

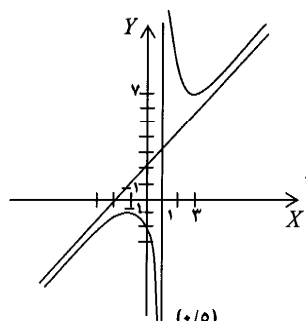
باسمه تعالی

سوال‌ات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی			
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰			
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>			
ردیف	سوال‌ات	نمره	

۱	معادله ی خط قائم بر نمودار منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ را در نقطه ی $A(4,1)$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱/۵
۲	تابع $f$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(-1)$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۳	فرض کنید بادکنکی کروی مملو از هوا شعاعی برابر ۱۰ سانتی متر دارد. اگر ۱ سانتی متر دیگر به شعاع آن افزوده شود، (الف) آهنگ تغییر حجم چقدر است؟ (ب) میزان واقعی تغییر حجم را حساب کنید.	۱/۲۵
۴	جدول رفتار تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ را رسم نمایید و بازه هایی که تابع در آن صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.	۱/۲۵
۵	ثابت کنید اگر تابع $f$ روی بازه ی $I$ مشتق پذیر بوده و $f'$ روی $I$ برابر مقدار ثابت صفر باشد، آنگاه $f$ روی $I$ ثابت است.	۱
۶	به کمک آزمون مشتق دوم، ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $g(x) = x + \frac{1}{x}$ را بیابید.	۱/۲۵
۷	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$ را رسم کنید.	۲
۸	با استفاده از قاعده ی هوییتال حد زیر را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2}$	
۹	به کمک دیفرانسیل، مقدار تقریبی $(\pi/9)^5$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۰	اگر بخواهیم ریشه ی مثبت معادله ی $2x^2 - 3 = 0$ را با روش نیوتن و تقریب اولیه ی $x_1 = 1$ بیابیم، مقدار $x_2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۱	مقدار تقریب اضافی مساحت زیر منحنی $f(x) = x^2 - 1$ را در بازه ی $[2, 4]$ برای $n = 4$ به دست آورید.	۱/۵
۱۲	نامساوی $\frac{2}{3} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{21}{10}$ را ثابت کنید.	۱/۵
۱۳	انتگرال های زیر را محاسبه کنید. (الف) $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x}} dx$ (ب) $\int_{-1}^1 x^2 [x] dx$	۲
۱۴	بدون محاسبه ی انتگرال، مشتق زیر را به دست آورید. $\frac{d}{dt} \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{4 + x^2} dx$	۱
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۱۰/۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۱۳۹۰-۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱/۵	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} \Rightarrow m = -\frac{1}{y} \Rightarrow m' = 2(x-4) \Rightarrow y-1 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x-7$	۱																		
۱/۲۵	$\frac{a-1}{a+5} = -1 \Rightarrow a = -2 \quad (۰/۲۵) \quad , \quad f'(x) = \frac{6}{(x+5)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{2} \quad (۰/۲۵)$	۲																		
۱/۵	<p>الف) <math>V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V'(r) = 4\pi r^2 \Rightarrow V'(10) = 400\pi \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>ب) <math>V(11) - V(10) = \frac{4}{3}\pi(11)^3 - \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{4}{3}\pi(1331-1000) \quad (۰/۲۵)</math></p>	۳																		
۱/۵	$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (۰/۲۵)$ <p>تابع در بازه ی <math>(-\infty, 0)</math> صعودی <math>(۰/۲۵)</math></p> <p>تابع در بازه ی <math>(0, +\infty)</math> نزولی <math>(۰/۲۵)</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>۰</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>۰</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۰</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>(۰/۲۵)</math></p>	x	$-\infty$	۰	$+\infty$	y'	+	۰	-	y	۰	۱	۰	۴						
x	$-\infty$	۰	$+\infty$																	
y'	+	۰	-																	
y	۰	۱	۰																	
۱	<p>نقطه ی دلخواه <math>a \in I</math> را اختیار می کنیم. نشان می دهیم که برای هر <math>x \in I</math>، <math>f(x)</math> برابر <math>f(a)</math> و در نتیجه ثابت است. فرض کنیم <math>x &gt; a</math>. تابع <math>f</math> روی بازه ی <math>[a, x]</math> در شرایط قضیه ی مقدار میانگین صدق می کند <math>(۰/۲۵)</math>. پس <math>\exists c \in (a, x)</math> و <math>f'(c) = 0</math> و <math>f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)</math> <math>(۰/۲۵)</math>. لذا <math>f(x) = f(a)</math> <math>(۰/۲۵)</math>.</p>	۵																		
۱/۷۵	$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (۰/۲۵) \quad , \quad g''(x) = \frac{2}{x^3} \quad (۰/۲۵)$ <p>چون <math>g''(1) = 2 &gt; 0</math> تابع در <math>x = 1</math> مینیمم دارد <math>(۰/۲۵)</math> و <math>g''(-1) = -2 &lt; 0</math> تابع در <math>x = -1</math> ماکسیمم دارد <math>(۰/۲۵)</math>.</p>	۶																		
۲	<p><math>x = 1</math> و <math>y = x + 2 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow y = x + 2</math> <math>(۰/۲۵)</math> مجانب مایل <math>(۰/۲۵)</math></p> $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 3, -1 \quad (۰/۲۵)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>3</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>۰</td> <td>-</td> <td>۰</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-1</td> <td><math>+\infty</math></td> <td>7</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>(۰/۲۵)</math></p>  <p style="text-align: right;"><math>(۰/۵)</math></p>	x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	y'	+	۰	-	۰	+	y	$-\infty$	-1	$+\infty$	7	$+\infty$	۷
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$															
y'	+	۰	-	۰	+															
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	7	$+\infty$															

ادامه در برگه ی دوم

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۱۰ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (0/25)^H}{6x \cdot (0/25)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (0/25)}{6 \cdot (0/25)} = 0 \cdot (0/25)$	۱/۲۵
۹	$f(x) = x^5, x=1, \Delta x = -0/1 \cdot (0/25), f'(x) = 5x^4 \cdot (0/25) \Rightarrow f(0/9) = f(1) + (-0/1) f'(1) \cdot (0/25)$ $(0/9)^5 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \cdot (0/25)$	۱/۲۵
۱۰	$f'(x) = 4x \cdot (0/25), x_T = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_T = 1 - \frac{(-1) \cdot (0/25)}{4 \cdot (0/25)} = 1/25 \cdot (0/25)$	۱
۱۱	$\Delta x = \frac{1}{4} \cdot (0/25), \sum_{n=1}^4 f(u_i) \Delta x = \frac{1}{4} \cdot \left( f\left(\frac{5}{4}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(4) \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{21}{4} + 8 + \frac{45}{4} + 16 \right) = \frac{25}{4} \cdot (0/25)$ (در صورتی که به جای (*) جدول محاسبات نیز آورده شد نیز بایم مورد نظر داده شود.)	۱/۵
۱۲	$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \cdot (0/25) & \text{مینیمم مقدار} \\ f(-\frac{1}{3}) = \frac{4}{9} \cdot (0/25) \\ f(\frac{2}{3}) = \frac{9}{5} \cdot (0/25) & \text{ماکزیمم مقدار} \end{cases}$ $1 \leq \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{9}{5} \cdot (0/25) \Rightarrow \frac{5}{6} \leq \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{21}{10} \cdot (0/25)$	۱/۵
۱۳	الف) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}}) dx = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} x^{1+\frac{2}{3}} + 2x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3\sqrt{x} + c$ ب) $\int_{-1}^0 x^2 [x] dx + \int_0^1 x^2 [x] dx = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3} x^3 \Big _{-1}^0 = -\frac{1}{3} \cdot (0/25)$	۲
۱۴	$\frac{d}{dt} \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{(-\sin t) \times \frac{1}{4+\cos^2 t}}{(0/25)} - \frac{\cos t \times \frac{1}{4+\sin^2 t}}{(0/25)}$	۱
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	