

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۳/ ۳/۴	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش	http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

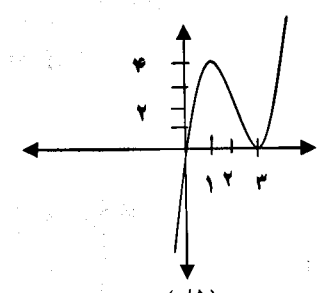
توجه : استفاده از ماشین حساب ساده ( دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد ) بلامانع است.

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) کسر یا عدد گویای مساوی بسط اعشاری $0.8333.../8333$ برابر است با ..... ب) اینفیموم بازه ی $A = (-2, 3]$ برابر است با ..... ج) اگر $f(x) = \ln x$ باشد مقدار $(f^{-1})'(1)$ ، برابر است با .....	۱/۵
۲	ابتدا حد دنباله ی $\left\{ \frac{2n-1}{n} \right\}_{n=1}$ را حدس بزنید سپس حدس خود را به روش $\varepsilon$ اثبات کنید.	۱
۳	با استفاده از قضیه ی بولزانو ثابت کنید معادله ی $x^3 - x - 1 = 0$ در بازه ی $[1, 2]$ جواب دارد.	۱
۴	به کمک تعریف دنباله ای حد ، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در نقطه ی $x = 0$ حد ندارد.	۱
۵	هزینه ی ساخت $x$ تلویزیون $c(x)$ تومان است که در آن $x^2 - 3000x + 3000000 + 6000000 = c(x)$ می باشد. هزینه ی تولید ۱۰۱ امین تلویزیون چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.	۱
۶	با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در $x = 0$ بررسی نمایید.	۱/۵
۷	از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است. معادله های این دو خط مماس را به دست آورید.	۱/۵
۸	مشتق بگیرید. ( ساده کردن مشتق الزامی نیست ). الف) $x^2 y + \sqrt{x} - 5y^3 = 0$ ب) $y = e^{\sin 2x}$	۱/۵
۹	اگر تابع $f$ زوج و تابع $g$ فرد باشند و داشته باشیم $f'(1) = 2$ و $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.	۱
۱۰	مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه ی $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ را در بازه ی $[1, 3]$ بیابید.	۲
۱۱	شعاع کره ای با آهنگ ۵ میلی متر بر ثانیه بزرگ می شود. در لحظه ای که شعاع کره ۴۰ میلی متر است حجم کره با چه آهنگی افزایش می یابد؟	۱
۱۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ را رسم کنید.	۲
۱۳	مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم $y = 3x$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 1$ می باشد.	۱/۵
۱۴	مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x}$ را بر بازه ی $[0, 1]$ به دست آورید.	۱
۱۵	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int_0^{\pi}  \cos x  dx$ ب) $\int (x^3 - \sqrt{x}) dx$	۱/۵
۲۰	موفق باشید	جمع نمره

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۳/۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	<p>(۰/۵) ج) <math>e</math> (۰/۵) ب) <math>-2</math> = اینفیموم (۰/۵) الف) <math>\frac{5}{6}</math> (۰/۵)</p>	۱/۵
۲	<p>۱) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n} = 2</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\forall \varepsilon &gt; 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n \geq M \left  \frac{2n-1}{n} - 2 \right  &lt; \varepsilon \rightarrow \left  \frac{2n-1}{n} - 2 \right  &lt; \varepsilon</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\rightarrow \left  \frac{2n-1-2n}{n} \right  &lt; \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} &lt; \varepsilon</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow n &gt; \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1</math> (۰/۲۵)</p>	۱
۳	<p>تابع <math>f(x) = x^2 - x - 1</math> چند جمله ای است پس در هر نقطه از <math>\mathbb{R}</math> پیوسته است پس در بازه <math>[1, 2]</math> نیز، پیوسته است. (۰/۲۵)</p> <p>از طرفی <math>f(1) = -1</math>، <math>f(2) = 5</math> پس داریم <math>f(1) \times f(2) &lt; 0</math> بنابراین طبق قضیه ی بولزانو دست کم عددی مانند <math>c</math> در بازه <math>(1, 2)</math> وجود دارد به طوری که <math>f(c) = 0</math> یعنی <math>c</math> ریشه ی معادله ی <math>x^2 - x - 1 = 0</math> است. (۰/۲۵)</p>	۱
۴	<p>۱) <math>a_n = \frac{1}{n}</math> <math>a_n \neq 0</math> <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0</math></p> <p><math>b_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}</math> <math>b_n \neq 0</math> <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1</math> (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین طبق تعریف حد، <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)</math> وجود ندارد. (۰/۲۵)</p>	۱
۵	<p>۱) <math>c'(x) = 3 \dots - 60 \cdot x</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>c'(100) = 3 \dots - 6000 = 24000</math> (۰/۲۵)</p> <p>یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ تلویزیون تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین تلویزیون را تولید کند تقریباً ۲۴۰۰۰ تومان هزینه می کند. (۰/۵)</p>	۱
۶	<p>۱/۵ <math>f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(\infty)}{x - \infty}</math> (۰/۲۵) =</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow</math></p> <p><math>\begin{cases} f'_+(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \text{ (۰/۲۵)} \\ f'_-(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}</math></p> <p>پس تابع <math>f</math> در <math>x = \infty</math> مشتق پذیر نمی باشد. (۰/۲۵)</p>	۱/۵

