

سوال‌ات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۳/۲۷		
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		
ردیف	سوال‌ات	نمره	

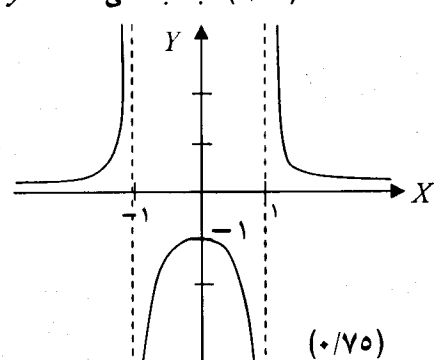
۱	مشتق y نسبت به x را از رابطه $x^3y + 2y^4 - \sqrt{xy} = 0$ پیدا کنید.	۱/۲۵
۲	تابع $f(x) = x^3 + 2$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی خط مماس بر معکوس این تابع را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر f^{-1} بنویسید.	۱/۵
۳	یک کارخانه‌ی پارچه بافی برای تولید x متر پارچه $C(x) = 40000 + 10x + 0.005x^2$ تومان هزینه دارد. (الف) هزینه‌ی نهایی برای تولید x متر پارچه را به دست آورید. (ب) هزینه‌ی متوسط برای تولید ۱۰۰ متر پارچه را محاسبه نمایید.	۱/۲۵
۴	(الف) نقطه‌ی بحرانی را تعریف کنید. (ب) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.	۲
۵	ثابت کنید برای هر $x \in [-1, 1]$ داریم: $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$.	۱
۶	تابع $y = x + \frac{1}{x}$ در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است؟	۱/۵
۷	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = x^4 + 4x$ را در صورت وجود پیدا کنید.	۱/۵
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.	۲
۹	با استفاده از قاعده‌ی هویتنال مقدار حد رو به رو را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\sin \frac{1}{x}}$	۱
۱۰	دیفرانسیل تابع $f(x) = \frac{4}{3}x^3$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بیابید. سپس مقدار تقریبی افزایش f هنگامی که x از ۱ به 1.02 افزایش می‌یابد را به دست آورید.	۱
۱۱	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق $\frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{4-x^2} dx$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۲	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. (الف) $\int_{-1}^1 (x - x) dx$ (ب) $\int (x^2 + 1) \sin(x^3 + 3x) dx$	۱/۷۵
۱۳	نشان دهید $\frac{x}{4-x^2}$ تابع اولیه‌ی تابع $\frac{x^2 + 4}{(4-x^2)^2}$ است.	۰/۷۵
۱۴	بدون محاسبه‌ی انتگرال، نامساوی $\int_0^2 (x^2 - 2x) dx \leq 0$ را ثابت کنید.	۲
۱۵	ثابت کنید اگر f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، عدد حقیقی c ، $a \leq c \leq b$ وجود دارد که $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.	۰/۷۵

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۲۷ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱/۲۵	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2y - \frac{y}{2\sqrt{xy}})(0/5)}{(x^3 + 8y^3 - \frac{x}{2\sqrt{xy}})(0/75)}$	۱												
۱/۵	$a^3 + 2 = 1 \quad (0/25) \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1 \quad (0/25) \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 \quad (0/25) \quad , \quad f'(-1) = 3 \Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(1)}_{(0/25)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3} \quad (0/25) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad (0/25)$	۲												
۱/۲۵	<p>الف) $C'(x) = 10 + 0.01x \quad (0/5)$</p> <p>ب) $\frac{C(100)}{100} = \frac{(40000 + 1000 + 50)(0/25)}{100} = 410/5 \quad (0/25)$</p>	۳												
۲	<p>الف) نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f نامند هرگاه $f'(c)$ تعریف نشده باشد یا $f'(c) = 0 \quad (0/75)$</p> <p>ب) $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \quad (0/5) \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (0/5) \Rightarrow \{-1, 1\}$ نقاط بحرانی $(0/25)$</p>	۴												
۱	<p>برای تابع $f(x) = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x$ داریم $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (0/5)$. طبق نتیجه ای از قضیه‌ی مقدار میانگین تابع f روی بازه‌ی $[-1, 1]$ ثابت است $(0/25)$. بنابراین $\exists k \in \mathbb{R}, \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = k$</p> <p>از طرفی برای $x = 0$ $k = \text{Arc sin } 0 + \text{Arc cos } 0 = \frac{\pi}{2} \quad (0/25)$</p>	۵												
۱/۵	$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad (0/25) \xrightarrow{f'(x)=0} x = \pm 1$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> <td>$+$</td> </tr> </table> <p>تابع در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی $(0/5)$ و در بازه‌ی $(-1, 1)$ و در بازه‌ی $(0, 1)$ نزولی است $(0/5)$.</p>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		$+$	0	$-$	$+$	۶
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$									
y'		$+$	0	$-$	$+$									
۱/۵	$y' = 4x^3 + 4 \quad (0/25)$ $y'' = 12x^2 \quad (0/25) \xrightarrow{y''=0} x = 0 \quad (0/25)$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y''</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>\cup</td> <td>0</td> <td>\cup</td> </tr> </table> <p>جهت تقعر همواره رو به بالاست $(0/25)$ و نقطه‌ی عطف ندارد $(0/25)$</p>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y''	$+$	0	$+$	y	\cup	0	\cup	۷
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
y''	$+$	0	$+$											
y	\cup	0	\cup											

ادامه در برگه‌ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۲۷ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۲	<p>$x = -1, x = 1$ مجانبهای قائم (۰/۲۵) و $y = 0$ مجانب افقی (۰/۲۵)</p> $y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{y'=0} x=0$ <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>$+$</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> <td>$-$</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$0 \rightarrow +\infty$</td> <td>$+\infty \rightarrow -\infty$</td> <td>$-\infty \rightarrow -1$</td> <td>$-1 \rightarrow +\infty$</td> <td>$+\infty \rightarrow 0$</td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p>  <p>(۰/۷۵)</p>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	y	$0 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	۸
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$															
y	$0 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow 0$															
۱	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{(\frac{-1}{x^2}) \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{\cos \frac{1}{x}} = 0 \quad (۰/۲۵)$ <p>(۰/۲۵)</p>	۹																		
۱	<p>الف) $dy = 4x^2 dx \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{x=1} dy = 4 dx \quad (۰/۲۵)$ ب) $dx = 0.02 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \Delta y \approx dy = 0.08 \quad (۰/۲۵)$</p>	۱۰																		
۰/۷۵	$\frac{-\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4-x^2} dx}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{-1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{4-t} \quad (۰/۲۵)$	۱۱																		
۱/۷۵	<p>الف) $\int_{-1}^0 (x- x) dx + \int_0^1 (x- x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 0 dx = x^2 \Big _{-1}^0 = -1 \quad (۰/۲۵)$</p> <p>ب) $\frac{1}{3} \int (3x^2 + 3) \sin(x^3 + 3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 3x) + c \quad (۰/۵)$</p>	۱۲																		
۰/۷۵	$\left(\frac{x}{4-x^2} \right)' = \frac{(4-x^2) - x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2+4}{(4-x^2)^2} \quad (۰/۲۵)$	۱۳																		
۲	<p>$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{f'(x)=0} x=1 \quad (۰/۲۵)$, $f(2) = f(0) = 0$, $f(1) = -1 \quad (۰/۵)$</p> <p>مینیمم مقدار تابع برابر ۱- (۰/۲۵) و ماکسیمم مقدار برابر صفر است (۰/۲۵). لذا داریم</p> $-1 \leq \frac{1}{2-0} \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \leq 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow -2 \leq \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \leq 0 \quad (۰/۲۵)$	۱۴																		
۰/۷۵	<p>چون $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ بین دو مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع است (۰/۲۵)، بنابر قضیه ی مقدار میانی $\exists c \in [a, b] \quad (۰/۲۵)$ که</p> $f'(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (۰/۲۵)$	۱۵																		
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام																			