کاربرد مشتق:

قضیه: برای اینکه بفهمیم تابع $f(x)$ در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است باید $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مسلماً برای اینکه بفهمیم $f'(x)$ در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال۱) اگر تابع $y = \frac{x^۳}{۴} + (m-۳)x^۲ + ۸x + ۶$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را تعیین کنید.

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{۳x^۲}{۴} + ۲(m-۳)x + ۸ > ۰$$

$$\underrightarrow{\Delta < ۰} \qquad ۴(m-۳)^۲ - ۴(\frac{۳}{۴})۸ < ۰ \ \Rightarrow (m-۳)^۲ < ۶$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۶} < m-۳ < \sqrt{۶} \ \rightarrow \ ۳-\sqrt{۶} < m < ۳+\sqrt{۶}$$

مثال ۲) در چه بازه‌ای نمودار تابع $y = x\ln|x|$ نزولی است؟ (مشابه ۹۴ خارج)

پاسخ: کتاب درسی سال چهارم یک نکته مهم را اثبات کرده است:

$$(\ln|x|)' = \frac{۱}{x}$$

در این مثال:

$$y' = \ln|x| + x(\frac{۱}{x}) = \ln|x| + ۱ < ۰$$

$$\Rightarrow \ \ln|x| < -۱ \rightarrow |x| < e^{-۱} \rightarrow \frac{-۱}{e} < x < \frac{۱}{e}$$

مثال ۳) تابع $f(x)=\begin{cases} ۵x^{۲}+x & x\geq ۱ \\ x^{۳}+۷ & x<۱ \end{cases}$ از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟

در توابع چند ضابطه کمی قضیه پیچیده است. ابتدا باید وضعیت صعود و نزول ضابطه‌ها را تعیین کنید.

(با توجه به $x\geq ۱$) $\qquad (۵x^{۲}+x)'=۱۰x+۱>۰$

$$(x^{۳}+۷)'=۳x^{۲}>۰$$

اما هنوز مسئله حل نشده است.

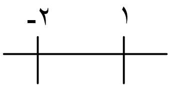
باید $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=۸$ را با $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=۶$ مقایسه کنید. متوجه می‌شویم که تابع f(x) در نقطه x=۱ از چپ به راست نزولی است. لذا تابع f(x) صعودی نیست.

بلکه ابتدا صعود می‌کند سپس نزول می‌کند بعد مجدداً صعود می‌کند. همان نقطه x=۱ تمام کار را خراب کرد.

فرصت را برای قضیه زیر مغتنم می‌شماریم:

قضیه: مجانب‌های قائم تمام بازی را خراب می‌کنند. هم صعودی نزولی بودن و هم جهت تقعر. در این مواقع باید دامنه را بخش‌بندی کنید.

مثال ۴) وضعیت صعودی نزولی بودن تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+x-۶}{x^{۲}+x-۲}$ را بررسی کنید.

پاسخ: دقت کنید تابع دو مجانب x=۱ و x = -۲ دارد. لذا باید دامنه را به صورت 

بخش‌بندی کنیم.

حال از f(x) مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{4(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}\to$$

	$-\frac{1}{2}$	
- ↘	0	+ ↗

بنابراین جواب نهایی این است:

	-2		$-\frac{1}{2}$		1	
- ↘		- ↘		+ ↗		+ ↗

دقت کنید مثلاً f(x) در بازه‌ی $(-\infty,-\frac{1}{2})$ نزولی نیست. زیرا مجانب x=-۲ را دارد.

ضمناً حتی اینکه بگوییم f(x) در $(-\infty,-2)\cup(-2,-\frac{1}{2})$ نزولی است نیز غلط می‌باشد.

تنها بیان صحیح برای این قسمت این است: f(x) در بازه‌های $(-\infty$ و $-2)$ و $(-2,-\frac{1}{2})$ نزولی است.

قضیه: برای تعیین جهت تقعر تابع f(x) باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال ۵) تابع $f(x)=x^3e^{-x}$ در چه بازه‌ای صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است (ریاضی ۹۳).

پاسخ: یعنی بین $f'(x)>0$ و $f''(x)>0$ باید اشتراک بگیریم:

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2(3-x)e^{-x}>0$$

$$\xrightarrow{x^2e^{-x}>0} 3-x>0 \to 3>x$$

و به علاوه:

$$f''(x)=6xe^{-x}-3x^2e^{-x}-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=$$

$$x^3e^{-x}-6x^2e^{-x}+6xe^{-x}=xe^{-x}(x^2-6x+6)>0$$

	0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
-		+		-		+

اشتراک موردنظر می‌شود: $(0,3-\sqrt{3})$

مثال ۶) تقعر نمودار $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۹}{x^{۲}+۱۲}$ در بازه‌ی (a,b) رو به بالاست. بیشترین مقدار b-a را بیابید.

(ریاضی ۸۸)

پاسخ: باید $f''(x)>۰$ را حل کنیم.

$$f'(x)=\frac{۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}},f''(x)=\frac{۶(۱۲-۳x^{۲})}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}>۰$$

$$\xrightarrow{x^{۲}+۱۲>۰} ۱۲-۳x^{۲}>۰\to x^{۲}<۴\to -۲x<۲$$

بنابراین $(a,b)=(-۲,۲)$ است. جواب مسئله عدد ۴ است.

برای پیدا کردن بیشترین یا کمترین مقدار تابع f(x) در بازه‌ی $[x_{۱},x_{۲}]$ کافی است ریشه‌های $f'(x)$ و نقاط ابتدا و انتهای بازه را در f(x) عددگذاری کنیم.

مثال ۷) بیشترین مقدار تابع $y=x^{۳}-۳x$ در بازه‌ی [۲ و ۰] را بیابید.

پاسخ: ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰\xrightarrow{\text{ریشه ها}}\begin{matrix}x=۱\\x=-۱\end{matrix}$$

$x=-۱$ در بازه نیست. پس قبول نیست.

حال عددهای ۲ و ۱ و ۰ =x را عددگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&f(۰)=۰\\&f(۱)=-۲\\&f(۲)=۸-۶=۲\end{aligned}$$

لذا بیشترین مقدار f(x) برابر ۲ است.

مثال ۸) کمترین مقدار برای مجموع ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+(a^{۳}+a^{۲}+۲a)x+۳=۰$

وقتی $-۱ \le a < ۲$ است را بیابید.

پاسخ: مجموع ریشه‌ها می‌شود: $f(a) = -\frac{a^۳ + a^۲ + ۲a}{a}$

یا همانا $f(a) = -(a^۲ + a + ۲)$. داریم:

$$f'(a) = -(۲a + ۱) = ۰ \rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

حال باید $a = -\frac{۱}{۲}$ و $a = -۱$ را عددگذاری کنیم (دقت کنید که a=۲ اصلاً در بازه نیست).

$$f(-۱) = -(۱ - ۱ + ۲) = -۲$$
$$f(-\frac{۱}{۲}) = -(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۲) = -\frac{۷}{۴}$$

لذا کمترین مقدار ۲- است و به ازاء a=-۱ اتخاذ می‌گردد.

نکته‌ی این مسئله این است که باید a=-۱ را عددگذاری کرده و مقدار Δ را حساب کنیم:

$$-x^۲ - ۲x + ۳ = ۰ \;\rightarrow\; \Delta > ۰$$

لذا جواب قابل قبول است.

مثال ۹) بیشترین فاصله منحنی $y = x - \sqrt{۱ - x^۲}$ از محور xها را بیابید. (ریاضی عمومی – دشوار دشوارتر – مسئله ۲۴۰)

پاسخ: بیشترین فاصله از محور xها یعنی $Max|f(x)|$ برای این کار $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = ۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{\sqrt{۱ - x^۲} + x}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱ - x^۲} = -x \rightarrow ۱ - x^۲ = x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۱ \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اول $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ قابل قبول نیست. ($\leftarrow$ درسنامه معادلات جبری)

از طرفی دامنه f(x) بازه‌ی [۱و۱-] است.

پس اعدادی که باید در f(x) مقداردهی شوند: $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x=-1$ است:

$$f(-1)=-1$$
$$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$$
$$f(1)=1$$

که اگر قدرمطلق بگیریم بزرگترین $\sqrt{2}$است.

مثال ۱۰) اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=x^3-(m+2)x^2+3x$ همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این تابع در چه بازه‌ای قرار دارد؟ (۹۴ تجربی)

پاسخ: چون تابع همواره صعودی است داریم:

$$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3 \xrightarrow{\Delta<0}$$
$$4(m+2)^2-36<0 \rightarrow (m+2)^2<9$$
$$\rightarrow -3<m+2<3 \rightarrow -5<m<1$$

نقطه عطف ریشه‌ی $f''(x)$ است:

$$f''(x)=0 \rightarrow 6x-2(m+2)=0 \rightarrow$$
$$x=\frac{m+2}{3}$$

بنابراین

$$5<m<1 \rightarrow -3<m+2<3 \rightarrow -1<\frac{m+2}{3}<1$$

مثال ۱۱) فاصله نزدیک‌ترین نقطه از منحنی به معادله‌ی $y^{۲} = ۲x - ۵$ تا نقطه $A(۴,۰)$ را بیابید (کارشناسی ناپیوسته- مهندسی معماری ۸۷).

فرض کنید نقطه موردنظر $B(x,y)$ باشد. فاصله A از B برابر است با

$$|AB| = \sqrt{(x-۴)^{۲} + y^{۲}}$$

با توجه به اینکه $y^{۲} = ۲x - ۵$ نتیجه می‌گیریم:

$$|AB| = \sqrt{(x-۴)^{۲} + ۲x - ۵} = \sqrt{x^{۲} - ۶x + ۱۱}$$

در حقیقت تابع ما $f(x) = \sqrt{x^{۲} - ۶x + ۱۱}$ است.

دامنه $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. لذا بازه‌ای نداریم.

ریشه‌ی $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{۲x - ۶}{۲\sqrt{x^{۲} - ۶x + ۱۱}} = ۰ \rightarrow x = ۳$$

و بنابراین:

$$f(۳) = \sqrt{۹ - ۱۲ + ۱۱} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

کمترین فاصله موردنظر است.

سرافراز باشید