باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)** رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۱۲/۶
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir**

ردیف	سوالات	نمره
۱	ثابت کنید معکوس یک عدد منفی،عددی منفی است.	۱
۲	بازه ی $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ را به صورت یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز a و شعاع ε بنویسید.	۱
۳	ثابت کنید اگر دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن گاه حد آن یکتا است.	۲
٤	یکنوایی دنباله ی $\{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\}$ را بررسی کنید.	۱/۲۵
٥	نشان دهید سری $\sum_{k=۰}^{+\infty}\frac{۱}{k!}$ همگرا است.	۱/۵
٦	آیا سری $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۳k-۱}{۳k}$ همگراست؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۰/۷۵
۷	با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x\to -۱}\frac{(-۱)^{[x]}(x^۲-۱)}{x-۱}=۰$.	۱/۲۵
۸	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$ در نقطه ی $x=۰$ حد ندارد.	۱/۲۵
۹	حدود توابع زیر را بدون استفاده از هم ارزی و قاعده ی هوپیتال محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to ۰} x^۲[\frac{۱}{x^۲}]$ ب) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x-۲}$ ج) $\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x}{۱+x}\times Arc\tan x$	۲/۷۵
۱۰	نشان دهید حداقل یکی از ریشه های معادله ی $x^۳-۳x+۱=۰$ در بازه ی $[۰,۱]$ قرار دارد.	۱
۱۱	معادله ی کلیه ی مجانب های تابع $y=\frac{x^۳+۳}{x^۲-۲x}$ را بنویسید.	۱/۲۵
۱۲	نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{۳-\sqrt{x+۹}}{x+۹}$ را در دامنه اش تعیین کنید.	۱
۱۳	معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $y=x^۲-۵x$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر منحنی به دست آورید.	۱/۲۵
١٤	اگر $g(x)=x^۳-۱$ و $f'(x)=\sqrt{۳x+۱۶}$ باشد، مقدار عددی $(fog)'(۱)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید اگر تابع g در نقطه ی a مشتق پذیر باشد، آن گاه تابع $\frac{۱}{g}$ نیز در نقطه ی a مشتق پذیر است و $(\frac{۱}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^۲(a)}$.	۱/۲۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۳۹۰ /۱۲/ ۶**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$\underbrace{a<۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{a^۲}>۰}}_{(۰/۲۵)} \underbrace{\frac{۱}{a^۲}\times a<\frac{۱}{a^۲}\times ۰}_{(۰/۵)} \Rightarrow \frac{۱}{a}<۰ \; (۰/۲۵)$	۱
۲	$a=\frac{\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲}}{۲}=۲ \; (۰/۲۵) \quad , \quad \varepsilon=\frac{\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲} \; (۰/۲۵) \Rightarrow \{x\in R \mid ۰<\lvert x-۲\rvert<\frac{۱}{۲}\} \quad (۰/۵)$	۱
۳	**برهان خلف: فرض کنیم دنباله دارای دو حد متمایز مانند $l_۱$, $l_۲$ باشد، داریم : (۰/۲۵)** $\lim_{n\to+\infty} a_n=l_۱ \Rightarrow \forall\varepsilon>۰ , \exists M_۱\in N \ni n\geq M_۱ \Rightarrow \lvert a_n-l_۱\rvert<\frac{\varepsilon}{۲} \; (۰/۲۵)$ $\lim_{n\to+\infty} a_n=l_۲ \Rightarrow \forall\varepsilon>۰ , \exists M_۲\in N \ni n\geq M_۲ \Rightarrow \lvert a_n-l_۲\rvert<\frac{\varepsilon}{۲} \; (۰/۲۵)$ **فرض می کنیم $M=Max\{M_۱,M_۲\}$، پس برای هر $n\geq M$ داریم: (۰/۲۵)** $۰\leq\lvert l_۱-l_۲\rvert=\lvert l_۱-a_n+a_n-l_۲\rvert\leq\lvert a_n-l_۱\rvert+\lvert a_n-l_۲\rvert<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon \; (۰/۵) \Rightarrow ۰\leq\lvert l_۱-l_۲\rvert<\varepsilon \Rightarrow l_۱=l_۲ \; (۰/۲۵)$ **پس فرض خلف باطل و دنباله ی همگرا تنها یک حد دارد. (۰/۲۵)**	۲
٤	**روش اول:** $\underbrace{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}} \; (۰/۲۵) \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} , \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} , \frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۳}} , \dots}_{(۰/۵)}$ **دنباله نزولی است. (۰/۲۵)** **روش دوم:** a_n **نزولی** $\Leftrightarrow \underbrace{a_n>a_{n+۱} \Leftrightarrow \sqrt{n+۱}-\sqrt{n}>\sqrt{n+۲}-\sqrt{n+۱}}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{۲\sqrt{n+۱}>\sqrt{n+۲}+\sqrt{n}}_{(۰/۲۵)}$ $\Leftrightarrow \underbrace{۴(n+۱)>۲n+۲+۲\sqrt{n^۲+۲n}}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{n+۱>\sqrt{n^۲+۲n} \Leftrightarrow n^۲+۲n+۱>n^۲+۲n}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{۱>۰}_{(۰/۲۵)}$	۱/۲۵
۵	$S_n=\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k!}=\underbrace{۱+۱+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\dots+\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times\dots\times n}}_{(۰/۲۵)})<۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\dots+\frac{۱}{۲^{n-۱}} \; (۰/۲۵)$ **عبارت** $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\dots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ **یک مجموع هندسی است. (۰/۲۵) بنابراین** $\sum_{k=۰}^{+\infty}\frac{۱}{k!}<۱+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳ \; (۰/۵)$ **. پس سری** **صعودی و کراندار است در نتیجه همگراست. (۰/۲۵)**	۱/۵
٦	**خیر. واگراست. (۰/۲۵) ، زیرا** $\underbrace{\lim_{k\to+\infty}\frac{۳k-۱}{۳k}}_{(۰/۲۵)}=۱\neq۰ \; (۰/۲۵)$	۰/۷۵
۷	$\forall\varepsilon>۰ , \exists\delta>۰ \ni ۰<\lvert x+۱\rvert<\delta \Rightarrow \lvert\frac{(-۱)^{[x]}(x^۲-۱)}{x-۱}-۰\rvert<\varepsilon \quad (۰/۵)$ $\lvert\frac{(-۱)^{[x]}(x^۲-۱)}{x-۱}\rvert=\underbrace{\lvert(-۱)^{[x]}\rvert\times\lvert\frac{x^۲-۱}{x-۱}\rvert}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۱\times\lvert x+۱\rvert}_{(۰/۲۵)}<\varepsilon \Rightarrow \delta\leq\varepsilon \; (۰/۲۵)$	۱/۲۵

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۶ /۱۲ / ۱۳۹۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	$\begin{cases} a_n=\frac{1}{n}\ (0/25) \\ b_n=-\frac{1}{n}\ (0/25) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=0\ (0/25)$ ، $f(a_n)=1\ ,\ f(b_n)=-1\ (0/25)$ **چون** $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\neq\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ ، **لذا** $f(x)$ **در صفر حد ندارد . (۰/۲۵)**	۱/۲۵
۹	**الف)** $\frac{1}{x^2}-1<[\frac{1}{x^2}]\le\frac{1}{x^2}\ (0/25)\xrightarrow{\times x^2}\underbrace{1-x^2<x^2[\frac{1}{x^2}]\le1}_{(0/25)}$, $\lim_{x\to0}(1-x^2)=\lim_{x\to0}(1)=1\ (0/25)$ $\lim_{x\to0}x^2[\frac{1}{x^2}]=1(0/25)$ **ب)** $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}\ (0/25)}{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}\ (0/25)}=\underbrace{\frac{2}{0^+}}_{(0/25)}=+\infty\ (0/25)$ **ج)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}\times Arc\tan x=\underbrace{2}_{(0/25)}\times\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{(0/25)}=\pi\ (0/25)$	۲/۷۵
۱۰	**تابع** $f=x^3-3x+1$ **در بازه ی** $[0,1]$ **پیوسته است (۰/۲۵) و** $f(0)\times f(1)=-1<0$ **(۰/۵) . طبق نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی، معادله حداقل دارای یک ریشه است. (۰/۲۵)**	۱
۱۱	**مجانب های قائم** $x^2-2x=0\ (0/25)\Rightarrow\begin{cases}x\to0\\ y\to\infty\end{cases}\Rightarrow x=0\ (0/25)\ ,\ \begin{cases}x\to2\\ y\to\infty\end{cases}\Rightarrow x=2\ (0/25)$ $x^3+3=(x^2-2x)(x+2)+(4x+3)\Rightarrow(0/25)\Rightarrow$ **مجانب مایل** $y=x+2$ **(۰/۲۵)**	۱/۲۵
۱۲	$x+9\ge0\Rightarrow x\ge-9\ (0/25)$ $x+9\ne0\Rightarrow x\ne-9\ (0/25)$ $\Rightarrow D_f=(-9,+\infty)\ (0/25)$ **. نقاط ناپیوستگی برابر است با** $(-\infty,-9]$**.(۰/۲۵)**	۱
۱۳	$f(2)=-6\ (0/25)\ ,\ y'=2x-5\ (0/25)\Rightarrow m=-1\ (0/25)$ $y-(-6)=(-1)(x-2)\ (0/25)\Rightarrow y=-x-4\ (0/25)$	۱/۲۵
۱۴	$g'(x)=3x^2\ (0/25)\Rightarrow g'(1)=3\ (0/25)$ $(fog)'(1)=\underbrace{g'(1)\times f'(g(1))}_{(0/25)}=3\times\underbrace{f'(0)}_{(0/25)}=3\times\underbrace{4}_{(0/25)}=12\ (0/25)$	۱/۵
۱۵	$(\frac{1}{g})'(a)=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}}_{(0/25)}=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h(g(a+h)g(a))}}_{(0/25)}$ $=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{-1}{g(a+h)g(a)}\times\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{(0/25)}=\underbrace{\frac{-1}{g^2(a)}\times g'(a)}_{(0/25)}==\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\ (0/25)$	۱/۲۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