

ج) 

۳. کسرهای $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۲۴}$، $\frac{۱}{۴۰}$ و $\frac{۵}{۱۲}$ را در نماد شصت‌تایی بیان کنید.

۴. این اعداد را از نماد شصت‌تایی به دستگاه خودمان تبدیل کنید.

الف) ۱,۲۳,۴۵

ب) ۱۲,۳,۴۵

ج) ۰,۱۲,۳,۴۵

د) ۱,۲۳,۴۵

عدد ۱۲,۳,۴۵,۶ را در ۶۰ ضرب کنید. قانونی ساده برای ضرب هر عدد شصت‌تایی در ۶۰ و در $۶۰^{۲}$ بیان کنید.

فصل دوم

ریاضیات در تمدن‌های نخستین

هدف‌های آموزشی فصل دوم

الف) هدف کلی

هدف کلی از ارائه این فصل آشنایی با ریاضیات در تمدن‌های نخستین از جمله مصر می‌باشد.

ب) هدف‌های آموزشی

دانشجو پس از مطالعه و فراگیری این فصل باید:

- با عمل ضرب به طریقه‌ای که در پاپیروس رایند ثبت شده است، آشنا شده و قادر به ضرب دو عدد به آن روش باشد.
- قادر به تقسیم دو عدد به روش ضرب مصری باشد.
- مطابق با آنچه در پاپیروس رایند آمده بتواند کسری را به کسرهای واحد تجربه کند.
- قادر به حل برخی از مسائل هندسی پاپیروس رایند باشد.
- چهار مسأله معروف پاپیروس رایند را بداند.
- با هندسه مصری جهت تخمین مساحت دایره و حجم هرم بریده آشنا شده باشد.
- کاربرد بابلیان از قضیه فیثاغورس را بداند.
- قادر به حل مسائل آخر هر بخش باشد.

۲-۱ پاپیروس رایند[۲۶]

[26]. The Rhind Papyrus

۲-۱-۱ پاپیروس ریاضیات مصری

احتمالاً به جزء ستاره‌شناسی، ریاضیات جزء قدیمی‌ترین علوم محض است که دائماً دنبال شده است. سرچشمه آن نامشخص است. خیلی اوقات شنیده‌ایم که در ریاضیات تمام راه‌ها به یونان ختم می‌شوند. اما خود یونانیان نظر دیگری راجع به مکان آغاز ریاضیات دارند. یکی از نظریه‌ها توسط ارسطو مطرح شده که در کتاب فلسفه ماوراءالطبیعه خود نوشته است: "علوم ریاضی از همسایگی مصر سرچشمه گرفته زیرا در آنجا طبقه کشیشان، رفاه و فراغت داشتند." این حرف تا حدی صحت دارد زیرا چشمگیرترین پیشرفت‌های ریاضی در عصری رخ دادند که یک طبقه فارغ و مرفه زمان خود را به جستجوی علم اختصاص می‌دادند. نظریه‌ای معمولی‌تر آن است که ریاضیات به خاطر نیازهای عملی و کاربردی پدید آمده است. مصریان برای معاملات و تجارت روزمره، و همچنین دولت برای تعیین مالیات، محاسبه بهره وام‌ها، حساب کردن دستمزدها، و تهیه کردن یک تقویم مناسب، به محاسبه احتیاج داشت. قوانین ساده هندسه برای تعیین مرزهای مزارع و محتوای انبارهای غله به‌کار گرفته می‌شدند. همانطور که هرودوت، مصر را هدیه نیل نامید، ما می‌توانیم هندسه را هدیه دوم نیل بنامیم. چرا که با طغیان‌های سالیانه دره نیل، لازم می‌شد که محاسبان مالیات میزان زمین به‌دست آمده یا از دست رفته را معین کنند. این دیدگاه مفسر یونانی با نام پروکلوس[۲۷] (۴۸۵-۴۱۰ میلادی) است که کتابش با نام «*تفسیری بر اولین کتاب عناصر اقلیدس*» منبع ارزشمند اطلاعات ما در مورد هندسه پیش از اقلیدس است:

> براساس بیشتر نظرات، هندسه ابتدا در میان مصریان و برای اندازه‌گیری زمین‌هایشان پیدا شد. این کار برای آن‌ها لازم بود زیرا طغیان‌های نیل به نابودی مرزهای میان املاک شان منجر می‌شد.

بیشتر دانش ما از نظام ریاضیات در مصر از دو منبع بزرگ پاپیروس که هرکدام با نام مالک پیشین خود شناخته می‌شوند– پاپیروس رایند و پاپیروس گولنیشکف[۲۸] – به‌دست آمده. مورد دوم گاهی با نام پاپیروس مسکو شناخته می‌شود زیرا در موزه هنرهای زیبای مسکو نگهداری می‌شود. پاپیروس رایند در سال ۱۸۵۸ توسط یک اسکاتلندی بنام ا. هنری رایند[۲۹] در لوکسور[۳۰] مصر خریداری شد که او بعداً طی وصیت

---

[27]. Proclus
[28]. Golenischev
[29]. A. Henry Rhind

نامه‌اش آن را به موزه بریتانیا واگذار کرد. با تضعیف وضع سلامتی این وکیل جوان، او به اقلیم معتدل‌تر مصر نقل مکان کرد و در آنجا باستان‌شناس شد و در حفاری مقبره‌های بتان تخصص یافت. می‌گویند این پاپیروس در شهر تبس[31] در ویرانه‌های ساختمان کوچکی در نزدیکی رامسیوم[32] پیدا شده است.

پاپیروس رایند در حدود سال ۱۶۵۰ پیش از میلاد توسط کاتبی بنام «اهمس[33]» با خط مقدس نوشته شده بود (نوعی نگارش شکسته هیروگلیفی که به‌نظر می‌رسید با قلم و جوهر نوشته شده بود). اگرچه این پاپیروس در اصل یک طومار با طول تقریبی ۱۸ فوت و ۱۳ اینچ بود، اما وقتی به موزه بریتانیا رسید دو قسمت شده و بخش مرکزی آن ناپدید شد. دو نقل قول وجود دارد، یکی اینکه احتمالاً این طومار در موقع باز کردن توسط شخصی که از مهارت کار کردن با چنین اسناد حساسی برخوردار نبوده پاره شده و یا آنکه این سند توسط دو نفر پیدا شده بوده که آن را با هم قسمت کردند. در هرحال به‌نظر می‌رسید که بخش کلیدی پاپیروس مذکور برای همیشه از دست رفته، تا آنکه یکی از اتفاقات شانسی که گاهی در باستان‌شناسی رخ می‌دهند اتفاق افتاد. حدود چهار سال پس از آنکه پاپیروس توسط رایند خریداری شد، مصرشناس آمریکایی، ادوین اسمیت، چیزی را که فکر می‌کرد یک پاپیروس پزشکی است فروخت. بعداً معلوم شد که این پاپیروس تقلبی است زیرا از چسباندن قسمت‌هایی از پاپیروس‌های دیگر بر روی یک طومار قلابی درست شده بود. با مرگ اسمیت (در سال ۱۹۰۶) کلکسیون او متشکل از آثار باستانی مصر، به "جامعه تاریخی نیویورک" سپرده شد و در سال ۱۹۲۲ معلوم شد که تکه‌های چسبانده شده بر روی طومار قلابی در واقع به پاپیروس رایند تعلق داشته است. رمزگشایی این پاپیروس زمانی کامل شد که تکه‌های گم شده به موزه بریتانیا آورده شده و در جای مناسب خود قرار گرفتند. رایند در زمان خرید پاپیروس خود یک دست نوشته چرمی کوچک، طومار چرمی ریاضیات مصر، را نیز خریداری کرد؛ اما به خاطر شرایط بسیار شکننده این سند، تا بیش از ۶۰ سال بعد از آن، هیچ کس قادر به بررسی آن نبود.

---

30. Luxor
31. Thebes
32. Ramesseum
33. Ahmes

۲-۲ حساب مصری

۲-۲-۱ ضرب مصری باستان

تنها رازهای باقی‌مانده در پاپیروس رایند چگونگی ضرب و تقسیم بود. با این حال، ۸۵ مسأله موجود در آن به ما یک ایده شفاف و زیبایی از شخصیت ریاضی‌دانان مصری می‌دهد. حساب مصری اساساً "جمعی" بود، یعنی ضرب و تقسیم را با انجام تکرار عمل جمع انجام می‌دادند. ضرب دو عدد با مضاعف کردن یکی از آن اعداد و سپس با جمع کردن آن اعداد انجام می‌شد. برای نمونه، برای یافتن ضرب ۱۹ در ۷۱، فرض می‌کنیم مضروب ۷۱ باشد. با مضاعف کردن داریم:

۱	۷۱
۲	۱۴۲
۴	۲۸۴
۸	۵۶۸
۱۶	۱۱۳۶

اینجا توقف می‌کنیم. زیرا در مرحله یعدی ضریبی از ۷۱ به‌دست می‌آید که بزرگ‌تر از ۱۹ است. زیرا ۱۶+۲+۱=۱۹. کنار این ضرایب علامت می‌گذاریم تا مشخص شود که آن‌ها را باید با هم جمع کنیم. مسأله‌ی ضرب ۱۹ در ۷۱ به‌صورت زیر می‌شود:

✓ ۱	۷۱	
✓ ۲	۱۴۲	
۴	۲۸۴	
۸	۵۶۸	
✓ ۱۶	۱۱۳۶	
۱۹	۱۳۴۹	مجموع

با جمع اعداد ستون سمت راست که مقابل‌شان علامت خورده است، ریاضی‌دانان مصری جواب مورد نظر، ۱۳۴۹، را به‌دست می‌آوردند. به این‌صورت:

۱۳۴۹=۷۱+۱۴۲+۱۱۳۶=(۱+۲+۱۶)۷۱=۱۹×۷۱

اگر عدد ۱۹ را مضروب و ۷۱ را ضریب انتخاب می‌کردیم، کار به‌صورت زیر درمی‌آمد:

	۱۹	✓ ۱
	۳۸	✓ ۲
	۷۶	✓ ۴
	۱۵۲	۸
	۳۰۴	۱۶
	۶۰۸	۳۲
	۱۲۱۶	✓ ۶۴
مجموع	۱۳۴۹	۷۱

زیرا ۶۴+۴+۲+۱=۷۱. اینک با جمع مضارب ۱۹، دوباره عدد ۱۳۴۹ به‌دست می‌آید.

این روش ضرب کردن با مضاعف کردن و جمع کردن کارا می‌باشد زیرا هر عدد صحیح (مثبت) را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های متمایز ۲ نوشت، یعنی به‌صورت مجموعی از جملات دنباله ...,۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲ نوشت.

تقسیم مصری می‌بایست به‌صورت ضرب در وارون توصیف شود، به‌طوری که مقسوم‌علیه مکرراً مضاعف می‌شود تا مقسوم را بدهد. برای نمونه برای تقسیم ۹۱ بر ۷، به دنبال عددی مانند x بودند که $۷x=۹۱$. این عدد با دوباره مضاعف کردن ۷ به‌دست می‌آید تا جایی‌که مجموع ۹۱ حاصل گردد. روند کار به‌صورت زیر است:

✓ ۷	۱
۱۴	۲
✓ ۲۸	۴
✓ ۵۶	۸
مجموع ۹۱	۱۳

با یافتن ۹۱=۵۶+۲۸+۷، توان‌های ۲ متناظر با اعداد علامت‌زده شده را با هم جمع می‌کنیم: ۱۳=۸+۴+۱، در این‌صورت خارج‌قسمت مورد نظر به‌دست می‌آید. مزیتی که فرآیند تقسیم مصری دربر داشت این بود که تقسیم به‌عنوان عملی جدید ظاهر نشد.

از آنجا که تقسیم کردن همواره به سادگی مثالی که مطرح کردیم نبود، مجبور شدند کسرها را معرفی کنند. برای تقسیم مثلاً ۳۵ بر ۸، ابتدا مقسوم‌علیه، یعنی ۸، را مضاعف می‌کردند تا جایی‌که عدد بعدی از مقسوم، یعنی ۳۵، تجاوز می‌کرد. سپس شروع به نصف کردن مقسوم‌علیه می‌کردند تا باقی‌مانده کامل گردد. محاسبات به‌صورت زیر خواهد بود:

	۸	۱
	۱۶	۲
	۳۲ ✓	۴
	۴	$\frac{۱}{۲}$
	۲	$\frac{۱}{۴}$
	۱	$\frac{۱}{۸}$
مجموع	۳۵	$۴+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$

با مضاعف کردن ۱۶، ۳۲ به‌دست می‌آید. بنابراین آنچه کم است برابر ۳=۳۲−۳۵ است. نصف ۸ برابر ۴، نصف ۴ برابر ۲ و بالاخره نصف ۲ برابر ۱ است که اگر یک چهارم و یک هشتم را جمع کنیم عدد مورد نیازمان، یعنی ۳، به‌دست می‌آید. لذا خارج قسمت مورد نظر عبارت است $۴+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$.

ریاضی‌دان مصری در محاسبه با کسرها با مشکلاتی روبرو می‌شد که به خاطر امتناع از به تصویر کشیدن کسرهایی شبیه به $\frac{۲}{۵}$ بود. تنها کسرهایی که با آن‌ها می‌توانستند عملیات انجام دهند کسرهای واحد بود، یعنی کسرهایی به شکل $\frac{۱}{n}$ که در آن n یک عدد طبیعی است. مصریان یک کسر واحد را با قرار دادن یک بیضی کشیده

روی عدد هیروگلیفی که در مخرج باید بیاید نشان می‌دادند. لذا $\frac{۱}{۴}$ به‌صورت و یا

$\frac{۱}{۱۰۰}$ به‌صورت ۹ نوشته می‌شد. در مورد عدد $\frac{۲}{۳}$ استثناً از نماد خاصی به شکل استفاده می‌شد و تمام کسرها می‌بایست به نحوی به مجموع کسرهای واحد با مخرج‌های متفاوت تجزیه می‌شدند. بنابراین، برای نمونه $\frac{۶}{۷}$ به‌صورت

$$\frac{۶}{۷}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۲۸}$$

نمایش داده می‌شد. البته می‌دانیم که $\frac{۶}{۷}$ را می‌توان به‌صورت

$$\frac{۶}{۷}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}$$

نیز نوشت. اما مصریان فکر می‌کردند که این نمایش هم پوچ است و هم متناقض با نحوه‌ی نوشتارشان. در چشم آنان یک و فقط یک بخش از هر چیزی می‌توانست یک هفتم آن چیز باشد. احتمالاً کاتبان نسخ تاریخی کسری واحد و معادل برای $\frac{۶}{۷}$ به روش تقسیم معمولی ۶ بر ۷ می‌یافتند:

۱	۷	
$\frac{۱}{۲}$	$۳+\checkmark\frac{۱}{۲}$	
$\frac{۱}{۴}$	$۱+\frac{۱}{۲}+\checkmark\frac{۱}{۴}$	
$\frac{۱}{۷}$	۱	
$\frac{۱}{۱۴}$	$\checkmark\frac{۱}{۲}$	
$\frac{۱}{۲۸}$	$\checkmark\frac{۱}{۴}$	
$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۲۸}$	۶	مجموع

۲-۲-۲ جدول کسرهای واحد

به منظور تسهیل در چنین تجزیه‌هایی به کسرهای واحد، جداولی به‌عنوان رفرنس مورد نیاز بود زیرا به خطر سپردن آن‌ها غیرممکن بود. در ابتدای پاپیروس رایند چنین جدولی وجود دارد که در آن کسرهای با مخرج ۲ و مخرج یک عدد فرد بین ۵ و ۱۰۱ تفکیک شده‌اند. این جدول که در حدود یک سوم طول ۱۸ فوتی طومار را اشغال کرده است در بین پاپیروس‌های مصر باستان که تاکنون به‌دست‌مان رسیده است، یکی از با ارزش‌ترین جداول حساب می‌باشد. ابتدا کاتب این نسخه خطی بیان می‌کند که چه تجزیه‌ای از $۲/n$ را انتخاب کرده است، سپس با ضرب معمولی ثابت می‌کند که انتخابش درست بوده است. به این شکل که او عبارت مورد نظر را در عدد صحیح فرد n ضرب می‌کند تا ۲ حاصل شود. در هیچ جایی هیچ اطلاع مختصری که بتوان به‌وسیله آن پی به تکنیک به‌کار رفته برای دستیابی به این تجزیه برد، وجود ندارد.

کسرهای $۲/n$ که مخرج‌هایشان بر ۳ قابل‌قسمت باشد از قانون کلی زیر برخوردارند:

$$\frac{۲}{۳k}=\frac{۱}{۲k}+\frac{۱}{۶k}$$

نمونه‌ای از آن کسر $\frac{۲}{۱۵}$ است (در حالتی که $k=۵$ است) که به‌صورت

$$\frac{۲}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۳۰}$$

نوشته می‌شود. اگر کسرهایی که به‌صورت $۲/(۳k)$ هستند را کنار بگذاریم مابقی جدول $۲/n$ به‌صورت زیر می‌شود:

از زمانی که اولین ترجمه برای پاپیروس انجام شد ریاضی‌دانان سعی کردند روشی را که کاتب این نسخه خطی در تهیه این جدول به‌کار بسته است را دریابند. مثلاً چرا در بین تحویل‌های مختلف به کسرهای واحد، برای $n=۱۹$، تجزیه

$$\frac{۲}{۱۹}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۷۶}+\frac{۱}{۱۱۴}$$

بجای

$$\frac{۲}{۱۹}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۵۷}+\frac{۱}{۲۲۸}$$

انتخاب شده است؟ قانون مشخصی که تمام نتایج جدول را شامل گردد وجود ندارد.

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۵}$$

$$\frac{۲}{۷}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲۸}$$

$$\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶۶}$$

$$\frac{۲}{۱۳}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۵۲}+\frac{۱}{۱۰۴}$$

$$\frac{۲}{۱۷}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۶۸}$$

$$\frac{۲}{۱۹}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۷۶}+\frac{۱}{۱۱۴}$$

$$\frac{۲}{۲۳}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۷۶}$$

$$\frac{۲}{۲۵}=\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۷۵}$$

$$\frac{۲}{۲۹}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۵۸}+\frac{۱}{۱۷۴}+\frac{۱}{۲۳۲}$$

$$\frac{۲}{۲۹}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۵۸}+\frac{۱}{۱۷۴}+\frac{۱}{۲۳۲}$$

$$\frac{۲}{۳۵}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۴۲}$$

$$\frac{۲}{۳۷}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۱۱۱}+\frac{۱}{۲۹۶}$$

$$\frac{۲}{۴۱}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۲۴۶}+\frac{۱}{۳۲۸}$$

$$\frac{۲}{۴۳}=\frac{۱}{۴۲}+\frac{۱}{۸۶}+\frac{۱}{۱۲۹}+\frac{۱}{۳۰۱}$$

$$\frac{۲}{۴۷}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۱۴۱}+\frac{۱}{۴۷۰}$$

$$\frac{۲}{۴۹}=\frac{۱}{۲۸}+\frac{۱}{۱۹۶}$$

$$\frac{۲}{۴۹}=\frac{۱}{۲۸}+\frac{۱}{۱۹۶}$$

$$\frac{۲}{۵۳}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۳۱۸}+\frac{۱}{۷۹۵}$$

$$\frac{۲}{۵۵}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۳۳۰}$$

$$\frac{۲}{۵۹}=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۲۳۶}+\frac{۱}{۵۳۱}$$

$$\frac{۲}{۶۱}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۲۴۴}+\frac{۱}{۴۸۸}+\frac{۱}{۶۱۰}$$

$$\frac{۲}{۶۵}=\frac{۱}{۳۹}+\frac{۱}{۱۹۵}$$

$$\frac{۲}{۶۷}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۳۳۵}+\frac{۱}{۵۳۶}$$

$$\frac{۲}{۷۱}=\frac{۲}{۴۰}+\frac{۱}{۵۶۸}+\frac{۱}{۷۱۰}$$

$$\frac{۲}{۷۳}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۱۹}+\frac{۱}{۲۹۲}+\frac{۱}{۳۶۵}$$

$$\frac{۲}{۷۷}=\frac{۱}{۴۴}+\frac{۱}{۳۰۸}$$

$$\frac{۲}{۷۹}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۳۷}+\frac{۱}{۳۱۶}+\frac{۱}{۷۹۰}$$

$$\frac{۲}{۸۳}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۳۲}+\frac{۱}{۴۱۵}+\frac{۱}{۴۹۸}$$

$$\frac{۲}{۸۵}=\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۲۵۵}$$

$$\frac{۲}{۸۹}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۵۶}+\frac{۱}{۵۳۴}+\frac{۱}{۸۹۰}$$

$$\frac{۲}{۹۱}=\frac{۱}{۷۰}+\frac{۱}{۱۳۰}$$

$$\frac{۲}{۹۵}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۸۰}+\frac{۱}{۵۷۰}$$

$$\frac{۲}{۹۷}=\frac{۱}{۵۶}+\frac{۱}{۶۷۹}+\frac{۱}{۷۷۶}$$

$$\frac{۲}{۱۰۱}=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۲۰۲}+\frac{۱}{۳۰۳}+\frac{۱}{۶۰۶}$$

آخرین سطر در جدول که مربوط به تقسیم ۲ بر ۱۰۱ است، به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{۲}{۱۰۱}=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۲۰۲}+\frac{۱}{۳۰۳}+\frac{۱}{۶۰۶}$$

این تنها راه ممکن برای تجزیه $\frac{۲}{۱۰۱}$ به بیش از چهار کسر واحد متفاوت با مخرج‌های کمتر از ۱۰۰۰ است. این مورد حالتی خاص از فرمول کلی

$$\frac{۲}{n}=\frac{۱}{n}+\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۳n}+\frac{۱}{۶n}$$

است. به کمک فرمول بالا می‌توان جدولی جدید برای تمام $۲/n$ ها با چهار جمله در تجزیه تولید کرد:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۸}$$

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۳۰}$$

$$\frac{۲}{۷}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۲۱}+\frac{۱}{۴۲}$$

$$\frac{۲}{۹}=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۵۴}$$

هر چند که احتمالاً کاتب از این موضوع باخبر بوده، این تجزیه‌ها را نپذیرفته و هیچ‌جا در جدولی ثبت نکرده (به جزء در آخرین سطر مربوط به $\frac{۲}{۱۰۱}$)، چرا که خیلی تجزیه‌های "ساده‌تر" در دسترس موجود بوده است. حتی در ذهن ما (در عصر جدید)، به‌نظر می‌آید که کاتب این نسخه خطی اصول مشخصی را در تهیه لیستش دنبال می‌کرده است. ما متوجه شده‌ایم که:

۱. ترجیح داده می‌شد از مخرج‌های کمتر از ۱۰۰۰ استفاده شود.

۲. کسرهای واحد هر چه کوچک‌تر باشند بهتر است. همچنین تعدادشان بیشتر از چهارتا نیست.

۳. مخرج‌های زوج حتی مطلوب‌تر از مخرج‌های فرد بودند، بخصوص در جمله‌ی ابتدایی.

۴. کوچک‌ترین مخرج‌ها ابتدا می‌آمدند و هیچ دومخرج برابر هم نبودند.

اینکه چرا این احکام انتخاب شده بودند، مشخص نیست.

۲-۳ چهار مسأله از پاپیروس رایند

۲-۳-۱ روش جاگذاری کاذب

پاپیروس رایند شامل تعدادی مسأله "تکمیلی" است. این مسائل غالباً با جمع کسرهای واحد شروع شده و بیشتر به دنبال کسرهای واحدی‌اند که جمعشان برابر ۱ می‌شود. مثلاً مسأله ۲۲ در مورد تکمیل کردن جمع $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳۰}$، به‌طوری که مجموع ۱ گردد می‌پرسد. در واقع با نماد جدید، کاتب این نسخه خطی محاسبات را چنین نمایش می‌دهد که ابتدا باید یک عدد مناسب N انتخاب شود و سپس کسرهای واحد $۱/n_۱,...,۱/n_k$ چنان انتخاب گردند که در معادله زیر صدق کنند:

$$\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{n_۱}+...+\frac{۱}{n_k}\right)N=N$$

لذا مجموع نشان داده شده در بالا باید برابر ۱ می‌شود. با گرفتن N مساوی ۳۰ (مخرج مشترک مخرج‌های داده شده) ملاحظه می‌شود که

$$\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳۰}\right)۳۰=۲۰+۱=۲۱$$

که از عدد مورد نظرمان، یعنی ۳۰، ۹ تا کمتر است. اما

$$\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}\right)۳۰=۶+۳=۹$$

با جمع دو معادله به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}\right)۳۰=۳۰$$

و لذا مجموع تکمیل شده مورد نظر عبارت است از:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}=۱$$

مصریان دست‌کم در حد مبتدی، پیش از اروپاییان به یکی از شیوه‌های محبوب قرون وسطی، یعنی جاگذاری کاذب، دست یافتند. این شیوه پس از فراگیری از اعراب، به یکی از ویژگی‌های برجسته متون ریاضی اروپاییان از *لیبر آباچی*[۳۴] (۱۲۰۲) فیبوناچی گرفته تا ریاضیات قرن شانزدهم بدل شد. با توسعه نمادگرایی جبری، قانون از آثار پیشرفته‌تر رخت بر بست. در زیر به مثالی برگرفته شده از *لیبر آباچی* اشاره می‌کنیم. مردی تعدادی تخم مرغ با قیمت ۷ عدد ۱ دینار خریده و آن‌ها را با بهای ۵ عدد ۱ دینار می‌فروشد، و بدین‌ترتیب ۱۹ دینار سود می‌برد. سؤال این است: او چقدر پول سرمایه گذاری کرده؟ به‌صورت جبری این مسأله را می‌توان با معادله زیر نشان داد.

$$\frac{۷x}{۵}-x=۱۹\,.$$

در جاگذاری کاذب با فرض ۵ بجای مجهول خواهیم داشت: $\frac{۷}{۵}\times۵-۵=۲$. این ۲ در زبان رسای فیبوناچی، "شبیه ۱۹ می‌بود" (این به ۱۹ مربوط می‌شود همان‌طور که ۵ عددی است که دنبالش بودیم). چون $۲\left(\frac{۱۹}{۲}\right)=۱۹$، جواب صحیح عبارت است از

$$x=۵\left(\frac{۱۹}{۲}\right)=۴۷\frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که عدد مطرح شده توسط فیبوناچی برای مقدار مجهول به‌صورت اختیاری برگزیده نشده؛ وقتی ضریب مقدار مجهول یک کسر باشد، عدد فرض شده برای مجهول، مخرج آن کسرخواهد بود.

تا اینجا قانون جاگذاری کاذب را ملاحظه کردیم که طبق آن حدسی زده می‌شد؛ اما متغیری وجود داشت که مستلزم انجام دو آزمایش و توجه به خطاهای مربوط به هر یک از آن‌ها بود. این قانون دست و پاگیر که گاهی آن را جاگذاری کاذب دوگانه نیز می‌خوانند، را می‌توان به شکل زیر توضیح داد.

---

[34]. Liber Abaci

برای حل معادله $ax+b=0$، فرض کنیم g_1 و g_2 دو حدس برای مجهول x و f_1 و f_2 مقادیر ag_1+b و ag_2+b باشند که اگر حدس‌ها درست باشد، برابر صفر می‌شوند. داریم

$$ag_1+b=f_1 \qquad (1)$$

$$ag_2+b=f_2 \qquad (2)$$

با کم کردن طرفین خواهیم داشت:

$$a(g_1-g_2)=f_1-f_2 \qquad (3)$$

با ضرب معادله (۱) در g_2 و معادله (۲) در g_1 به‌دست می‌آوریم:

$$ag_1g_2+bg_2=f_1g_2$$
$$ag_2g_1+bg_1=f_2g_1$$

دو معادله اخیر را که از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$b(g_2-g_1)=f_1g_2-f_2g_1 \qquad (4)$$

با تقسیم معادله (۴) بر معادله (۳) داریم:

$$\frac{-b}{a}=\frac{f_1g_2-f_2g_1}{f_1-f_2}$$

اما چون $x=-b/a$، مقدار x برابر خواهد بود با

$$x=\frac{f_1g_2-f_2g_1}{f_1-f_2}$$

به‌طور خلاصه، دو مقدار کاذب برای x در عبارت $ax+b=0$ قرار دادیم و با این دو آزمایش قادر به به‌دست آوردن جواب معادله $ax+b=0$ شدیم.
برای مشخص شدن کار، بهتر است به یک مثال واقعی بپردازیم. مثلاً معادله

$$x+\frac{x}{7}=19$$

یا معادلاً

$$x+\frac{x}{۷}-۱۹=۰$$

را در نظر بگیرید. دو حدس برای مقدار x می‌زنیم، مثلاً $g_۱=۷$ و $g_۲=۱۴$. سپس

$$۱۴+\frac{۱۴}{۷}-۱۹=-۳=f_۲$$

و

$$۷+\frac{۷}{۷}-۱۹=-۱۱=f_۱$$

در نتیجه مقدار واقعی X برابر است با

$$x=\frac{f_۱g_۲-f_۲g_۱}{f_۱-f_۲}=\frac{(-۱۱)۱۴-(-۳)۷}{(-۱۱)-(-۳)}=\frac{۱۳۳}{۸}=۱۶+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}$$

۲-۳-۲ یک مسأله کنجکاوانه

برمی‌گردیم به پاپیروس رایند. *مسأله‌ی ۲۸ معروف به* "به یک عدد فکر کن" را ابتدا بیان و سپس راه حل اهمس[35] را به زبان امروزی با افزودن کمی جزئیات برای روشن شدن مطلب مرور می‌کنیم.

مثال: به یک عدد فکر کن و $\frac{۲}{۳}$ این عدد را به خودش اضافه کن. $\frac{۱}{۳}$ از این مقدار را از مجموع کم کن و بگو جوابت چیست؟ فرض کنیم جواب ۱۰ بوده است. سپس $\frac{۱}{۱۰}$ از ۱۰ را کم کن، در این‌صورت ۹ به‌دست می‌آید. این همان عددی است که از ابتدا انتخاب کرده بودید.

حل. اگر عدد ابتدایی برابر ۹ باشد، $\frac{۲}{۳}$ آن ۶ می‌شود که پس از افزودن ۱۵ حاصل می‌گردد. حال $\frac{۱}{۳}$ از ۱۵ که ۵ است را از آن کم می‌کنیم؛ ۱۰ به‌دست می‌آید. در واقع شما به همین شکل عمل می‌کنید.

در اینجا کاتب واقعاً تساوی جبری زیر را نشان می‌دهد:

---

35. Ahmes

$$\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{10}\left[\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)\right]=n$$

که یک مثال ساده آن $n=9$ است.

قسمتی از پاپیروس رایند (موزه بریتانیا)

مسأله ۷۹ خیلی مختصر است و شامل یک مجموعه‌ی جالب از داده‌ها است که به‌نظر می‌آید بی‌ارتباط با مجموع یک سری هندسی نباشد:

اسب	۷		
گربه	۴۹		
موش	۳۴۳	۲۸۰۱	۱
دسته گندم	۲۴۰۱	۵۶۰۲	۲
هکات[۳۶] (واحد اندازه‌گیری غلات)	۱۶,۸۰۷	۱۱,۲۰۴	۴
	مجموع: ۱۹,۶۰۷	مجموع: ۱۹,۶۰۷	

[36]. Hekat

در سمت راست مجموع ۷، $۷^۲$، $۷^۳$، $۷^۴$ و $۷^۵$ را با جمع واقعی داریم. در سمت چپ مجموع همان سری به‌صورت ۲۸۰۱×۷ داده شده است که نحوه ضرب کردن با همان روش معمول تکرار است. چون $۲۸۰۱=(۷^۵-۱)/(۷-۱)$، نتیجه زیر

$$۷\times۲۸۰۱=۷\left(\frac{۷^۵-۱}{۷-۱}\right)=۷+۷^۲+۷^۳+۷^۴+۷^۵$$

دقیقاً همان چیزی است که با جایگذاری در فرمول مجموع S_n از n جمله سری هندسی

$$S_n=a+ar+ar^۲+...+ar^{n-۱}=a\frac{r^n-۱}{r-۱}$$

به‌دست می‌آید.

(در بالا توجه داریم که $a=r=۷$ و $n=۵$.) سؤالی که مطرح است این است که آیا مصریان با چنین فرمولی، حتی برای موارد ساده‌تر، آشنا بودند؟ مدرک محکمی برای این مسأله وجود ندارد. یک تفسیر قابل قبول‌تر از نیت مورد نظر، چیزی بدین‌صورت خواهد بود: "هفت خانه داریم که در هر کدام هفت گربه وجود دارد؛ هر گربه هفت موش را می‌کشد؛ هر موش هفت دسته گندم را می‌خورد؛ و هر دسته گندم قادر به تولید هفت هکات محصول می‌باشد. بدین ترتیب چقدر غله می‌توانسته ذخیره شده باشد؟" یا می‌توان سؤال را به این شکل مطرح کرد: "خانه، گربه، موش، دسته گندم، میزان غله (به هکات) – مجموعاً چندتا از اینها وجود داشته؟"

حدود ۳۰۰۰ سال پس از اهمس، فیبوناچی همان سری از توان‌های هفت را با یک عبارت بیشتر در کتاب *لیبر آباچی* مطرح نمود.

هفت پیرزن در راه رم هستند؛
هر زن هفت قاطر دارد؛
هر قاطر هفت توبره را حمل می‌کند؛
هر توبره محتوی هفت قرص نان است؛
با هر قرص نان هفت چاقو همراه است؛
هر چاقو در هفت غلاف نهاده شده.
مجموع چیست؟

این ترکیب همراه با عدد هفت، ما را به یاد یک شعر کودکانه انگلیسی قدیمی می‌اندازد.

وقتی در راه سنت ایوز بودم؛
مردی را با هفت زن ملاقات نمودم؛
هر زن هفت تا توبره داشت؛
هر توبره هفت تا گربه داشت؛
هر گربه هفت تا بچه داشت؛
بچه گربه‌ها، گربه‌ها، توبره‌ها و زن‌ها،
چند تا راهی سنت ایوز بودند؟

در اینجا نیز، یک مجموع از یک سری هندسی محاسبه می‌گردد. اما در سطرهای اول و آخرشعر، یک جمله به‌صورت شوخی به چشم می‌خورد. در حالی‌که پیچیدگی شگفت‌آور این شعر احتمالاً یک اختراع آنلگو- ساکسونی[۳۷] است، که به‌صورت یک مسأله در طول قرن‌ها باقی‌مانده است.

پاپیروس رانید با دعای زیر که بیانگر نگرانی‌های عمده یک جامعه کشاورزی است، خاتمه می‌یابد:

" *موش‌ها و جانوران موذی را بگیر، علف‌های هرز سمی را نابود کن: به درگاه خداوندِ را*[۳۸] *برای گرما، باد، و آب فراوان دعا کن*".

پرسش فلسفی. عدد ۷ در اساطیر، ادعیه، اشعار و روایات گذشته مکرر تکرار شده و مورد استفاده قرار گرفته است. مانند هفت آسمان، هفت روز هفته و ... چرا؟

۲-۴ مسائل

۱. به روش مصری مضاعف کردن، حاصل‌ضرب‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) ۱۸×۲۵

ب) ۲۶×۳۳

ج) ۸۵×۱۲

---

37. Anglo- Saxon
38. God Ra

د) ۱۰۵×۵۹

۲. به روش ضرب مصری، حاصل‌تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) ۱۸۴÷۸

ب) ۱۹÷۸

ج) ۴۷÷۹

د) ۱۰۶۰÷۱۲

ه) ۱۶۱÷۸

۳. برای محاسبه ضرب‌های زیر از ضرب به روش مصری استفاده کنید.

الف) $\left(۱۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}\right)۳۷$

ب) $\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)\left(۹+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)$

ج) $\left(۲+\frac{۱}{۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)$

۴. الف) ثابت کنید حاصل‌ضرب $\frac{۱}{۱۴}$ در $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}$ برابر است با $\frac{۱}{۱۸}$ (مسأله ۱۲ از پاپیروس رایند).

ب) ثابت کنید حاصل‌ضرب $\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۲۲۴}$ در $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است.

۵. مسأله ۳۰ پاپیروس رایند از خواننده می‌خواهد مقداری را بیابد که $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۰}$ آن برابر ۱۰ شود. این کار را همانند روش مصریان انجام دهید ابتدا با تأیید تساوی

$$۱۳\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۰}\right)=۹+\frac{۲۹}{۳۰}$$

و سپس یافتن عددی که وقتی در $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۰}$ ضرب می‌شود، برابر $\frac{۱}{۱۰}$ شود.

۶. الف) نشان دهید

$$\frac{۲}{n}=\frac{۱}{۳}\frac{۲}{n}+\frac{۵}{۳}\frac{۱}{n}$$

که در آن $\frac{۲}{n}$ قابل بیان به‌صورت جمع کسرهای واحد است، هرگاه n بر ۵ قابل قسمت باشد.

ب) از قسمت (الف) استفاده کرده و تجزیه $\frac{۲}{۲۵}$، $\frac{۲}{۶۵}$ و $\frac{۲}{۸۵}$، را به کسرهای واحد همانند آنچه که در پاپیروس رایند آمده، به‌دست آورید.

۲-۵ هندسه مصری

۲-۵-۱ تخمین مساحت دایره

باور عمومی بر این است که هندسه از مصر باستان آغاز شده، جایی که آب گرفتگی‌های سالیانه حاصل از رود نیل محاسبه اندازه املاک را برای تعیین میزان مالیات ضروری می‌ساخت. در حقیقت کلمه *هندسه*[39] که از دو کلمه یونانی با معانی " *زمین* " و" *اندازه‌گیری* " به‌دست آمده، نشان می‌دهد که این مفهوم برای ضرورت مساحی زمین بوجود آمده است. مورخ یونانی، هردوت[40]، که در بین سال‌های ۴۶۰ تا ۴۵۵ پیش از میلاد از نیل بازدید کرده بود، چگونگی انجام اولین مشاهدات هندسی نظام‌مند را تشریح می‌کند.

همچنین گفته‌اند که این پادشاه (سسوستریس[41]) زمین را به‌گونه‌ای بین همه مصریان تقسیم کرد که به هر کدام یک زمین چهار ضلعی با مساحت یکسان تعلق بگیرد و بتواند در آمد سالیانه خود را از راه وضع مالیات بر روی این زمین‌ها به‌دست آورد. اما وقتی طغیان رودخانه بخشی از زمین کسی را خراب می‌کرد و او برای ارائه شرح ماجرا به نزد شاه می‌رفت، پادشاه ناظرینی را برای بررسی شرایط می‌فرستاد تا میزان کوچک شدن زمین را اندازه گرفته و تعیین کند که مالک باید در مقایسه با اندازه زمین اصلی خود چقدر مالیات بپردازد. بنابراین به‌نظر می‌رسد که هندسه به این ترتیب ظهور یافت.

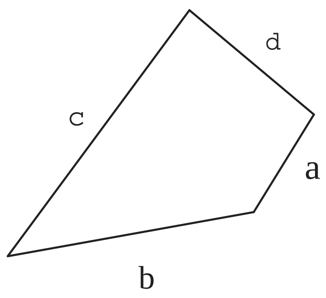
در هر صورت جدای از اینکه چه نظریه‌ای را در مورد گام‌های اولیه هندسه بپذیریم، می‌توان تصور کرد در کشوری که حتی زیر کشت بردن کوچک‌ترین قطعات زمین‌های حاصل‌خیز مورد توجه بوده، اندازه‌گیری زمین اهمیتی روز افزون پیدا کرده بود. لذا برخی از نتایج چشمگیری که مصریان در ریاضیات به‌دست آوردند را باید با این هدف مرتبط دانست.

---

[39]. geometry
[40]. Herodotus
[41]. Sesostris

براساس کتیبه‌های به‌دست آمده در معبد هروس[42] در اِدفو[43]، حدود ۱۰۰ پیش از میلاد، ارجاعاتی به زمین‌های چهار–گوش اهدایی به معبد شده است. برای هر یک، مساحت را با ضرب میانگین اضلاع روبه‌رو به هم محاسبه کرده‌اند. یعنی به کمک فرمول

$$A = \frac{۱}{۴}(a+c)(b+d)$$



که در آن a، b، c و d طول‌های اضلاع متوالی زمین هستند. مشخصاً این فرمول درست نمی‌باشد. این فرمول تا حدودی برای زمینی که تقریباً مستطیل است دقیق است. آنچه که جالب است این است که دقیقاً این فرمول نادرست برای مساحت چهارضلعی، ۳۰۰۰ سال زودتر در بابل باستان دیده شده است.

مسائل ۴۱–۶۰ در پاپیروس رایند، مسائلی هندسی هستند و بیش‌تر مربوط به میزان غلات انبار شده در سیلوهای استوانه‌ای شکل می‌باشد. شاید بهترین دلیل دست‌یابی مصریان در محاسبات هندسه دوبعدی، روش یافتن مساحت دایره بوده باشد که در *مسأله ۵۰* آمده است:

یک زمین گرد با قطر ۹ خِت[44] است. مساحتش چقدر است؟ $\frac{۱}{۹}$ قطر را از قطر بردارید، مثلاً ۱، باقی‌مانده ۸ است. ۸ را ۸ بار در خود ضرب کنید. می‌شود ۶۴. بنابراین ۶۴ ستات[45] است.

42. Horus
43. Edfu
44. khet
45. setat

فرآیند کاتب در یافتن مساحت دایره را با زبان ساده می‌توان چنین بیان کرد: از قطر $\frac{۱}{۹}$ آن را کم کنید. حاصل را مربع کنید. با نمادهای جدید، این روش ما را به فرمول زیر می‌رساند

$$A=\left(d-\frac{d}{۹}\right)^{۲}=\left(\frac{۸d}{۹}\right)^{۲}=\frac{۶۴}{۸۱}d^{۲}$$

که در آن d طول قطر دایره است. اگر این فرمول را با فرمول واقعی مساحت دایره مقایسه نماییم، یعنی $\pi d^{۲}/۴$، آنگاه

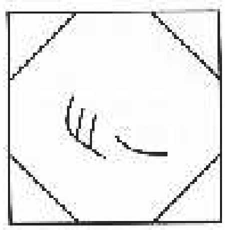
$$\frac{\pi d^{۲}}{۴}=\left(\frac{۸d}{۹}\right)^{۲}$$

از آنجا به‌دست می‌آید:

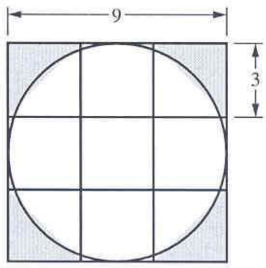
$$\pi=۴\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}=۳.۱۶۰۵...$$

که برای مصریان، این مقدار نسبت محیط دایره بر قطرش است. این مقدار بسیار نزدیک به $۳\frac{۱}{۷}$ است، چنانکه در محاسبات برای دانشجویان بقدر کافی مفید واقع می‌شود.

ما هنوز نمی‌دانیم که فرمول $A=\left(\frac{۸d}{۹}\right)^{۲}$ برای مساحت دایره از کجا به‌دست آمده، اما ممکن است در *مسأله ۴۸* پاپیروس رایند راهنمایی لازم آمده باشد. در این مسأله بجای آوردن عباراتی که نشان دهنده صوت مسأله باشد، یک شکل ناهموار، که قطعاً می‌توان گفت یک مربع است، رسم شده که چهار مثلث در چهار رأسش به‌همراه علامتی که به خط هیروگلیفی نماینده عدد ۹ است.



بنابراین به‌نظر می‌رسد که کاتب یک شش ضلعی از یک مربع را به ابعاد ۹ واحد با تقسیم کردن اضلاع به سه قسمت و بریدن چهار گوشه که به شکل مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین‌اند، تشکیل داده است (هر مثلث دارای مساحتی مساوی با $\frac{۹}{۲}$ مربع واحد است). احتمالاً کاتب مساحت شش ضلعی را تقرایباً برابر با مساحت دایره‌ای محاط در مربع به‌دست آورده، زیرا قسمت‌هایی از دایره محاطی که در خارج شش ضلعی قرار دارد و قسمت‌هایی که در داخل قرار دارد، تقریباً با هم مساوی به‌نظر می‌رسند.



اکنون مساحت شش ضلعی برابر با مساحت مربع اولیه منهای مساحت چهار مثلث متساوی‌الساقینی است که از چهار گوشه بریده می‌شوند؛ یعنی

$$A = ۹^۲ - ۴\left(\frac{۹}{۲}\right) = ۶۳$$

این مقدار نزدیک به مقداری است که با قرار دادن $d = ۹$ در عبارت $\left(\frac{۸d}{۹}\right)^۲$ به‌دست می‌آید. لذا یک توضیح محتمل برای منشأ پیدایش فرمول مساحت $A = \left(\frac{۸d}{۹}\right)^۲$، این است که این فرمول با در نظر گرفتن شش ضلعی به‌عنوان اولین تقریب دایره محاطی مربع به‌دست آمده است.

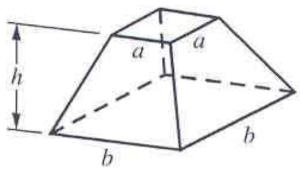
۲-۵-۲ حجم هرم بریده

در پاپیروس مسکو تنها ۲۵ مسأله وجود دارد، اما یکی از آن‌ها شاهکار هندسه باستان است. *مسأله ۱۴* نشان می دهد که مصریان از حدود سال ۱۸۵۰ پیش از میلاد، فرمول

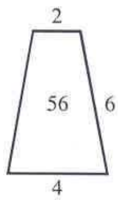
صحیح محاسبه حجم هرم بریده (یا ناقص) را می‌دانستند. با نمادهای خودمان، این مقدار برابر است با

$$V = \frac{h}{۳}(a^۲ + ab + b^۲)$$

که در آن h ارتفاع هرم و a و b، به‌ترتیب، طول‌های اضلاع مربع‌های قاعده و فوقانی هرم هستند.



شکل متناظر با *مسأله ۱۴* شبیه به ذوزنقه متساوی‌الساقین است،



اما محاسبات دال بر این است که هرم مربع ناقص در نظر گرفته شده است.

۲-۵-۳ حدس و گمان‌ها در مورد هرم بزرگ

هر بررسی که در مورد ریاضیات مصریان انجام می‌گیرد باید ارجاع مختصری نیز به هرم بزرگ واقع در گیزه[۴۶] داشته باشد، که در حدود سال ۲۶۰۰ پیش از میلاد توسط خوفو[۴۷]– که یونانیان او را چیاپس[۴۸] می‌نامند– بنا شد. این بنا گواه ارزشمندی از درک اشکال هندسی وتوسعه قابل توجه مهندس سازه می‌باشد. البته در این میان باید به سازمان‌دهی چشمگیر اجتماعی و دولتی موجود نیز اشاره کرد. به گفته هرودوت ۴۰۰,۰۰۰ کارگر به مدت ۳۰ سال برای ساخت این بنا کار کردند، در چهار گروه

---

[46]. Gizeh
[47]. Khufu
[48]. Cheops

مجزای ۱۰۰,۰۰۰ نفری که هرکدام برای مدت سه ماه به کار اشتغال داشتند. (محاسبات نشان می‌دهند که بیش از ۳۶,۰۰۰ کارگر نمی‌توانستند به‌طور همزمان بر روی هرم کار کنند بدون آنکه جلوی دست و پای یکدیگر را بگیرند.) ده سال فقط صرف ساختن جاده‌ای شد که به یک معدن سنگ آهک در فاصله چند مایلی آنجا منتهی می‌شد. ۲,۳۰۰,۰۰۰ قطعه سنگ با وزن تقریبی $۲\frac{۱}{۲}$ تن و با ابعاد ۳۰ فوت بر روی این جاده کشیده می‌شدند. این بلوک‌ها چنان با دقت در کنار یکدیگر نصب می‌شدند که تیغه چاقو نیز در شکاف بین آن‌ها راه نمی‌یافت.

آنچه در طی سال‌ها مردم را تحت تأثیر قرار داده کیفیت و زیبایی هرم بزرگ نبود، بلکه اندازه آن بود. این بنا بزرگ‌ترین ساختمان ایام باستان ویکی از بزرگ‌ترین بناهایی است که تاکنون ساخته شده است. این بنا در زمان ساخته شدن ۴۸۱/۲ فوت ارتفاع داشت (در حال حاضر ۳۱ فوت بالای آن از بین رفته است)، چهار طرف آن زاویه‌ای در حدود $۵۱^\circ , ۵۱'$ با زمین تشکیل می‌دادند، و قاعده آن ۱۳ آکر[۴۹] (هر آکر ۴,۰۴۶ متر مربع است) را اشغال می‌کرد – مساحتی برابر با مجموع مساحت کلیساهای فلورانس و میلان، سنت پیتر در رم، و کلیسای سنت پل و وست مینیستر در لندن. مسأله شگفت آورتر صحت و دقت صورت گرفته در برپایی این بنا بود. قاعده‌ی بنا تقریباً یک مربع کامل به طول متوسط ۷۵۵/۷۸ فوت بود به‌طوری که در مقایسه، هیچ یک از چهار ضلع آن بیش از $۴\frac{۱}{۲}$ اینچ با اضلاع دیگر تفاوت نداشت. سازندگان اهل چیاپس با بهره‌گیری از یکی از اجرام آسمانی قادر بودند اضلاع هرم را دقیقاً با چهار جهت اصلی قطب نما تطبیق دهند، به‌طوری که خطایشان تنها کسری از ۱° بود.

هرم بزرگ در طی سالیان متمادی ذهن‌های ماجراجوی متعددی را با حدس و گمان‌های گوناگون تهییج کرده است. این صوفیانِ هرم همه نوع نیات ماوراءالطبیعه و علوم اسرارآمیز را به سازندگان باستانی این بنا نسبت داده‌اند. در بین تمام ادعاهای خارق‌العاده، یک ادعا عبارت است از اینکه هرم طوری ساخته شده تا نصف محیط قاعده آن تقسیم بر ارتفاعش دقیقاً برابر با π باشد. با آنکه تفاوت بین دو مقدار

$$\frac{۲(۷۵۵.۷۸)}{۴۸۱/۲} = ۳/۱۴۱۲۳... \quad \text{و} \quad \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶...$$

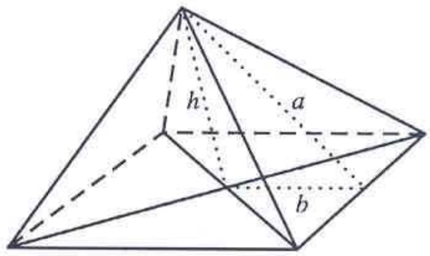
---

[49]. acre

تنها ...۰/۰۰۰۳۶ می‌باشد، نزدیکی این دو عدد صرفاً تصادفی بوده و هیچ پایه‌ای در قوانین ریاضی ندارد.

براساس یکی از افسانه‌هایی که به ادبیات جدید راه یافته، روحانیون مصری به هرودوت (مورخ باستان) گفتند که ابعاد هرم به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مساحت هر یک از سطوح آن برابر است با مساحت مربعی که اضلاع آن با ارتفاع هرم برابر است. اگر طول یک ضلع قاعده را $2b$ ، ارتفاع مثلث یکی از سطوح را a ، و ارتفاع هرم را h در نظر بگیریم، در می‌یابیم که رابطه منقول از هرودوت با معادله زیر بیان می‌شود:

$$h^2 = \frac{1}{2}(2b.a) = ab$$



بنا به قضیه فیثاغورس، چون a وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع b و h است، $h^2 + b^2 = a^2$، یا به‌عبارتی $h^2 = a^2 - b^2$. با برابر قرار دادن دو مقدار h^2، به‌دست می‌آوریم:

$$a^2 - b^2 = ab$$

با تقسیم طرفین بر a^2، معادله $1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b}{a}$ یا معادلاً $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) = 1$ به‌دست می‌آید. اکنون مقدار ریشه‌ی مثبت معادله درجه دوم $x^2 + x = 1$ برابر است با $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. لذا ریشه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0/6180339...$$

متقابل "نسبت طلایی" که به کرار نکات قابل توجهی را در ریاضیات و کاربردهای آن ثابت کرده است.

سؤال این است که سازندگان هرم برای نائل شدن به نسبت طلایی (البته اگر واقعاً هدفشان این بوده است)، چگونه موفق شدند؟ با اندازه‌گیری‌های واقعی که از هرم بزرگ به‌عمل آمده است، ملاحظه می‌گردد که

$$a=\sqrt{h^{۲}+b^{۲}}=\sqrt{(۴۸۱/۲)^{۲}+(۳۷۷/۸۹)^{۲}}=۶۱۱/۸۵$$

که از آنجا مقدار زیر حاصل می‌گردد

$$\frac{b}{a}=۰/۶۱۷۶۲...$$

این نظریه که مصریان قصد داشتند از نسبت طلایی به‌عنوان شالوده نظری ساخت هرم بزرگ استفاده کنند، ظاهراً برای اولین بار توسط شخصی بنام جان تیلور[50] مطرح شد. او در سال ۱۸۵۹ کتابی را با عنوان «*هرم بزرگ، چرا و توسط چه کسی ساخته شد؟*[51]» منتشر کرد. تیلور که یک ریاضی‌دان آماتور بود، ۳۰ سال را صرف جمع‌آوری و مقایسه مقادیری نمود که بازدیدکنندگان هرم ارائه کرده بودند. اگرچه او چند ماکت از هرم را درست کرده بود، اما هرگز به چشم خود آن را ندیده بود. تنها متنی که در کتاب "*تاریخ*" هرودوت به اندازه هرم می‌پردازد بدین شرح است: "قاعده آن مربع بوده و هر ضلع آن ۸۰۰ فوت طول دارد و ارتفاع آن نیز همانقدر است." بدین ترتیب توجیه ادعای تیلور باوری قوی خواهد بود. به‌علاوه ابعاد ثبت شده توسط هرودوت نیز، خود با واقعیت فاصله زیادی دارند.

نظریه دیگری که غالباً بسیار جدی گرفته می‌شود آن است که مساحت کل هرم را می‌توان به نوعی بیان کرد که به نسبت طلایی منتهی شود؛ یعنی مساحت قاعده نسبت به مجموع مساحت‌های وجوه مثلثی شکل، برابر است با مجموع مساحت‌های وجوه مثلثی شکل نسبت به مجموع مساحت‌های وجوه و قاعده. زیرا مجموع مساحت

---

[50]. John Taylor
[51]. The Great Pyramid, Why Was It Built and Who Built It?

مثلث‌های چهار وجه برابر $(۲ab)\frac{۱}{۲}×۴$ و مساحت قاعده $(۲b)^{۲}$ است، و لذا ادعای فوق به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{۴b^{۲}}{۴ab}=\frac{۴ab}{۴ab+۴b^{۲}}$$

یا معادلاً

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}$$

با به‌کارگیری مقدار a که قبلاً محاسبه گردید، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{a}{a+b}=\frac{۶۱۱/۸۵}{۹۸۹/۷۴}=۰/۶۱۸۱۹...$$

از این‌رو نسبت‌های $\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{a+b}$ تقریباً مساوی هستند. اینکه آیا این موضوعی تصادفی بوده یا اینکه از قبل طراحی شده است، هنوز به‌عنوان مسأله‌ای باز مطرح است. هر چند می‌توان از آگاهی متناسب سازندگان هرم از هندسه مطمئن بود، اما تنها میزان ناچیزی ریاضیات از آن دوران برای ما مانده است. می‌گویند دو پاپیروس ریاضی اصلی موجود ، با آنکه از نظر عمر با یکدیگر متفاوتند، احتمالاً شرایط مربوطه را بین سال‌های ۱۷۵۰ تا ۲۰۰۰ پیش از میلاد نشان می‌دهند. با بررسی تمام موارد به این نتیجه می‌رسیم که هندسه مصریان هیچ‌گاه از یک سطح شهودی که هدف اصلی آن اندازه‌گیری اشیاء قابل لمس بود فراتر نرفته است. هندسه آن زمان فاقد ساختار قیاسی بود و هیچ‌گونه نتایج نظری و قوانین کلی از فرآیند کار وجود نداشت. تنها کاری که صورت می‌گرفت انجام محاسبات، و گاهی تقریب زدن برای مسائلی بود که نقشی عملی در ساختمان‌سازی و مساحی داشتند.

۲-۶ مسائل

۱. مسائل هندسی زیر از پاپیروس رایند را حل کنید.

الف) *مسأله ۴۱.* یک انبار غله استوانه‌ای به قطر ۹ کیوبیت[۵۲] و ارتفاع ۱۰ کیوبیت. مقدار غلاتی که در آن جای می‌گیرد چقدر است؟ (*راهنمایی*: مقدار مصری π، $۴\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}$، را به‌کار برده تا جواب نگارنده نسخه خطی را به‌دست آورید.)

ب) *مسأله ۵۱.* مثالی از یک زمین مثلثی شکل. فرض کنید به شما گفته‌اند که مساحت یک مثلث با ضلع ۱۰ خِت و قاعده ۴ خت چقدر است؟ (*راهنمایی*: شکل به‌کار رفته در پاپیروس ظاهراً مثلثی با یک زاویه قائمه است.)

۲. الف) بابلی‌ها عموماً مساحت دایره را با $\frac{۱}{۱۲}$ مربع محیط دایره تعیین می‌کردند. نشان دهید که این کار معادل است با فرض اینکه $\pi = ۳$ است.

ب) یک لوح بابلی حفر شده در ۱۹۳۶ ادعا می‌کند که هرگاه تعیین دقیق‌تر مساحت مورد نیاز بوده است، می‌بایست $\frac{۱}{۱۲}$ را در ۰;۵۷,۳۶، یعنی در $\frac{۲۴}{۲۵}$ ضرب می‌کردند. مقدار حاصله برای π با این عامل ضربی چیست؟

۳. ارشمیدس (حدود ۲۱۲–۲۸۷ پیش از میلاد) در کتابش *اندازه‌گیری یک دایره* بیان می‌دارد: نسبت مساحت یک دایره بر مربع قطرش برابر $\frac{۱۱}{۱۴}$ است. نشان دهید این قانون هندسی به ما مقدار $\frac{۲۲}{۷}$ را برای π می‌دهد.

۴. یک ریاضی‌دان هندویی بنام آریاب هاتا[۵۳] روش زیر را برای یافتن مساحت یک دایره داشت: نصف محیط ضرب در نصف قطر برابر مساحت یک دایره است. این قاعده چقدر دقیق است؟

۵. بابلی‌ها نیز فرمولی را برای حجم هرم مربع بریده می‌دانستند

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{a-b}{۲}\right)^{۲}\right]$$

که در آن h ارتفاع و a و b اضلاع مربع قاعده (بالایی و پایینی) هستند. نشان دهید این فرمول به فرمول پاپیروس مسکو قابل تحویل است.

---

52. cubit
53. Aryabhata

۶. در یک لوح بابلی کشف شده حجم یک مخروط ناقص با فرمول (اشتباه) زیر ارائه شده است:

$$V = \frac{۳}{۲} h(r^۲ + R^۲)$$

که در آن h ارتفاع و r و R شعاع مقاطع هستند. قرار دهید $h=۶$، $r=۴$ و $R=۲$ و نتیجه حاصله از فرمول بابلی‌ها را با نتیجه حاصله از فرمول صحیح

$$V = \frac{۱}{۳} \pi h(R^۲ + rR + r^۲)$$

مقایسه کنید.

۷. هرون[54] اسکندریه (در حدود ۷۵ بعد از میلاد) حجم یک مخروط ناقص را با محاسباتی معادل با کمک فرمول زیر یافت:

$$V = \frac{۱}{۴} \pi h(r + R)^۲$$

که در آن h ارتفاع و r و R شعاع مقاطع هستند. اگر $\frac{۲۲}{۷}$ را به‌عنوان مقدار π بگیریم، مقدار حجم به‌دست آمده توسط فرمول هرون به‌ازای $h=۶$، $r=۴$ و $R=۲$ چقدر است؟

۲–۷ ریاضیات بابلی

بیش‌تر دانسته‌های ما در مورد پیشرفت‌های ریاضی در بین‌النهرین که ابتدا توسط سومریان و سپس توسط آکادیان[55] و سایر اقوام به‌وجود آمد، نسبتاً تازه است. این مبحث را ریاضیات بابلی می‌نامند، چنانکه گویی یک قوم مشخص آن را پدید آورده باشد. تاکنون عمدتاً بر دستاوردهای مصریان تأکید می‌شد. مدتی دانشمندان می‌دانستند مجموعه‌های بزرگ بابلی در موزه بریتانیا و لوور، و در آمریکا در دانشگاه‌های ییل، کلمبیا، و پنسیلوانیا وجود دارند که شامل جداول عجیبی از خطوط میخی که هنوز رمزگشایی نشده بودند. مطالعات خستگی ناپذیر اوتو نیوگباور[56]، که در دهه ۱۹۳۰ به

---

[54]. Heron
[55]. Akkadian
[56]. Otto Neugebaver

نتیجه رسید، مشخص کرد که این نوشته‌ها متون و جداول ریاضی بوده و از این‌رو کلید خواندن محتوای آن‌ها به‌دست آمد. عمدتاً با رمزگشایی، ترجمه و تفسیر این مطالب، نقش بابلیان در پیشرفت ریاضیات باستان مشخص شد.

ما در بررسی ریاضیات بابلیان شانس بسیار کم‌تری نسبت به ریاضیات مصریان داریم. از آنجائی‌که سبک بابلیان در نوشتن بر روی لوحه‌های رسی، آن‌ها را از تهیه متن‌های طولانی باز می‌داشت، هیچ‌یک از مطالب موجود در لوح‌های بابلیان با پاپیروس رایند قابل مقایسه نیست. با این‌حال، چند صد لوح ریاضی یافته شده که بسیاری از آن‌ها در شرایط مطلوبی هستند. اکثریت این لوح‌ها (حدود دو سوم آن‌ها) "بابلی کهن" هستند یعنی تقریباً به دوره ۱۸۰۰ تا ۱۶۰۰ پیش از میلاد تعلق دارند. اکنون از طریق این معدن عظیم اطلاعات دریافته‌ایم که بابلیان، احتمالاً به جزء برخی قواعد هندسی خاص، در سایر موارد از نظر ریاضی از مصریان بسیار پیش‌تر بودند. هرچند ریاضیات بابلی نیز ریشه‌های تجربی قدرتمندی داشته که در بیش‌تر لوح‌های ترجمه شده به وضوح موجود است، اما به‌نظر می‌رسد که ریاضیات آن‌ها گرایش بیشتری به بیان نظری داشته باشد. (بابلیان می‌توانند ادعا کنند که در بسیاری از اکتشافات از سایرین پیش‌تر بوده‌اند، خصوصاً در تئوری فیثاغورسی که معمولاً به مکتب‌های ریاضی بعدی نسبت داده می‌شود.) به‌نظر می‌رسد کلید پیشرفت بابلیان در سیستم بسیار آسان اعداد آن‌ها نهفته باشد. سیستم عالی نشانه‌گذاری شصت‌تایی، آن‌ها را قادر ساخت تا با کسرها نیز به راحتی اعداد صحیح، محاسبه کرده و به جبر پیشرفته دست یابند. این امر برای مصریان غیرممکن بود زیرا برای آن‌ها انجام محاسبه با کسرها مستلزم به‌کارگیری انبوهی از کسرهای واحد بوده و در نتیجه هر تقسیم را به مسأله‌ای دشوار مبدل می کرد.

۲-۷-۱ برخورد بابلیان با معادله درجه دوم

جدای از لوح‌های جدولی، لوح‌هایی هستند که به مسائل جبر و هندسه می‌پردازند. این الواح معمولاً سلسله‌ای از مسائل عددی مرتبط، همراه با محاسبات و پاسخ‌های متناسب را ارائه می‌کنند؛ و متن آن‌ها عموماً با این عبارت خاتمه می‌یابد: "*راه حل بدین شکل است*". اگرچه هیچ‌یک از آن‌ها قانونی کلی را نشان نمی‌دهند اما شیوه هماهنگ برخورد با این مسائل نشان می‌دهد که بابلیان (برخلاف مصریان) نوعی رویکرد نظری نسبت به ریاضیات

داشته‌اند. غالباً چنین به‌نظر می‌رسد که مسأله‌ها بجای آنکه رساله‌ای در مورد مساحی و کتابداری باشند، تمرینات فکری بوده، و علاقه‌ای انتزاعی به روابط عددی را نشان می‌دهند.

متنی به خط میخی از بابلیان باستان مشتمل بر ۱۶ مسأله به همراه راه حل.(عکس از موزه بریتانیا)

لوح‌های رسی متعددی وجود دارند که نشان می‌دهند بابلیان ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد با فرمول حل معادله درجه دوم آشنا بوده‌اند. این امر در یکی از متون بابلی کهن که مسأله زیر را در آن می‌توان یافت به وضوح مشهود است:

من مساحت و دو سوم ضلع مربعم را جمع کرده‌ام و مقدار آن ۰;۳۵ است.
ضلع مربع من چقدر است؟

غالباً ترجمه این‌گونه مسأله‌ها به سیستم نمادی کنونی مستقیماً با جایگزینی کلماتی مثل *طول* (یا *ضلع*) و *عرض* با حروف x و y امکان‌پذیر است. در دستگاه علائم جدید مسأله فوق به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$x^{2}+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}$$

جزئیات حل مسأله در متن لوح با توضیحات شفاهی به شکل زیر آمده است:
۱ را به‌عنوان ضریب[ضریب x] در نظر می‌گیریم. دو سوم ۱ می‌شود ۰;۴۰. نصف آن می‌شود ۰;۲۰، در ۰;۲۰ ضرب می‌کنیم، که (نتیجه) می‌شود ۰;۶,۴۰. سپس آن را با ۰;۳۵

جمع می‌کنیم و نتیجه ۰;۴۱,۴۰ می‌شود که ریشه دوم آن ۰;۵۰ است. ۰;۲۰ را که در خود ضرب کرده بودیم، از ۰;۵۰ کم کرده و عدد حاصل یعنی ۰;۳۰ ضلع مربع خواهد بود.
با برگرداندن آن به نمادهای جدید جبری، این مراحل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\frac{۰;۴۰}{۲})^۲ + ۰;۳۵} - \frac{۰;۴۰}{۲} \\ &= \sqrt{۰;۶,۴۰ + ۰;۳۵} - ۰;۲۰ \\ &= \sqrt{۰;۴۱,۴۰} - ۰;۲۰ \\ &= ۰;۵۰ - ۰;۲۰ = ۰;۳۰ \end{aligned}$$

بنابراین بابلی‌ها از فرمولی معادل با فرمول آشنای خودمان که عبارت است از

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + b} - \frac{a}{۲}$$

برای حل معادله درجه دوم $x^۲ + ax = b$ استفاده می‌کردند. اگرچه ریاضی‌دانان بابلی "فرمول درجه دوم"ی برای حل تمام معادلات درجه دوم نداشتند، اما دستورالعمل‌های این مثال‌های واقعی چنان نظام‌مندند که تقریباً می‌توانیم مطمئن باشیم هدفشان نمایش یک راه حل کلی بوده است.

شاید از نظر تاریخی مناسب‌تر باشد تا بجای معادله درجه دوم از معادله مستطیلی صحبت کنیم، زیرا مسأله‌ی مستطیل‌ها بود که به این معادلات منتهی شد. در دنیای باستان این اشتباه به‌صورت رایج وجود داشت که مساحت یک شکل مسطح کاملاً به محیط آن بستگی دارد. اعتقاد بر این بود که یک محیط مشخص به همان مساحت محدود می‌شود.

آن‌ها چگونه راه حل مسأله را می‌یافتند؟ ما تنها می‌توانیم حدس بزنیم. زیرا در متون ریاضی مربوط به این دوران، در هیچ‌جا، هیچ نشانه آشکاری از شیوه رسیدن به نتیجه دیده نمی‌شود. ریاضی‌دانان بابلی افراد تجربه‌گرا و مشاهده‌گری بوده و با جداولی کار می‌کردند که واقعیت‌ها را به شکلی منظم ارائه می‌نمود. به احتمال زیاد، آن‌ها جداول را برای مقادیر مختلفی که ممکن بود آن مقادیر، مساحت مستطیل‌هایی (مربع‌هایی) باشند، تهیه کرده و محیط را ثابت نگه می‌داشتند. بنابراین برای مستطیلی که نصف محیط آن $x + y = a = ۲۰$ بود، مساحت حاصله به شکل جدولی با متغیرهای

$$y = \frac{a}{۲} - z \quad \text{و} \quad x = \frac{a}{۲} + z$$

که در آن z یکی از اعداد ۰ تا ۹ است، قابل محاسبه می‌بود.

	$x = \frac{a}{۲} + z$	$y = \frac{a}{۲} - z$	$b = xy$	$\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} - b$
$z = ۰$	۱۰	۱۰	۱۰۰	۰
$z = ۱$	۱۱	۹	۹۹	$۱^{۲}$
$z = ۲$	۱۲	۸	۹۶	$۲^{۲}$
$z = ۳$	۱۳	۷	۹۱	$۳^{۲}$
$z = ۴$	۱۴	۶	۸۴	$۴^{۲}$
$z = ۵$	۱۵	۵	۷۵	$۵^{۲}$
$z = ۶$	۱۶	۴	۶۴	$۶^{۲}$
$z = ۷$	۱۷	۳	۵۱	$۷^{۲}$
$z = ۸$	۱۸	۲	۳۶	$۸^{۲}$
$z = ۹$	۱۹	۱	۱۹	$۹^{۲}$

آنچه از اعداد نمایش داده شده در این جدول برداشت می‌گردد این است که مقدار مساحت با رشد z کاهش پیدا کرده و تفاضل $\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} - b$ همواره برابر مربع z است. یعنی

$$\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} - b = z^{۲}$$

از آنجا مقدار z برابر می‌شود با:

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} - b}$$

در نتیجه مقادیر مجهول به‌دست می‌آیند:

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-b}$$

$$y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-b}$$

در ابتدا این نتایج به شکل تجربی با مشاهده حقایق مقید تعیین می‌شدند. هیچ‌گونه تأمل منطقی یا استدلال قیاسی براساس تئوری‌های ثابت شده انجام نمی‌گرفت. بهترین چیزی که در مورد رویکرد باستانی می‌توان گفت آن است که این رویکرد، صبر را جایگزین مهارت می‌کرد. بابلیان بدون شک بعدها دریافتند که اگر مجموع $x+y=a$ را داشته باشیم، عدد بزرگ‌تر، مثلاً x، با نسبت مشخص z از $\frac{a}{2}$ فراتر خواهد رفت. واضح است که چون مجموع $x+y$ مقداری ثابت است، x فقط مقداری را به دست خواهد آورد که y از دست بدهد. بنابراین

$$y=\frac{a}{2}-z \quad \text{و} \quad x=\frac{a}{2}+z$$

که مجموعشان برابر a می‌شود. با قرار دادن این مقادیر در معادله $xy=b$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)=b$$

لذا

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-z^{2}=b$$

نتیجه آنکه

$$z^{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-b^{2}$$

و در نتیجه

$$z=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-b}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ریشه منفی در نظر گرفته نشده است، و تا مدت‌ها مرسوم بوده است. با داشتن مقدار z، مقادیر x و y به‌دست می‌آیند:

$$x=\frac{a}{۲}+\sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}-b}$$

و

$$y=\frac{a}{۲}-\sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}-b}$$

این مطلب را با یک مثال به‌عنوان نمونه می‌توان نشان داد. در لوح خط میخی در کلکسیون بابلی ییل[۵۷] در خصوص جواب دو معادله

$$x+y=\frac{۱۳}{۲} \quad \text{و} \quad xy=\frac{۱۵}{۲}$$

(با اعداد مشخصی) سؤال شده است. به روش بابلی‌ها

$$y=\frac{۱۳}{۴}-z \quad \text{و} \quad x=\frac{۱۳}{۴}+z$$

در این‌صورت این مقادیر در اولین معادله صدق می‌کنند زیرا

$$x+y=\left(\frac{۱۳}{۴}+z\right)+\left(\frac{۱۳}{۴}-z\right)=۲\left(\frac{۱۳}{۴}\right)=\frac{۱۳}{۲}$$

و دومین معادله $xy=\frac{۱۵}{۲}$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{۱۳}{۴}+z\right)\left(\frac{۱۳}{۴}-z\right)=\frac{۱۵}{۲}$$

از آنجا

$$\frac{۱۶۹}{۱۶}-z^{۲}=\frac{۱۵}{۲}$$

یا

$$z^{۲}=\frac{۱۶۹}{۱۶}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۴۹}{۱۶}$$

[57]. Yale

بنابراین $z=\frac{۷}{۴}$، و مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$y=\frac{۱۳}{۴}-\frac{۷}{۴}=\frac{۳}{۲} \quad \text{و} \quad x=\frac{۱۳}{۴}+\frac{۷}{۴}=۵$$

روش مشابه برای زمانی که تفاضل $x-y$ داده شده باشد را می‌توان بجای $x+y$ به‌کار برد. مشابهاً بابلی‌ها دستگاه

$$x-y=a \quad \text{و} \quad xy=b$$

را حل می‌کردند. با قرار دادن

$$y=z-\frac{a}{۲} \quad \text{و} \quad x=z+\frac{a}{۲}$$

که از آنجا جواب به شرح زیر به‌دست می‌آمد:

$$y=\sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}+b}-\frac{a}{۲} \quad \text{و} \quad x=\sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}+b}+\frac{a}{۲}$$

مسائل پیچیده‌تر جبری با روش‌های متنوعی به دستگاه‌های مقدماتی

$$x\pm y=a \quad \text{و} \quad xy=b$$

تبدیل می‌شد. برای نمونه، لوحی شامل اعداد معادلی برای مسأله

$$x+y=\frac{۳۵}{۶} \quad \text{و} \quad x+y+xy=۱۴$$

است. در این لوح مقادیر x و y، به‌ترتیب، به‌صورت $\frac{۷}{۲}$ و $\frac{۷}{۳}$ داده شده است، اما روندی که در آن به جواب رسیده‌اند نیامده است. احتمالاً جواب مسأله با تفریق معادله اول از معادله دوم به‌دست می‌آید:

$$xy=x+y+xy-(x-y)=۱۴-\frac{۳۵}{۶}=\frac{۴۹}{۶}$$

مسأله به حل دستگاه

$$x+y=\frac{۳۵}{۶} \quad \text{و} \quad xy=\frac{۴۹}{۶}$$

مبدل می‌گردد و با روشی که قبلاً بحث شد، به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{۳۵}{۱۲}-\frac{۷}{۱۲}=\frac{۷}{۳} \quad \text{و} \quad x=\frac{۳۵}{۱۲}+\frac{۷}{۱۲}=\frac{۷}{۲}$$

۸–۲ مسائل

۱. کسرهای $\frac{۱۹}{۵}$، $\frac{۵}{۳}$ و $\frac{۱۰}{۹}$ را با نماد شصت شصتی با روش‌های زیر به‌دست آورید:
الف) با به‌کارگیری روش بابلیان با یافتن عکس مخرج و سپس ضرب در صورت، و
ب) ضرب صورت و مخرج در ۶۰ و ساده کردن.

۲. روی یک لوح در کلکسیون بابلیان در ییل خوانده می‌شود:

یک سنگ پیدا کردم اما آن را وزن نکردم. $\frac{۱}{۷}$ به آن افزودم و سپس $\frac{۱}{۱۱}$ به آن اضافه کردم. آن را وزن کردم: (نتیجه) ۱ مینا[58]. وزن ابتدایی سنگ چقدر بوده است؟ وزن اولیه سنگ $\frac{۲}{۳}$ مینا ، ۸ شِکِل[59] و $\frac{۱}{۲}$ سه[60] بوده است.

تساوی ۱ مینا=۶۰ شِکِل و ۱ شِکِل=۱۸۰ سه را به‌کار برده و حل اشاره شده را بررسی نمایید.
(*راهنمایی:* وزن ابتدایی سنگ را x بنامید، بنابراین

$$\left(x+\frac{x}{۷}\right)+\frac{۱}{۱۱}\left(x+\frac{x}{۷}\right)=۶۰$$

شِکِل)

۳. راه حل مسأله زیر از بابلیان باستان را پیدا کنید.

دو حلقه نقره وجود دارد. $\frac{۱}{۷}$ از حلقه اولی و $\frac{۱}{۱۱}$ از حلقه دومی شکسته است. وزن آنچه که شکسته برابر ۱ شِکِل است. وزن تقلیل یافته به اندازه $\frac{۱}{۷}$ از اولی برابر با وزن تقلیل یافته به اندازه $\frac{۱}{۱۱}$ از دومی است. وزن ابتدایی حلقه‌های نقره چقدر بوده است؟
(*راهنمایی:* دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{x}{۷}+\frac{y}{۱۱}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{۶x}{۷}=\frac{۱۰y}{۱۱}$$

---

58. mina
59. sheqel
60. se

که در آن x و y وزن‌های دو حلقه هستند.)

۴. یک مسأله بابلی نمونه از ۱۷۰۰ قبل از میلاد می‌گوید اضلاع مستطیلی را با داشتن محیط و مساحت آن به‌دست آورید. به‌عبارت معادل، دستگاه‌های معادلات از نوع $xy=b$ و $x+y=a$ را حل کنید. در حالت خاص، جواب معادله $xy=۱۶$ و $x+y=۱۰$ را بیابید. (*راهنمایی:* بابلیان احتمالاً از اتحاد $(x-y)^۲=(x+y)^۲-۴xy$ برای به‌دست آوردن $x-y$ استفاده کرده‌اند.)

۵. به روش بابلیان هر یک از دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $xy=۱۶$ و $x-y=۶$

ب) $xy=۲۱$ و $x-y=۴$

ج) $xy=۱۵$ و $x+y=۸$

۶. روی یک لوح بابلی این مسأله حل شده است:

$$\begin{aligned} xy+(x-y)&=۱۸۳\\ x+y&=۲۷ \end{aligned}$$

ابتدا با قرار دادن $z=y+۲$ دستگاه زیر را به‌دست آورید

$$\begin{aligned} xz&=۲۱۰\\ x+z&=۲۹ \end{aligned}$$

۲-۹ کاربرد بابلیان از قضیه فیثاغورس

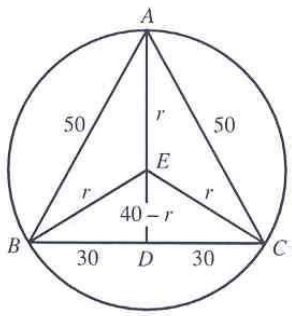
برخی از چشمگیرترین گنجینه‌های بابلیان در شوش[۶۱]، پایتخت ایلام[۶۲]، کشف شده‌اند. ایلام کشوری هم مرز با بابل و غالباً با آن در جنگ بوده. کم و بیش باید گفت شوش همواره و بیش از مناطق دیگر در جنوب بین‌النهرین مورد حفاری قرار گرفته است. تپه ماهورهای بی‌شکل آن توسط باستان شناس انگلیسی، ویلیام کِنِت لوفتوس[۶۳] که در سال ۱۸۵۴ کارگران خود را به انجام اولین حفاری‌ها در این منطقه اعزام کرده بود، شناسایی

---

[61]. Susa
[62]. Elam
[63]. William Kennett Loftus

شد. اما حفاری‌ها در سطوح گسترده تا سال ۱۸۸۴، که گروه باستان شناسان فرانسوی کارها را به‌دست گرفت، آغاز نشد. در سال ۱۹۰۲ این گروه در آکروپولیس[۶۴] شوش یکی از برجسته‌ترین نقطه‌های عطف تاریخ بشر را کشف کرد: رمز قوانین پادشاه حمورابی I [65] (نزدیک به سال ۱۷۵۰ پیش از میلاد).

این رمز بر روی یک ستون سنگی سیاه رنگ حکاکی شده و به‌عنوان نشان پیروزی جنگ از بابل به شوش برده شده بود. با استانداردهای امروزی، ۲۸۵ ماده از این قانون، ترکیب عجیبی از روشن‌بینانه‌ترین احکام با وحشیانه‌ترین تنبیه‌هاست. آنان بر اصل "مقابله به مثل" تأکید می‌کردند که براساس آن، تنبیه باید با عمل خطا برابر باشد: "اگر مردی چشم یک نجیب‌زاده را کور کند باید چشم او را کور کنند." هر چند پیشتر حمورابی را اولین قانونگذار می‌دانستند، اما اکتشافات جدید نشان داده است که چندین مجموعه از فرامین قانونی در بین سومریان وجود داشته است.



گروهی از لوح‌های یافته شده در شوش (در سال ۱۹۳۶) توسط فرانسویان از جاذبه‌های ریاضی بیشتری برخور دارند. این لوح‌ها مثال‌هایی از قدیمی‌ترین موارد کاربرد قضیه فیثاغورس توسط بابلیان را نشان می‌دهند. یکی از این لوح‌ها شعاع دایره‌ای را محاسبه می‌کند که یک مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع ۵۰، ۵۰ و ۶۰ را احاطه کرده است.

حل. جواب به‌صورت زیر است:

---

64. Acropolis
65. King Hammurabi I

ابتدا قضیه فیثاغورس را برای مثلث ADB استفاده کرده و به‌دست می‌آوریم $AD=۴۰$. چون $r=AE$، داریم $ED=۴۰-r$. دومین کاربرد از قضیه فیثاغورس، به‌کارگیری آن بر مثلث EDB و به‌دست آوردن معادله

$$r^۲=۳۰^۲+(۴۰-r)^۲$$

است، که بعد از حل مقادیر $r=\frac{۲۵۰۰}{۸۰}$ یا $r=۳۱;۱۵$ به‌دست می‌آید.

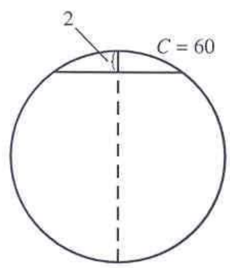
یک لوح دیگر قدیمی بابلی شامل مسأله زیر است:

یک لوبیا به طول ۳۰;۰ (ایستاده از پشت به دیوار) داریم. نقطه بالایی پس از سر خوردن با فاصله‌ی ۶;۰ می‌افتد. با چه فاصله‌ای پایین‌ترین انتهای آن (از دیوار) حرکت می‌کند؟

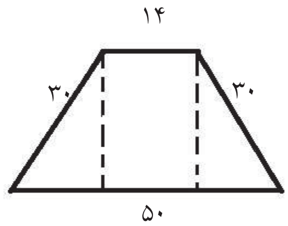
جواب با کمک قضیه فیثاغورس به‌طور صحیح محاسبه شده است.

۲-۱۰ مسائل

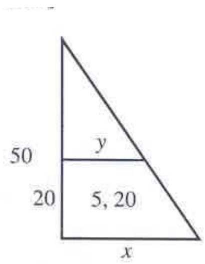
۱. در یک لوح بابلی، مسأله زیر یافت شد. فرض کنید محیط یک دایره ۶۰ واحد است و عمودی از مرکز بر وتری از دایره در نظر بگیرید و اگر فاصله پای عمود بر وتر تا محیط دایره ۲ واحد باشد، طول وتر را بیابید. در حل این مسأله قرار دهید $\pi=۳$.



۲. یک لوح قدیمی بابلی در خصوص یافتن مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین است که ساق‌هایش برابر ۳۰ واحد و طول قاعده‌هایش ۱۴ و ۵۰ می‌باشد. این مسأله را حل کنید.

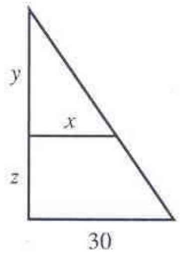


۳. در یک لوح دیگر، یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه ۵۰ واحداست. یک خط به موازات ضلع دیگر به فاصله ۲۰ واحد از آن رسم شده است به‌طوری که یک ذوزنقه به مساحت $۵,۲۰=۳۲۰$ واحد ایجاد کرده است. طول قاعده‌های ذوزنقه را بیابید. (*راهنمایی:* اگر A مساحت مثلث اولیه باشد، در این‌صورت $۲۵x=A=۳۲۰+۱۵y$، و $\frac{۱}{۲}(x+y)۲۰=۳۲۰$).



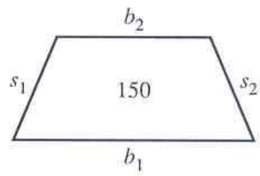
۴. در یک مسأله مشابه، یک مثلث قائم‌الزاویه که قاعده‌اش ۳۰ واحد است توسط یک خط به دو قسمت تقسیم گردیده است. گفته شده مساحت ذوزنقه ایجاد شده $۷,۰=۴۲۰$ احد بزرگ‌تر از مساحت مثلث بالایی است و اینکه تفاضل بین ارتفاع y از مثلث بالایی و ارتفاع z از ذوزنقه برابر ۲۰ است. اگر x طول قاعده بالایی ذوزنقه باشد، از این عبارات روابط زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}z(x+۳۰)=\frac{۱}{۲}xy+۴۲۰, \quad y-z=۲۰$$



مسأله از ما مقادیر مجهول x، y و z را می‌خواهد. (*راهنمایی:* به کمک خواص مثلث‌های متشابه $\frac{y}{y+z}=\frac{x}{۳۰}$).

۵. یک مسأله قدیمی بابلی دیگر در خصوص یافتن طول اضلاع یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است، با فرض اینکه مساحتش ۱۵۰ است و اینکه تفاضل قاعده‌هایش برابر ۵ است (یعنی $b_۱-b_۲=۵$) و اضلاع مساوی‌اش ۱۰ تا بیشتر از دوسوم مجموع قاعده‌هایش است (یعنی $s_۱=s_۲=\frac{۲}{۳}(b_۱+b_۲)+۱۰$).



این مسأله را با کمک یک فرمول نادرست بابلیان برای محاسبه مساحت ذوزنقه، یعنی

$$A=\frac{b_۱+b_۲}{۲}\,\frac{s_۱+s_۲}{۲}$$

حل کنید.

فصل سوم

آغاز ریاضیات یونانی

هدف‌های آموزشی فصل سوم

الف) هدف کلی

هدف کلی ازارائه این فصل مطالعه ریاضیات یونانی و نیز بررسی مسائل تربیع دایره، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه می‌باشد.

ب) هدف‌های آموزشی

دانشجو پس ازمطالعه و فراگیری این فصل باید:

- اولین افرادی را که کشفیات ریاضی به‌طور سنتی به آن‌ها نسبت داده شده است را بشناسد.
- پدر هندسه را بشناسد.
- اثبات هندسی قضیه فیثاغورس را بداند.
- راه حل‌های اولیه معادله فیثاغورس را بداند.
- با اولین بحران ریاضیات آشنا شده باشد.
- بتواند سه مسأله ساختنی دنیای باستان را بیان کند.
- تلاش‌های بقراط و دیگر ریاضی‌دانان را در حل سه مسأله ساختنی بداند.
- قادر به حل مسائل آخر هر بخش باشد.

۳-۱ یافته‌های هندسی تالس

۳-۱-۱ یونان و منطقه اژه

یونانیان با تبدیل مجموعه متنوعی از قواعد تجربی محاسباتی به یک سیستم منظم و مرتب، ریاضیات را به یک رشته مستقل بدل کردند. هر چند یونانیان به وضوح وارثان

مجموعه دانش شرقی بودند، اما با تلاش خود، ریاضیات را به علمی عمیق‌تر، انتزاعی‌تر (از نظر فاصله گرفتن از نیازهای زندگی روزمره)، و منطقی‌تر از آنچه پیش‌تر بود، مبدل کردند. در بابل و مصر باستان، ریاضیات عمدتاً به‌عنوان ابزاری برای برطرف کردن نیازهای عملی و کاربردی و یا در حکم بخشی از دانش خاص به نفع طبقه‌ی برجسته‌ای از کاتبان پرورش یافت. از طرف دیگر، به‌نظر می‌رسد که ریاضیات یونانی، یک مبحث فکری ناپیوسته برای خبرگان بوده باشد. عادات اندیشیدن *انتزاعی* یونانیان، آن‌ها را از متفکرین پیشین جدا می‌کرد؛ در واقع آن‌ها نگران کشتزارهای مثلثی شکل غلات نبودند بلکه به "مثلث" و ویژگی‌های مربوط به مثلث‌ها می‌پرداختند. این ترجیح دادن مفاهیم انتزاعی را می‌توان در دیدگاه فرهنگ‌های مختلف نسبت به عدد $\sqrt{۲}$ مشاهده کرد؛ در حالی‌که بابلیان تقریب آن را با دقت فراوان محاسبه کرده بودند، اما یونانیان اصم بودن آن را اثبات کردند. تحقیقات علمی، با هدف صرف علم به خاطر علم، برای تمدن‌های پیشین شرقی تقریباً به‌طور کامل بیگانه بود، بنابراین یونانیان برای به‌کارگیری منطق در ریاضیات، ذات آن را کاملاً تغییر دادند. نوشته‌ای که افلاطون بر سر در آکادمی خود نوشته بود، یعنی "نگذارید که هیچ مرد ناآگاه از هندسه از این در وارد شود"، اخطار یک شخص عجیب نبود، بلکه در واقع ستایش از این عقیده محکم یونانی بود که با روح تحقیق و منطق جدی می‌توان جایگاه شخص را در دنیای نظام‌مند درک کرد.

تمام تاریخ بر مبنای اسناد مکتوب قرار دارد. با آنکه مستندات اغلب مربوط به ریاضیات مصری و یونانی بسیار دقیق هستند، اما منابع اولیه‌ای که می‌توانند تصویر روشنی از پیشرفت اولیه ریاضیات یونانی را ارائه دهند بسیار ناقص‌اند. در یونان نه مثل مصر پاپیروس وجود داشت و نه مثل بابل خاک رس. کتاب‌های نوشته شده، بسیار اندک بودند؛ و با گذشت زمان و خرابی‌های حاصل از عناصر گوناگون مطالب چندانی بجا نمانده است. در نتیجه تاریخ یونان اولیه با طلاقی از افسانه‌ها، داستان‌ها و حکایات غیرقابل اطمینان است که توسط نویسندگانی تهیه شده که قرن‌ها پس از رخدادهای مورد نظر متولد شده بودند. ما به تکه‌ها و کپی‌هایی وابسته‌ایم که از اسناد اصلی جدا شده‌اند. با آنکه ممکن است شخص کپی کننده در انتقال نوشته‌های مبهم متون اولیه

بسیار دقیق بوده باشد، اما هرگز متوجه نخواهیم شد که وی چقدر بر تخیل خود تکیه کرده و یا تا چه حد متن اصلی را درک کرده است.

جغرافیا، الگوی زندگی سیاسی یونانیان را تشکیل داد. در مصر و بابل کنترل جمعیتی بزرگ توسط یک حکمران کار ساده‌ای بود، اما در یونان، کشوری بود که هر منطقه‌اش به‌وسیله کوه‌ها یا دریا از مناطق دیگر جدا می‌شد، کنترل مطلق مرکزی توسط یک سلطان، غیرممکن بود. حصارهای کوهستانی برای جلوگیری از هجوم اقوام گوناگون کافی نبودند، اما از ادغام ایالت‌ها با یکدیگر پیشگیری می‌کردند. وفاداری میهن پرستانه فقط در خدمت شهرِ زادگاه شخص بود– آتن، کورینت، تبس، یا اسپارت– و نه در خدمت یونان به‌صورت یک کشور تمام عیار. در شرایط اضطراری خاص، ایالت‌های یونان به صورت اشتراکی عمل می‌کردند، چون می‌دانستند که یا باید متحد شوند و یا نابود شوند. طی حملات ایران در اواخر قرن ششم و اوایل قرن پنجم پیش از میلاد، آن‌ها نیروهای جنگنده خود را متحد کردند تا داریوش را در ماراتن[۶۶] (۴۹۰ پیش از میلاد)، و خشایار شاه را در سالامیس[۶۷] (۴۸۰ پیش از میلاد) شکست دهند. این وقایع پس از یک عملیات پس قراول، توسط ۳۰۰ اسپارتی در ترموپیلا[۶۸] رخ داد. اتحاد حاصله در هیچ‌یک از این موارد موفقیت‌آمیز و یا طولانی مدت نبود زیرا دولت‌های ایالتی با هر پیروزی بلافاصله درگیر جنگ‌های محلی طولانی و خسته‌کننده می‌شدند. فقدان وحدت سیاسی، این نتیجه را ناگزیر می‌ساخت. این شرایط، زمانی به پایان رسید که فیلیپ دوم از مقدونیه در سال ۳۳۸ پیش از میلاد در نبرد چارونیا[۶۹] بر نیروهای مشترک یونانی برتری یافته و خود را به‌عنوان پادشاه تمام ایالت‌های یونانی به جز اسپارت تعیین کرد. فیلیپ دو سال بعد در گذشت و قدرت را به پسرش اسکندر کبیر سپرد. او به دستاوردهایی رسید که هیچ فرمانروایی پیش از او نرسیده بود. او یونان را متحد ساخت و تمدن یونانی را به مرزهای دنیای شناخته شده برد. در سال ۳۲۳ پیش از میلاد، وقتی اسکندر در سن ۳۲ سالگی درگذشت، بر مساحتی بیش از ۲ میلیون

---

[66]. Marathon

[67]. Salamis

[68]. Thermopylae

[69]. Charonea

مایل مربع حکومت می‌کرد. اما یونانیان و فرهنگ یونانی هیچ یک با تغییر فرمانروایان ناپدید نشدند. سال‌های بعد از آن– از زمان اسکندر کبیر تا قرن اول پیش از میلاد– دوره درخشانی از تاریخ را شکل داد که محققان آن را با نام عصر هِلِنی[۷۰] می‌شناسند.

۳-۱-۲ طلوع هندسه اثباتی: تالس میلتوس[۷۱]

ظهور ریاضیات در یونان از نظر زمانی با شکوفایی *تمدن یونان* در قرن ششم پیش از میلاد همزمان بود "(تمدن یونان " معمولاً به تمدنی گفته می‌شود که در عصر آهن آغاز شده و در قرون پنجم و چهارم پیش از میلاد شکوفا شد.) این روند که به آرامی با فعالیت پیروان فیثاغورس آغاز شد، به سرعت با نظریه اعداد و هندسه توسعه یافت. به‌طوری که ریاضیات یونان قدیم با کارهای هندسه‌شناسان باستان– اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس[۷۲] – به اوج خود رسید. از آن به بعد اکتشافات انجام شده چندان قابل توجه نبودند، هر چند اسامی بزرگانی همچون بطلمیوس، پاپوس[۷۳]، و دیوفانتوس[۷۴] شاهد دستاوردهای جالب گاه‌به‌گاه هستند. این دانشمندان پیشرو، چنان ریاضیات مقدماتی را مورد استفاده قرار دادند که تا قرن ششم نسبت به چیزی که ما ریاضیات یونانی می‌نامیم پیشرفت چندانی صورت نگرفت. نکته قابل توجه آن است که تقریباً همه کارهای واقعاً سودمند در مدت زمانی نسبتاً کوتاه بین ۳۵۰ تا ۲۰۰ پیش از میلاد صورت پذیرفت آن هم نه به‌وسیله دنیای یونان کهن، بلکه توسط مهاجران ساکن اسکندریه که تحت حکومت بطلمیوسیان قرار داشتند.

اولین افرادی که کشفیات ریاضی به‌طور سنتی به آن‌ها نسبت داده می‌شود، تالس از میلتوس (حدود ۶۲۵ تا ۵۴۷ پیش از میلاد) و فیثاغورس از ساموس[۷۵] (حدود ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش از میلاد) بودند. تالس که تبار فنیقی داشت در میلتوس شهری نزدیک یونیا[۷۶]

---

70. Hellenistic Age

71. Miletos

72. Apollonius

73. Pappus

74. Diophantus

75. Samos

76. Ionia

متولد شده بود درست در زمانی که مستعمره‌ای از یونان در سواحل آسیای صغیر شکوفا می‌شد. به‌نظر می‌رسد که او سال‌های نخستین عمرش را به تجارت مشغول بوده، و گفته می‌شود که وی هندسه را از مصریان و ستاره‌شناسی را از بابلیان فرا گرفته بود.

یکی دیگر از داستان‌های محبوب به آیسوپ[۷۷] مربوط می‌شود. ظاهراً در زمان‌های قدیم یکی از قاطران تالس که بار نمک را برای تجارت حمل می‌کرد، به‌صورت تصادفی دریافت که اگر در یک رودخانه غلت بزند محتویات بارش حل خواهد شد؛ از آن پس در هر سفر، حیوان همان کار را تکرار می‌کرد. تالس این عادت را با پر کردن بار قاطر با اسفنج بجای نمک از سر قاطر انداخت. این داستان، اگر هم درست نباشد، قطعاً به خوبی درست شده و از داستان سرگرم کننده افلاطون بسیار بهتر است. افلاطون می‌گوید یک شب تالس در حال قدم زدن و تماشای ستارگان بود. او چنان مشتاقانه به ستارگان می‌نگریست که در گودالی افتاد. در این حال پیرزنی به او رسید و گفت: "تو چطور می‌توانی از رخدادهای آسمان سخن بگویی در حالی‌که نمی‌توانی ببینی در پیش پایت چه می‌گذرد؟" این حکایت معمولاً در ایام قدیم گفته می‌شد تا ماهیت غیرکاربردی بودن فعالیت‌های محققان را نشان دهد.

تالس به‌عنوان اولین فردی شناخته شده است که به‌کارگیری اثبات منطقی را بر اساس استدلال استقرائی، بجای آزمایش‌ها و شهودات برای تصدیق یک بحث معرفی کرد. پروکلوس (حدود ۴۵۰)، در کتابش "*تفسیر کتاب اول عناصر اقلیدس*"، بیان می‌دارد:

تالس اولین فردی بود که به مصر رفت و این بصیرت (هندسه) را به یونان آورد. او خودش گزاره‌های بسیاری را کشف کرد و اصول زیر را از بین تعداد زیادی از اصول دیگر برای جانشینان خودش افشاء نمود. در برخی از حالات روش او بیش‌تر کلی بود و در مورد بقیه بیش‌تر تجربی.

او با گزاره‌های زیر معتبر شد.

- یک زاویه محاط در یک نیم‌دایره زاویه‌ای قائمه است.
- یک دایره با قطرش به دو نیم می‌شود.

---

77. Aesop

- اگر دو خط مستقیم یکدیگر را قطع نمایند، زاویه‌های متقابل با هم برابرند.
- اضلاع مثلث‌های متشابه متناسب‌اند.
- دو مثلث مساوی‌اند اگر آن‌ها، به‌ترتیب، دارای یک ضلع و دو زاویه مجاور مساوی باشند.

از آنجائی‌که یک خط ممتد، ریاضیات مصری را به یونان وصل می‌کند، احتمالاً تمام حقایق بالا را مصریان قدیم می‌دانستند. برای آنان این عبارات نامربوط محسوب می‌شدند، اما برای یونانیان این مفاهیم آغاز پیشرفت‌هایی فوق‌العاده در هندسه بود. تاریخ متعارف در چنین مواردی به دنبال شخصی می‌گردد تا "معجزه" را به او نسبت دهد. از این‌رو تالس به‌طور سنتی به‌عنوان *پدر هندسه* یا اولین ریاضی‌دان شناخته شد. اگر چه ما مطمئن نیستیم که چه موضوعاتی را می‌توان مستقیماً به او نسبت داد، اما واضح است که تالس در سازمان‌دهی منطقی هندسه – شاید روش استقرائی – نقش داشت. زیرا پیشرفت منظم قضایا به کمک اثبات‌های سخت امری کاملاً جدید بوده و از آن پس به ویژگی مشخصه ریاضیات یونانی بدل شد.

۳-۱-۳ محاسبات با استفاده از هندسه

داستان‌های متعددی از علاقه تالس به مصر سخن می‌گویند. بنا به افسانه‌های نقل شده، ارزشمندترین دستاورد تالس در زمانی که در مصر حضور داشت، اندازه‌گیری غیرمستقیم ارتفاع هرم بزرگ به کمک سایه‌ها بود. این داستان به دو صورت بیان شده، یکی شیوه‌ای بسیار ساده و دیگری شیوه محاسبه پیچیده‌تری را توصیف می‌کند. طبق اولین روایت، تالس طول سایه هرم را در ساعتی از روز اندازه گرفت که طول سایه انسان به اندازه قد اوست. پلوتارک[۷۸] در کتاب *کانویویوم*[۷۹] خود این داستان را بهبود بخشید:

> *اگرچه او [پادشاه مصر] تو [تالس] را به دلایل مختلف می‌ستود، اما علاقه خاص او به‌خاطر شیوه‌ای بود که تو طول هرم را بدون هیچ زحمت یا ابزاری اندازه گرفتی؛ زیرا با قرار دادن شاگردت در نقطه انتهایی سایه هرم، تو با کمک اشعه‌های خورشید دو مثلث تشکیل داده و بدین ترتیب نشان دادی که نسبت ارتفاع هرم به قد مرد با نسبت طول سایه هایشان یکسان بود.*

---

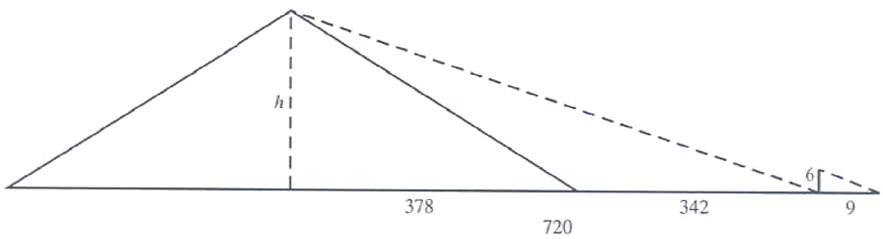
[78]. Plutarch

[79]. Convivium

هر دو روایت داستان به یک قضیه هندسی بستگی دارند، یعنی، اضلاع مثلث‌هایی با زوایای مساوی با یکدیگر متناسبند. بنابراین، تالس که دو مثلث مشابه را درک کرده بود، چنین بحث کرد که نسبت ارتفاع هرم h به قد شاگرد h' برابر بود با طول سایه هرم s به طول سایه شاگرد s' در حالت ایستاده:

$$\frac{h}{h'}=\frac{s}{s'}$$

تالس پیش از این می‌دانست که طول هر ضلع هرم بزرگ ۷۵۶ فوت و قد کارمندش ۶ فوت بود. تنها لازم بود که سایه هرم (فاصله نوک سایه تا مرکز قاعده هرم) و سایه کارمند اندازه گرفته شود. فاصله نوک سایه هرم تا لبه قاعده ۳۴۲ فوت، و سایه کارمند ۹ فوت بود.



اکنون تالس تمام ابعاد مورد نیاز را در دست داشت. با داشتن سه مقدار، بنا به قضیه مذکور مقدار چهارم به‌دست می‌آید. ارتفاع هرم بزرگ برابر بود با

$$h=\frac{sh'}{s'}=\frac{(۳۷۸+۳۴۲)۶}{۹}=\frac{۲}{۳}۷۲۰=۴۸۰$$

۳-۲ ریاضیات فیثاغورسی

۳-۲-۱ فیثاغورس و پیروانش

مطالعه اعداد به‌صورت انتزاعی در قرن ششم پیش از میلاد در یونان با فیثاغورس و فیثاغورسیان آغاز شد. دانش ما از زندگی فیثاغورس بسیار ناچیز است و با اطمینان نمی‌توان چیز زیادی در آن مورد گفت. خرده اطلاعاتی که به ما رسیده، از نویسندگان قدیمی است که در به‌وجود آوردن

داستان‌هایی راجع به سفرهای او، قدرت‌های معجزه‌آسا و آموزه‌هایش با هم رقابت می‌کردند. براساس بهترین تخمین‌ها، فیثاغورس بین سال‌های ۵۸۰ و ۵۶۹ پیش از میلاد در جزیره ساموس متولد شد. ظاهراً او در هجده سالگی ساموس را برای همیشه ترک کرده و برای تحصیل راهی فنیقیه و مصر شد، و شاید سفرهایش را به سمت شرق تا بابل نیز ادامه داده باشد. برخی منابع نه چندان مطمئن، اظهار می‌دارند که وقتی پادشاه ایران، کمبوجیه، در سال ۵۲۵ پیش از میلاد مصر را تصرف کرد، فیثاغورس به همراه سایر اسرای مصری به بابل برده شد. اما برخی منابع دیگر معتقدند که او داوطلبانه به دنبال کمبوجیه رفت. وقتی فیثاغورس پس از سال‌ها سرگردانی (تقریباً در ۵۰ سالگی) به یونان بازگشت به دنبال محل مناسبی برای ساختن یک مدرسه گشت. پس از آنکه حاکم مستبد ساموس او را از ورود به این شهر منع کرد، وی به سمت غرب به حرکت درآمده و سرانجام در کروتونا[۸۰] که یک مستعمره مترقی در جنوب ایتالیا بود مستقر شد.

تأسیس مدرسه در یونان کار غیرمعمولی نبود. ویژگی متمایز مدرسه فیثاغورس این بود که هدفش در آن واحد، سیاسی، فلسفی و مذهبی بود.

در مدرسه‌ی او، دانش آموزان بر چهار موضوع درسی متمرکز بودند: ریاضیات (ریاضیات، به معنای نظریه‌ی اعداد در مقابل حسابان)، هارمونی (موسیقی)، ژئومتری (هندسه)، و آسترولوژی (ستاره‌شناسی). این تقسیم چهارگانه علم در قرون وسطی "*کوادریویوم*[۸۱]" نام گرفت که بعداً منطق، دستور زبان، و علم بیان – مباحث مربوط به کاربرد زبان – به آن افزوده شدند. این هفت هنر آزاد به صورت دروس ضروری و مناسب برای تحصیل درآمدند.

فیثاغورس کسانی را که در کلاس‌هایش شرکت می‌کردند به دو طبقه تقسیم کرد: شنوندگان و ریاضی‌دانان. پس از سه سال گوش دادن در سکوت فرمانبردارانه به صدای فیثاغورس از پشت یک پرده، دانش‌آموزان اجازه ورود به حلقه داخلی را می‌یافتند، جائی‌که اصول تعلیمات مدرسه در اختیار آن‌ها قرار می‌گرفت. هر چند بر طبق قانون، شرکت زنان در جلسات عمومی ممنوع بود، اما در آنجا آنان اجازه‌ی حضور در کلاس‌های استاد را داشتند. براساس یکی از منابع، دست کم ۲۸ زن در طبقه منتخب ریاضی‌دانان وجود داشتند.

---

[80]. Crotona

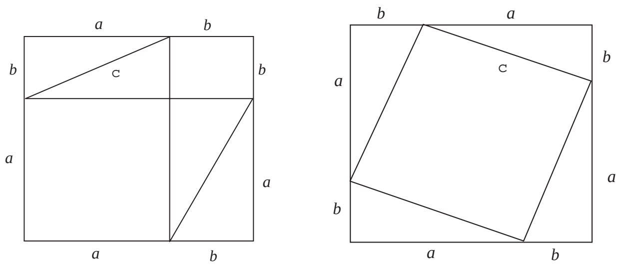
[81]. quadrivium

فیثاغورس در سن ۶۰ سالگی با یکی از شاگردانش بنام طیانو[۸۲] ازدواج کرد. طیانو خود یک ریاضی‌دان برجسته بود که نه تنها در سال‌های آخر عمر به فیثاغورس در علوم کمک می‌کرد، بلکه پس مرگ او نیز سیستم فکری به روش منطقی را ترویج می‌کرد. (در برخی منابع آمده است که طیانو دختر فیثاغورس بوده است؛ دیگر منابع اظهار می‌دارند که او هرگز همسر فیثاغورس نبوده بلکه تنها یک شاگرد با استعداد او بوده است.)

۳-۳ مسأله فیثاغورسی

۳-۳-۱ اثبات‌های هندسی قضیه فیثاغورس

ما هنوز مطمئن نیستیم که یونانیان در ابتدا از چه روشی برای اثبات قضیه فیثاغورس استفاده می‌کردند. اگر شیوه‌های کتاب II اقلیدس یعنی "*عناصر اقلیدس*" به‌کار گرفته شوند، احتمالاً شیوه کار به‌صورت اثباتی تجزیه‌ای به شکل زیر می بود: یک مربع بزرگ با اضلاعی به طول $a+b$ به دو مربع کوچک‌تر با اضلاع به‌ترتیب a و b، و دو مستطیل مساوی با اضلاع a و b تقسیم می شود؛ هر یک از این دو مستطیل را می‌توان با ترسیم قطر c به دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی تقسیم کرد. این چهار مثلث را می‌توان در مربع دیگری با اضلاع $a+b$ به‌صورتی که در شکل زیر نشان داده شده، جای داد.



اکنون مساحت مربع به دو روش قابل محاسبه است:

به‌صورت مجموع مساحت‌های دو مربع و دو مستطیل،

$$(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$$

و به‌صورت مجموع مساحت‌های یک مربع و چهار مثلث،

---

[82]. Theano

$$(a+b)^{۲}=c^{۲}+۴\left(\frac{ab}{۲}\right)$$

هرگاه چهار مثلث را از مربع بزرگ‌تر کسر کنیم، مساحت حاصله با هم برابر می‌باشند؛ معادلاً، $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$. بنابراین مربع c برابر مجموع مربعات a و b است.

چنین اثباتی با جمع مساحت‌ها چنان ساده است که خیلی پیشتر و به‌طور مستقل می‌توانست توسط فرهنگ‌های دیگر بیان می‌شد.

۳-۳-۲ راه حل‌های اولیه معادله فیثاغورس

این اکتشاف هندسی که اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه با قانونی که با اعداد قابل بیان باشد به هم مرتبط‌اند، طبعاً به یک مسأله ریاضی منجر شد که ما آن را *مسأله فیثاغورس* می‌نامیم. این مسأله، که یکی از اولین مسائل در نظریه اعداد محسوب می‌شود، مربوط به یافتن تمام جواب‌های صحیح مثبت معادله فیثاغورس

$$x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}$$

است. یک سه‌تایی (x,y,z) از اعداد صحیح مثبت که در این معادله صدق کند را یک *سه‌تایی فیثاغورسی* می‌نامند. روایات باستان پاره‌ای از جواب‌ها به این مسأله را، که به خود فیثاغورس نسبت داده می‌شود، به‌صورت اعدادی به شکل زیر بیان می‌دارد:

$$x=۲n+۱\ ,\quad y=۲n^{۲}+۲n\ ,\quad z=۲n^{۲}+۲n+۱$$

که در آن $n\geq ۱$ عددی صحیح و دلخواه است. احتمالاً فیثاغورس به کمک رابطه‌ای که مربع یک عدد از مربع عدد کوچک‌تر بعدی می‌سازد به جوابش رسیده است، یعنی

$$(۲k-۱)+(k-۱)^{۲}=k^{۲} \qquad (۱)$$

استراتژی چنین بوده که فرض شده $۲k-۱$ مربع کامل است. (این بی‌نهایت بار اتفاق می‌افتد، مثلاً، اگر $k=۵$، آنگاه $۲k-۱=۳^{۲}$.) پس فرض کنیم $۲k-۱=m^{۲}$ و k را پیدا می‌کنیم. داریم

$$k-۱=\frac{m^{۲}-۱}{۲} \quad \text{و} \quad k=\frac{m^{۲}+۱}{۲}$$

اگر این مقادیر را در (۱) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت

$$m^{۲}+\left(\frac{m^{۲}-۱}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{m^{۲}+۱}{۲}\right)^{۲}$$

از این‌رو اعداد

$$x=m \quad , \quad y=\frac{m^{۲}-۱}{۲} \quad , \quad z=\frac{m^{۲}+۱}{۲} \qquad (۲)$$

در معادله فیثاغورس، به ازای هر عدد صحیح فرد $m>۱$، صدق می‌کند (m باید فرد باشد، زیرا $m^{۲}=۲k-۱$ فرد است). هرگاه $m=۲n+۱$، که در آن $n\geq ۱$، اعداد سه‌تایی در (۲) برابر می‌شوند با

$$x=۲n+۱ \quad , \quad y=۲n^{۲}+۲n \quad , \quad z=۲n^{۲}+۲n+۱ \qquad (۳)$$

که همان نتیجه فیثاغورس است. برخی از سه‌تایی‌های فیثاغورس را که می‌توان از (۳) به‌دست آورد در جدول زیر آمده است.

n	x	y	z
۱	۳	۴	۵
۲	۵	۱۲	۱۳
۳	۷	۲۴	۲۵
۴	۹	۴۰	۴۱
۵	۱۱	۶۰	۶۱

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، جواب فیثاغورس دارای خصوصیت ویژه‌ای است که به توسط آن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با این مشخصه حاصل می‌شوند که طول وتر آن‌ها ۱ واحد از طول ضلع بزرگ‌تر بیشتر است.

جواب بخصوص دیگری که در آن تفاوت وتر و ضلع عمود برابر ۲ باشد، به فیلسوف یونانی افلاطون[۸۳] نسبت داده شده است:

83. Plato

$$x=۲n \quad , \quad y=n^{۲}-۱ \quad , \quad z=n^{۲}+۱ \tag{۴}$$

n	x	y	z
۲	۴	۳	۵
۳	۶	۸	۱۰
۴	۸	۱۵	۱۷
⋮	⋮	⋮	⋮

این فرمول را می‌توان همانند بقیه به کمک رابطه (۱) به‌دست آورد؛ اما در اینجا آن را دو بار به‌کار می‌گیریم:

$$\begin{aligned}(k+۱)^{۲} &= k^{۲}+(۲k+۱)\\ &=[(k-۱)^{۲}+(۲k-۱)]+۲k+۱=(k-۱)^{۲}+۴k\end{aligned}$$

با جاگذاری $n^{۲}$ بجای k، که $۴k$ مربع شود، فرمول افلاطونی

$$(۲n)^{۲}+(n^{۲}-۱)^{۲}=(n^{۲}+۱)^{۲}$$

حاصل می‌شود.

ملاحظه می‌گردد که از معادلات (۴) ساختن سه‌تایی فیثاغورسی (۸,۱۵,۱۷) امکان‌پذیر است در حالی‌که از فرمول فیثاغورسی (۳) قابل حصول نبود.

هیچ‌یک از قوانین مزبور تمام سه‌تایی‌های فیثاغورس را محاسبه نمی‌کرد؛ تا اینکه اقلیدس در کتاب *عناصر* خود یک جواب کامل برای مسأله فیثاغورس نوشت. در کتاب X از *عناصر به‌دست* آمده است:

$$x=۲mn \quad , \quad y=m^{۲}-n^{۲} \quad , \quad z=m^{۲}+n^{۲} \tag{۵}$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که $m>n$.

۳-۴ مسائل

۱. الف) فرمول زیر را بسازید

$$ab+\left(\frac{a-b}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}$$

ب) نشان دهید $a=۲n^{۲}$ و $b=۲$ فرمول افلاطون را برای سه‌تایی فیثاغورس وسعت می‌دهد، در حالی‌که به ازای $a=(۲n+۱)^{۲}$ و $b=۱$ خود فرمول فیثاغورس را به‌دست می‌آید.

۲. به ازای عددی صحیح مانند $n\geq ۳$، یک سه‌تایی فیثاغورسی بیابید که n یکی از آن‌ها باشد. (*راهنمایی:* برای عدد صحیح فرد n، سه‌تایی

$$(n,\frac{۱}{۲}(n^{۲}-۱),\frac{۱}{۲}(n^{۲}+۱))$$

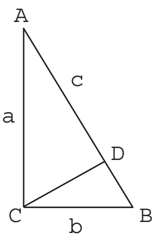
و برای عدد صحیح زوج n، سه‌تایی $(n,(n^{۲}/۴)-۱,(n^{۲}/۴)+۱)$ را در نظر بگیرید.)

۳. نشان دهید که (۳,۴,۵) تنها سه‌تایی فیثاغورسی است که متشکل از سه عدد صحیح مثبت متوالی است. (*راهنمایی:* سه‌تایی فیثاغورسی $(x,x+۱,x+۲)$ را در نظر بگیرید و نشان دهید $x=۳$ است.)

۴. الف) نشان دهید که بی‌نهایت سه تایی فیثاغورسی (x,y,z) وجود دارد که در آن x و y اعداد صحیح مثبت متوالی هستند. (*راهنمایی:* اگر $(x,x+۱,z)$ یک سه‌تایی فیثاغورسی باشد، آنگاه $(۳x+۲z+۱,۳x+۲z+۲,۴x+۳z+۲)$ نیز چنین است.)

ب) پنج سه‌تایی فیثاغورسی به فرم $(x,x+۱,z)$ بیابید.

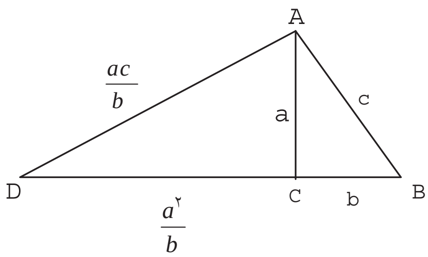
۵. در یک اثبات استاندارد از قضیه فیثاغورس، در مثلث ABC با زاویه قائمه C، ارتفاع CD از C بر وتر AB را رسم می‌کنند.



الف) ثابت کنید مثلث‌های ACD و CBD هر دو با مثلث ABC مشابه‌اند.

ب) برای یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a و b و وتر c، با استفاده از تناسب اضلاع متناظر از مثلث‌های متشابه ثابت کنید $a^۲ + b^۲ = c^۲$.

۶. برای اثبات دیگری از قضیه فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه قائمه C را در نظر بگیرید. فرض کنید اضلاع آن به طول‌های a و b و وتر c باشند. در امتداد ضلع BC نقطه D را چنان انتخاب نمایید که BAD یک مثلث قائم‌الزاویه باشد.



الف) از تشابه مثلث‌های ABC و DBA نتیجه بگیرید که $AD = ac/b$ و $DB = a^۲/b$.

ب) به کمک رابطه‌ی بین مساحت مثلث ABD و مساحت مثلث‌های ABC و ACD، ثابت کنید $a^۲ + b^۲ = c^۲$.

۳-۵ کشف اعداد گنگ و اولین بحران مبانی ریاضیات

خداوند اعداد صحیح را آفرید و بشر مابقی اعداد را. ل.کرونکر[۸۴]

---

[84]. Leopold Kronecker

اعداد صحیح و به ویژه اعداد طبیعی نتیجه تجربه‌هایی هستند که بشر از روند شمارش دسته‌های متناهی اشیاء به‌دست آورده است. علاوه بر این نیازهای زندگی روزمره، ما را ملزم می‌سازند که علاوه بر شمارش اشیاء منفرد، کمیت‌های پیوسته مختلفی از قبیل طول، وزن، و زمان را اندازه‌گیری کنیم. برای برآوردن این احتیاجات ساده اندازه‌گیری، کسرها را لازم داریم؛ زیرا، به‌عنوان مثال، به‌ندرت پیش می‌آید که طولی شامل عده دقیقاً صحیحی از واحدهای خطی کوچک‌تر به‌عنوان واحد اندازه‌گیری بوده باشد. بنابراین، اگر عدد گویا را به‌صورت خارج قسمت دو عدد صحیح تعریف کنیم، مانند p/q، که در آن $q \neq ۰$، این دستگاه اعداد گویا، از آنجا که شامل همه اعداد صحیح و کسرها است، برای مقاصد علمی اندازه‌گیری ظاهراً کفایت می‌کند.

مطالعه ریاضیات عددی که منحصر به اعداد گویا و اعداد صحیح بود نزد فیثاغورس و شاگردانش از اهمیت اساسی برخوردار بود. فیثاغورس ریاضی‌دان برجسته یونانی نزد شاگردانش از چنان احترامی بهره‌مند بود که از وی شخصیتی اساطیری ساختند و از این جهت درباره زندگی و نقش وی در ریاضیات، با هر میزان قطعیت، اطلاع بسیار کمی وجود دارد. فیثاغورس ظاهراً در حدود ۵۷۲ قبل از میلاد در جزیره ساموس در دریای اژه تولد یافته است. به‌نظر می‌رسد که بعداً به‌طور موقت در مصر رحل اقامت افکند، و حتی شاید سفرهای گسترده‌تری در پیش گرفته است. در مراجعت به وطن، وی ساموس را تحت حکومت ظالمانه پولی‌کراتس[۸۵] و یونیا را تحت سلطه‌ی ایرانیان یافت، از این رو به دریا و بندر کروتونا[۸۶]ی یونان واقع در ایتالیای جنوبی مهاجرت کرد. فیثاغورس در کروتونا مدرسه‌ای تأسیس کرد که بنام مدرسه فیثاغورسی شهرت یافت. مدرسه فیثاغورسی علاوه بر اینکه مکانی بود برای مطالعه فلسفه، ریاضیات و علوم طبیعی، در واقع امر به یک انجمن برادری شدیداً متحدی تبدیل گردید که در آن شعائر و مماسک سری انجام می‌گرفت. پس از مدتی تأثیر انجمن برادری و تمایلات اشرافی آنچنان شدت گرفت که نیروهای آزادیخواه ایتالیای جنوبی ساختمان‌های مدرسه را ویران کردند و سبب پراکنده شدن اعضای انجمن

---

[85]. Polycrates

[86]. Corotona

گردیدند. بنابر روایتی، فیثاغورس به بین‌النهرین (عراق فعلی) گریخت و در همان‌جا در سنین ۷۵ تا ۸۰ سالگی درگذشت. انجمن برادری به‌صورت پراکنده حداقل تا دو قرن بعد از فوت فیثاغورس به موجودیت خود ادامه داد.

فلسفه فیثاغورسی بر این فرض متکی بود که اعداد طبیعی سبب کیفیات مختلف انسان و ماده است. این نگرش منجر به تعالی و مطالعه خواص اعداد گردید و علم حساب همراه با هندسه، موسیقی و ستاره‌شناسی و علوم انسانی اساس برنامه تحصیلی مدرسه فیثاغورسی را تشکیل می‌داد. این گروه موضوعات در قرون وسطی به علوم چهارگانه شهرت یافت، که به آن علوم سه‌گانه دستورزبان، منطق و معانی بیان افزوده شد. این علوم انسانی هفت‌گانه، تجهیزات مورد نیاز یک فرد تحصیل کرده محسوب می‌شدند. چون تعلیمات فیثاغورسی همه شفاهی بود و از آنجا که رسم انجمن برادری بر آن بود که همه کشفیات را به مؤسس عالیقدر آن منسوب کنند، به دشواری می‌توان فهمید که دقیقاً کدام‌یک از کشفیات ریاضی را باید به خود فیثاغورس نسبت داد و کدام‌یک به سایر اعضای انجمن تعلق دارد.

عقیده عمومی بر این است که فیثاغورس و پیروانش، همراه با فلسفه انجمن برادری، اولین قدم‌ها را در رشد نظریه اعداد برداشته‌اند و در عین حال قسمت اعظم شالوده رازگرایی عددی آینده را ایجاد کرده‌اند. از این منظر یامبلیخوس[۸۷]، فیلسوف صاحب نفوذ نوافلاطونی حدود ۳۲۰ بعد از میلاد کشف اعداد متحابه را به فیثاغورسیان نسبت داده است.

دو عدد $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ را متحابه نامیم هرگاه $\boldsymbol{a}$ برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی $\boldsymbol{b}$ و همچنین $\boldsymbol{b}$ برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی $\boldsymbol{a}$ باشد.

مثال: $\boldsymbol{a}$=۲۸۴ و ۲۲۰= $\boldsymbol{b}$ متحابه‌اند؛ زیرا مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ عبارتند از:

۱۱۰, ۵۵, ۴۴, ۲۲, ۲۰, ۱۱, ۱۰, ۵, ۴, ۲, ۱

که حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۲۸۴ است.

مقسوم‌علیه‌های ۲۸۴ عبارتند از:

---

87. Iamblichus

۱٫۲٫۴٫۷۱٫۱۴۲

همچنین

۱+۲+۴+۷۱+۱۴۲=۲۲۰

این زوج اعداد، که کشف آن را به فیثاغورس نسبت می‌دهند، در هاله‌ای عرفانی پوشیده شدند و بعدها این عقیده خرافی پدید آمد که اگر طلسم حاوی این اعداد در بازوبند دو فرد بسته شود دوستی تمام عیاری بین حاملین آن‌ها ایجاد خواهد کرد! این اعداد نقش مهمی در سحر و جادو، احکام نجوم و طالع بینی پیدا کردند.

به‌نظر می‌رسد که هیچ زوج اعداد متحابه جدیدی تا زمان پیرودِفرما[۸۸] اعداددان مشهور فرانسوی در سال ۱۶۳۶ کشف نشده باشد. پیرودفرما دو عدد متحابه ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را کشف کرد. معهذا، در همین اواخر ثابت شده است که این کشف، کشف مجددی بوده و این زوج عدد را قبلاً ابن البنای مراکشی (مغربی) در اواخر قرن سیزدهم یا اوایل قرن چهاردهم میلادی کشف کرده است. به‌نظر می‌رسد که ابن البنا این دو عدد را به کمک فرمولی از ثابت بن قره کشف کرده باشد. ملا محمدباقر[۸۹] یزدی قبل از رنه دکارت[۹۰]، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی دو عدد متحابه ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ را ارائه داد. لئونارد اویلر، ریاضی‌دان آلمانی جستجوی سازمان یافته‌ای برای یافتن اعداد متحابه به‌عمل آورد و در ۱۷۴۷، لیستی مشتمل بر ۳۰ زوج از این اعداد را عرضه کرد که بعداً به ۶۰ زوج توسعه یافت. امر عجیب دیگر در تاریخ این اعداد، کشف اعداد متحابه دور از نظر مانده و نسبتاً کوچک ۱۱۸۴ و ۱۲۱۰ به‌وسیله پسرک شانزده ساله ایتالیایی، نیکولو پاگانینی[۹۱] در سال ۱۸۶۶ بود. امروزه بیش از ۱۰۰۰ زوج عدد متحابه شناخته شده‌اند.

اعداد دیگری با روابط جادویی که در تحقیقات نظری عددشناسی اساسی‌اند، و گاهی به فیثاغورسیان نسبت داده می‌شود اعداد تام، ناقص و زاید هستند. یک عدد را

---

88. Pier De Fermat

۸۹. ملا محمدباقر در قرن یازدهم قمری زیسته و در سال ۱۰۵۶ در اصفهان درگذشته است، در حالی‌که رنه دکارت فیلسوف نامدار فرانسوی در قرن هفدهم میلادی، بعد ازمحمدباقر می‌زیسته است.

90 Rene Descartes

91. Nicolo Paganini

تام نامیم هرگاه برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی خود باشد، ناقص گوییم هرگاه از مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش تجاوز نماید و زاید است اگر کوچک‌تر از مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش باشد. بنابراین، خداوند جل‌جلاله جهان را در شش روز آفرید که ۶ یک عدد تام است، زیرا ۳+۲+۱=۶. تا سال ۱۹۵۲، تنها ۱۲ عدد تام شناخته شده بود که همه آن‌ها زوج بودند و از بین آن‌ها سه‌تای اول عبارتند از: ۶، ۲۸ و ۴۹۶.

اقلیدس در آخرین قضیه مقاله نهم کتاب اصول خود ثابت می‌کند که اگر $۲^n -۱$ یک عدد اول باشد آنگاه $۲^{n-۱}\left(۲^n -۱\right)$ یک عدد تام است.

اویلر ثابت کرده است که هرگاه عدد تامی زوج باشد باید به شکل $۲^{n-۱}\left(۲^n -۱\right)$ باشد که در آن $۲^n -۱$ اول است (عکس تقریبی قضیه اقلیدس). وجود و یا عدم وجود اعداد تام فرد یکی از مسأله‌های حل نشده نظریه اعداد است. ثابت شده است که هیچ عدد فردتام با کم‌تر از ۱۰۰ رقم وجود ندارد.

امروزه با استفاده از انجام محاسبات سریع به کمک رایانه‌ها اعداد تام دیگری کشف شده است. برای نمونه در سال ۱۹۵۷، با استفاده از رایانه سوئدی *BESK* عدد تامی از نوع اقلیدسی آن به ازای $n=$۳۲۱۷ کشف گردید، بدین لحاظ عدد $۲^{۳۲۱۶}\left(۲^{۳۲۱۷}-۱\right)$ عددی تام است.

ریاضی‌دانان مؤخر تعمیم‌هایی از مفهوم عدد تام ارائه کرده‌اند و تحقیق در این ادامه دارد.

کمیت‌های متوافق: دو کمیت یا دو طول را متوافق نامیم هرگاه کمیت سومی (به‌عنوان واحد اندازه‌گیری) بتوان یافت که در هر دو طول به مقدار صحیح بگنجد. دو پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه طول $\overline{AB}$ برای مثال برابر ۱/۵ متر و $\overline{CD}$ برابر ۰/۵ باشد، می‌توانیم واحد اندازه‌گیری را کوچک‌تر کرده تا اندازه هر دو طول با اعداد طبیعی نمایش شود. مثلاً اگر بجای متر واحد اندازه‌گیری را برابر 0.5 متر بگیریم خواهیم داشت

$$\left|\overline{AB}\right|=۳ \quad , \quad \left|\overline{CD}\right|=۱$$

و یا هرگاه واحد اندازه‌گیری را سانتی‌متر اختیار کنیم

$$\left|\overline{AB}\right|=۱۵۰ \quad , \quad \left|\overline{CD}\right|=۵۰$$

برابر واحد اندازه‌گیری، یعنی سانتی‌متر خواهد شد.

تصور شهودی به ما این ایده را القاء می‌کند که این وضعیت برای هر دو طول صادق است، یعنی هر دو طول با هر اندازه متوافق‌اند.

تصور می‌شود با کوچک‌تر کردن واحد مقایسه (واحد اندازه‌گیری) بالاخره طول واحد در هر دوی $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با اعدادی صحیح خواهد نشست. در این‌صورت هرگاه

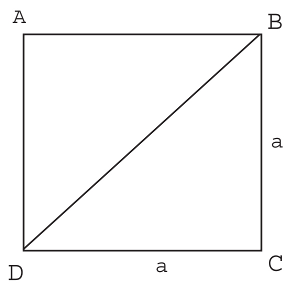
واحد $\left|\overline{AB}\right| = m$ ، واحد $\left|\overline{CD}\right| = n$

آنگاه

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{m}{n}$$

بنابراین نسبت هر دو طول برابر عددی گویا خواهد شد. فیثاغورسیان را عقیده بر این بود که هر دو کمیت متوافق‌اند، یعنی نسبت هر دو کمیت دلخواه عددی گویا است.

حال مربعی به طول ضلع a را در نظر می‌گیریم.



بنابراین طبق قضیه فیثاغورس

$$\overline{BD}^{۲} = a^{۲} + a^{۲} = ۲a^{۲}$$
$$\overline{BD} = a\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$\frac{\overline{BD}}{BC}=\frac{a\sqrt{۲}}{a}=\sqrt{۲}$$

و هرگاه طول ضلع مربع را برابر واحد اختیار کنیم، طول قطر مربع برابر $\sqrt{۲}$ خواهد شد. طبق نظریه کمیت‌های متوافق فیثاغورسیان عدد $\sqrt{۲}$ که نسبت دو طول قطر و ضلع مربع است باید عددی گویا بوده باشد. اما به آسانی می‌توان نشان داد که $\sqrt{۲}$ گویا نیست.

زیرا هرگاه $\sqrt{۲}$ گویا باشد، $\sqrt{۲}=\frac{p}{q}$ که در آن p و q نسبت به هم اولند. در این‌صورت $p=\sqrt{۲}\,q$ و یا $p^{۲}=۲q^{۲}$.

چون $p^{۲}$ دو برابر یک عدد طبیعی است، $p^{۲}$ و در نتیجه p، باید عددی زوج باشد. فرض کنیم $p=۲c$. در این صورت

$$۴c^{۲}=۲q^{۲}$$

و یا

$$q^{۲}=۲c^{۲}$$

که از این نتیجه می‌گیریم $q^{۲}$ و از این‌رو، q باید زوج باشد؛ و این غیرممکن است زیرا p و q متباین فرض شده بودند. در حالی‌که هر دو عامل دو دارند در نتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{۲}$ با این تناقض باید کنار گذاشته شود.

گرچه کشف اعداد گنگ توسط فیثاغورسان انجام گرفت، لکن این کشف برای آنان حیرت‌آور و نگران کننده بود. قبل از هر چیز این کشف ضربه مهلکی بر فلسفه فیثاغورسی که همه چیز را با اعداد صحیح وابسته می‌دانست، تلقی می‌شد.

دیگر آنکه این مطلب مغایر با عقل سلیم متعارف آنان به‌نظر می‌آمد، زیرا به‌طور شهودی حس می‌شد که هر کمیتی با یک عدد گویا قابل توصیف است.

به‌طور خلاصه کشف اعداد گویا با نظریه فیثاغورسیان مبنی بر اینکه هر دو کمیت متوافق‌اند در تضاد آشکار بود.

هاوارد دبلیو، ایوز[۹۲] در این خصوص اشاره دارد که

---

[92]. Haward W. Eves

> این کشف گنگ بودن $\sqrt{۲}$ بهتی را در صفوف فیثاغورسیان باعث شد. این امر نه تنها فرض اساسی وابسته بودن همه چیز را به اعداد درست ظاهراً بر هم زد، بلکه چون برطبق تعریف فیثاغورسی تناسب، هر دو کمیت همجنس متوافق‌اند همه قضایای نظریه فیثاغورسی در باب تناسب باید به کمیت‌های متوافق محدود می‌گردید و لذا نظریه عمومی اشکال متشابه آن‌ها از اعتبار افتاد. این «رسوایی منطقی» آنچنان عظیم بود که برای مدتی سعی می‌شد موضوع مخفی نگه‌داشته شود و افسانه‌ای با این مضمون وجود دارد که هیپاسوس[۹۳] فیثاغورسی به‌خاطر عدم تقوایش در افشای این راز نزد اجانب، در دریا به هلاکت رسید و یا مطابق روایت دیگری از جامعه برادری فیثاغورسیان طرد شد و قبری نمادی برای وی بر پا گردید آنچنان که گویی مرده است.

تا مدت‌ها، $\sqrt{۲}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود. برخی نیز بر این باورند که $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ که نسبت ضلعی یک پنج ضلعی منتظم به قطرآن است اولین عدد گنگ شناخته شده باشد. اما این احتمال کمتر از احتمال وجود $\sqrt{۲}$ به‌عنوان اولین گنگ شناخته شده می‌باشد. بعدها، به گفته افلاطون، تئودوروس[۹۴]، کورنه‌یی[۹۵] نشان داد که $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$، $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۱}$، $\sqrt{۱۲}$، $\sqrt{۱۳}$، $\sqrt{۱۴}$، $\sqrt{۱۵}$، $\sqrt{۱۷}$ نیز گنگ هستند.

بعدها، این رسوایی که از آن به‌عنوان *بحران اول مبانی ریاضی* یاد می‌شود توسط ائودوکسوس[۹۶] از شاگردان افلاطونی و آرخوتاس که خود نیز از فیثاغورسیان بود، با ارائه تعریف جدیدی از تناسب مرتفع گردید و بدین ترتیب بحران اول مبانی ریاضیات در حدود ۳۷۰ قبل از میلاد پایان یافت.

از منظر فلسفی، بحران اول مبانی ریاضیات را می‌بایست در وابستگی تام و تمام نظریه اعداد به هندسه و تفکر شهودی مرتبط با آن به حساب آورد. شهود بعدی، گرچه در توصیف و تبین هندسه مقدماتی نقشی اساسی دارد، لکن محدودیت خاص خود را

---

93. Hippasus

94. Theodorus

95. Eudoxus

96. Archytas

داراست؛ محدودیتی که تفکر جبری و منطقی فاقد آن است. در طول تکامل و تعالی ریاضیات، موارد دیگری وجود دارد که تا مدت‌ها تفکر شهودی صرف بسیاری از ریاضی‌دانان را به اشتباه واداشته است.

داستان پیدایش توابعی که همه‌جا پیوسته‌اند ولی در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیستند نتیجه تقابل منطق و استدلال منطقی با شهود متعارف می‌باشد. (برای ملاحظه وجود چنین تابعی به کتاب اصول آنالیز ریاضی تالیف والتر رودین[۹۷] مراجعه کنید.)

۳-۶ مسائل

در مسائل زیر می‌توانید از کتب مربوط به مبانی علوم ریاضی استفاده نمائید.

۱. ثابت کنید مجموعه اعداد گویا شمارش‌پذیر است، یعنی

$$Q \cong N$$

۲. ثابت کنید مجموعه اعداد گنگ شمارش‌پذیر نامتناهی است (از نتیجه مسأله ۱ کمک بگیرید).

۳. ثابت کنید هرگاه p عددی اول باشد، $\sqrt{p}$ گنگ است.

۴. نشان دهید حاصل‌جمع هر عدد گنگ با یک عدد گویا عددی گنگ است.

۵. $\sqrt{5}$ را متناظر نقطه‌ای روی خط حقیقی مشخص کنید.

۶. نشان دهید که بسط اعشاری هر عدد گنگ، نامتناهی و فاقد دوره تناوب است؛ به عکس هر کسر اعشاری با دوره تناوب مشخص نشانگر یک عدد گویا است.

۳-۷ سه مسأله ساختاری دنیای باستان

۳-۷-۱ بقراط[۹۸] و تربیع دایره

ریاضی‌دان برجسته نیمه دوم قرن پنجم پیش از میلاد، بقراط، اهل چیاس[۹۹] (۴۶۰ تا ۳۸۰ پیش از میلاد) بود، که باید او را از بقراط (از کاس[۱۰۰])، پدر طب یونان، که هم عصر او بود

---

97. W. Rudin

98. Hippocrates

99. Chios

100. Cos

جدا کرد. بقراط مانند تالس زندگیش را با تجارت آغاز کرده و با تدریس به پایان برد؛ اما بقراط که به زیرکی تالس نبود، مورد سرقت قرار گرفته و اموالش را از دست داد.

زمانی‌که بقراط وارد آتن شد، سه مسأله خاص – تربیع دایره، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه– مدتی بود که توجه هندسه‌دانان را به خود جلب کرده بود. این مسائل به‌عنوان نقطه عطف تاریخ ریاضیات و یک منبع جالب و پرجاذبه برای آماتورها و محققان به طول اعصار متمادی باقی مانده‌اند.

آنچه که به‌خاطر آن بقراط شهرت یافت، عمدتاً کاری بود که او در رابطه با اولین مسأله از این مسائل، تربیع دایره، انجام داد. گاهی این مسأله را "تطبیق دایره" می‌نامند. صورت این مسأله را می‌توان به‌طور ساده به این‌صورت بیان نمود: آیا می‌توان مربعی را ساخت که مساحتش با مساحت دایره داده شده برابر باشد؟ این مسأله خیلی عمیق‌تر از آن است که ابتدا امر به‌نظر می‌رسد، زیرا فاکتور مهم این است که این مربع چگونه باید ساخته شود. افلاطون (۴۲۹ تا ۳۴۸ پیش از میلاد) اصرار داشت که این کار تنها باید با خط‌کش و پرگار انجام پذیرد. در این روش فرض بر این است که هریک از این وسائل برای یک‌بار، با خصوصیت خاص به‌صورت زیر باید استفاده شوند:

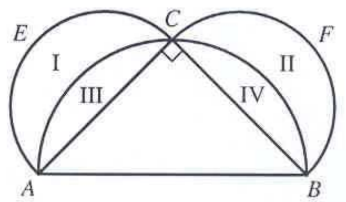
۱. با خط‌کش، یک خط را می‌توان از روی دو نقطه داده شده رسم کرد.
۲. با پرگار، یک دایره را می‌توان با داشتن یک مرکز و یک شعاع رسم کرد.

استفاده از هریک از این دو وسیله به روشی به جزء آنچه که در بالا قید شد مجاز نمی‌باشد. برای مثال، هیچ‌یک از این وسائل را نمی‌توان برای انتقال فواصل به‌کار برد. بنابراین خط‌کش را نمی‌توان به هیچ طریقی مدرج یا حتی علامت‌گذاری کرد و پرگار نیز به‌محض برداشتن از روی کاغذ از هم فرو می‌پاشد. یک نقطه یا یک خط را *ساختنی (ساخت‌پذیر) توسط خط‌کش و پرگار* نامند هرگاه بتوان آن را با این دو ابزار – با رعایت اصول قید شده در مورد آنان – تنها در تعداد متناهی مرتبه به‌کارگیری از این ابزار، به‌طور هندسی رسم کرد.

در یونان مفهوم ساخت‌پذیری (*مسأله تربیع*) علی‌رغم تلاش‌های فراوان یونانیان و دیگران، و بعدها هندسه‌دانان، حل نشده باقی ماند. بیهودگی تلاش‌های آنان در قرن نوزدهم، زمانی که سرانجام ریاضی‌دانان ثابت کردند مربع کردن دایره صرفاً با خط‌کش و پرگار غیرممکن است، نشان داده شد. محک ساخت‌پذیری با این محدودیت‌های

ابزاری به توسط ایده‌های جبری (و نه هندسی) و مفاهیمی که در آن دوران (دوران باستان) و قرون وسطی ناشناخته بودند، به اثبات رسیده است. مربع کردن دایره معادل است با ساختن قطعه خطی که طول آن $\sqrt{\pi}$ برابرِ شعاع دایره باشد. بنابراین عدم امکان ساختن چنین قطعه خطی با ابزارهای تهیه شده توسط یونانیان در صورتی قابل اثبات می‌بود که می‌توانستیم نشان دهیم $\sqrt{\pi}$ قابل ترسیم نیست. این مبحث حول ماهیت متعالی بودن عدد π دور می‌زند؛ یعنی π ریشه هیچ معادله چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست. (متعالی بودن π در سال ۱۸۸۲ توسط لیندمان[۱۰۱] با برهانی طولانی و ظریف به اثبات رسید.)

تلاش‌های بقراط در مربع کردن دایره، او را به کشف این امر هدایت کرد که نواحی مسطح خاصی با مرزهای منحنی وجود دارند که قابل مربع شدن هستند. او خصوصاً نشان داد که دو هلال[۱۰۲] (یک *هلال* شکلی است هلال ماه‌گونه که مرزهای آن دو کمان از دایره‌هایی با شعاع‌های نامساوی است) را به‌گونه‌ای رسم کرد که مجموع مساحت‌های‌شان با مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد. این دستاورد به شرح زیر حاصل شد: او که کار را با یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بنام ABC شروع کرده بود، نیم‌دایره‌هایی در سه طرف مطابق شکل زیر تشکیل داد.



ظاهراً بقراط می‌دانست که نسبت مساحت‌های دو دایره برابر با نسبت مربع طول قطرهایشان است.

$$\frac{\text{مساحت نیم‌دایره با قطر } AB}{\text{مساحت نیم‌دایره با قطر } AC} = \frac{AB^{2}}{AC^{2}}$$

---

[101]. Lindemann

[102]. lune

این نسبت باید برابر با ۲ باشد، زیرا بنابر قضیه فیثاغورس، با در نظر گرفتن مثلث ABC، داریم $AB^۲ = AC^۲ + CB^۲ = ۲AC^۲$. بنابراین نیم‌دایره با قطر AB دارای مساحتی دو برابر با مساحت نیم‌دایره با قطر AC است. به کمک این مطلب، بقراط به این نتیجه رسید که مجموع مساحت‌های دو نیم‌دایره کوچک برابر است با مساحت نیم‌دایره بزرگ‌تر. قدم بعد تفاضل مساحت‌های III و IV است. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد که مساحت‌های باقی‌مانده، یعنی مجموع مساحت‌های (مساوی) I و II از دو هلال، و مساحت مثلث ABC با هم برابر هستند. اما مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}(AC.BC) = \frac{۱}{۲}AC^۲$، لذا

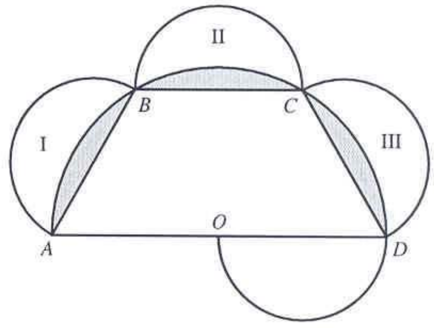
$$\frac{۱}{۲}AC^۲ = \text{مساحت هلال II + مساحت هلال I}$$

به نحوی دیگر، مساحت هلال I معادل است با نصف مساحت مثلث ABC،

$$\text{مساحت هلال } I = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}AC^۲\right) = \left(\frac{AC}{۲}\right)^۲$$

و "مربع هلال" پیدا شده است. بنابراین بقراط اولین مثال را در ریاضیات ارائه داد که یک ناحیه محدود شده به منحنی‌ها تربیع دقیق را می‌پذیرد.

بقراط پس از نشان دادن اینکه هلال را می‌توان مربع کرد، سعی در مربع کردن دایره با روش مشابه نمود. برای این منظور او یک ذوزنقه متساوی‌الساقینی که بر قطر یک دایره بنا نهاده شده را در نظر گرفت به‌گونه‌ای که سه ضلع متوالی آن تشکیل نصف یک شش ضلعی منتظم محاط شده در دایره را می‌دهد. سپس با بحثی مشابه آنچه در بالا آمد را نشان داد.



اثر بقراط در مورد هلال‌ها از طریق نوشته‌های مفسر قرن ششم، سیمپلیسیوس[۱۰۳]، حفظ شده و در حقیقت تنها بخش قابل توجه از ریاضیات کلاسیک یونان (پیش از اسکندر) است که بدون تغییر به ما رسیده است. به گفته سیمپلیسیوس، بقراط معتقد بود (طبق بحثی که شرح دادیم) که عملاً در تربیع دایره موفق شده است. اما نیازی به گفتن نیست که این مسأله حل نشد!

اشتباه در این فرض نهفته است که "هر هلالی را می‌توان مربع کرد"؛ در حالی‌که درست بودن این مطلب فقط در شرایط خاصی که بقراط بررسی کرده بود نشان داده شده بود. آنچه او برای هلال روی ضلع یک مثلث متساوی‌الساقین محاط شده ثابت کرده بود، لزوماً برای هلال روی ضلع یک نیمه شش ضلعی محاط شده صدق نمی‌کرد. البته بعید به‌نظر می‌رسد بقراط که یک هندسه‌دان بسیار قابل است مرتکب چنین اشتباه فاحشی شده باشد. شاید او امیدوار بوده که استفاده از این تربیع‌های هلالی در طول زمان به تربیع دایره منتج شود. اما این اشتباه تفسیرنویس بوده که فکر می‌کرده بقراط ادعای مربع کردن دایره را نموده، در حالی‌که چنین نکرده بود.

۳-۷-۲ تضعیف مکعب

یکی دیگر از مسائل معروفی که هندسه‌دانان آن زمان را به خود مشغول کرده بود، تضعیف مکعب بود؛ به‌عبارت دیگر، پیدا کردن یال مکعبی که حجم آن دو برابر یک مکعب مشخص دیگر باشد. نحوه پیدایش مسأله تضعیف بدرستی مشخص نیست.

---

[103]. Simplicius

شاید این امر به دوران فیثاغورسیان اولیه برمی‌گردد که موفق شده بودند با بنا کردن یک مربع بر روی قطر مربعی دیگر، اندازه آن را دو برابر کنند به‌طوری که مربع جدید دقیقاً دو برابر مساحت مربع اولیه را داشته باشد. پس از این دستاورد، بسط دادن این مسأله به حالت سه‌بعدی کاملاً طبیعی به نظر می‌رسید.

در اینجا هم اولین پیشرفت واقعی در حل مسأله تضعیف توسط بقراط انجام گرفت. او نشان داد که این کار به سادگی یافتن دو واسطه هندسی میان یک خط مفروض و خط دیگری با طول دو برابر آن است. (یعنی دو خط به نوعی بین خطوط مفروض قرار داده شوند که چهار خط در تناسب هندسی قرار بگیرند.) با نمادهای امروزی، اگر a و $2a$ دو خط مورد نظر بوده، و x و y واسطه‌های هندسی باشند به‌طوری‌که بتوانند بین آن‌ها قرار گیرند، آنگاه طول‌های a، x، y و $2a$ در تصاعد هندسی قرار می‌گیرند، یعنی

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

دو نسبت اول ایجاب می‌کنند که $x^2 = ay$. از دومین نسبت‌ها به‌دست می‌آید $y^2 = 2ax$. از ترکیب این معادلات خواهیم داشت

$$x^4 = a^2 y^2 = 2a^3 x$$

و لذا

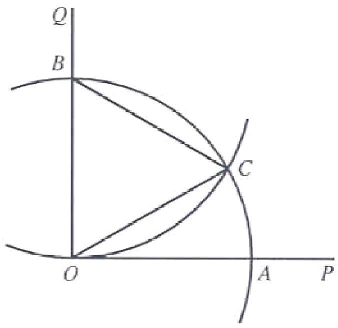
$$x^3 = 2a^3$$

به‌عبارت دیگر، مکعبی با ضلع به طول x دارای حجمی دوبرابر با مکعبی به ضلع a است.

بقراط در پیدا کردن واسطه‌های هندسی از راه ساختن تنها با کمک خط‌کش و پرگار، ابزارهایی که افلاطون هندسه را به آن‌ها محدود کرده بود، موفق نشد. با این حال تقلیل یک مسأله در هندسه فضایی به هندسه مسطح به‌خودی‌خود دستاوردی چشمگیر بود. از این زمان به بعد همواره مسأله تضعیف مکعب با روشی که بقراط بیان کرده بود مورد حمله واقع گردید: چگونه می‌توان دو واسطه هندسی را بین دو خط مستقیم پیدا کرد؟

۳-۷-۳ تثلیث یک زاویه

اگرچه بقراط در دو مورد از سه مسأله ساختاری مهم پیشرفت نسبی حاصل نمود، اما در تقسیم زاویه به سه بخش مساوی توفیقی حاصل ننمود. تثلیث زاویه تنها با خط‌کش و پرگار یکی از ساده‌ترین ساختنی‌های هندسی است، و دلیلی وجود نداشت که محققان اولیه شک کنند تقسیم زاویه به سه بخش مساوی با شرایط مشابه می‌تواند غیرممکن باشد. چند زاویه به‌وضوح قابل تثلیث‌اند. در حالت خاص زاویه قائمه POQ، روش ساختن به شرح زیر است: به مرکز O دایره‌ای با شعاع دلخواه رسم کنید. نقاط تلاقی آن با دو ضلع مثلث را A و B بنامید. اکنون دایره‌ای به مرکز B چنان رسم کنید که از O بگذرد. دو دایره در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند، یکی از آن‌ها نقطه C در داخل زاویه POQ است.



مثلث BOC متساوی‌الاضلاع است، لذا تمام اضلاع مساوی‌اند و داریم $\angle COB = ۶۰^\circ$. اما در این‌صورت

$$\angle COA = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ = \frac{۱}{۳}(۹۰^\circ)$$

و خط OCزاویه قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده است.

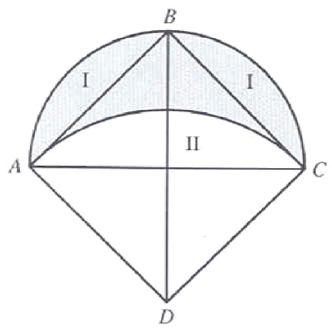
برای مدت ۲۰۰۰ سال، ریاضی‌دانان سعی بیهوده کردند تا یک زاویه اختیاری را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند، اما توفیقی نیافتند. در سال ۱۸۳۷، پیر وانتزل[۱۰۴]

[104]. Pierre Wantzel

(۱۸۱۴– ۱۸۴۸) از مدرسه پلی‌تکنیک پاریس، اولین شواهد دقیق را از غیرممکن بودن تثلیث زاویه تنها با کمک خط‌کش و پرگار ارائه نمود. و انتزل در همان مقاله که در *مجله ریاضیات* لیوویل[۱۰۵] چاپ شده بود، همچنین بیهودگی تضعیف مکعب را نیز نشان داد. کلید این نتیجه‌گیری تبدیل دو مسأله هندسی فوق به مسائلی در نظریه معادلات بود. وانتزل محک جبری ساده‌ای را به‌دست آورد که حل یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب گویای متناظر با آنچه که به‌وسیله خط‌کش و پرگار به‌طور هندسی ساخته شده باشند را میسر می‌ساخت. در واقع مسائل کلاسیک هندسی در مورد تثلیث و تضعیف به معادلات درجه سه‌ای منتهی می‌شوند که در محک وانتزل صدق نمی‌کنند، و بنابراین ساخت‌پذیری‌های مورد نظر قابل اجرا نخواهند بود.

۳–۸ مسائل

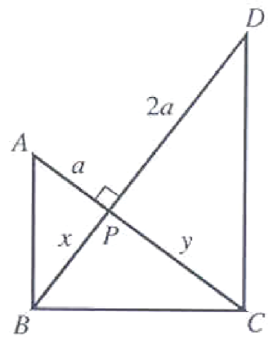
۱. برای تغییری در استدلال بقراط که مساحت یک هلال را می‌توان به مساحت یک دایره تقلیل داد، با یک مربع $ABCD$ شروع کرده و یک نیم‌دایره روی قطرش رسم کنید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع AD و کمانی از A به C مطابق با شکل زیر رسم کنید. ثابت کنید که مساحت هلال هاشور خورده برابر با مساحت مثلث ABC است.



105. Lioville's Journal de Mathematiques

۲. راه حل زیر در ادامه مسأله واسطه هندسی اغلب به افلاطون نسبت داده شده است. دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و BCD در نظر بگیرید طوری که بر ضلع مشترک BC مطابق شکل قرار گرفته‌اند. فرض کنید که وترهای AC و BD در نقطه D طوری بر یکدیگر عمود شوند که $AP=a$ و $DP=۲a$. ثابت کنید که $x=BP$ و $y=CP$ واسطه‌های هندسی مطلوب بین a و $۲a$ هستند، یعنی

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

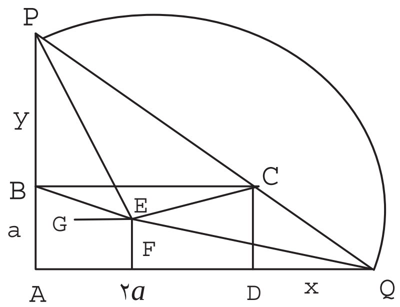


(*راهنمایی*: هرگاه دو خط موازی توسط خط سومی قطع گردد، زوایای داخلی ایجاد شده با هم برابرند. بنابراین نتیجه بگیرید که مثلث‌های APB، CPB و DPC مشابه‌اند.)

۳. آپولونیوس (حدود ۲۲۵ پیش از میلاد) مسأله قرار دادن دو واسطه هندسی بین قطعه خط‌هایی به طول a و $۲a$ را حل کرد. او ابتدا مستطیل $ABCD$ را با اضلاع $AB=a$ و $AD=۲a$ رسم کرد. E را محل تلاقی قطرها نامید. به مرکز E دایره‌ای رسم کرد تا امتداد AB و AD را در نقاطی مانند P و Q، به‌ترتیب، به‌گونه‌ای قطع نماید که نقاط P، C و Q هر سه بر یک خط مستقیم قرار بگیرند. (گفته می‌شود آپولونیوس مخترع دستگاهی مکانیکی بوده است که به توسط آن این مرحله آخر امکان‌پذیر بوده است.) برای یک چنین شکلی ثابت کنید

الف) مثلث‌های PAQ، PBC و CDQ متشابه‌اند و از آنجا

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{۲a}=\frac{a+y}{۲a+x}$$



ب) مثلث‌های EFQ و EGP قائم‌الزاویه با وترهای مساوی‌اند و از آنجا

$$(a+x)^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=a^۲+\left(\frac{a}{۲}+y\right)$$

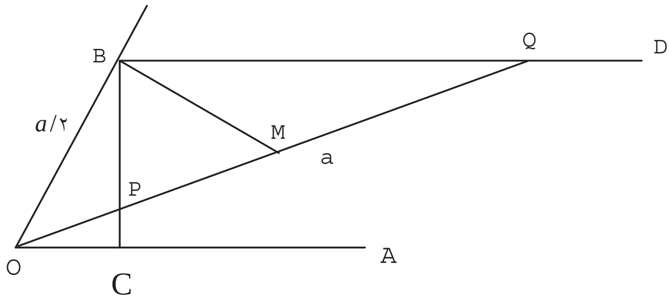
یا

$$(۲a+x)x=(a+y)y$$

ج) قطعات $DQ=x$ و $BP=y$ دو واسطه هندسی بین a و $۲a$ هستند.

۴. تثلیث یک زاویه را نیز می‌توان به روش ساختن نیکومدس[۱۰۶] (حدود ۲۴۰ پیش از میلاد) انجام داد. فرض کنید $\angle AOB$ مفروض باشد. از نقطه B دو خط، یکی عمود بر ضلع OA از $\angle AOB$ در C و دیگری به موازات OA رسم کنید. اکنون اندازه $a=۲OB$ را روی خط‌کش علامت زده و خط کش را طوری بلغزانید که از نقطه O بگذرد به‌طوری‌که دو سر انتهایی این قطعه به طول a روی BC و BD (به‌ترتیب در P و Q، و لذا $PQ=a$) قرار داشته باشد. (توجه داشته باشید که O و P و Q در روی یک خط قرار دارند)

106. Nicomedes



هریک از ادعاهای زیر را ثابت کنید:

الف) اگر M نقطه میانی PQ باشد، آنگاه $\angle MOB = \angle BMO$ (*راهنمایی:* نقطه میانی وتر یک مثلث قائم‌الزاویه از دو سر اضلاعش به یک فاصله است.)

ب) به استفاده از قضیه زاویه خارجی، در مثلث BMQ، خواهیم داشت $\angle BMP = \angle MBQ + \angle MQB$.

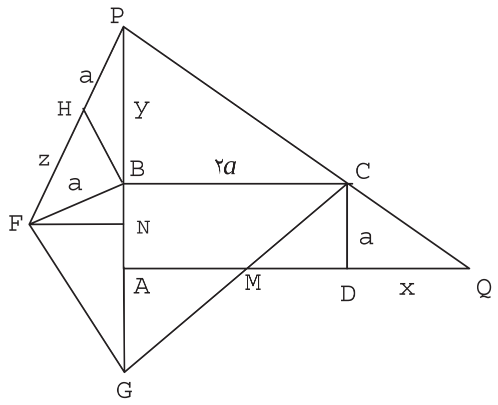
ج) $\angle AOQ = \angle BQO$.

د) $\angle AOB = \angle AOQ + \angle QOB = ۳\angle BQO$.

۵. نیکومدس مسأله تضعیف مکعب را با بحثی شبیه به آپولونیوس حل کرد. او ابتدا مستطیل $ABCD$ را با اضلاع $AB = a$ و $AD = ۲a$ رسم کرد.

نقطه M را وسط AD و N را وسط AB گرفت و فرض کرد امتداد CM و BA همدیگر را در نقطه G قطع کنند. نقطه F را بر عمود FN چنان بگیرید که $FB = a$. اکنون BH را به موازات GF رسم کرده و FP را رسم کنید تا امتداد AB را در P چنان قطع کند که $HP = a$. (برای انجام مرحله اخیر نیکومدس یک سطح خمیده بخصوصی را اختراع کرد و حتی یک دستگاهی بنام صدف‌وار[۱۰۷] که می‌توانست آن را رسم کند.) خط PC و AD را امتداد داده تا یکدیگر را در Q قطع کنند.

[107]. conchoid



ثابت کنید که

الف) مثلث‌های PAQ، PBC و CDQ متشابه‌اند و از آنجا

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{۲a}=\frac{a+y}{۲a+x}$$

ب) مثلث‌های PBH و PGF متشابه‌اند و لذا

$$\frac{a}{y}=\frac{z+a}{y+۲a}$$

یا $a/z=y/۲a$، و بنابراین $z=x$.

ج) مثلث‌های FNB و FNP در ضلع FN مشترک هستند و لذا

$$a^۲-\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=(x+a)^۲-\left(y+\frac{a}{۲}\right)^۲$$

یا

$$\frac{x}{y}=\frac{y+a}{x+۲a}$$

د) قطعات $DQ=x$ و $BP=y$ دو واسطه هندسی بین a و $۲a$ هستند

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

فصل چهارم

مکتب اسکندریه: اقلیدس

هدف‌های آموزشی فصل سوم

الف) هدف کلی

هدف کلی از ارائه این فصل ارائه و معرفی نوشته‌های اقلیدس و مبانی هندسه و سپس نقد و بررسی اصول اقلیدس از دیدگاه فلسفه ریاضی می‌باشد.

ب) هدف‌های آموزشی

دانشجو پس از مطالعه و فراگیری این فصل باید:

- بتواند اصول متعارفی و اصول موضوعه را بیان کند.
- بتواند چند نمونه از تعاریفی که در اولین مقاله اقلیدس آمده، را ارائه دهد.
- برهان چند قضیه از مقالات کتاب عناصر اقلیدس را بداند.
- با خواص بخش‌پذیری اقلیدسی آشنا باشد.
- تاریخچه الگوریتم اقلیدس را بشناسد.
- تاریخچه قضیه اساسی حساب را بداند.
- با کارهای ارشمیدس در زمینه اندازه‌گیری‌ها آشنا شده باشد.
- قادر به حل مسائل آخر هر بخش باشد.

۴-۱ اقلیدس و عناصر[۱۰۸]

۴-۱-۱ مرکز فراگیری: موزه

---

[108]. elements

نزدیک به اواخر قرن چهارم پیش از میلاد، صحنه فعالیت‌های مربوط به ریاضیات از یونان به مصر تغییر مکان داد. نبرد شارونیا[۱۰۹] که با پیروزی فیلیپ مقدونی در سال ۳۳۸ پیش از میلاد منتهی شد، با پایان آزادی یونان و نیز تحلیل رفتن استعداد بومی این سرزمین همراه بود. دو سال بعد فیلیپ به دست یکی از اشراف زادگان ناراضی به قتل رسید و پسر ۲۰ ساله‌اش، اسکندر کبیر، جانشین او شد. اسکندر طی دوازده سال، یعنی از سال ۳۳۴ پیش از میلاد تا زمان مرگش در ۳۲۳ پیش از میلاد، بخش عظیمی از دنیای شناخته شده را فتح کرد. از آنجائی‌که سپاهیانش عمدتاً یونانی بودند، او فرهنگ یونانی را در بخش‌های وسیعی از خاور نزدیک انتشار داد. آنچه پس از آن رخ داد، فصل جدیدی در تاریخ بود که با نام عصر هِلنی[۱۱۰] (یا شبه یونانی) شناخته می‌شود. این دوران سیصد سال به طول انجامید تا آنکه امپراطوری رم تأسیس شد. یادگار بزرگ اسکندر در مصر، شهری بود که هنوز هم نام وی را بر خود دارد.

در هنگام مرگ اسکندر، یکی از ژنرال‌های سپاهش، بطلمیوس[۱۱۱]، حکمران مصر شد و تأسیس اسکندریه را تکمیل نمود. این شهر از مزیت یک بندرگاه عالی با ظرفیت ۱۲۰۰ کشتی برخوردار بوده و از این رو در کوتاه‌ترین زمان ممکن به مرکز تجاری جهان، و نقطه اتصال آسیا، آفریقا، و اروپا بدل شد.

کلادیدس بطلمیوس (حدود ۱۴۵ بعد از میلاد)

پیروان اولیه بطلمیوس خود را وقف تبدیل اسکندریه به مرکز حیات فکری کل ناحیه مدیترانه شرقی نمودند. آن‌ها در اینجا مرکز آموزشی بزرگی در محلی بنام *موزه*[۱۱۲] (مقرِّ الهه‌های شهر و هنرهای زیبا) بنا کردند که سنگ بنای دانشگاه‌های مدرن بود.

---

109. Chaeronea
110. Hellenistic Age
111. Ptolemy
112. museum

موزه که یادگار شکوه بطلمیوسیان بود، نقطه عطفی نیز در تاریخ علم و نیز پشتیبانی سلطنتی محسوب می‌شد. این مرکز به‌عنوان نهادی برای تحقیقات و جستجوی دانش ساخته شده بود، نه برای تعلیم و آموزش. به این دلیل، برای مدت دو قرن محققان و دانشمندان به سوی مصر روان شدند.

محققان نمی‌توانستند بدون کتاب به‌کار خود ادامه دهند، بنابراین اولین نیاز، جمع‌آوری دست نوشته‌ها بود؛ وقتی این مکتوبات به حد کافی فزونی یافتند ساختمانی برای نگه داشتن‌شان نیز لازم شد. تقریباً همزمان با ساختن موزه، در مجاورت آن کتابخانه عظیم اسکندری بنا شد که بزرگ‌ترین مجموعه آثار یونانی موجود را در خود جای می‌داد. البته پیش از آن نیز کتابخانه‌هایی وجود داشتند، اما هیچ‌کدام منابع متعلق به بطلمیوسیان را در خود نداشتند.

۴-۱-۲ زندگی و مکتوبات اقلیدس

موزه، پیش از آنکه در سال ۶۴۱ میلادی به فراموشی سپرده شود، محققان برجسته بسیاری را پرورش داده بود که مسیر ریاضیات را برای قرن‌های متعدد تعیین کرده بودند: اقلیدس[۱۱۳]، ارشمیدس[۱۱۴]، اراتستن[۱۱۵]، آپولونیوس[۱۱۶]، پاپوس[۱۱۷]، کلادیوس بطلمیوس[۱۱۸]، و دیو فانتوس[۱۱۹]. در میان این افراد، اقلیدس (نزدیک به سال ۳۰۰ پیش از میلاد) در طبقه خاصی قرار دارد. نسل‌های آینده او را به عنوان مؤلف کتاب «*عناصر هندسه*[۱۲۰]» شناختند که قدیمی‌ترین رساله یونانی در زمینه ریاضیات است که به‌طور کامل به ما رسیده. «*عناصر*» مجموعه‌ای از مهم‌ترین حقایق ریاضی موجود در آن زمان است که در ۱۳ بخش، یا مقاله، تنظیم شده.

---

113. Euclid

114. Archimedes

115. Eratosthenes

116. Apollonius

117. Pappus

118. Claudius Ptolemy

119. Diophantus

120. Elements of Geometry

اگرچه بیش‌تر مطالب از منابع پیشین استخراج شده، اما ترتیب منطقی بسیار خوب قضایا و توسعه برهان‌ها، نشان‌دهنده نبوغ مؤلف آن است. اقلیدس مجموعه‌ای از یافته‌های مجزا را در قالب یک سیستم استنتاجی مبتنی بر مجموعه‌ای از اصول موضوعه، تعاریف و اصول متعارفی را در کنار یکدیگر قرار داد.

اقلیدس (حدود ۳۰۰ پیش از میلاد)

مثل سایر ریاضی‌دانان بزرگ یونان باستان، ما چیز زیادی درباره زندگی شخصی اقلیدس نمی‌دانیم. او در نیمه اول قرن سوم پیش از میلاد فعالیت می‌کرد. محتمل است که او تعلیمات ریاضی خود را در آتن و از شاگردان افلاطون گرفته باشد. او در زمان سلطنت بطلمیوس در اسکندریه می‌زیسته. او غیر از هندسه، مقالاتی در باب برش‌های مخروطی، هندسه کروی و نظریه اعداد نیز نوشته است.

۴-۲ هندسه اقلیدسی

۴-۲-۱ اصول اقلیدس برای هندسه

اقلیدس بیش از دو هزار سال سخنگوی پر افتخار هندسه یونانی، یعنی درخشان‌ترین مخلوق ذهن یونانی، بوده است. از زمان او، مطالعه «*عناصر*» یا بخش‌هایی از آن، به لازمه اصلی تعلیمات آزاد بدل شده است. نسل‌های پی‌درپی این اثر را در حکم قله و تاج منطق در نظر گرفته و مطالعه آن را بهترین شیوه امکان پیشرفت در استدلال دقیق دانسته‌اند.

تعداد ناچیزی از قضایای اثبات شده در کتاب *عناصر*، از کشفیات خود او هستند؛ عظمت اقلیدس در یافتن مطالب جدید نیست، بلکه بیشتر در مهارت بی‌نقصی است که وی آن مجموعه عظیم از حقایق را به‌صورت هندسه یونانی و نظریه اعداد ارائه نمود.

اقلیدس می‌دانست که برای پرهیز از به‌دور خود گشتن و به‌وجود آوردن یک نقطه شروع، باید برخی حقایق را در مورد ماهیت موضوع مورد نظر، بدون اثبات بپذیرد. این عبارات مفروض که همه چیز باید در قالب نتایج منطقی از آن‌ها استنباط شود، "*اصول متعارفی*[۱۲۱]" یا "*اصول موضوعه*[۱۲۲]" نامیده می‌شوند.

اقلیدس کوشید تا کل بنای دانش هندسی یونان را که از زمان تالس جمع شده بود، به‌صورت پنج اصل موضوع با ماهیتی مشخصاً هندسی، و پنج اصول متعارفی که برای تمام مفاهیم ریاضی صدق کنند، ارائه دهد.

اولین مقاله از کتاب *عناصر* به‌طور ناگهانی و بدون عبارات مقدماتی با لیستی از ۲۳ تعریف آغاز می‌شود. این تعاریف به‌عنوان مثال عبارتند از: تعریف *نقطه* ("که هیچ بخشی ندارد") و تعریف *خط* ("که هیچ پهنایی ندارد"). لیست تعاریف موارد دیگری را نیز شامل می‌شود: " خطوط موازی خط‌های مستقیمی هستند که بر روی یک صفحه قرار دارند و به‌طور نامحدود از دو جهت امتداد داده شده و در هیچ جهتی یکدیگر را قطع نمی‌کنند." این موارد در شرایط جدید به‌عنوان تعریف پذیرفته نمی‌شوند بلکه توصیف‌های ساده اندیشانه‌ای از مفاهیم به‌کار رفته در کلام موسوم به "مفاهیم تعریف نشده[۱۲۳] " هستند. عجیب است که اقلیدس خطوط موازی را تعریف کرده بود اما تعریفی رسمی از متوازی الاضلاع ارائه نداد.

در ابتدا اقلیدس ۱۰ اصل استدلال را که برهان‌های کتاب «*عناصر*» براساس آن‌ها بنا شده بودند، به‌ترتیب زیر ارائه نمود:

اصول موضوعه:

اصول موضوعه زیر را فرض می‌گیریم:

---

[121]. axioms

[122]. postulats

[123]. Nondefined primitive

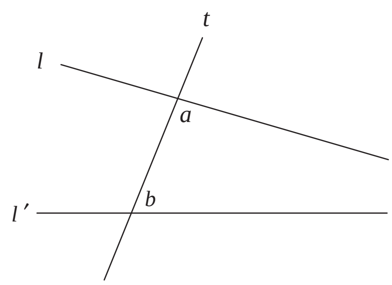
۱. از هر نقطه به نقطه دیگر می‌توان یک خط مستقیم رسم کرد.
۲. یک پاره خط مستقیم را می‌توان روی همان خط به‌طور نامحدود امتداد داد.
۳. یک دایره را می‌توان با هر مرکز و فاصله‌ای ترسیم کرد.
۴. تمام زوایای قائمه با یکدیگر برابرند.
۵. اگر یک خط مستقیم بر دوخط مستقیم قرار گیرد به‌طوری که دو زاویه داخلیِ یک طرف آن، از دو زاویه قائمه کم‌تر باشند، آنگاه دو خط مستقیم اگر به‌صورت نامحدود امتداد یابند، در آن طرفی که زوایا کمتر از دو زاویه قائمه‌اند، همدیگر را قطع خواهند کرد.

البته بعدها ثابت شد که اصل ۴، اصل نیست بلکه قضیه است.

اصول متعارفی:

۱. دو چیز برابر با یک چیز سوم، با یکدیگر نیز برابرند.
۲. اگر چیزهای مساوی به طرفین یک تساوی اضافه شوند، مجموع دو طرف مساوی خواهند بود.
۳. اگر چیزهای مساوی از طرفین یک تساوی کم شوند، باقی‌مانده دو طرف مساوی خواهند بود.
۴. چیزهایی که بر یکدیگر منطبق می‌شوند، با یکدیگر برابرند.
۵. کل از جزء بزرگ‌تر است.

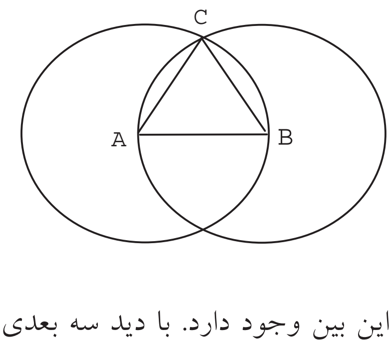
اصل موضوع شماره ۵، که به اصل توازی اقلیدس معروف است، به یکی از معروف‌ترین و بحث برانگیزترین عبارات تاریخ ریاضی بدل شد. طبق این اصل اگر دو خط l و l' به‌وسیله خط متقاطع tطوری قطع شوند که مجموع دو زاویه حاصله a و b کم‌تر از دو زاویه قائمه باشد، آنگاه l و l' در همان طرف t که این دو زاویه قرار دارند، یکدیگر را قطع خواهند کرد.



حتی این عقیده نیز وجود دارد که اقلیدس از اصل پنجم خود کاملاً راضی نبود؛ او کاربرد آن را تا آنجائی به تأخیر انداخت که بدون آن جای پیشرفت بیش‌تری نداشت، هر چند استفاده اولیه آن می‌توانست برخی برهان‌ها را تسهیل نماید.
قضیه زیر نمونه‌ای از کاربرد اصول موضوعه و اصول متعارفی است.

قضیه ۱ از مقاله ۱ کتاب عناصر. *به ازای هر پاره خط مانند AB، یک مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد که AB یکی از اضلاعش باشد.*

برهان: بنا به اصل موضوع ۳، یک دایره به مرکز A و به شعاع AB که از B می‌گذرد را رسم کنید. اینک دایره‌ای دیگر به مرکز B و به شعاع AB که از A می‌گذرد را رسم کنید. از نقطه C، محل تلاقی دو دایره، پاره خط‌های CA و CB را رسم کنید (با مجوز اصل موضوع ۱ امکان‌پذیر است). سپس مثلث ABC را تشکیل دهید. داریم $AC = AB$ و $BC = AB$، زیرا همگی شعاع‌های یک دایره‌اند. حال از اصل متعارفی ۱ خواهیم داشت $AB = BC = AC$، و در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. $\square$



تنها یک مشکل در این بین وجود دارد. با دید سه بعدی، این سؤال پیش می‌آید که دو دایره ممکن است همدیگر را در نقطه C قطع کنند و ممکن است اصلاً نقطه

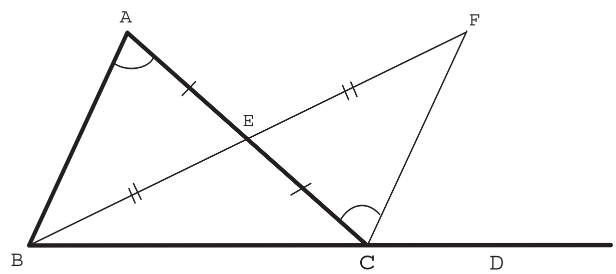
اشتراکی نداشته باشند. در صورت نداشتن نقطه اشتراک کل قضیه از هم می‌پاشد زیرا هیچ اصل موضوع اقلیدس چنین چیزی را ضمانت نمی‌کند. برای رفع این مشکل باید یک اصل موضوع دیگری افزود. بعدها ریاضی‌دانان توانستند به‌طور مؤثر این خلأ را با اصل زیر پر کنند:

اگر یک دایره (خط) دارای نقطه‌ای در داخل و نقطه‌ای در خارج از دایره‌ای دیگر باشد، آنگاه حتماً دارای دو نقطه مشترک با آن دایره خواهد بود.

یک نتیجه درباره مثلث‌ها که در توسعه از هندسه اقلیدسی خیلی مفید واقع شد، قضیه زاویه خارجی بود. این قضیه یک کاربرد دیگر از اصول متعارفی اقلیدس است که تقریباً از تمام آن‌ها استفاده شده است.

قضیه ۱۶ از مقاله ۱ کتاب *عناصر*. *اگر یک ضلع از مثلثی ادامه داده شود، آنگاه زاویه خارجی از هر یک از زوایای داخلی متقابل بزرگ‌تر است.*

برهان: فرض کنید ABC مثلثی دلخواه باشد. نقطه D بر امتداد ضلع BC در طرف C انتخاب کنید. وسط AC را E بنامید. BE را به اندازه خودش ادامه دهید تا نقطه F به‌دست آید ($BE = EF$). چون $AE = EC$، $BE = EF$ و $\angle AED = \angle FEC$ (طبق قضیه ۱۵ از مقاله اول، زوایای متقابل به رأس با هم مساوی‌اند)، مثلث‌های AED و FEC متشابه‌اند، بنا به قضیه ضلع- زاویه- ضلع. در نتیجه $\angle BAE = \angle FCE$. اما بنا به اصل متعارفی ۵، کل از هر یک از اجزاء بزرگ‌تر است، خواهیم داشت $\angle DCA > \angle FCE$. از این‌رو زاویه خارجی $\angle DCA$ بزرگ‌تر است از $\angle BAE$، که یکی از زوایای داخلی متقابل این زاویه است.



به‌طور مشابه، با ادامه دادن ضلع AC و گرفتن نقطه G بر آن، می‌توان نشان داد که $\angle GCB > \angle ABC$. چون $\angle GCB$ و $\angle DCA$ متقابل به رأس (و لذا مساوی) اند، نتیجه می‌گیریم که $\angle DCA$ بزرگ‌تر از $\angle ABC$، زاویه داخلی متقابل دیگر، است. □

در زیر چند قضیه دیگر از مقاله اول کتاب *عناصر* را بدون اثبات می‌آوریم. خواننده می‌تواند به کمک اصول موضوعه و متعارفی اقلیدس آن‌ها را به‌عنوان تمرین ثابت کند.

قضیه ۲۷ از مقاله ۱ کتاب *عناصر*. *اگر دو خط توسط خط موربی قطع گردند به‌طوری‌که زوایای داخلی متناوب یکسانی را پدید آورند، آنگاه آن دو خط موازی‌اند.*

قضیه ۳۰ از مقاله ۱ کتاب *عناصر*. *دو خط که هر یک با یک خط مفروض موازی باشند، خود نیز با یکدیگر موازی‌اند.*

قضیه ۳۲ از مقاله ۱ کتاب *عناصر*. *در هر مثلث، مجموع زوایای داخلی برابر با دو قائمه است.*

اقلیدس مقاله اول از کتاب *عناصر* را با قضایای ۴۷ و ۴۸ به پایان می‌رساند که برهان بسیار زیرکانه‌ای از قضیه فیثاغورس را ارائه می‌دهد. هر چند همان‌گونه که اشاره شد برهان تعداد اندکی از قضایا از خود اقلیدس است، اما اثبات قضیه فیثاغورس توسط خود اقلیدس در کتاب *عناصر* آمده است.

۴-۳ نظریه اعداد اقلیدسی

۴-۳-۱ خواص بخشپذیری اقلیدسی

اگرچه اثر بزرگ اقلیدس «*عناصر هندسه*» نام دارد، موضوع آن از آنچه ما به‌عنوان هندسه دبیرستانی می‌شناسیم بسیار فراتر می‌رود. سه مقاله از کتاب «*عناصر*» (یعنی مقالات ۷ و ۸ و ۹) که شامل ۱۰۲ قضیه می‌باشند، به علم حساب (با مفهوم یونانی) تخصیص داده شده‌اند. یعنی این قضایا عمدتاً با ماهیت و خواص "اعداد طبیعی" یا "اعداد صحیح مثبت" در ارتباطند.

در مقاله نهم یعنی آخرین مقاله‌ای که به نظریه اعداد می‌پردازد قضایای قابل توجه بسیاری را می‌توان یافت. در این میان آن‌ها، قضیه ۲۰ از همه معروف‌تر بوده و به شرح زیر است: "اعداد اول بیشتر از اندازه اعداد اولی هستند که می‌شناسیم." این همان ادعای معروفی است که می‌گوید اعداد اول از نظر تعداد نامتناهی‌اند. قضیه ۱۴ جوهره‌ی آنچه ما امروزه قضیه اساسی حساب می‌نامیم در خود دارد– هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به‌صورت منحصر بفرد به شکل حاصل ضربی از اعداد اول نوشت. قضیه ۳۵ فرمولی جهت یافتن مجموع اعداد در یک تصاعد هندسی ارائه می‌دهد. قضیه بعد از آن و آخرین قضیه در مقاله نهم معیاری برای تشکیل "اعداد کامل" ارائه می‌دهد.

مقاله ۷ با مجموعه‌ای از تعاریف آغاز می‌شود که در ارتباط با هر سه مقاله حساب متشکل از اعداد اول و اعداد مرکب هستند. در آنجا اقلیدس این موارد را به برحسب پاره‌خط‌هایی بیان کرده. ما نمادها و عبارات جدید را استفاده خواهیم کرد.

تعریف. *عدد صحیح* b *را* بخش‌پذیر *بر عدد صحیح* $a\neq 0$ *نامیم و می‌نویسیم* $a\,|\,b$، *هرگاه عددی صحیح مانند* c *موجود باشد به‌طوری که* $b=ac$. *اگر* b *بر* a *بخش‌پذیر نباشد، می‌نویسیم* $a\nmid b$.

همان‌طورکه می‌دانیم به‌طرق مختلف $a\,|\,b$ را بیان می‌کنند: a، b را عاد می‌کند، a مقسوم‌علیه b است، a عامل b است، یا b مضربی از a است. البته این نکته در تعریف قابل توجه است که وقتی می‌گوییم $a\,|\,b$، باید دقت شود که a مخالف صفر است. از آنجائی‌که اقلیدس همیشه اعداد را با پاره‌خط بیان می‌کرد، از عبارات "مقسوم علیه" یا "مضرب" استفاده نکرد. در عوض او این عبارات را به‌ترتیب با "اندازه" و "قابل اندازه‌گیری" جایگزین نمود. برای اقلیدس عدد b توسط عدد دیگری مثل a اندازه‌گیری می‌شد اگر برای عدد سومی مانند c ، داشته باشیم: $b=ac$.

اقلیدس با نمایش اعداد به‌صورت پاره‌خط، هرگز اعداد منفی را در نظر نگرفت. اما در دیدگاه جدید، مقسوم‌علیه‌های یک عدد صحیح همواره به‌صورت مثبت و منفی، هر دو، ظاهر می‌شوند. لذا برای یافتن کلیه مقسوم‌علیه‌های یک عدد، کافی است تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را یافته و سپس منفی آن‌ها را نیز لحاظ کنید. به این خاطر است که ما معمولاً خود را به مقسوم‌علیه‌های مثبت –همان‌طور که اقلیدس انجام داد – محدود می‌کنیم.

دسته‌بندی اعداد مثبت بزرگ‌تر از ۱ به اعداد اول یا مرکب در نظریه اعداد بسیار مهم است. زیرا براساس قضیه اساسی حساب خیلی از خواص اعداد را می‌توان از روی خواص اعداد اول نتیجه گرفت. می‌دانیم برای هر عدد صحیح $a>1$ داریم: $a|0$، $1|a$ و $a|a$. بنابراین همواره a بر ± 1 و $\pm a$ (مقسوم‌علیه‌هایی که *ناسره* نامیده می‌شوند) بخش‌پذیر است. اگر اینها تنها مقسوم‌علیه‌های a باشند، آنگاه a را یک عدد اول می‌نامیم. این تعریف را به روش دیگر نیز می‌توان بیان نمود.

تعریف. عدد صحیح $p>1$ *را یک* "عدد اول[124]" *یا ساده‌تر* "اول" *نامیم هرگاه تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و* p *باشند. عدد صحیحی که بزرگ‌تر از ۱ باشد و اول نباشد را* "مرکب[125]" *نامیم.*

تعریف اقلیدس از عدد اول چنین بود: "یک عدد اول عبارت است از عددی که تنها توسط یک واحد (یعنی توسط ۱) قابل اندازه‌گیری باشد."

این مطلب که آیا دو عدد دارای یک عامل مشترک هستند یا خیر و اگر چنین عوامل مشترکی وجود دارند، آن‌ها کدامند، نیز همواره مورد توجه بوده است.

تعریف. *اگر* a *و* b *دو عدد صحیح دلخواه باشند، آنگاه عدد صحیح* d *را یک* مقسوم‌علیه مشترک a *و* b *نامیم هرگاه* $d|a$ *و* $d|b$.

از آنجا که ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند، ۱ مقسوم‌علیه مشترک هر دو عدد می‌باشد. بنابراین هر دو عدد صحیح دارای حداقل یک مقسوم‌علیه مشترک می‌باشند. در واقع، اگر a و b دو عدد نا صفر باشند آنگاه تعداد متناهی مقسوم‌علیه مشترک مثبت وجود دارد. در بین آن‌ها، یکی بزرگ‌ترین است، که آن را *بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک* a و b می‌نامیم و با نماد $\gcd(a,b)$ نشان می‌دهیم.

مثال. مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۲ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱۲ و مقسوم‌علیه‌های مثبت ۳۰ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵ و ۳۰. لذا مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت ۱۲ و ۳۰

---

124. Prime number

125. composite

عبارتند از ۱، ۲، ۳ و ۶. چون ۶ بزرگ‌ترین این اعداد است، خواهیم داشت $\gcd(12,30)=6$.

۴-۳-۲ الگوریتم اقلیدسی

برای به‌دست آوردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح، همواره می‌توان، مانند مثال اخیر، تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت آن‌ها را فهرست کرده و بزرگ‌ترین عدد مشترک را انتخاب نمود؛ اما این کار برای اعداد بزرگ بسیار دشوار خواهد بود. یک روش کارآمد دیگر در اوایل مقاله هفتم *عناصر* آورده شده است. اگرچه طبق مدارک تاریخی، این روش حداقل یک قرن پیش از اقلیدس کشف شده بود، امروزه ما آن را با نام "*الگوریتم اقلیدسی*" می‌شناسیم.

روند الگوریتم بر نتیجه‌ای چنان اساسی مبتنی است که اغلب به آن به‌عنوان *قضیه تقسیم* اشاره می‌شود. به‌طور کلی این قضیه بیان می‌دارد که عدد صحیح مثبت a را می‌توان به‌گونه‌ای بر عدد صحیح مثبت b تقسیم کرد که باقی‌مانده، کوچک‌تر از b باشد.

قضیه تقسیم. *به ازای هر دو عدد* a و b، *که* $b>0$، *اعداد صحیح یکتایی مانند* q *و* r *وجود دارند به‌طوری که*

$$a=qb+r, \qquad 0\le r<b$$

۴-۳-۳ قضیه اساسی حساب

قضیه اساسی حساب که نام دیگرش "*قضیه تجزیه یکتا*" است، می‌گوید هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول ارائه نمود و این حاصل‌ضرب جدای از ترتیب ظهور عامل‌ها، یکتا است. اگرچه این قضیه گاهی به اقلیدس نسبت داده می‌شود، اما پیش از سال ۱۸۰۱ که گاوس[126] آن را در کتاب خود با نام "*رساله علم حساب*[127]" ارائه کرد، به‌وضوح بیان نشده بود. نزدیک‌ترین جایی‌که

---

126. Gauss

127. Disquisitiones Arithmeticae

خود اقلیدس به این نتیجه رسید، قضیه ۱۴ در مقاله نهم بود: "اگر عددی کوچک‌ترین عددی باشد که توسط اعداد اول اندازه گرفته شده باشد، آنگاه این عدد با هیچ عدد اول دیگری به جزء اعداد اولی که در ابتدا آن را اندازه گرفته‌اند، اندازه گرفته نخواهد شد." برخی صاحب‌نظران معتقدند که ناتوانی اقلیدس در "کشف" قضیه اساسی ریشه در ناتوانی وی در تشکیل حاصل‌ضرب‌ها دارد وقتی که تعداد عامل‌ها نامشخص بودند. سایرین معتقدند که قضیه بر وجود نمایش مشخصی تأکید دارد، و یونانیان قادر نبودند وجود چیزی را که هندسه مقدماتی قادر به ساخت آن نبود تصور کنند.

از آنجائی‌که هر عدد یا اول است و یا طبق قضیه اساسی می‌توان آن را به عامل‌های اول یکتا تجزیه کرد، اعداد اول به‌عنوان "عناصر سازنده‌ای" عمل می‌کنند که قادر به ساختن تمام اعداد صحیح هستند. بر همین اساس، اعداد اول، ریاضی‌دانان را طی اعصار به شگفت آورده‌اند، و اگرچه قضایای قابل توجه زیادی در ارتباط با توزیع آن‌ها در رشته اعداد صحیح مثبت اثبات شده، موارد قابل توجه‌تر مسائلی هستند که اثبات نشده باقی مانده‌اند. سؤال‌های بی‌پاسخ را می‌توان در میان مسائل برجسته حل نشده در کل ریاضیات برشمرد.

قضیه اساسی حساب. *هر عدد صحیح مثبت* $n>1$ *یا اول است و یا می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب تعداد متناهی از اعداد اول تجزیه کرد؛ این نمایش بدون در نظر گرفتن ترتیب عامل‌های ظاهر شده منحصربه‌فرد است.*

۴-۳-۴ مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد اول

در اینجا شما احتمالاً می‌پرسید آیا عدد اولی وجود دارد که بزرگ‌ترین باشد، یا اعداد اول تا ابد ادامه می‌یابند؟ پاسخ را باید در راه حلی بسیار زیرکانه و در عین حال کاملاً ساده جستجو کرد که توسط اقلیدس (قضیه ۲۰، مقاله ۹) در کتاب *عناصر* مطرح شد. به‌طور کلی، آنچه او نشان داد این است که بعد از هر عدد اول، یک عدد اول دیگر و بزرگ‌تر را می‌توان یافت. جزئیات مطلب به شرح زیر می‌باشد؛ این بحث به اقلیدس تعلق دارد، هر چند کلمات و نمادهای جدید از آن او نیستند.

قضیه. *تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.*

برهان. اعداد اول۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... را به‌ترتیب صعودی بنویسید. برای اثبات حکم، برای عدد دلخواه اولی مانند p، عدد اول بزرگ‌تری از p را می‌سازیم.عدد

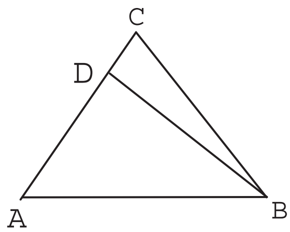
$$N = (۲\times ۳\times ۵\times ۷\times ۱۱\times ...\times p) + ۱$$

را در نظر بگیرید. چون $N > ۱$، بنا به قضیه اساسی حساب، N بر عدد اولی مانند q بخش‌پذیر است. اما هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳، ۵، ... ، p، عدد N را عاد نمی‌کنند. زیرا در غیر این‌صورت، اگر q یکی از این اعداد اول باشد، آنگاه از دو رابطه $q | ۲\times ۳\times ۵\times ...\times p$ و $q | N$ نتیجه می‌شود $q | (N - (۲\times ۳\times ۵\times ...\times p))$ یا معادلاً $q | ۱$. از آنجا که تنها مقسوم‌علیه مثبت ۱ خود ۱ است و $q > ۱$، به تناقض می‌رسیم. در نتیجه عدد اول جدید q را بزرگ‌تر از p یافتیم. □

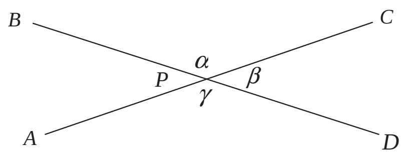
۴-۴ مسائل

مسائل ۱ الی ۸ شامل قضایایی از مقاله اول کتاب *عناصر* است. در هر یک نتیجه اشاره شده را ثابت کنید.

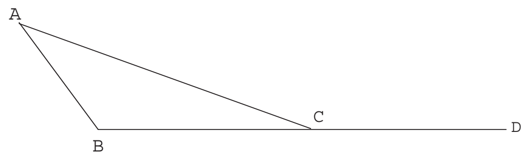
۱. *قضیه ۶.* اگر دو زاویه از یک مثلث با هم مساوی باشند، آنگاه اضلاع متقابل به این زوایا نیز با یکدیگر مساوی‌اند. (*راهنمایی:* فرض کنید در مثلث ABC $\angle CAB = \angle CBA$. اگر $AC \neq BC$، مثلاً اگر $AC > BC$ باشد آنگاه نقطه D بر AC را چنان اختیار کنید که $AD = BC$.)



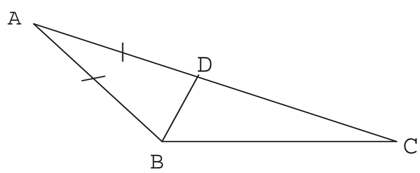
۲. *قضیه ۱۵.* اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند، آنگاه زوایای متقابل به رأس ایجاد شده با هم برابرند. (*راهنمایی:* قضیه ۱۳ را به‌کار بگیرید: اگر از یک نقطه روی یک خط یک نیم‌خط رسم شود، آنگاه مجموع دو زاویه پدید آمده برابر با دو قائمه خواهد بود.)



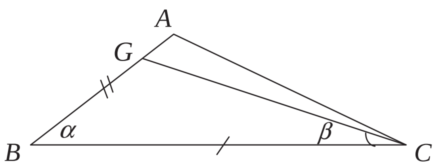
۳. *قضیه ۱۷.* در یک مثلث مجموع هر دو زاویه از دو قائمه کم‌تر است. (*راهنمایی:* در ΔABC، نقطه D را بر امتداد ضلع BC انتخاب کنید و قضیه زاویه خارجی را به‌کار گیرید.)

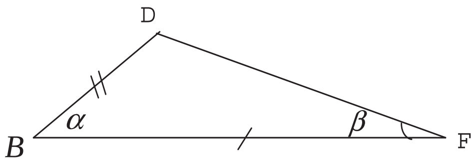


۴. *قضیه ۱۸.* اگر یک ضلع از یک مثلث از ضلع دومی بزرگ‌تر باشد، آنگاه زاویه مقابل به اولی بزرگ‌تر از زاویه مقابل به دومی است. (*راهنمایی:* در ΔABC که $AC > AB$، نقطه D بر AC را طوری انتخاب کنید که $AD = AB$. سپس از این حقیقت استفاده کنید که $\angle ADB$ یک زاویه خارجی از ΔBCD است.)

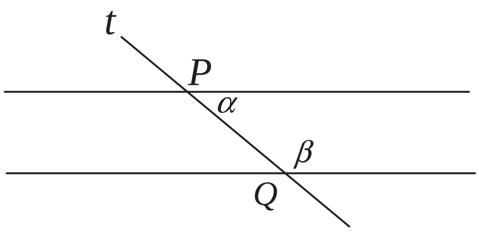


۵. *قضیه ۲۶.* دو مثلث با هم مساوی‌اند هرگاه دارای یک ضلع و دو زاویه مجاور از یکی با یک ضلع و دو زاویه مجاور از دیگری مساوی باشند. (*راهنمایی:* فرض کنید ΔABC و ΔDEF چنان باشند که $\angle B = \angle E$، $\angle C = \angle F$، و $BC = EF$. اگر $AB \neq DE$، مثلاً اگر $AB > DE$، نقطه G روی AB را چنان انتخاب کنید که $BG = ED$.)

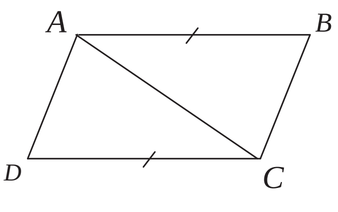




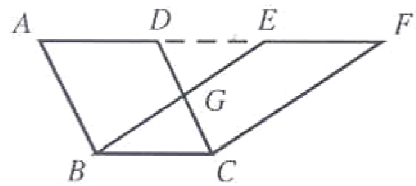
۶. *قضیه ۲۸.* دو خط که توسط خط سومی قطع گردیده‌اند، با هم موازی‌اند هرگاه مجموع دو زاویه داخلی در یک طرف خط سوم برابر با دو قائمه باشند. (*راهنمایی:* با علامات شکل این مسأله، $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$. قضیه ۱۳ را به‌کار گیرید.)



۷. *قضیه ۳۳.* اگر دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی با هم برابر و موازی باشند، آنگاه دو ضلع دیگر نیز با هم برابر و موازی‌اند. از این‌رو این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است. (*راهنمایی:* در چهار ضلعی نشان داده شده، فرض کنید $AB=DC$ و AB با DC موازی باشند. نشان دهید ΔABC با ΔADC متشابه است.)



۸. *قضیه ۳۵.* دو متوازی‌الاضلاع که دارای قاعده مشترک‌اند و بین خطوط موازی مشترکی قرار گرفته‌اند دارای مساحت‌های مساوی‌اند.



(*راهنمایی:* مطابق با شکل، فرض کنید $ABCD$ و $BCFE$ متوازی‌الاضلاع باشند و فرض کنید AD و EF روی یک خط که موازی BC است قرار داشته باشند. نشان دهید ΔABE و ΔDCF متشابه‌اند.)

۹. برای اعداد صحیح دلخواه a، b و c نشان دهید:

الف) اگر $a|b$ آنگاه $a|bc$.

ب) اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه $a^۲|bc$.

ج) $a|b$ اگر و فقط اگر $ac|bc$ برای $c\neq ۰$.

د) اگر $a|(a+b)$، آنگاه $a|b$.

ه) اگر $a|b$ و $c|d$، آنگاه $ac|bd$.

۱۰. نشان دهید که اگر $a|b$، آنگاه $(-a)|b$، $a|(-b)$ و $(-a)|(-b)$.

۱۱. به ازای هر عدد صحیح مثبت n، می‌توان نشان داد که یک عدد صحیح زوج a وجود دارد که قابل نمایش به‌صورت مجموع دو عدد اول فرد به n حالت مختلف است. (به‌عنوان مثال n=۲ و a=۶ را در نظر بگیرید.) نشان دهید که اعداد صحیح ۶۶، ۹۶ و ۱۰۸، به‌صورت مجموع دو عدد اول، به‌ترتیب، در شش، هفت و هشت حالت می‌توان نوشت.

۱۲. برای هر عدد صحیح مثبت a، نشان دهید $\gcd(a,۰)=a$، $\gcd(a,۱)=۱$ و $\gcd(a,a)=a$.

۱۳. نشان دهید هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند، یعنی، برای هر عدد صحیح a

$$\gcd(a,a+۱)=۱ .$$

۱۴. الف) یک سؤال که هنوز بدون پاسخ مانده است این است که آیا تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد که به‌صورت ۱ به‌علاوه توانی از ۲، مثل $۲^۲+۱=۵$ باشد. دو تا عدد اول دیگر به این شکل بیابید.

۱۵. ب) سؤال دیگر آن است که آیا تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد که به‌صورت ۱ منهای توانی از ۲، مثل $۲^۲-۱=۳$ باشد. چهار تا عدد اول دیگر به این شکل بیابید.

۴-۵ ارزیابی اصول

کتاب مبانی اقلیدس را می‌توان اولین رساله‌ی کتابی به‌شمار آورد که در آن به روشی علمی مبانی و قضیه‌های منتج از آن به رشته تحریر در آمده است. اقلیدس در واقع دانش پیشینیان قبل از خود را به شکل اصل موضوعی که از آن به‌عنوان تئوری ریاضی، یاد می‌شود جمع‌بندی کرده و البته نتایج و قضیه‌های جدیدی بدان افزوده است.

با این حال با استاندارد امروزی فرمول‌بندی تئوری‌های ریاضی خالی از اشکال نمی‌باشد. ما بحثی ولو مختصر در خصوص ساختار تئوری ریاضی در فصل پنجم ارائه خواهیم داد، اما هم‌اکنون برای آماده‌سازی بیش‌تر و همچنین به‌منظور نقد و بررسی اصول اقلیدس از دیدگاه فلسفه ریاضی به کنکاش می‌پردازیم.

ذواتی که اقلیدس در رقعه‌ی خود از آن نام می‌برد ذوات ریاضی مشتمل بر نقطه، خط، صفحه، عدد طبیعی و نظایر این‌ها است. برخی از این ذوات را به کمک ذوات قبلی تعریف می‌کند همچنان که در سایر موارد امروزی نیز چنین عمل می‌شود. در یک‌جا "نقطه" را چنین تعریف می‌کند

"نقطه یعنی چیز بدون بعد"

وقتی اقلیدس به تعریف مفهوم نقطه می‌پردازد آن را با خط به‌عنوان شیء ریاضی یک‌بعدی، و یا صفحه – فضای دوبعدی – مقایسه می‌کند و لذا آن را به‌عنوان چیزی که فاقد طول، عرض و ارتفاع است معرفی می‌کند. اما لازمه وجود چنین چیز فیزیکی داشتن طول، عرض بوده و نمی‌تواند بدون بعد بوده باشد. بنابراین اقلیدس در واقع با

یک تناقض فلسفی به تعریف نقطه می‌پردازد. البته ممکن است گفته شود که منظور اقلیدس از مفهوم نقطه، معنایی از آن به‌عنوان یک ذات مجرد بوده است. اما در این صورت سایر مفاهیم مرتبط با نقطه مانند خط و صفحه نیز ذواتی مجرد خواهند بود؛ به‌علاوه، اقلیدس می‌بایست به صراحت به مجرد بودنی ذوات ریاضی خود اشاره می‌کرد در حالی‌که چنین نشده است.

می‌توان چنین انگاشت که اقلیدس در واقع امر، برخی مفاهیم مانند نقطه و یا عدد را تعریف نکرده است. آن‌ها را به‌عنوان- مفاهیم تعریف نشده – یا حدود تعریف نشده. تئوری خود قلمداد کرده، لکن سایر مفاهیم را به کمک این حدود تعریف کرده است. چنین تصوری با ساختار تئوری ریاضی به مفهوم امروزی آن سازگاری بیشتری دارد.

در مورد اصول نیز می‌توانیم تحلیل زیر را ارائه دهیم. اقلیدس اصول هندسه خود را به دو دسته "اصول موضوعه و اصول متعارفی" دسته‌بندی کرده است. می‌دانیم "اصل" در فرهنگ ریاضیات و مبانی آن به گزاره‌ای اطلاق می‌شود که ما آن را بدون برهان می‌پذیریم. در واقع واژه "اصل" مترادف "قضیه اولیه" است یعنی حکمی که درستی آن را قبول کرده لکن برای این درستی دلیلی اقامه نمی‌گردد. بنابراین به لحاظ تئوری پردازی هیچ تفاوتی بین "اصل موضوع" و "اصل متعارفی" وجود ندارد.

به‌علاوه اصل شماره ۵ اصل متعارفی که در بخش ۲-۴-۱ بیان شد، بیان می‌دارد که

کل از جزء بزرگ‌تر است

یعنی کل هر چیز از هر جزء آن بزرگ‌تر است. در حالی‌که این اصل تا حدی بر کمیت‌های متناوبی دلالت دارد. اقلیدس آن را منحصر به کمیت‌های متناوبی نکرده و به شکلی کلی آن را عرضه کرده است. البته باید این نکته را یادآور شویم که فلاسفه یونان باستان به جز ارسطو و افلاطون معتقد به وجود کمیت‌های نامتناهی نبوده‌اند؛ یعنی همه کمیت‌های فیزیکی را محدود متناهی تلقی کرده و منکر وجود طول نامتناهی می‌شدند.

بنابراین این تصور اقلیدس از کل و جزء را می‌توان تا حدی متأثر از نظر ارسطو دانست؛ در واقع مفاهیم طول نامتناهی و مجموعه‌هایی که شمارش‌پذیر نیستند و مقایسه آن‌ها از اموری است که در قرن هیجدهم و نوزدهم توسط ریاضی‌دان آلمانی "جرج کانتور[۱۲۸]" فرمول‌بندی و مورد مطالعه قرار گرفته است. با این‌حال در همین زمان‌ها، یعنی حدود ۱۸ قرن بعد از اقلیدس باز هم با مشاجرات و بحران‌هایی توأم بوده است که در نتیجه آن مشکلاتی برای واضع کننده‌ی، آن یعنی کانتور فراهم کرده است.

اخیراً نیز بازگشتی مجدد به نظریه ارسطویی کمیت‌های متناهی توسط حداقل بخشی از ریاضی‌دانان صورت می‌گیرد و آن ارائه تصویری از ریاضیات تحت عنوان "فلسفه ساختارگرایی ریاضیات" می‌باشد که به نوبه خود مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

اصل پنجم از اصول موضوعه که به "اصل توازی اقلیدس" نیز معروف است هم‌ارز اصل موضوع زیر است:

از هر نقطه خارج یک خط راست یک و تنها یک خط می‌توان به موازات آن خط رسم کرد.

اصول موضوعه اقلیدس، به ویژه اصل پنجم آن از چنان جاذبه‌ای برخوردار بود که تا قرن‌ها آن را به‌عنوان اصلی مبرهن و لاتغیر قلمداد می‌کردند. به قول یکی از ریاضی‌کاران ایرانی این اصل چنان واضح گویا و درست است که نیازی به اثبات ندارد:

هندسه سرتاسرش زیبا و مستحکم باد چون

اصل پنجم خودبه‌خود برهان شود

هم او، به‌خاطر عدم آشنایی با ساختار تئوری ریاضی، سایر هندسه‌های اقلیدسی را مردود می‌شمرد!

باید تأکید کنیم که مسأله درستی یا نادرستی اصل پنجم مطرح نیست، زیرا اصل طبق تعریف آن، گزاره‌ای است که بدون برهان آن را می‌پذیریم و هر تئوری‌پردازی می‌تواند گزاره‌هایی را به‌عنوان اصل یا بنداشت در آغاز تئوری خود فهرست نماید. همچنین کسانی می‌توانند برخی از اصول یک تئوری را با گزاره‌هایی دیگر تعویض و تئوری‌های مشابهی را فرمول‌بندی نمایند.

---

[128]. George Cantor

اولین کسی به اصل پنجم به‌عنوان یک اصل لاتغیر که در ساختار جهان فیزیکی واقعیت دارد "شک" کرد خواجه نصیرالدین طوسی ریاضی‌دان و وزیر دانشمند ملک‌شاه سلجوقی بود. شک خواجه نصیر بعدها به دنیای اروپایی راه یافت و سرانجام توسط کسانی چون لباچفسکی (ریاضی‌دان روسی) و گوس و ریمان (آلمانی) با اصولی دیگر تعویض شده و هندسه‌هایی مشابه تحت نام هندسه‌های غیراقلیدسی را پردازش کردند، بدون آنکه خللی به استحکام و برقراری هندسه اقلیدسی وارد شود.

در فلسفه علم، شک آغاز راهی جدید است، آلبرت انیشتاین با شک نسبت به همزمانی حادثه‌ها موفق به وضع تئوری نسبیت در علم فیزیک گردید. هامیلتون نسبت به شک به اصل جابه‌جایی در جبر موفق به کشف ساختارهای جبری غیرجابه‌جایی و در نتیجه جبر جدید کشف گردید.

۴-۶ ارشمیدس

۴-۶-۱ نابغه دنیای باستان

کتاب ارشمیدس (حدود ۲۸۷ تا ۲۱۲ پیش از میلاد) ریاضیات اسکندری را خلاصه می‌کند. ارشمیدس که بزرگ‌ترین نابغه خلاق دنیای باستان به‌حساب می‌آید، یکی دو نسل بعد از اقلیدس زندگی می‌کرد و هم عصر اراتستن[۱۲۹] بود. ما جزئیات اندکی از زندگی او می‌دانیم، هر چند چندین داستان غریب از او باقی مانده است. ارشمیدس

[129]. Eratosthenes

پسر یک ستاره‌شناس بنام فیدیاس[۱۳۰] بود و در سیراکیوز[۱۳۱]، از مستعمرات یونان در ساحل جنوبی سیسیلی متولد شد.

ارشمیدس قطعاً از مصر بازدید کرد و از آنجائی‌که به‌طور منظم با چندین محقق در موزه اسکندریه مکاتبه می‌کرد، محتمل است که او در آن مرکز علوم یونانی را تحصیل کرده باشد.

مهارت‌های صنعتی ارشمیدس همراه با دانش نظریش او را قادر ساخت تا مجموعه‌ای از اختراعات استادانه را ابداع نماید. معروف‌ترین آن‌ها پیچ ارشمیدسی بود، نوعی پمپ که هنوز در بخش‌هایی از جهان مورد استفاده قرار دارد. ظاهراً ارشمیدس زمانی‌که برای کشیدن آب کانال‌ها از روی خاکریزها به داخل زمین‌های آبیاری به مصر سفر کرده بود آن را در سفر خود به این کشور اختراع کرد. این اختراع بعدها برای پمپ کردن آب از معادن و انبار کشتی‌ها به خارج مورد مصرف قرار گرفت. این وسیله ساده و سودمند از لوله درازی تشکیل می‌شود که هر دو سر آن باز بوده و پیچ یا قطعه آهنی مارپیچی به‌همان طول لوله استوانه‌ای شکل درآن قرار دارد. وقتی انتهای پائینی لوله کج شده و داخل آب ساکن قرار گرفته و مارپیچ داخل آن به گردش در می‌آید، آب به طرف بالای لوله هدایت شده و از خروجی فوقانی آن به بیرون می‌ریزد.

داستان‌های متعددی که از ارشمیدس به ما رسیده است مربوط به مهارت وی به‌عنوان یک مهندس است تا یک ریاضی‌دان متخصص. یک داستان مشهور در مورد وی از استخدام او در به آب انداختن یک کشتی بزرگ می‌باشد. وقتی شاه هیرون[۱۳۲] از وزنه‌های بزرگی که ارشمیدس می‌توانست به‌وسیله اهرم، چرخ دنده، و قرقره جابه‌جا کند به شگفت آمد، ارشمیدس شروع به لاف زدن کرد که اگر یک نقطه اتکای ثابت برای کار خود می‌داشت، می‌توانست هر چیزی را به حرکت در آورد: "به *من جایی برای ایستادن بده، من زمین را حرکت خواهم داد*". هیرون از ارشمیدس خواست که این مسأله را عملی کند و به او مشکل کارگرانش را در به آب انداختن کشتی‌های بزرگ و سنگین بیان کرد. ارشمیدس ترکیبی از اهرم‌ها و قرقره‌ها را طراحی کرد به‌طوری که او به‌تنهایی "در حالی‌که دور از محل قرار گرفته، بدون تلاش زیاد، اما فقط

[130]. Phidias

[131]. Syracuse

[132]. Hieron

با نگه‌داشتن انتهای قرقره‌ای مرکب در دستانش و کشیدن آن آرام و بی‌صدا، کشتی به‌صورت هموار کشیده شده و صحیح و سالم به دریا روانه می‌گردد."

اگرچه ارشمیدس به استفاده عملی از دانش خود تمایل چندانی نداشت، اما معمولاً آماده کمک به دوستان تحسین کننده و پشتیبان خود برای حل مشکلات آنان بود. دوسیتئوس[۱۳۳] و اراتستن از زمره دوستان او بودند. ارشمیدس بسیاری از کشفیات ریاضی خود را در خطاب به این افراد نوشته است.

یکی از معروف‌ترین داستان‌ها به موفقیت او در تعیین خلوص یک تاج طلایی مربوط می‌شود. ظاهراً هیرون پس از به قدرت رسیدن در سیراکیوز فرمان داد تا تاجی از طلای خالص برای پیشکش کردن به خدایان بسازند. وزن تاج کامل شده، با وزن طلایی که به طلاساز داده شده بود برابری می‌کرد؛ اما با این حال هیرون شک داشت که طلاساز مقداری از طلا را برداشته و بجای آن نقره گذاشته باشد. هیرون که از اثبات ادعای خود ناتوان بود، با ارشمیدس مشاوره کرد. طبق داستان، دانشمند بزرگ زمانی‌که در حمام عمومی شهر بود، ناگهان تشخیص داد که چگونه می‌تواند این معما را حل کند. او در هنگام وارد شدن به وان حمام متوجه شد که هر چه بیش‌تر فرو می‌رود، آب بیش‌تری از بالای وان سرریز می‌شود. این قضیه او را به فکر انداخت که اگر طلاساز واقعاً تاج را با افزودن نقره به‌صورت آلیاژ در آورده باشد، تاج، در هنگام ورود به وان، آب بیش‌تری را جابه‌جا می‌کرد تا زمانی‌که کل وزن تاج از طلای خالص باشد؛ چرا که طلای خالص از آلیاژ طلا و فلز سبک‌تر نقره چگال‌تر می‌باشد. معمار رومی ویتروویوس[۱۳۴] تعریف می‌کند ارشمیدس که ارزش این شیوه راه حل خود را دریافته بود،

بدون لحظه‌ای تأخیر و سرشار از شادی ... برهنه از حمام بیرون جسته و به‌سوی خانه دوید. در حالی‌که با صدای بلند فریاد می‌زد آنچه را که می‌جسته یافته است؛ او در حالی‌که می‌دوید به زبان یونانی فریاد می‌کرد: "یورکا، یورکا! " (آن را یافتم، آن را یافتم!)

اینکه ارشمیدس واقعاً به‌طوری که گفته می‌شود برهنه به خیابان‌های سیراکیوز دوید یا نه مسأله‌ای است که جای تأمل دارد! اما مردم عامی به‌راحتی چنین داستانی را پذیرفتند زیرا در این داستان مردی بزرگ مسخره به‌نظر می‌رسد.

---

[133]. Dositheus

[134]. Vitruvius

مرگ ارشمیدس در جریان محاصره سیراکوس[۱۳۵] (بایگانی *Bettmann*)

۴-۶-۲ تخمین مقدار π

بررسی محتوای چند نمونه از آثار اصلی ارشمیدس کافی است تا گستره وسیع موضوعات مورد مطالعه وی و استادی شگفت آور او در برخورد با آن‌ها را آشکار سازد. اقلامی که به ما رسیده‌اند را گروهی از ریاضی‌دانان بیزانسی در کنستانتینوپل[۱۳۶] حفظ کرده‌اند. آن‌ها در فاصله قرون ششم تا دهم جمع‌آوری و تکثیر رساله‌های پراکنده ارشمیدس را هدف خود قرار دادند. این آثار در اثر تغییر شکل زبانی از لهجه سیسیلی – دوریک[۱۳۷] به اتیک یونانی[۱۳۸] تا حدود زیادی شکل اولیه خود را از دست داده‌اند. برخلاف «*عناصر*» اقلیدس، آثاری که ارشمیدس را جاودانه ساختند، هرگز در دوران باستان محبوبیتی نداشتند؛ در حالی‌که اقلیدس مطالب موجود را به‌صورت رساله‌های نظام‌مندی در می‌آورد که برای دانشجویان تحصیل کرده قابل فهم باشد، هدف ارشمیدس تهیه مقالات کوچک با دامنه محدودی بود که برجسته‌ترین ریاضی‌دانان زمان را مخاطب قرار می‌داد. پلوتارک[۱۳۹] چندین قرن بعد نوشت: "ممکن نیست که بتوانیم

---

135. Syracuse

136. Constantinople

137. Sicilian – Doric

138. Attic Greek

139. Plutarch

در تمام هندسه سؤالات دشوارتر و پیچیده‌تر، یا توضیحات ساده‌تر و واضح‌تری بیابیم".

روش کار ارشمیدس بدین ترتیب بود که ابتدا شرح نتایج حاصله خود را برای سایر ریاضی‌دانان فرستاده و از آن‌ها می‌خواست تا آن را برای خود اثبات نمایند. رساله کامل، همراه با مدارک و شواهد مربوطه، مدتی بعد ارائه می‌شد. او گاهی نیز قضایایی را که می‌دانست نادرست‌اند اعلام می‌کرد تا "آن دسته از ریاضی‌دانان بیهوده که بدون ارائه برهان ادعا می‌کنند همه چیز را کشف کرده‌اند، فریب خورده و اظهار نمایند که یک مسأله غیرممکن را کشف کرده‌اند".

به‌نظر می‌رسد که ارشمیدس در میان تمام دستاوردهای ریاضی خود، به موارد موجود در کتاب "*در مورد کره و استوانه*" بیش از بقیه افتخار می‌کرده. این کتاب که در دو جلد نوشته شده و مشتمل بر ۵۳ قضیه است، با نامه‌ای دیباچه‌ای آغاز شده و عمده نتایج حاصله را اعلام می‌دارد. ارشمیدس اظهار داشت که او آن‌ها را برای نخستین بار چاپ می‌کرده تا ریاضی‌دانان خبره بتوانند راه حل‌های ارائه شده را بررسی کرده و ارزش آن‌ها را مورد قضاوت قرار دهند. آن قضایایی که انتخاب شده بود، عبارتند از:

۱. مساحت یک کره برابر است با چهار برابر مساحت یک دایره عظیمه از کره (یا به‌عبارتی $S=4\pi r^2$).

۲. اگر یک کره در یک استوانه با ارتفاعی برابر با قطر کره محاط شده باشد، آنگاه حجم استوانه سه‌نیمه از حجم کره است؛ و مساحت استوانه محیطی به انضمام قاعده‌هایش برابر سه‌نیمه از مساحت کره است.

مقاله دوم از کتاب "*در مورد کره و استوانه*" به برخی مسائل و قضایای پیشنهاد شده در مقاله اول می‌پردازد. ارشمیدس در بخش‌های مربوط به کره در این کتاب، با راه حل معادله درجه سه مواجه شد. این مسأله در قضیه ۴ از مقاله دوم دیده می‌شود که در آن یکی از مسائل اصلی هندسه یونانی – عبور دادن یک صفحه از میان یک کره به‌گونه‌ای که حجم تکه‌های جدا شده دارای نسبت خاصی باشند – را مطرح می‌نماید.

ارشمیدس قول داد تا راه حل کاملی برای معادله پیدا کرده و سپس آن را برای مسأله‌ای که در دست داشت به‌کار گیرد؛ ولی یا توضیح مربوطه حذف شده، و یا این بخش از نوشته‌ها گم شده است. جزئیات این مطلب قرن‌ها بعد در تکه‌هایی از یک

دست نوشته یافته شد که معمولاً به ارشمیدس نسبت داده می‌شود چرا که متن آن با لهجه سیسیلی دوریک نوشته شده بود که مورد استفاده ارشمیدس بود. راه‌حل بازسازی شده تقریباً به‌همان شیوه‌ای پیش می‌رود که هندسه‌دان مناچموس[۱۴۰] با مسأله دلیان[۱۴۱] برخورد کرد.

از مشهورترین کارهای ارشمیدس در قرون وسطی و اولین کاری که به زبان لاتین ترجمه شد، کتاب *اندازه‌گیری دایره* بود که قسمت کوتاهی از یک کار بزرگ‌تر، مشتمل بر سه قضیه است. مضمون اولین قضیه این است که مساحت یک دایره به محض مشخص بودن محیط آن قابل محاسبه است.

قضیه ۱. *مساحت یک دایره برابر است با مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک ضلع زاویه قائمه آن مساوی با شعاع دایره و ضلع دیگر با محیط دایره برابر است.* □

قضیه بعدی (که اثباتش را می‌آوریم) ثابت می‌کند که اگر محیط یک دایره $۳\frac{۱}{۷}$ قطرش باشد، آنگاه نسبت مساحت دایره بر مجذور قطرش برابر با نسبت ۱۱ به ۱۴ است.

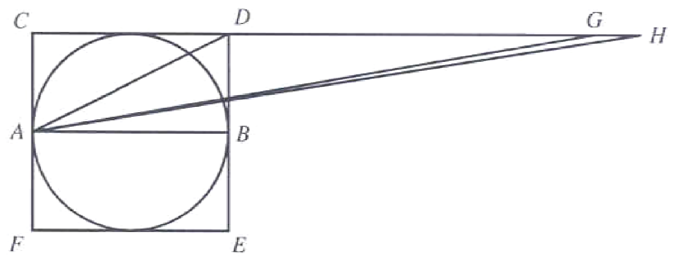
قضیه ۲. *نسبت مساحت یک دایره بر مجذور قطرش برابر با نسبت ۱۱ به ۱۴ است، خیلی نزدیک.*

برهان. یک دایره با قطر AB در نظر بگیرید. مربع $CDEF$ را محیط بر دایره رسم کنید. بر امتداد CD نقطه G را چنان انتخاب کنید که DG دو برابر CD و GH یک هفتم CD باشد. چون نسبت مساحت مثلث‌های ACG و ACD برابر با نسبت ۲۱:۷ و نسبت مساحت مثلث‌های ACD و AGH برابر با نسبت ۷:۱ است، نسبت مساحت مثلث‌های ACH و مثلث ACD برابر نسبت ۲۲:۷ است. اما مربع $CDEF$ چهار برابر مثلث ACD است و لذا نسبت مثلث ACH بر مربع $CDEF$ برابر ۲۲:۲۸ یا ۱۱:۱۴ است. مثلث ACH با دایره برابر است زیرا AC مساوی شعاع و CHمساوی محیط (که در قضیه ۳ نشان داده خواهد شد خیلی نزدیک به $۳\frac{۱}{۷}$ قطر است) است. بنابراین نسبت دایره به مربع $CDEF$، خیلی نزدیک به، مانند ۱۱:۱۴ است. □

---

[۱۴۰]. Menaechmus

[۱۴۱]. Delian



مهم‌ترین قضیه در کتاب "*اندازه‌گیری دایره*" مربوط به تخمین ارشمیدس از مقدار عدد π است. او آن را π نمی‌خواند. نماد π برای نسبت محیط دایره به قطر آن توسط ارشمیدس یا سایر ریاضی‌دانان یونانی مورد استفاده واقع نشد. این علامت در سال ۱۷۰۶ توسط یک نویسنده گمنام انگلیسی بنام ویلیام جونز[۱۴۲] در کتابش با عنوان "*مقدمه‌ای نو بر ریاضیات*" معرفی شد. جونز در این کتاب که برای مبتدیان نوشته شده بود نسبت محیط دایره به قطر آن را تا ۱۰۰ رقم اعشار کاملاً به درستی محاسبه کرد. حرف π تا قبل از آنکه توسط لئونهارد اویلر[۱۴۳] در کتاب مشهور "*مقدمه‌ای در تحلیل بی‌نهایت*" به سال ۱۷۴۸ به‌کار رود به‌طور قطعی برای این نسبت به خدمت گرفته نشد. البته شکی نیست که انتخاب π به این دلیل بود که این حرف، اولین حرف کلمه یونانی به معنای "*محیط*" است.

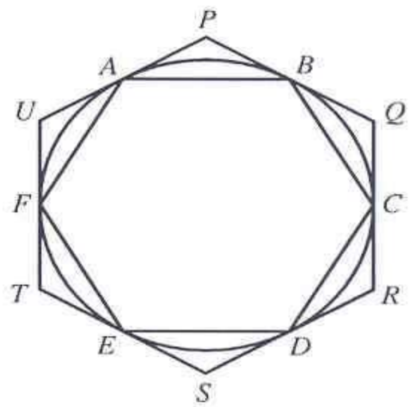
روش ارشمیدس در یافتن مقدار π بر مبنای حقیقت زیر بود. محیط یک دایره بین محیط‌های n ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره قرار دارد، و با افزایش n انحراف محیط دایره از دو محیط مذکور کوچک‌تر می‌شود. این روش نمایش از آن زمان به بعد با نام "*روش افنا*" شناخته شده است– نه به‌خاطر اثری که بر شخص می‌گذارد، بلکه به‌خاطر اینکه تفاوت در ناحیه میان چند ضلعی‌ها و دایره به تدریج تحلیل می‌رود. اگرچه این امر به در نظر گرفتن دایره در حکم حد چند ضلعی‌های محاط (یا محیط) با افزایش نامتناهی تعداد اضلاع آن‌ها منجر می‌شود، اما هیچ‌گذر مستقیمی به این حد وجود ندارد. زیرا دانشمند یونانی هرگز به این فرآیند به عنوان فرآیندی که در حد نامتناهی پیش برود فکر نکرده بود؛ او تصور می‌کرد که این روند به دفعات متناهی و تا حد دقت مورد نظر پیش خواهد رفت.

---

[142]. William Jones

[143]. Leonhard Euler

ارشمیدس در محاسبه تقریب مناسبی برای π، به‌طور متوالی چند ضلعی‌های منتظم ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، و ۹۶ ضلعی را در داخل و خارج دایره، محاط و محیط کرد. انتخاب تعداد اضلاع، طبیعی بود. از میان تمام چند ضلعی‌های منتظم، شش ضلعی راحت‌تر از بقیه محاط می‌شود. کافی است از هر نقطه روی محیط، وترهایی به طول برابر با شعاع دایره رسم کرده تا شش رأس، مثلاً A، B، C، D، E و F حاصل شوند. وقتی خطوط مماس بر دایره در نقاط A، B، C، D، E و F کشیده شوند، یک شش ضلعی منتظم دیگر به‌وجود خواهد آمد که دایره را محیط می‌کند.



با نصف کردن کمانی که دایره محیطی را از هر ضلع شش ضلعی فراگرفته، و با استفاده از نقاط اضافی یافته شده و رأس‌های اصلی، می‌توانیم از شش ضلعی منتظم خود برای تشکیل دوازده ضلعی استفاده نماییم. ارشمیدس با ادامه این کار و تکرار عمل نصف کردن کمان‌ها، از شش ضلعی اولیه به چند ضلعی‌های منتظم با ۱۲، ۲۴، ۴۸، و ۹۶ ضلع دست یافت. او در محاسبات خود به این نتیجه رسید که عددی که ما آن را π می‌شناسیم عددی است که $۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$. این نتیجه منجر به بیان قضیه سوم او شد.

قضیه ۳. *محیط یک دایره از سه برابر قطرش ضرب در $\frac{۱}{۷}$ کمتر و از سه برابر قطر ضرب در $\frac{۱۰}{۷۱}$ بیشتر است.* □

۴–۷ مسائل

مسائل ۱ الی ۴ از مقاله ۱ کتاب "*در مورد کره و استوانه*" ارشمیدس را حل کنید.

۱. *قضیه ۱۳*. مساحت رویه یک استوانه مستدیر قائم، بدون در نظر گرفتن قاعده‌هایش، برابر مساحت دایره‌ای که شعاعش واسطه هندسی بین یال استوانه و قطر قاعده‌ی استوانه است.

۲. *قضیه ۱۴*. مساحت جانبی هر مخروط متساوی‌الساقین، بدون در نظر گرفتن قاعده‌اش، برابر مساحت دایره‌ای است که شعاعش واسطه هندسی بین یال مخروط و شعاع دایره قاعده مخروط است.

۳. *قضیه ۳۳*. مساحت رویه هر کره مساوی چهار برابر مساحت دایره عظیمه‌اش است.

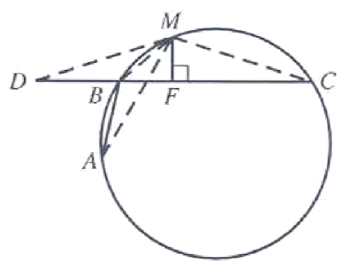
۴. *قضیه ۳۴*. حجم هر کره مساوی چهار برابر حجم مخروطی است که قاعده‌اش مساوی دایره عظیمه کره، و ارتفاعش مساوی شعاع کره است.

۵. ثابت کنید اگر یک کره در یک استوانه مستدیر قائمی محاط شده باشد که ارتفاعش مساوی قطر کره است، آنگاه

الف) حجم استوانه $\frac{۳}{۲}$ حجم کره است.

ب) مساحت رویه استوانه، به همراه قاعده‌هایش برابر $\frac{۳}{۲}$ مساحت رویه کره است.

۶. "*قضیه وتر شکسته*" ارشمیدس را ثابت کنید: هرگاه AB و BC وترهای شکسته از یک دایره باشند (که در آن $BC > AB$)، و M نقطه وسط کمان ABC و MF عمود بر وتر بزرگ‌تر باشد، آنگاه F نقطه‌ای است که در وسط وتر شکسته قرار دارد. یعنی $AB + BF = FC$. (*راهنمایی:* نقطه D را بر امتداد وتر BC چنان اختیار کنید که $FD = FC$. در این‌صورت ΔMBA با ΔMBD متشابه است.)



فصل پنجم

روش جدید ریاضی

هدف‌های آموزشی فصل پنج

الف) هدف‌های کلی

- در این فصل روش جدید ریاضیات تبیین می‌گردد.
- براساس تعریف دکترین ریاضی که مترادف «تئوری ریاضی است»، تعریف‌هایی از علوم ریاضیات ارائه می‌گردد. با این تعریف‌ها، علوم ریاضیات نه مانند علوم تجربی است و نه مثل علوم انسانی! اما همه محققین و دانشجویان به‌خوبی می‌دانند که هم علوم تجربی و هم علوم انسانی وابسته به ریاضیات‌اند.
- در متدلوژی، روش‌شناسی ریاضی به اجزاء اصلی این روش یعنی «عبارت‌های اولیه و احکام (اصول) اولیه» پرداخته می‌شود؛ تا دانشجویان ملاحظه کنند که در این علوم تعریف همه مفاهیم امکان‌پذیر نمی‌باشد، همچنان‌که اثبات همه احکام ریاضی نیز امری محال است؛ گرچه اثبات و یا برهان اساس و شاکله بنیادی هر حکم و قضیه ریاضی به شمار می‌رود!
- ویژگی‌های ساختاری تئوری‌های ریاضی، همانند سازگاری، تمامیت و استقلال تشریح می‌گردد.

ب) هدف‌های آموزشی (رفتاری)

دانشجویان پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتوانند:

- واژه‌های کلیدی «عبارت اولیه» و «حکم اولیه یا اصل» را توضیح داده و نقش آن‌ها را در ساختار یک تئوری ریاضی شرح دهند.

- روش جدید ریاضی را که مبتنی بر عبارت‌ها و مفاهیم اولیه و همچنین احکام اولیه است شرح دهند.
- یک شاخه از ریاضیات را ساخته و برای آن مدلی ملموس ارائه دهند.
- ویژگی‌های الزامی یک تئوری بنداشتی ریاضی را نام برده و آن‌ها توضیح دهند.
- ویژگی‌های مطلوب یک تئوری بنداشتی را نام برده و آن را شرح دهند.
- از عهده‌ی حل تمرین‌های پایان فصل برآیند.

در فصل پنج با روش جدید ریاضی آشنا می‌شوید. پس از فرمول‌بندی تئوری‌های منطقی، مثالی ساده از شاخه‌ای از ریاضیات محض ذکر می‌گردد. سپس سه کاربرد این شاخه از ریاضیات توضیح گردیده است. در پایان ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی که از نظر مبانی ریاضیات از اهمیت اساسی برخوردارند به اختصار تشریح شده‌اند. لازم است هر دانشجوی ریاضی با روش جدید ریاضی آشنایی دقیقی داشته باشند. بنابراین توصیه می‌شود مطالب فصل پنجم را به دقت مطالعه کرده و کوشش کنید تا از عهده‌ی تمرین این درس برآیید.

روش جدید ریاضی روش قیاسی و استنتاجی است که از هندسه و جبر به مبانی ریاضی گسترش یافته است. هر شاخه از ریاضیات که با این روش جدید رشد و گسترش یافته باشد یک تئوری بنداشتی یا قیاسی نامیده می‌شود. در واقع از زمانی که روش ریاضی بر مبنای روش جدید بنیانگذاری شده است، هر بخشی از ریاضیات که به جزء این روش پایه‌گذاری شود **ریاضی محسوب نمی‌گردد**. روش‌های جبر و هندسه که بدان آشنا هستیم به ما کمک می‌کنند تا بهتر بتوانیم سریعاً و به‌طور خلاصه به تبیین روش جدید ریاضی بپردازیم.

۵-۱ تبیین روش جدید ریاضی

در آغاز مفهوم جدید تابع گزاره‌ای را که اهمیت بنیادی آن توسط ریاضی‌دان انگلیسی برتراند راسل[۱۴۴] مورد توجه قرار گرفت، معرفی می‌کنیم.

سه عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) آسیا یک قاره است.

۱۴۴. برتراندراسل (۱۹۷۲ – ۱۸۰۰)

۲) قزل‌آلا یک پرنده است.

۳) x یک y است.

صورت هریک از این سه عبارت یکی است، عبارت‌های (۱) و (۲) علاوه بر صورت دارای محتوا نیز هستند، در حالی که عبارت (۳) فقط دارای صورت است. به روشنی عبارت‌های (۱) و (۲) گزاره‌اند که یکی درست و دیگری نادرست است. ولی عبارت (۳) گزاره نیست، زیرا چیز مشخصی را بیان نمی‌کند، و نه درست و نه نادرست است در صورتی که باید یک گزاره یا درست و یا نادرست باشد، گرچه عبارت (۳) یک گزاره نیست، صورت یک گزاره دارد. چنین عبارتی را یک تابع گزاره‌ای می‌نامیم، زیرا اگر در صورت

x یک y است

متغیرهای x و y را با اسامی مشخص تعویض کنیم، گزاره‌هایی به‌دست می‌آوریم، و برحسب آنکه اسامی جایگزین شده در تابع گزاره‌ای صدق کنند یا صدق نکنند، گزاره‌های درست یا گزاره‌های نادرست حاصل می‌شود. آشکار است که بعضی جایگزین‌ها برای x و y تابع گزاره‌ای را به عبارت‌های بسیار بی‌معنی تبدیل می‌کنند[۱۴۵]، چنین مقادیری از متغیرها را غیرقابل پذیرش می‌نامیم. عبارت فوق‌الذکر یک تابع گزاره‌ای با دو متغیر است، و معلوم است که دارای مقادیر صدق بی‌شماری می‌باشد.

یک تابع گزاره‌ای می‌تواند هر تعداد از متغیرها را شامل شود. به‌عنوان مثال از یک تابع گزاره‌ای که فقط شامل یک متغیر است عبارت «x شهری در استان خوزستان است» را ذکر می‌کنیم. لزومی ندارد که متغیرهای یک تابع گزاره‌ای حتماً با نمادهایی مانند x، y، ... نشان داده شوند، این متغیرها ممکن است کلماتی معمولی باشند. لذا، هرگاه عبارتی که الفاظ آن معمولی‌اند در مبحثی چنان ذکر گردد که معلوم نباشد کلمات آن چه معنایی دارند، در آن صورت چنین عبارتی در آن مبحث در واقع یک تابع گزاره‌ای است نه یک گزاره. برای تصریح کلام و جلوگیری از سوء تفاهمات بهتر است که الفاظ تعریف نشده کلام، با نمادهایی چون x، y، ... جایگزین گردند. در مواردی از گفتمان و جدال بین آدمیان، مباحث نوشته شده یا گفته شده شامل چنین عبارتی است، و گرچه

۱۴۵. مثلاً اگر به x مقدار کتاب و به y مقدار عدد را بدهیم، عبارت «کتاب یک عدد است» به‌دست می‌آید که بی‌معنی است.

نویسنده‌های آن‌ها مدعی‌اند که این‌گونه عبارات گزاره‌اند و مدعی درستی یا نادرستی آنند، در واقع گزاره نبوده بلکه تابع گزاره بوده و فاقد محتوا هستند. در تابع گزاره‌ای، درستی یا نادرستی با جایگزینی متغیرها به‌دست می‌آید. کی‌زر[۱۴۶] گفته است، شاید این واقعیت مسبب بیشتر بحث‌ها و سوء تفاهمات در میان مردمان است.

حال که مفهوم تابع گزاره‌ای تفهیم گردید به بحث روش جدید ریاضی می‌پردازیم. به خاطر می‌آوریم که هر مبحث کوشش دارد تا اشیاء مورد بحث خود را تعریف کند، و روابط بین این اشیاء و نیز اعمالی را که بر آن‌ها جاری شود تعریف کند، با این حال چنین تعریف‌هایی مستلزم به‌کارگیری الفاظ، اشیاء، روابط و اعمال دیگری است که این‌ها نیز به نوبه‌ی خود باید تعریف گردند. در تعریف این اشیاء، باز باید به اشیاء، روابط و اعمال دیگر توسل جست. دو راه وجود دارد: یا آنکه زنجیره‌ی تعریف‌ها باید در جایی قطع گردد، یا آنکه باید چنین زنجیره‌ای دوری باشد.

چون در یک بحث منطقی «دور» قابل تحمل نیست، باید تعریف‌ها را در جایی ختم کرد، فلذا لازم است که یک یا چند تا از اشیاء، روابط و اعمال، کاملاً تعریف نشده باقی بمانند. این‌ها را **حدود تعریف نشده** یا **عبارت‌های اولیه** آن مبحث می‌نامیم. باز به منظور جلوگیری از دور باطل، یک یا چند تا از احکام یا قضایا باید کاملاً بدون برهان باقی بمانند. این‌گونه احکام را **بنداشت‌ها**[۱۴۷] یا **احکام اولیه** آن مبحث می‌نامیم. بنابراین واضح است که هر چنین مبحث منطقی باید به‌صورت الگوی زیر باشد.

۵-۲ الگوی تئوری‌های منطقی[۱۴۸]

الف) یک تئوری مشتمل است بر مجموعه‌ای از اصلاحات فنی (اشیاء، روابط بین اشیاء و اعمالی که بر این اشیاء جاری می‌شوند) که عمداً به‌عنوان اصلاحات یا عبارت‌های تعریف نشده انتخاب می‌شوند. این عبارت‌ها را **عبارت‌های اولیه** آن نظریه می‌نامیم.

ب) همه‌ی اصطلاحات فنی دیگر یک تئوری به‌وسیله‌ی عبارت‌های اولیه تعریف می‌شوند.

---

146. Keyser

147. axioms

۱۴۸. واژه Theory را برخی متخصصین معادل «فرضیه» انگاشته‌اند، اما ما آن را به پیروی از استاد فقید دکتر غلامحسینی مصاحب، پدر ریاضیات نوین ایران، تئوری با تلفظ فارسی گفته‌ایم، زیرا تئوری ریاضی دارای ویژگی‌های خاص خودش است که با فرضیه به معنی عادی آن تطابق ندارد.

ج) یک تئوری مشتمل است بر مجموعه‌ای از احکام در باب عبارت‌های اولیه که عمداً به‌عنوان احکام اثبات نشده انتخاب می‌شوند. این احکام را **بنداشت‌ها**[۱۴۹] یا احکام اولیه آن تئوری می‌نامیم که در واقع احکام اولیه‌ای هستند که بدون برهان پذیرفته می‌شوند و آن‌ها را با P_i نشان می‌دهیم.

د) همه‌ی دیگر احکام در باب عبارت‌های اولیه و عبارت‌های تعریف شده‌ی تئوری باید به‌گونه‌ای منطقی از بنداشت‌ها نتیجه‌گیری شوند. این‌گونه احکام نتیجه‌گیری شده را قضیه‌های آن تئوری می‌نامیم و با T_i نشان می‌دهیم.

ه) متناظر هر قضیه مانند T_i از یک تئوری، عبارتی وجود دارد (این عبارت ممکن است رسماً بیان شود یا اینکه بیان نشود) که مدعی است که قضیه T_i منطقاً از بنداشت‌های P_i نتیجه می‌گردد. غالباً این "عبارت متناظر" در پایان برهان آن قضیه ظاهر می‌شود، همچون عبارت‌هایی نظیر «از این‌رو قضیه برقرار است» یا «این برهان قضیه را کامل می‌کند» و قس علیهذا. الگوی فوق در باب یک تئوری منطقی به الگوی تفکر بنداشتی نیز موسوم است. اولین موضوعی که باید مورد توجه قرار گیرد این است که عبارت‌های اولیه به خوبی می‌توانند با نمادهایی چون x، y، ... جایگزین شوند. فرض می‌کنیم چنین جایگرینی‌هایی انجام شده باشد. در این صورت واضح است که عبارت‌های اولیه متغیرهایی بیش نیستند.

دومین نکته آنکه بنداشت‌های P_i، که احکامی در باب عبارت‌های اولیه‌اند، چیزی بیش‌تر از توابع گزاره‌ای نیستند. و سومین موضوعی که باید مورد توجه قرار گیرد این است که قضیه‌های T_i نیز، چون نتایج منطقی بنداشت‌های P_i اند، توابعی گزاره‌ای می‌باشند. لذا ما به این واقعیت ممتاز رهنمون می‌شویم که وقتی عبارت‌های اولیه همچون متغیرهایی در نظر گرفته شوند، بنداشت‌ها و قضیه‌های یک تئوری منطقی گزاره نبوده بلکه توابع گزاره‌ای می‌باشند.

چون بنداشت‌ها و قضیه‌های یک تئوری منطقی (نظریه‌ی علمی) توابعی گزاره‌ای هستند، یعنی احکامی که فقط دارای صورت‌اند و فاقد محتوایند، ممکن است چنین تصور شود که کل مبحث علمی خالی از واقعیت و مبری از درستی و نادرستی است. با این حال، چنین تصوری درست نیست و یا شاید بهتر است بگوییم همین خصوصیت

---

۱۴۹. بنداشت یا اصل موضوع در مقابل واژه انگلیسی Axiom گفته می‌شود.

ویژگی بارز و مجرد این الگو است، زیرا بنابر بند (ه) الگوی بنداشتی، حکم بسیار مهم زیر را خواهیم داشت.

و) بنداشت‌های P_i قضیه‌های T_i را نتیجه می‌دهند.

اینک (و) چیز مشخصی را بیان می‌دارد؛ و این ممکن است درست یا نادرست باشد و بنابراین یک گزاره است. گزاره‌ای درست است هرگاه قضیه‌های T_i از بنداشت‌های P_i نتیجه شود، و گزاره‌ای نادرست است هرگاه چنین نباشد. حکم (و) دقیقاً همان چیزی است که تئوری منطقی برای آن طراحی شده است؛ هر گزاره‌ی نظیر گزاره‌ی (و) را می‌توان به‌صورت معادل زیر بیان کرد:

«هرگاه P_i، آنگاه بنابر استلزام منطقی T_i»

«هرگاه P_i، آنگاه بنابر استلزام منطقی T_i» را یک گزاره‌ی فرضیه‌ای می‌نامیم. گزاره (و) یک ماهیت منطقی مهمی را تشکیل می‌دهد که یک تابع دکترین فرضیه‌ای نامیده می‌شود. از این حیث «تابع دکترین» گفته می‌شود که تابعی است که برای مقادیرش دکترین دارد و «فرضیه‌ای» به خاطر آنکه در واقع یک گزاره‌ی فرضیه‌ای می‌باشد.

هر تابع دکترین را «یک شاخه ریاضیات محض می‌نامند» و بعضی ریاضی‌دان‌ها همه‌ی توابع دکترین فرضیه‌ای موجود را ریاضیات محض می‌نامند، از این‌رو است که از دیدگاه بعضی از ریاضی‌دان‌ها تفکر ریاضی و تفکر بنداشتی غالباً یکی تلقی می‌شوند. هرگاه متغیرهای (عبارت‌های اولیه) یک نظریه بنداشتی را با عبارت‌های معنی‌دار مشخص جایگزین کنیم، آن‌گونه که بنداشت‌ها به گزاره‌های درست تبدیل شوند، یک تعبیر یا یک مدل از سیستم بنداشت‌ها به‌دست می‌آوریم. چنین تعبیری قضیه‌های این نظریه را نیز به گزاره‌های درست تبدیل می‌کند[۱۵۰]، و لذا به یک ارزیابی از تابع دکترین فرضیه‌ای را ریاضیات کاربردی می‌نامیم. همه‌ی دکترین‌های فرضیه‌ای موجود را ریاضیات کاربردی می‌نامیم. در این‌صورت هندسه‌ی اقلیدسی چنانچه به‌عنوان مطالعه‌ی ساختار فضای فیزیکی تلقی گردد، که در آن اشیاء مورد بحث، عبارتند از نقطه‌ها و خط‌ها و روابط عبارتند از روی، بین، و مشابه که عبارتی با معنی مشخص منظور

۱۵۰. شاید بهتر باشد بگوییم معتبر، مثلاً مدل نظریه گروه‌ها، مدلی است. برای الگوهای بنداشتی نظریه گروه‌ها و «درستی آن» آن‌گونه که باید هنوز ثابت نشده است! مثلاً وقتی می‌گوییم اعداد حقیقی مدلی برای نظریه گروه‌ها است. به آن الگو – اعتبار بخشیده‌ایم نه صحت!

می‌گردند، کاربردی از یک شاخه از ریاضیات محض است. به طریق مشابه، جبر معمولی هرگاه صرفاً به‌عنوان حساب نمادی تلقی گردد، کاربردی از شاخه خاصی از ریاضیات محض است که میدان‌های مرتب نام دارد.

علوم ریاضیات به‌عنوان گردابه‌ی همه‌ی توابع دکترین فرضیه‌ای به این گفته برتراند راسل معنی عمده‌ای می‌بخشد، آنجا که راسل می‌گوید "ریاضیات را می‌توان موضوعی تلقی کرد که در آن ما هرگز نمی‌دانیم درباره‌ی چه چیزی صحبت می‌کنیم و نمی‌دانیم آنچه که می‌گوییم درست است یا نادرست". همچنین این تعبیر از ریاضیات با گفته‌ی هنری پوانکاره[۱۵۱] تطبیق می‌کند که بیان می‌دارد «ریاضیات عبارت است از اینکه به چیزهای مختلف نام یکسان بدهیم».

تبصره ۱: در قسمت (د) گفته شد که همه دیگر احکام باید به‌گونه‌ای منطقی از بنداشت‌ها نتیجه‌گیری شوند. این احکام حاصله را قضیه‌های تئوری یا احکام ثانویه آن تئوری می‌نامیم. اساس این‌گونه نتیجه‌گیری‌ها می‌بایست در چارچوب «یک منطق» و «قواعد این منطق» سامان گیرد. ذکر این نکته را در اینجا لازم می‌دانیم که «مجموعه قواعد منطقی» که احکام از بنداشت‌ها به کمک آن استنتاج می‌شوند نظیر «قواعد استنتاج»، «برهان خلف»، «قیاس»، و نظایر این‌ها، بدون آنکه به صحت آن‌ها اشاره شود یا اثبات شوند در مسیر استدلال قضیه‌ها از آن‌ها استفاده می‌گردد. برای مثال تاکنون ثابت نشده است که "اگر $p \to q$ و $q \to r$ آنگاه $p \to r$" حکم معتبری است ولی بارها به‌کار می‌رود. در واقع خود "قواعد منطقی اولیه" به‌صورت "بنداشت" اولین بار توسط ارسطو فیلسوف یونان باستان عرضه شده‌اند، لکن در قرون اخیر صورت‌بندی‌های دیگری از قواعد منطقی تحت عنوان منطق‌های فازی عرضه گردیده است که در چارچوب این منطق‌ها نیز تئوری‌های ریاضی رشد و توسعه چشمگیری یافته است.
در فصل بعدی به نقش منطق در فرمول‌بندی تئوری ریاضی خواهیم پرداخت.

نکته ۲: درخصوص گفته راسل می‌توانیم به مثال ساده‌ی زیر بپردازیم.

---

151. Henry Poincare

ما در آموزش و یادگیری ریاضیات، به‌ویژه ریاضیات پیش‌دانشگاهی معمولاً از مسأله‌های واقعی (فیزیکی) استفاده می‌کنیم. لکن بلافاصله با تعمیم و تجرید مسأله به سیستم‌ها و وضعیت‌هایی می‌رسیم که فاقد معنی و محتوا هستند. به مثال‌های زیر توجه می‌کنیم:

الف) چهار برابر پول احمد به‌اضافه پنج برابر پول خواهرش زهرا برابر یکصد هزار تومان است. هرگاه پول احمد پنج برابر پول زهرا باشد، پول‌های احمد و زهرا چقدر هستند؟

می‌توانیم با نماد گذاری، فوراً معادلات مسأله را نوشته و سپس آن را به یک معادله یک مجهولی تبدیل کرده و پاسخ لازم را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases} ۴x+۵y=۱۰۰/۰۰۰ & , \quad x= \text{پول احمد} \\ x=۵y & , \quad y= \text{پول زهرا} \end{cases}$$

$$۲۵y=۱۰۰/۰۰۰ \quad \Rightarrow \quad y=\frac{۱۰۰/۰۰۰}{۲۵}=۴۰۰۰ \text{تومان}$$

سپس صورت کلی معادله درجه اول را نوشته

$$ax+b=\circ \qquad (a\neq\circ)$$

و به حل آن می‌پردازیم

$$x=-\frac{b}{a}$$

در مرحله بعد، معادله را کلی‌تر و با درجه بالاتر مطرح می‌کنیم:

$$ax^{۲}+by+c=\circ \qquad (a\neq\circ)$$

و با کمک روابط جبری حاکم بر تساوی‌ها و بازگشتی آن‌ها، به جواب می‌رسیم

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

به این هم اکتفا نکرده، معادله‌ای با درجه بالاتر می‌نویسیم

$$ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d=\circ \qquad (a\neq\circ) \qquad (۱)$$

حالت خاص آن

$$ax^{3}+bx+d=0$$

و با استفاده از اتحاد جبری

$$A^{3}-B^{3}=(A-B)\left(A^{2}+AB+B^{2}\right)$$

با اعمالی، که برای برخی دانش‌آموزان، جادوگونه جلوه می‌کند جواب را به‌دست آوریم، ولو آنکه جواب‌ها اعدادی غیرحقیقی و موهومی باشند:

(۲)

جالب است برای رسیدن از (۱) به (۲) از قواعد منطقی استفاده می‌کنیم که هیچ‌گاه اثبات نشده‌اند!

در پایان درس انبوهی از معادلات درجه دوم و درجه سوم به دانش‌آموزان می‌دهیم تا با استفاده از اعمالی که ما به‌کار برده‌ایم آن‌ها را حل کنند. اما دانش‌آموزان دیگر توجهی به معنی و مفهوم این‌گونه معادلات ندارند و اصولاً اینکه این معادلات برای چه منظوری مطرح می‌شوند برایشان اهمیتی ندارد. در واقع با حروف و متغیرهایی کار می‌کنند که برایشان بی‌معنی هستند.

این تعمیم‌ها و مثال دیگر شباهتی به مسأله پول‌های احمد و زهرا ندارند! البته کار بدین‌جا ختم نمی‌شود، معادله درجه چهارم، معادله درجه‌ی پنجم، و به‌طور کلی معادله درجه nام می‌بایست مطرح شده و برای حل‌پذیری یا حاناپذیری آن‌ها اقدام شود.

۵-۳ مثالی ساده از (یک تئوری) شاخه‌ای از ریاضیات

در این بخش مثالی ساده از شاخه‌ای از ریاضیات محض ذکر می‌کنیم. سپس سه کاربرد از آن را شرح می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، ابتدا یک تابع دکترین فرضیه‌ای تأسیس می‌کنیم و متعاقباً سه *مقدار* یا سه *تعبیر* از این تابع را ذکر خواهیم کرد. بدین‌جهت فرض می‌کنیم K مجموعه‌ای از اشیاء تعریف نشده‌ی a، b، c، ... و R رابطه دوتایی باشد که بعضی از زوج‌های اعضای K را به هم نسبت می‌دهد هرگاه عضو a با عضو b توسط رابطه‌ی R منصوب باشد می‌نویسیم aRb و آن را می‌خوانیم «a رابطه‌ی R با b دارد»؛

هرگاه a رابطه‌ی R با b نداشته باشد می‌نویسیم $a\not R b$ و آن را می‌خوانیم «a رابطه‌ی R با b ندارد». هرگاه اعضای a و b یکسان باشند می‌نویسیم $a=b$؛ و در صورتی‌که متمایز باشند می‌نویسیم $a \neq b$. اکنون چهار حکم اثبات نشده یا بنداشت را که در ارتباط با اعضای K و رابطه‌ی R هستند فهرست می‌کنیم. از این چهار حکم به‌عنوان قضیه‌های اولیه نیز یاد می‌گردد:

P_1: اگر $a \neq b$، آنگاه aRb یا bRa.

P_2: اگر aRb، آنگاه $a \neq b$.

P_3: اگر aRb و bRc، آنگاه aRc.

P_4: K دقیقاً از چهار عضو تشکیل شده است.

اکنون از این بنداشت‌ها با استدلال منطقی احکام دیگری را نتیجه‌گیری می‌کنیم که در واقع قضیه هستند. قضیه‌ها را با ق۱، ق۲، ... و تعریف‌ها را با ت۱، ت۲، ... نشان می‌دهیم.

ق۱: اگر aRb، آنگاه $b\not R a$.

اگر aRb و bRa برقرار باشند، در این صورت بنابر P_3، aRa. اما این حکم بنابر P_2 غیرممکن است. از این‌رو فرض خلف باطل و برهان کامل است.

ق۲: اگر $c \neq a$ و $c \neq b$ و aRb، آنگاه یا aRc یا cRb.

چون $c \neq a$، بنابر P_1، یا aRc یا cRa. اگر cRa چون aRb، بنابر P_3، داریم cRb. از این‌رو قضیه برقرار است.

ق۳: حداقل یک عضو در K هست که با هیچ عضو k نسبت R ندارد.

فرض کنیم این حکم برقرار نباشد (فرض خلف) و a عضو دلخواهی از K باشد. در این صورت بنابر فرض، عضوی چون b در K هست به‌طوری aRc، بنابر P_2، a و b اعضای متمایزی از K هستند. بنابر فرض عضوی چون c از K هست به قسمی که bRc، بنابر P_2، $b \neq c$ همچنین بنابر P_3، cRd و bRd. بنابر P_2، $b \neq d$ و $a \neq d$ لذا a، b، c، d اعضای متمایز از K هستند.

بنابر فرض عضوی چون در K هست به قسمی که dR. بنابر P_2، $d \neq e$. بنابر P_3، cRe، bRe، aRe. بنابر P_2 ، $c \neq e$ ، $b \neq e$ ، $a \neq e$. لذا a، b، c، d، e اعضای متمایز از K هستند.

اکنون بنابر P_4 به تناقض رسیده‌ایم. لذا قضیه برقرار است.

ق۴: فقط یک عضو در K هست که با هیچ عضو K نسبت R ندارد.

بنابر ق۳، حداقل یک چنین عضوی وجود دارد. گیریم این عضو a باشد. همچنین فرض کنیم $b \neq a$ عضو دیگر دلخواهی از K باشد. بنابر P_1، یا aRb یا bRa، اما بنابر فرض، aRb برقرار نیست. بنابراین باید داشته باشیم bRa، و قضیه اثبات شده است.

ت۱: هرگاه bRa، گوییم $a \not{D} b$.

ق۵: هرگاه aDb ، bDc، آنگاه aDc .

بنابر ت۱، bRa و $c\not{R}a$، در این صورت بنابر P_3، cRa یا بنابر ت۱، aDc .

ت۲: هرگاه aRb و هیچ عضو c در K موجود نباشد به‌طوری که aRc و cRb، گوییم aFb .

ق۶: هرگاه aFc و bFc، آنگاه $a = b$.

فرض کنیم $b \neq a$. در این‌صورت بنابر P_1 یا aRb یا bRa.

حالت اول: فرض کنیم aRb، چون bFc، بنابر ت۲، bRc. اما این ناممکن است زیرا aFc .

حالت دوم: فرض کنیم bRa چون aFc ، بنابر ت۲، aRc . اما این غیرممکن است زیرا bFc.

در هر حالت به تناقض می‌رسیم. از این‌رو قضیه به برهان خلف اثبات می‌شود.

ق۷: هرگاه aRb و bRc، آنگاه $a\not{F}c$.

بنابر ت۲، aRb و bRc. از این‌رو باز بنابر ت۲، aFc

ت۳: اگر aFb و bFc، آنگاه گوییم aGc

در اینجا به بررسی تابع دکترین فرضیه‌ای خود خاتمه می‌دهیم. البته قضیه‌های بسیار دیگری هست که می‌توانند در این سیستم اثبات شوند. لیکن به‌نظر می‌رسد که همین قدر برای توضیح مفهوم شاخه‌ای از ریاضیات محض کفایت می‌کند.

قضیه ق۲ نمونه‌ای از یک قضیه وجودی و قضیه ق۴ مثالی از یک قضیه یکتایی است. چنین قضیه‌هایی در هر شاخه از ریاضیات وجود دارد و در زمره‌ی مهمترین قضیه‌های هر تئوری به‌شمار می‌آیند.

اکنون سه کاربرد از شاخه‌ی فوق از ریاضیات محض را ارائه می‌دهیم. سه شاخه از ریاضیات کاربردی عایدمان خواهد شد.

۵-۳-۱ کاربرد ۱ (در شجره‌شناسی[۱۵۲])

فرض می‌کنیم عناصر K از چهار نفر تشکیل شده است. یک مرد، پدر آن مرد، پدر پدر آن مرد، پدر پدر پدر او، و R به معنی "سلف[۱۵۳]" باشد. به آسانی ملاحظه می‌کنیم که با این تفسیر از اعضای K در رابطه R، بنداشت‌ها به احکام درست تبدیل می‌شوند. لذا ما به یک مدل، یا یک تعبیر، از تابع دکترین علمی رهنمون می‌شویم. به‌عبارت دیگر، به شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی که از شاخه‌ای از ریاضیات محض حاصل می‌شود دست می‌یابیم. قضیه‌ها و تعریف‌های فوق که اینک احکامی درست می‌باشند چنین بیان می‌گردند:

۱) ق ۱: اگر a یک سلف b باشد، آنگاه b سلف a نیست.

۲) ق ۲: اگر c فردی متمایز از a و b باشد و a یک سلف b باشد، آنگاه یا a سلف c است و یا c سلف b است.

۳) ق: حداقل یک مرد در K هست که سلف هیچ فردی در K نیست.

۴) ق: فقط یک مرد در K هست که سلف هیچ فردی در K نیست.

۱) ت ۱: اگر b سلف a باشد، گوییم a خلف b است.

۱) ت ۵: اگر a خلف b و b خلف c باشد، آنگاه a خلف c است.

---

۱۵۲. شجره‌شناسی، علم مربوط به تکامل گیاهان و حیوانات از اشکال اولیه و ساده می‌باشد.

۱۵۳. "سلف" به معنی گذشته است و در اصطلاح علم اشخاص به پدر، مادر، پدر بزرگ، مادر بزرگ، و... گفته می‌شود. معمولاً به‌صورت جمع " اسلاف " به‌کار می‌رود و آن مترادف با "اجداد" است.

۱) ت ۲: اگر a یک b سلف باشد و هیچ فردی چون c موجود نباشد که a سـلف c و c سلف b باشد، گوییم a پدر b است.

۱)ق ۶: هر مرد حداکثر یک پدر دارد.

(۱) ق ۷: هرگاه a پدر b و b پدر c باشد، a پدر c نیست.

(۱) ت ۳: هرگاه a پدر b و b پدر c باشد، گوییم a پدر بزرگ c است.

۵-۳-۲ کاربرد ۲ (هندسی)

فرض کنیم اعضای K از چهار نقطه متمایز واقع بر یک خط افقی مستقیم تشـکیل شـده و R به معنی "سمت چپ" باشد.

باز هم پنداشت‌هایمان برقرار است و شاخه دومی از ریاضیات کاربردی که از یک شاخه ریاضیات محض حاصل می‌شود، در دسـت داریـم. رابطـه D بـه معنـی «سـمت راست» و رابطه F به معنی «نقطه بعدی K سمت چپ» و رابطـه G بـه معنـی «دومـین نقطه سمت K سمت چپ» می‌باشد.

۵-۳-۳ کاربرد ۳ (حسابی)

فرض می‌کنیم اعضای K مشتمل بر چهار عدد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴ باشد و رابطـه R بـه معنی "کوچک تر از" باشد.

بار دیگر، بنداشت‌ها برقرار بوده و ما شاخه سومی از ریاضیات کاربردی داریم که از شاخه ریاضیات محض فوق‌الـذکر حاصـل مـی‌شـود. در اینجـا، رابطـه D بـه معنـی "بزرگ‌تر از" رابطه‌ی F به معنی "یک واحد کوچک‌تـر از" و رابطـه G بـه معنـی "دو واحد کوچک‌تر از " می‌باشند.

مثال فوق از شـاخه‌ای از ریاضـیات محـض، بـا شـاخه‌هـای ریاضـیات کـاربردی آن، نمایانگر خصوصیت "**اقتصادی**" روش جدید ریاضیات است. هر قضـیه ریاضـیات محـض قضیه نظیر در هر یک از کاربردها به‌دست می‌آید. و قضیه‌های اخیر نیـازی بـه برهـان نـدارد زیرا که قضیه همتای آن در سیستم مجرد ریاضـیات محـض اثبـات شـده اسـت. مجموعـه بنداشت‌های مجردی که در اینجا مورد مطالعه قـرار گرفـت یـک مجموعـه بنداشـتی بـرای ترتیبی ساده در میان چهار عضو است. هر رابطه‌ای که تعبیری از سه بنداشت نخستین باشـد یک رابطه ترتیبی ساده نامیده می‌شود. هریک از "کوچـک‌تـر از"، "بـزرگ‌تـر از"، "سـمت چپ"، "سمت راست" ، " "قبل از"، "بعد از"، همگی رابطه‌های ترتیبی ساده می‌باشند.

۴-۵ ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی

نباید چنین تصور شود که در وضع یک تئوری علمی می‌توانیم گردایه‌ای از نمادها را به‌عنوان اصطلاحات اولیه مشخص کرده و سیستمی دلخواه از احکام را درباب اینها به‌عنوان بنداشت‌ها فهرست کنیم. سیستم احکام مفروض- بنداشت‌ها – باید دارای ویژگی‌های مشخص و مورد لزوم و نیز ویژگی‌های مشخص و مطلوب باشند. این بخش و بخش بعدی به بررسی مختصری از بعضی از ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی اختصاص دارند. چنین مطالعه‌ای از نظر فنی به **متاریاضی** مشهور است که اولین بار در کتاب مبانی هندسه توسط هیلبرت [۱۵۴]عرضه گردیده است.

دیوید هیلبرت

دیوید هیلبرت ریاضی‌دان آلمانی در رشد و گسترش شاخه‌های مختلف ریاضیات تاثیر عظیمی داشته است. در سال ۱۸۹۵ استاد دانشگاه گوتینگن گردید و تا آخر عمر در آنجا ماند پس از وفات هانری پوانکاره درسال ۱۹۱۲ عموماً هیلبرت را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان جهان می‌شمردند. شاگردان بسیار از اطراف و اکناف جهان به‌دور او گرد می‌آمدند و دروس وی برای آنها الهام‌بخش بود. وی فلسفه صورت‌گرایی ریاضیات را برای رهانیدن این علم از ناسازگاری‌ها پیشنهاد کرد ولی تحقیقاتی که از سال ۱۹۳۰ به بعد به‌وسیله منطقیون و ریاضی‌دان‌ها به‌عمل آمد ثابت کرد که این برنامه به سامان نمی‌رسد. هیلبرت هم‌زمان با آلبرت انیشتاین در گوتینگن کار کرده است و در سمینارهای انیشتاین در باب نظریه معروف نسبیت شرکت کرده است.

از جمله ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی، ما به چهارتای آنها که به **هم‌ارزی، سازگاری، استقلال و تمامیت** مشهورند می‌پردازیم. اولین ویژگی به یک

1. D. Hillbert

زوج از مجموعه‌های بنداشتی اعمال می‌گردد، در حالی‌که سه ویژگـی دیگـر بـه مجموعه‌های بنداشتی منفرد اعمال می‌گردند.

۵-۴-۱ هم‌ارزی

دو سیستم بنداشتی $p_۱$ و $p_۲$ را **هم‌ارز** نامیم، هرگاه هرکدام دیگری را نتیجـه دهـد. بـه عبارت دیگر، هرگاه عبارات اولیه‌ی هریک وسیله‌ی عبارات اولیه‌ی دیگری قابل تعریف و بنداشت‌های هریک به توسط بنداشت‌های دیگری قابل اثبات باشد. هرگاه دو سیسـتم بنداشتی هم‌ارز باشند، دو مطالعه‌ی مجردی که از آن نتیجـه گـردد یکـی خواهنـد بـود، یعنی "یک چیز به‌گونه‌های مختلف بیان می‌گردد." فکر اولیـه‌ی سیسـتم‌هـای بنداشـتی هم‌ارز از زمان‌های پیشین مطرح بوده است، زمانی که هندسـه‌دان‌هـایی کـه از بنداشـت توازی اقلیدس رضایت نداشتند، کوشش کردنـد تـا هـم‌ارز قابـل قبـول‌تـری بـرای آن جایگزین کنند.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که از میان دو سیستم بنداشتی هم‌ارز مطالعه کدام‌یک بهتر است؟ شاید هیچ ضابطه ساده‌ای که بر طبق آن یک زوج از سیستم‌های بنداشـتی را بتوان مقایسه کرده و تعیین نمود که کدام‌یک بهتر اسـت وجـود نداشـته باشـد، بـه‌نظـر می‌رسد که تا حد زیادی این امر به اعمال سلیقه بستگی داشته باشـد. برمبنـای رعایـت اقتصاد در مطالعه و بررسی، ممکن است به‌نظر آید آن سیستمی که تعـداد عبـارت‌هـای اولیه و تعداد بنداشت‌های کمتری دارد برتری دارد. به‌طور یقـین تقلیـل تعـداد عبـارات اولیه به حداقل امری مطلوب است. لیکن به آسانی می‌توان دریافـت کـه کـاهش تعـداد بنداشت‌ها به یک حداقل قدری تصنعی است. زیرا، چنانچه بخواهیم، مـی تـوانیم همـه بنداشت‌های یک مجموعه را در یک بنداشت بزرگ اما پیچیده، با استفاده از علائم ربـط مناسب، جمع کنیم. از طرف دیگر، ممکن است چنـین تصـور کـرد کـه یـک مجموعـه بنداشتی از دیگری بهتر است به این دلیل که ساده‌تر می‌باشد هرگاه هر بنداشت آن را به هر تعداد ممکنی از بنداشت‌های مجزا بتوان تجزیه کرد. اما این امر نیز اهمیـت چنـدانی ندارد، همچنان که مثال سرگرم کننده زیر نشانگر این واقعیت می‌باشد. حکم ساده "یک و فقط یک x است که در $g(x)$ صدق می‌کند". را می‌توان با پـنج حکـم زیـر تعـویض کرد.

۱) تعداد xهایی که در $g(x)$ صدق می‌کنند فرد است.

۲) تعداد xهایی که در$g(x)$ صدق می‌کنندکمتر از ۸ است.

۳) تعداد xهایی که در$g(x)$ صدق می‌کنند برابر ۷ نیست.

۴) تعداد xهایی که در$g(x)$ صدق می‌کنند برابر ۵ نیست.

۵) تعداد xهایی که در$g\ (x)$ صدق می‌کنند برابر ۳ نیست.

به روشنی پیداست که چنین کاری را می‌توان به‌گونه‌ای نامحدود گسترش داد. در پایان ذکر این نکته نیز لازم است که یک مجموعه بنداشتی ممکن است بر دیگری به این دلیل ارجح باشد که قضیه‌های کلیدی آن تئوری را سریع‌تر بتوان نتیجه‌گیری کرد. در این راستا نیز ممکن است چنین نتیجه‌های کلیدی را در مجموعه بنداشتی قرار داده و بی‌هیچ اتلاف وقتی بدان‌ها دست یافت.

به‌عنوان یک مجموعه بنداشتی که با مثال مورد بررسی در بخش ۵-۳ هم‌ارز می‌باشد، می‌توانیم $P_۱$، ق۱، $P_۳$ و $P_۴$ را نام ببریم. از آنجا که ق۱ قبلا از $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$، نتیجه شده است، کافی است نشان دهیم که $P_۲$ از $P_۱$، $T_۱$، $P_۳$ و $P_۴$ نتیجه می‌شود. این را نیز می‌توان چنین انجام داد:

$P_۲$: هرگاه aRb، آنگاه $a \neq b$

فرض کنیم (فرض خلف)،aRb و $a = b$. در این‌صورت داریم bRa، اما این بنابر ق۱ غیرممکن است از این رو $P_۲$ برقرار است.

۵-۴-۲ سازگاری

یک مجموعه بنداشتی را **سازگار** نامیم اگر گزاره‌های متناقض از آن نتیجه نشود. این ویژگی مهم‌ترین و اساسی‌ترین ویژگی یک مجموعه بنداشتی است، هر مجموعه بنداشتی بدون این ویژگی بی‌ارزش بوده و مطالعه ویژگی‌های دیگر آن بدون استفاده است.

موفقیت‌آمیزترین روشی که تاکنون برای برقراری سازگاری یک مجموعه بنداشتی اختراع شده است روش مدل‌ها می‌باشد. به‌خاطر داریم که یک مدل از یک مجموعه بنداشتی وقتی حاصل می‌شود که بتوانیم به عبارت‌های اولیه آن معنایی متناظر کنیم به‌طوری‌که بنداشت‌های آن مجموعه را به گزاره‌های معتبر از یک مفهوم تبدیل کند.

دو نوع مدل وجود دارد– مدل‌های ملموس و مدل‌هـای ایـده‌آل. یـک مـدل را در صورتی ملموس نامیم هرگاه معنایی که به عبارت‌های اولیه آن متناظر می‌گـردد عبـارت از اشیاء و روابطی باشد که از جهان واقعی اقتباس شده باشد، در حـالی‌کـه مـدلی را در صورتی ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه معنایی که بـه عبـارت‌هـای اولیـه آن متنـاظر مـی‌گـردد عبارت از اشیاء و روابطی است که از سیستم بنداشتی دیگری اقتباس شده باشد.

وقتی یک مدل ملموس ارائه دادیم احساس می‌کنیم که سازگاری مطلق بنداشت‌ها را برقرار کرده‌ایم. زیرا اگر قضیه‌های متناقض از بنداشت‌ها نتیجه گردد، آنگاه گزاره‌های متناظر متناقض در مدل ملموس نیز نتیجه می‌شود. اما در جهان واقعی قبول می‌کنیم کـه تناقض غیرممکن است. به‌عنوان توضیح، مجموعه بنداشتی را که برای شاخه‌ای ظریـف از ریاضیات در بخش قبلی توسعه دادیم مورد بررسی قرار می‌دهیم. در کـاربرد اقتبـاس شده که عرضه گردید، چهار عضو اولیه K را چنین تفسیر کـردیم کـه عبارتنـد از یـک مرد، پدر وی، پدر پدر وی، پدر پدر پدر وی، و R رابطـه اولیـه را بـه‌عنـوان "سـلف" تفسیر نمودیم. متذکر شدیم که با این تفسیرها، بنداشت‌ها به گزاره‌های درست در بـاب مفهوم ساده شجره‌ای تبدیل می‌شوند. لیکن معنـایی کـه بـه ایـن چهـار شـیء و رابطـه مربوطه متناظر شده است از جهان واقعی اقتباس گردیده است، بنـابراین مـا یـک مـدل ملموس منتج از این سیستم بنداشتی در دست داریم. هـر ناسـازگاری از ایـن شـاخه از ریاضیات یک ناسازگاری متناظر مربوط به رابطه شجره‌شناسی در مورد این چهـار مـرد خواهد بود. اما از آنجا که عقیده داریم جهان واقعی اجـازه وجـود تنـاقض را در درون خود نمی دهد، به این باوریم که سازگاری مطلق را در مجموعه بنداشت‌هایمان برقـرار کرده ایم. مدل‌های ملموس دیگری نیز از همان مجموعه بنداشـتی بـه آسـانی مـی‌تـوان عرضه کرد.

چنین نیست که همیشه بتوان یک مدل ملموس از یک مجموعـه بنداشـتی عرضـه کرد. لذا، هرگاه مجموعه بنداشتی شامل تعدادی نامتناهی از عناصر اولیه باشـد، بـه‌طـور یقین عرضه مدلی ملمـوس از آن غیـرممکن اسـت، زیـرا جهـان واقعـی شـامل تعـداد نامتناهی از اشیا نیست.[۱۵۵]

۱۵۵. متفکران بسیار از جمله فیلسوفان عالیقدر چون ارسطو و کانت معتقدند که عملاً وجود اشیا به تعداد بی‌شمار در جهان واقعی مقدور نیست (ر. ک. بارکر). این نظریه همچنان که در فصل ۶ خواهیم دید وقتی که با اعداد اصلی نامتناهی کانتور مربوط گردد با حدت خاصی جلوه می کند.

در چنین مواردی کوشش می‌کنیم تا مدلی ایده‌آل از آن سرهم کنیم. این امر بدین نحو صورت می‌گیرد که به عبارات اولیه یک سیستم بنداشتی مانند A، مفاهیم سیستم بنداشتی دیگری چون B را متناظر می‌کنیم. به‌گونه‌ای که تفسیر بنداشت‌های سیستم A نتایج منطقی بنداشت‌های سیستم B باشند. اما در این حالت نمی‌توان ادعا داشت که آزمون سازگاری مجموعه بنداشتی A یک آزمون مطلق است، بلکه آزمونی نسبی است. آنچه که می‌توان ادعا کرد این است که مجموعه‌ی بنداشتی A سازگار است هرگاه مجموعه‌ی بنداشتی B سازگار باشد و ما سازگاری سیستم A را به سازگاری سیستم B تبدیل کرده‌ایم.

وقتی که روش مدل‌ها را به بسیاری از شاخه‌های ریاضیات محک می‌زنیم، سازگاری نسبی بهترین چیزی است که می‌توان بدان امیدوار بود، چه آنکه بسیاری از شاخه‌های ریاضیات شامل تعداد نامتناهی از عناصر اولیه هستند. برای توضیح بیشتر، مجموعه بنداشتی بخش ۵-۳ را در آن $P_۴$ با $P_۴'$ بدین مضمون: K شامل تعداد نامتناهی از اعضای متمایز است، تعویض شده است در نظر می‌گیریم. به‌عنوان تفسیری از این مجموعه بنداشتی فرض می‌کنیم که اعضای K مجموعه همه اعداد صحیح مثبت و رابطه R به معنی "کوچک‌تر از" باشد. در اینجا مدل حاصل یک مدل ایده‌آل است که از حساب اعداد صحیح مثبت اقتباس می‌شود و آنچه می‌توانیم بیان داریم این است که مجموعه بنداشتی سازگار است هرگاه حساب اعداد صحیح مثبت سازگار باشد.

برای اثبات سازگاری هندسه مسطحه لباچفسکی از ایده سازگاری نسبی استفاده می‌گردد (ر. ک. ایوز). این امر بدین‌نحو صورت می‌گیرد که مفاهیم خاصی را از هندسه مسطحه اقلیدسی به‌کار گرفته و مدل ایده‌آلی از هندسه لباچفسکی را که به مدل پوانکاره [۱۵۶] مشهور است به‌دست می‌آوریم. سپس نشان داده می‌شود که هندسه مسطحه لباچفسکی سازگار است، هرگاه هندسه مسطحه اقلیدس سازگار باشد.[۱۵۷] از سوی دیگر تئوری هندسه تحلیلی یک مدل حسابی ایده‌آل از هندسه مسطحه اقلیدسی است و این نشان می‌دهد که هندسه مسطحه اقلیدسی سازگار است، هرگاه سیستم اعداد حقیقی سازگار باشد، از اینجا نتیجه می‌شود که هندسه لباچفسکی سازگار است،

---

156 Poincare

۱۵۷. دانشجویانی که درس مبانی هندسه را گذرانده‌اند می‌دانند که هندسه‌های غیراقلیدسی همان‌قدر سازگارند که هندسه اقلیدسی سازگار است (ر. ک. به گرینبرگ ترجمه دکتر شفیعی‌ها).

هرگاه سیستم اعداد حقیقی سازگار باشد. به این طریق سازگاری بسیاری از شـاخه‌هـای ریاضیات را می‌توان به سازگاری شاخه‌ای اساسی و بنیادی از ریاضیات، که برای بخش بزرگی از ریاضیات و تمامی فیزیک، سیستم اعداد حقیقی است، تحویل گردد این ایـده مهم، موضوع اصلی فصل بعدی است.

اثبات سازگاری به‌وسیله روش مدل‌ها یک اثبات غیرمستقیم است. گمـان مـی‌رود که سازگاری مطلق را بتوان به‌وسیله فرآیندی مستقیم برقرار کرد، بدین‌نحو کـه کوشـش کنیم تا نشان دهیم که با اعمال قواعد استنتاج هیچ دو قضیه‌ای را که متضـاد هـم باشـند نمی‌توان از یک مجموعه بنداشتی مفـروض بـه‌دسـت آورد. در چنـین فرآینـدی البتـه، رده‌بندی کامل قواعد استنتاجی پذیرفته شده منطق ضروری است. هیلبرت مسأله اثبـات سازگاری اعداد حقیقی را به روش مستقیم مورد مطالعه قرار داد، لیکن موفقیت چندانی به‌دست نیاورد. چون این روش به قواعد استنتاج منطقـی بسـتگی دارد، هـر تغییـری در این قواعد می تواند اثبات سازگاری از این نوع را دگرگون سازد. مزیت روش مـدل‌هـا در این است که مستقل از "قواعد طبیعی[۱۵۸]" است.

با وجودی که توضیح روش مستقیم اثبات سازگاری بسی پیچیده است و در ایـن مختصر نمی‌گنجد، ما ایده این روش را با تشابهی که با شطرنج دارد تشـریح مـی‌کنـیم. می‌خواهیم نشان دهیم که در یک بازی شطرنج، صرف‌نظر از اینکه حـدی بـرای تعـداد حرکت‌ها قائل باشیم، هیچ‌وقت یک بازیکن نمی‌تواند بـه وضـعی برسـد کـه در آن ۱۰ ملکه از یک رنگ را بر صفحه داشته باشد مشروط بر آنکه برطبق قواعد بـازی کنـد. در اینجا روش مستقیم قابل اعمال است، زیرا با استفاده از قواعد بازی می‌توانیم ثابت کنـیم که هیچ حرکتی حاصل‌جمع تعداد ملکه‌ها و سربازها از یک رنگ را نمـی‌توانـد افـزون دهد. چون این حاصل‌جمع در آغاز برابر ۹ است، پس باید نابیشتر از ۹ باقی بماند.

۵-۴-۳ استقلال و تمامیت

---

۱۵۸. قواعد منطقی غالباً با قواعد بازی مترادف است. در فصل ۶ به منطق‌هـای مختلـف اشـاره‌ای مختصـر شـده است.

در این بخش دو ویژگی دیگر از مجموعه بنداشتی را که به استقلال و تمامیت مشهورند مورد بررسی قرار می‌دهیم. این دو ویژگی سازگاری، که در بخش پیشین مورد بررسی قرار گرفت، متفاوت‌اند. تفاوت آن‌ها در این است که ویژگی‌های ضروری نیستند. بلکه ویژگی‌هایی هستند که بعضی اوقات مطلوب و در بعضی حالات مطلوب نیستند. از این رو فرض می‌کنیم که مجموعه بنداشتی مورد بررسی یک مجموعه سازگار است، زیرا بررسی استقلال و تمامیت یک مجموعه بنداشتی ناسازگار اهمیت چندانی ندارد. یک بنداشت از این مجموعه بنداشتی را مستقل نامیم، هرگاه نتیجه منطقی دیگر بنداشت‌های آن مجموعه نباشد، و یک مجموعه بنداشتی را مستقل نامیم هرگاه هریک از بنداشت‌های آن مستقل باشد.

بهترین مثال در تاریخ ریاضیات از استقلال یک بنداشت مطالعه بنداشت توازی اقلیدس است که در طی قرون متمادی، ریاضی‌دانان نمی‌توانستند باور کنند بنداشت توازی مستقل از بنداشت‌های دیگر اقلیدس است، و لذا کوشش‌های بسیار نمودند تا ثابت کنند که این بنداشت نتیجه منطقی سایر مفروضات است. سرانجام با کشف هندسه غیراقلیدسی لباچفسکی استقلال بنداشت توازی اقلیدس به اثبات رسید.[۱۵۹] در واقع این سخن اغراق نیست که بگوییم بررسی تاریخی استقلال بنداشت توازی اقلیدس منجر به مطالعه کلی و اساسی ویژگی‌های مجموعه‌های بنداشتی و از این رو منجر به کشف بخش مهمی از روش جدید ریاضی شده است.

روشی که برطبق آن نشان داده شده که بنداشت توازی اقلیدس مستقل است آزمونی کلی برای استقلال یک اصل به ما عرضه می‌دارد. این آزمون از این قرار است که تعبیری از عبارات اولیه تئوری بیابیم که در بنداشت مورد نظر صدق نکرده ولی در بقیه بنداشت‌ها صدق کنند. هرگاه یافتن چنین تعبیری موفق باشیم، بنداشت مورد نظر نمی‌تواند نتیجه منطقی سایر بنداشت‌ها باشد، زیرا اگر چنین می‌بود، آنگاه این تعبیر که همه دیگر بنداشت‌ها را به احکام راست تبدیل می‌کند باید آن بنداشت را نیز به یک حکم راست تبدیل می‌کرد. آزمونی که در این راستا برای همه بنداشت‌های یک مجموعه بنداشتی انجام می‌گیرد علی‌الظاهر کاری طولانی است، زیرا اگر تعداد n

۱۵۹. خواجه نصیرالدین طوسی

بنداشت در این مجموعه باشد، n آزمون جداگانه (یک آزمون برای هر بنداشت) باید سازمان یابد.

مثال: نشان می‌دهیم که مجموعه بنداشتی مورد بحث در بخش ۵-۳ یک مجموعه مستقل است.

برای آنکه نشان دهیم بنداشت P_1 مستقل است، می‌توانیم K را به‌عنوان مجموعه‌ای متشکل از دو برادر، پدر آن‌ها، و پدر پدر آن‌ها تعبیر می‌کنیم. رابطه R را به‌عنوان "خلف" به معنی عرفی آن تلقی می‌کنیم. با این تعبیر P_2، P_3 و P_4 درست ولی P_1 نادرست است.

برای آنکه نشان دهیم بنداشت P_2 مستقل است، می‌توانیم K را به‌عنوان مجموعه متشکل از اعدد ۱و۲و۳و۴و اختیار و R را به‌عنوان "نابیشتر از" تلقی می‌کنیم. با این تعبیر هر یک از این بنداشت‌ها، به جزء P_2، درست خواهند بود. برای آنکه نشان دهیم بنداشت P_3 مستقل است، K را به‌عنوان مجموعه‌ای متشکل از چهار عضو متمایز و R را به‌عنوان "متمایز است با" تلقی می‌کنیم، همه بنداشت‌ها، به جزء P_3 برقرارند.

بالاخره برای آنکه نشان دهیم بنداشت P_4 مستقل است، K را می‌توانیم به‌عنوان مجموعه‌ی پنج عدد صحیح ۱و ۲و ۳و ۴و ۵و R عنوان "کوچک‌تر است از" تلقی کنیم. در این‌صورت همه بنداشت‌ها، به جز P_4، برقرار خواهند بود.

۵-۴-۴ تبصره

استقلال یک مجموعه بنداشتی عموماً الزامی نیست بدین‌معنی که یک مجموعه بنداشتی تنها به خاطر عدم استقلال آن فاقد ارزش نخواهد بود.

یک ریاضی‌دان که مجموعه‌ی بنداشتی مستقل را به این خاطر ترجیح می‌دهد که می‌خواهد تئوری خود را به حداقل مفروضات بنانهد، یک مجموعه بنداشتی که مستقل نباشد شامل یک یا چند بنداشت است که می‌توانند نه به‌عنوان بنداشت بلکه به‌عنوان قضیه‌های تئوری ظاهر شوند. از سوی دیگر، گهگاه، داشتن یک مجموعه بنداشتی غیرمستقل مفید است. برای مثال، در آموزش ریاضیات، به دلایل علمی امکان دارد که بخواهیم موضوعی را بر پایه روش بنداشتی برنامه‌ریزی کنیم. با این حال، همچنان‌که در بعضی اوقات اتفاق می‌افتد، ممکن است که یک قضیه در آغاز یک تئوری برای

محصلین بسیار دشوار جلوه کند. چنین قضیه‌ای را می‌توان به‌عنوان یک بنداشت بیان کرد، در ادامه موضوع وقتی که محصلین به بلوغ ریاضی مطلوب رسیده و با موضوع آشنا شده باشند می‌توان متذکر شد که آن بنداشت واقعاً یک بنداشت مستقل نیست و می‌تواند از سایر بنداشت‌ها نتیجه‌گیری گردد و عنداللزوم برهانی از آن ارائه گردد.

مجموعه‌های بنداشتی مشهوری را می‌توان نام برد که، در آغاز، ناخواسته شامل بنداشت‌هایی بودند که مستقل نبودند. به‌عنوان نمونه مجموعه اولیه هیلبرت از بنداشت‌های هندیه اقلیدسی را می‌توان نام برد. بعداً نشان داده شد که این مجموعه شامل دو بنداشت است که از دیگر بنداشت‌ها نتیجه می‌شوند. کشف این دو بنداشت نامستقل به هیچ‌وجه از اعتبار سیستم هیلبرت نمی‌کاهد، در متون بعدی، این بنداشت‌ها صرفاً به قضیه تغییر نام یافت و برهان‌هایی برای آن‌ها ارائه گردید.

آر. ال. ویلدر[۱۶۰] توانست نشان دهد که مجموعه مشهور آر. ال. مور[۱۶۱] متشکل از هشت بنداشت که اساس توپولوژی نظریه مجموعه‌ای مدین را بنا نهاد، می‌تواند به هفت بنداشت تقلیل یابد و ویلدر بنداشت ششم مور را حذف کرد.

با این حال همچنان‌که در بحث فوق اشاره کردیم، تعداد واقعی بنداشت‌های یک تئوری در رابطه با ویژگی استقلال اهمیت کمتری دارد. هر مجموعه بنداشتی، مستقل یا نامستقل، را به آسانی می‌توان با استفاده از رابطهای گزاره‌ای به یک مجموعه مستقل متشکل از تنها یک بنداشت تبدیل کرد.

۵-۴-۵ تمامیت

ویژگی تمامیت از سه ویژگی دیگر که تاکنون توصیف شده‌اند کمتر مشهور است. از این رو بجاست که قبل از ارائه تعریف آن انگیزه‌ای برای طرح آن ارائه دهیم. می‌خواهیم ساختار یک مجموعه بنداشتی را برای هندسه اقلیدسی مسطحه ارائه دهیم. اولین کاری که باید انجام دهیم انتخاب عبارت‌های اولیه است. این عبارت‌ها باید مشتمل بر گردایه‌ای از اصطلاحات فنی هندسی باشد، به قسمی که دیگر عبارت‌های فنی این تئوری (عبارت‌های ثانویه) را بتوان به‌وسیله آن‌ها تعریف کرد. کار بعدی که باید انجام گیرد فرمول‌بندی فهرستی از گزاره‌هایی است که در باب هر یک از

160 R. L. Wilder
161 R. L. Moore

عبارت‌های اولیه می‌باشند این فهرست رو به افزایش بنداشت‌های تئوری را تشکیل می‌دهند. در اینجا مسئله‌ای بروز می‌کند. چگونه می‌توان فهرست بنداشت‌ها را کوتاه کرد؟ انتظار ما از این مجموعه بنداشتی این است که به‌قدر کافی بزرگ باشند که "درستی" یا "نادرستی" هر گزاره ممکن در باب هندسه اقلیدسی مسطحه را روشن سازد. به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم تعدادی کافی از بنداشت‌ها داشته باشیم به‌طوری‌که اگر S گزاره دلخواهی در مورد عبارت‌های اولیه باشد، آنگاه یا S و یا نقیض آن، $T\,S$، از مجموعه بنداشت‌ها نتیجه گردد. اگر مجموعه بنداشتی به‌قدر کافی بزرگ نباشد، قطعاً گزاره‌هایی از هندسه وجود خواهند داشت که از مجموعه بنداشتی منتج نخواهند شد.

برای مثال، هرگاه عبارت‌های اولیه انتخاب شده توسط هیلبرت و همه بنداشت‌های هیلبرت، به جزء بنداشت توازی را انتخاب کرده باشیم چنین وضعی وجود خواهد داشت.[۱۶۲] این مجموعه بنداشتی تقلیل یافته نخواهد توانست روشن سازد که آیا مجموع زاویه‌های یک مثلث همواره برابر ۱۸۰° است یا خیر؟ زیرا مجموعه بنداشتی کاهش یافته مورد بحث در هر دو مجموعه بنداشتی هندسه‌های مسطحه اقلیدسی و لباچفسکی مشترک است. ظاهرا فهرست مورد نظر از بنداشت‌ها وقتی به‌قدر کافی بزرگ خواهد بود که نتوانیم بدان گزاره دیگری که هم مستقل از بنداشت‌ها و هم سازگار با آنهاست بدان بیفزاییم. هرگاه به چنین نقطه‌ای رسیده باشیم، گوییم به یک مجموعه بنداشتی تمام برای هندسه دست یافته‌ایم.

اکنون می‌توانیم تعریف زیر از تمامیت را عرضه کنیم.

یک مجموعه بنداشتی سازگار را تمام می‌نامیم هرگاه نتوانیم به آن، بدون توسعه گردایه عبارت‌های اولیه، بنداشت دیگری که مستقل از (و نیز سازگار با) بنداشت‌های مفروض باشد بیفزاییم.

بتوان این ویژگی را برای یک مجموعه بنداشتی مفروض به آسانی امتحان کرد. آزمون

۱۶۲. برای یادآوری به هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی گرونبرگ رجوع کنید.

تمامیت بـا اسـتفاده از مفـاهیم فنـی دیگـری چـون کـاتگوری کـردن[۱۶۳] و تعبیرهـای یکریخت[۱۶۴] یک مجموعه بنداشتی برگزار می‌گردد.

۵-۵ خلاصه مطالب فصل پنجم

۱. روش جدید ریاضی روش قیاسی و استنتاجی است که از هندسـه و جبـر بـه دیگـر شاخه‌های علوم ریاضی گسترش یافته است. هر شاخه از ریاضـیات را کـه بـدین روش پایه‌گذاری شده باشد یک تئوری منطقی یا یک تئوری علمی مـی‌نـامیم. در هـر تئـوری منطقی مجموعه‌ای از اصطلاحات فنی که تعریـف نشـده پذیرفتـه مـی‌شـوند بـه‌عنـوان عبارت‌های اولیه یا حدود تعریف نشده انتخاب می‌شوند. همه دیگر اصطلاحات تئوری به‌وسیله عبارت‌های تعریف نشده تئوری باید تعریف گردند.

همچنین در هر تئوری منطقی، مجموعه‌ای از احکام در باب عبارت‌های اولیـه کـه عملاً به‌عنوان احکام اثبات نشده انتخاب و پذیرفته می‌شوند به‌عنوان اصول موضوعه یـا بنداشت‌های آن تئوری تلقی می‌شوند. همه دیگر احکام در بـاب عبـارت‌هـای اولیـه و عبارت‌های تعریف شده تئوری می‌بایست به‌گونه‌ای منطقی از بنداشت‌هـا نتیجـه‌گیـری شوند. این‌گونه احکام نتیجه‌گیری شده را قضیه‌های آن تئوری می‌نامیم.

هر تئوری منطقی، منطق خاص خود را دارا است. گرچـه منطـق اعمـال شـده در بیشتر تئوری‌های علمی، منطق دوارزشی است که از زبـان ارسـطو تأویـل شـده اسـت. معهذا منطق‌های چند ارزش دیگری نیز ممکن می‌باشد.

۲. از جمله ویژگی‌های مهم هر مجموعـه بنداشـتی، چهـار تـای آن، یعنـی سـازگاری، استقلال، تمامیت و هم‌ارزی، در این فصـل بـه اختصـار تشـریح گردیـد. از ایـن میـان، سازگاری یک مجموعه بنداشتی مهم‌ترین و اساسی‌ترین ویژگی آن است، هر مجموعـه بنداشتی که فاقد این ویژگی باشد ارزش مطالعه و بررسی ندارد. اثبـات سـازگاری یـک مجموعه بنداشتی معمولاً به روش مدل‌ها انجام می‌گیرد. بدین طریق، که به عبارت‌هـای اولیه آن معنایی متناظر کرده و مدلی از آن تئوری بـه‌دسـت مـی‌آوریـم. بـه‌گونـه‌ای کـه بنداشت‌های آن به گزاره‌های درسـت تبـدیل گردنـد. چنانچـه مـدلی ملمـوس از یـک مجموعه بنداشتی بتوان ارائد داد سازگاری مطلق آن مجموعه اثبات می‌شود.

---

163 category
164 isomorphic

ویژگی‌های استقلال و تمامیت، گاهی اوقات مطلوب و در بعضی اوقات مطلـوب به شمار نمی‌آیند. معهذا از نظر مبانی ریاضیات ویژگی‌های مهم تلقی می‌گردند. کنکاش در چگونگی استقلال اصل توازی (بنداشت پنجم اقلیدس) در هندسه منجـر بـه کشـف هندسه‌های نا اقلیدسی گردیده است. اولین کسی که به استقلال بنداشـت تـوازی شـک کرد و آن را مورد مطالعه علمی قرارداد خواجه نصـیرالدین طوسـی ریاضـی‌دان ایرانـی بود. یک مجموعه بنداشتی سازگار را تمام نامیم، هرگـاه نتـوانیم بـه آن، بـدون توسـعه گردایه عبارت‌های اولیه، بنداشت دیگری که مستقل از، و نیز سازگار، بـا بنداشـت‌هـای مفروض باشد بیفزاییم.

۵-۶ مسائل

الف) مثالی از یک تابع گزاره‌ای ارائه دهید که شامل سه متغیر باشد.
ب) با جایگزینی مناسب، سه گزاره درسـت از تـابع گـزاره‌ای سـاخته شـده در (الـف) به‌دست آورید.
ج) با جایگزینی مناسب، سه گزاره نادرست از تابع گزاره‌ای ساخته شده به‌دست آورید.
۲. تعریف‌ها (یا توصیف‌ها)ی زیر از ریاضیات ارائه گردیده است. این تعریـف‌هـا را در چارچوب مفهومی از این شاخه از علوم به‌عنوان گردآیـه‌ای از توابـع گـزاره‌ای دکتـرین شده (که در این فصل بحث شده است) مورد بحث قرار دهید.
الف) علوم صوری محض، یعنی ریاضیات و منطق، با روابطی سروکار دارند که مسـتقل از محتوی خاص و تمامیت اشیا ملموس می باشند (هرمان هانکل).
ب) شاید حداقل توصیفی ناکافی که بتوان از کل ریاضـیات نـوین ارائـه داد- کـه آن را تعریف می‌نامیم- از این قرار است که بگوییم ریاضیات موضوعی است کـه بـه‌صـورت (فرم) به معنی عام آن سروکار دارد.
ج) ریاضیات در گسترده‌ترین اهمیت آن عبارت است از توسعه همه انواع استدلال‌هـای

د) یک علم ریاضی ساختاری از احکام است که به گونه ای منظم و مجرد فرمـول‌بنـدی شده است به قسمی که هر حکم از این مجموعه نتیجه منطقـی و صـوری بعضـی و یـا

همه احکام قبلی است. ریاضیات از همه چنین علوم ریاضی تشکیل می شود. (جی.دبلیو. یونگ).

ه) ریاضیات محض گردایه‌ای از تئوری‌های قیاسی فرضیه‌ای است که هریک از یک سیستم مشخص از مفاهیم با نمادهای اولیه تعریف نشده فرضیات اولیه اثبات نشده ولیکن سازگار (بنداشت‌ها) تشکیل شده‌اند که نتایج قیاسی منطقی خود را که از فرآیند استنتاجی مجرد و بدون توسل به مشهود نتیجه می‌شوند نیز دربردارند.

و) ریاضیات عبارت است از علم مطالعه ساختارهای ایده‌آل (که غالباً قابل به‌کارگیری در مسائل واقعی است) و کشف روابط موجود بین بخش‌های این ساختارها.

ز) ریاضیات در گسترش خود ترجیحاً آزاد انگاشته می‌شود و این گسترش تنها به ملاحظات بدیهی محدود می‌گردد، بدین قرار که مفاهیم آن باید خالی از تناقض بوده و نیز مشخصاً و منظماً به توسط تعاریف با مفاهیم قبلی موجود در ارتباط باشند (جرج کانتور).

ح) ریاضی‌دانان حق انتخاب را با محدودیت‌هایی برای خود مفروض می‌انگارند. این محدودیت‌ها شامل تناقض منطقی و انتخاب مسیری است که آن‌ها را بیشتر خشنود کرده و به نتایج می‌رساند.

ط) در ریاضیات محض، که در آن همه حقایق گوناگون با یکدیگر لزوماً در ارتباط هستند (زیرا همگی با فرضیه‌هایی که اصول این علم‌اند الزاماً در ارتباط می‌باشند)، یک مبحث علمی به نسبت اندکی می‌تواند زیبا باشد زیرا اصول آن تعداد اندکی بیش نیستند؛ و چیزی که به طرز شایان توجهی در این شاخه از معرفت ملحوظ است این است که نتایج متنوع و بدیع بسیاری وجود دارد که تنها با استفاده از تعداد اندکی از داده‌ها قابل ارائه و اثبات هستند.

۳. قضیه‌های زیر را در باره شاخه ساده‌ای از ریاضیات که در بخش ۵–۳ عرضه شد اثبات کنید.

الف) ق۸: اگر aGc و bGc آنگاه $a = c$.

ب) ق۹: اگر aGb و bGc آنگاه $a\not{G}c$.

ج) رابطه‌ی سه‌تایی $B(abc)$ را بدین معنی می‌انگاریم که یا (bRc و aRb) و یا (bRa و cRb) ثابت کنید.

ق۱۰: اگر $B(abc)$ برقرار باشد، آنگاه $B(acb)$ برقرار نیست.

د) معنی $B(abc)$ در هر یک از کاربردهای این تئوری که در بخش‌های ۵–۴ و ۵–۵ عرضه گردید چیست؟

۴. صورت قضیه‌ها و تعریف‌های شاخه ریاضیات بخش ۵–۳ را برای کاربرد هندسی این شاخه بنویسید.

۵. صورت قضیه‌ها و تعریف‌های شاخه ریاضیات بخش ۵–۳ را برای کاربرد حسابی این شاخه بنویسید.

۶. نشان دهید که هم‌ارزی مجموعه‌های بنداشتی یک رابطه‌ی هم‌ارزی به معنی عام آن است.

۷. بنداشت‌های یک میدان چنین تعریف می‌شوند یک میدان مجموعه‌ای چون با دو عمل دوتایی است که به $\oplus$ و $\otimes$ نشان می‌دهیم به‌طوری‌که لزوماً جمع و ضرب معمولی نیستند و در بنداشت‌های زیر صدق می‌کنند. متساوی به معنای همانی است؛ لذا $a=b$ به معنی آن است که a و b یک عنصر هستند.

P_1: هرگاه a و b در c باشند، $a \oplus b = b \oplus a$.

P_2: هرگاه a و b در c باشند، $a \otimes b = b \otimes a$

P_3: هرگاه a و b و c در S باشند، $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

P_4: هرگاه a و b و c در S باشند، $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

P_5: هرگاه a و b و c در S باشند، آنگاه $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ و $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

P_6: S شامل عضوی چون z (صفر) است به قسمی که برای هرعضو a از S، $a \oplus z = a$

P_7: S شامل عضوی چون u (واحد) است که متمایز از z بوده و برای هر عضو a از S، $a \otimes u = a$.

P_8: برای هرعضو a در S عضوی چون $\lozenge$ در S هست به قسمی که $a \oplus \lozenge = z$.

P_9: هرگاه a و b و c در S باشند و $c \neq z$ و $c \otimes a = c \otimes b$ یا $c \otimes a = b \otimes c$ آنگاه $a = b$.

P_{10}: برای هرعضو $a \neq z$ در S، عضوی چون a^{-1} در S هست به قسمی که $a \oplus a^{-1} = u$. ثابت کنید که ده بنداشت فوق با بنداشت‌های همین مجموعه که در آن P_5 و P_9 و با دو بنداشت ذیل تعویض می‌گردند هم‌ارز است.

P_5': هرگاه a و b و c در S باشند، آنگاه $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ و P': هرگاه a و b و c در S باشند، $c \neq z$ و $c \otimes a = c \otimes b$ آنگاه $a = b$.

۸. سازگاری (مطلق) مجموعه بنداشتی یک میدان را ثابت کنید.

۹. کدام‌یک از مجموعه‌های بنداشتی ذیل سازگارند؟

الف) ده بنداشت میدان به اضافه این گزاره برای هر a از S، $a \oplus a = z$

ب) ده بنداشت میدان به اضافه این گزاره برای هرعضو a در S، $a \oplus (a \oplus a) = z$.

ج) ده بنداشت میدان به اضافه این گزاره برای هرعضو a در $S \Uparrow$, $a \otimes a = a$.

د) ده بنداشت میدان به اضافه این گزاره: S شامل تعداد نامتناهی عضو است.

ه) ده بنداشت میدان به اضافه این گزاره "اعضایی چون a و b در S هست به قسمی که $a \neq z$ و $b \neq z$ و $a \otimes b = z$."

و) ده بنداشت میدان که درآن P_{10} با $P\Uparrow_{10}$ جایگزین شده است: برای هر عضو a در S عضوی چون a^{-1} در S هست به قسمی است $a \otimes a^{-1} = a$.

۱۰. اگر p، q و r نمایش سه حکم باشند، نشان دهید که مجموعه‌ی زیر متشکل از چهار گزاره سازگار نیست.

(۱) اگر q درست باشد، r نادرست است.

(۲) اگر q نادرست باشد، P درست است.

(۳) r درست است.

(۴) P نادرست است.

۱۱. مفاهیم سازگاری و ناسازگاری یک دستگاه معادله را با مفاهیم سازگاری و ناسازگاری یک مجموعه‌ی بنداشتی مقایسه کنید.

۱۲. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای از اعضا و F یک رابطه دوتایی در S باشد که در بنداشت‌های ذیل صدق می‌کند.

P_1: اگر a و b اعضایی از S باشند و bFa آنگاه $a \not F b$.

P_2: اگر a عضوی از S باشد، آنگاه حداقل یک عضو b در S هست به قسمی که bFa.

P_3: اگر a عضوی از S باشد، آنگاه حداقل یک عضو b در S ⇑ هست بـه قسـمی کـه aFb.

P_4: اگر a و b و c اعضایی از S باشند به قسمی که bFa و cFb آنگاه cFa.

P_5: هرگاه a و b اعضایی از S باشند به قسمی که bFa، آنگاه حداقل یک عضـو در S هست به قسمی که cFa و bFa.

نشان دهید که گزاره‌ی، اگر a عضوی از S باشد، آنگاه حداقل یک عضو چـون b متمایز از a در S هست به قسمی که $b\not{F}a$ و $a\not{F}b$ با بنداشت‌های فوق سازگار اسـت. (مجموعه بنداشتی فوق در تئوری نسبیت مورد استفاده قرار گرفته است، در این تئـوری اعضای S' به‌عنوان حوادث و F به معنی "تعقیب می‌کند" تفسیر شده‌اند)[165].

۱۳. مجموعه بنداشتی زیر را در نظر می‌گیریم. در این مجموعه بنداشتی زنبـور و کنـدو جزء عبارات اولیه هستند.

P_1: هرکندو گردایه ای از زنبور است.

P_2: هر دو کندو متمایز یک و تنها یک زنبور مشترک دارند.

P_3: هر زنبور به دو و فقط دو کندو تعلق دارد.

P_4: دقیقاً چهار کندو وجود دارد.

نشان دهید که این مجموعه بنداشتی سازگاری مطلق دارد.

۱۴. قضیه‌های زیر را از مجموعه بنداشتی مسئله ۱۳ نتیجه بگیرید.

الف) دقیقاً شش زنبور وجود دارد.

ب) در هر کندو دقیقاً سه زنبور وجود دارد.

ج) برای هر زنبور یک زنبور دیگری هست که با وی در یک کندو زندگی نمی‌کند.

۱۵. نشان دهید که بنداشت‌های P_2، P_3، P_4 از مجموعه بنداشتی مسأله ۱۳ مستقلند.

۱۶. تعریف‌های زیر در هندسه مسـطحه اقلیدسـی را در نظـر گرفتـه و آن‌هـا را نقـد و بررسی کنید.

الف) مثلثی را وقتی متساوی‌الاضلاع می‌نامیم در صورتی که سه ضلع آن متساوی و سه زاویه آن نیز برابر باشند.

165. A. A. Robb, A Theory of time and space, New York, Cambridje University Press, 1914.

ب) مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامیم در صورتی که دو ضلع آن و نیز دو زاویه متقابل به این دو ضلع برابر باشند.
ج) مستطیلی را متوازی‌الاضلاع می‌نامیم در صورتی که هر چهار زاویه آن قائمه باشند.
د) قطر دایره خط مستقیمی است که از مرکز دایره گذشته، دو سرآن به محیط محدود و دایره را نصف کند.

فصل ششم

منطق نمادی

هدف‌های آموزشی فصل شش

الف) هدف‌های کلی

- در این فصل دانشجویان با تاریخچه مختصری از پیدایش و تکامل منطق نمادی آشنا می‌شوند.
- نقش منطق به‌عنوان ابزاری برای استنتاج و استدلال تشریح می‌گردد.
- ابتدا منطق دوارزشی ارسطو و سپس به‌عنوان یک پیش درآمد به معرفی منطق‌های چندارزشی پرداخته می‌شود.
- دانشجویان در می‌یابند که منطق به‌عنوان یک مؤلفه تئوری‌های ریاضی نقشی اساسی در طراحی هر شاخه از ریاضیات دارد.

ب) هدف‌های جزیی (رفتاری)

دانشجویان پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتوانند:

- تفاوت بین منطق دوارزشی معمولی و منطق‌های چندارزشی را توضیح دهند.
- اتحاد منطقی را با اتحاد جبری مقایسه کنند و متوجه باشند که هر اتحاد منطقی، صرف‌نظر از هر ارزش‌دهی به مؤلفه‌های سازنده آن، همواره درست.
- حداقل سه منطق سه‌ارزشی بسازند.
- تشابه بین حساب گزاره‌ها، در منطق دوارزشی، و جبر بول را توضیح دهند.
- "قانون منطقی" را تعریف کنند.
- از عهده‌ی حل تمرین‌های پایان فصل برآیند.

در این فصل با منطق نمادی آشنا می‌شوید. ابتدا تاریخچه‌ی مختصری از این علم که به منطق ریاضی مشهور است ذکر شده است. گرچه اغلب دانشجویان با مطالب این فصل از قبل آشنایی دارند، معهذا به جهت خودکفایی کتاب، به اختصار حساب گزاره‌ها و قواعد استنتاج منطقی تشریح شده است.

قسمت جالب این فصل، آشنایی با منطق‌های چند ارزشی است. از دانشجویان خواسته می‌شود تا ضمن مطالعه دقیق این بخش، چند منطق سه‌ارزشی دیگر بسازند و تمرین‌های مربوط به این منطق‌ها را بفهمند.

۶-۱ تاریخچه مختصر منطق نمادی

بحث و بررسی از منطق که در آن فقط از زبان عادی استفاده گردد امری مأیوس کننـده است. یک زبان نمادی یا علامتی، به جهت بررسی دقیق و علمی این موضـوع و نقشـی که دارد ضروری است. به‌خاطر وجود چنین نمادگرایی، بررسـی مطالعـه‌ی حاصـل، بـه منطق نمادی یا منطق ریاضی شهرت یافته است. در منطـق نمـادی، روابـط متنـوع بـین احکام، مجموعه‌ها، رده‌ها و نظایر آن‌ها، به‌وسیله‌ی فرمول‌هایی نمایش داده می‌شوند کـه معانی آن‌ها عاری از سوء تفاهم‌هایی است که در زبـان معمـولی بسـیار مشـهود اسـت. بسط و توسعه این موضوع، بر پایه‌ی مجموعه‌ای از فرمول‌های اولیه و بـر طبـق قواعـد تعیین شده و تبدیلات صوری واضحی انجام می‌گیرد و این به بسـط و توسـعه‌ی جبـر مقدماتی شباهتی بسیار دارد. همچنین همانند جبر، برتری زبان نمادی بر زبان معمـولی، فشردگی و سهولت درک آن می‌باشد که بسیار ارزشمند است.

از لایبنیتز[۱۶۶]، به‌عنوان اولین کسی نام می‌برند که به‌طور جدی خواستار به‌کار بـردن منطق نمادی بوده است. یکی از اولین کارهای وی مقالـه‌ای اسـت تحـت عنـوان، هنـر ترکیبات که در سال ۱۶۶۶ میلادی منتشر شده است. لایبنیتز در این مقاله اعتقادش را به امکان تدوین یک زبان علمی جهان‌شمول، که به‌صورتی اقتصادی بـرای راهنمـایی، امـر استدلال نمادگرایی را به‌کار گرفته باشد، ابراز می‌دارد. در باب این تفکر، لایبنیتز در بین سال‌های ۱۶۷۹ و ۱۶۹۰ در راستای خلق یک منطق نمادی کارهای شایان توجهی انجـام داد. وی مفـاهیمی را فرمـول‌بنـدی کـرد کـه در مطالعـات مـدرن امـروزی از اهمیـت فوق‌العاده‌ای برخوردارند.

وقتی که جرج بول رساله‌ی خود را تحت عنوان "آنالیز ریاضی منطق" که در واقع مقاله‌ای است در باب حساب استنتاج منطقی منتشر کرد، علایق جدیدی به منطق نمادی مجدداً شکل گرفت. وی در مقاله‌های دیگری که در سال‌های ۱۸۴۸ و ۱۸۵۴ منتشر کرد توصیف مهمی از افکارش را پیرامون این موضوع ارائه کرد. این مقاله‌هـا تحـت عنـوان "تحقیقی در قوانین فکر" می‌باشـند کـه در آن تئـوری‌هـای ریاضـی منطـق و احتمـال پایه‌گذاری شده‌اند.

---

166. G. Leibniz

اگوست دمورگان که معاصر بول بود در سال ۱۸۴۷ رساله‌ای تحت عنوان منطق صوری منتشر کرد که از بعضی جهات از کارهای بول پیشرفته‌تر بود. همچنین بول و پس از او دمورگان، مطالعات گسترده‌ای را در باب منطق روابط که پیش از این نادیده انگاشته شده بود، انجام دادند. مفاهیم عرضه شده توسط بول به‌وسیله‌ی ارنست شرودر در کتاب قطوری تحت عنوان "پیش درآمدی بر جبر منطق" به کمال قابل ملاحظه‌ای ارتقاء یافت. این کتاب در بین سال‌های ۱۸۹۰ و ۱۸۹۵ منتشر یافت. در واقع، منطق‌دانان مدرن در این راستا می‌اندیشند که منطق نمادی را به سنّت بول با اصطلاح جبر بول – شرودر پیوند دهند. هنوز هم کارهای قابل ملاحظه‌ای در جبر بول در شرف انجام است و مقاله‌های بسیاری را در این موضوع در مجله‌های تحقیقی امروزی می‌توان یافت.

در بین سال‌های ۱۹۰۳–۱۸۷۹ گرایش مدرن‌تری به منطق نمادی با کار منطق‌دان آلمانی به‌نام گوتلُب فرگه و پئانو ریاضی‌دان ایتالیایی آغاز گردید. کار پئانو با این انگیزه آغاز شد که بتوان کل علوم ریاضی را برحسب حسابان منطقی بیان کرد. در حالی‌که کار فرگه از اینجا ناشی می‌شد که بر پایه‌ی مستحکم‌تری برای ریاضیات نیاز بود. رساله‌ی فرگه تحت عنوان "*Bergriffsschrift*" در سال ۱۸۷۹ ظاهر شد؛ همچنین کتاب مهم تاریخی وی تحت عنوان "*Grundgesetze der Arithmetik*" در بین سال‌های ۱۹۰۳–۱۸۹۳ منتشر گردید. کتاب پئانو که به یاری محققان همکارش در ۱۸۹۴ منتشر گردید. فرمول‌بندی ریاضیات نام یافت. کاری که با فرگه و پئانو آغاز شده بود مستقیماً وایتهد[۱۶۷] و راسل[۱۶۸] را رهنمون کرد تا کتاب مشهور اصول ریاضیات را تدوین کنند. ایده‌ی اساسی این کتاب همانا یکسان‌سازی بخش اعظمی از ریاضیات با منطق بود، بدین معنی که دیگر شاخه‌های ریاضیات را می‌توان ازسیستم اعداد طبیعی نتیجه‌گیری کرد و در نهایت، ریاضیات یا بخش اعظمی از آن را می‌توان به روش بنداشتی کردن، از مجموعه‌هایی از بنداشت‌های منطقی به‌دست آورد. در سال‌های ۱۹۳۹–۱۹۳۴ کتاب جامع مبانی ریاضیات دیوید هیلبرت و پاول برنایز منتشر شد. این کتاب که بر پایه یک سری مقاله‌ها و دروس دانشگاهی ارائه شده بود، توسط هیلبرت

---

167. Whitehead

168. Russel

تدوین گردید. کوشش هیلبرت بر این بود تا ریاضیات را با استفاده از منطق نمادی به روشی جدید سامان دهد که در آن سازگاری برقرار باشد.

در حال حاضر مطالعه و پژوهش‌های تخصصی در حوزه‌ی منطق نمادی توسط بسیاری از ریاضی‌دانان انجام می‌گیرد. به‌ویژه انتشار کتاب اصول ریاضیات در این راستا نقش اساسی دارد.

همچنین مجله‌ای ادواری تحت عنوان مجله منطق نمادی از سال ۱۹۳۵ منتشر می‌شود و نتایج به‌دست آمده توسط این گروه از ریاضی‌دانان را منعکس می‌کند. در این بخش کوشش می‌کنیم تا ایده‌های مقدماتی از ماهیت منطق نمادی را ارائه دهیم و در این راستا خود را به حساب گزاره‌ای که به‌وسیله وایتهد و راسل توسعه یافته است محدود می‌کنیم. در این بخش مفاهیم و نمادهای لازم را معرفی و در بخش بعدی این موضوع را به روش بنداشتی استوار خواهیم کرد.

۶-۲ ترکیبات گزاره‌ای

هر جمله‌ای که محتوای آن دارای اعتبار درستی یا نادرستی باشد *گزاره* نامیده می‌شود؛ صرف‌نظر از آنکه بدانیم کدام‌یک از این دو اعتبار (درستی یا نادرستی) در مورد آن صادق است[169]. به‌عنوان مثال از گزاره‌ها، «بهار یک فصل است»، «۸ یک عدد اول است» و «رقم ۹۰۰٫۰۰۰٫۰۰۰ام عدد π برابر ۷ است» را نام می‌بریم. اولین گزاره درست، دومی نادرست و درستی یا نادرستی سومی تاکنون بر ما معلوم نیست. در منطق نمادی گزاره‌ها با حروف کوچک m، n، p، q، r و ... نشان داده می‌شوند.

از ترکیب گزاره‌ها به طرق مختلف گزاره‌های جدیدی به‌دست می‌آید. برای مثال از دو گزاره‌ی «سعدی یک شاعر است» و «۸ یک عدد اول است »گزاره جدید «سعدی یک شاعر است و ۸ یک عدد اول است» و نیز «سعدی یک شاعر است یا ۸ یک عدد اول است»، و «اگر سعدی شاعر است، آنگاه ۸ عدد اول است»، حاصل می‌شوند.

---

[169] . وقتی می‌گوییم که یک گزاره فقط می‌تواند یکی از دو ارزش "درستی یا نادرستی" را داشته باشد، این ارزش‌دهی اولین‌بار توسط ارسطو انجام شده است و چنین منطقی را که فعلاً منطق معمولی استدلال است. منطق دوارزشی یا منطق ارسطو نیز می‌نامند. بعدها ریاضی‌دانان، این منطق را با استفاده از نمادها و فرمول‌بندی‌های مشخص و معینی به شکل منطق امروزی درآورده و لذا آن را "منطق ریاضی" و یا "منطق علامتی" نیز نامیده‌اند ولی ارزش‌دهی گزاره‌ها و ترکیبات گزاره‌ای همان است که ارسطو تبیین کرده است. در بخش ۶-۴ اشاره‌ای ولو مختصر به منطق‌های چندارزشی نیز خواهیم داشت.

همچنین از یک گزاره‌ای چون «سعدی یک شاعر است» گـزاره‌ی جدیـد «سـعدی یـک شاعر نیست» را می‌توانیم بسازیم. یعنی، همواره می‌توانیم گزاره‌ای بسازیم کـه گـزاره‌ی اول را نفی کند.

ترکیبات فوق با استفاده از الفاظ، و، یا، اگـر آنگـاه، اگـر و فقـط اگـر و نـه، ارائـه شده‌اند. این ترکیبات اساسی گزاره‌ها در منطق نمـادی بـا اسـتفاده از نمادهـای مناسـب ارائه می‌گردند. بدین‌منظور پنج نماد ذیل را معرفی می‌کنیم.

(۱) $p \wedge q$ (بخوانید «p و q») گزاره‌ای است که وقتی راست است که هـر دوی p و q راست باشند. هر گزاره از این نوع را یک «گزاره‌ی عطفی» می‌نامیم.

(۲) $p \vee q$ (بخوانید «p یا q») گزاره‌ای است که وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p و q درست باشند. هر گزاره از ایـن نـوع را یـک «گـزاره‌ی فصـلی» (یـک ترکیب فصلی) می‌نامیم.

(۳) $p \rightarrow q$ (بخوانید «p آنگاه q») گـزاره‌ای اسـت کـه وقتـی نادرسـت اسـت کـه p درست و q نادرست باشد. هر گزاره از این نوع را یک «گزاره‌ی شرطی» می‌نامیم.

(۴) $p \leftrightarrow q$ (بخوانید «p اگر و فقط اگر q») گزاره‌ای است که وقتی درست است کـه p و q هر دو درست یا هـر دو نادرسـت باشـند. هـر گـزاره از ایـن نـوع را یـک «هـم‌ارزی یـا دوشرطی» می‌نامیم.

(۵) $\sim p$ (بخوانید «چنین نیست که p») گزاره‌ای است که وقتی درست است کـه p نادرسـت و وقتی نادرست است که p درست باشد. هر گزاره از این نـوع را «نفـی» مـی‌نـامیم. ملاحظـه می‌کنیم که $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ نمادهایی هستند که بر دو گزاره عمل می‌کنند، در حـالی‌کـه $\sim$ نمادی است که یک عمل یکتایی را نشان می‌دهد که بر گزاره‌ها عمل می‌کند[۱۷۰].

باید خاطر نشان کنیم که معانی و، یا، (اگر– آنگاه) و (اگر و فقـط اگـر)، کمـی بـا معانی معمولی این رابطه‌ها در زبان عادی متفاوت‌اند.

برای مثال، در زبان معمولی غالباً لفظ «و» برای عطف دو گزاره به‌کار می‌رود. مانند:

---

170 وایتهـد و راسـل از نمادهـای $\bar{p}$، $p \wedge q$، $p \vee q$، $p \supset q$، $p \equiv q$ را بـه‌کـار مـی‌بـرد. این علامت به هیچ‌وجـه اسـتاندارد نیسـتند. هیلبرت نمادهای $\sim p$ و $p \rightarrow q$، $p \vee q$، $p \wedge q$ استفاده می‌کردند در حالی‌که مصاحب نمادهای $p \wedge q$، $p \vee q$، $p \supset q$، $p \subset q$ و $\sim p$ را به‌کار برده است.

او سوار قطار شد و وارد تبریز گردید.

با این حال در منطق لفظ «و» برای عطف هر دو گزاره‌ی دلخواه صرف‌نظر از اینکه با هم در ارتباط باشند و یا وابسته به یکدیگر باشند، به‌کار می‌رود. بـرای مثـال گـزاره‌ی ترکیبی ذیل را نقل می‌کنیم:

فروردین یک ماه است و ۸ یک عدد اول است.

در زبان معمولی، رابط گزاره‌ای «یا» به دو معنی ظاهر می‌شود:

«یای مانع جمع» (p یا q ولی نه هر دو) و یای شمول (p یا q یا هر دو).

فقط یای آخری در منطق به‌کار می‌رود؛ یعنی یای منطقی همان یای شمول است و بر هر دو گزاره‌ی دلخواه عمل می‌کند، صرف‌نظر از اینکه این دو گزاره با هم در ارتباط با معنی باشند یا نباشند.

استفاده منطقی از رابط گـزاره‌ای «اگـر، آنگـاه» نیـز شـایان توجـه اسـت. در زبـان معمولی، گزاره‌ی مرکب، «اگر p، آنگاه q» نشانگر رابطه‌ای بـین شـرط و جـواب شـرط است و یا سبب و نتیجه‌ی آن می‌باشد[۱۷۱]. مانند گزاره‌های:

اگر باران ببارد نخواهیم رفت

---

[171] در منطق قدیم در ترکیب شرطی «اگر p، آنگاه q»، p را «شرط» و q را «جواب شرط» و یا p را «سبب» و q را «مسبب» نیز می‌نامیدند.

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128	4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091	4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436	7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548	0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798	6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872	1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235
4201995611	2129021960	8640344181	5981362977	4771309960	5187072113	4999999837	2978049951	0597317328	1609631859
5024459455	3469083026	4252230825	3344685035	2619311881	7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778	1857780532	1712268066	1300192787	6611195909	2164201989
3809525720	1065485863	2788659361	5338182796	8230301952	0353018529	6899577362	2599413891	2497217752	8347913151
5574857242	4541506959	5082953311	6861727855	8890750983	8175463746	4939319255	0604009277	0167113900	9848824012
8583616035	6370766010	4710181942	9555961989	4676783744	9448255379	7747268471	0404753464	6208046684	2590694912
9331367702	8989152104	7521620569	6602405803	8150193511	2533824300	3558764024	7496473263	9141992726	0426992279
6782354781	6360093417	2164121992	4586315030	2861829745	5570674983	8505494588	5869269956	9092721079	7509302955
3211653449	8720275596	0236480665	4991198818	3479775356	6369807426	5425278625	5181841757	4672890977	7727938000
8164706001	6145249192	1732172147	7235014144	1973568548	1613611573	5255213347	5741849468	4385233239	0739414333
4547762416	8625189835	6948556209	9219222184	2725502542	5688767179	0494601653	4668049886	2723279178	6085784383
8279679766	8145410095	3883786360	9506800642	2512520511	7392984896	0841284886	2694560424	1965285022	2106611863
0674427862	2039194945	0471237137	8696095636	4371917287	4677646575	7396241389	0865832645	9958133904	7802759009
9465764078	9512694683	9835259570	9825822620	5224894077	2671947826	8482601476	9909026401	3639443745	5305068203
4962524517	4939965143	1429809190	6592509372	2169646151	5709858387	4105978859	5977297549	8930161753	9284681382
6868386894	2774155991	8559252459	5395943104	9972524680	8459872736	4469584865	3836736222	6260991246	0805124388
4390451244	1365497627	8079771569	1435997700	1296160894	4169486855	5848406353	4220722258	2848864815	8456028506
0168427394	5226746767	8895252138	5225499546	6672782398	6456596116	3548862305	7745649803	5593634568	1743241125
1507606947	9451096596	0940252288	7971089314	5669136867	2287489405	6010150330	8617928680	9208747609	1782493858
9009714909	6759852613	6554978189	3129784821	6829989487	2265880485	7564014270	4775551323	7964145152	3746234364
5428584447	9526586782	1051141354	7357395231	1342716610	2135969536	2314429524	8493718711	0145765403	5902799344
0374200731	0578539062	1983874478	0847848968	3321445713	8687519435	0643021845	3191048481	0053706146	8067491927
8191197939	9520614196	6342875444	0643745123	7181921799	9839101591	9561814675	1426912397	4894090718	6494231961
5679452080	9514655022	5231603881	9301420937	6213785595	6638937787	0830390697	9207734672	2182562599	6615014215
0306803844	7734549202	6054146659	2520149744	2850732518	6660021324	3408819071	0486331734	6496514539	0579626856
1005508106	6587969981	6357473638	4052571459	1028970641	4011097120	6280439039	7595156771	5770042033	7869936007
2305587631	7635942187	3125147120	5329281918	2618612586	7321579198	4148488291	6447060957	5270695722	0917567116
7229109816	9091528017	3506712748	5832228718	3520935396	5725121083	5791513698	8209144421	0067510334	6711031412
6711136990	8658516398	3150197016	5151168517	1437657618	3515565088	4909989859	9823873455	2833163550	7647918535
8932261854	8963213293	3089857064	2046752590	7091548141	6549859461	6371802709	8199430992	4488957571	2828905923
2332609729	9712084433	5732654893	8239119325	9746366730	5836041428	1388303203	8249037589	8524374417	0291327656
1809377344	4030707469	2112019130	2033038019	7621101100	4492932151	6084244485	9637669838	9522868478	3123552658
2131449576	8572624334	4189303968	6426243410	7732269780	2807318915	4411010446	8232527162	0105265227	2111660396
6655730925	4711055785	3763466820	6531098965	2691862056	4769312570	5863566201	8558100729	3606598764	8611791045
3348850346	1136576867	5324944166	8039626579	7877185560	8455296541	2665408530	6143444318	5867697514	5661406800
7002378776	5913440171	2749470420	5622305389	9456131407	1127000407	8547332699	3908145466	4645880797	2708266830
6343285878	5698305235	8089330657	5740679545	7163775254	2021149557	6158140025	0126228594	1302164715	5097925923
0990796547	3761255176	5675135751	7829666454	7791745011	2996148903	0463994713	2962107340	4375189573	5961458901
9389713111	7904297828	5647503203	1986915140	2870808599	0480109412	1472213179	4764777262	2414254854	5403321571
8530614228	8137585043	0633217518	2979866223	7172159160	7716692547	4873898665	4949450114	6540628433	6639379003
9769265672	1463853067	3609657120	9180763832	7166416274	8888007869	2560290228	4721040317	2118608204	1900042296
6171196377	9213375751	1495950156	6049631862	9472654736	4252308177	0367515906	7350235072	8354056704	0386743513
6222247715	8915049530	9844489333	0963408780	7693259939	7805419341	4473774418	4263129860	8099888687	4132604721

عدد π تا ۵۰۰۰ رقم اعشار که توسط دانیل شانکس (D. shanks) و جوهن رنچ (J. W. Wrench) محاسبه گردیده است. امروزه با استفاده از کامپیوترهای غول‌پیکر π تا ۲ میلیون رقم اعشار محاسبه شده است.

بعضی قوانین منطقی

قانون	نام قانون
$p \vee \sim p$	قانون طرد
$\sim (p \wedge \sim p)$	قانون نقض
$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	قانون تعدی شرطی
$p \leftrightarrow \sim (\sim p)$	قانون نفی ثانی
$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$	قانون عکس نقیض

هرگاه جداول ارزش گـزاره‌هـای $p \to q$ و $\sim q \to \sim p$ را تشـکیل دهـیم در می‌یابیم که این دو جدول با یکدیگر از حیث درستی و نادرستی تطـابق دارنـد. هـر دو گزاره‌ی m و n از این نوع را هم‌ارز منطقی می‌نامیم و در نتیجه گزاره‌ی $m \leftrightarrow n$ یـک قانون منطقی یا یک اتحاد منطقـی اسـت، لـذا $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ یـک قـانون منطقی است، همچنان که در فهرست فوق از قوانین منطقی منظور شـده اسـت. اهمیـت قوانین منطقی در این است که هرگاه بدانیم دو گزاره‌ی هم‌ارز منطقی هستند مـی‌تـوانیم ساختار یک گزاره را به ساختار گزاره‌ی هم‌ارز آن تغییر داده و مطمئن باشیم که بـا ایـن عمـل تـأثیری در ارزش درسـتی گـزاره‌ی اولیـه بـه‌وجـود نمـی‌آیـد. لـذا گـزاره‌ی $(\sim q \to \sim p)$ را هر جا که ظاهر شود با $p \to q$ تعویض کنیم. به‌عنوان تمرین ثابـت کنید که هر زوج از گزاره‌ها (در یک سطر)ی زیر هم‌ارز منطقی یکدیگر می‌باشند:

$\sim (\sim p \wedge \sim q)$	$p \vee q$
$\sim (p \wedge \sim q)$	$p \to q$
$\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge \sim p)$	$p \leftrightarrow q$
$\sim (\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$
$\sim p \vee q$	$p \to q$
$\sim [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \vee p)]$	$p \leftrightarrow q$
$\sim (p \to \sim q)$	$p \wedge q$
$\sim p \to q$	$p \vee q$
$[(p \to q) \wedge (q \to p)]$	$p \leftrightarrow q$

این هم‌ارزی‌ها از جمله هم‌ارزی‌های منطقی جالبی می‌باشند. زیـرا نشـان‌دهنـده‌ی این واقعیت هستند که رابط‌های عاطف، فاصل، شرطی، هم‌ارزی و نفی به اعتباری قابل

تعریف و تحویل به یکدیگرند. فلذا ملاحظه می‌کنیم که جفت گزاره‌های نخست این جدول نشانگر آنند که چگونه رابط‌های فاصل، شرطی و هم‌ارزی را می‌توان برحسب رابط‌های عاطف و نفی تعریف کرد. سه جفت گزاره‌های وسطی نشان می‌دهد که چگونه رابط‌های عاطف، شرطی و هم‌ارزی را می‌توان برحسب رابط فاصل و نفی تعریف کرد؛ بالاخره سه جفت گزاره‌های آخری جدول نشانگر آنند که چگونه می‌توان رابط‌های عاطف، فاصل و هم‌ارزی را برحسب رابط شرطی و نفی تحویل کرد. در صورت تمایل به جزئیات امر به مرجع [۷] مراجعه کنید.

این نکته قابل ذکر است که رابط فاصل را می‌توان تنها برحسب رابط شرطی بیان کرد، زیرا $p \vee q$, $(p \to q) \to q$ از نظر منطقی هم‌ارزند. این کار را نمی‌توان برای رابط عاطف انجام داد.

۶-۳ حساب گزاره‌ها

در اجرای روش ریاضی، همچنان که در فصل قبل یادآور شدیم، قضیه‌ها را از بنداشت‌ها و یا قضیه‌های قبلی نتیجه‌گیری می‌کنیم. برای انجام این کار از مفروضات شروع و به نتایج ختم می‌کنیم و در این راستا استدلال به این صورت انجام می‌گیرد که «اگر چنین و چنان باشد، آنگاه چنین و چنان خواهد شد». اینکه درستی یا نادرستی مفروضات و نتایج برقرار باشد، ربطی به استدلال منطقی ندارد. لیکن تنها به برقراری و درستی بحث (استدلال) اهمیت می‌دهیم، که از فرض شروع و به نتیجه و فرض دیگر ختم می‌گردد. یعنی اصرار داریم که بحث ما از نظر صوری[۱۷۲] درست باشد، به‌عبارت دیگر نتیجه‌گیری اعمال شده، صرف‌نظر از درستی یا نادرستی مفروضات و نتایج، درست باشد. نتیجه می‌شود که کل نتیجه‌گیری، حاصل یک اتحاد منطقی است. برعکس، هرگاه این نتیجه‌گیری یک اتحاد منطقی باشد، بحث و استدلال برقرار خواهد

[172]. Formally

بود. لذا کل آنچه که برای آزمون استدلال از حیث درستی مورد حاجت است آن است که نتیجه‌گیری شرطی مورد بحث یک اتحاد منطقی است یا خیر[۱۷۳].

بنابر آنچه که گفته شد، آشکار است که کار اولیه‌ی منطق آن است کـه اتحادهـای منطقی را مشخص سازد. یعنی، آن دسته از ترکیبات گزاره‌ای از مؤلفه‌هـای گـزاره‌ای p، q، r ... را تعیین کند که صرف‌نظر از ارزش‌های درستی این مؤلفه‌ها همـواره احکـامی درست باشند. این اتحادهای منطقی، قوانین سیستم منطقی بوده و سـاختار آنچـه را کـه استدلال صوری نامیده می‌شود تشکیل می‌دهند[۱۷۴]. در روش جدول‌های ارزش، وسـایل کافی و مطمئن برای آنکه بدانیم یک ترکیب گزاره‌ای یک اتحاد است یا خیـر در دسـت داریم. با این حال، به‌کارگیری این روش منجر به حصول تصادفی و نامنظم گردایه‌ای از اتحادهای منطقی خواهد شد. هدف از بخش حاضر آن است که روشی را بیان کنیم کـه بر طبق آن اتحادهای منطقی به‌صورتی منظم و در ارتباط با هم به‌دسـت آینـد. ملاحظـه می‌کنیم که به استناد تعداد اندکی از اتحادهای منطقی، بقیه آن‌ها بر طبق قواعد مشـخص قواعد منطقی به‌دست می‌آیند. در این روش فقط اتحادهای منطقی حاصـل مـی‌شـوند و نیازی به جداسازی اتحادها از غیراتحادهـا نخواهـد بـود. کـاری کـه در روش جـداول ارزش باید انجام گیرد. از آنجا که در این روش، اتحادها به‌وسـیله‌ی محاسـبات نمـادی به‌دست می‌آیند، روش جدید را «حساب گزاره‌ها» می‌نامند.

گرایشی که به حساب گزاره‌ها در این بخش انجام می‌گیرد اساساً همان اسـت کـه وایتهد و راسل در کتاب خود به‌نام اصول ریاضیات ذکر کرده‌اند.

وجه مهم این گسترش آن است که روش بنداشتی را به‌کار می‌گیرد. در این روش، تعداد اندکی از مجموعه‌ی همه‌ی اتحادها به‌عنوان بنداشـت انتخـاب شـده و سـپس بـر

---

173 . نقشی که اتحادهای منطقی در ریاضیات و علم منطق دارند مانند نقشی است کـه اتحادهـای جبـری در جبـر را حل می‌کنیم زیرا $(x-۳)(x-۲)=۰$ مورد نظر باشد، بجای آن $x^۲-۵x+۶=۰$ مقدماتی دارند. هرگاه حل معادله یک اتحاد جبری است. $(x-۳)(x-۲)=x^۲-۵x+۶$ می‌دانیم که

174 . نتیجه‌گیری و استدلال منطقی در واقع این است که هر قضیه ریاضی یک گزاره‌ی شرطی است. بـرای مثـال نمایش یک مثلث باشد ABC«در هر مثلث مجموع سه زاویه دو قائمه است» در واقع بدین‌معنی است که «اگر ـــ $\angle A+\angle B+\angle C=۱۸۰^\circ$ درگیر هستیم. در برهان قضیه نیز مراحلی طـی مـی‌شـود از $p\to a$». ملاحظه می‌کنیم که آنچـه کـه اهمیـت دارد درسـتی $p\to p_۱,\ p_۱\to p_۲,\ p_۲\to p_۳,\ \dots,\ p_{n-۱}\to q$ (a)نوع گـزاره‌هـای شـرطی یک اتحاد منطقی است.(a)استدلال آن است که

طبق برخی قواعد صوری که عرضه می‌گردند دیگر اتحادهای منطقی به‌دست مـی‌آینـد. این قواعد دقیقاً همان نقشی را در گسترش حساب گزاره‌ها دارند که نتیجه‌گیری منطقی در گسترش هر تئوری ریاضی داراست. البته نتیجه‌گیری منطقی، به معنـی عـادی آن، را نمی‌توان در اینجا اعمال کرد، زیرا همین نتیجه‌گیری منطقی است که اینک هدف بحـث حاضر را تشکیل می‌دهد[۱۷۵]. اکنون به‌طـور خلاصـه اصـلاحات اولیـه و بنداشـت‌هـای حساب گزاره‌ها را عرضه می‌کنیم. همچنین قواعدی را که بر طبق آن قضیه‌های حسـاب گزاره‌ها (تئوری منطق) حاصل می‌شوند ذکر می‌کنیم.

۶-۳-۱ عبارت‌های اولیه (یا مفاهیم تعریف نشده)

برای عبارت‌های اولیه، یعنی اصلاحات تعریف نشده‌ی حساب گزاره‌هـا، انتخـاب‌هـای زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) مجموعه‌ای چون P متشکل از p،q، r ... که «گزاره» نامیده می‌شوند.

(۲) عملی دوتایی که بر اعضای P اثر کرده و به $\vee$ نشان داده می‌شوند.

(۳) یک عمل یکتایی که بر اعضای P اثر کرده و به «$\sim$» نشان داده می‌شود.

به سبب تعریف‌پذیری رابط‌های منطقی که در بخش پیش توضیح داده شـد نیـازی به انتخاب دیگر اعمال دوتایی $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ نمی‌باشد. یادآوری می‌کنیم که در واقع آنچه کهاز خواص اعمال دوتایی حاصل می‌شود «بودن» در P است نه اینکه سایر خواص آن و بهتر است تأکید بر آن‌ها در جایی‌که نشان داده‌ام انجام گیرد. هرگاه p و q عناصری از p باشند $p \vee q$ و $\sim p$ براساس خواص اعمال دوتایی و یکتایی اعضایی از p هستند.

۶-۳-۲ بنداشت‌ها یا اتحادهای اولیه

---

175. بعضی ریاضیات را به‌عنوان بنایی عظیم تصور کرده‌اند که طبقات و بلوک‌های متنوع آن را شاخه های مختلف ریاضیات تشکیل می‌دهند. در این مقام، منطق و قواعد منطقی را به منزله‌ی ملات این ساختمان تعبیر نموده که در همه جای ساختمان حضور دارد و قسمت‌های متفاوت تشکیل دهنده‌ی آن را (آجر، سنگ و چوب و ...) به هم پیوند می‌دهد. علم منطق همانا مطالعه‌ی این قواعد منطقی است.

همه‌ی اتحادها گزاره‌اند. لیکن هر گزاره‌ای اتحاد نمی‌باشد. از میان تعداد بی‌شماری اتحادهای منطقی چهارتای آن‌ها به‌عنوان بنداشت انتخاب شده‌اند. این اتحادهای اولیه را با L_1، L_2، L_3 و L_4 نشان می‌دهیم و قبل از بیان آن‌ها تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱. $p \to q$ به معنی $\sim p \vee q$ می‌باشد.

L_1: $(p \vee p) \to p$

L_2: $q \to (p \vee q)$

L_3: $(p \vee q) \to (q \vee p)$

L_4: $(q \to r) \to \left[(p \vee q) \to (p \vee r)\right]$

بنداشت L_2 از این واقعیت ناشی می‌شود که یک ترکیب فصلی وقتی درست است که یکی از مؤلفه‌های آن درست باشد. در کتاب «اصول ریاضیات» این بنداشت «اصل جمع» نامیده شده است.

بنداشت L_3 را اصل جابه‌جایی می‌نامیم. این بنداشت از ماهیت جابه‌جایی فاصل ناشی می‌شود. بجای یک گزاره‌ی شرطی می‌توان یک هم‌ارزی در این اصل عرضه کرد، لیکن در آن صورت بیش از آنچه که لازم است فرض خواهد شد.

بنداشت L_4 را «اصل افزایش» می‌نامیم. این بنداشت از این واقعیت ناشی می‌شود که در یک گزاره‌ی شرطی (استلزام) یک گزاره را به‌صورت فصلی می‌توان به مقدم و تالی افزود و استلزام باز هم برقرار خواهد بود. بین این بنداشت و قانون مأنوس حساب اعداد شباهت وجود دارد: اگر $a < b$. آنگاه $a + c < b + c$

۶-۳-۳ قواعد استنتاج قضیه‌ها یا اتحادهای ثانویه

چهار قاعده وجود دارد که بر طبق آن‌ها می‌توانیم اتحادهای ثانویه[۱۷۶] را از اتحادهای مفروض به‌دست آوریم. این قاعده‌ها عبارتند از:

R_1 (قاعده جایگزینی): می‌توانیم در یک اتحاد هر جا که گزاره‌ی q نمود دارد آن را با گزاره‌ی p جایگزین سازیم و یک اتحاد ثانویه را به‌دست آوریم.

مثلاً هرگاه در L_2، q را با $p \vee q$ جایگزین کنیم اتحاد جدید زیر حاصل می‌شود

---

[176]. Derived tautology

$$(p \vee q) \to [p \vee (p \vee q)]$$

R_2 (قاعده جایگزینی تعریفی): هر عبارت را در یک اتحاد مفروض می‌توانیم با عبارت دیگر که از نظر تعریف با آن یکی است جایگزین سازیم و اتحاد ثانویه‌ای به‌دست آوریم. برای مثال، جایگزینی $q \to r$ با $\sim q \vee r$ را در L_4 اتحاد ثانویه جدیدی به‌دست می‌دهد:

$$(\sim q \vee r) \to [(p \vee q) \to (p \vee r)]$$

R_3 (قاعده استلزام): هرگاه m و $m \to n$ برقرار باشند، n برقرار است.

قبل از بیان چهارمین قاعده تعریف ذیل را عرضه می‌کنیم.

تعریف ۲. $p \wedge q$ به معنی $\sim(\sim p \vee \sim q)$ است.

R_4 (قاعده عطف): از دو گزاره‌ی درست m و n اتحاد ثانویه $m \wedge n$ را می‌توان به‌دست آورد.

با این بنداشت‌ها و قاعده‌های استنتاجی فوق، اینک به اثبات بعضی از قضیه‌های حساب گزاره‌ها می‌پردازیم. در آغاز کار به برهان مربوط می‌پردازیم. برای آنکه تصوری از کار با این حساب ارائه گردد؛ در دنباله‌ی کار، صرفاً به بیان قضیه‌ها اکتفا شده است.

قضیه ۱. $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

برهان: $(p \to r) \to [(p \vee q) \to (p \to r)]$ (بنابر بنداشت ۴)

$(q \to r) \to [(\sim p \vee q) \to (p \vee r)]$ (p با $\sim p$ جایگزین شده است)

$(p \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ (بنابر تعریف ۱)

قضیه ۲. $p \to (p \vee p)$

برهان: $q \to (p \vee q)$ (بنابر بنداشت L_2)

$p \to (p \vee p)$ (جایگزین q با p)

قضیه ۳. $p \to p$

برهان: $\left[(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)\right]\rightarrow(q\rightarrow r)$ (بنابر قضیه ۱)

$\left[(p\vee p)\rightarrow p\right]\rightarrow\left[\{p\rightarrow(p\vee p)\}\rightarrow(p\rightarrow p)\right]$

(جایگزینی q با $(p\vee p)$ و r با p)

$p\vee p\rightarrow p$ (بنابر بنداشت $L1$)

$\{p\rightarrow(p\vee p)\}\rightarrow(p\rightarrow p)$ (بنابر قاعده‌ی R_3)

$p\rightarrow(p\vee p)$ (بنابر قضیه ۲)

$p\rightarrow p$ (بنابر قاعده‌ی R_3)

(این قضیه مبین آن است که هر گزاره مستلزم خودش است، به عبارت دیگر استلزام یک رابطه‌ی انعکاسی است)

قضیه ۴. $\sim p\vee p$

برهان: $p\rightarrow p$ (بنابر قضیه ۳)

$\sim p\vee p$ (بنابر تعریف ۱)

قضیه ۵. $p\vee\sim p$

برهان: $(p\vee q)\rightarrow(q\rightarrow p)$ (بنابر بنداشت L_3)

$(\sim p\vee p)\rightarrow(p\vee\sim p)$ (جایگزینی p با $\sim p$ و q با p)

$\sim p\vee p$ (بنابر قضیه ۴)

$p\vee\sim p$ (بنابر قاعده‌ی ۳)

این قضیه همان قاعده‌ی ردّ شق وسط است که مبین آن است که «یا p درست است و یا p نادرست است». یا آنکه «یا p درست است و یا آنکه چنین نیست که p درست است».

قضیه ۶. $(p\rightarrow\sim p)\rightarrow\sim p$

برهان: $(p\vee p)\rightarrow p$ (بنابر بنداشت L_1)

$(\sim p\vee\sim p)\rightarrow\sim p$ (جایگزینی p با $\sim p$)

$p \to \sim p) \to \sim p$ (بنابر تعریف ۱)
(این قضیه مبین آن است که هر گزاره که مستلزم نفی خودش باشد نادرست است).

قضیه ۷. $p \to \sim(\sim p)$

برهان: $p \vee \sim p$ (بنابر قضیه ۵)

$\sim p \vee \sim(\sim p)$ (جایگزینی p با $\sim p$)

$p \to \sim(\sim p)$ (تعریف ۱)

قضیه ۸. $p \vee \{\sim(\sim p)\}$

برهان: $(q \to r) \to [(p \vee q) \to (q \vee r)]$ (بنابر بنداشت $L4$)

$[\sim p \to \sim\{\sim(\sim p)\}] \to [(\sim p \vee p) \to (q \vee \sim\{\sim(\sim p)\})]$

جایگزینی q با $\sim p$ و r با $\sim\{\sim(\sim p)\}$

$p \to \sim(\sim p)$ (قضیه ۷)

$p \to \{\sim(\sim(\sim p))\}$ (جایگزینی p با $\sim p$)

$(p \vee \sim p) \to (p \vee \sim\{\sim(\sim p)\})$ (بنابر R_3)

$p \vee \sim p$ (قضیه ۵)

$p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$ (قاعده‌ی R_3)

قضیه ۹. $\sim(\sim p) \to p$

برهان: $(p \vee q) \to (q \vee p)$ (بنابر بنداشت L_3)

$\{(p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}) \to (\sim\{\sim(\sim p)\} \vee p)\}$ (جایگزینی q با $\sim\{\sim(\sim p)\}$)

$p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$ (بنابر قضیه‌ی ۸)

$\sim\{\sim(\sim p)\} \vee p$ (بنابر قاعده‌ی R_3)

$\sim(\sim p) \to p$ (بنابر تعریف ۱)

قضیه ۱۰. $[p \to (\sim p)] \wedge [\sim(\sim p) \to p]$

برهان: $p \to \sim(\sim p)$ (قضیه ۷)

$\sim(\sim p) \to p$ (قضیه ۹)

$\left[p \to \sim(\sim p)\right] \wedge \left[\sim(\sim p) \to p\right]$ (قاعده‌ی R_4)

تعریف ۳. $p \leftrightarrow q$ به معنی $(p \to q) \wedge (q \to p)$ است.

قضیه ۱۱. $p \leftrightarrow \sim(\sim p)$

برهان: $\left[p \to (\sim p)\right] \wedge \left[\sim(\sim p) \to p\right]$ (قضیه ۱۰)

$p \leftrightarrow \sim(\sim p)$ (تعریف ۳)

(این همان قانون نفی ثانی است).

از آنجا که هدف از بحث فوق صرفاً ارائه ایده‌ای از طبیعت و ماهیت حساب گزاره‌ها است و بحث کاملی از این حساب در این مختصر نمی‌گنجد، ما در اینجا به بیان چند قضیه دیگر از این حساب بسنده می‌کنیم.

قضیه ۱۲. $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \to q)$

قضیه ۱۳. $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

قضیه ۱۴. $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(p \to \sim q)$

قضیه‌های ۱۲، ۱۳، ۱۴ هم‌ارزی منطقی بین رابط‌های عاطف، فاصل و شرطی را نشان می‌دهند.

قضیه ۱۵. $(\sim p \to p) \to p$

این قضیه نوعی از استدلال را، که در آن حکم p بدین نحو اثبات می‌شود که نادرستی p مستلزم p است، تأیید می‌کند.

قضیه ۱۶. $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

این قضیه قانون عکس نقیض را تأیید می‌کند. این قانون ما را مجاز می‌کند تا بجای اثبات $p \to q$ حکم $\sim q \to \sim p$ را ثابت بکنیم.

قضیه ۱۷. $\left[(p \to q) \wedge \sim q\right] \to \sim p$

این قضیه بیان می‌کند که هرگاه p مستلزم q بوده و q نادرست باشد، p نادرست است.

قضیه ۱۸. $(p \vee q) \wedge \sim q \to p$

این قضیه مدعی است که هرگاه p یا q درست بوده و q نادرست باشد، آنگاه p درست است.

قضیه ۱۹. $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$

قضیه ۲۰. $q \to (p \to q)$

قضیه ۲۱. $\sim p \to (p \to q)$

قضیه ۲۰ بیان می‌کند که یک گزاره درست از هر گزاره‌ی p نتیجه می‌شود و قضیه‌ی ۲۱ مبین آن است که یک گزاره‌ی نادرست p هر گزاره‌ی دیگر q را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۲۲. $\sim (p \wedge \sim p)$

این قضیه همان قانون تناقض است که مبین نادرستی این بیان است که p و $\sim p$ هر دو نمی‌توانند درست باشند.

قضیه‌های فوق برای توضیح ماهیت کلی حساب گزاره‌ها کافی است. با این حال گرچه این حساب برای بیان دقیق آن دسته از استدلالات منطقی که در آن گزاره‌ها به‌عنوان کلیات تحلیل نشده مورد بحث‌اند کفایت می‌کند، روشن است که این حساب برای مقاصد کلی منطق ناکافی است. زیرا نوعی استنتاج منطقی وجود دارد که نه تنها برگزاره‌ها به عنوان یک کل استوار است، بلکه به محتوای درونی خود گزاره‌ها نیز بستگی دارد، مثلاً حساب گزاره‌ها قادر نیست رابطه منطقی قیاس[۱۷۷] کلاسیک ذیل را بیان کند:

همه‌ی انسان‌ها فناپذیر هستند.

---

[177]. Syllogism

سقراط انسان است.

بنابراین سقراط فناپذیر است.

دلیل این امر واضح است؛ استنتاجی که در این قیاس انجام می‌گیرد به روابط موضوع با قید در جملات مختلف قیاس بستگی دارد. نه آنکه تنها به گزاره‌های مورد بحث به‌عنوان کلیات تحلیل نشده.

تبصره: خصوصیت شایان توجه حساب گزاره‌ها در این است که این حساب در واقع مثالی از جبر بولی[۱۷۸] می‌باشد. برای توضیح این امر، عناصر a، b، c و ... از یک جبر بولی را به معنی گزاره تعبیر می‌کنیم. همچنین $\cup, \cap, ...$ به‌ترتیب به معنی $\vee, \wedge$ و نیز تساوی به معنی هم‌ارزی منطقی باشد. به علاوه فرض می‌کنیم عضو واحد u و صفر z متعلق به این جبر به ترتیب نمایشگر یک گزاره اتحاد منطقی و نیز نفی یک اتحاد منطقی باشند. با این تعبیرها، بنداشت‌های جبر بولی قضیه‌های زیر را حساب گزاره‌ها هستند:

$$B_1 : (a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a) \qquad (a \wedge b) \leftrightarrow (b \wedge a)$$

$$B_2 : (a \vee z) \leftrightarrow a \quad , \quad (a \wedge u) \leftrightarrow a$$

$$B_3 : \left[a \vee (b \wedge c)\right] \leftrightarrow \left[(a \vee b) \wedge (a \vee c)\right]$$

$$\left[a \wedge (b \vee c)\right] \leftrightarrow \left[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)\right]$$

$$B_4 : (a \vee \sim a) \leftrightarrow u \quad , \quad (a \wedge \sim a) \leftrightarrow z$$

دانشجویان به آسانی می‌توانند با استفاده از جدول‌های ارزش، تحقیق کنند که آیا این روابط در واقع برقرارند؟ چون بنداشت‌های جبر بولی قضیه (اتحاد منطقی) هستند، نتیجه می‌گیریم که حساب گزاره‌ها را می‌توان به‌عنوان مثالی از یک جبر بولی در نظر گرفت. نمایش حساب گزاره‌ها به‌عنوان نمادهای جبر بولی از اهمیت زیادی برخوردارند این امر بدین معنی است که قضیه‌ی جبر بولی منجر به یک قضیه متناظر از حساب گزاره‌ها می‌شود. برای مثال، قانون‌های دمورگان جبر بولی، یعنی:

$$\sim (a \cup b) = \sim a \cap \sim b \quad \text{و} \quad \sim (a \cap b) = \sim a \cup \sim b$$

---

178. Bolean algebra

متناظر قضیه‌های ذیل از حساب گزاره‌ها هستند:

$$\sim(a \vee b) \leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b) \quad \text{و} \quad \sim(a \wedge b) \leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$$

چون در جبر بولی اصل دوگانی[179] وجود دارد. یک اصل دوگانی متناظر در حساب گزاره‌ها برقرار است؛ این اصل بدین صورت است: هرگاه در هر اتحاد منطقی $m \leftrightarrow n$ که در آن m و n ترکیبات گزاره‌ای هستند که فقط شامل رابطه‌های عطفی، فصلی و نفی می‌باشند. عاطف و فاصل را با یکدیگر تعویض کنیم، باز یک اتحاد منطقی به‌دست می‌آوریم.

به عنوان مثال رابطه $(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a)$ در B_1 با تعویض $\wedge$ با $\vee$ حاصل شده است. لذا گوییم که این دو اتحاد دوگان هم هستند. همچنین هرگاه در B_3، $\vee$ را به $\wedge$ و $\wedge$ را به $\vee$ در سرتاسر آن تعویض کنیم به‌دست می‌آید از رابطه $a \wedge b \leftrightarrow (b \wedge a)$

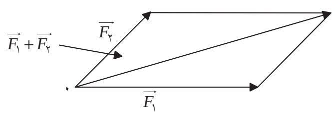
$$B_3' : a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$$

لذا B' دوگان B_3 است.

دوگان‌سازی هم به‌عنولن مفهوم و هم به‌صورت فرآیند در بیشتر شاخه‌های ریاضیات به‌ویژه در جبر و هندسه نقشی اساسی در توسعه و تکوین علمی دارد.

۴-۶ منطق‌های چندارزشی

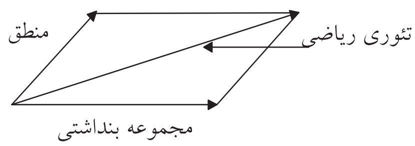
قانون متوازی‌الاضلاع در باب ترکیب نیروها مبین آن است که برآیند دو نیروی $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ ، که هم مبدأ باشند، برابر قطر متوازی‌الاضلاعی است که بر این دو نیرو ساخته می‌شود و هم مبدأ با آن‌ها است.



---

[179]. Duality principal

تشابه جالبی بین قانون متوازی‌الاضلاع و روش ریاضی وجود دارد. همچنان که نیروی برآیند با دو نیرو مؤلفه اولیه تعیین می‌گردد، یک تئوری ریاضی نیز با یک مجموعه بنداشتی و یک منطق مشخص می‌شود. یعنی، مجموعه احکامی که سازنده‌ی یک تئوری ریاضی هستند، از تأثیر متقابل یک مجموعه اولیه از گزاره‌ها (بنداشت‌ها) و مجموعه‌ی اولیه دیگری از گزاره ها که منطق یا قواعد عمل نامیده می‌شود، نتیجه می‌شوند. از زمان‌های نسبتاً دور، ریاضی‌دان‌ها از تغییرپذیری اولین مجموعه از گزاره‌ها، یعنی منطق، به‌عنوان امری مطلق و ثابت می‌نگریستند. در واقع برای عامه مردم و حتی دانشجویان باور کردنی تیست که شقّ دیگری از قوانین منطقی، به جزء آنچه ارسطو در قرن چهارم قبل از میلاد بیان کرده است وجود داشته باشد. احساس عمومی بر این است که قوانین منطق ارسطو به‌گونه‌ای با ساختار جهان در ارتباط بوده است و لذا با طبیعت استدلال انسان‌ها در آمیخته‌اند. این مطلق‌گرایی منطقی سرانجام در سال ۱۹۲۱ فرو ریخت. در اینجا نظر یکی از منطق‌دانان معاصر، آلونزوچرچ[۱۸۰] را ذکر می‌کنیم.



[هر تئوری ریاضی نتیجه یک منطق و یک مجموعه بنداشتی است. با تغییرپذیری هر یک از این دو، تئوری ریاضی نیز تغییر خواهد یافت]

ما هیچ وجهی از یکتایی یا درستی مطلق را به هیچ‌یک از سیستم‌های منطقی اطلاق نمی‌کنیم. ذوات منطق‌های صوری مجردات هستند که به‌خاطر استفاده‌ی آن‌ها در توصیف و سازماندهی به حقایق تجربی یا مشاهدات اختراع شده‌اند. ویژگی‌های این ذوات به‌گونه‌ای بی‌روح و خشک برای استفاده مورد نظر مشخص می‌شوند، این ویژگی‌ها به انتخاب دلخواه مخترع نیز بستگی دارند. در این مقام می‌توانیم وضع را با شباهتی که با هندسه سه‌بعدی در توصیف فضای

[180]. Alonzo Church

فیزیکی دارد روشن سازیم، هندسه سه‌بعدی واقعیتی است که به عقیده بسیاری وجود آن توجیه‌پذیر است. ذوات این هندسه به‌وضوح از ویژگی تجربه برخوردارند؛ صفحه‌های بدون ضخامت و نقاطی که هیچ ناحیه‌ای را در صفحه اشغال نمی‌کنند؛ خط‌های با طول نامتناهی، و چیزهای دیگر که در تجربه فیزیک نمی‌گنجد. با این وجود، این هندسه به فضای فیزیکی قابل اعمال است به این طریق که تناظر فوق‌العاده مفیدی بین قضیه‌های هندسه و حقایق شهودی در مورد اجسام مادی فضا برقرار است. در ساختن هندسه، کاربرد مورد نظر آن به فضای فیزیکی همچون راهنمایی ناخودآگاه در تعیین ویژگی‌هایی که ذوات مجرد خواهند داشت، به ما کمک می‌کند. لیکن این ویژگی‌ها را به‌طور کامل وابسته نمی‌کند. در نتیجه ممکن است، و در واقع چنین است، که بیش از یک سیستم صوری وجود دارد که استفاده از آن‌ها به‌عنوان منطق، قابلیت به‌کارگیری دارند. و در بین این سیستم‌ها ممکن است یکی بیش از دیگری خرسند کننده یا مناسب جلوه کند لیکن نمی‌توان ادعا داشت که یکی درست و دیگری غلط می‌باشند.

به خاطر داریم که هندسه‌های جدید در ابتدا از طریق رد بنداشت توازی اقلیدس عرضه شدند؛ همچنین جبر جدید در آغاز از راه رد قانون جابه‌جایی ضرب پدید آمد. به طریق مشابه، منطق‌های جدید، که به منطق‌های چندارزشی مشهورند، در آغاز از طریق رد قانون طرد شقّ وسط ارسطوپدید آمدند. برطبق این قانون گزاره‌ی فصلی $p\vee\sim p$ یک اتحاد منطقی است؛ به‌عبارت دیگر، در منطق ارسطویی p یا درست است یا نادرست و شقّ وسط یا شقّ ثانی برای درستی آن متصور نیست (مثل این است که گفته شود بین درستی و نادرستی شقّ ثانی وجود ندارد). زیرا در پایه‌گذاری این منطق، که در بخش پیش بدان اشاره‌ای داشتیم، هر گزاره فقط یکی از دو مقدار درستی، یعنی درستی یا نادرستی را داراست. از این حیث این منطق به منطق دوارزشی نیز مشهور است. در سال ۱۹۲۱، در یک مقاله کوتاه دوصفحه‌ای، جی لوکازیویچ[۱۸۱] یک منطق سه‌ارزشی را مورد بررسی قرار داد. در این منطق گزاره‌ی p می‌تواند یکی از سه ارزش ممکن ارزش‌های

---

181. J.Lukasiewicz

درستی را داشته باشد. کمی بعد از لوکازیویچ و مستقل از او، ای.ال پست[۱۸۲] یک منطق ارزشی را مورد مطالعه و بررسی قرار داد که در آن گزاره‌ی p می‌تواند یکی از m ارزش ممکن ارزش‌های درستی را بگیرد که m عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد. هرگاه m بزرگ‌تر از ۲ باشد، این منطق را منطق چندارزشی یا منطق چند مقداری می‌نامیم. مطالعه و تحقیق دیگری از منطق‌های m ارزشی توسط لوکازیویچ و تارسکی[۱۸۳] در سال ۱۹۳۰ انجام گرفت. سپس در سال ۱۹۳۲ سیستم‌های mارزشی توسط اچ.غایچن باخ[۱۸۴] به منطق بی‌نهایت ارزشی تعمیم داده شد که در آن گزاره‌ی p می‌تواند یکی از بی‌نهایت ارزش ممکن را بگیرد. نباید تصور کرد که همه‌ی منطق‌های جدید از آن نوعی هستند که در بالا ذکر شد. برای مثال، ای.هیتینگ[۱۸۵] یک منطق نمادی دوارزشی را بنا نهاد تا بتواند به فلسفه‌ی ریاضی‌دانان شهودگرا اعمال کند. این منطق با منطق ارسطویی در این نکته اختلاف دارد که در همه‌جا قانون طرد شق وسط یا قانون نفی ثانی را قبول ندارد. این‌گونه منطق‌ها را منطق‌های غیرارسطویی می‌نامند. در واقع، منطق نمادی دو مقداری اعمال شده در کتاب اصول ریاضیات راسل و وایتهد یک منطق غیرارسطویی است: این منطق با منطق ارسطویی در تعبیر و معینی استلزام منطقی تفاوت دارد.

همانند هندسه‌های غیراقلیدسی، ثابت شده است که منطق‌های غیرارسطویی نیز دارای کاربرد هستند. غایچن باخ در واقع منطق بی‌نهایت ارزشی خود را به‌عنوان پایه‌ای برای تئوری ریاضی احتمالات وضع نمود. در سال ۱۹۳۳ اف. سویسکی[۱۸۶] دریافت که منطق‌های چندارزشی را می‌توان در تئوری کوانتوم فیزیک مدرن به‌کار گرفت. تفصیل و جزئیات چنین کاربردی به توسط گرت بیرک‌هوف[۱۸۷]، جی.فون نویمان[۱۸۸] و اچ. غایچن باخ عرضه شده است. نقشی که منطق‌های غیرارسطویی در گسترش آتی ریاضیات

---

182. E.L. Post

183. A. Tarski

184. H. Reichenbach

185. A. Heyting

186. F. Zwicky

187. Garrett Birkhoff

188. J. Von Neumann

می‌توانند داشته باشند معین نیست؛ لیکن حائز علاقه‌مندی است؛ به‌کارگیری منطق نمادی هیتینگ به ریاضیات شهودی نشان می‌دهد که منطق‌های جدید از نظر ریاضی با ارزش هستند. بررسی و مطالعه کامل منطق‌های چندارزشی در این مختصر ممکن نیست لیکن می‌توانیم ایده‌ای از اینکه یک منطق چندارزشی چگونه منطقی است ارائه کنیم. برای سهولت یک منطق سه‌ارزشی را توضیح می‌دهیم و در این راستا سعی می‌کنیم با تعمیم بعضی از مفاهیم منطق دوارزشی مأنوس که در بخش پیش شرح داده شد منطق‌های سه‌ارزشی را بسازیم.

روش جدول‌های ارزشی را به‌کار می‌گیریم و لذا کار را با جدول ارزش رابط عاطف آغاز می‌کنیم. قبل از هر چیز جدول ارزش عاطف را برای منطق دوارزشی تکرار می‌کنیم، این جدول را به‌صورت جدول ضربی شکل نمایش می‌دهیم.

		q	
	$\wedge$	T	F
p	T	T	F
	F	F	F

جدول ۶-۱

در ستون سمت چپ ارزش‌های درستی ممکن برای گزاره‌ی p در سطر فوقانی جدول ارزش‌های درستی ممکن برای گزاره‌ی q نوشته شده‌اند. اینک با توجه به این جدول در هر خانه از سمت راست ارزش p که زیر خانه ارزش q باشد ارزش $p \wedge q$ مشخص شده است. بنابر تعریف، ارزش درستی $p \wedge q$ فقط در حالتی درست است که p و q درست باشند. لذا در خانه سمت چپ و فوقانی T و بقیه جاها F درج گردیده است. قابل ذکر است این جدول به طریق منحصر به فردی به استناد تعریف $p \wedge q$ مشخص می‌شود.

اکنون به منطق سه‌ارزشی می‌پردازیم و قرار می‌گذاریم که ترکیب عطفی $p \wedge q$ را فقط وقتی درست انگاریم که هر دوی p و q درست باشند. سه مقدار ارزشی ممکن برای یک گزاره را به T، ؟ و F نشان داده و به ساختن جدول ارزش همچون جدول ۶-۲ می‌پردازیم.

بنابر توافق انجام شده در مورد معنی $p \wedge q$، در خانه سمت چپ فوقانی باید T درج گردد و هیچ خانه‌ی دیگری از این جدول نمی‌تواند مقدار T داشته باشد. چون هشت خانه باقی‌مانده و هر یک را می‌توان با دو راه ممکن، یعنی یا با F و یا با ؟، تکمیل کرد. کلاً $۲^۸ = ۲۵۶$ راه ممکن برای تکمیل هشت خانه‌ی باقی‌مانده وجود دارد.

نتیجه می‌گیریم که به تعداد ۲۵۶ راه مختلف برای ساختن جدول ارزش عاطف در یک منطق سه مقداری وجود دارد.

جدول‌های ۶–۳ (الف و ب) دو تا از این ۲۵۶ جدول ارزش عاطف را در یک منطق سه‌ارزشی نمایش می‌دهد.

q

	$\wedge$	T	؟	F
p	T	T		
	؟			
	F			

جدول ۶–۲

$\wedge$	T	؟	F
T	T	؟	F
؟	؟	؟	؟
F	F	؟	F

جدول ۶–۳ (ب)

$\wedge$	T	؟	F
T	T	؟	F
؟	؟	؟	F
F	F	F	F

جدول ۶–۳ (الف)

جدول ارزش شکل (الف) همان منطقی است که لوکازیویچ، پست و جی.بی. روسر طرفدار آن بودند و چنین ساخته می‌شود که قرار بگذاریم که ؟ از T و F از ؟ نادرست‌تر باشند و $p \wedge q$ همان‌قدر نادرست باشد که دو عامل آن نادرست باشند ارزش $p \wedge q$ برحسب ارزش نادرستی دو عامل آن مشخص می‌گردد. جدول ارزش جدول (ب) همان منطقی است که دی.ای.بوخوار[۱۸۹] طرفدار آنند. این‌گونه تشکیل می‌شود که ؟ را به معنی «تصمیم‌ناپذیر» تفسیر کرده و قرار بگذاریم که هرگاه یکی از q یا p تصمیم‌ناپذیر باشد، $p \wedge q$ تصمیم‌ناپذیر است.

اکنون جدول ارزش رابط نفی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تنها محدودیت کار از این قرار است که وقتی p درست باشد، $\sim p$ درست نیست و وقتی p نادرست باشد، $\sim p$ نادرست نیست (این از تعریف نفی مورد انتظار است). در حالی‌که همین محدودیت، در منطق سه‌ارزشی مجاز می‌دارد. جدول‌های ۶–۴ (الف و ب) دو جدول

---

[189]. D. A. Boovar

ارزش ممکن را نشان می‌دهد. جدول ارزش، جدول۶–۴ (الف) بر این فرض استوار است که چون در منطق دوارزشی $\sim(\sim p)$ همان p است، در منطق سه‌ارزشی باید $\sim\{\sim(\sim p)\}$ را برابر p اختیار کنیم. جدول ارزش، جدول ۶–۴ (ب) بر این فرض استوار است که $\sim(\sim p)$ همان p است.

p	$\sim p$
T	؟
؟	F
F	T

جدول ۶–۴ (الف)

p	$\sim p$
T	F
؟	؟
F	T

جدول ۶–۴ (ب)

اینک جدول ارزش هر یک از رابط‌های منطقی باقی‌مانده را می‌توان تشکیل داد بدین‌گونه که این رابط‌ها را می‌توانیم برحسب رابط عاطف و نفی تعریف کنیم چون عاطف و نفی اعمالی مستقل از هم هستند، در حالی‌که، همچنان که ملاحظه کرده‌ایم، اعمال دیگر به این دو بستگی دارند، نتیجه می‌گیریم که در مجموع $(۲۵۶)(۱۲)=۳۰۷۲$ منطق سه‌ارزشی ممکن وجود دارد. علی‌الظاهر یک منطق چندارزشی تعداد زیادی ساختار ممکن را خواهد داشت.

در بعضی از مطالعات منطق‌های چندارزشی به گزاره p، عددی حقیقی چون $t(p)$ متناظر می‌گردد که بین صفر و یک است و آن را ارزش درستی می‌نامیم. در چنین شرایطی ارزش درستی یک گزاره را می‌توان به مثابه‌ی احتمال آنکه این گزاره درست باشد تعبیر نمود، و دو گزاره که دارای یک ارزش درستی باشد هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند. ارزش درستی ۱ به معنی درست و ارزش درستی o به معنی نادرست می‌باشد. نفی را می‌توان برحسب ارزش درستی تعریف کرد:

$$t(\sim p)=۱-t(p)$$

لذا، در یک منطق سه‌ارزشی، ارزش‌های درستی را می‌توان o , ۱/۲ , ۱ اختیار کرد. هرگاه p دارای ارزش درستی ۱/۲ باشد $\sim p$ نیز دارای ارزش درستی ۱/۲ است و p با

نفی خود هم‌ارز منطقی است. بدین‌لحاظ ملاحظه می‌شود که ارتباط نزدیکی بین منطق‌های چندارزشی و تئوری احتمال وجود دارد.

شاید بحث و مطالعه‌ی مختصر فوق به‌قدر کافی ایده‌ای از ماهیت منطق‌های غیرارسطویی را به خواننده روشن کند. چیزی که ماحصل آن است، این اصل شایان توجه در باب کشف و پیشرفت علمی است که شک سازنده در باب دانش سنتی اساس بسیاری از کشفیات علمی است. وقتی از انیشتین سؤال شد که چگونه تئوری نسبیت را اختراع کرده است پاسخ داد: «یک اصل علمی را مورد سؤال و کاوش قرار داده‌ام». هامیلتون و کیلی[۱۹۰] بنداشت جابه‌جایی ضرب را مورد تردید قرار دادند. خواجه نصیرالدین طوسی، لباچوفسکی و بویوئی نیز اصل توازی اقلیدس را مورد سؤال قرار دادند. (خواجه نصیرالدین طوسی همتایی برای آن نیافت در حالی‌که آن دو توانستند اصل‌هایی جانشین آن سازند). مشابهاً، در حوزه‌ی علوم، کپرنیک این اصل را که زمین مرکز منظومه شمسی است مورد تردید قرار داد؛ گالیله این اصل را که اجسام سنگین‌تر سریع‌تر سقوط می‌کنند، مورد نفی قرار داد؛ انیشتین این اصل را که از دو حادثه متفاوت یکی مقدم بر دیگری است مورد تردید قرار داد. این روش نفی و تردید بنداشت‌ها و اصول به یکی از متداول‌ترین راه‌های پیشرفت ریاضیات تبدیل شده است. این پدیده در بطن گفته‌ی قصارگونه‌ی جرج کانتور قرار داد: «جوهره‌ی ریاضیات در آزادی آن نهفته است»[۱۹۱].

۶-۵ خلاصه مطالب فصل ششم

۱. در منطق نمادی، عبارت‌های اولیه با نمادها و علایمی نشان داده می‌شوند که عاری از سوءتفاهم‌هایی است که در زبان معمولی معمولاً مشهود است. همچنین در منطق نمادی، روابط متنوع بین احکام، مجموعه‌ها، رده‌ها و نظایر آن‌ها، به‌وسیله فرمول‌هایی نمایش داده می‌شوند. از لایبنتیز به‌عنوان اولین کسی که به‌طور جدی در پی به‌کار بردن

---

[190] Hamilton و Cayley از جبریست‌های معروف هستند.

[191] البته، آزادی خلق ریاضیات محدودیت‌هایی دارد که در مباحث فلسفه ریاضی بدان پرداخته میشود (ر.ک. [۲].

منطق نمادی بوده است نام می‌برند. جرج بول، آگوست دمورگان و گوتلُب فِرِگه‌از دیگر پیشروان بسط منطق ریاضی به شمار می‌آیند.

۲. قانون منطقی، ترکیبی است که صرف‌نظر از هر نوع ارزش‌دهی به متغیرهای گزاری آن، همواره درست باشد. لذا هرگاه m و n دو گزاره‌ی هم‌ارز باشند، گزاره‌ی $m \leftrightarrow n$ یک قانون منطقی است. از جمله قانون‌های منطقی (منطق معمولی دوارزشی) قانون‌های $p \leftrightarrow \sim(\sim p)$ (قانون نفی ثانی)، و $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ (قانون عکس نقیض)، و $p \vee \sim p$ (قانون طرد شق وسط)، را می‌توان نام برد.

۶–۶ مسائل

۱. با استفاده از جدول ارزش، قوانین منطقی ارائه شده در تابلوهای صفحه ۱۶۸ را ثابت کنید.

۲. با استفاده از جدول ارزش، تعیین کنید که کدام‌یک از احکام زیر اتحاد منطقی هستند:

الف) $(p \wedge q) \to p$

ب) $(p \vee q) \to p$

ج) $(\sim p \to p) \leftrightarrow p$

د) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

هـ) $[p \to (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (p \to r)]$

و) $[p \wedge (q \vee r)] \to [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$

ز) $[(p \wedge \sim q) \to \sim p] \leftrightarrow (p \to q)$

ح) $[(p \to q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$

۳. احکام زیر را برحسب نهادهای عاطف و نفی بیان کنید.

الف) $(p \vee q) \to p$

ب) $q \to (p \vee q)$

۴. با استفاده از جدول‌های ارزش نشان دهید که هر زوج از احکام زیر هم‌ارز منطقی می‌باشند.

الف) $\sim p \vee \sim q$ و $\sim(p \wedge q)$

ب) $\sim(p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$

ج) $\sim(p \leftrightarrow q)$ و $p \wedge \sim q$

د) $\sim(p \leftrightarrow q)$ و $p \leftrightarrow \sim q$

هـ) $\sim(p \leftrightarrow q)$ و $\sim p \leftrightarrow q$

۵. نفی هر یک از احکام زیر را تشکیل داده و آن را به نحوی تحویل کنید که در آن علامت نفی فقط بر متغیرهای گزاره‌ای p، q، r عمل کند.

الف) $\sim p \rightarrow q$

ب) $(p \leftrightarrow q) \wedge r$

ج) $(p \wedge q) \vee r$

د) $p \rightarrow \sim q$

هـ) $\sim p \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

و) $(p \vee q) \wedge p$

۶. p/q را به معنی $\sim p \vee \sim q$ اتخاذ کنیم.

الف) هم‌ارزی منطقی p/p و $\sim p$ را نشان دهید.

ب) هم‌ارزی منطقی $(p/p)|(q/q)$ و $p \vee q$ را ثابت کنید.

ج) $\wedge$ را برحسب $/$ بیان کنید.

د) $\rightarrow$ را برحسب $/$ بیان کنید.

هـ) $\leftrightarrow$ را برحسب $/$ بیان کنید.

۷. قواعد مفید زیر را که در آن اتحادهای جدیدی از اتحادهای مفروض استخراج می‌شود، ثابت کنید.

$R_۵$: اگر $m \vee m$ یک اتحاد منطقی باشد، m یک اتحاد منطقی است.

$R_۶$: اگر m یک اتحاد منطقی و p عبارت گزاره‌ای دلخواهی باشد، آنگاه $p \vee m$ یک اتحاد منطقی است.

$R_۷$: هرگاه $m \vee n$ یک اتحاد منطقی باشد، $n \vee m$ یک اتحاد منطقی است.

$R_۸$: هرگاه $m \rightarrow n$ یک اتحاد منطقی و p یک عبارت گزاره‌ای دلخواهی باشد، آنگاه $(p \vee m) \rightarrow (p \vee n)$ یک اتحاد منطقی است.

۸. الف) این اتحاد منطقی زیر را ثابت کنید:

$$(p \to \sim q) \to (q \to \sim p)$$

۹. روابط زیر از جبر بولی را به اتحادهای منطقی در حساب گزاره‌ها تبدیل کنید:

الف) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

ب) $a \cap b = b \cap a$

ج) $a \cap a = a$

د) $a \cap (a \cup b) = a$

۱۰. همتای رابطه شرطی $a \to b$ از حساب گزاره‌ها در جبر بولی چیست؟

۱۱. برای هر یک از اتحادهای منطقی زیر، با استفاده از اصل دوگانی یک اتحاد منطقی دیگر پیدا کنید.

الف) $\left[(p \wedge \sim p) \vee q\right] \leftrightarrow q$

ب) $(p \vee q) \to \sim (\sim p \wedge \sim q)$

۱۲. تحقیق کنید که در یک منطق سه‌ارزشی ۱۲ جدول ارزش ممکن است برای رابط نفی وجود دارد.

۱۳. فرض کنیم که بخواهیم رابط شرطی $p \to q$ را با این محدودیت تعریف کنیم که وقتی p و $p \to q$ هر دو درست باشند، آنگاه q نیز درست است. چه تعداد از چنین رابط‌های شرطی در

الف) منطق دوارزشی

ب) منطق سه‌ارزشی وجود خواهد داشت؟

۱۴. نشان دهید که عبارت:

«هر بیان کلی استثنائات خود را داراست» متناقض خودش است.

منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد. و. ایوز، ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۸۵، تهران.

۲. آشنایی با فلسفه ریاضی، دکتر محمدحسن بیژن زاده، دانشگاه پیام نور،نشر دوم، ۱۳۸۶، تهران.

3. N. Bourbaki, Elements of the history of mathematics, *New York: Springer-Verlag*, 1993.

4. D.M. Burton, The history of mathematics, An Introduction. *Sixth Edition, McGraw-Hill Companies, Inc.*, 2007.

5. R.Cook, The history of mathematics: A brief course, 2nd ed., *New York: Wiley*, 2005.

6. T. Tymoczko, New directions in the philosophy of mathematics, *Princeton University Press*, 1998.