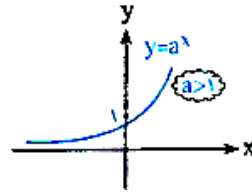
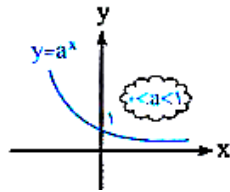


بچه ها سلام، با تخته ۵ در خدمت شما هستیم. با من همراه باشید. شرمند که به علت همایش هایی که میرم وقت محدود شده و دیر شد این تخته ها. حتما در آخر صفحه یا از طریق آیدی منتظر نظرات شما عزیزانم هستیم.

www.soalsara.ir

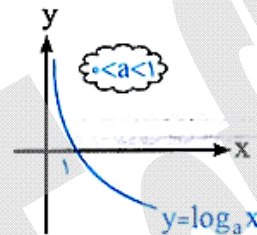
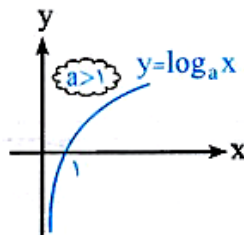
نکته ۱: دانلود از سایت سوال سرا

تابع نمایی  $y = a^x$  را با شرط  $a > 0$  و  $a \neq 1$  یک تابع نمایی می نامیم. مثلاً  $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$  یک تابع نمایی است. نمودار تابع نمایی به یکی از دو صورت زیر است:



نکته ۲:

تابع  $y = \log_a x$  را با شرط  $a > 0$ ،  $a \neq 1$  و  $x > 0$  یک تابع لگاریتمی می گوئیم. نمودار تابع لگاریتمی به یکی از دو صورت زیر است:



قوانین اولیه لگاریتم:

این قوانین پایه و اساس حل مسائل لگاریتم هستند. بدون دانستن آنها با تقریب خوبی در این مبحث کاری از پیش نمی برید:

- ۱  $\log_b a = c \xleftrightarrow[\text{به نمایی و برعکس}]{\text{تبدیل تابع لگاریتمی}} a = b^c$       ۲  $\log_a a = 1$       ۳  $\log_a 1 = 0$
- ۴  $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$       ۵  $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$       ۶  $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

۱  $\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y} \Rightarrow \log_y x \times \log_z y = \log_z x \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \log_y x = \frac{1}{\log_x y}$

مثلاً:  $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} \Rightarrow \log_2 3 \times \log_5 2 = \log_5 3$  ;  $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

۲  $a^{k \log_c b} = b^{k \log_c a}$       مثلاً:  $2^{3 \log_3 5} = 5^{3 \log_3 2} = 5^2 = 25$

نکته ۳:

دامنه ی توابع لگاریتمی به صورت  $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$  از اشتراک سه شرط  $g(x) > 0$ ،  $h(x) > 0$  و  $h(x) \neq 1$  به دست می آید. البته باید دامنه های توابع  $g$  و  $h$  را نیز مدنظر قرار داد.

نکته ۴:

برای حل معادلات لگاریتمی معمولاً پس از ساده کردن به یکی از دو حالت زیر می رسیم:

- ۱  $\log_c a = \log_c b \xrightarrow[\text{داخل لگاریتم ها با هم برابرند}]{\text{در این حالت عبارات}} a = b$       ۲  $\log_c a = b \xrightarrow[\text{استفاده می کنیم}]{\text{از تعریف لگاریتم}} a = c^b$

نکته ۵:

در حل برخی از معادلات نمایی پس از ساده کردن و رسیدن به معادله  $a^x = b$ ، برای محاسبه‌ی جواب لازم است از دو طرف تساوی، لگاریتم در مبنای  $a$  بگیریم:

$$a^x = b \Rightarrow \log_a a^x = \log_a b \Rightarrow x \log_a a = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b$$

نکته ۶:

برای حل نامعادلات نمایی به شکل  $a^x < b$  که در آن  $a$  و  $b$  مثبت‌اند، با توجه به اطلاعات مسأله، از دو طرف، لگاریتم در مبنای  $k$  می‌گیریم. داریم:

۱) اگر  $k > 1$  جهت نامعادله، عوض نمی‌شود. ۲) اگر  $0 < k < 1$  جهت نامعادله عوض می‌شود.

نکته ۷:

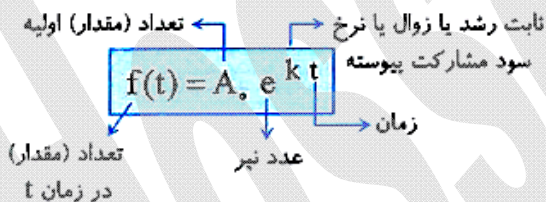
برای حل نامعادلات لگاریتمی به شکل  $\log_b A < c$  دو حالت زیر را داریم:

۱) اگر  $b > 1$ ، آن‌گاه  $A < b^c$ . مثلاً:  $\log_3 x < 5 \xrightarrow{3>1} x < 3^5$

۲) اگر  $0 < b < 1$ ، آن‌گاه  $A > b^c$ . مثلاً:  $\log_{\frac{1}{2}} x < 2 \Rightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

نکته ۸:

توابع رشد و زوال توابعی نمایی هستند که در آن تابع به صورت زیر بیان می‌شود:



روشن حل: در این مسائل اگر زمان  $(t)$  یا  $k$  (ضریب رشد یا زوال) مجهول باشند، از دو طرف معادله  $\ln$  می‌گیریم.

به سوال کنکور تجربی ۹۳ دقت کنید:

اگر نمودار تابع  $f(x) = a(b)^x - 1$ ، از دو نقطه‌ی  $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  $B(1, 11)$  بگذرد،  $f(-1)$  کدام است؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in f \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow a\left(b^{-\frac{1}{2}}\right) - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b} \quad (*)$$

$$(1, 11) \in f \Rightarrow f(1) = 11 \Rightarrow ab - 1 = 11 \Rightarrow ab = 12 \xrightarrow{(*)} \frac{3}{2}\sqrt{b} \times b = 12 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} \times b = \frac{12}{\frac{3}{2}} \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان } \frac{2}{3} \text{ می‌رسانیم.}} \left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \xrightarrow{(*)} a = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$$

پس  $f(x) = 3(4)^x - 1$  و لذا داریم:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

به سوال کنکور تجربی ۹۰ دقت کنید:

اگر  $\log 5 = 2k$  باشد،  $\log \sqrt[3]{1/6}$  کدام است؟

$$1 - k \text{ (۴)} \quad 1 - 2k \text{ (۳)} \quad 2 - 5k \text{ (۲)} \quad 1 - 4k \text{ (۱)}$$

$$\log 5 = 1 - \log 2 \quad \text{یا} \quad \log 2 = 1 - \log 5$$

نکته: به کمک قوانین لگاریتم می‌توان نشان داد:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log \left(\frac{1/6}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 1/6 - \log 10) = \frac{1}{3} (\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) \xrightarrow{\text{نکته}} \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1)$$

$$\xrightarrow{\log 5 = 2k} \frac{1}{3} (4(1 - 2k) - 1) = \frac{1}{3} (4 - 8k - 1) = \frac{3 - 8k}{3} = \frac{1 - 4k}{1} = 1 - 4k$$

به سوال زیر دقت کنید:

اگر  $\log_{\sqrt{e}} 4 = k$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{e}} 5$  کدام است؟

$$\frac{1-k}{k} \text{ (۴)} \quad \frac{k-1}{k} \text{ (۳)} \quad \frac{k}{1-k} \text{ (۲)} \quad \frac{1+k}{k} \text{ (۱)}$$

$$\log_{\sqrt{e}} 4 = k \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 20 = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} (4 \times 5) = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 4 + \log_{\sqrt{e}} 5 = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 5 = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$$

به سوال کنکور تجربی ۹۳ دقت کنید:

از تساوی  $\log_x (x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه‌ی ۲، کدام است؟

$$2 \text{ (۴)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -1 \text{ (۱)}$$

$$\log_x (x^2 + 4) = 1 + \log_x 5 \xrightarrow{\text{چون تمام مبنای لگاریتم‌ها } x \text{ است، ۱ را به صورت } \log_x x \text{ می‌نویسیم.}} \log_x (x^2 + 4) = \log_x x + \log_x 5$$

$$\Rightarrow \log_x (x^2 + 4) = \log_x 5x \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \text{ زیرا مبنای لگاریتم نمی‌تواند ۱ باشد.} \\ x = 4 \Rightarrow \log_4 x = \log_4 4 = \log_4 2^2 = 2 \end{cases}$$



به سوال زیر دقت کنید:

مجموع جواب‌های معادله  $|e^x - 1| = |3 - 2e^x|$  کدام است؟

$\ln \frac{4}{3}$  (۴)

$\ln 2$  (۳)

$\ln \frac{2}{3}$  (۲)

$\ln \frac{4}{3}$  (۱)

با توجه به فرمول  $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$  داریم:

$$|e^x - 1| = |3 - 2e^x| \Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 3 - 2e^x \Rightarrow 3e^x = 4 \Rightarrow e^x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\ln} \ln e^x = \ln \frac{4}{3} \Rightarrow x \ln e = \ln \frac{4}{3} \Rightarrow x = \ln \frac{4}{3} \\ e^x - 1 = -(3 - 2e^x) \Rightarrow e^x - 1 = -3 + 2e^x \Rightarrow e^x = 2 \xrightarrow{\ln} \ln e^x = \ln 2 \Rightarrow x \ln e = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \ln \frac{4}{3} + \ln 2 = \ln \left( \frac{4}{3} \times 2 \right) = \ln \frac{8}{3}$$

به سوال کنکور تجربی ۸۶ دقت کنید:

دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  به کدام صورت است؟

$[2, 10]$  (۲)

$(1, 2]$  (۱)

$(1, 11]$  (۴)

$[1, 11]$  (۳)

در تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  باید عبارت جلوی لگاریتم، بزرگ‌تر از صفر بوده و عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. داریم:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 & (1) \\ 1 - \log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log_{10}(x-1) \leq 1 \xrightarrow{10 > 1} x-1 \leq 10^1 \Rightarrow x \leq 11 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 < x \leq 11$$

به سوال کنکور تجربی ۹۱ دقت کنید:

تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت، بعد از  $t$  دقیقه به صورت  $f(t) = Ae^{kt}$  است. اگر تعداد این باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه‌ی بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد، در دقیقه‌ی سی‌ام تعداد آن‌ها کدام است؟

$7200$  (۴)

$6400$  (۳)

$5600$  (۲)

$4800$  (۱)

$$f(20) = Ae^{20k} \xrightarrow[A=800]{f(20)=3200} 3200 = 800e^{20k} \xrightarrow{+800} 4 = e^{20k} \quad (*)$$

$$f(30) = Ae^{30k} \xrightarrow[A=800]{} 800(e^{20k})^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{(*)} 800(4)^{\frac{3}{2}} = 800(2^2)^{\frac{3}{2}} = 800(2^3) = 6400$$

موفق باشید.

@see\_i