هندسه زاویه‌ها

دو قرارداد اصلی:

متمم زاویه $\hat{A}$ برابر $۹۰-\hat{A}$ است.

مکمل زاویه $\hat{A}$ برابر $۱۸۰-\hat{A}$ است.

مثال ۱) ثابت کنید دو برابر متمم زاویه A با مکمل زاویه A برابر است.

برهان: برای راحتی فرض کنید $\hat{A}=x$ باشد. در این صورت:

$$۱۸۰-x=۲(۹۰-\frac{x}{۲})\rightarrow ۱۸۰-x=۱۸۰-x$$

و حکم مسئله به سادگی اثبات می‌شود.

مثال ۲) دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ متمم هستند. اندازه زاویه‌ی $\hat{A}$ برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه مکمل زاویه‌ی $\hat{B}$ است. زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۵)

پاسخ: برای راحتی زاویه $\hat{A}$ را x و $\hat{B}$ را y می‌گیریم. مدل ریاضی مسئله می‌شود:

$$\begin{cases} x+y=۹۰ \\ x=\frac{۴}{۹}(۱۸۰-y) \end{cases}$$

از حل این دستگاه مقدار $x=۷۲^\circ$ بدست می‌آید.

مثال ۳) اگر $\hat{A}$ چهار برابر $\hat{B}$ باشد و متمم $\hat{B}$ چهار برابر متمم $\hat{A}$ باشد، زاویه $\hat{B}$ را بیابید. (مسابقات ریاضی آمریکا- ۱۹۹۴)

پاسخ: طبق معمول، با نامگذاری x و y داریم:

$$\begin{cases} x=۴y \\ ۹۰-y=۴(۹۰-x) \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} y=۱۸^\circ$$

ما عملیات ریاضی حل دستگاه را عمداً انجام نمی‌دهیم. چون قصد داریم تا جای ممکن درسنامه‌ی خالصی از هندسه ارائه دهیم. البته اگر عملیات جبری دشوار باشند حتماً انجام می‌شوند.

قضیه: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است. و مجموع زاویه‌های خارجی هر شکلی (من جمله مثلث) برابر ۳۶۰° است.

مثال ۴) زاویه‌های مثلثی با اعداد ۸، ۵، ۲ متناسب هستند. اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلث را بیابید. (سراسری تجربی – ۸۰)

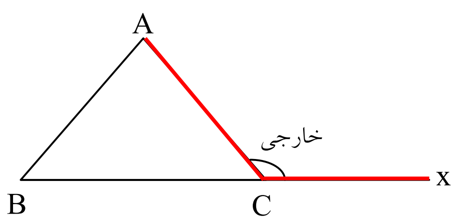
به زودی تصویری توضیح می‌دهیم که زاویه‌های خارجی مکمل زاویه‌های داخلی هستند.

می‌توانیم زاویه‌های مثلث را $۸x$، $۵x$، $۲x$ بگیریم. در اینصورت:

$$۲x + ۵x + ۸x = ۱۸۰ \rightarrow ۱۵x = ۱۸۰ \rightarrow x = ۱۲^\circ$$

بنابراین زاویه‌های داخلی ۲۴° و ۶۰° و ۹۶° هستند. بنابراین زاویه‌های خارجی برابر $۱۸۰ - ۲۴$ و $۱۸۰ - ۶۰$ و $۱۸۰ - ۹۶$ هستند. که کوچکترین آنها: $۱۸۰ - ۹۶ = ۸۴^\circ$ است.

نکته: زاویه‌ای که با امتداد یکی از اضلاع مثلث ساخته می‌شود را زاویه خارجی می‌نامیم:



در این شکل بدیهی است که: $\hat{C}_{خ} = ۱۸۰ - \hat{C}$

قضیه مفید دیگری که داریم این است:

$$\hat{C}_{خ} = \hat{A} + \hat{B}$$

در حقیقت یک مکمل خوب دیگر هم داریم:

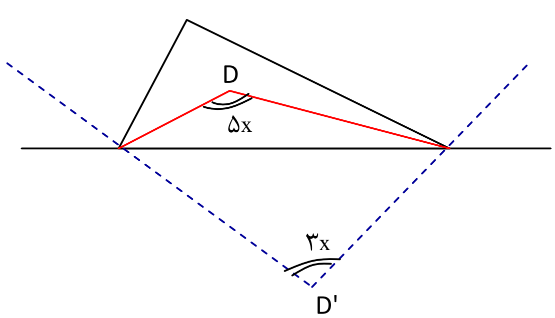
قضیه: زاویه بین دو نیمساز داخلی مکمل زاویه بین دو نیمساز خارجی است.

به مثال بعد دقت کنید.

مثال ۵)

در شکل مقابل D محل برخورد دو نیمساز

داخلی و D' محل برخورد دو نیمساز



خارجی است. این یعنی $\hat{D}$ و $\hat{D}'$ مکمل هستند.

بنابراین:

$$5x+3x=180 \rightarrow 8x=180 \rightarrow x=22/5^\circ$$

و بنابراین:

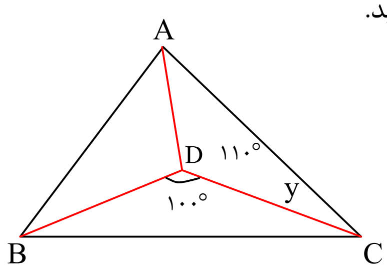
$$\hat{D}=5x=5\times 22/5^\circ=112/5^\circ$$

$$\hat{D}'=3x=3\times 22/5^\circ=67/5^\circ$$

و یک مسئله سخت، به خوبی حل شد. چه نتیجه‌ای گرفتیم:

زاویه بین دو نیمساز داخلی مکمل زاویه بین دو نیمساز خارجی است.

مثال ۶) اگر زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر 100° و زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی $\hat{C}$ و $\hat{A}$ برابر 110° است. زاویه بین دو نیمساز خارجی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را بیابید.



پاسخ: D را محل برخورد نیمسازهای داخلی بگیرید.

در اینصورت

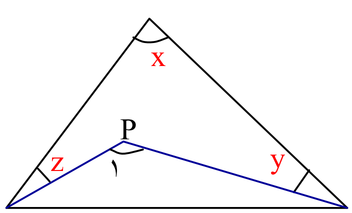
$$A\hat{D}B+100^\circ+110^\circ=360^\circ$$

بنابراین: $A\hat{D}B=150^\circ$

یعنی زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ برابر 150° است. پس زاویه بین دو نیمساز خارجی 30° است.

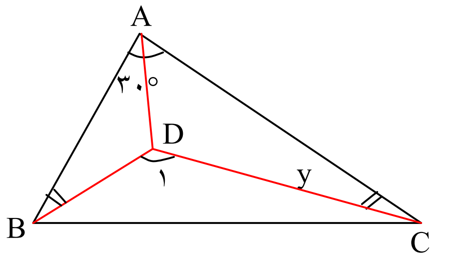
قضیه: فرض کنید p نقطه‌ای درون مثلث باشد. در اینصورت مطابق شکل زیر داریم:

$$\hat{P}_1=x+y+z$$



مثال ۷) اگر $\hat{A} = ۳۰^\circ$ باشد. زاویه بین دو نیمساز خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا زاویه بین دو نیمساز داخلی را محاسبه می‌کنیم. بعد با مکمل مسئله حل می‌شود:



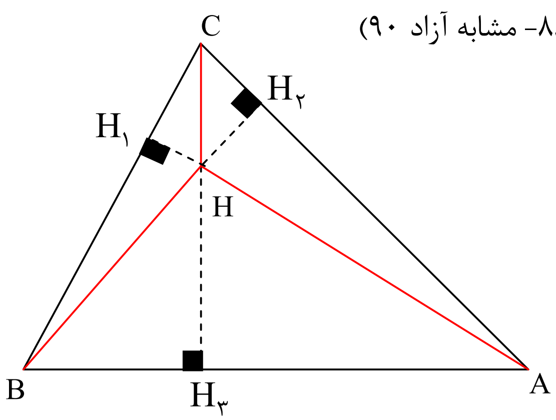
از شکل بالا مشخص است که:

$$\hat{D}_۱ = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۳۰^\circ + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = ۳۰^\circ + \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲}$$

$$= ۳۰ + \frac{۱۵۰}{۲} = ۱۰۵$$

بنابراین زاویه‌ی موردنظر: ۷۵° است.

مثال ۸) در مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ زاویه $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. اگر H محل برخورد سه ارتفاع باشد، زاویه $A\overset{\Delta}{H}C$ چند برابر زاویه‌ی $B\overset{\Delta}{H}C$ است؟ (آزاد ۸۸- مشابه آزاد ۹۰)



پاسخ: اگر AH را امتداد دهیم کاملاً بدیهی است که:

$$H\overset{\Delta}{A}B = ۹۰ - \hat{B} = ۳۰^\circ$$

به نحو مشابه

$$H\overset{\Delta}{C}B = ۹۰ - \hat{B} = ۳۰^\circ$$

بنابراین:

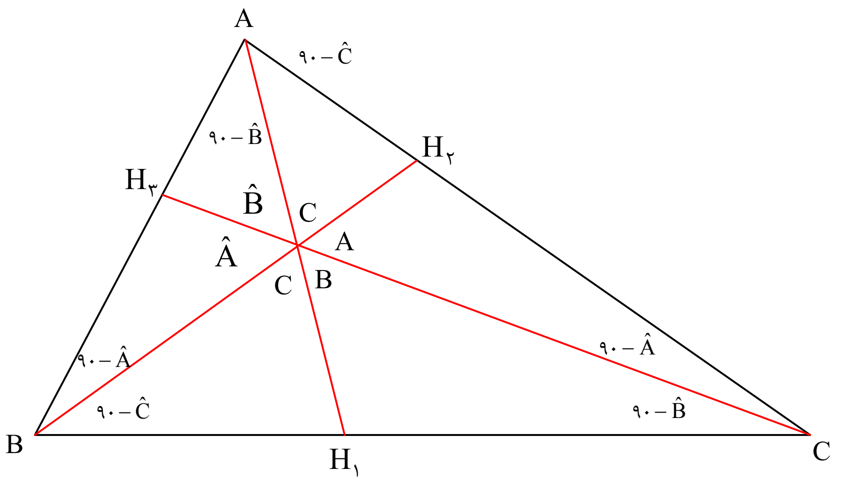
$$A\overset{\Delta}{H}C = \hat{B} + H\overset{\Delta}{A}B + H\overset{\Delta}{C}B = ۱۲۰^\circ$$

به نحو مشابه:

$$B\overset{\Delta}{H}C = H\overset{\Delta}{C}A + \hat{A} + H\overset{\Delta}{B}A = ۵۰ + ۴۰ + ۵۰ = ۱۴۰$$

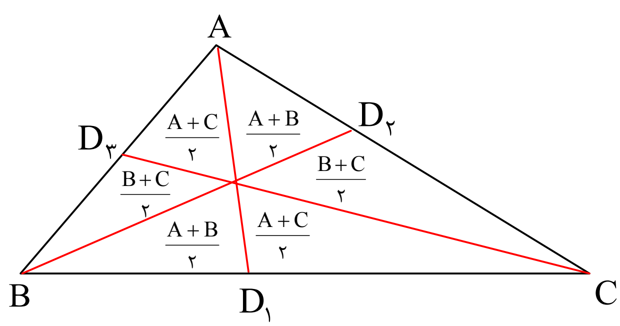
بنابراین نسبت موردنظر: $\frac{۶}{۷} = \frac{۱۲۰}{۱۴۰}$ است.

نکته: به طور کلی وقتی که ارتفاع‌های یک مثلث را رسم می‌کنند تمام زاویه‌ها عبارتند از:



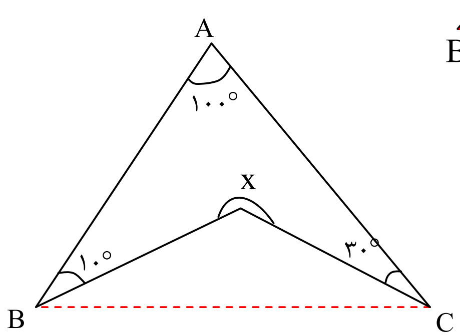
با این قضیه جواب مسئله بدیهی است.

نکته: در مثلث وقتی نیمسازها را رسم می‌کنند زاویه‌ها عبارتند از:



ما استفاده‌های مکرر از قضیه‌ی قبلی را توصیه می‌کنیم.

مثال ۹) در شکل زیر زاویه x چند درجه است.

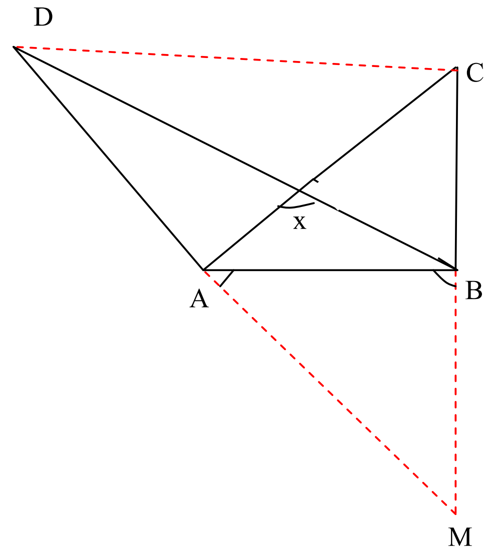


پاسخ: از B به C وصل می‌کنیم:

$$B\overset{\Delta}{O}C = ۱۰۰ + ۱۰ + ۳۰ = ۱۴۰^\circ$$

بنابراین $x = ۳۶۰ - ۱۴۰ = ۲۲۰^\circ$

مثال ۱۰) در شکل زیر زاویه x را بیابید.



DA و CB را مانند شکل امتداد می‌دهیم.

در مثلث $M\overset{\Delta}{D}C$ اتفاقی که می‌خواهیم افتاده است.

جواب مسئله می‌شود:

$$\hat{D}+\hat{C}+\hat{M}=x$$

و بدیهی است که:

$$\hat{M}=۱۸۰-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱)$$

و مجدداً بدیهی است که: $\hat{B}_۱=۱۸۰-\hat{B},\hat{A}_۱=۱۸۰-\hat{A}$

بنابراین $M=۱۸۰-(۳۶۰-(A+B))=A+B-۱۸۰^\circ$

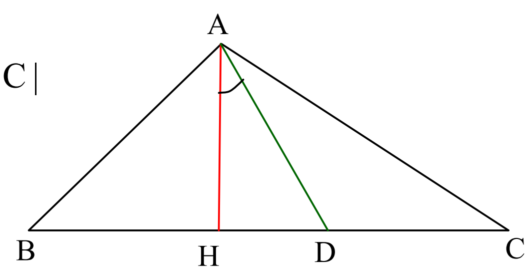
پس:

$$x=A+B+C+D-۱۸۰^\circ$$

خواننده می‌توانند استاندارد دشواری مسئله را با راه حل‌های دیگر نزد خودش بسنجد.

قضیه: در هر مثلث زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز زاویه $\hat{A}$ برابر است با:

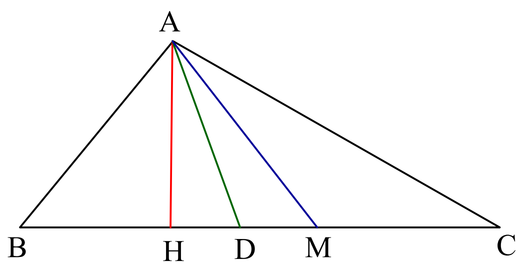
$$H\overset{\Delta}{A}D=\frac{۱}{۲}|B-C|$$



در مثلث قائم‌الزاویه یک قضیه اضافه نیز داریم: که زاویه بین نیمساز و میانه هم برابر $\frac{۱}{۲}|B-C|$ است:

$$\hat{A}=۹۰^\circ$$

$$H\overset{\Delta}{A}D=D\overset{\Delta}{A}M=\frac{۱}{۲}|B-C|$$



مثال۱۱) در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۷۰^\circ$ زاویه بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر را بیابید.

پاسخ: خودبخود $\hat{C}=۲۰^\circ$ است. بنابراین:

$$H\hat{A}M = H\hat{A}D + D\hat{A}M = \frac{۱}{۲}|B-C| + \frac{۱}{۲}|B-C| = |B-C| = ۵۰$$

مثال ۱۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر ۲۶° است.

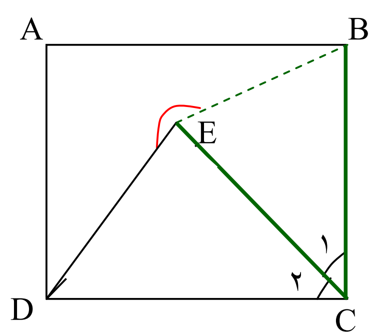
کوچکترین زاویه مثلث را بیابید. (هندسه ۱ جلد سبز – قلم‌چی – مثال ۴۴)

پاسخ: بین ارتفاع و میانه: $B-C$ است. بنابراین

$$\begin{cases} B-C=۲۶^\circ \\ A+B+C=۱۸۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B-C=۲۶^\circ \\ ۹۰+B+C=۱۸۰^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}=۵۸^\circ, \hat{C}=۳۲^\circ$$

در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه‌ی مجاور ساق‌ها برابرند و در مثلث متساوی‌الاضلاع همه‌ی زاویه‌های ۶۰° هستند.

مثال ۱۳) چهار ضلعی مقابل مربع و مثلث نیز متساوی‌الاضلاع است. زاویه‌ی E را بیابید.



دقت بفرمائید که

EC=BC

از طرفی: $C_۲=۶۰^\circ$. پس $C_۱=۳۰^\circ$

خودبخود در مثلث $E\overset{\Delta}{B}C$ داریم.

$$۱۸۰=۲B+C_۱=۲B+۳۰ \rightarrow B=۷۵^\circ$$

در چهار ضلعی ABED نیز داریم:

$$\hat{A}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{B}=۳۶۰^\circ \rightarrow ۹۰+۳۰+(۱۵^\circ)+E=۳۶۰^\circ$$
$$\rightarrow E=۲۲۵^\circ$$

نکته: مجموع زاویه‌های n ضلعی محدب: $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

نکته: هر زاویه‌ی n ضلعی منتظم: $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$.

مثال ۱۴) اگر هر زاویه‌ی یک n ضلعی منتظم ۱۴۴° درجه باشد. مجموع تمام زاویه‌های داخلی آن را بیابید.

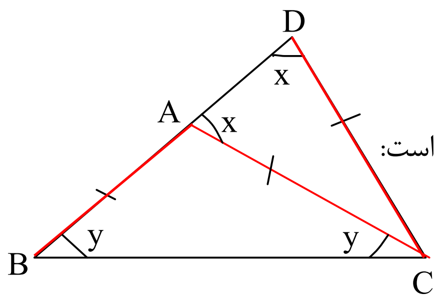
پاسخ: داریم:

$$\frac{(n-۲)}{n}\times ۱۸۰^\circ = ۱۴۴^\circ \to n = ۱۰$$

پس ۱۰ ضلعی منتظم است. بنابراین مجموع زاویه‌ها می‌شود:

$$۱۰\times ۱۴۴ = ۱۴۴۰$$

مثال ۱۵) در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ $(AB = AC)$ ساق BA را از نقطه B به اندازه‌ی قاعده‌ی BC تا نقطه D امتداد می‌دهیم.



اگر $CA=CD$ باشد، زاویه A چند درجه است؟ (۹۴ ریاضی خارج)

پاسخ: با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌ها نامگذاری زیر موجه است:

با توجه به خارجی بودن زاویه $C\hat{A}D$ داریم: $۲y = x$.

منظور این است که $BD = BC$ است. یعنی $\overset{\Delta}{BCD}$ نیز متساوی‌الساقین است:

$$\hat{D} = c_۱ + y \to x = c_۱ + y \to ۲y = c_۱ + y$$
$$\to y = c_۱$$

اینک در مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:

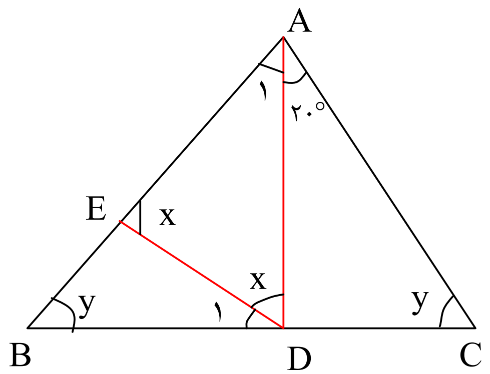
$$۲x + y = ۱۸۰^\circ \to ۴x = ۱۸۰^\circ \to x = ۴۵^\circ$$

خودبخود:

$$\hat{A} = ۱۸۰ - x = ۱۸۰ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$$

دانش‌آموزان عزیز به نگارش این مسئله دقت کنند. طراح محترم گفته‌اند BA را از سمت B امتداد می‌دهیم. این، در دیدگاه کنکور جدید، با وضعیتی که AB را از طرف B امتداد دهد، خیلی فرق دارد.

مثال ۱۶) در مثلث زیر، $C\hat{A}D = ۲۰^\circ$ و $AB = AC$. هرگاه $AE = AD$ باشد، اندازه‌ی $B\hat{D}E$ چقدر است؟ (المپیاد بلژیک ۱۹۸۹)



پاسخ:

نامگذاری زیر مجاز است:

حالا داریم:

زاویه خارجی D : $y + ۲۰ = x + D_۱$

$A\overset{\Delta}{D}E : A_۱ = ۱۸۰ - ۲x$

$A\overset{\Delta}{B}C : A = A_۱ + ۲۰ = ۱۸۰ - ۲y$

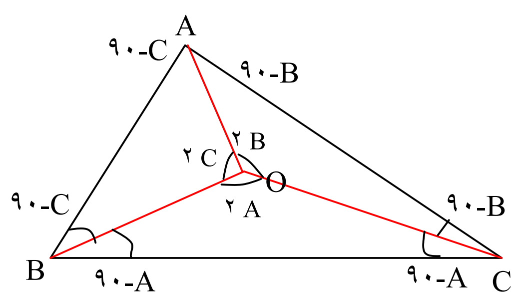
$$A\overset{\Delta}{B}D : A_۱ + y + D_۱ + x = ۱۸۰ \rightarrow A_۱ + y + (y + ۲۰)۱۸۰$$
$$\rightarrow ۱۸۰ - ۲x + y + (y + ۲۰) = ۱۸۰ \rightarrow x - y = ۱۰$$

حال قرار می‌دهیم: $x = y + ۱۰$ داریم:

$$y + ۲۰ = x + D_۱ \rightarrow y + ۲۰ = y + ۱۰ + D_۱$$
$$\rightarrow D_۱ = ۱۰^\circ$$

قضیه: محل برخورد عمود منصف‌های مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ مرکز دایره محیطی است و با O نمایش می‌دهیم.

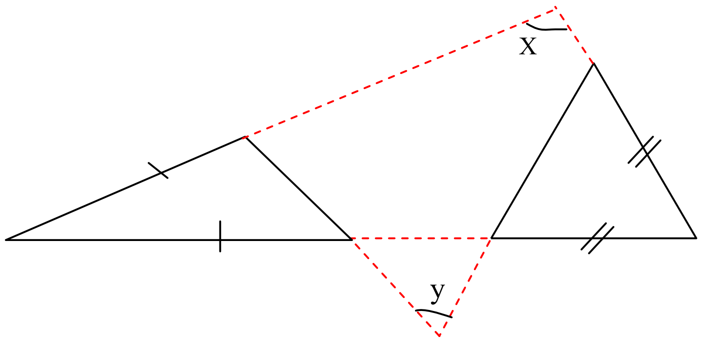
همه‌ی زاویه‌ها برای نقطه O به صورت زیر هستند:



به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌ها، به علت برابر بودن $OA = OB = OC$ (شعاع) دقت کنید.

یک قضیه مهم دیگر در مثلث متساوی‌الساقین:

اگر دو مثلث متساوی‌الساقین روی ساق‌ها هم محور باشند، قضیه زیر را داریم:

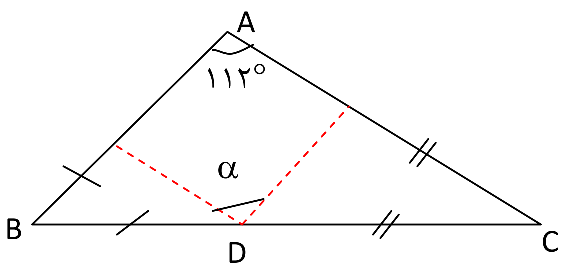


$$y = ۹۰ \pm \frac{x}{۲}$$

که در آن y زاویه بین امتداد دو قاعده و x زاویه بین امتداد دو ساق دیگر است.

مثال ۱۷) در شکل مقابل $\hat{A} = ۱۱۲^\circ$ و دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. زاویه α چند درجه است؟

(تجربی ۸۵)



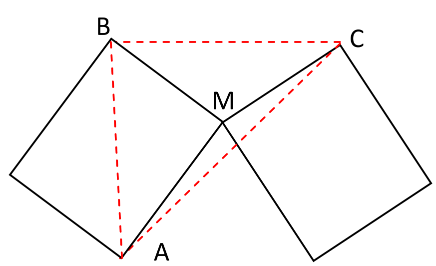
پاسخ: مسئله همین اول کار تمام است:

$$\alpha = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ - ۵۶ = ۳۴^\circ$$

از این نکته برای رشته تجربی در سال‌های ۸۵، ۹۲، ۹۳ و برای ریاضی‌ها ۸۸ به طور مستقیم استفاده شده است.

مثال آخر درسنامه‌ی این بخش را به سؤالی طولانی درباره‌ی مثلث متساوی‌الساقین اختصاص می‌دهیم:

مثال ۱۸) در شکل زیر روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، دو مربع بنا کرده‌ایم. بزرگترین زاویه مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ چند برابر کوچکترین زاویه آن است؟ (هندسه ۱- سبز قلم‌چی)



پاسخ: چون اضلاع مربع‌ها و مثلث میانی برابرند با وضعیت خوشایندی مواجه هستیم:

$$B\overset{\Delta}{M}C = ۳۶۰ - (۹۰ + ۶۰ + ۹۰) = ۱۲۰^\circ$$

از طرفی چون $MB = MC$ است، بنابراین $M\hat{C}B = M\hat{B}C$ بنابراین:

$$M\hat{C}B = M\hat{B}C = \frac{۱۸۰ - ۱۲۰}{۲} = ۳۰^\circ$$

در ضمن در مثلث $B\overset{\Delta}{M}A$ به وضوح زاویه‌ها ۴۵° و ۴۵°، ۹۰° هستند.

مجدداً زاویه‌ی $A\hat{M}C = ۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰^\circ$ و $AM = MC$ نتیجه می‌دهد:

$$M\hat{C}A = M\hat{A}C = \frac{۱۸۰ - ۱۵۰}{۲} = ۱۵^\circ$$

بنابراین:

$$B\hat{A}C = ۴۵^\circ + ۱۵^\circ = ۶۰^\circ$$

$$A\hat{C}B = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ$$

$$A\hat{B}C = ۴۵^\circ + ۳۰^\circ = ۷۵^\circ$$

نسبتِ درخواستی: $\frac{۷۵}{۴۵} = \frac{۵}{۳}$

با آرزوی موفقیت – میلاد منصوری

Telegram.me/riazimansouri