

کاربرد مشتق:

قضیه: برای اینکه بفهمیم تابع $f(x)$ در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است باید $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مسلماً برای اینکه بفهمیم $f'(x)$ در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال (۱) اگر تابع $y = \frac{x^3}{4} + (m-3)x^2 + 8x + 6$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را تعیین کنید.

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4} + 2(m-3)x + 8 > 0$$

$$\Delta < 0: \quad 4(m-3)^2 - 4\left(\frac{3}{4}\right)8 < 0 \Rightarrow (m-3)^2 < 6$$

$$\Rightarrow -\sqrt{6} < m-3 < \sqrt{6} \rightarrow 3-\sqrt{6} < m < 3+\sqrt{6}$$

مثال (۲) در چه بازه‌ای نمودار تابع $y = x \ln |x|$ نزولی است؟ (مشابه ۹۴ خارج)

پاسخ: کتاب درسی سال چهارم یک نکته مهم را اثبات کرده است:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

در این مثال:

$$y' = \ln |x| + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln |x| + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \ln |x| < -1 \rightarrow |x| < e^{-1} \rightarrow \frac{-1}{e} < x < \frac{1}{e}$$

مثال ۳) تابع $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x & x \geq 1 \\ x^3 + 7 & x < 1 \end{cases}$ از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟

در توابع چند ضابطه کمی قضیه پیچیده است. ابتدا باید وضعیت صعود و نزول ضابطه‌ها را تعیین کنید.

$$(5x^2 + x)' = 10x + 1 > 0 \quad (x \geq 1 \text{ به توجه به } 1)$$

$$(x^3 + 7)' = 3x^2 > 0$$

اما هنوز مسئله حل نشده است.

باید $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 8$ را با $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 6$ مقایسه کنید. متوجه می‌شویم که تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$

از چپ به راست نزولی است. لذا تابع $f(x)$ صعودی نیست.

بلکه ابتدا صعود می‌کند سپس نزول می‌کند بعد مجدداً صعود می‌کند. همان نقطه $x=1$ تمام کار را خراب کرد.

فرصت را برای قضیه زیر مغتنم می‌شماریم:

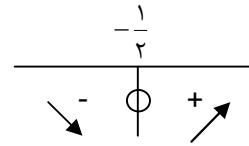
قضیه: مجانب‌های قائم تمام بازی را خراب می‌کنند. هم صعودی نزولی بودن و هم جهت تقعر. در این مواقع باید دامنه را بخش‌بندی کنید.

مثال ۴) وضعیت صعودی نزولی بودن تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}$ را بررسی کنید.

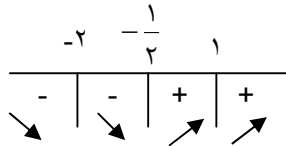
پاسخ: دقت کنید تابع دو مجانب $x=1$ و $x=-2$ دارد. لذا باید دامنه را به صورت $\begin{array}{c} 1 \\ | \\ -2 \end{array}$ بخش‌بندی کنیم.

حال از $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{4(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \rightarrow$$



بنابراین جواب نهایی این است:



دقت کنید مثلاً $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty, -\frac{1}{2})$ نزولی نیست. زیرا مجانب $x=-2$ را دارد.

ضمناً حتی اینکه بگوییم $f(x)$ در $(-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2})$ نزولی است نیز غلط می‌باشد.

تنها بیان صحیح برای این قسمت این است: $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(-\frac{1}{2}, -2)$ نزولی است.

قضیه: برای تعیین جهت تقعر تابع $f(x)$ باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال ۵) تابع $f(x) = x^3 e^{-x}$ در چه بازه‌ای صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است (ریاضی ۹۳).

پاسخ: یعنی بین $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$ باید اشتراک بگیریم:

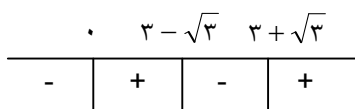
$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x} > 0$$

$$\underline{x^2 e^{-x} > 0} \quad 3-x > 0 \rightarrow 3 > x$$

و به علاوه:

$$f''(x) = 6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} =$$

$$x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6x e^{-x} = x e^{-x}(x^2 - 6x + 6) > 0$$



اشتراک موردنظر می‌شود: $(0, 3 - \sqrt{3})$

مثال ۶) تقعر نمودار $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 12}$ در بازه‌ی (a, b) رو به بالاست. بیشترین مقدار $b-a$ را بیابید.

(ریاضی ۸۸)

پاسخ: باید $f''(x) > 0$ را حل کنیم.

$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 12)^2}, f''(x) = \frac{6(12 - 3x^2)}{(x^2 + 12)^3} > 0.$$

$$\underline{x^2 + 12 > 0} \quad 12 - 3x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 4 \rightarrow -2 < x < 2$$

بنابراین $(a, b) = (-2, 2)$ است. جواب مسئله عدد ۴ است.

برای پیدا کردن بیشترین یا کمترین مقدار تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ کافی است ریشه‌های $f'(x)$ و نقاط ابتدا و انتهای بازه را در $f(x)$ عددگذاری کنیم.

مثال ۷) بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x$ در بازه‌ی $[0, 2]$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$$

$x = -1$ در بازه نیست. پس قبول نیست.

حال عددهای ۰ و ۱ و ۲ را عددگذاری می‌کنیم.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = -2$$

$$f(2) = 8 - 6 = 2$$

لذا بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۲ است.

مثال ۸) کمترین مقدار برای مجموع ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + (a^3 + a^2 + 2a)x + 3 = 0$

وقتی $2 > a \geq -1$ است را بیابید.

$$f(a) = -\frac{a^3 + a^2 + 2a}{a} \quad \text{پاسخ: مجموع ریشه‌ها می‌شود:}$$

یا همانا $f(a) = -(a^2 + a + 2)$. داریم:

$$f'(a) = -(2a + 1) = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

حال باید $a = -\frac{1}{2}$ و $a = -1$ را عددگذاری کنیم (دقت کنید که $a=2$ اصلاً در بازه نیست).

$$f(-1) = -(1 - 1 + 2) = -2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{7}{4}$$

لذا کمترین مقدار -2 است و به ازاء $a=-1$ اتخاذ می‌گردد.

نکته‌ی این مسئله این است که باید $a=-1$ را عددگذاری کرده و مقدار Δ را حساب کنیم:

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow \Delta > 0$$

لذا جواب قابل قبول است.

مثال ۹) بیشترین فاصله منحنی $y = x - \sqrt{1-x^2}$ از محور x ها را بیابید. (ریاضی عمومی - دشوار

دشوارتر - مسئله ۲۴۰)

پاسخ: بیشترین فاصله از محور x ها یعنی $\text{Max} |f(x)|$ برای این کار $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \rightarrow 1-x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اول $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ قابل قبول نیست. (← درسنامه معادلات جبری)

از طرفی دامنه $f(x)$ بازه $[-1, 1]$ است.

پس اعدادی که باید در $f(x)$ مقداردهی شوند: $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x = -1$ است:

$$f(-1) = -1$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$f(1) = 1$$

که اگر قدرمطلق بگیریم بزرگترین $\sqrt{2}$ است.

مثال ۱۰) اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند، آن‌گاه

مجموعه‌ی طول نقاط عطف این تابع در چه بازه‌ای قرار دارد؟ (۹۴ تجربی)

پاسخ: چون تابع همواره صعودی است داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3 \xrightarrow{\Delta < 0}$$

$$4(m+2)^2 - 36 < 0 \rightarrow (m+2)^2 < 9$$

$$\rightarrow -3 < m+2 < 3 \rightarrow -5 < m < 1$$

نقطه عطف ریشه‌ی $f''(x)$ است:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 2(m+2) = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{m+2}{3}$$

بنابراین

$$-5 < m < 1 \rightarrow -3 < m+2 < 3 \rightarrow -1 < \frac{m+2}{3} < 1$$

مثال ۱۱) فاصله نزدیک‌ترین نقطه از منحنی به معادله‌ی $y^2 = 2x - 5$ تا نقطه $A(4, 0)$ را بیابید
(کارشناسی ناپیوسته - مهندسی معماری ۸۷).

فرض کنید نقطه موردنظر $B(x, y)$ باشد. فاصله A از B برابر است با

$$|AB| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

با توجه به اینکه $y^2 = 2x - 5$ نتیجه می‌گیریم:

$$|AB| = \sqrt{(x-4)^2 + 2x - 5} = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$$

در حقیقت تابع ما $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$ است.

دامنه $f(x)$ برابر \mathbb{R} است. لذا بازه‌ای نداریم.

ریشه‌ی $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 11}} = 0 \rightarrow x = 3$$

و بنابراین:

$$f(3) = \sqrt{9 - 12 + 11} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

کمترین فاصله موردنظر است.

سرافراز باشید