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۳/۳/۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۷	۱/۵	<p><math>T(\alpha, \alpha^2 + \alpha)</math> : نقطه ی تماس</p> <p><math>f'(x) = 2x + 1 \quad f'(\alpha) = 2\alpha + 1 \quad (./25)</math></p> <p>معادله ی خط مماس : <math>y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - \alpha^2 - \alpha = (2\alpha + 1)(x - \alpha) \quad (./25)</math></p> <p>خط مماس از نقطه ی <math>A(0, -1)</math> میگذرد بنابراین :</p> <p><math>-1 - \alpha^2 - \alpha = -2\alpha^2 - \alpha \quad (./25) \rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad (./25)</math></p> <p>معادله ی خطوط مماس :</p> <p><math>\alpha = 1 \rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \quad (./25) \quad \alpha = -1 \rightarrow y = -1(x + 1) \quad (./25)</math></p>																								
۸	۱/۵	<p>الف) <math>2xy + y'x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 15y^2y' = 0 \quad (1) \quad (./25)</math></p> <p>ب) <math>y' = 2 \times \cos 2x \times e^{\sin 2x} \quad (./5)</math></p>																								
۹	۱	<p>تابع <math>f'</math> فرد و تابع <math>g'</math> زوج است پس داریم :</p> <p><math>f'(-1) = -f'(1) = -2 \quad (./25)</math></p> <p><math>g'(-1) = g'(1) = 3 \quad (./25)</math></p> <p><math>\rightarrow (f + g)'(-1) = \underbrace{f'(-1) + g'(-1)}_{(./25)} = -2 + 3 = 1 \quad (./25)</math></p>																								
۱۰	۲	<p><math>D = \mathbb{R} \quad y' = 12x^2 - 24x \quad (./25) \quad 12x^2 - 24x = 0 \quad (./25)</math></p> <p><math>\rightarrow 12x^2(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (./25) \\ x = 2 \quad (./25) \end{cases}</math> غیر قابل قبول</p> <p>ماکسیمم مطلق <math>f(3) = 27 \quad (./25)</math> مینیمم مطلق <math>f(2) = -16 \quad (./25)</math></p> <p><math>f(1) = -5 \quad (./25)</math></p>																								
۱۱	۱	<p><math>v = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (./25)</math></p> <p><math>\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \times \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt} \quad (./25) \rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi (4.)^2 \times 5 \quad (./25) = 3200\pi \quad (./25)</math></p>																								
۱۲	۲	<p><math>D = \mathbb{R} \quad y' = 3x^2 - 12x + 9 \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad (./25) \rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (./25) \\ x = 3 \quad (./25) \end{cases}</math></p> <p><math>y'' = 6x - 12 \quad 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \quad (./25)</math></p> <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;">۱</td> <td style="padding: 5px;">۲</td> <td style="padding: 5px;">۳</td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y'</math></td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y''</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;">↗</td> <td style="padding: 5px;">↘</td> <td style="padding: 5px;">↗</td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">مینیمم    عطف    ماکسیمم (./5)</p> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;">  <p style="text-align: right;">(./5)</p> </div>	$x$	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$	$y'$	+	۰	-	۰	+	$y''$		-	۰	+		$y$	$-\infty$	↗	↘	↗	$+\infty$
$x$	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$																					
$y'$	+	۰	-	۰	+																					
$y''$		-	۰	+																						
$y$	$-\infty$	↗	↘	↗	$+\infty$																					

مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه	رشته : علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان : ۱۳۹۳/۳/۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	
نمره	راهنمای تصحیح	
		ردیف

۱۳	<p>بازه ی <math>[0, 1]</math> را به <math>n</math> بازه ی جزء با طول مساوی تقسیم می کنیم:</p> $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \quad (0/25) \rightarrow$ $f(x_i) = 3 \times \frac{i}{n} \quad (0/25), \Delta x_i = \frac{1}{n} \quad (0/25)$ $\rightarrow s_n = \sum_{i=1}^n 3 \times \frac{i}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{3}{n^2} \times \sum_{i=1}^n i = \frac{3}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow A = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{3}{2} \quad (0/25)$
۱۴	<p>۱</p> $\bar{f} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big _0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = -\frac{1}{e} + 1 \quad (0/25)$
۱۵	<p>۱/۵</p> <p>الف)</p> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \quad (0/25) =$ $1 - (-1) = 2 \quad (0/25)$ <p>ب)</p> $\frac{x^4}{4} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c \quad (0/5)$
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر