

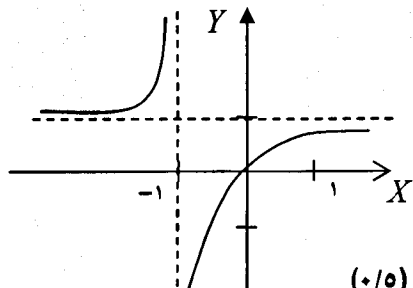
سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی			
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱			
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>			
ردیف	سوالات (پاسخنامه دارد)		
	نمره		

۱	اشتراک دو بازه‌ی $(-۱, ۶)$ و $(-۲, ۴)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته و مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.	۰/۷۵
۲	دنباله‌ی $\{\cos \frac{\pi}{n}\}$ را در نظر بگیرید. با ارائه‌ی دلیل به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) کرانداری دنباله‌ی فوق را بررسی کنید. ب) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$ همگراست؟	۱/۲۵
۳	مقادیر $a$ و $b$ را طوری بیابید که تابع رو به رو در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} b[x] + 3 & x > 1 \\ 6 & x = 1 \\ \frac{3a(x-1)}{x^2 - 1} & x < 1 \end{cases}$	۱/۵
۴	کلیدی مجانب های تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ را تعیین کنید.	۱/۵
۵	فرض کنید $f'(2) = \frac{3}{2}$ . مشتق $g(x) = f(\frac{1}{x})$ را در $x = \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.	۱
۶	معادله‌ی خط مماس بر منحنی $x^4 + 16y^4 = 32$ را در نقطه‌ی $(2, -1)$ بنویسید.	۱
۷	نقطه‌ی $M$ روی مسیر $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ در حال حرکت است. هنگامی که $M$ در نقطه‌ی $(1, 2)$ قرار دارد، اگر مولفه‌ی $y$ آن با سرعت ۶ متر بر ثانیه افزایش یابد، مولفه‌ی $x$ با چه سرعتی تغییر می کند؟	۱
۸	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در بازه‌ی $[-1, \frac{1}{2}]$ در صورت وجود بیابید.	۲
۹	برای تابع $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ در بازه‌ی $[1, 3]$ شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط قضیه، مقدار یا مقادیر مناسبی برای $c$ بیابید.	۲
۱۰	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ را رسم کنید.	۲
۱۱	با استفاده از قاعده‌ی هوییتال حد رو به رو را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{\tan 2x}$	۱/۵
۱۲	با استفاده از حد مجموع بالای ریمان، مقدار $\int_0^1 2x \, dx$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2 + \sqrt{t}} \, dt$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۴	مقدار متوسط تابع $y = x - \frac{1}{x^2}$ را در بازه‌ی $[1, 3]$ بیابید.	۱
۱۵	انتگرال های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int \frac{3x^2 - x}{x} \, dx$ ب) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$	۱/۲۵

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۵/۳۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۰/۷۵	۱	$(-۲, ۴) \cap (-۱, ۶) = (-۱, ۴) \quad (۰/۲۵) \quad , \quad a = \frac{۳}{۲} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad r = \frac{۵}{۲} \quad (۰/۲۵)$
۱/۲۵	۲	الف) دنباله کراندار است (۰/۲۵) زیرا $ \cos \frac{\pi}{n}  \leq ۱ \quad (۰/۲۵)$ ب) سری واگراست (۰/۲۵) زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = \cos 0 = ۱ \quad (۰/۲۵) \neq 0 \quad (۰/۲۵)$
۱/۵	۳	$f(۱) = ۶ \quad (۰/۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow ۱^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^-} \frac{۳a(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \frac{۳a}{۲} = ۶ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = ۴ \quad (۰/۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow ۱^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^+} b + ۳ = ۶ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow b = ۳ \quad (۰/۲۵)$
۱/۵	۴	مجانِب قائم $x = ۱ \quad (۰/۲۵)$ $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ۱}{x(x-۱)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = ۱ \quad (۰/۲۵) \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ۱}{x-۱} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۱+x}{x-۱} = ۱ \quad (۰/۲۵)$ مجانِب مایل $y = x + ۱ \quad (۰/۲۵)$
۱	۵	$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x}) \quad   \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} f'(2) = -۶ \quad (۰/۲۵)$
۱	۶	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(4x^2)}{16 \times 4y^2} = \frac{-x^2}{16y^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y + ۱ = \frac{1}{2}(x - 2) \quad (۰/۲۵)$
۱	۷	$y'(t) = \frac{۶x x'(t)}{۲\sqrt{۳x^2 + ۱}} \xrightarrow{(۱, ۲)} ۶ = \frac{۶ \times ۱ \times x'(t)}{۴} \Rightarrow x'(t) = ۴ \frac{m}{s} \quad (۰/۲۵)$
۲	۸	$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-۱)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (۰/۲۵) \quad f(0) = 0 \quad (۰/۲۵) \quad \text{ماکسیمم مطلق}$ $x = 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(-۱) = -\frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \quad \text{مینیمم مطلق}$
۲	۹	$f$ روی بازه $[۱, ۳]$ پیوسته $(۰/۲۵)$ و روی $(۱, ۳)$ مشتق پذیر است $(۰/۲۵)$ . از طرفی $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3 \quad (۰/۲۵)$ $f(۳) = -۲۷ \quad (۰/۲۵)$ و $f(۱) = -۷ \quad (۰/۲۵)$ . بنابراین قضیه مقدار میانگین وجود دارد $c \in (۱, ۳)$ که $\left. \begin{aligned} c = ۱ \quad \text{غ ق ق} \quad (۰/۲۵) \\ c = \frac{7}{3} \quad \text{ق ق} \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \quad \text{در نتیجه} \quad (۰/۲۵) \quad f'(c) = 3c^2 - 10c - 3 = \frac{f(۳) - f(۱)}{۳ - ۱} = -۱۰$

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۱ / ۵ / ۳۱	
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۲	$\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ (۰/۲۵) } \quad \begin{cases} x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ (۰/۲۵) } \text{ مجانب افقی}$ $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ (۰/۵)}$  <table border="1" data-bbox="175 665 826 837"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>y'</math></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr> <tr> <td><math>y</math></td><td>1</td><td><math>+\infty</math></td><td><math>-\infty</math></td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	$y'$	+	+	+	$y$	1	$+\infty$	$-\infty$	۱۰
$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$											
$y'$	+	+	+											
$y$	1	$+\infty$	$-\infty$											
۱/۵	$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{2(1 + \tan^2 2x)} = 1 \text{ (۰/۵)}$	۱۱												
۱/۵	$\Delta x = \frac{1}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $x_i = \frac{i}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow U_n(f) = \sum_{i=1}^n \Delta x \times f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times (2 \times \frac{i}{n}) = \frac{1}{n} \times (\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i) = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}$ $\int_0^1 2x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (۰/۲۵)}$	۱۲												
۰/۷۵	$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2 + \sqrt{t}} dt = \frac{2x}{2 +  x } \times \frac{x^2}{2 +  x }$ <p>(۰/۲۵) <math>\frac{2x}{2 +  x }</math> (۰/۵)</p>	۱۳												
۱	$\frac{1}{3-1} \int_1^3 (x - \frac{1}{x^2}) dx = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x}) \Big _1^3 = \frac{5}{3} \text{ (۰/۲۵)}$ <p>(۰/۲۵) <math>\frac{1}{2}</math> (۰/۲۵) <math>\frac{1}{x}</math> (۰/۲۵)</p>	۱۴												
۱/۲۵	<p>الف) <math>\int (3x - 1) dx = \frac{3}{2} x^2 - x + c</math></p> <p>(۰/۲۵) <math>\frac{3}{2}</math> (۰/۲۵) <math>x</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>2 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p>(۰/۲۵)</p>	۱۵												
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفا به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام													