

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۳۹۰ / ۳ / ۲۹	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	سؤالات	نمره	

۱	معادله ی خط قائم بر منحنی $x^2 + 2x^2y^2 - 3y^2 = 0$ را در نقطه ی $A(-1, 1)$ روی منحنی بنویسید.	۱/۲۵
۲	تابع $f$ با ضابطه ی $f(x) = x^2 - 4x + 7$ را برای $x \geq 2$ در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(7)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۳	نقطه ی $P$ روی منحنی به معادله ی $y = \sqrt[3]{1+7x}$ حرکت می کند. در لحظه ای که $P$ روی نقطه ی $(1, 2)$ قرار دارد، اگر سرعت افزایش مؤلفه ی $x$ برابر با ۳ سانتی متر بر ثانیه باشد، سرعت تغییر مؤلفه ی $y$ را حساب کنید.	۱/۲۵
۴	طول نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{3x}{9+x^2}$ را در بازه ی $[0, 4]$ مشخص کنید.	۲
۵	برای هر دو عدد $a$ و $b$ که $a < b$ باشد نامعادله ی $ \sin b - \sin a  \leq  b - a $ را ثابت کنید.	۱
۶	مقادیر $a$ و $b$ را طوری بیابید تا نقطه ی $A(1, 2)$ نقطه ی عطف تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 4$ باشد.	۱/۵
۷	با استفاده از قاعده ی هوبیتال، حد تابع زیر را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$	
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 + 1}$ را رسم کنید.	۱/۷۵
۹	می خواهیم با استفاده از روش نیوتن، ریشه ی مثبت معادله ی $x^2 - 2 = 0$ را با تقریب اولیه ی $x_1 = 2$ پیدا کنیم. مقادیر $x_2$ و $x_3$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۰	برای تابع $f(x) = \sqrt[4]{x}$ : الف) دیفرانسیل $f$ را در نقطه ی $x = 81$ بیابید. ب) مقدار تقریبی افزایش $f$ هنگامی که $x$ از ۸۱ به ۸۳ افزایش می یابد چقدر است؟	۱
۱۱	مقدار تقریب نقصانی مساحت زیر منحنی $f(x) = 1 - x^2$ را در بازه ی $[-1, 1]$ و برای $n = 4$ محاسبه کنید.	۱/۷۵
۱۲	مقدار متوسط تابع $f(x) = 3x^2 + 2x$ را در بازه ی $[1, 2]$ محاسبه کنید و تعیین کنید در چه نقطه ای از این بازه مقدار تابع $f$ با مقدار متوسط تابع، برابر است.	۱/۵
۱۳	بدون محاسبه ی انتگرال، مشتق تابع $\int_{x^2}^3 (\sin \sqrt{t+1} - t) dt$ را محاسبه کنید.	۱
۱۴	انتگرال های زیر را محاسبه کنید.	۲
	الف) $\int (x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}) dx$ ب) $\int_{-1}^0 x x-1  dx$	
۲۰	موفق باشید.	جمع نمره

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۲۹	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	$y' = \frac{-(2x + 4xy^2)(0/25)}{(4x^2y - 6y)(0/25)} \Rightarrow m = -3 (0/25) \Rightarrow m' = \frac{1}{3} (0/25) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1) (0/25)$	۱/۲۵
۲	$(y, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, y) \in f \Rightarrow a^2 - 4a + y = y (0/25) \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ a = 4 & \text{ق ق ق} \end{matrix} (0/25)$ $f'(x) = 2x - 4(0/25) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{4} (0/25)$	۱/۵
۳	$y'(t) = \frac{y \times x'(t)(0/25)}{3\sqrt{(1+yx)^2}(0/5)} \Rightarrow y'(t_0) = \frac{y \times 3}{3\sqrt{(1+y \times 1)^2}(0/25)} = \frac{y}{4}(0/25)$	۱/۲۵
۴	$f(0) = 0$ $y' = \frac{27 - 3x^2}{(9 + x^2)^2} = 0 (0/25) \Rightarrow x = \pm 3 (0/25) \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2} (0/25) \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 & \text{طول مینیمم مطلق} \\ x = 3 & \text{طول ماکسیمم مطلق} \end{matrix}$ $f(4) = \frac{12}{25}$	۲
۵	<p>تابع <math>f(x) = \sin x</math> روی بازه ی <math>[a, b]</math> پیوسته و روی بازه ی <math>(a, b)</math> مشتق پذیر است. <math>(0/25)</math> لذا طبق قضیه ی مقدار میانگین</p> $\exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (0/25)$ <p>بنابراین <math> \sin b - \sin a  =  \cos c   b - a </math> <math>(0/25)</math> از آنجایی که <math> \cos c  \leq 1</math> بنابراین <math> \sin b - \sin a  \leq  b - a </math> <math>(0/25)</math></p>	۱
۶	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx (0/25)$ $f''(x) = 6ax + 2b (0/25) \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 (0/25) \Rightarrow a = 1 (0/25), b = -3 (0/25)$ $f(1) = 2 \Rightarrow a + b = -2 (0/25)$	۱/۵
۷	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 1 (0/25)$	۱/۲۵
۸	$D_f = R (0/25)$ $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ x }{x} = \pm 1$ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x \rightarrow +\infty \end{cases} \begin{cases} y = -x \\ x \rightarrow -\infty \end{cases} \text{مجانبه های افقی} (0/5)$ $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = 0$ $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x = 0 (0/25)$	۱/۲۵

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۲۹	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>y'</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr> <tr> <td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math></td><td><math>\searrow 1</math></td><td><math>\nearrow +\infty</math></td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(۰/۲۵)</p> </div> <div style="text-align: right;"> <p>ادامه ی پاسخ سؤال ۸</p> </div> </div>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$y'$	$-$	$0$	$+$	$y$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$											
$y'$	$-$	$0$	$+$											
$y$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$											
۱/۲۵	$f'(x) = 2x \quad (۰/۲۵)$ $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{4} = 1/2 \quad (۰/۲۵), \quad x_2 = 1/2 - \frac{0/25}{3} = 1/416 \quad (۰/۲۵)$	۹												
۱	<p>الف) <math>df = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} dx \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{x=1.8} df = \frac{1}{10.8} dx \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>ب) <math>dx = 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow</math> مقدار تقریبی افزایش <math>\approx \frac{1}{10.8} \times 2 = \frac{1}{5.4} \quad (۰/۲۵)</math></p>	۱۰												
۱/۷۵	$\Delta x = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵), \quad \sum_{i=1}^4 f(l_i) \Delta x = \frac{1}{4} \times (f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{4} (0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0) = \frac{3}{4} \quad (۰/۲۵)$	۱۱												
۱/۵	<p>مقدار متوسط <math>= \frac{1}{2-1} \int_1^2 (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 \Big _1^2 = 10 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 3x^2 + 2x = 10 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow</math></p> <p><math>x = \frac{5}{3}</math> ق ق (۰/۲۵)  <math>x = -\frac{5}{3}</math> غ ق (۰/۲۵)</p>	۱۲												
۱	$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^3 (\sin \sqrt{t+1} - t) dt = \frac{d}{dx} (- \int_2^{x^2} (\sin \sqrt{t+1} - t) dt) = (-2x) \times (\sin \sqrt{x^2+1} - x^2) \quad (۰/۲۵)$	۱۳												
۲	<p>الف) <math>\int (x^2 + 3x + x^{-2}) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x^{-1} + c \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>ب) <math>\int_{-1}^0 -x(x-1) dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + x) dx = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \Big _{-1}^0 = -\frac{5}{6} \quad (۰/۲۵)</math></p>	۱۴												
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر													