

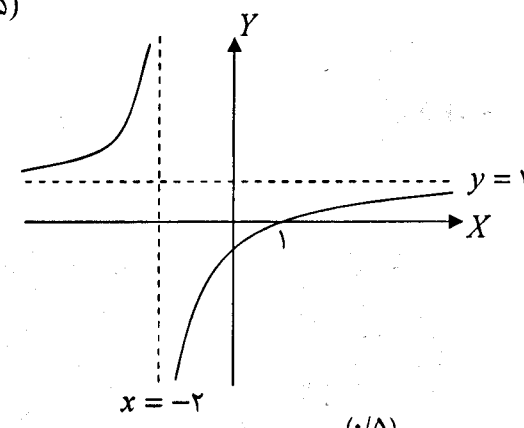
باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	ساعات شروع: ۱۰/۳۰ صبح	سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تعداد صفحات: ۱ صفحه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۸	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲		
نمره	سوالات (پاسخنامه دارد)		
ردیف			
۱	عبارت صحیح را در جملات زیر انتخاب کنید. الف) حد دنباله‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ برابر با $(\underline{e^2}, \underline{e^{\frac{1}{2}}})$ است. ب) تابع $D(x) = \begin{cases} 0 & \text{گویا } x \\ 1 & \text{گنگی } x \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تابع $f(x) = x D(x)$ در $x = 0$ (پیوسته، ناپیوسته) است.		
۲	عدد اعشاری $0.025\overline{37}$ را به صورت یک کسر بنویسید.		
۳	به کمک تعریف نشان دهید، دنباله‌ی $\{\sqrt{n-1}\}$ به $+\infty$ واگراست.		
۴	محدوده‌ی $a$ را چنان بیابید که معادله‌ی $x^2 + x + a = 0$ در بازه‌ی $(0, 1)$ حداقل دارای یک ریشه باشد.		
۵	حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}{2x + 1}$ را در صورت وجود محاسبه کنید.		
۶	تابع هزینه‌ی تولید $x$ واحد از محصولی، روزانه $C(x) = 500 + 10x + x^2$ می باشد. الف) هزینه‌ی واقعی افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟ ب) هزینه‌ی نهایی در این سطح تولید چقدر است؟		
۷	نشان دهید نقطه‌ی $x = 2$ یک نقطه‌ی گوشه برای تابع $f(x) =  x^2 - 2x $ است. سپس اندازه‌ی تانژانت زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه را به دست آورید.		
۸	با تعیین ضابطه‌ی توابع $f'$ و $f''$ ، ضابطه‌ی مشتق $n$ ام تابع $f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ را به دست آورید.		
۹	اگر $f(x) = x^3 + 2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر نمودار $f^{-1}$ را در نقطه‌ی $(3, 1)$ بنویسید.		
۱۰	در چه نقاطی روی نمودار $x^2 - xy + y^2 = 3$ مماس بر منحنی افقی است؟		
۱۱	تابع $f(x) = x e^{-x}$ مفروض است. با اعمال آزمون مشتق دوم، نوع اکسترمم موضعی تابع را تعیین کنید.		
۱۲	مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x+1}$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ در صورت وجود بیابید.		
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را رسم کنید.		
۱۴	مساحت ناحیه‌ی تحت $y = x^2$ بالای $y = 0$ ، از $x = 0$ تا $x = 2$ را محاسبه کنید.		
۱۵	مقدار میانگین تابع $f$ با ضابطه‌ی $f(x) = x[x]$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ به دست آورید.		
۱۶	مشتق تابع $F(x) = x^2 \int_0^x e^{-t^2} dt$ را محاسبه کنید.		
۲۰	جمع نمره		
	موفق باشید.		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲ / ۲ / ۲۸	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	الف) $e^{\frac{1}{2}}$ (۰/۲۵) ب) پیوسته (۰/۲۵)	۰/۵
۲	$\frac{0.02537}{99900} = \frac{2537-2}{99900} = \frac{2535}{99900} = \frac{169}{6660} \quad (0.25)$	۰/۷۵
۳	برای $k > 0$ دلخواه، عدد طبیعی $M$ یافت می شود که هرگاه $(0.25).a_n > K, n \geq M$ $\sqrt{n-1} > K \Rightarrow n-1 > K^2 \quad (0.25) \Rightarrow n > K^2 + 1 \quad (0.25) \Rightarrow M = [K^2 + 1] + 1 \quad (0.25)$	۱
۴	$f(x) = x^3 + x + a$ روی بازه $[0, 1]$ پیوسته است (۰/۲۵). طبق قضیه ی بولزانو چون (۰/۲۵) $\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = 2 + a \end{cases}$ باید $a(2+a) < 0 \quad (0.25)$ در نتیجه $a < -2 \quad (0.25)$ .	۱
۵	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x  \sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x(2 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \quad (0.25)$	۰/۷۵
۶	الف) $C(101) - C(100) = 211 \quad (0.25)$ ب) $C'(x) = 10 + 2x \quad (0.25) \Rightarrow C'(100) = 210 \quad (0.25)$	۱
۷	$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x^2 - 2x }{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \quad (0.25)$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2 \quad (0.25)$ $\Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3} \quad (0.25)$	۱/۵
۸	$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad (0.25), \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad (0.25), \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad (0.25)$ $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \end{cases} \quad (0.25) \Rightarrow f''(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (0.25)$ $f^{(n)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}, n > 1) \quad (0.25)$	۱/۵
۹	$(3, 1) \in f^{-1} \quad (0.25), \quad f'(x) = 3x^2 + 2 \quad (0.25) \Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(3)}_{f'(1)} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \quad (0.25) \Rightarrow m = -5 \quad (0.25)$ $y - 1 = -5(x - 3) \Rightarrow y = -5x + 16 \quad (0.25)$	۱/۵

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۸	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱/۵	$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(2x - y)(\cdot/25)}{(x - 2y)(\cdot/25)} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x (\cdot/25)$ $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 (\cdot/25) \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 2) (\cdot/25), (-1, -2) (\cdot/25)$	۱۰																				
۱/۵	$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} (\cdot/25) \xrightarrow{f'=0} x = 1 (\cdot/25), \quad f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} (\cdot/5)$ $f''(1) = \frac{-1}{e} < 0 (\cdot/25) \Rightarrow x = 1 \text{ ماکسیم موضعی } (\cdot/25)$	۱۱																				
۱/۵	$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} (\cdot/25) \xrightarrow{f'=0} \begin{cases} x = -3 (\cdot/25) \\ x = 1 (\cdot/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 5 \text{ ماکسیم مقدار } (\cdot/25) \\ f(1) = 4 \text{ مینیم مقدار } (\cdot/25) \\ f(2) = \frac{13}{3} (\cdot/25) \end{cases}$	۱۲																				
۲	$x = -2 (\cdot/25) \text{ مجانب قائم}, \quad y = 1 (\cdot/25) \text{ مجانب افقی}$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}, \quad x \neq -2 (\cdot/25)$ $f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}, \quad x \neq -2 (\cdot/25)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-2</math></td><td><math>1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>f'</math></td><td><math>+</math></td><td></td><td><math>+</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>f''</math></td><td><math>+</math></td><td></td><td><math>-</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td><math>1 \nearrow</math></td><td><math>+\infty</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>1 \nearrow</math></td></tr> </table> <div style="text-align: right;">  <p style="text-align: center;">(۰/۵)</p> </div>	$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	$f'$	$+$		$+$		$f''$	$+$		$-$		$f$	$1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$1 \nearrow$	۱۳
$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$																		
$f'$	$+$		$+$																			
$f''$	$+$		$-$																			
$f$	$1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$1 \nearrow$																		
۱/۵	$\Delta x = \frac{2}{n} (\cdot/25), \quad x_i = \frac{2i}{n} (\cdot/25), \quad f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 (\cdot/25)$ $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{4i^2}{n^2}\right) \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} (\cdot/25)$ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{8}{3} (\cdot/25)$	۱۴																				
۱/۵	$\bar{f} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x[x] dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 x[x] dx + \int_0^1 x[x] dx \right) = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 -x dx + 0 \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} x^2 \Big _{-1}^0 \right) = \frac{1}{4} (\cdot/25)$	۱۵																				
۱	$F'(x) = \underbrace{2x}_{(\cdot/25)} \int_{\cdot}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + \underbrace{x^2}_{(\cdot/25)} \underbrace{(e^{-25x^2})}_{(\cdot/25)} \times \underbrace{5}_{(\cdot/25)}$	۱۶																				
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر																					